

THESIS / THÈSE

MASTER EN SCIENCES MATHÉMATIQUES

Loop Quantum Gravity

Franco, Nicolas

Award date:
2006

[Link to publication](#)

General rights

Copyright and moral rights for the publications made accessible in the public portal are retained by the authors and/or other copyright owners and it is a condition of accessing publications that users recognise and abide by the legal requirements associated with these rights.

- Users may download and print one copy of any publication from the public portal for the purpose of private study or research.
- You may not further distribute the material or use it for any profit-making activity or commercial gain
- You may freely distribute the URL identifying the publication in the public portal ?

Take down policy

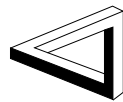
If you believe that this document breaches copyright please contact us providing details, and we will remove access to the work immediately and investigate your claim.



Faculté des Sciences
Département de Mathématique

Rempart de la Vierge, 8
B - 5000 Namur (Belgique)

Loop Quantum Gravity



Mémoire présenté pour l'obtention
du grade de
Licencié en Sciences Mathématiques
par

Franco Nicolas

Directeur : LAMBERT Dominique

Promoteur : LEMAÎTRE Anne

Année Académique 2005-2006

Résumé :

La Gravité Quantique à Boucles, également désignée sous le simple nom de Gravité Quantique, est une tentative d'unification des théories de la Relativité Générale et de la Mécanique Quantique. Elle fut introduite il y a maintenant une vingtaine d'années. La Gravité Quantique à Boucles propose une théorie quantique de la gravitation sur des espaces de type Lorentzien à quatre dimensions qui soit non-perturbative, sans présence de trame de fond et mathématiquement bien fondée.

Dans cet ouvrage, nous présentons une introduction de type pédagogique de la Gravité Quantique à Boucles. Nous mettons en évidence les notions physiques de base relatives à la théorie ainsi que la structure mathématique fondamentale du formalisme. La théorie est présentée sous ses deux aspects, la représentation dite en terme de boucles et la représentation dite en terme de connexion. L'accent est également mis sur les différentes relations existant entre ces deux représentations.

Nous terminons par la description des différentes étapes historiques ayant mené du formalisme ADM de la Relativité Générale à l'introduction des nouvelles variables d'Ashtekar.

Abstract :

Loop Quantum Gravity, also called Quantum Gravity, is an attempt to unify General Relativity and Quantum Mechanics which has now been developed for twenty years. The aim of the Loop Quantum Gravity is to construct a mathematically rigorous background independent non-perturbative quantum theory for Lorentzian General Relativity on four dimensional manifolds.

In this work, we present a pedagogical introduction to Loop Quantum Gravity. We emphasize the physical basic notions and interpretations of the theory as well as the fundamental mathematical structure of the formalism. The theory is described on its two sides, the so-called loop representation and the so-called connection representation, and the relation between both representations is highlighted. We also give a sketch of the introduction of Ashtekar new variables in the frame of the ADM formalism of General Relativity.

Table des matières

Introduction	iv
Principales Notations	vi
1 Relativité Générale et Mécanique Quantique	1
1.1 Le concept de modèle physique	1
1.2 La Relativité Générale et l'absence de trame de fond d'espace-temps	3
1.3 La Mécanique Quantique et le phénomène de quantification canonique	6
1.4 Difficultés et définition de la Gravité Quantique	9
1.5 Cordes ou boucles ?	11
2 Les Outils de la Gravité Quantique à Boucles	14
2.1 Introduction à la géométrie différentielle	14
2.2 Groupes et algèbres de Lie	18
2.3 Espaces fibrés	21
2.4 Connexions et holonomies	24
2.5 Formalisme Hamiltonien avec contraintes	29
2.6 C^* -algèbre et triplets de Gel'fand	31
3 Le Formalisme de la Gravité Quantique à Boucles	35
3.1 Variables et équations de contrainte	35
3.2 La représentation algébrique	38
3.3 La représentation différentielle	46
3.4 L'équivalence des deux formalismes	55
4 L'Origine des Equations de Contrainte	59
4.1 La décomposition de Gauss-Codazzi de l'espace-temps	59
4.2 Le formalisme ADM	64
4.3 L'introduction des nouvelles variables	67
Conclusion	78
Bibliographie	80

Introduction

La Gravité Quantique à Boucles - ou Loop Quantum Gravity, Canonical Quantum Gravity, Quantum Geometry, Quantum General Relativity, Quantum Spin Dynamics ou tout simplement Quantum Gravity - est une tentative d'unification des théories de la Relativité Générale et de la Mécanique Quantique.

L'abondance de noms divers pour cette théorie vient du fait que celle-ci a subi beaucoup de changements et vu le jour sous nombre de versions différentes. Nous présenterons ici la, ou plutôt les versions les plus courantes, et nous nous limiterons au terme de Gravité Quantique à Boucles, voire Gravité Quantique dans le cas où nous voudrions parler des théories d'unification de la Relativité Générale et de la Mécanique Quantique en général.

L'objectif de cet ouvrage est de présenter de façon synthétique le formalisme de cette théorie, tout en rappelant la plupart des notions nécessaires à sa compréhension.

Nous nous limiterons cependant à une présentation plus "historique" que exhaustive, dans le sens que nous nous attacherons sur l'origine de cette théorie, sur certaines étapes importantes, comme l'introduction des "boucles" justifiant son nom, et sur la base rigoureuse de son formalisme, mais nous ne présenterons pas, du moins nous ne développerons pas, les résultats pratiques passés ou récents.

Notre plan de travail sera le suivant. Le premier chapitre sera une sorte d'introduction heuristique aux théories de la Relativité Générale, de la Mécanique Quantique et de la Gravité Quantique à Boucles. Il constituera une sorte de réflexion permettant au lecteur de découvrir la nécessité et surtout la difficulté du procédé d'unification, ainsi que la nature physique cachée de la Gravité Quantique à Boucles.

Le second chapitre constituera un rappel des différentes notions nécessaires à la bonne compréhension du reste de l'ouvrage. Il va de soi que la quantité de notions pouvant être exposées est soumise à des contraintes spatiales et temporelles. Nous nous limiterons donc à présenter les théories probablement les plus pertinentes, et renverrons le lecteur à des ouvrages de référence pour les concepts non présentés.

Le troisième chapitre sera le chapitre principal de cet ouvrage. Il consistera en l'exposition de la théorie de la Gravité Quantique à Boucles sous ses deux formes principales : la représentation algébrique et la représentation différentielle. Ces deux formalismes seront présentés sur un même pied d'égalité, et nous terminerons par

la mise en place du "pont" permettant de relier les deux formalismes et de prouver leur équivalence

Le dernier chapitre parlera de l'origine de la Gravité Quantique à Boucles, et plus précisément de la détermination de ses équations à partir de la théorie de la Relativité Générale. Cette façon de procéder peut paraître peu orthodoxe, mais nous la justifions par deux raisons. Premièrement, le processus permettant de déterminer les équations de la Gravité Quantique à Boucles à partir de celles de la Relativité Générale se base sur une hypothèse plus forte que celle nécessaire à l'établissement du formalisme de la théorie. En conséquence, la théorie de la Gravité Quantique à Boucles semble plus générale que sa méthode de construction à partir d'une autre théorie, et peut donc être exposée indépendamment. Deuxièmement, là où notre troisième chapitre nécessite des connaissances mathématiques assez importantes, il est préférable de posséder de bonnes connaissances en physique pour bien rentrer dans la lecture de chapitre suivant. Mathématiciens et physiciens devraient donc y retrouver chacun leur partie de prédilection.

L'ouvrage classiquement référencé pour la présentation de la théorie est celui de Carlo Rovelli [1]. Néanmoins, bien que cet ouvrage contienne des idées et des interprétations physiques très intéressantes, la précision de la présentation du formalisme y est peu présente, et nous invitons le lecteur soucieux des détails à se référer à l'ouvrage le plus important de Thomas Thiemann [2].

Signalons qu'il existe un ouvrage tout récent, dont une prépublication est donnée dans [3], possédant des objectifs fort comparables à notre ouvrage. Cependant, la présentation de la théorie y est davantage poussée vers son formalisme actuel et ses recherches, plutôt que sur ses concepts et son historique. Cet ouvrage constitue donc une suite particulièrement intéressante à ce que nous allons présenter.

Je tiens tout naturellement à remercier mon directeur Dominique Lambert qui a su me guider et répondre de façon pertinente à mes différentes questions, ainsi que mon promoteur Anne Lemaître pour ses conseils et ses relectures rigoureuses.

Principales Notations

Voici un résumé des principales notations utilisées dans cet ouvrage. Nous attirons l'attention sur le choix de notation utilisé pour la différentiation des indices spatiaux et des indices internes. Lorsque besoin il y aura, les lettres du début de l'alphabet $a, b, c, \dots$ seront utilisées pour désigner des indices spatiaux, tandis que les lettres du milieu de l'alphabet $i, j, k, \dots$ seront utilisées pour désigner des indices à valeur dans un espace interne. Cette convention correspond à celle généralement utilisée en géométrie quantique, mais se trouve être l'opposée de celle généralement utilisée en physique des particules.

- $a, b, c, \dots$: Indices spatiaux prenant les valeurs 1,2 et 3.
- $\alpha, \beta, \gamma, \dots$: Indices spatiaux prenant les valeurs 0,1,2 et 3.
- α : Multiboucle continue, orientée, analytique par morceaux plongée dans σ .
- $A, A_\mu, A_{\mu j}^i$: Connexion (potentiel vecteur).
- A_a^j : $SU(2)$ -connexion réelle.
- A^g : Connexion résultante d'une transformation de jauge g .
- $A(p)$: Holonomie de la connexion A le long d'un chemin p .
- $\mathcal{A}$: Espace des connexions *smooth*.
- $\overline{\mathcal{A}}$: Espace des connexions distributionnelles.
- $\overline{\mathcal{A}}/\overline{\mathcal{G}}$: Espace des connexions distributionnelles modulo transformation de jauge.
- $b(c)$: Point initial de la courbe c .
- β : Paramètre d'Immirzi.
- c : Courbe continue, orientée, analytique par morceaux plongée dans σ .
- $C(X)$: Ensemble des fonctions continues sur X .
- $Cyl(\overline{\mathcal{X}})$: Ensemble des fonctions cylindriques.
- $\mathcal{C}$: Ensemble des courbes sur σ . Espace de configuration.
- d_ρ : Dimension de la représentation ρ .
- D : Connexion.
- D_μ : Dérivée covariante.
- $\Delta(A)$: Spectre de la C^* -algèbre A .
- $\sharp$: Composition de courbes. Cardinal d'un ensemble.
- e : Arête orientée d'un graphe γ .

- e_i^a : Champ de triade.
- e_a^i : Champ de cotriade.
- $E(\gamma)$: Ensemble des arêtes d'un graphe γ .
- $\tilde{E}_j^a = \frac{1}{\beta} E_j^a$: Champ électrique.
- (E, M, π) : Fibré d'espace total E , d'espace de base M et de projection π .
- $\epsilon_{ijk} = \delta_{[i}^1 \delta_j^2 \delta_{k]}^3$, où $[\]$ dénote l'antisymétrisation. Les ϵ_{ijk} sont également les constantes de structure de $\mathfrak{su}(2)$.
- $f(c)$: Point final de la courbe c .
- $[f_l]$: Classe d'équivalence de f_l (fonction cylindrique).
- F_p : Fibre associée à p pour un espace fibré.
- $F_{\mu\nu}^j$: Tenseur de courbure.
- $g_{\mu\nu}$: Tenseur de métrique de l'espace Lorentzien à quatre dimensions.
- G_j : Contrainte de Gauss.
- $\mathcal{G}$: Ensemble des transformations de jauge *smooth* relatives à un groupe G .
- $\overline{\mathcal{G}}$: Ensemble des fonctions de σ dans G .
- γ : Graphe orienté plongé dans σ .
- $\Gamma(E)$: Section d'un espace fibré (E, M, π) .
- Γ_a^j : Connexion de spin.
- $\Gamma_{\alpha\beta}^\gamma$: Symboles de Christoffel.
- H : Contrainte Hamiltonienne.
- H_a : Contraintes de difféomorphisme.
- $H_c(A)$: Holonomie de la connexion A le long de la courbe c .
- $\text{Hom}(\mathcal{P}, \text{SU}(2))$: Ensemble des homomorphismes de groupoïde de l'ensemble $\mathcal{P}$ à valeur dans $\text{SU}(2)$.
- $\mathcal{H}, \mathcal{H}_{kin}$: Espace de Hilbert cinématique.
- $\mathcal{H}_0$: Espace de Hilbert invariant par transformation de jauge.
- $\mathcal{H}_{phys}$: Espace de Hilbert de états physiques solutions des contraintes.
- i : Interwiner.
- $i, j, k, \dots$: Indices internes prenant les valeurs 1, 2 et 3.
- $I, J, K, \dots$: Indices internes quelconques.
- j : Spin d'une représentation irréductible non-triviale de $\text{SU}(2)$.
- $K_{\mu\nu}, K_a^j$: Seconde forme fondamentale d'une surface.
- $\kappa = \frac{8\pi G}{c^4}$ où G est la constante de Newton, c la vitesse de la lumière.
- μ_0 : Mesure uniforme d'Ashtekar-Lewandowski.
- N : Lapse function.
- N^μ : Shift functions.
- ∇ : Connexion de Levi-Civita.
- p : Chemin continu, orienté, analytique par morceaux plongé dans σ .
- $\mathcal{P}$: Ensemble des chemins sur σ . Groupoïde correspondant.
- $\phi^* f$: Pullback de f par le difféomorphisme ϕ .
- $\phi_* v$: Pushforward de v par le difféomorphisme ϕ .
- $q_{\mu\nu}, q_{ab}$: Première forme fondamentale d'une surface.
- $\mathcal{Q}$: Groupe des classes d'équivalence de boucles basées en un point x_0 .

- $r(c)$: Image de la courbe c .
- $R_{\mu\nu\rho}^{\sigma}$: Tenseur de courbure de Riemann.
- $R_{\mu\nu}$: Tenseur de Ricci.
- R : Courbure scalaire.
- ρ : Représentation d'un groupe de Lie G .
- ρ_j : Représentation irréductible non-triviale de spin j du groupe $SU(2)$.
- $s = \pm 1$: Signature d'un espace égale au signe du déterminant de la métrique.
- S_0 : Surface de Cauchy.
- $SL(2, \mathbb{C})$: Groupe de Lie des matrices complexes 2×2 de déterminant 1.
- $SO(3)$: Groupe de Lie des matrices réelles 3×3 inversibles orthogonales de déterminant 1.
- $\mathfrak{so}(3)$: Algèbre de Lie associée au groupe de Lie $SO(3)$.
- $SU(2)$: Groupe de Lie des matrices complexes 2×2 inversibles unitaires de déterminant 1.
- $\mathfrak{su}(2)$: Algèbre de Lie associée au groupe de Lie $SU(2)$.
- σ : Surface tridimensionnelle analytique, connexe, orientable, localement compacte et paracompacte.
- σ_i : Matrices de Pauli.
- $T_p(M)$: Espace tangent à M au point p .
- $T_p^*(M)$: Espace cotangent à M au point p .
- $T_*(M)$: Fibré tangent relatif à l'espace M .
- $T^*(M)$: Fibré cotangent relatif à l'espace M .
- v : Sommet d'un graphe γ .
- $V(\gamma)$: Ensemble des sommets d'un graphe γ .
- $W_\alpha(A)$: Wilson loop.
- $\mathcal{X}_l = Hom(l, SU(2))$: Ensemble des homomorphismes du sous-groupe l à valeur dans $SU(2)$.
- $\overline{\mathcal{X}}$: Limite projective.
- $\{\cdot, \cdot\}$: Algèbre de Poisson.
- $[\cdot, \cdot]$: Algèbre de Lie des commutateurs.

Tableau des abréviations :

Abréviation	Nom français	Nom anglais
GR	Relativité Générale	General Relativity
LQG	Gravité Quantique à Boucles	Loop Quantum Gravity
QFT	Théorie Quantique des Champs	Quantum Field Theory
QG	Gravité Quantique	Quantum Gravity
QM	Mécanique Quantique	Quantum Mechanics
ST	Théorie des Cordes	String Theory

Chapitre 1

Discussion sur l'Unification de la Relativité Générale et de la Mécanique Quantique

Ce premier chapitre a pour objectif de présenter un portrait heuristique du problème de l'unification de la théorie de la Relativité Générale avec la théorie de la Mécanique Quantique. En réalité, ce ne sont pas ces deux théories à proprement parler que nous allons tenter d'unifier, mais bien les concepts fondamentaux et révolutionnaires qu'elles comportent. C'est pourquoi nous allons d'abord nous attacher à la description de ces concepts, ainsi qu'aux différentes contradictions survenant lors de leur mise en commun. Nous terminerons ce chapitre par une rapide comparaison de la théorie de la Gravitation Quantique avec une autre théorie d'unification particulièrement connue, la Théorie des Cordes.

1.1 Le concept de modèle physique

Avant de nous lancer dans l'étude des deux plus grandes théories de la physique actuelle, attardons-nous un peu sur notre espace de travail, l'ensemble des modèles de la physique théorique, et sa relation avec le monde qui nous entoure.

Le but de la physique est la description de phénomènes. Elle se réalise par l'étude d'observations réalisées lors d'expériences, et ce en vue de construire des règles permettant par la suite de réaliser un ensemble de prédictions à propos de ces phénomènes. Cependant, une confusion est souvent effectuée entre l'ensemble de ces phénomènes et l'ensemble des règles énoncées. C'est pourquoi nous allons définir deux ensembles bien distincts se retrouvant dans toute modélisation de type physique.

Nous définirons l'ensemble P comme étant l'ensemble des *phénomènes physiques*

observables. Cet ensemble est a priori unique et contient toutes les informations sur les différentes données observables, c'est-à-dire dont il existe une procédure concevable¹ et effective permettant d'obtenir l'information, ainsi que sur leurs différentes interprétations.

L'observation implique ici la nécessité d'utilisation d'instruments de mesure, et donc de repères et d'unités. Notre ensemble P sera donc composé d'un ensemble de nombres et d'opérations de base. Nous pouvons donc le considérer comme une source d'information brut sur l'ensemble des phénomènes.

Attention, cet ensemble n'est pas nécessairement identifiable à un quelconque *réel*. Nous laisserons ces considérations au bon soin de la philosophie.

Cependant, bien qu'il soit possible de distinguer d'éventuelles corrélations au sein de l'ensemble P et tenter ainsi de définir des *lois* physiques, il serait dommage de se passer des théories abstraites des mathématiques pouvant fournir différents modèles qui entreraient en relation avec l'ensemble physique P.

Nous définirons donc l'ensemble G comme étant une *structure mathématique*² *abstraite*, a priori non nécessairement unique, mais sélectionnée suivant des critères précis. Cet ensemble servira de modélisation à notre espace physique. Il sera constitué d'un cadre de référence, de familles d'êtres abstraits munies d'une algèbre, de lois de compositions ainsi que de différentes hypothèses et axiomes.

G sera l'espace d'application des théories mathématiques, mais ne possédera en aucun cas une véritable interprétation physique.

Enfin, nous formulerons l'hypothèse d'une identification formelle entre l'ensemble de modélisation G et l'ensemble physique P.

Il ne faut pas penser, cependant, qu'une telle identification soit aussi simple qu'elle pourrait paraître. Il s'agit ici de définir une correspondance entre les éléments de G et les éléments de P qui ne soit pas nécessairement partout définie, ni fonctionnelle, ni injective, ni surjective.

Le manque de surjectivité d'une telle correspondance n'est pas difficile à imaginer. En effet, si P contient la totalité des éléments observables du monde réel, il n'existe à l'heure actuelle aucune théorie unitaire permettant de rendre compte de la totalité de ces observations. Le caractère non-fonctionnel l'est également. Il est évidemment possible de construire des éléments mathématiques contenant un ensemble d'informations pouvant être associé à plusieurs données dans P.

Le fait qu'une telle correspondance puisse ne pas être partout définie n'est apparu qu'avec les grandes découvertes de la physique du XXème siècle. En effet, il est actuellement nécessaire, au sein de certaines théories, de recourir à des objets

¹Concevable peut ici être pris au sens large et déboucher sur ce que l'on appelle communément une *expérience de pensée*.

²M. Felden, dans [4], définit G comme étant une structure *géométrique*. Nous ne choisirons pas ici cette caractérisation afin de ne pas tomber dans l'éventuelle restriction que pourrait induire ce terme.

mathématiques qui n'ont pas de correspondant physique observable de nos jours. Quant au caractère non-injectif, postulant qu'il puisse exister plusieurs objets mathématiques représentant la même entité, il peut être observé au sein des théories de jauge, que nous étudierons au second chapitre de cet ouvrage.

Les ensembles P et G sont en réalité souvent confondus, mais la nécessité de les distinguer est apparue notamment avec l'émergence de la mécanique quantique et de ses fonctions d'ondes, dont nous reparlerons ultérieurement.

Si nous avons pris le temps de bien définir ces ensembles, c'est pour mieux situer le cadre de notre travail sur l'unification de la Relativité Générale et de la Mécanique Quantique. En effet, en partant du formalisme et des caractéristiques de ces deux théories, c'est dans l'ensemble G exclusivement que nous évoluerons, excepté si nous faisons mention explicite à l'ensemble P. La plupart des considérations physiques que nous évoquerons seront basées sur la modélisation, et non sur des données expérimentales quelconques. Notre point de départ sera donc les différentes théories physiques existant actuellement et ayant fait leurs preuves, et la justification de notre formalisme se trouvera dans ces théories.

1.2 La Relativité Générale et l'absence de trame de fond d'espace-temps

Venons-en maintenant à l'étude de l'une des deux grandes théories nécessaires à la formulation de la Gravité Quantique. Il s'agit de la Relativité Générale (GR)³.

Nous ne rentrerons pas dans les détails de cette théorie, ni dans l'explication de son formalisme. Le lecteur soucieux d'approfondir pourra se référer aux ouvrages traditionnels (voir par exemple [5] ou [6] pour la littérature francophone).

La GR a pour unique objectif la description de la gravitation, phénomène d'attraction entre corps non nécessairement massifs. Elle ne décrit pas à proprement parler une force physique, contrairement à la loi de Newton, mais bien un champ, appelé métrique, représentant la forme de l'espace-temps.

En réalité, la métrique permet de déterminer la géométrie locale intrinsèque autour d'un point de l'espace-temps. Elle donne également l'information sur les différents mouvements possibles par l'intermédiaire de courbes nommées *géodésiques* décrivant le plus court chemin entre deux points de l'espace-temps au sein de cette géométrie intrinsèque.

Les équations de la GR sont les suivantes :

$$G_{\mu\nu} = \kappa T_{\mu\nu} \quad (1.1)$$

³Nous utiliserons essentiellement les abréviations anglophones, et ce dans un souci de cohérence avec la littérature classique. Dans le cas présent, GR est mis pour *General Relativity*.

où

$$G_{\mu\nu} = R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}R g_{\mu\nu}$$

est le tenseur d'Einstein contenant toute l'information nécessaire sur la métrique (et donc sur la courbure de l'espace-temps). Le terme $g_{\mu\nu}$ est le tenseur de métrique proprement dit, tandis que $R_{\mu\nu}$ et R sont respectivement le tenseur de Ricci et la courbure scalaire, différentes formes de contraction du tenseur de courbure de Riemann $R^\sigma_{\mu\lambda\nu}$.

Par ailleurs,

$$\kappa T_{\mu\nu} = \frac{8\pi G}{c^4} T_{\mu\nu}$$

est le tenseur d'énergie-impulsion (ajusté d'une constante) contenant toute l'information nécessaire sur la distribution et le déplacement de l'énergie (matière) dans l'univers.

Ces tenseurs étant symétriques et de dimension 4 (3 dimensions d'espace + 1 dimension de temps), les équations d'Einstein sont au nombre de 10.

Mais la principale révolution apportée par la découverte de cette théorie, en opposition avec les autres théories des champs, réside dans le fait qu'en Relativité Générale le champ de métrique n'est pas un champ scalaire ou vectoriel existant dans un espace fixe pré-défini, mais est lui-même l'espace dans lequel vont évoluer les autres champs. L'espace dans lequel nous travaillons est donc dynamique et celui-ci n'existerait pas en l'absence du champ de métrique, ce qui est contraire aux théories des champs plus traditionnelles garantissant la présence d'un espace vide même en l'absence de champ.

C'est cette idée de *background independence* qui est à l'origine du problème de l'unification de la GR avec les autres interactions physiques.

Certains ont tenté, afin de résoudre ce problème, de transformer la GR dans le formalisme de la Théorie Quantique des Champs (QFT pour *Quantum Field Theory*) en séparant le champ de métrique en une partie fixe (background) et une perturbation (graviton) :

$$g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu} + h_{\mu\nu}, \quad (1.2)$$

mais cette approche a conduit à une théorie non-renormalisable⁴ violant l'invariance par difféomorphisme⁵.

Il est donc nécessaire de créer une théorie d'unification qui soit non-perturbative, respectant l'absence de trame de fond d'espace-temps présente en GR.

⁴Une théorie non-renormalisable est une théorie au sein de laquelle subsistent des problèmes d'infini qui ne peuvent être éliminés.

⁵La GR est une théorie dite *généralement covariante*, c'est-à-dire que les équations sont invariantes par l'application d'un difféomorphisme, i.e. une transformation générale des coordonnées (spatiales et temporelle)

La plupart des théories de la mécanique utilisent des équations dites *d'évolution* où interviennent des dérivées des différentes variables (spatiales) par rapport au temps.

Cette façon de procéder est contraire au principe que nous venons d'exposer, dans le sens qu'elle isole la variable temporelle des autres variables - brisant le principe de covariance - et met en évidence une trame fixe de type spatiale, appelée *espace de phase*, dans laquelle évoluent ces variables.

Il est cependant possible de réexprimer ces théories dans un langage covariant en supprimant ce phénomène de mise en évidence de la variable temporelle. Signalons par ailleurs que, depuis la théorie de la relativité restreinte, le temps n'est plus un phénomène universel mais bien une considération locale, ce qui rentre en contradiction avec toute équation d'évolution définie globalement.

Afin d'illustrer cette possibilité de transformation en langage covariant, nous allons proposer ici un exemple très simple mais caractéristique du mode de pensée à adopter afin d'aboutir à un tel résultat.

Considérons l'exemple bien connu de l'oscillateur harmonique. De ce problème physique, il nous est possible d'extraire deux types d'information pouvant constituer notre ensemble P, et ce en comparant l'état de l'oscillateur à deux instruments de mesure, un appareil de mesure de l'élongation de l'oscillateur et une horloge.

Définissons (dans notre ensemble G) les variables α et t comme étant respectivement la mesure de l'élongation donnée par l'appareil et le temps de l'horloge. Ces deux variables seront appelées les *observables* de notre problème.

L'équation du mouvement en mécanique classique serait donnée par la fonction :

$$\alpha(t) = A \sin(\omega t + \phi) \quad (1.3)$$

où ω est une valeur donnée caractéristique de la constitution de l'oscillateur physique, et A et ϕ sont deux paramètres définissant le mouvement, dépendant de conditions initiales et pouvant être modifiés par l'intervention de forces extérieures.

Afin d'exprimer cette équation dans un formalisme covariant, nous allons définir l'ensemble $\mathcal{C}$ comme étant l'espace bidimensionnel de coordonnées α et t . Cette espace portera le nom d'*espace de configuration* et un point de cet espace sera appelé *événement*.

Supposons que notre oscillateur soit non-perturbé et que nous disposons d'un grand nombre de paires d'éléments dans P. Définissons une courbe γ non-paramétrée dans $\mathcal{C}$. Si à chaque paire de mesures dans P correspond un événement (α, t) dans $\mathcal{C}$ se situant sur la courbe γ , alors nous dirons que γ représente un *mouvement physique* dans G. Le mouvement γ constituera en réalité une corrélation entre les observables

du problème, et il pourra⁶ être caractérisé par une relation du type :

$$f(\alpha, t) = 0. \quad (1.4)$$

Supposons maintenant que cet oscillateur soit perturbé, par exemple par l'application d'une force extérieure. Il en résulte l'apparition d'un nouveau mouvement γ' , et donc d'une nouvelle relation f' . La répétition d'un tel processus nous conduit à une classe de mouvement γ_ι et d'un ensemble de relations :

$$f_\iota(\alpha, t) = 0 \quad \iota \in \Gamma. \quad (1.5)$$

Reste à déterminer la forme de l'*espace des mouvements* Γ . Celui-ci se révèle par l'expérience être bidimensionnel et isomorphe au demi-cylindre $\mathbb{R}^+ \times [0, 2\pi)$. Un point de cet espace sera référencé par les deux coordonnées A et ϕ et portera le nom d'*état* relativiste.

Nous pouvons maintenant définir l'*équation d'évolution* de notre système contenant toute l'information empirique sur celui-ci :

$$\tilde{f}(A, \phi; \alpha, t) = \alpha - A \sin(\omega t + \phi) = 0. \quad (1.6)$$

D'une façon générale, un système relativiste (au sens de la GR) peut être décrit par un triplet $(\mathcal{C}, \Gamma, f)$ où :

- (i) $\mathcal{C}$ est l'*espace de configuration* des observables du système,
- (ii) Γ est l'*espace des mouvements* contenant les différents états relativistes,
- (iii) $f : \Gamma \times \mathcal{C} \rightarrow V$ définit l'*équation d'évolution* $f = 0$,

où V est un espace vectoriel.

Chaque état dans Γ détermine, par l'équation d'évolution, un mouvement γ du système. Signalons que ce mouvement n'est pas nécessairement unidimensionnel. Le cas d'un mouvement de dimension supérieure à 1 sera traité par les théories de jauge que nous étudierons plus en détail dans notre second chapitre. En effet, un état invariant par transformation de jauge peut être interprété comme un ensemble d'états (l'ensemble des différents états sous les différentes actions du groupe de jauge) conduisant à la même prédiction physique.

1.3 La Mécanique Quantique et le phénomène de quantification canonique

Attaquons-nous maintenant à la description des principes fondamentaux de la Mécanique Quantique (QM pour *Quantum Mechanics*). D'une manière équivalente

⁶L'hypothèse est faite ici que tout système physique peut être décrit par le formalisme des mathématiques, hypothèse en l'absence de laquelle il serait particulièrement difficile de faire de la physique...

à la section précédente, nous ne rentrerons pas ici dans les détails de cette théorie et renverrons le lecteur intéressé à la littérature classique [7].

La révolution apportée au monde physique par l'avènement de la Mécanique Quantique vient de la notion entièrement nouvelle de quantification. En QM, les différents niveaux d'énergie ne sont plus continus mais apparaissent, à une échelle extrêmement petite⁷, sous la forme de petits granules insécables appelés *quanta*. L'espace lui-même est également discrétisé.

Un principe illustrant ce propos et relativement simple à comprendre est le très célèbre *principe d'incertitude d'Heisenberg*. Il stipule que dans toute tentative de mesure de la position et de la quantité de mouvement d'une particule (remarquons qu'en QM, toute onde possède également une interprétation corpusculaire), le produit des incertitudes sur ces mesures ne peut descendre en dessous de la valeur $\frac{h}{4\pi}$, i.e. :

$$\Delta r \cdot \Delta p \geq \frac{h}{2}. \quad (1.7)$$

Dès lors, une connaissance parfaite de la position d'une particule devient utopique, dans le sens où celle-ci engendrerait une incertitude totale sur la vitesse (ou la longueur d'onde dans le cas d'un photon) de cette particule. C'est pourquoi nous pouvons imaginer l'espace comme étant quantifié, vu que deux états particulièrement proches se confondent en un seul.

Le formalisme de la QM est tout-à-fait particulier. Il utilise des objets appelés *fonctions d'onde* dont seul le module au carré d'une certaine représentation possède une interprétation dans P. Ces fonctions sont définies à partir d'un espace de Hilbert $\mathcal{H}_0$ ⁸ et contiennent l'ensemble de l'information physique et intrinsèque de tout un système, cette information étant "extraite" par l'intermédiaire d'opérateurs linéaires continus hermitiens appelés *observables*⁹. En réalité, les différents états physiques possibles d'un système sont les différents vecteurs propres des observables (en particulier de l'observable Hamiltonien) et les différentes valeurs physiques correspondantes sont les valeurs propres respectives.

Cependant, la Mécanique Quantique ne peut être décrite correctement à l'aide de ce seul espace $\mathcal{H}_0$. A cette fin, il est nécessaire d'utiliser un triplet d'espaces vectoriels normés, appelé *triplet de Gel'fand* ou *rigged Hilbert space* :

$$S \subset \mathcal{H}_0 \subset S^* \quad (1.8)$$

⁷Cette échelle est construite à partir de la valeur de la constante de Planck h qui vaut $6,62618 \times 10^{-34} Js$.

⁸ $\mathcal{H}_0$ est ici employé en lieu et place de $\mathcal{H}$ afin de désigner un espace de type non-relativiste. Il en sera de même pour Γ_0 .

⁹Une observable est un opérateur linéaire continu hermitien dont l'ensemble des vecteurs propres forme une base de l'espace des états.

dans lequel S est un sous-espace nucléaire et S^* est la représentation de son dual algébrique. Les éléments de S seront appelés *bra* et notés $\langle \phi |$, les éléments de S^* seront appelés *ket* et notés $|\psi \rangle$, ces espaces étant munis du produit interne $\langle \phi | \psi \rangle$. Cette notation est appelée *notation de Dirac*. Une explication détaillée peut être trouvée dans [8].

Les fonctions d'onde de la QM sont régies par l'équation d'évolution connue sous le nom d'*équation de Schrödinger* :

$$i\hbar \frac{d}{dt} |\psi(t)\rangle = \hat{H}(t) |\psi(t)\rangle \quad (1.9)$$

où $\hat{H}$ est l'opérateur (observable) Hamiltonien.

Venons-en maintenant au principe de quantification canonique. C'est une méthode qui permet de quantifier tout type de système canonique, et nous l'utiliserons au chapitre 4 dans le cadre du formalisme ADM, mais comme un bon exemple vaut mieux qu'un long discours, nous allons ici l'illustrer dans le cadre de la Mécanique Quantique.

Prenons un système hamiltonien classique, avec un espace de phase $\Gamma_0 = (q^i, p_i)$ composé de paires canoniques et une fonction hamiltonienne $H = \sum p_i \dot{q}^i - L$.

Si nous munissons Γ_0 d'une algèbre de Poisson $\{f, g\} = \sum \frac{\partial f}{\partial q} \frac{\partial g}{\partial p} - \frac{\partial f}{\partial p} \frac{\partial g}{\partial q}$ (on dit aussi d'une structure symplectique) donnant les relations :

$$\{q^i, q^j\} = 0, \quad \{p_i, p_j\} = 0, \quad \{q^i, p_j\} = \delta_j^i, \quad (1.10)$$

alors nous obtenons l'équation d'évolution :

$$\frac{d}{dt} f = \{f; H\} \quad (1.11)$$

pour toute fonction f définie sur l'espace de phase.

L'idée heuristique de la quantification canonique est de passer de l'espace de phase Γ_0 à l'espace de Hilbert $\mathcal{H}_0$ en remplaçant chaque fonction¹⁰ définie sur Γ_0 par une observable définie sur $\mathcal{H}_0$ et en remplaçant l'algèbre de Poisson par l'algèbre de Lie des commutateurs.

En résumé :

$$\begin{array}{lll} \Gamma_0 & \rightsquigarrow & \mathcal{H}_0 \\ q^i & \rightsquigarrow & \hat{r}^i \\ p_i & \rightsquigarrow & \hat{p}_i \\ \{ , \} & \rightsquigarrow & -\frac{i}{\hbar} [,] \end{array} \quad (1.12)$$

¹⁰Remarquons que les variables q^i et p_i sont elles-mêmes des fonctions définies sur Γ_0 .

le coefficient $-\frac{i}{\hbar}$ étant nécessaire pour garantir le caractère hermitien.

Les équations (1.10) et (1.11) nous donnent alors les résultats bien connus :

$$[\hat{r}^i, \hat{r}^j] = 0, \quad [\hat{p}_i, \hat{p}_j] = 0, \quad [\hat{r}^i, \hat{p}_j] = i\hbar \delta_j^i, \quad (1.13)$$

$$\frac{d}{dt}A = -\frac{i}{\hbar}[A, \hat{H}], \quad (1.14)$$

pour toute observable A définie sur l'espace de Hilbert.

1.4 Difficultés et définition de la Gravité Quantique

Une théorie quantique de la gravité (QG *Quantum Gravity*) se doit de refléter les différents concepts énoncés au cours des deux dernières sections. Nous allons voir cependant que l'unification n'est pas simple au vu des contradictions évidentes apparaissant entre les différents concepts.

Dans un premier temps, remarquons que la GR se base sur une modélisation géométrique (variété différentiable) en définissant un champ de métrique continu. Ce type de modélisation est malheureusement incompatible avec l'idée de quantification de l'espace et du temps. En effet, en QM, les champs sont présents sous forme de "granulés" et la dynamique est décrite par des comportements de types probabilistes.

Nous nous trouvons donc devant l'obligation de passer d'une modélisation de type géométrique à une modélisation de type algébrique, l'avantage présenté par cette dernière étant sa non-commutativité¹¹. Les phénomènes physiques ne sont plus alors décrits par des champs, mais bien par les propriétés du spectre des opérateurs quantiques.

Remarquons que, dans une telle modélisation, la continuité apparente de l'espace-temps se révèle être en fait une approximation à grande échelle d'un espace quantifié.

La seconde difficulté de l'unification de la GR avec la QM est donnée par ce que nous avons déjà décrit comme étant une absence de trame de fond d'espace-temps, ou *background independence*. Sous ce principe, la théorie ne peut être décrite par un modèle perturbatif, et doit conserver une invariance globale par difféomorphisme.

Mais ce principe de covariance pose un problème évident si nous considérons la seule équation d'évolution de la QM, l'équation de Schrödinger (1.9). En effet, celle-ci nécessite l'isolement d'une variable particulière (temps) par rapport aux autres, ce qui rend impossible toute invariance par difféomorphisme.

Il est donc nécessaire d'introduire dans notre théorie des équations d'évolution généralement covariantes comme nous l'avons illustré à la section 1.2.

¹¹Certaines recherches sur le sujet des théories d'unifications sont également effectuées à partir de l'outil mathématique relativement récent de la géométrie non-commutative.

Enfin, remarquons que, si la GR est une théorie mathématiquement et physiquement bien fondée, la QM possède des problèmes de fondement ainsi qu'un certain manque de cohérence.

Par exemple, là où la QM prône une quantification globale de l'espace et du temps (remarquons qu'une quantification de l'espace induit indubitablement la présence d'une telle notion pour la dimension temporelle, conséquence qui peut notamment se vérifier dans la relation $\Delta E \Delta t \geq \frac{\hbar}{2}$), celle-ci utilise de toute évidence le principe de dérivation d'une fonction d'onde par rapport au temps, dérivation devenant quelque peu caduque en présence d'une variable discrète quantifiée.

Signalons pour finir que le simple fait d'exprimer une quantité observable $\alpha(t)$ en fonction d'une variable temporelle continue est une hypothèse particulièrement forte. Une telle expression suppose l'existence d'une quantité physique t qui en réalité est inobservable. La seule chose qui peut être réellement observée est la comparaison de phénomènes avec l'indication fournie par une horloge, comparaison qui ne peut s'effectuer scientifiquement de façon continue. Les seules mesures que nous sommes capables de fournir sont une suite de valeurs en certains temps particuliers $\alpha(t_1)$, $\alpha(t_2)$, $\alpha(t_3)$,...

La théorie de la Gravité Quantique à Boucles (LQG *Loop Quantum Gravity*) ne sera capable que de prédictions de ce type.

Nous pouvons maintenant énoncer les principes de base de la Gravité Quantique à Boucles :

- La LQG est une tentative d'unification des théories de la Relativité Générale et de la Mécanique Quantique.
- La QM peut être reformulée afin d'être compatible avec le concept de covariance généralisée et est supposée correcte.
- Bien que les équations d'Einstein doivent être modifiées à de très hautes énergies, les principes de relativité générale de l'espace et du temps sont supposés corrects.
- Les deux précédentes hypothèses sont justifiées par les extraordinaires succès empiriques que ces deux théories ont connus, ainsi que par l'absence de contre-exemple à leur égard.
- La LQG est basée sur le concept de *background independence* et considère que la stratégie de séparation (1.2) est inappropriée.
- Il n'y a pas de raison de penser que la LQG est une tentative d'unification des quatre interactions fondamentales : gravitation, électromagnétisme,

interactions nucléaires forte et faible.

- La LQG se base sur un espace-temps à quatre dimensions uniquement et ne nécessite aucun ajout de dimensions supplémentaires ni aucun artifice de type supersymétrie.

Un bon résumé de la définition de la LQG est donné par Thiemann dans [9]. Nous reformulons ici ses propos :

La **Gravité Quantique à Boucle (LQG)** est une tentative de construction d'une **Théorie Quantique des Champs** à quatre dimensions basée sur des **fondements mathématiques rigoureux** qui soit **non-perturbative** et **sans présence de trame de fond** (*background independent*). Elle ne possède aucune structure additionnelle non-vérifiée expérimentalement et tente d'unifier les principes fondamentaux de **Covariance Généralisée** et de **Quantification**.

1.5 Cordes ou boucles ?

La Gravité Quantique n'est pas la seule tentative actuelle d'unification de la GR et de la QM. Une autre théorie, légèrement plus ancienne, est nettement plus répandue. Il s'agit de la *Théorie des Cordes* (ST *String Theory*).

La débat entre ces deux théories est tout à fait d'actualité. Une conférence sur le sujet, intitulée *Strings Meet Loops*, a notamment eu lieu en 2003 à Postdam, réunissant des acteurs parmi les plus grands de ces deux théories. Un résumé de cette conférence peut être trouvé dans [10].

Décrivons un peu cette fameuse Théorie des Cordes. L'hypothèse majeure de la ST est la supposition de l'existence de cordes, uni ou multidimensionnelles, étant à l'origine de tout élément de l'univers (matière ou énergie). Les différents modes de vibrations de ces cordes représentent les différentes particules de l'univers ainsi que leur différents états.

La Théorie des Cordes a connu un développement considérable au sein de ces dernière années, la majorité des scientifiques la considérant comme la meilleure tentative actuelle d'unification des interactions fondamentales. Le succès de cette théorie vient sûrement de sa beauté et de sa simplicité (du moins au niveau du concept), malgré les difficultés encourues et l'absence totale de preuves empiriques.

En réalité, nous ne devons pas parler de la Théorie des Cordes, mais bien *des* Théories des Cordes, car il en existe cinq versions différentes, augmentées d'une sixième, la *Théorie M* dont le but est de rassembler les cinq premières.

Attaquons-nous maintenant à la comparaison de nos deux théories. La différence majeure vient du fait qu'il y a probablement dix fois plus de chercheurs travaillant actuellement sur la Théorie des Cordes que de chercheurs travaillant sur la Gravité Quantique. Et cette différence a peu de chances de diminuer, ceux-ci ayant de grandes difficultés à obtenir des sources de financement pour travailler sur la Gravité Quantique vu l'engouement actuel pour les cordes.

Carlo Rovelli présente dans [11] un dialogue entre un élève découvrant la LQG et son professeur essayant à tout prix de le dissuader de travailler sur celle-ci. Cette discussion présente bien la "peur" actuelle de se lancer dans la recherche d'une théorie alternative ainsi que le confort de travailler dans une théorie déjà bien développée.

Mais quel est l'intérêt justement d'étudier des possibilités alternatives ? Simple-ment le fait qu'il n'existe pas, jusqu'à ce jour, de preuve empirique à la Théorie des Cordes et que celle-ci ne représente qu'une seule théorie possible parmi tant d'autres, jolie peut-être mais seulement particulière.

Il est important d'insister sur le fait que, malgré que ces deux théories soient sans cesse comparées, leurs buts sont en réalité complètement différents. La Théorie des Cordes se présente comme une *théorie du tout*, censée unifier l'ensemble des quatre interactions fondamentales, tandis que la Gravité Quantique ne possède comme seule ambition que l'unification de la GR et de la QM. De plus, là où la première propose une hypothèse à l'origine de la présence de matière dans l'univers, la seconde se contente de décrire uniquement des champs d'interactions.

Venons-en maintenant aux différences techniques existant entre les deux théories. Nous avons présenté la QG comme étant non-perturbative et ne nécessitant pas l'ajout de nouveaux principes physiques. Au contraire, la ST se base sur une méthode de perturbation, reniant le principe de covariance d'Einstein, et introduit une foule de nouveaux éléments physiques non détectés expérimentalement, comme l'augmentation du nombre de dimensions (10 voir 11 pour la Théorie M), la notion de supersymétrie (afin d'éliminer les nombreux cas d'infini présents dans la théorie) ou des particules exotiques (non prédites par le modèle standard).

Ce sont ces nombreux "ajouts" et la violation du concept de *background independence* qui ont poussé certains chercheurs à trouver de nouvelles voies vers l'unification. De plus, les prédictions de la ST sont particulièrement nombreuses, allant même jusqu'à prédire 10^{200} états du vide différents pouvant correspondre à autant d'univers différents possédant leurs propres lois et leurs propres constantes !

Si nous voulions comparer ces deux théories à l'aide des outils mathématiques de la sémantique des modèles, nous dirions que la Théorie des Cordes est un modèle complet mais incohérent, tandis que la Gravité Quantique est un modèle cohérent

mais incomplet.

En réalité, la Théorie des Cordes est une théorie construite à partir de l'ensemble des théories modernes de la physique ayant fait leurs preuves (GR, QFT, modèle standard) qui ont été mélangées dans une sorte de "soupe" afin de sortir un formalisme avec des bases mathématiques non-rigides mais reproduisant l'ensemble des résultats (et même plus) obtenus à l'aide des précédentes théories. Au contraire, la Gravité Quantique s'est basée sur la recherche d'un nouveau formalisme mathématique bien fondé reprenant les concepts fondamentaux de la GR et de la QM.

Cette différence représente en fait une grande problématique de la recherche en physique théorique, à savoir s'il vaut mieux partir de résultats déjà convaincants pour aboutir rapidement à quelque chose de nouveau à fort potentiel, ou s'il vaut mieux partir de bases tout-à-fait différentes en espérant arriver à plus long terme à quelque chose de valable. Il va de soi que c'est la première solution qui est la plus prisée des chercheurs, et ce principalement par souci lucratif.

Les deux théories sont donc amenées à évoluer simultanément et à des vitesses différentes. Pour terminer, signalons que, actuellement, l'un des plus grands résultats de la Théorie des Cordes est l'établissement formel de la formule de Bekenstein-Hawking de l'entropie de certains trous noirs, ce qui est également l'un des deux résultats obtenus jusqu'ici par la théorie de la Gravité Quantique à Boucles. Il y a donc une certaine égalité.

Chapitre 2

Les Outils de la Gravité Quantique à Boucles

Dans ce chapitre, nous allons exposer différentes théories mathématiques qui seront nécessaires à la bonne compréhension du reste de cet ouvrage.

Ces théories seront présentées sous diverses sections, et ce afin de conduire directement le lecteur vers les parties qui lui sont plus méconnues. Les éléments présentés resteront très basiques car, vu le panel d'outils que nous devons parcourir, il paraît impensable d'effectuer un cours complet sur chacun d'eux.

Il existe une très grande quantité d'ouvrages de référence en la matière. Nous en garderons trois : [12] pour la géométrie différentielle ordinaire, [13] pour les groupes et algèbres de Lie ainsi que [14] pour la théorie des espaces fibrés. Cette classification n'est qu'indicatrice car ces ouvrages se recoupent pour la plupart des éléments exposés.

2.1 Introduction à la géométrie différentielle

Nous reprenons ici quelques définitions usuelles de la géométrie différentielle.

Définition 1. Une **variété différentiable** de dimension n est un espace topologique M équipé d'un ensemble de cartes bicontinues $\varphi_\alpha : U_\alpha \rightarrow \mathbb{R}^n$ appelé **atlas** tel que $\{U_\alpha\}$ est un recouvrement d'ouverts de M , et tel que pour tout α, β , la **fonction de transition** $\varphi_{\alpha\beta} = \varphi_\alpha \circ \varphi_\beta^{-1}$ est différentiable¹.

Définition 2. Un **vecteur tangent** en un point $p \in M$ est une application

¹Nous considérerons pour plus de simplicité C^∞ -différentiable

$v_p : C^\infty(M) \rightarrow \mathbb{R}$ telle que :

$$\begin{aligned} v_p(f + g) &= v_p(f) + v_p(g) \\ v_p(\alpha f) &= \alpha v_p(f), \quad \alpha \in \mathbb{R} \\ v_p(fg) &= v_p(f)g(p) + f(p)v_p(g). \end{aligned} \tag{2.1}$$

Si M est munie d'un repère local de coordonnées $\{x_i\}_{i \in \underline{n}}$, il est usuel de considérer la base naturelle des dérivées partielles $\left\{ \frac{\partial}{\partial x_i} \right\}_{i \in \underline{n}}$ comme base de l'ensemble des vecteurs tangents en un point, et de repérer ces derniers par leurs simples coordonnées contravariantes v^i dans cette base : $v = v^i \frac{\partial}{\partial x^i}$.

Signalons que dans notre dernière formule, nous avons utilisé la convention traditionnelle de sommation sur les indices répétés (appelés indices *muets*), i.e. $v^i \frac{\partial}{\partial x^i} = \sum_{i=1}^n v^i \frac{\partial}{\partial x^i}$. Cette convention sera préservée durant la majeure partie de cet ouvrage.

Définition 3. L'ensemble des vecteurs tangents en un point $p \in M$ est appelé **espace tangent** et est noté $T_p(M)$. Cet espace est un espace vectoriel.

Définition 4. Un **vecteur cotangent** (parfois appelé covecteur) en un point $p \in M$ est une application linéaire $w_p : T_p(M) \rightarrow \mathbb{R}$.

La base naturelle usuelle est celle des 1-formes différentielles (base duale des dérivées partielles), les covecteurs étant repérés par leurs coordonnées covariantes w_i : $w = w_i dx^i$.

Définition 5. L'ensemble des vecteurs cotangents en un point $p \in M$ est appelé **espace cotangent** et est noté $T_p^*(M)$. Cet espace est un espace vectoriel.

Il arrive couramment de devoir comparer plusieurs variétés différentiables, voire plusieurs façons de coordonner une variété différentiable. Intervient ici la notion déjà rencontrée de difféomorphisme.

Définition 6. Une application de M dans N , où M et N sont deux variétés différentiables, qui est différentiable, bijective et dont l'inverse est également différentiable est un **difféomorphisme**.

Signalons qu'il existe deux types de difféomorphismes : les difféomorphismes *actifs*, lorsque M est différent de N et qui engendrent un véritable changement de géométrie, et les difféomorphismes *passifs*, lorsque M égale N et qui ne constituent seulement que de simples changements de coordonnées.

La notion de difféomorphisme s'étend également aux espaces tangent et cotangent.

Définition 7. Soit ϕ un difféomorphisme de M dans N et $f : N \rightarrow \mathbb{R}$, alors il existe une seule fonction $\phi^*f : M \rightarrow \mathbb{R}$ telle que $\phi^*f = f \circ \phi$. Cette fonction est appelée **pullback** de f par ϕ .

Définition 8. Soit ϕ un difféomorphisme de M dans N , $f : N \rightarrow \mathbb{R}$ et $v \in T_p(M)$, alors il existe un seul vecteur $\phi_*v \in T_{\phi(p)}(N)$ tel que $(\phi_*v)(f) = v(\phi^*f)$. Ce vecteur est appelé **pushforward** de v par ϕ .

Les notions de pullback et de pushforward ne sont pas réservées aux fonctions et aux vecteurs tangents. Plus généralement, toute application contravariante possèdera un pullback et toute application covariante un pushforward. Ainsi, les espaces cotangents seront transformés à l'aide d'un pullback².

Nous avons introduit la notion de vecteur et de covecteur, mais celle-ci peut s'étendre à une classe d'objets beaucoup plus générale : les tenseurs.

Définition 9. Un **tenseur** (r,s) en un point $p \in M$ est une application multilinéaire :

$$T \in \left(\bigotimes_r T_p(M) \right) \otimes \left(\bigotimes_s T_p^*(M) \right).$$

Un tenseur sera souvent défini par ses coordonnées :

$$T = T_{\nu_1 \dots \nu_s}^{\mu_1 \dots \mu_r} \frac{\partial}{\partial x^{\mu_1}} \otimes \dots \otimes \frac{\partial}{\partial x^{\mu_r}} \otimes dx^{\nu_1} \otimes \dots \otimes dx^{\nu_s},$$

et l'application d'un tenseur donnera en terme de coordonnées :

$$T(v_1, \dots, v_s, w_1, \dots, w_r) = T_{\nu_1 \dots \nu_s}^{\mu_1 \dots \mu_r} v_1^{\nu_1} \dots v_s^{\nu_s} w_{1\mu_1} \dots w_{r\mu_r}.$$

Définition 10. Un **champ de vecteur** sur M est une application attribuant à tout point p de M un vecteur en p , i.e. $M \rightarrow \bigcup_{p \in M} T_p(M) : p \rightsquigarrow v_p \in T_p(M)$.

De même, un **champ de tenseur** sur M est une application attribuant à tout p de M un tenseur en p .

Il est à noter que lorsque nous parlerons de tenseur, nous sous-entendrons la plupart du temps un champ de tenseur défini sur la variété, mais par souci de clarté, nous considérerons tacitement celui-ci en un point particulier et éluderons l'indice p d'appartenance à un espace tangent ou cotangent particulier. L'idée est simplement que la géométrie différentielle permet une étude locale des variétés, la plupart des résultats n'étant valables que dans un certain voisinage d'un point particulier.

²Nous voulons attirer ici l'attention sur le fait que les vecteurs tangents sont des applications covariantes et les vecteurs cotangents des applications contravariantes. Ce sont leurs coordonnées qui sont respectivement contravariantes et covariantes. Confusion est souvent faite entre les éléments eux-même et leurs coordonnées dans une base.

Une propriété intéressante des tenseurs est le phénomène de *contraction*. Il intervient lorsque deux indices, l'un covariant et l'autre contravariant, sont identiques. Ce qui résulte de l'opération n'est autre que la *trace* de l'opérateur le long des dimensions concernées :

$$T_{\mu}^{\sigma} = T_{\mu\nu}{}^{\nu\sigma}.$$

Nous allons maintenant introduire un tenseur particulier :

Définition 11. Le **tenseur de métrique** $g_{\mu\nu}$ est un tenseur symétrique et non dégénéré³ définissant le produit scalaire de deux vecteurs de $T_p(M)$.

Définition 12. Le **tenseur de métrique inverse** $g^{\mu\nu}$ est défini en fonction du tenseur de métrique $g_{\mu\nu}$ par $g^{\mu\nu}g_{\nu\rho} = \delta_{\rho}^{\mu}$ et définit un produit scalaire dans l'espace cotangent.

Définition 13. La **signature** $p - q$ d'une métrique $g_{\mu\nu}$ est le nombre de valeurs propres positives p de $g_{\mu\nu}$ moins le nombre de valeurs négatives q .

Pour une variété de dimension n , une métrique de signature n sera dite **Riemannienne** (et la variété ainsi munie de sa métrique sera appelée variété Riemannienne), tandis qu'une métrique de signature inférieure à n sera dite **semi-Riemannienne**.

Un cas particulier est donné par une métrique de signature $n - 2 = (n - 1) - 1$ (une seule valeur propre négative) qui porte le nom de métrique **Lorentzienne**. Cette métrique est celle de la Relativité Générale.

Le déterminant d'une métrique $g_{\mu\nu}$ sera habituellement noté $\det(g)$.

Signalons que l'on parle également de signature s d'une variété pour désigner, non pas la différence des valeurs propres, mais bien le signe du déterminant de la métrique. Dans ce cas, s peut donc prendre les valeurs $+1$ ou -1 suivant que la métrique est de type Riemannienne ou Lorentzienne.

Outre le fait de définir un produit scalaire, le tenseur de métrique (et son inverse) peut également servir à "élever" ou "rabaïsser" des indices, par exemple :

$$T_{\mu}^{\sigma} = g_{\mu\nu}T^{\nu\sigma}.$$

Lorsque, par la suite, nous nous permettrons de changer arbitrairement les indices de position, il ne faudra pas oublier que ce procédé se fera par l'intermédiaire de la métrique. Mais par souci de clarté et de concision des formules, nous ne recopierons pas ce procédé.

³Il faut entendre par symétrique et non dégénéré que la matrice des composantes $\{g_{\mu\nu}\}_{\mu\nu}$ est symétrique et non singulière.

2.2 Groupes et algèbres de Lie

La notion de groupe de Lie - et d'algèbre de Lie - est une notion mathématique particulièrement importante au sein de la physique actuelle. C'est elle qui permet, notamment, d'unifier trois des quatre interactions fondamentales.

Définition 14. Un **groupe de Lie** est une variété différentiable G munie d'une structure de groupe dont les opérations sont différentiables, i.e. il existe une opération binaire différentiable $\cdot : G \times G \rightarrow G$, dite *opération produit*, une opération inverse $^{-1} : G \rightarrow G$ également différentiable, ainsi qu'un élément spécifique 1_G appelé *unité*, tels que :

$$\begin{aligned} (g \cdot h) \cdot k &= g \cdot (h \cdot k) \quad \forall g, h, k \in G \\ g \cdot 1_G &= 1_G \cdot g = g \quad \forall g \in G \\ g \cdot g^{-1} &= g^{-1} \cdot g = 1_G \quad \forall g \in G. \end{aligned} \tag{2.2}$$

L'opération produit $g \cdot h$ est souvent notée gh .

Les groupes de Lie les plus importants sont les suivants :

- $GL(n, \mathbb{R})$ est le groupe de toutes les matrices réelles $n \times n$ inversibles,
- $GL(n, \mathbb{C})$ est le groupe de toutes les matrices complexes $n \times n$ inversibles,
- $SL(n, \mathbb{R})$ est le groupe de toutes les matrices réelles $n \times n$ inversibles de déterminant 1,
- $SL(n, \mathbb{C})$ est le groupe de toutes les matrices complexes $n \times n$ inversibles de déterminant 1,
- $O(n)$ est le groupe de toutes les matrices réelles $n \times n$ inversibles orthogonales,
- $SO(n)$ est le groupe de toutes les matrices réelles $n \times n$ inversibles orthogonales de déterminant 1,
- $U(n)$ est le groupe de toutes les matrices complexes $n \times n$ inversibles unitaires,
- $SU(n)$ est le groupe de toutes les matrices complexes $n \times n$ inversibles unitaires de déterminant 1.

En physique, on rencontrera le plus souvent les groupes $SO(3)$ (qui est isomorphe à $U(1)$), $SU(2)$ et $SU(3)$, car ils caractérisent respectivement la force électromagnétique, la force d'interaction faible et la force d'interaction forte.

Les groupes de Lie servent la plupart du temps à décrire une symétrie. Pour cela, ils doivent "intervenir" sur un autre espace E pour lequel la symétrie doit être décrite. Le plus souvent, E sera un espace vectoriel ou une variété. Nous avons la définition suivante :

Définition 15. Un groupe G **opère à gauche** (resp. à droite) sur un ensemble E s'il existe un homomorphisme⁴ ρ envoyant G dans l'ensemble des bijections⁵ de E

⁴ ρ est un homomorphisme si $\forall g, h, \rho(gh) = \rho(g)\rho(h)$.

⁵Dans le cas où E est un espace vectoriel, nous parlerons de l'ensemble des automorphismes, i.e.

dans E tel que $y = \rho(g)x$ (resp. $y = x\rho(g)$) est l'image de x par l'action de l'élément g . Un homomorphisme ρ particulier est appelé une **représentation** du groupe G sur E .

Remarquons que si ρ est une représentation sur E , et que $E' \subset E$ est un sous-ensemble invariant, i.e. $\forall x \in E', \rho(g)x \in E' \forall g \in G$, alors nous pouvons définir une représentation ρ' de G sur E' par $\rho'(g)x = \rho(g)x \forall x \in E'$. Une telle représentation est appelée une **sous-représentation** de ρ .

Définition 16. Une représentation ρ d'un groupe G sur un espace vectoriel V est dite **irréductible** si les seuls sous-espaces invariants sont $\{0_V\}$ et V .

La théorie de la représentation est un élément très important de la théorie des groupes, bien qu'elle soit souvent ignorée par les physiciens qui ont tendance à noter abusivement $y = gx$ l'action d'un élément g sur x .

Venons-en maintenant à la notion d'algèbre de Lie.

Définition 17. Une **algèbre de Lie** est un espace vectoriel $\mathfrak{g}$ muni d'une opération binaire $[\cdot, \cdot] : \mathfrak{g} \times \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{g}$ et respectant les conditions suivantes :

$$\begin{aligned} [v, w] &= -[w, v] \quad \forall v, w \in \mathfrak{g} \\ [u, \alpha v + \beta w] &= \alpha[u, v] + \beta[u, w] \quad \forall u, v, w \in \mathfrak{g} \quad \text{et} \quad \forall \alpha, \beta \text{ scalaires} \\ [u, [v, w]] + [v, [w, u]] + [w, [u, v]] &= 0 \quad \forall u, v, w \in \mathfrak{g}. \end{aligned} \tag{2.3}$$

La dernière équation est connue sous le nom d'*identité de Jacobi*.

Nous avons déjà rencontré deux exemples particuliers d'algèbre de Lie. Il s'agit de l'algèbre de Lie des commutateurs $[A, B] = AB - BA$, qui peut être définie sur toute algèbre, i.e. sur tout espace vectoriel muni d'une opération de multiplication interne, et l'algèbre dite de Poisson $\{\cdot, \cdot\}$ devant respecter la règle de Leibniz $\{a, bc\} = \{a, b\}c + b\{a, c\}$.

Dans le cas où une algèbre de Lie $\mathfrak{g}$ est de dimension finie n et est munie d'une base $\{X_a\}_{a \in \underline{n}}$, sa structure est complètement déterminée par la donnée de coefficients :

$$[X_a, X_b] = T_{ab}^c X_c. \tag{2.4}$$

Définition 18. Les coefficients T_{ab}^c sont appelés **constantes de structure** de l'algèbre $\mathfrak{g}$.

Il existe une relation simple entre la notion de groupe de Lie et la notion d'algèbre de Lie.

Vu qu'un groupe de Lie G est une variété différentiable, nous pouvons considérer son espace tangent en un point particulier, par exemple en son unité 1_G . De plus, de l'ensemble des applications linéaires bijectives (c'est-à-dire des matrices inversibles).

l'application $l_g : G \rightarrow G : h \mapsto gh$ de multiplication à gauche est un difféomorphisme. En conséquence, pour tout $X \in T_{1_G}(G)$, nous pouvons considérer le pushforward $g_*X = (t_g)_*X \in T_g(G)$ (cf. section 2.1).

Définition 19. Un champ de vecteur $X(h)$ est dit **invariant à gauche** si et seulement si $g_*X(h) = X(gh)$, ce qui est équivalent à $g_*X(1_G) = X(g)$.

Il est aisé de vérifier que l'espace des champs de vecteur invariants à gauche possède une structure d'algèbre de Lie, si nous le munissons de l'opération de commutation. Nous pouvons donc définir l'algèbre de Lie $\mathfrak{g}$ associée au groupe de Lie G comme étant cet espace particulier.

Signalons que $\mathfrak{g}$ peut être identifié, à l'aide d'un difféomorphisme, à l'espace tangent à G au point 1_G , et qu'il existe une application simple entre un groupe de Lie et son algèbre associée :

Définition 20. Le **mapping exponentiel** est l'application $\exp : \mathfrak{g} \rightarrow G$ déterminée de façon unique par :

$$\begin{aligned} \exp(0_{\mathfrak{g}}) &= 1_G \\ \exp(x)\exp(y) &= \exp(x+y) \quad \forall x, y \in \mathfrak{g} \\ \frac{d}{dt}\exp(tx)|_{t=0} &= x \quad \forall x \in \mathfrak{g}. \end{aligned} \tag{2.5}$$

Cette application est un difféomorphisme dans un certain voisinage du neutre $0_{\mathfrak{g}}$ de l'algèbre de Lie. Malheureusement, ce caractère ne peut être garanti en dehors de ce voisinage.

Néanmoins, il est usuel de considérer en physique l'algèbre de Lie associée à un groupe de Lie comme étant son espace tangent à l'unité, ainsi que le fait qu'il est possible de "recréer" le groupe de Lie par "exponentiation" de l'algèbre de Lie. Il convient cependant d'être prudent car, en raison de la non globalité de l'application exponentielle, ce procédé est plus intuitif que mathématiquement bien fondé.

De part la construction citée, nous voyons que tout groupe de Lie possède son algèbre associée, mais que celle-ci n'est pas nécessairement unique. Deux groupes de Lie non-isomorphes peuvent posséder la même algèbre. En voici un exemple qui se révélera très important par la suite.

Définition 21. Les matrices

$$\sigma_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \tag{2.6}$$

sont appelées **matrices de Pauli**.

Définissons $X_j = -\frac{i}{2}\sigma_j$, alors on peut montrer que $\{X_1, X_2, X_3\}$ constitue une base de $\mathfrak{su}(2)$, l'algèbre de Lie associée au groupe $SU(2)$. Un calcul des constantes de structure donne :

$$[X_i, X_j] = \epsilon_{ijk} X_k, \quad (2.7)$$

avec ϵ_{ijk} le tenseur totalement antisymétrique $\epsilon_{ijk} = \delta_{[i}^1 \delta_j^2 \delta_{k]}^3$, où $[\]$ dénote l'antisymétrisation.

Définissons maintenant

$$X_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}, \quad X_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad X_3 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad (2.8)$$

alors $\{X_1, X_2, X_3\}$ constitue une base de $\mathfrak{so}(3)$, l'algèbre de Lie associée au groupe $SO(3)$, avec $[X_i, X_j] = \epsilon_{ijk} X_k$ comme constantes de structure.

Nous voyons donc que les algèbres $\mathfrak{su}(2)$ et $\mathfrak{so}(3)$ sont isomorphes. Elles appartiennent à la même classe d'équivalence, et sont dans ce cas considérées comme identiques pour raison de facilité.

Qu'en est-il maintenant des groupes de Lie $SO(3)$ et $SU(2)$? Nous ne reproduirons pas les calculs ici, mais il est possible de montrer que $SU(2)$ constitue exactement un double recouvrement de $SO(3)$. En réalité, il existe un isomorphisme de $SO(3)$ dans l'espace quotient $SU(2)/\mathbb{Z}_2$.

Nous sommes donc en présence de deux groupes de Lie différents, mais dont les structures sont si semblables, à un recouvrement près, que leurs algèbres de Lie associées coïncident.

Vu l'intérêt des groupes $SO(3)$ et $SU(2)$ pour la physique, il peut paraître évident que l'étude du groupe $SU(2)$ soit privilégiée, car celui-ci contient toute l'information nécessaire sur le groupe $SO(3)$. De plus, vu que les algèbres de Lie associées coïncident, il n'y a aucun inconvénient à remplacer l'algèbre $\mathfrak{so}(3)$ par l'algèbre $\mathfrak{su}(2)$, comme nous le ferons par la suite dans cet ouvrage.

2.3 Espaces fibrés

Définition 22. Un **espace fibré** (ou tout simplement un fibré) est la donnée :

- d'une variété différentiable E appelée **espace total**,
- d'une variété différentiable M appelée **espace de base**,
- d'une surjection $\pi : E \rightarrow M$ appelée **projection**.

Pour tout $p \in M$, l'espace $F_p = \{q \in E : \pi(q) = p\}$ est appelé **fibre** associée à p , d'où le nom d'espace fibré.

Définition 23. Un **espace fibré localement trivial de fibre type** F , où F est une variété différentiable, est un fibré tel que pour tout $p \in M$, il existe un voisinage U_p de p et un isomorphisme, appelé **trivialisation locale**, $\phi : E|_{U_p} \rightarrow U_p \times F$ tels que $\phi(F_p) = \{p\} \times F$.

Tous les fibrés que nous considérerons seront des fibrés localement triviaux.

Définition 24. Un **fibré principal** est un fibré localement trivial de fibre type G tel que G est un groupe de Lie opérant à droite sur chacune des fibres F_p de façon transitive.

Définition 25. Un **fibré vectoriel** est un fibré localement trivial de fibre type V tel que V est un espace vectoriel de dimension n .

Les fibrés vectoriels les plus courants sont les **fibrés tangents** - dont la fibre F_p en un point p est l'espace tangent $T_p(M)$ - et les **fibrés cotangents** - dont la fibre F_p en un point p est l'espace cotangent $T_p^*(M)$.

L'idée générale de ces espaces fibrés est de fournir une base de comparaison des espaces tangents (cotangents) en différents points d'une variété. Cela peut s'effectuer à l'aide de la théorie des groupes (et c'est là que la section précédente entre en action) et de fonctions dites de transition.

Définition 26. Un fibré vectoriel (P, M, π) de fibre type V est dit **associé** à un fibré principal sur M de fibre type G , où G est un groupe de Lie, s'il existe une représentation ρ de G sur V telle que G opère à gauche sur V par l'intermédiaire de cette représentation.

Un tel fibré sera appelé **fibré associé à P via l'action de G sur V** , et son espace total sera noté $E = P \times_\rho V$.

Définition 27. Soit (E, M, π) un fibré associé de fibre type V et de groupe G , $\{U_\alpha\}$ un recouvrement d'ouverts de M et ρ une représentation de G sur V , alors nous pouvons définir les **fonctions de transition** $t_{\alpha\beta} : U_\alpha \cap U_\beta \rightarrow G$ telles que $\forall p \in U_\alpha \cap U_\beta$, les points $(p, v) \in U_\alpha \times V$ et $(p, v') \in U_\beta \times V$ de E soient identiques si et seulement si $v = \rho(t_{\alpha\beta}(p)) v'$.

Ces fonctions permettent de façon imagée de "recoller" les différents petits fibrés triviaux $U_\alpha \times V$ entre eux, et donc nous permettent de "passer" d'un espace tangent à un autre. Elles peuvent également définir à elles seules un fibré vectoriel à condition de respecter la règle triviale $t_{\alpha\alpha} = 1$ ainsi que la condition dite de cocycle $t_{\alpha\beta} t_{\beta\gamma} t_{\gamma\alpha} = 1$.

Nous pouvons maintenant définir la notion de transformation de jauge. L'idée intuitive est de remplacer l'élément $g \in G$ agissant sur V , et identique pour tout p , par une transformation locale $g : M \rightarrow G$.

Définition 28. Une **transformation (locale) de jauge** (ou plus sympathiquement un automorphisme vertical) est un endomorphisme $T : E \rightarrow E$ tel que $\forall p \in M$, F_p est stable sous l'action de T , et tel qu'il existe une fonction g , généralement *smooth*, définie sur M telle que $\forall p \in M$, $g(p) \in G$ et $T : (p, v) \rightsquigarrow (p, \rho(g(p))v)$.

L'ensemble des transformations de jauge (pour un groupe initial G donné) est un groupe noté $\mathcal{G}$.

Il est à noter que dans un souci de clarté des expressions, nous suivrons l'abus de langage classique qui consiste à noter gs le résultat d'une transformation de jauge $g \in \mathcal{G}$ sur s , et ce en faisant abstraction de la représentation nécessaire à cette action.

Définition 29. Un concept (qui peut être un espace, une équation, une propriété, etc...) est dit **invariant sous transformation de jauge** si, lorsque celui-ci est vérifié pour s , il l'est également pour gs pour tout $g \in \mathcal{G}$.

Rappelons-nous la notion de champ de vecteur, ou de champ de covecteur. Le formalisme des fibrés permet de redéfinir cette notion de façon élégante.

Définition 30. Une **section** de fibré est une fonction $s : M \rightarrow E$ telle que $\forall p \in M$, $s(p) \in F_p$.

De part cette définition, si (E, M, π) est un fibré tangent, alors une section de (E, M, π) est un champ de vecteur sur M . De même, si (E, M, π) est un fibré cotangent, alors toute section sera un champ de covecteur sur M . Il est également possible de définir un fibré dont la fibre type serait un espace tensoriel afin de définir tout champ de tenseur comme une section de fibré.

Nous noterons $\Gamma(E)$ l'ensemble des sections d'un fibré (E, M, π) .

Nous allons maintenant introduire la notion importante de *champ de repère*.

Définition 31. Un **champ de repère** est une application $e : \Gamma(U_p \times F) \rightarrow \Gamma(E)$, définie pour tout point $p \in M$. Son expression en termes de coordonnées est donnée par $e(\xi_I) = e_I^\alpha \partial_\alpha$, où α est un indice de l'espace tangent à M et I est un indice interne relatif à une base de section $\{\xi_I\}$ du fibré trivial $U_p \times F$.

En réalité, une telle application permet d'envoyer la base standard $\{\xi_I\}$ de la fibre type sur une base de l'espace tangent en un point p , d'où son nom de champ de repère. Dans le cas d'un espace tangent à 3 dimensions, un champ de repère sera appelé **champ de triade**, et à 4 dimensions un **champ de tétrade**.

Définition 32. Un **champ de cotriade** (resp. champ de cotétrade) e_α^I est l'application inverse d'un champ de triade (resp. tétrade).

2.4 Connexions et holonomies

Nous arrivons maintenant à la notion principale nécessaire à la bonne compréhension de la Gravité Quantique à Boucles. Il s'agit de la notion de *connexion*.

Définition 33. Soit (E, M, π) un fibré vectoriel. Une **connexion** D sur M est une application qui à tout champ de vecteur v sur M associe une application $D_v : \Gamma(E) \rightarrow \Gamma(E)$ telle que :

$$\begin{aligned} D_v(\alpha s) &= \alpha D_v s \\ D_v(s + t) &= D_v s + D_v t \\ D_v(fs) &= v(f)s + f D_v s \\ D_{v+w}s &= D_v s + D_w s \\ D_{fv}s &= f D_v s \end{aligned} \tag{2.9}$$

pour tout v, w champ de vecteur sur M , $s, t \in \Gamma(E)$, $f \in C^\infty(M)$ et α scalaire.

Définition 34. Soit v un champ de vecteur sur M et s une section de E , alors $D_v s$ est appelé **dérivée covariante** de s dans la direction v .

Les connexions sont bien souvent définies, non pas par leur dérivée covariante, mais bien par un artifice appelé *potentiel vecteur*.

Définition 35. Le **potentiel vecteur** est l'ensemble des composantes $A_{\mu j}^i$, où μ est un indice de l'espace tangent à M et i, j sont des indices internes relatifs à une base $\{e_i\}$ de $\Gamma(E)$, telles que :

$$D_\mu e_j = D_{\partial_\mu} e_j = A_{\mu j}^i e_i. \tag{2.10}$$

On vérifie aisément la relation suivante :

$$D_v s = D_{(v^\mu \partial_\mu)} s^i e_i = v^\mu (\partial_\mu s^i + A_{\mu j}^i s^j) e_i, \tag{2.11}$$

ce qui conduit à la formule bien connue :

$$(D_\mu s)^i = \partial_\mu s^i + A_{\mu j}^i s^j. \tag{2.12}$$

Signalons que, par abus de langage, la formule (2.12) est souvent écrite :

$$D_\mu s^i = \partial_\mu s^i + A_{\mu j}^i s^j. \tag{2.13}$$

Un autre abus de langage, qu'il convient absolument de préciser, est donné par le terme de connexion lui-même. En effet, les physiciens ont pour habitude d'utiliser le terme de connexion, non pas pour l'application D_μ , mais pour le potentiel vecteur A_μ .

Nous conserverons cette "appellation double", et ce dans un souci de correspondance avec la littérature. Afin de clarifier les choses, nous réserverons les symboles

D, ∇ à la véritable connexion, tandis que les symboles A, K, Γ seront utilisés pour désigner un potentiel vecteur.

Pour toute connexion, nous pouvons définir l'application de $\Gamma(E)$ dans $\Gamma(E)$ suivante :

Définition 36. L'opérateur de **courbure** $F(v, w) : \Gamma(E) \rightarrow \Gamma(E)$ est défini pour tout champ de vecteur v, w et pour toute section s par :

$$F(v, w)s = D_v D_w s - D_w D_v s - D_{[v, w]}s, \quad (2.14)$$

où $[v, w] = vw - wv$ est l'algèbre de Lie des commutateurs.

La formule (2.14) peut s'écrire également en fonction du potentiel vecteur sous une forme tensorielle :

$$F_{\mu\nu}^j = \partial_\mu A_{\nu i}^j - \partial_\nu A_{\mu i}^j + A_{\mu k}^j A_{\nu i}^k - A_{\nu k}^j A_{\mu i}^k. \quad (2.15)$$

Venons-en maintenant à certaines connexions particulières. Considérons pour cela que nous avons affaire à un fibré tangent (i.e. l'ensemble des champs de vecteur et l'ensemble des sections coïncident).

Définition 37. On dit d'une connexion D qu'elle est **sans torsion** si pour tout $v, w \in \Gamma(E)$:

$$D_v w - D_w v = [v, w]. \quad (2.16)$$

Définition 38. On dit d'une connexion D qu'elle est **compatible avec la métrique** g si pour tout $v, w \in \Gamma(E)$:

$$\partial_\sigma g_{\mu\nu} v^\mu w^\nu = g_{\mu\nu} (D_\sigma v)^\mu w^\nu + g_{\mu\nu} v^\mu (D_\sigma w)^\nu. \quad (2.17)$$

Théorème 39. Pour toute métrique g de type Lorentzienne donnée, il existe une et une seule connexion ∇ qui soit sans torsion et compatible avec g .

Définition 40. La connexion ∇ est appelée **connexion de Levi-Civita**, et les composantes de son potentiel vecteur $\Gamma_{\alpha\beta}^\gamma$ sont appelées **symboles de Christoffel**.

Définition 41. Le tenseur de courbure relatif à la connexion de Levi-Civita, noté $R_{\mu\nu\rho}^\sigma$, est appelé **tenseur de courbure de Riemann**.

Ses différentes contractions $R_{\mu\rho} = R_{\mu\nu\rho}^\nu$ et $R = g^{\rho\mu} R_{\mu\rho}$ sont appelées respectivement **tenseur de Ricci** et **courbure scalaire** et jouent un rôle crucial au sein de la Relativité Générale.

La notion de connexion peut être étendue à des espaces plus généraux de type tensoriel. Dans ce cas, la relation entre la connexion et son potentiel vecteur devient :

$$(D_\mu X)_{\beta_1 \dots \beta_s}^{\alpha_1 \dots \alpha_r} = \partial_\mu X_{\beta_1 \dots \beta_s}^{\alpha_1 \dots \alpha_r} + \sum_{i=1}^r A_{\mu\lambda}^{\alpha_i} X_{\beta_1 \dots \beta_s}^{\alpha_1 \dots \lambda \dots \alpha_r} - \sum_{i=1}^s A_{\mu\beta_i}^\lambda X_{\beta_1 \dots \lambda \dots \beta_s}^{\alpha_1 \dots \alpha_r}, \quad (2.18)$$

où λ est inséré à la place d'indice i , remplaçant le terme de même indice.

Cette nouvelle expression nous permet de démontrer le résultat suivant :

Théorème 42. *Si D est compatible avec la métrique g , alors $D_\alpha g_{\mu\nu} = 0$.*

Démonstration. Puisque D est compatible avec la métrique,

$$\begin{aligned}\partial_\alpha g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu &= g_{\mu\nu} D_\alpha dx^\mu dx^\nu + g_{\mu\nu} dx^\mu D_\alpha dx^\nu \\ &= g_{\mu\nu} A_{\alpha\lambda}^\mu dx^\lambda dx^\nu + g_{\mu\nu} dx^\mu A_{\alpha\lambda}^\nu dx^\lambda \\ &= g_{\lambda\nu} A_{\alpha\mu}^\lambda dx^\mu dx^\nu + g_{\mu\lambda} dx^\mu A_{\alpha\nu}^\lambda dx^\nu\end{aligned}\tag{2.19}$$

$$\implies \partial_\alpha g_{\mu\nu} = A_{\alpha\mu}^\lambda g_{\lambda\nu} + A_{\alpha\nu}^\lambda g_{\mu\lambda}.\tag{2.20}$$

Et donc,

$$\begin{aligned}D_\alpha g_{\mu\nu} &= \partial_\alpha g_{\mu\nu} - A_{\alpha\mu}^\lambda g_{\lambda\nu} - A_{\alpha\nu}^\lambda g_{\mu\lambda} \\ &= A_{\alpha\mu}^\lambda g_{\lambda\nu} + A_{\alpha\nu}^\lambda g_{\mu\lambda} - A_{\alpha\mu}^\lambda g_{\lambda\nu} - A_{\alpha\nu}^\lambda g_{\mu\lambda} = 0.\end{aligned}\tag{2.21}$$

□

Signalons que l'on peut également étendre la notion de compatibilité avec d'autres champs que le champ de métrique. Nous utiliserons notamment, dans le cadre du chapitre 4, une connexion compatible avec un champ de triade e_I^α , ce qui nous donnera la condition $D_\alpha e_I^\alpha = 0$.

Une telle connexion, définie sur un champ de cotriade, porte le nom spécifique de **connexion de spin**. Son expression est :

$$D_\alpha e_I^\alpha = \partial_\alpha e_I^\alpha + \Gamma_{\alpha I}^J e_J^\alpha,\tag{2.22}$$

où α est un indice tangent et I, J sont des indices internes.

Revenons maintenant un instant sur le rôle du potentiel vecteur. L'expression (2.12) nous montre que celui-ci peut être vu comme un ensemble de coefficients apportant une correction à la dérivée partielle de façon à former une dérivée covariante (qui porte son nom justement en raison de son caractère covariant que ne possède la dérivée partielle).

Il existe une autre manière de considérer le potentiel vecteur. Il suffit de l'exprimer en supprimant les indices internes $A_\mu = A_{\mu j}^i e_i \otimes e^j$ (ou $A(x) = A_\mu x^\mu$ sous sa forme non-tensorielle). De cette façon, A_μ peut être vu comme une 1-forme donnant lieu à un endomorphisme de E dans E .

Rappelons que, dans le cas de l'existence d'un groupe G agissant sur la fibre vectorielle V (i.e. d'un fibré associé), certains endomorphismes de E dans E sont des automorphismes verticaux, c'est-à-dire des transformations de jauge. Nous pouvons donc considérer l'ensemble des connexions (ici potentiels vecteur) donnant lieu à une transformation de jauge relative au groupe G , ce que nous appellerons des G -connexions.

Maintenant, vu qu'un groupe de Lie G peut être considéré comme "engendré" par son algèbre de Lie $\mathfrak{g}$, si A_μ est une G -connexion, alors on peut vérifier que A_μ

peut être vue comme une 1-forme à valeur dans $\mathfrak{g}$.

Si nous faisons un saut dans la théorie de la Gravité Quantique à Boucles elle-même, nous nous trouvons en présence de connexions invariantes sous rotations à 3 dimensions, c'est-à-dire des $\text{SO}(3)$ -connexions. Celles-ci peuvent donc être vues comme des 1-formes à valeur dans $\mathfrak{so}(3)$.

Cependant, nous avons montré à la section 2.2 l'existence d'un isomorphisme entre $\mathfrak{so}(3)$ et $\mathfrak{su}(2)$. En vertu de cet isomorphisme, les physiciens de la théorie ont trouvé plus intéressant de considérer les connexions de la LQG comme des 1-formes à valeur dans l'algèbre $\mathfrak{su}(2)$, et donc comme des $\text{SU}(2)$ -connexions, même s'il persiste un double recouvrement dans le cas du groupe de Lie.

Signalons que pour un groupe de Lie particulier G , il existe différentes connexions donnant lieu à une transformation de $\mathcal{G}$. Cette relation peut être vue comme une relation d'équivalence dans l'espace de toutes les connexions de type G -connexion $\mathcal{A}$, et nous serons amenés à considérer l'espace quotient $\mathcal{A}/\mathcal{G}$.

Il nous reste à présenter une dernière notion liée à celle de la connexion. Il s'agit de l'holonomie. Pour cela, nous devons d'abord expliquer la notion de transport parallèle.

Considérons un fibré vectoriel associé (E, M, π) de groupe G équipé d'une connexion D . Soit $c : [0, 1] \rightarrow M$ une courbe *smooth* sur M et $u(t)$ une section de E définie sur c .

Définition 43. Le champ de vecteur $u(t)$ subit un **transport parallèle** le long de c si et seulement si $D_{c'(t)}u(t) = 0 \ \forall t$.

Cette expression peut s'exprimer également de la façon suivante :

$$\frac{d}{dt}u(t) + A(c'(t))u(t) = 0. \quad (2.23)$$

C'est une équation différentielle linéaire dont la solution est donnée par :

$$u(t) = u(0) - \int_0^t A(c'(t_1))u(t_1)dt_1. \quad (2.24)$$

L'idée est la suivante : insérer l'expression de $u(t)$ en terme d'intégrale à l'intérieur de cette même intégrale :

$$u(t) = u(0) - \int_0^t A(c'(t_1))u(0)dt_1 + \int_0^t \int_0^{t_1} A(c'(t_1))A(c'(t_2))u(t_2)dt_2dt_1, \quad (2.25)$$

et répéter indéfiniment le processus, ce qui donne :

$$u(t) = \sum_{n=0}^{\infty} \left((-1)^n \int_{t \geq t_1 \geq \dots \geq t_n \geq 0} \left(\prod_{i=1}^n A(c'(t_i)) \right) dt_n \dots dt_1 \right) u(0). \quad (2.26)$$

Afin de donner une formulation plus concise de cette dernière équation, les physiciens ont introduit l'opérateur $\mathcal{P}$ servant à ordonner les paramètres des courbes dans l'ordre croissant de leurs valeurs, ce qui donne la relation :

$$\begin{aligned} \int_{t \geq t_1 \geq \dots \geq t_n \geq 0} \left(\prod_{i=0}^n A(c'(t_i)) \right) dt_n \dots dt_1 &= \frac{1}{n!} \int_{t_j \in [0, t]} \mathcal{P} \left(\prod_{i=0}^n A(c'(t_i)) \right) dt_n \dots dt_1 \\ &= \frac{1}{n!} \mathcal{P} \left(\int_0^t A(c'(s)) ds \right)^n. \end{aligned} \quad (2.27)$$

L'expression de $u(t)$ devient alors :

$$u(t) = \mathcal{P} e^{-\int_0^t A(c'(s)) ds} u(0). \quad (2.28)$$

Définition 44. L'opérateur linéaire

$$H_c(A) : F_{c(0)} \rightarrow F_{c(1)} : u(0) \rightsquigarrow u(1) = \mathcal{P} e^{-\int_0^1 A(c'(s)) ds} u(0) \quad (2.29)$$

est appelé **holonomie** de la connexion A le long de c .

Signalons qu'il est possible d'étendre l'opérateur d'holonomie aux courbes *smooth* par morceaux en considérant la composition des holonomies de chacun des morceaux :

$$H_c(A) = H_{c_n}(A) \cdots H_{c_1}(A). \quad (2.30)$$

Il est particulièrement intéressant de considérer l'opérateur d'holonomie le long de certaines courbes très spéciales, les boucles.

Définition 45. Une **boucle** est une courbe $\alpha : [0, 1] \rightarrow M$ telle que $\alpha(0) = \alpha(1) = p$.

L'holonomie se transforme de façon tout à fait particulière sous une transformation de jauge $g \in G$:

$$H_\alpha(A^g) = g(p) H_\alpha(A) g(p)^{-1}, \quad (2.31)$$

où $A_\mu^g = g A_\mu g^{-1} + g \partial_\mu g^{-1}$ désigne la connexion obtenue par transformation de jauge.

L'équation (2.31) nous montre qu'il suffit de prendre la trace de l'opérateur d'holonomie le long d'une boucle pour obtenir un invariant de jauge :

$$\text{tr}(H_\alpha(A^g)) = \text{tr}(g(p) H_\alpha(A) g(p)^{-1}) = \text{tr}(H_\alpha(A)). \quad (2.32)$$

Le concept d'invariance par transformation de jauge est particulièrement important dans le domaine de la physique, car c'est une condition nécessaire pour définir une observable. C'est pourquoi un nom particulier a été attribué à cet opérateur.

Définition 46. L'opérateur $W_\alpha(A) = \text{tr}(H_\alpha(A))$ est appelé le **Wilson loop**.

2.5 Formalisme Hamiltonien avec contraintes

Les équations de la Gravité Quantique à Boucles se basent sur un formalisme Hamiltonien avec contraintes. Bien que le formalisme Hamiltonien soit un élément quasi indispensable des cours de mécanique, sa version avec contraintes n'est que peu souvent évoquée. Aussi, avant de nous lancer dans l'exposé proprement dit de notre théorie, nous allons nous attacher à préciser cette notion de contraintes, et surtout son origine, à savoir un manque de régularité dans le passage aux variables canoniques.

Cette théorie prend ses sources dans les travaux de Dirac [15] et a été largement développée par la suite, par exemple dans [16]. Un court exposé, sur lequel nous nous baserons, se trouve également dans [2].

Considérons la fonction Lagrangienne :

$$L : T_*(\mathcal{C}) \rightarrow \mathbb{C} : (q, \dot{q}) \rightsquigarrow L(q, \dot{q}) \quad (2.33)$$

où $T_*(\mathcal{C})$ représente le fibré tangent relatif à l'espace de configuration $\mathcal{C}$, avec $q = (q^a)_{a \in \underline{m}}$ et $\dot{q} = (\dot{q}^a)_{a \in \underline{m}}$.

Définition 47. La transformation de coordonnées :

$$\rho_L : T_*(\mathcal{C}) \rightarrow T^*(\mathcal{C}) : (q, \dot{q}) \rightsquigarrow (q, p(q, \dot{q})) \quad \text{avec} \quad p(q, \dot{q}) = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}}(q, \dot{q}) \quad (2.34)$$

où $T^*(\mathcal{C})$ représente maintenant le fibré cotangent, est appelée **transformation de Legendre**.

Définition 48. La fonction Lagrangienne L est dite **singulière** si la transformation de Legendre associée n'est pas surjective, i.e. :

$$\det \left(\left(\frac{\partial^2 L}{\partial \dot{q}^a \partial \dot{q}^b} \right)_{a, b \in \underline{m}} \right) = 0. \quad (2.35)$$

En présence d'une fonction Lagrangienne singulière, il est impossible de résoudre les vitesses $\dot{q}^a$ en fonction des moments p_a . Ce problème vient en général du fait que le Lagrangien est invariant sous certaines symétries.

Supposons que le rang de la matrice (2.35) soit $m - r$, où $0 < r \leq m$. Par le théorème des fonctions implicites, nous pouvons résoudre, au moins localement, $m - r$ vitesses en fonction de $m - r$ moments et des vitesses restantes :

$$p_A = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^A}(q, \dot{q}) \implies \dot{q}^A = u^A(q^a, p_B, \dot{q}^i) \quad (2.36)$$

où $a, b, \dots = 1, \dots, m$; $A, B, \dots = r + 1, \dots, m$; $i, j, \dots = 1, \dots, r$ sans perte de généralité.

Nous obtenons également r équations de la forme :

$$p_i = \left[\frac{\partial L}{\partial \dot{q}^i}(q, \dot{q}) \right]_{\dot{q}^A = u^A(q^a, p_B, \dot{q}^j)} = \pi_i(q^a, p_A) \quad (2.37)$$

montrant que les p_a ne sont pas indépendants les uns des autres.

Définition 49. Les fonctions

$$\phi_i(q^a, p_a) = p_i - \pi_i(q^a, p_a) \quad (2.38)$$

sont appelées **contraintes primaires**⁶.

Définition 50. La fonction :

$$H(q^a, p_a, \dot{q}^i) = \left[\sum_b p_b \dot{q}^b - L(q^a, \dot{q}^A, \dot{q}^i) \right]_{\dot{q}^A = u^A(q^a, p_B, \dot{q}^i)} \quad (2.39)$$

est appelée **Hamiltonien primaire**.

Pour plus de simplicité, posons $\lambda^i = \dot{q}^i$, $i = 1, \dots, r$. Ces λ^i sont en réalité les multiplicateurs de Lagrange des contraintes présentes dans la formulation de la fonction Hamiltonienne, comme nous le montre le théorème suivant :

Théorème 51. *L'Hamiltonien primaire H est linéaire en λ^i avec ϕ_i comme coefficients.*

Démonstration.

Nous pouvons réécrire l'Hamiltonien H de la sorte :

$$H(q^a, p_a, \lambda^j) = \sum_A p_A u^A(q^a, p_B, \lambda^j) + \sum_i p_i \lambda^i - L(q^a, u^B(q^a, p_C, \lambda^j), \lambda^j).$$

Par dérivation, nous obtenons :

$$\begin{aligned} \frac{\partial H(q^a, p_a, \lambda^j)}{\partial \lambda^i} &= \sum_A p_A \frac{\partial u^A}{\partial \lambda^i} + p_i - \left(\frac{\partial L(q^a, \dot{q}^B, \lambda^j)}{\partial \lambda^i} \right)_{\dot{q}^B = u^B(q^a, p_C, \lambda^j)} \\ &\quad - \sum_A \left(\frac{\partial L(q^a, \dot{q}^B, \lambda^j)}{\partial \dot{q}^A} \right)_{\dot{q}^B = u^B(q^a, p_C, \lambda^j)} \frac{\partial u^A}{\partial \lambda^i}, \end{aligned}$$

et en regroupant les termes :

$$\begin{aligned} \frac{\partial H(q^a, p_a, \lambda^j)}{\partial \lambda^i} &= \sum_A \left[p_A - \left(\frac{\partial L(q^a, \dot{q}^B, \lambda^j)}{\partial \dot{q}^A} \right)_{\dot{q}^B = u^B(q^a, p_C, \lambda^j)} \right] \frac{\partial u^A}{\partial \lambda^i} \\ &\quad + \left[p_i - \left(\frac{\partial L(q^a, \dot{q}^B, \lambda^j)}{\partial \lambda^i} \right)_{\dot{q}^B = u^B(q^a, p_C, \lambda^j)} \right] \end{aligned}$$

⁶Nous ne rentrerons pas ici dans la théorie des contraintes secondaires de Dirac.

où nous pouvons utiliser l'expression des moments (2.36) pour annuler le premier terme.

Finalement, nous obtenons :

$$\frac{\partial H(q^a, p_a, \lambda^j)}{\partial \lambda^i} = [p_i - \pi_i(q^a, p_a)] = \phi_i(q^a, p_a).$$

□

En conclusion, nous pouvons donc réécrire notre Hamiltonien de la façon suivante :

$$H(q^a, p_a, \lambda^j) = \tilde{H}(q^a, p_a) + \lambda^i \phi_i(q^a, p_a) \quad (2.40)$$

où le nouvel Hamiltonien $\tilde{H}$ est indépendant des multiplicateurs λ^i .

L'espace de phase d'un tel système est donc muni d'un système de coordonnées q^a, p_a . Les différentes contraintes primaires forcent la dynamique du système à rester sur une sous-variété de l'espace de phase définie par les équations $\phi_i = 0, i = 1, \dots, r$. Par contre, les multiplicateurs de Lagrange λ^i ne sont pas déterminés et restent complètement arbitraires.

2.6 C^* -algèbre et triplets de Gel'fand

Nous allons maintenant traiter deux types de structures particulières. Ces structures sont particulièrement importantes car elles constituent la base de la Gravité Quantique à Boucles.

Nous attirons l'attention sur le fait que des connaissances en topologie générale et en analyse fonctionnelle sont nécessaires à la bonne compréhension de cette section. Pour une introduction à la topologie, le lecteur peut se référer à [17].

Le première structure que nous allons évoquer est celle d'une C^* -algèbre. Nous commencerons par quelques définitions classiques, se retrouvant dans la plupart des ouvrages portant sur le sujet, par exemple [18],[19].

Définition 52. Une **algèbre** A est un espace vectoriel⁷ muni d'une opération binaire $A \times A \rightarrow A : (a, b) \rightsquigarrow ab$ qui est associative et distributive. Si de plus cette opération est commutative, alors l'algèbre est dite **abélienne**.

Définition 53. Une **algèbre normée** est une algèbre A équipée d'une norme $\|\cdot\| : A \rightarrow \mathbb{R}^+$ - i.e. telle que $\|a + b\| \leq \|a\| + \|b\|$, $\|za\| = |z| \|a\|$ et $\|a\| = 0 \Leftrightarrow a = 0 \forall a, b \in A, \forall z \in \mathbb{C}$ - qui respecte la condition de compatibilité avec l'opération de multiplication $\|ab\| \leq \|a\| \|b\|$.

⁷Nous prendrons ici $\mathbb{C}$ comme champ de scalaires.

Définition 54. Une algèbre A est dite **unitaire** s'il existe $1 \in A$ tel que $1a = a1 = a \forall a \in A$. Si A est normée, alors la condition $\|1\| = 1$ est ajoutée à celles précédemment citées.

Définition 55. Une **involution** sur une algèbre A est une application $*$: $A \rightarrow A$: $a \rightsquigarrow a^*$ qui satisfait :

$$\begin{aligned} (za + b)^* &= \bar{z}a^* + b^* \\ (ab)^* &= b^*a^* \\ (a^*)^* &= a. \end{aligned} \tag{2.41}$$

Définition 56. Une algèbre munie d'une involution est une ***-algèbre**. Une *-algèbre est dite **normée** si, en plus des conditions de la définition 53, la norme respecte $\|a^*\| = \|a\|$.

Définition 57. Une **C^* -algèbre** A est une *-algèbre de Banach (i.e. munie d'une norme induisant une métrique telle que toute suite de Cauchy converge dans A) respectant la condition de compatibilité entre l'opération d'involution et la métrique :

$$\|a^*a\| = \|a\|^2. \tag{2.42}$$

Définition 58. Le **spectre** $\Delta(A)$ d'une C^* -algèbre de Banach, abélienne et unitaire est l'ensemble des *-homomorphismes⁸ non nuls $\chi : A \rightarrow \mathbb{C}$. Les éléments du spectre sont appelés **caractères**.

La dénomination de *spectre* d'un tel ensemble est justifiée par le résultat suivant : si $a \in A$, alors $z \in \sigma(a)$, où $\sigma(a)$ représente le spectre classique, si et seulement si il existe un caractère $\chi \in \Delta(A)$ tel que $\chi(a) = z$.

Le théorème suivant nous signale que le spectre d'une C^* -algèbre de Banach, abélienne et unitaire est inclus dans le dual topologique⁹ de celle-ci. Une démonstration de ce théorème, ainsi que des théorèmes suivants, se trouve dans [2].

Théorème 59. *Les caractères d'une C^* -algèbre de Banach, abélienne et unitaire forment un sous-ensemble de la sphère unité de A' .*

En raison de ce résultat, nous pouvons munir $\Delta(A)$ d'une topologie particulière de l'espace dual restreinte au spectre.

Définition 60. La **topologie de Gel'fand** sur le spectre d'une C^* -algèbre de Banach, abélienne et unitaire est la topologie faible*¹⁰ restreinte au sous-espace $\Delta(A)$.

⁸Homomorphismes tels que $\phi(a^*) = \phi(a)^*$.

⁹L'ensemble des applications linéaires bornées $A \rightarrow \mathbb{C}$ noté A' .

¹⁰La topologie faible* sur un dual topologique X' de X est la topologie la moins fine rendant continues toutes les injections $J : X \rightarrow X''$ telles que $Jx : f \rightsquigarrow f(x)$.

Nous avons alors le résultat important suivant :

Théorème 61. *La topologie de Gel'fand sur le spectre d'une C^* -algèbre de Banach, abélienne et unitaire est de Hausdorff¹¹. De plus, le spectre $\Delta(A)$ est compact dans cette topologie.*

Dès lors, il devient intéressant de considérer la relation entre une C^* -algèbre et son spectre, donnée par la *transformée de Gel'fand*.

Définition 62. La **transformée de Gel'fand** est définie par :

$$\bigvee : A \rightarrow C(\Delta(A)) : a \rightsquigarrow \tilde{a} \quad \text{t.q.} \quad \tilde{a}(\chi) = \chi(a), \quad (2.43)$$

où $C(\Delta(A))$ désigne l'ensemble des applications continues sur $\Delta(A)$.

Théorème 63. *La transformée de Gel'fand est un $*$ -isomorphisme isométrique pour la norme sup sur $C(\Delta(A))$.*

Le caractère isomorphe de cette transformée est particulièrement intéressant. Il permet notamment de conduire au théorème suivant :

Théorème 64. *Tout espace de Hausdorff compact X est le spectre $X = \Delta(A)$ d'une C^* -algèbre abélienne et unitaire $A = C(X)$.*

En conséquence, tout espace de Hausdorff compact peut être reconstruit à partir du spectre de Gel'fand, lui-même construit sur l'ensemble des fonctions continues sur cet espace.

Venons en maintenant à l'autre structure importante de la Gravité Quantique à Boucles. Il s'agit des *triplets de Gel'fand* ou *rigged Hilbert space*. Cette structure survient traditionnellement lors de la considération de systèmes quantiques. Les informations détaillées pourront être trouvées dans [20], [8].

Considérons un espace de Hilbert $\mathcal{H}_{kin}$ (de dimension infinie) muni d'un jeu d'opérateurs de contraintes $\{\hat{C}_I\}_{I \in \mathcal{I}}$. Cet espace est appelé *cinématique*¹², car il ne contient aucune information sur la dynamique du système, mais sert simplement de "support" aux opérateurs de contraintes.

Nous voulons définir l'*espace physique*, c'est-à-dire l'ensemble des $\psi \in \mathcal{H}_{kin}$ tels que $\hat{C}_I \psi = 0$, $\forall I \in \mathcal{I}$. Ce procédé revient à prendre comme états physiques les différents vecteurs propres des opérateurs de contraintes donnant une valeur propre nulle.

¹¹Pour tout p, q de l'espace, il existe deux voisinages V_p, V_q tels que $V_p \cap V_q = \emptyset$.

¹²*Kinematic* en anglais, ce qui justifie la notation $\mathcal{H}_{kin}$.

Cependant, en raison de la continuité du spectre des opérateurs de contraintes, ceux-ci ne possèdent pas, à proprement parler, des vecteurs propres, mais bien ce que l'on appelle communément des *vecteurs propres généralisés*. Or, ceux-ci peuvent ne pas appartenir du tout à l'espace $\mathcal{H}_{kin}$, ce qui rend caduque notre définition.

La façon conventionnelle de résoudre ce problème est d'introduire un nouvel espace cinématique $\mathcal{D}_{kin} \subset \mathcal{H}_{kin}$ qui est dense dans $\mathcal{H}_{kin}$ pour sa topologie. Cet espace servira de domaine commun à l'ensemble des opérateurs de contraintes et des opérateurs élémentaires de la théorie. Celui-ci est habituellement muni d'une topologie dite *nucléaire* (cf. [18],[19] pour la définition) plus fine que la topologie de la norme héritée de $\mathcal{H}_{kin}$.

Considérons alors le dual algébrique¹³ $\mathcal{D}_{kin}^*$ de $\mathcal{D}_{kin}$. Vu que la topologie de $\mathcal{D}_{kin}$ est plus fine que celle de $\mathcal{H}_{kin}$, l'ensemble dual $\mathcal{D}_{kin}^*$ est plus large que l'ensemble $\mathcal{H}_{kin}^*$. Nous avons donc l'inclusion :

$$\mathcal{H}_{kin}^* \subset \mathcal{D}_{kin}^*. \quad (2.44)$$

Par le théorème de représentation de Riesz, l'ensemble $\mathcal{H}_{kin}^*$ peut être identifié à $\mathcal{H}_{kin}$, ce qui conduit à la relation :

$$\mathcal{D}_{kin} \subset \mathcal{H}_{kin} \subset \mathcal{D}_{kin}^*. \quad (2.45)$$

Définition 65. Un triplet $\mathcal{D} \subset \mathcal{H} \subset \mathcal{D}^*$ est appelé **triplet de Gel'fand**¹⁴.

Ce triplet est habituellement désigné sous la forme de la double inclusion. Nous conserverons cette habitude.

Nous pouvons maintenant définir un état physique.

Définition 66. Un élément $\Psi \in \mathcal{D}_{kin}^*$ est dit un **état physique** si et seulement si $\Psi(\hat{C}_I \psi) = 0$, $\forall I \in \mathcal{I}$ et $\forall \psi \in \mathcal{D}_{kin}$.

Définition 67. L'ensemble des solutions de $\Psi(\hat{C}_I \psi) = 0$, $\forall I \in \mathcal{I}$, $\forall \psi \in \mathcal{D}_{kin}$ est appelé $\mathcal{D}_{phys}^*$.

$\mathcal{D}_{phys}^*$ peut dès lors être considéré comme le dual algébrique d'un sous-espace $\mathcal{D}_{phys} \subset \mathcal{D}_{kin}$. De plus, l'espace $\mathcal{H}_{kin}$ peut être restreint à un nouvel espace $\mathcal{H}_{phys} \subset \mathcal{D}_{phys}^*$ tel que $\mathcal{D}_{phys}$ soit dense dans $\mathcal{H}_{phys}$, ce qui conduit à un nouveau triplet de Gel'fand :

$$\mathcal{D}_{phys} \subset \mathcal{H}_{phys} \subset \mathcal{D}_{phys}^*. \quad (2.46)$$

¹³L'ensemble des formes linéaires sur $\mathcal{D}_{kin}$.

¹⁴En réalité, cette appellation n'est qu'un abus de langage, un véritable triplet de Gel'fand étant un triplet $\mathcal{D} \subset \mathcal{H} \subset \mathcal{D}'$ où $\mathcal{D}'$ est le dual topologique de $\mathcal{D}$, et non algébrique.

Chapitre 3

Le Formalisme de la Gravité Quantique à Boucles

Nous allons maintenant nous attaquer au formalisme propre de la Gravité Quantique à Boucles. Celui-ci se décline en deux versions :

- La version algébrique ou *représentation en terme de boucles* qui fut introduite principalement par Carlo Rovelli et Lee Smolin et qui constitue le côté plutôt ”physique” de la théorie.
- La version différentielle ou *représentation en terme de connexion* qui fut introduite principalement par Abhay Ashtekar et Jerzy Lewandowski et qui constitue le côté plutôt ”mathématique” de la théorie.

Nous essayerons de décrire dans cet ouvrage les deux facettes de la théorie, et ce de façon parallèle afin de montrer leur certaine indépendance ainsi que leur relation. Cependant, la lecture des différentes sections ne pourra se faire de façon indépendante, en raison de définitions conjointes aux deux formalismes.

Commençons d’abord par présenter la base de la théorie.

3.1 Variables et équations de contrainte

Considérons une surface tridimensionnelle σ . Cette surface sera supposée analytique, connexe, orientable, localement compacte¹ et paracompacte². La plupart de

¹Un espace est localement compact si tout point possède un voisinage qui est compact.

²Un espace est paracompact si tout recouvrement d’ouverts admet un raffinement (un recouvrement plus fin tel que tout ouvert est inclus dans un ouvert du recouvrement initial) qui est localement fini (i.e. tel que tout point possède un voisinage n’intersectant qu’un nombre fini d’ouverts du recouvrement). La paracompacité est une propriété nettement plus faible que la compacité.

ces hypothèses ne sont là que pour nous simplifier la tâche, les résultats pouvant être portés à des espaces plus généraux.

Les équations de la Gravité Quantique à Boucles se basent sur un jeu de deux variables canoniques $A_a^j, \tilde{E}_j^a$.

- A_a^j est la $SU(2)$ -connexion réelle sur σ - donc une 1-forme à valeur dans $\mathfrak{su}(2)$ - exprimée en terme des constantes de structures $(T_l)_i^j = \epsilon_{lij}$ de $\mathfrak{su}(2)$ par $A_{ai}^j = A_a^l (T_l)_i^j$. Son expression est donnée par :

$$A_a^j = \Gamma_a^j + \beta K_a^j, \quad (3.1)$$

où $\Gamma_{ai}^j = \Gamma_a^l (T_l)_i^j$ est la connexion de spin (2.22) et K_a^j est une forme dérivée de la seconde forme fondamentale³.

Nous supposons que cette connexion est *smooth*, et désignerons par $\mathcal{A}$ l'ensemble des $SU(2)$ -connexions *smooth* sur σ .

- $\tilde{E}_j^a = \frac{1}{\beta} E_j^a$ est un champ réel appelé *champ électrique* dont la relation avec la métrique q_{ab} sur σ est donnée par l'intermédiaire d'un champ de tétrade e_j^a (et de son inverse e_a^j) par les relations :

$$E_j^a = \frac{1}{2} \det(e) e_j^a, \quad q_{ab} = \delta_{ij} e_a^i e_b^j. \quad (3.2)$$

- σ est munie d'une structure d'algèbre de Poisson :

$$\begin{aligned} \{\tilde{E}_i^a(x), \tilde{E}_j^b(y)\} &= 0, \quad \{A_a^i(x), A_b^j(y)\} = 0, \\ \{\tilde{E}_i^a(x), A_b^j(y)\} &= \kappa \delta_b^a \delta_i^j \delta(x, y). \end{aligned} \quad (3.3)$$

avec $\kappa = \frac{8\pi G}{c^4}$.

- β est un paramètre réel non nul appelé *paramètre d'Immirzi*. Ce paramètre peut également prendre des valeurs complexes, mais conduit dans ce cas à une formulation en terme d'une connexion $\mathbb{C}A_a^j$ complexe, ce qui engendre une complication non négligeable de la théorie (voire la discussion au chapitre 4 à ce sujet). Néanmoins, celui-ci reste libre, ce qui invite à considérer la Gravité Quantique à Boucles comme une théorie à un degré de liberté.
- $a, b, c, d, \dots = 1, 2, 3$ sont des indices à valeur dans l'espace tangent en un point x de σ . $i, j, k, l, \dots = 1, 2, 3$ sont des indices internes à valeur dans l'algèbre de Lie $\mathfrak{su}(2)$.

³cf. chapitre 4 pour les détails.

Signalons que la connexion A est définie sur un fibré tangent associé d'espace de base σ et de groupe de jauge $SU(2)$. Elle doit donc posséder une expression différente A_α sur chaque trivialisation locale $U_\alpha \times V$. Pour plus de simplicité, nous supposerons que nous travaillons dans une trivialisation locale particulière, ou que le fibré est globalement trivial, ce qui revient au même.

Les équations de contrainte de la Gravité Quantique à Boucles sont les suivantes :

$$\begin{aligned}\tilde{D}_a \tilde{E}_j^a &= 0, \\ \tilde{F}_{ab}^j \tilde{E}_j^b &= 0, \\ \left(\tilde{F}_{ab}^j + \frac{(\beta^2 + 1)}{\beta^2} \epsilon_{jmn} (A_a^m - \Gamma_a^m) (A_b^n - \Gamma_b^n) \right) \epsilon_{jkl} \tilde{E}_k^a \tilde{E}_l^b &= 0,\end{aligned}\tag{3.4}$$

avec $\tilde{D}_a$ la dérivée covariante et $\tilde{F}_{ab}^j$ la forme de courbure, toutes deux relatives à A_a^j .

Ces équations sont respectivement appelées *contrainte de Gauss*, *contrainte de difféomorphisme* et *contrainte Hamiltonienne*.

- La contrainte de Gauss impose l'invariance du système sous une transformation locale de jauge du groupe $SU(2)$.
- La contrainte de difféomorphisme, comme son nom l'indique, impose l'invariance du système par difféomorphisme. De façon intuitive, ces deux premières contraintes décrivent la géométrie de la variété à 3 dimensions σ .
- La contrainte Hamiltonienne est ce que l'on pourrait appeler "l'équation d'évolution" du système, bien qu'il n'y ait aucune dynamique dans la théorie. Simplement, cette équation décrit l'agencement des variétés tridimensionnelles résultant des deux premières contraintes. Il est donc possible de la voir comme une équation décrivant la "dynamique" de la variété σ , mais le caractère covariant de la théorie n'implique en aucun cas que cette "dynamique" se déroule suivant une variable spécifiquement temporelle. Il est donc préférable de la considérer comme une condition d'ajustement des variétés, ce qui justifie son appellation de contrainte. Signalons que, de ce fait, le caractère covariant de la théorie, bien que présent, n'est guère explicite.

Les trois équations citées décrivent la partie gravitationnelle de la théorie. Elles peuvent, à notre sens, être posées comme postulat, et ce en raison des faibles conditions imposées.

Il existe une justification de ces équations à partir de la théorie de la Relativité Générale d'Einstein. Celle-ci sera présentée au chapitre 4 de cet ouvrage. Seulement, cette justification se base sur des conditions nettement plus fortes que celles

nécessaires à la formulation de la théorie en tant que telle. C'est pourquoi nous ne considérerons pas ces équations comme dérivées explicitement de la GR, mais bien comme une nouvelle base de notre théorie. Une dérivation de ces équations dans un cas tout-à-fait général serait évidemment très bien venue.

Ce système doit maintenant être quantifié, comme nous l'avons expliqué à la section 1.3. Pour cela, il est nécessaire de définir un espace de Hilbert $\mathcal{H}$ cinématique servant de base pour les observables et les contraintes. Cet espace sera ensuite restreint en fonction des contraintes afin d'arriver au véritable espace des états physiques $\mathcal{H}_{phys}$.

Vu que nous sommes en présence de trois contraintes au comportement différent, cette restriction peut très bien s'effectuer par étapes. $\mathcal{H}_0$ sera le sous-espace de $\mathcal{H}$ invariant sous transformation de jauge, tandis que $\mathcal{H}_{diff}$ sera le sous-espace de $\mathcal{H}_0$ invariant par difféomorphisme. Enfin, $\mathcal{H}_{phys}$ sera l'espace "dynamique", solution de la contrainte Hamiltonienne.

En résumé, nous avons la séquence d'espaces suivante :

$$\mathcal{H} \longrightarrow \mathcal{H}_0 \longrightarrow \mathcal{H}_{diff} \longrightarrow \mathcal{H}_{phys}. \quad (3.5)$$

Il est à noter que ces espaces sont en réalité présents sous la forme de triplets de Gel'fand, comme expliqué à la section 2.6.

Comme nous l'avons signalé dans notre introduction, nous ne présenterons pas la résolution des contraintes, et nous renvoyons le lecteur à [2] pour une présentation détaillée. Nous nous focaliseront essentiellement sur la détermination de l'espace cinématique $\mathcal{H}$, même si des solutions de la contrainte de Gauss, étant particulièrement simples, seront présentées en cours de route.

3.2 La représentation algébrique

Nous suivrons d'abord l'approche par "boucles", qui a le mérite d'avoir donné son nom à la théorie. Elle est traditionnellement désignée par le qualificatif de *représentation algébrique* ou *représentation en terme de boucles*.

Cette représentation est principalement basée sur l'opérateur d'holonomie présenté à la section 2.4. Elle fut initialement introduite dans [21] et [22]. L'ouvrage de Rovelli [1], bien qu'il soit peu friand de détails, expose les principales idées actuelles de la théorie. Un résumé, dont il existe une traduction française, est donné dans [23].

L'algèbre des boucles

L'algèbre des boucles constitue probablement le point de départ de la Gravité Quantique à Boucles. Ce formalisme a été exposé sous bon nombre de versions différentes, avant d'arriver à la notion de *réseau de spin* qui l'a pour ainsi dire remplacé et que nous présenterons par la suite.

Nous nous focaliserons sur une version particulière (celle qui a vu l'émergence du produit scalaire) qui est présentée entre autres dans [24]. Il va de soi que cette présentation possède essentiellement un intérêt historique et introductif.

Nous utiliserons pour ce formalisme la version spinorielle des variables d'Ashtekar :

$$\begin{aligned} A_a(x) &= -\frac{i}{2} A_a^i(x) \sigma_i \\ \tilde{E}^a(x) &= -i \tilde{E}_i^a(x) \sigma_i, \end{aligned} \quad (3.6)$$

σ_i désignant les matrices de Pauli définies à la section 2.2 ($-\frac{i}{2}\sigma_i$ étant les générateurs de $\mathfrak{su}(2)$).

Nous considérerons l'ensemble $\mathcal{C}$ des courbes continues, orientées, analytiques par morceaux plongées dans σ , c'est-à-dire qu'un élément $c \in \mathcal{C}$ sera donné par une application :

$$c : [0, 1] \rightarrow \sigma : t \rightsquigarrow c(t) \quad (3.7)$$

telle qu'il existe une partition finie $[0, 1] = [t_0 = 0, t_1] \cup [t_1, t_2] \cup \dots \cup [t_{n-1}, t_n = 1]$ telle que c est continue sur $[0, 1]$, analytique sur (t_k, t_{k+1}) et telle que $c([t_k, t_{k+1}])$ est un plongement⁴ d'une variété différentiable unidimensionnelle dans σ , pour $k = 1, \dots, n-1$.

Définition 68. Pour $c \in \mathcal{C}$, les quantités :

$$b(c) = c(0), \quad f(c) = c(1), \quad r(c) = c([0, 1]) \quad (3.8)$$

sont appelées respectivement **point initial**, **point final** et **image** de c .

Nous pouvons munir $\mathcal{C}$ d'une loi de composition (non-associative) par :

$$(c_1 \sharp c_2)(t) = \begin{cases} c_1(2t) & \text{si } t \in [0, \frac{1}{2}] \\ c_2(1 - 2t) & \text{si } t \in [\frac{1}{2}, 1], \end{cases} \quad (3.9)$$

pour tout $c_1, c_2 \in \mathcal{C}$ tels que $f(c_1) = b(c_2)$, ainsi que d'une opération d'inversion :

$$c^{-1}(t) = c(1 - t). \quad (3.10)$$

Sous nos nouvelles notations, une boucle continue, orientée, analytique par morceaux plongée dans σ sera un élément $\alpha \in \mathcal{C}$ tel que $b(\alpha) = f(\alpha)$.

⁴Un immersion d'une variété U dans une variété V est l'image $\zeta(U)$ d'une application $\zeta : U \rightarrow V$ différentiable. Si de plus cette application est injective, l'immersion est appelée plongement.

Définition 69. Une **multiboucle** est une combinaison linéaire formelle finie de produits formels finis de boucles, i.e.

$$\alpha = b_0 + \sum_i b_i [\alpha_i] + \sum_{j,k} b_{j,k} [\alpha_j] \cdot [\alpha_k] + \dots \quad (3.11)$$

où $b_0, b_i, b_{j,k}, \dots$ sont des coefficients complexes arbitraires.

Remarquons que les boucles ne sont que des cas particuliers de multiboucles. C'est pour cette raison que la notation α est employée conjointement pour les deux catégories.

Définition 70. L'ensemble des multiboucles est appelé **algèbre des boucles**.

Rappelons-nous la notion d'holonomie et de Wilson loop de la section 2.4. Prenons une boucle α et un ensemble de point $s_1, s_2, \dots, s_n \in r(\alpha)$.

Pour plus de simplicité, définissons les notations suivantes :

$$H_\alpha(A; s_i, s_j) = \mathcal{P}e^{-\int_{t_i}^{t_j} A(\alpha'(s))ds} \quad (3.12)$$

où les t_k sont tels que $\alpha(t_k) = s_k$, ce qui revient à dire que $H_\alpha(A; s_i, s_j)$ est l'holonomie de la restriction de α entre ses points images s_i et s_j . Un cas particulier est cependant donné par $H_\alpha(A; s, s)$ qui est l'holonomie de la boucle entière considérée comme basée en s .

Définition 71. Les **variables de boucles** sont les éléments :

$$\begin{aligned} \mathcal{T}_{[\alpha]}[A] &= -\text{tr}(H_\alpha(A)) = -W_\alpha(A), \\ \mathcal{T}_{[\alpha]}^a[A](s) &= -\text{tr}\left(H_\alpha(A; s, s)\tilde{E}^a(s)\right), \\ \mathcal{T}_{[\alpha]}^{a_1 a_2}[A](s_1, s_2) &= -\text{tr}\left(H_\alpha(A; s_1, s_2)\tilde{E}^{a_2}(s_2)H_\alpha(A; s_2, s_1)\tilde{E}^{a_1}(s_1)\right), \\ &\dots \\ \mathcal{T}_{[\alpha]}^{a_1 \dots a_N}[A](s_1, \dots, s_N) &= -\text{tr}\left(H_\alpha(A; s_1, s_N)\tilde{E}^{a_N}(s_N)H_\alpha(A; s_N, s_{N-1})\tilde{E}^{a_{N-1}}(s_{N-1}) \dots \right. \\ &\quad \left. \dots H_\alpha(A; s_2, s_1)\tilde{E}^{a_1}(s_1)\right). \end{aligned} \quad (3.13)$$

Signalons que, en raison de l'équation (2.32), ces variables de boucles sont des éléments invariants par transformation de jauge. Elles conduisent donc à des solutions de l'équation de Gauss et, plus précisément, à la détermination du sous-espace $\mathcal{H}_0 \subset \mathcal{H}$ invariant par transformation de jauge plutôt qu'à l'espace

cinématique $\mathcal{H}$ lui-même.

Ces fonctions peuvent être étendues à l'ensemble de l'algèbre de boucles de la façon suivante :

$$\mathcal{T}_{[\alpha]}[A] = -2b_0 + \sum_i b_i \mathcal{T}_{[\alpha_i]}[A] + \sum_{j,k} b_{j,k} \mathcal{T}_{[\alpha_j]}[A] \mathcal{T}_{[\alpha_k]}[A] + \dots \quad (3.14)$$

où α est maintenant une multiboucle.

La justification du -2 vient du fait que le premier terme correspond à une "boucle point" pour laquelle l'holonomie est l'identité et que la trace donne un 2 en raison de la dimension de $SU(2)$.

Ces variables coordonnent l'espace de phase en le munissant d'une algèbre de Poisson dont les premières relations sont données par :

$$\begin{aligned} \{\mathcal{T}_{[\alpha]}[A], \mathcal{T}_{[\beta]}[A]\} &= 0, \\ \{\mathcal{T}_{[\alpha]}[A], \mathcal{T}_{[\beta]}^a[A](s)\} &= \kappa \Delta^a[\alpha, s] (\mathcal{T}_{[\alpha \#_s \beta]}[A] - \mathcal{T}_{[\alpha \#_s \beta^{-1}]}[A]), \end{aligned} \quad (3.15)$$

où $\Delta^a[\alpha, s] = \int_0^1 \frac{d\alpha^a(t)}{dt} \delta^3(\alpha(t), s) dt$ n'est non nul que si $s \in r(\beta)$ appartient à $r(\alpha)$ ⁵.

Ces variables possédaient initialement un intérêt particulièrement important. En effet, en raison de l'invariance de la trace de l'holonomie (Wilson loop) sous $SU(2)$ (cf. section 2.4), ces variables résolvait la première des contraintes. De plus, la contrainte liée au difféomorphisme était complètement résolue par les variables de boucles ne dépendant que du nouage des boucles. Enfin, certains états particuliers, relatifs aux boucles ne se recoupant pas elles-mêmes, étaient solutions de la contrainte Hamiltonienne sous sa forme la plus simple, c'est-à-dire pour $\beta = \pm i$.

Ces considérations ont donc conduit à la définition des états quantiques suivants :

Définition 72. Les états de multiboucles $|\alpha\rangle$ sont définis par :

$$\langle A | \alpha \rangle = \mathcal{T}_{[\alpha]}[A]. \quad (3.16)$$

Cette définition doit être interprétée de la même manière que la relation :

$$\langle x | \psi \rangle = \psi(x) \quad (3.17)$$

en Mécanique Quantique usuelle.

⁵ $\alpha \#_s \beta$ désigne la boucle obtenue intuitivement en suivant α jusque s , puis β considérée comme une boucle basée en s , avant de terminer par le reste de α .

Ces états forment un ensemble générateur de notre espace quantifié, plus précisément de $\mathcal{H}_0$, et donc tout état $|\psi\rangle$ générique est complètement caractérisé par ses projections sur les états de multiboucles :

$$\langle \alpha | \psi \rangle = \psi[\alpha]. \quad (3.18)$$

Malheureusement, cette base est plus que complète (ses éléments ne sont pas indépendants), car elle souffre de ce qui est appelé dans la littérature les **relations de Mandelstam** :

$$|\alpha\rangle = |\beta\rangle \quad \text{ssi} \quad \mathcal{T}_{[\alpha]}(A) = \mathcal{T}_{[\beta]}(A) \quad \forall A \in \mathcal{A}. \quad (3.19)$$

Les principales conséquences de cette non-unicité sont les suivantes :

1. Un état $|\alpha\rangle$ ne dépend pas de l'orientation de α , i.e. $|\alpha\rangle = |\alpha^{-1}\rangle$.
2. Un état $|\alpha\rangle$ ne dépend pas la paramétrisation de α , i.e. $|\alpha\rangle = |\beta\rangle$ s'il existe un changement de paramétrisation τ tel que $\alpha(t) = \beta(\tau(t))$.
3. Si c est une courbe telle que $b(c) \in r(\alpha)$, alors $|\alpha\rangle = |\alpha \#_{b(c)} (c \# c^{-1})\rangle$.
4. $[\alpha] \cdot [\beta] \sim -[\alpha \#_s \beta] - [\alpha \#_s \beta^{-1}]$.

Ce sont ces relations qui ont poussé à la recherche d'une réelle base non redondante de l'espace $\mathcal{H}_0$, ce qui a conduit à la notion de *réseau de spin*.

Les réseaux de spin

La notion de réseau de spin vient d'une idée de Roger Penrose [25] d'appliquer la théorie des graphes à la quantification discrète de la géométrie. Elle fut progressivement introduite en Gravité Quantique, notamment dans [26].

Nous commencerons bien entendu par quelques définitions propres à la théorie des graphes, mais nous les introduirons à partir de notre espace de courbes $\mathcal{C}$.

Définition 73. Deux courbes $c, c' \in \mathcal{C}$ sont **équivalentes**, $c \sim c'$, si et seulement si $b(c) = b(c')$, $f(c) = f(c')$ et qu'il existe un nombre fini de retracements⁶ et un changement de paramétrisation rendant c' identique à c .

Définition 74. La classe d'équivalence d'une courbe $c \in \mathcal{C}$ est notée p_c et appelée **chemin**. L'ensemble des chemins sur σ est noté $\mathcal{P}$.

Il est évident que les lois de composition et d'inversion sur $\mathcal{C}$ s'étendent à $\mathcal{P}$ par $p_c \# p_{c'} = p_{c \# c'}$ et $p_c^{-1} = p_{c^{-1}}$.

⁶Un retracement d'une partie de courbe $\tilde{c}$ est simplement un "aller-retour" $\tilde{c} \# \tilde{c}^{-1}$ (qui n'est pas assimilable à un point $b(\tilde{c})$).

Définition 75. Une **arête** e est un éléments de $\mathcal{P}$ qui est analytique sur tout $[0, 1]$.

Tout chemin est donc une composition finie d'arêtes.

Définition 76. Les points initial et final d'une arête sont appelés **sommets**. La **valence** d'un sommet est le nombre d'arêtes commençant ou aboutissant à ce sommet.

Définition 77. Un ensemble fini d'arêtes $\{e_1, \dots, e_n\}$ est dit **indépendant** si les différentes intersections entre les arêtes sont toutes dans l'ensemble $\{b(e_k), f(e_k)\}_{k \in \underline{n}}$.

Définition 78. Un **graphe orienté** γ plongé dans σ est l'union de l'image d'un ensemble indépendant d'arêtes $\cup_{k \in \underline{n}} r(e_k)$ où $r(e_k)$ est orienté en fonction de e_k .

Définition 79. Pour un graphe donné γ , $E(\gamma) = \{e_1, \dots, e_n\}$ est l'ensemble des arêtes analytiques orientées maximales de γ et $V(\gamma) = \{b(e_k), f(e_k)\}_{k \in \underline{n}}$ est l'ensemble des sommets.

Nous pouvons maintenant construire un réseau de spin de la manière intuitive suivante.

Prenons un état de multiboucle α et considérons son image dans σ , i.e. $\cup_i r(\alpha_i)$ où $\{\alpha_i\}$ est l'ensemble des boucles composant la multiboucle α .

Cette image forme un graphe γ plongé dans σ pour lequel nous pouvons définir une orientation. L'ensemble des sommets $V(\gamma)$ est donné par l'ensemble des points d'intersection des images des boucles complété de l'ensemble des points où le caractère analytique des boucles est absent (rappelons que nous travaillons avec des boucles analytiques par morceaux). $E(\gamma)$ est l'ensemble des arêtes maximales.

Par l'artifice de cette construction, certaines des relations de Mandelstam (1,2 et 3) sont déjà éliminées. En effet, le fait de considérer des arêtes plutôt que des courbes engendre une indépendance vis-à-vis des différentes paramétrisations et retracements.

Remarquons que rien n'interdit que deux boucles ou plus soient, du moins en partie, superposées. Nous nous trouvons donc en face de plusieurs catégories d'arêtes : celles représentant une seule partie de boucle, celles représentant deux parties de boucles parallèles, etc. Nous pouvons alors introduire une *coloration* du graphe en associant à chaque arête un nombre entier, sa *couleur*, représentant le nombre de "brins", ou parties de boucles parallèles, composant l'arête.

Venons-en maintenant aux intersections intervenant aux sommets du graphe. Celles-ci sont à priori quelconques, les brins y aboutissant étant noués deux par deux. Or, certaines opérations de "recouplement", que nous ne détaillerons pas ici, conduisent à des états similaires par la règle 4. Il convient donc de trouver une "règle de nouage" des différents brins garantissant des états différents sous les

relations de Mandelstam.

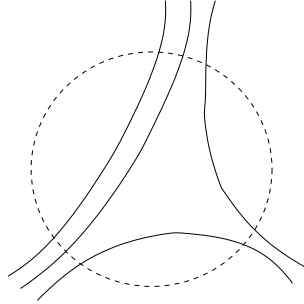
Cette règle peut s'exposer de la manière suivante. Tout sommet de valence n peut être décomposé en $n - 2$ sommets chacun de valence 3 et reliés par $n - 1$ arêtes virtuelles. Les différentes décompositions possibles sont les différents états possibles pour ce sommet, le nouage pour chacun des sommet de valence 3 étant unique.

Les sommets de valence 3 restant sont cependant soumis aux conditions suivantes permettant de rendre le nouage possible : la somme des couleurs des 3 arêtes, éventuellement virtuelles, doit être paire et chacune de ces couleurs ne peut être plus grande que la somme des deux autres. Le lecteur vérifiera aisément la nécessité de ces conditions, qui sont appelées *conditions de Clebsch-Gordon*.

De plus, les relations de Mandelstam interdisent le nouage de brin issus de la même arête. On vérifiera également que, sous cette interdiction, il n'existe qu'un seul nouage possible pour un sommet de valence 3.

Un exemple d'un tel nouage unique est donné à la figure 3.1.

FIG. 3.1 – Exemple de sommet à trois arêtes de couleurs 3, 2 et 3



Cette méthode n'est cependant guère commode pour la définition d'un système formel. Mais en réalité, ces conditions sont simplement liées à la théorie de la représentation du groupe de jauge $SU(2)$, qui est utilisée pour la caractérisation des réseau de spin.

Associons maintenant à chaque arête e , non plus sa couleur, mais bien la quantité moitié j_e . $\{j_e\}_{e \in E(\gamma)}$ est donc un ensemble de demi-entiers. Or les demi-entiers servent d'index à l'ensemble des représentations irréductibles non-triviales de $SU(2)$, et sont appelés *spin* de la représentation, d'où le nom de réseau de spin.

Considérons maintenant un sommet v de valence n et notons $j_1, \dots, j_n$ les spin des n arêtes $e_1, \dots, e_n$ dont v est l'un des sommets. Nous supposons dans un premier temps que toutes ces arêtes sont orientées vers v . Considérons également les représentations $\rho_{j_1}, \dots, \rho_{j_n}$ de $SU(2)$. Rappelons qu'une représentation d'un groupe

de jauge agissant sur un espace vectoriel (ici l'espace tangent) est un homomorphisme de $SU(2)$ dans l'ensemble des applications linéaires sur l'espace vectoriel, autrement dit dans l'ensemble des matrices.

Pour tout $A \in \mathcal{A}$, $e \in E(\gamma)$, définissons $H_e(A)$ comme l'holonomie le long d'une courbe c d'image $r(c) = e$ et orientée dans le même sens que e . $H_e(A)$ est donc une application linéaire sur la fibre vectorielle, i.e. un élément de $SU(2)$. Nous pouvons donc considérer les éléments matriciels $[\rho_{j_e}(H_e(A))]_{\beta}^{\alpha}$, où $\alpha, \beta = 1, \dots, d_{\rho_{j_e}}$ avec $d_{\rho_{j_e}} = 2j_e + 1$ la dimension de la représentation.

Chaque $[\rho_{j_e}(H_e(A))]_{\beta}^{\alpha}$ peut être considéré comme un tenseur à deux indices sur un espace vectoriel $\mathcal{R}_{j_e}$ associé à la représentation ρ_{j_e} . Considérons l'espace des produits tensoriels :

$$\mathcal{R}_{j_1, \dots, j_n} = \mathcal{R}_{j_1} \otimes \dots \otimes \mathcal{R}_{j_n} \quad (3.20)$$

associé à notre sommet v d'arêtes de spin $j_1, \dots, j_n$.

De cet espace, nous pouvons extraire le sous-espace des tenseurs invariants, c'est-à-dire l'ensemble des tenseurs $v^{\alpha_1 \dots \alpha_n} \in \mathcal{R}_{j_1, \dots, j_n}$ tels que :

$$[\rho_{j_1}(H_{e_1}(A))]_{\beta_1}^{\alpha_1} \dots [\rho_{j_n}(H_{e_n}(A))]_{\beta_n}^{\alpha_n} v^{\beta_1 \dots \beta_n} = v^{\alpha_1 \dots \alpha_n}, \quad (3.21)$$

ainsi qu'une base orthonormée $\{v_i\}$ de ce sous-espace en imposant :

$$\overline{v_i^{\alpha_1 \dots \alpha_n}} v_{i'}^{\alpha_1 \dots \alpha_n} = \delta_{ii'}. \quad (3.22)$$

Considérons maintenant le cas général où v possède n_{in} arêtes "entrantes" et n_{out} arêtes "sortantes". D'une façon similaire, nous pouvons extraire une base orthonormée invariante de l'espace $\mathcal{R}_{j_1, \dots, j_{n_{in}}} \otimes \mathcal{R}_{j_1^*, \dots, j_{n_{out}}^*}$, où $\mathcal{R}^*$ représente le dual de $\mathcal{R}$, c'est-à-dire des applications :

$$i = v_i^{\beta_1 \dots \beta_{n_{in}}} v_{i'}^{\alpha_1 \dots \alpha_{n_{out}}} : \mathcal{R}_{j_1, \dots, j_{n_{in}}} \rightsquigarrow \mathcal{R}_{j_1^*, \dots, j_{n_{out}}^*}. \quad (3.23)$$

Définition 80. Pour un sommet v donné d'arêtes de spin $j_1, \dots, j_{n_{in}}, j_1^*, \dots, j_{n_{out}}^*$, une application invariante $i : \mathcal{R}_{j_1, \dots, j_{n_{in}}} \rightsquigarrow \mathcal{R}_{j_1^*, \dots, j_{n_{out}}^*}$ est appelée un **entre-jumelant** ou **interwiner**.

Ces interwiners représentent précisément les différentes possibilités de nouage pour un sommet donné. La théorie dite de *Clebsch-Gordan* fournit l'ensemble des interwiners possibles pour un sommet donné. Un état possible de graphe est donc obtenu en associant un interwiner à chaque sommet du graphe (ces interwiners étant choisis pour chaque sommet dans l'espace $\mathcal{R}_{j_1, \dots, j_{n_{in}}} \otimes \mathcal{R}_{j_1^*, \dots, j_{n_{out}}^*}$ relatif à la coloration des arêtes rejoignant ce sommet).

Définition 81. Un **réseau de spin** $S = (\gamma, \vec{j}, \vec{i})$, avec $\vec{j} = (j_e)_{e \in E(\gamma)}$, $\vec{i} = (i_v)_{v \in V(\gamma)}$, est la donnée d'un graphe γ , d'un spin demi-entier j_e pour chaque arête e de γ et d'un interwiner i_v pour chaque sommet v de γ .

Supposons qu'un réseau de spin $S = (\gamma, \vec{j}, \vec{i})$ ait N sommets et L arêtes. Définissons $|\gamma, \vec{j}, \vec{\alpha}, \vec{\beta}\rangle$, avec $\vec{j} = (j_l)_{l \in \underline{L}}$, $\vec{\alpha} = (\alpha_l)_{l \in \underline{L}}$, $\vec{\beta} = (\beta_l)_{l \in \underline{L}}$, par :

$$\langle A | \gamma, \vec{j}, \vec{\alpha}, \vec{\beta} \rangle = \prod_{l \in \underline{L}} \sqrt{2j_l + 1} [\rho_{j_l}(H_{e_l}(A))]_{\beta_l}^{\alpha_l}. \quad (3.24)$$

Définition 82. Un état de réseau de spin $|S\rangle$ est donné par :

$$|S\rangle = \sum_{\alpha_l, \beta_l} v_{i_1}^{\beta_1 \dots \beta_{n_1}} \alpha_{1 \dots \alpha_{n_1}} v_{i_2}^{\beta_{n_1+1} \dots \beta_{n_2}} \alpha_{n_1+1 \dots \alpha_{n_2}} \dots \\ \dots v_{i_N}^{\beta_{n_{N-1}+1} \dots \beta_L} \alpha_{n_{N-1}+1 \dots \alpha_L} |\gamma, \vec{j}, \vec{\alpha}, \vec{\beta}\rangle, \quad (3.25)$$

où la somme est effectuée sur les β_l pour les arêtes "entrantes" et sur les α_l pour les arêtes "sortantes".

Nous pouvons le réécrire sous une notation similaire à l'état de multiboucle (3.17) :

$$\langle A | S \rangle = \mathcal{T}_{[S]}[A] = \left(\bigotimes_{v \in V(\gamma)} i_v \right) \cdot \left(\bigotimes_{e \in E(\gamma)} \sqrt{d_{\rho_{j_e}}} \rho_{j_e}(H_e(A)) \right), \quad (3.26)$$

avec $d_{\rho_{j_e}} = 2j_e + 1$ la dimension de la représentation ρ_{j_e} .

Les états de réseau de spin forment une base complète d'éléments indépendants.

3.3 La représentation différentielle

Nous allons maintenant exposer ce qui est connu dans la littérature comme la *représentation en terme de connexion*, où *représentation différentielle*, de la Gravité Quantique à Boucles.

Cette représentation, basée sur la théorie de Gel'fand des C^* -algèbres, fut introduite pour la première fois dans [27]. Il existe une quantité impressionnante de publications à ce sujet, notamment [28] où la théorie est présentée pour des espaces plus généraux. Nous suivrons essentiellement [2], [29], [30] et [28].

Les démonstrations étant essentiellement techniques, nous renvoyons le lecteur à [2] pour les preuves détaillées. Signalons que la compréhension de ce formalisme nécessite des connaissances mathématiques nettement plus importantes.

L'idée générale de ce formalisme est d'étendre l'espace des connexions $\mathcal{A}$ à un espace plus large $\overline{\mathcal{A}}$ de type distributionnel. L'espace cinématique sera construit comme un espace de fonctions intégrables sur $\overline{\mathcal{A}}$ par rapport à une mesure μ_0 lui conférant la structure d'un espace de Hilbert, i.e. $\mathcal{H} = L^2(\overline{\mathcal{A}}, d\mu_0)$.

Vu le caractère plus complexe de ce formalisme, nous sectionnerons notre exposé en différentes étapes.

La notion de groupoïde

Nous avons vu qu'un chemin $p_c \in \mathcal{P}$ est la classe d'équivalence d'une courbe c sous retracements et reparamétrisation. Une des conséquences de la possibilité de retracement est que, là où $c \sharp c^{-1}$ restait une courbe non-restreinte à un point, $p_c \sharp p_c^{-1} = p_{c \sharp c^{-1}}$ est égal au chemin stationnant sur le point $b(p_c)$, et donc à un élément neutre. De plus, la composition de chemins devient associative.

Ces propriétés ne permettent pas de conduire à une structure de groupe, car il n'existe pas de neutre global et tous les éléments ne peuvent être composés, mais bien à une structure dénommée *groupoïde*.

Définition 83. Une **catégorie** $\mathcal{K}$ est une classe dont les éléments sont appelés **objets** complétée d'une collection d'homomorphismes $\{hom(x, y)\}_{(x, y) \in \mathcal{K} \times \mathcal{K}}$ pour laquelle il existe une loi de composition des homomorphismes :

$$\circ : hom(x, y) \times hom(y, z) \rightarrow hom(x, z) : (f, g) \rightsquigarrow g \circ f \quad (3.27)$$

possédant la propriété d'associativité ainsi que l'existence d'identités :

$$\begin{aligned} \forall x \in \mathcal{K}, \quad \exists ! id_x \in hom(x, x) \quad \text{t.q.} \\ id_x \circ f = f \quad \forall f \in hom(y, x) \quad \text{et} \quad f \circ id_x = f \quad \forall f \in hom(x, y). \end{aligned} \quad (3.28)$$

Intuitivement, une catégorie est un ensemble tel qu'un homomorphisme est défini pour chacune de ses paires d'éléments.

Définition 84. Une catégorie pour laquelle tout homomorphisme est un isomorphisme est un **groupoïde**.

Nous avons également les notions de **sous-catégorie** et de **sous-groupoïde** pour une sous-classe $\mathcal{K}' \subset \mathcal{K}$ complétée d'une sous-collection $\{hom(x, y)\}_{(x, y) \in \mathcal{K}' \times \mathcal{K}'} \subset \{hom(x, y)\}_{(x, y) \in \mathcal{K} \times \mathcal{K}}$.

Nous considérerons le groupoïde suivant :

- La catégorie est la surface tridimensionnelle σ .
- Les objets sont les points $x \in \sigma$.
- Les isomorphismes sont constitués des différents chemins entre deux points, i.e. $hom(x, y) = \{p \in \mathcal{P} : b(p) = x, f(p) = y\}$.

La loi de composition de cette catégorie se définit naturellement comme la composition de chemins. Etant donné que la collection d'isomorphismes n'est autre que l'ensemble des chemins $\mathcal{P}$, nous désignerons également ce groupoïde par $\mathcal{P}$.

Définition 85. Pour $x_0 \in \sigma$ fixé, l'ensemble $\mathcal{Q} = hom(x_0, x_0)$ est le groupe des classes d'équivalence de boucles basées en x_0 , appelé **hoop group**⁷ dans la littérature.

⁷Pour *holonomical equivalence class of loop*.

Revenons un instant à notre espace de connexions $\mathcal{A}$. Il est clair que si $c \sim c'$, alors $H_c(A) = H_{c'}(A)$ car l'holonomie est indépendante d'une reparamétrisation ou d'un retracement. Dès lors, nous pouvons nous restreindre à considérer l'opérateur d'holonomie sur l'ensemble des chemins $\mathcal{P}$, et définir la notation suivante :

$$A(p) = H_p(A) \quad \forall p \in \mathcal{P}. \quad (3.29)$$

L'opérateur $A(p)$ définit un isomorphisme de $T_{b(p)}(\sigma) \rightarrow T_{f(p)}(\sigma)$, c'est-à-dire un élément du groupe de jauge $\text{SU}(2)$ du fibré associé. De plus, nous avons de façon naturelle une loi de composition $A(p \sharp p') = A(p)A(p')$ ainsi qu'un inverse $A(p^{-1}) = A(p)^{-1}$.

En conséquence, nous pouvons dire que tout $A \in \mathcal{A}$ définit un homomorphisme de groupoïde de l'ensemble des chemins $\mathcal{P}$ à valeur dans le groupe de jauge $\text{SU}(2)$.

Définition 86. $\text{Hom}(\mathcal{P}, \text{SU}(2))$ est l'ensemble de tous les homomorphismes de groupoïde de l'ensemble des chemins sur σ à valeur dans le groupe de jauge $\text{SU}(2)$.

Il est évident que $\mathcal{A} \subset \text{Hom}(\mathcal{P}, \text{SU}(2))$ via l'injection :

$$\mathfrak{H} : \mathcal{A} \rightarrow \text{Hom}(\mathcal{P}, \text{SU}(2)) : A \rightsquigarrow \mathfrak{H}_A, \quad \text{où } \mathfrak{H}_A(p) = A(p), \quad (3.30)$$

mais cette inclusion n'est pas stricte. $\text{Hom}(\mathcal{P}, \text{SU}(2))$ est donc une extension de type distributionnel de l'ensemble des connexions $\mathcal{A}$.

Définition 87. L'ensemble $\overline{\mathcal{A}}$ est défini comme étant l'ensemble distributionnel $\text{Hom}(\mathcal{P}, \text{SU}(2))$.

Limite d'une famille projective

Nous devons maintenant munir cet ensemble d'une structure topologique. Nous renvoyons le lecteur à [17] pour les définitions et résultats principaux relatifs à la topologie générale.

Considérons un ensemble abstrait $\mathcal{L}$ d'index.

Définition 88. $\mathcal{L}$ est un ensemble **partiellement ordonné** s'il existe une relation $\prec$, c'est-à-dire un sous-ensemble de $\{(l, l') : l \prec l'\} \subset \mathcal{L} \times \mathcal{L}$, telle que :

$$\begin{aligned} l &\prec l \\ l \prec l', l' \prec l &\implies l = l' \\ l \prec l', l' \prec l'' &\implies l \prec l'' \end{aligned} \quad (3.31)$$

pour tout $l, l', l'' \in \mathcal{L}$.

Définition 89. $\mathcal{L}$ est **dirigé** si :

$$\forall l, l' \in \mathcal{L} \quad \exists l'' \in \mathcal{L} \quad \text{t.q.} \quad l \prec l'' \quad \text{et} \quad l' \prec l''. \quad (3.32)$$

Nous considérerons que $\mathcal{L}$ est un ensemble partiellement ordonné dirigé.

Définition 90. Une **famille projective** $(\mathcal{X}_l, p_{l'l})_{l \prec l' \in \mathcal{L}}$ est une classe d'ensembles $\mathcal{X}_l$ indexée par $\mathcal{L}$ munie des projections surjectives :

$$p_{l'l} : \mathcal{X}_{l'} \rightarrow \mathcal{X}_l \quad \forall l \prec l' \quad (3.33)$$

satisfaisant la condition :

$$p_{l'l} \circ p_{l''l'} = p_{l''l} \quad \forall l \prec l' \prec l''. \quad (3.34)$$

Définition 91. La **limite projective** $\overline{\mathcal{X}}$ est le sous-ensemble de l'espace produit $\overline{\mathcal{X}} \subset \mathcal{X}_\infty = \bigotimes_{l \in \mathcal{L}} \mathcal{X}_l$ défini par :

$$\overline{\mathcal{X}} = \{ (x_l)_{l \in \mathcal{L}} : p_{l'l}(x_{l'}) = x_l \quad \forall l \prec l' \}. \quad (3.35)$$

Appliquons ces définitions à la théorie des graphes (décrite à la section 3.2), en utilisant l'outil du groupoïde $\mathcal{P}$ défini précédemment.

Définition 92. Pour un graphe γ donné, on désigne par $l(\gamma) \subset \mathcal{P}$ le sous-groupoïde généré par γ , c'est-à-dire que $l(\gamma)$ est composé de l'ensemble d'objets $V(\gamma) \subset \sigma$ ainsi que de la collection d'isomorphismes $\{e\}_{e \in E(\gamma)}$ munie de l'opération inverse et de composition finie.

Théorème 93. Soit $\mathcal{L}$ l'ensemble de tous les sous-groupoïdes $l(\gamma) \subset \mathcal{P}$, alors la relation $l \prec l'$ si et seulement si l est un sous-groupoïde de l' munit $\mathcal{L}$ d'une structure d'ordre partiel dirigé.

Définition 94. Pour tout $l \in \mathcal{L}$, $\mathcal{X}_l = \text{Hom}(l, \text{SU}(2))$ est défini comme étant l'ensemble de tous les homomorphismes du sous-groupoïde l à valeur dans $\text{SU}(2)$.

C'est ici que la notion de finitude du nombre d'arêtes d'un graphe prend toute son utilité. En effet, $\text{SU}(2)$ étant un espace compact de Hausdorff, $\text{SU}(2)^n$ est également compact et de Hausdorff pour tout n .

Or, par la définition de $\mathcal{X}_l$, si $l = l(\gamma)$ pour un graphe γ , tout $x_l \in \mathcal{X}_l$ est complètement déterminé par ses éléments $x_l(e)$, $e \in E(\gamma)$ appartenant au groupe de jauge $\text{SU}(2)$. Il existe donc une bijection :

$$\rho_l : \mathcal{X}_l \rightarrow \text{SU}(2)^{\#E(\gamma)} : x_l \rightsquigarrow (x_l(e))_{e \in E(\gamma)}, \quad (3.36)$$

et nous pouvons munir $\mathcal{X}_l$ d'une topologie compacte de Hausdorff.

Définition 95. Pour $l \prec l'$, définissons la projection :

$$p_{l'l} : \mathcal{X}_{l'} \rightarrow \mathcal{X}_l : x_{l'} \rightsquigarrow x_{l'}|_l \quad (3.37)$$

comme la restriction d'un homomorphisme $x_{l'}$ défini sur le groupoïde l' à son sous-groupoïde $l \prec l'$.

Théorème 96. *Les projections $p_{l'l}$ sont surjectives, continues et satisfont la condition (3.34).*

En conséquence, $(\mathcal{X}_l, p_{l'l})_{l \prec l' \in \mathcal{L}}$ est bien une famille projective. Nous pouvons donc considérer son espace produit $\mathcal{X}_\infty$ et sa limite projective $\overline{\mathcal{X}}$. Il reste à définir une topologie sur ces espaces.

Définition 97. La **topologie produit de Tychonov** sur $\mathcal{X}_\infty$ est la topologie la moins fine rendant continues toutes les projections :

$$p_l : \mathcal{X}_\infty \rightarrow \mathcal{X}_l : (x_{l'})_{l' \in \mathcal{L}} \rightsquigarrow x_l. \quad (3.38)$$

Puisque $\overline{\mathcal{X}} \subset \mathcal{X}_\infty$, la topologie sur $\overline{\mathcal{X}}$ sera bien sûr la topologie induite. Nous avons alors les résultats suivants :

Théorème 98. *Muni de la topologie produit, l'espace $\mathcal{X}_\infty$ est compact et de Hausdorff.*

Théorème 99. *La limite projective $\overline{\mathcal{X}}$ est un ensemble fermé de $\mathcal{X}_\infty$ pour la topologie produit. En conséquence, $\overline{\mathcal{X}}$ est un sous-espace compact de Hausdorff.*

Il nous reste à déterminer la relation entre $\overline{\mathcal{X}}$ et $\overline{\mathcal{A}} = \text{Hom}(\mathcal{P}, \text{SU}(2))$ par l'intermédiaire de l'injection $\mathfrak{H}$.

Théorème 100. *L'application*

$$\overline{\mathcal{A}} = \text{Hom}(\mathcal{P}, \text{SU}(2)) \rightarrow \overline{\mathcal{X}} : \mathfrak{H} \rightsquigarrow (\mathfrak{H}_l)_{l \in \mathcal{L}} \quad (3.39)$$

est une bijection.

En conséquence, nous pouvons munir $\overline{\mathcal{A}}$ d'une topologie qui soit compacte et de Hausdorff.

L'invariance par transformation de jauge

Nous avons déjà parlé, à la section 2.4, qu'il était possible de déterminer le groupe des $\text{SU}(2)$ -connexions invariantes par transformation de jauge en considérant l'espace quotient $\mathcal{A}/\mathcal{G}$, où $\mathcal{G}$ est l'ensemble des transformations de jauge de type *smooth*.

Cette notion d'espace quotient peut être adaptée à notre espace distributionnel $\overline{\mathcal{A}}$ en considérant cette fois-ci l'espace $\overline{\mathcal{G}}$ de toutes les fonctions définies sur σ à valeur dans $\text{SU}(2)$, ce qui peut s'écrire sous la forme du produit direct infini :

$$\overline{\mathcal{G}} = \prod_{x \in \sigma} \text{SU}(2). \quad (3.40)$$

Cet espace peut également être muni d'une topologie par la construction d'une famille projective $\mathcal{G}_l = \prod_{x \in V(\gamma)} \text{SU}(2)$ et par répétition d'un processus similaire à la construction de $\overline{\mathcal{A}}$. La limite projective $\overline{\mathcal{G}}$ est également compacte et de Hausdorff.

L'espace des connexions distributionnelles invariantes par transformation de jauge est donc donné par :

$$\overline{\mathcal{A}}/\overline{\mathcal{G}} = \{[A]\}_{A \in \overline{\mathcal{A}}} \quad \text{t.q.} \quad [A] = \{A^g\}_{g \in \mathcal{G}}. \quad (3.41)$$

Cet espace est compact et de Hausdorff dans la topologie quotient.

Définition 101. La **topologie quotient** est la topologie la plus fine telle que l'image réciproque de tout ouvert par l'application quotient $\overline{\mathcal{A}} \rightarrow \overline{\mathcal{A}}/\overline{\mathcal{G}} : A \rightsquigarrow [A]$ soit un ouvert de $\overline{\mathcal{A}}$, i.e. la topologie quotient est la topologie la plus fine rendant l'application quotient continue.

Un autre espace invariant par transformation de jauge est souvent présenté dans la littérature. Celui-ci est dénoté $\overline{\mathcal{A}}/\overline{\mathcal{G}}$. Il est construit, non pas à l'aide des sous-groupoïdes $l(\gamma) \subset \mathcal{P}$, mais bien à l'aide des sous-groupes $s(\gamma) \subset \mathcal{Q}$ du groupe des boucles basées en un point $x_0 \in \sigma$ fixé.

Sa famille projective est donnée par $Y_s = \text{Hom}(s, \text{SU}(2))$, et sa limite projective par $\overline{Y} = \text{Hom}(\mathcal{Q}, \text{SU}(2))$. L'espace invariant est $\overline{Y}/\text{SU}(2)$. Les détails de construction peuvent être trouvés dans [2].

Nous avons alors le théorème suivant :

Théorème 102. *Les espaces*

$$\overline{\mathcal{A}}/\overline{\mathcal{G}} = \text{Hom}(\mathcal{P}, \text{SU}(2))/\overline{\mathcal{G}} \quad \text{et} \quad \overline{\mathcal{A}}/\overline{\mathcal{G}} = \text{Hom}(\mathcal{Q}, \text{SU}(2))/\text{SU}(2) \quad (3.42)$$

sont homéomorphes.

Ces espaces sont des sous-espaces de $\overline{\mathcal{A}}$ qui sont invariants par transformation de jauge. L'espace de fonction associé $\mathcal{H}_0 = L^2(\overline{\mathcal{A}}/\overline{\mathcal{G}}, d\mu_0) = L^2(\overline{\mathcal{A}}/\overline{\mathcal{G}}, d\mu_0)$ sera donc le sous-espace de $\mathcal{H}$ solution de l'équation de Gauss.

La C^* -algèbre des fonctions cylindriques

Rappelons-nous que l'ensemble des connexions distributionnelles $\overline{\mathcal{A}}$ est identifié à la projection limite $\overline{\mathcal{X}}$ par l'intermédiaire de la bijection (3.39).

Nous allons maintenant montrer que $\overline{\mathcal{X}}$ peut être construit à l'aide de la théorie de Gel'fand des C^* -algèbres décrite à la section 2.6.

Désignons par $C(\mathcal{X}_l)$ l'ensemble des fonctions continues sur $\mathcal{X}_l$ à valeur complexe ainsi que leur union $\cup_{l \in \mathcal{L}} C(\mathcal{X}_l)$.

Définissons une relation d'équivalence $\sim$ sur $\cup_{l \in \mathcal{L}} C(\mathcal{X}_l)$ de la façon suivante. Prenons deux fonctions $f, f' \in \cup_{l \in \mathcal{L}} C(\mathcal{X}_l)$. Nous pouvons toujours trouver $l, l' \in \mathcal{L}$ tels que $f \in C(\mathcal{X}_l)$ et $f' \in C(\mathcal{X}_{l'})$. Dès lors, nous dirons que :

$$f \sim f' \iff p_{l''l}^* f = p_{l''l'}^* f' \quad \forall l, l' \prec l'', \quad (3.43)$$

où $p^* f$ désigne le pullback de f par p .

Définition 103. L'espace de classes d'équivalence de $\cup_{l \in \mathcal{L}} C(\mathcal{X}_l)$ pour la relation $\sim$ est appelé **espace des fonctions cylindriques** et est noté :

$$Cyl(\overline{\mathcal{X}}) = \cup_{l \in \mathcal{L}} C(\mathcal{X}_l) / \sim. \quad (3.44)$$

Il est aisé de vérifier que, pour tout $f, f' \in Cyl(\overline{\mathcal{X}})$, il existe un index commun $l \in \mathcal{L}$ et deux fonctions $f_l, f'_l \in C(\mathcal{X}_l)$ tels que $f = [f_l]$ et $f' = [f'_l]$, où $[f_l]$ désigne la classe d'équivalence de f_l .

Ce résultat nous permet de définir les opérations suivantes sur $Cyl(\overline{\mathcal{X}})$:

$$\begin{aligned} f + f' &= [f_l + f'_l], \\ ff' &= [f_l f'_l], \\ zf &= [zf_l], \\ \bar{f} &= [\bar{f}_l], \end{aligned} \quad (3.45)$$

ainsi qu'une norme sup :

$$\|f\| = \|[f_l]\| = \sup_{x_l \in \mathcal{X}_l} |f_l(x_l)|. \quad (3.46)$$

Théorème 104. *Muni des opérations (3.45) et de la norme (3.46), l'espace $Cyl(\overline{\mathcal{X}})$ est une *-algèbre abélienne et unitaire.*

De plus, sa fermeture $\overline{Cyl(\overline{\mathcal{X}})}$ est un espace complet et forme une C^* -algèbre de Banach, abélienne et unitaire.

En conséquence, nous pouvons construire la transformée de Gel'fand relative à cette C^* -algèbre :

$$\bigvee : \overline{Cyl(\overline{\mathcal{X}})} \rightarrow C(\Delta(\overline{Cyl(\overline{\mathcal{X}})})) : f \rightsquigarrow \tilde{f} \quad \text{t.q.} \quad \tilde{f}(\chi) = \chi(f), \quad (3.47)$$

où χ désigne un caractère de $\overline{Cyl(\overline{\mathcal{X}})}$.

Comme nous l'avons signalé à la section 2.6, cette transformée est un isomorphisme. Le théorème suivant devient donc particulièrement important :

Théorème 105. *L'application :*

$$\overline{\mathcal{X}} \rightarrow \Delta(\overline{Cyl(\overline{\mathcal{X}})}) : x = (x_l)_{l \in \mathcal{L}} \rightsquigarrow \chi(x) \quad t.q. \quad [\chi(x)](f) = f_l(p_l(x)) \quad \text{pour } f = [f_l] \quad (3.48)$$

est un isomorphisme.

En effet, par la considération conjointe de ces deux isomorphismes, nous voyons que la fermeture de l'espace des fonctions cylindriques $\overline{Cyl(\overline{\mathcal{X}})}$ peut être identifiée, par la transformée de Gel'fand, à l'ensemble des fonctions continues $C(\overline{\mathcal{X}})$ sur la limite projective :

$$\bigvee : \overline{Cyl(\overline{\mathcal{X}})} \rightarrow C(\overline{\mathcal{X}}) : f = [f_l] \rightsquigarrow p_l^* f_l. \quad (3.49)$$

Ce résultat entre parfaitement en accord avec le théorème 64 stipulant, dans notre cas, que $\overline{\mathcal{X}}$, qui est un espace de Hausdorff compact, est égal au spectre $\Delta(C(\overline{\mathcal{X}}))$ de la C^* -algèbre $C(\overline{\mathcal{X}})$.

La mesure uniforme de Borel

Nous arrivons progressivement au terme de la construction de notre espace cinématique avec la détermination d'une mesure, et donc d'un espace de fonctions intégrables. Pour les différentes définitions relatives à la théorie de la mesure, le lecteur est invité à consulter [31], [32] ou tout autre cours sur la théorie de la mesure.

Nous utiliserons à cette fin les différentes constructions décrites précédemment.

Vu que nos espaces $\mathcal{X}_l$ sont munis d'une structure topologique, nous pouvons considérer la σ -algèbre de Borel $\mathcal{B}_l$ engendrée par l'ensemble des ouverts de $\mathcal{X}_l$. Nous pouvons donc définir une mesure sur l'ensemble des Boréliens, c'est-à-dire une fonction μ_l positive et σ -additive sur $\mathcal{B}_l$ telle que $\mu_l(\mathcal{X}_l) = 1$.

Une telle mesure est appelée *mesure de Borel*. Les mesures dites de Borel ont le grand avantage que toutes les fonctions continues de $C(\mathcal{X}_l)$ sont automatiquement mesurables.

Définition 106. Une famille de mesures $(\mu_l)_{l \in \mathcal{L}}$ définies sur les projections X_l de la famille projective $(\mathcal{X}_l, p_{l'l})_{l \prec l' \in \mathcal{L}}$ est dite **consistante** si :

$$(p_{l'l})_* \mu_{l'} = \mu_l \quad \forall l \prec l', \quad (3.50)$$

où $p_* \mu$ désigne le pushforward de μ par p .

L'idée de l'imposition de la consistance est la suivante : vu que les projections $p_{l'l}$ sont continues et qu'un Borélien $B_l \in \mathcal{B}_l$ est généré par des unions et intersections dénombrables d'ouverts de $\mathcal{X}_l$, l'image réciproque $p_{l'l}^{-1}(B_l)$ est générée par des unions et intersections dénombrables d'ouverts de $\mathcal{X}_{l'}$, et donc $p_{l'l}^{-1}(B_l) \in \mathcal{B}_{l'}$. La condition de consistance signifie donc que :

$$\mu_{l'}(p_{l'l}^{-1}(B_l)) = \mu_l(B_l) \quad \forall B_l \in \mathcal{B}_l. \quad (3.51)$$

Celle-ci peut également s'écrire :

$$\int_{\mathcal{X}_{l'}} \chi_{p_{l'l}^{-1}(B_l)}(x_{l'}) d\mu_{l'}(x_{l'}) = \int_{\mathcal{X}_l} \chi_{B_l}(x_l) d\mu_l(x_l), \quad (3.52)$$

où χ_B désigne la fonction caractéristique d'un ensemble B .

Cette formule peut maintenant être étendue aux fonctions simples (combinaisons finies de fonctions caractéristiques), puis à l'ensemble des fonctions mesurables par la définition d'une intégrale de type Lebesgue, ce qui donne :

$$\int_{\mathcal{X}_{l'}} (p_{l'l}^* f_l)(x_{l'}) d\mu_{l'}(x_{l'}) = \int_{\mathcal{X}_l} f_l(x_l) d\mu_l(x_l), \quad (3.53)$$

pour tout $l \prec l'$ et $f_l \in C(\mathcal{X}_l)$.

Vue sous cette forme, la condition de consistance décrit la chose suivante. Rappelons-nous la définition de la relation d'équivalence sur l'espace des fonctions cylindriques (3.43). Nous avons que $[f_l] = [f_{l'}]$ était équivalent à $f_{l'} = p_{l'l}^* f_l$. Dès lors, la condition de consistance, sous sa forme (3.53), impose l'égalité de l'intégrale de Lebesgue sur tout élément d'une même classe d'équivalence.

En conséquence, nous pouvons définir une fonctionnelle linéaire positive⁸ sur l'espace des fonctions cylindriques :

$$\tilde{\Lambda} : Cyl(\overline{\mathcal{X}}) \rightarrow \mathbb{C} : f = [f_l] \rightsquigarrow \int_{\mathcal{X}_l} f_l(x_l) d\mu_l(x_l), \quad (3.54)$$

qui est indépendante du choix de représentation $f = [f_l]$.

Cette fonctionnelle est continue, et peut s'étendre continuellement de façon unique à la fermeture $\overline{Cyl(\mathcal{X})}$. Nous pouvons dès lors utiliser l'isomorphisme donné par la transformée de Gel'fand (3.49) pour définir une telle fonctionnelle linéaire positive sur $C(\overline{\mathcal{X}})$:

$$\Lambda : C(\overline{\mathcal{X}}) \rightarrow \mathbb{C} : f = p_l^* f_l \rightsquigarrow \int_{\mathcal{X}_l} f_l(x_l) d\mu_l(x_l). \quad (3.55)$$

Vu que l'espace $\overline{\mathcal{X}}$ est compact et de Hausdorff, nous pouvons utiliser la version suivante du théorème de représentation de Riesz pour définir une mesure sur $\overline{\mathcal{X}}$.

Théorème 107 (Théorème de représentation de Riesz). *Soit X un espace de Hausdorff localement compact et $\Lambda : C_0(X) \rightarrow \mathbb{C}$ une fonctionnelle linéaire positive sur l'espace des fonctions continues à support compact dans X . Alors il existe une σ -algèbre $\mathcal{U}$ sur X contenant la σ -algèbre de Borel ainsi qu'une unique mesure positive μ sur $\mathcal{U}$ telle que Λ est représentée par μ , i.e. :*

$$\Lambda(f) = \int_X f(x) d\mu(x) \quad \forall f \in C_0(X). \quad (3.56)$$

⁸Positive signifie ici que $\tilde{\Lambda}(f) \geq 0$, $\forall f \geq 0$.

Une démonstration de ce théorème se trouve dans [32].

Rappelons-nous que, pour arriver à ce résultat, nous avons utilisé une mesure de Borel consistante μ_l sur $\mathcal{X}_l$, mais que cette mesure n'a pas encore été précisée. C'est ce que nous allons faire maintenant.

Prenons un sous-groupe $l \in \mathcal{L}$ avec $l = l(\gamma)$. Par la définition de la bijection (3.36), tout élément $x_l \in \mathcal{X}_l$ peut être identifié à un ensemble d'éléments de $\text{SU}(2)$ $\{x_l(e)\}_{e \in E(\gamma)} = \rho_l(x_l)$.

En conséquence, toute fonction $f_l \in C(\mathcal{X}_l)$ peut être définie par :

$$f_l(x_l) = F_l \left(\{x_l(e)\}_{e \in E(\gamma)} \right) = F_l(\rho_l(x_l)) = \rho_l^* F_l(x_l). \quad (3.57)$$

où F_l est une fonction continue à valeur complexe sur $\text{SU}(2)^{\#E(\gamma)}$.

Nous pouvons maintenant définir une famille de mesures μ_{0l} pour la famille projective $(\mathcal{X}_l, p_{l'l})_{l \prec l' \in \mathcal{L}}$ par :

$$\mu_{0l}(f_l) = \int_{\mathcal{X}_l} \rho_l^* F_l(x_l) d\mu_{0l}(x_l) = \int_{\text{SU}(2)^{\#E(\gamma)}} F_l \left(\{x_l(e)\}_{e \in E(\gamma)} \right) \prod_{e \in E(\gamma)} d\mu_H(x_l(e)) \quad (3.58)$$

où μ_H est la mesure de Haar sur $\text{SU}(2)$.

Théorème 108. *La famille de mesures μ_{0l} est une famille consistante de mesures de Borel positives.*

En raison de nos développements précédents, nous pouvons construire une mesure de Borel μ_0 sur $\overline{\mathcal{X}}$, ainsi que sur $\overline{\mathcal{A}}$ au moyen de la bijection (3.39). Nous pouvons donc construire l'ensemble des fonctions intégrables sur $\overline{\mathcal{A}}$ et le munir d'un produit scalaire.

Définition 109. L'espace de Hilbert cinématique $\mathcal{H}$ est défini comme l'espace des fonctions de carré intégrable sur $\overline{\mathcal{A}}$ par rapport à la mesure μ_0 :

$$\mathcal{H} = L^2(\overline{\mathcal{A}}, d\mu_0). \quad (3.59)$$

La mesure de Borel $d\mu_0$ est appelé **mesure uniforme**, ou encore **mesure d'Ashtekar-Lewandowski**.

3.4 L'équivalence des deux formalismes

Nous allons maintenant pouvoir faire le pont entre les deux formalismes de la Gravité Quantique à Boucles. Celui-ci est donné par deux transformées similaires :

la transformée de boucles et la transformée de réseaux de spin.

Ces transformées sont particulièrement peu présentes dans la littérature, surtout la transformée de boucles qui, bien qu'utilisée au tout début de la théorie, n'a plus vraiment d'intérêt en raison du caractère dépendant des états de boucles.

Néanmoins, nous allons tenter de présenter d'une manière synthétique ces deux transformées, et ce afin de faire apparaître les similitudes cachées non présentées dans la littérature, du moins à notre connaissance. Cette absence de présentation synthétique vient très probablement du fait que la quasi totalité des publications sur le sujet à l'heure actuelle sont essentiellement consacrées à un seul formalisme particulier.

Signalons tout de même que la transformée de boucles fut initialement proposée sans définition de produit scalaire, et qu'il a fallu attendre l'avènement de la mesure d'Ashtekar-Lewandowski pour lui donner un sens.

Etablissons d'abord le lien entre la représentation différentielle et l'algèbre de boucles.

Prenons un état générique $|\psi\rangle$.

Dans la représentation en terme de boucles, $|\psi\rangle$ est déterminé par les états de multiboucle α et peut donc être représenté par :

$$\langle\alpha|\psi\rangle = \psi[\alpha]. \quad (3.60)$$

Dans la représentation en terme de connexion, $|\psi\rangle$ est une fonction de $L^2(\overline{\mathcal{A}}, d\mu_0)$. Elle possède donc une expression en terme de la connexion distributionnelle $A \in \overline{\mathcal{A}}$ pouvant être représentée par :

$$\langle A|\psi\rangle = \psi[A]. \quad (3.61)$$

Le lien entre les deux représentations est simplement donné par les variables de boucles (3.16) :

$$\langle A|\alpha\rangle = \mathcal{T}_{[\alpha]}[A] = -\text{tr}(H_\alpha(A)), \quad (3.62)$$

et par une intégration sur l'ensemble des connexions distributionnelles par rapport à la mesure μ_0 , ce qui est appelé la transformée de boucles.

Définition 110. La **transformée de boucles** ou **loop transform** est la transformée suivante :

$$\psi[\alpha] = \int_{\overline{\mathcal{A}}} \overline{\mathcal{T}_{[\alpha]}[A]} \psi[A] d\mu_0[A]. \quad (3.63)$$

Cette transformée peut être interprétée comme une sorte de transformée de Fourier sur l'espace des connexions distributionnelles.

Regardons maintenant le lien entre la représentation différentielle et la représentation en terme de réseaux de spin.

Nous pouvons de façon similaire considérer les projections d'un état générique $|\psi\rangle$. L'expression de cet état en terme de réseaux de spin est trivialement donnée par :

$$\langle S|\psi\rangle = \psi[S]. \quad (3.64)$$

L'expression en terme de connexion reste toujours :

$$\langle A|\psi\rangle = \psi[A]. \quad (3.65)$$

Pour construire une transformée similaire, nous avons nécessairement besoin d'une fonctionnelle en A et S, c'est-à-dire l'équivalent des variables de boucles. La solution est donnée par la formule (3.26) :

$$\langle A|S\rangle = \mathcal{T}_{[S]}[A]. \quad (3.66)$$

Définition 111. La **transformée de réseaux de spin** ou **spin network transform** est la transformée suivante :

$$\psi[S] = \int_{\mathcal{A}} \overline{\mathcal{T}_{[S]}[A]} \psi[A] d\mu_0[A]. \quad (3.67)$$

Nous allons maintenant réexprimer ces deux transformées en terme de notation de Dirac.

Bien que cette méthode de présentation ne soit pas usitée, l'expression de ces deux transformées en notation de Dirac se révèle être particulièrement jolie, et surtout fait apparaître au sein de la Gravité Quantique à Boucles une propriété bien connue de la Mécanique Quantique, la relation de fermeture.

Ces relations se vérifient aisément suite aux notations que nous venons de présenter.

La transformée de boucles en notation de Dirac devient :

$$\langle \alpha|\psi\rangle = \int_{\mathcal{A}} \langle \alpha|A\rangle \langle A|\psi\rangle d\mu_0[A], \quad (3.68)$$

et la transformée de réseaux de spin :

$$\langle S|\psi\rangle = \int_{\mathcal{A}} \langle S|A\rangle \langle A|\psi\rangle d\mu_0[A]. \quad (3.69)$$

La transformée de réseau de spin possède une conséquence importante. Celle-ci fut découverte par Roberto De Pietri dans [33].

La mesure d'Ashtekar-Lewandowski établie pour l'espace des connexions permet de définir mathématiquement les transformées présentées, mais celle-ci permet également de définir un produit scalaire dans la représentation algébrique de la façon suivante :

$$\langle \alpha | \alpha' \rangle = \int_{\mathcal{A}} \langle \alpha | A \rangle \langle A | \alpha' \rangle d\mu_0[A] = \int_{\mathcal{A}} \overline{\mathcal{T}_{[\alpha]}[A]} \mathcal{T}_{[\alpha']}[A] d\mu_0[A], \quad (3.70)$$

$$\langle S | S' \rangle = \int_{\mathcal{A}} \langle S | A \rangle \langle A | S' \rangle d\mu_0[A] = \int_{\mathcal{A}} \overline{\mathcal{T}_{[S]}[A]} \mathcal{T}_{[S']}[A] d\mu_0[A]. \quad (3.71)$$

La formule (3.71) peut être entièrement calculée dans le formalisme différentiel. En effet, l'expression d'un élément de l'intégrale est donnée par la formule (3.26) :

$$\mathcal{T}_{[S]}[A] = \left(\bigotimes_{v \in V(\gamma)} i_v \right) \cdot \left(\bigotimes_{e \in E(\gamma)} \sqrt{d_{\rho_{je}}} \rho_{je}(A(e)) \right) \quad \text{avec} \quad \sqrt{d_{\rho_{je}}} = \sqrt{2j_e + 1}. \quad (3.72)$$

Or, si nous regardons attentivement cette expression, le membre de droite de la contraction n'est autre que l'attribution d'un élément de $SU(2)$ pour chaque arête du graphe γ du réseau de spin $S = (\gamma, \vec{j}, \vec{i})$. C'est donc un homomorphisme du sous-groupe $l = l(\gamma)$ à valeur dans $SU(2)$, i.e. un élément de $\mathcal{X}_l$.

De plus, le phénomène de contraction n'est autre qu'une fonction à valeur dans $\mathbb{C}$ sur $\mathcal{X}_l$. Autrement dit, $\mathcal{T}_{[S]}[A] \in C(\mathcal{X}_l)$.

Enfin, les condition de Clebsch-Gordan éliminant les relations de Mandelstram garantissent la non-existence de deux fonctions $\mathcal{T}_{[S]}[A] \in C(\mathcal{X}_l)$ équivalentes par la relation (3.43).

En conséquence, les fonctions $\mathcal{T}_{[S]}[A]$ sont des éléments de l'espace des fonctions cylindriques $Cyl(\overline{\mathcal{X}}) = \cup_{l \in \mathcal{L}} C(\mathcal{X}_l) / \sim$.

Un calcul explicite de la formule (3.71), pouvant être retrouvé dans [2], conduit au résultat suivant, qui constitue probablement la conséquence la plus importante de l'équivalence des deux formalismes :

Théorème 112. *Les fonctions cylindriques $\mathcal{T}_{[S]}[A]$ forment un ensemble orthonormé, la normalisation étant donnée par le coefficient $\sqrt{d_{\rho_{je}}}$. En conséquence, la base des réseaux de spin est une base complète orthonormée.*

Chapitre 4

L'Origine des Equations de Contrainte de la Gravité Quantique à Boucles : La Révolution d'Ashtekar.

Dans ce chapitre, nous allons nous attarder sur l'origine historique des équations de contrainte qui donnent tout son sens à la Gravité Quantique à Boucles. Nous reprendrons dans un ordre plus ou moins chronologique le raisonnement qui a amené Abhay Ashtekar à considérer la connexion comme variable préférentielle au détriment de la métrique.

Vu la longueur exorbitante de la plupart des développements, et dans le souci de ne pas conférer à ce mémoire la forme d'un annuaire téléphonique, nous nous contenterons d'exposer les principales idées des différentes étapes et ferons référence aux différents ouvrages concernés.

Nous souhaitons informer le lecteur que ce présent chapitre ne peut s'appuyer uniquement sur les éléments mathématiques et physiques déjà exposés, mais nécessite également certaines connaissances supplémentaires dont nous ne pouvons exposer ici l'intégralité. Celles-ci se trouvent bien entendu dans la littérature traditionnelle.

4.1 La décomposition de Gauss-Codazzi de l'espace-temps

Une présentation détaillée des développements de cette section se trouve dans les ouvrages suivants sous différentes formes : [34], [35], [2], [13].

Reprenons les équations de la Relativité Générale (1.1). Celles-ci sont définies localement au sein d'une structure globale appelée *espace-temps*.

Définition 113. Un **espace-temps** est un couple (M, g) où M est une variété différentiable de dimension 4 qui est connexe, orientable, orientée au niveau du temps, de Hausdorff et de classe C^∞ et où g est une métrique de type Lorentzienne.

Nous munirons cet espace-temps d'un repère local de coordonnées $X = (X^\mu)_{\mu=0,1,2,3}$.

L'élément clé de la méthode de Gauss-Codazzi, et qui nous mènera par la suite à la formulation hamiltonienne des équations de la Relativité Générale, est la décomposition de la variété d'espace-temps M en un produit cartésien $\mathbb{R} \times S_0$ où S_0 est une variété différentiable de dimension 3. Cela revient, en fait, à décomposer l'espace-temps en *tranches* d'espace superposées et indexées le long d'une courbe de temps particulière.

Nous entrons ici en réalité dans l'une des plus grandes hypothèses présentes dans la cosmologie moderne. Le formalisme de Gauss-Codazzi présuppose qu'une telle décomposition est possible, or ce fait est très loin d'être trivial.

Il est également amusant de remarquer que le développement permettant de transformer les équations admises de la Relativité Générale dans le formalisme de la Gravité Quantique à Boucles, et donc ainsi d'y apporter un fondement, débute par une hypothèse rentrant en contradiction apparente avec le principe de covariance généralisée préconisant une totale liberté quant à l'éventuel rapport spatial-temporel (cf. section 1.2). Nous sommes donc dans l'obligation de considérer cette démarche comme étant **un élément de preuve particulier** en faveur des équations de la LQG, qui doivent donc être posées comme hypothèse en toute généralité.

L'hypothèse courante permettant de garantir la possibilité d'une telle décomposition est celle d'un espace dit *globalement hyperbolique*. Nous avons besoin de quelques définitions pour préciser cette hypothèse.

Définition 114. Une courbe dans M est dite **causale** si et seulement si en tout point de la courbe le vecteur tangent n'est jamais de type espace, i.e. la norme de ce vecteur pour la métrique g est négative ou nulle. Une courbe dans M est dite **temporelle** si et seulement si en tout point de la courbe le vecteur tangent est de type temps, i.e. la norme de ce vecteur pour la métrique g est strictement négative.

Définition 115. Le **futur causal** (resp. le passé causal) d'un point $p \in M$ est l'ensemble $J^+(p)$ (resp. $J^-(p)$) des points $q \in M$ tels qu'il existe une courbe $c : [0, 1] \rightarrow M$ de type causale et dirigée vers le futur telle que $c(0) = p$ et $c(1) = q$ (resp. $c(0) = q$ et $c(1) = p$).

Définition 116. M respecte la **condition de causalité forte** si et seulement si $\forall p \in M$ et $\forall U_p$ voisinage de p , $\exists V_p \subset U_p$ tel qu'il n'existe aucune courbe de type causale qui traverse V_p plus d'une fois.

Définition 117. M est dit **globalement hyperbolique** si et seulement si la condition de causalité forte est respectée et que $\forall p, q \in M, J^+(p) \cap J^-(q)$ est compact.

Définition 118. Un sous-espace topologique $S \subset M$ est une **hypersurface de Cauchy** si et seulement si celui-ci possède une et une seule intersection avec chaque courbe inextensible¹ de type temps.

Signalons qu'en raison de sa définition, une hypersurface de Cauchy est une variété compacte sans bords.

Théorème 119. *Si M est un espace-temps globalement hyperbolique, alors il existe une surjection continue $t : M \rightarrow \mathbb{R}$ telle que :*

1. $S_a := t^{-1}(a)$ est une hypersurface de Cauchy $\forall a \in \mathbb{R}$,
2. t est strictement croissante sur n'importe quelle courbe causale dirigée vers le futur.

Ce théorème dû à Geroch [36] implique l'existence d'un homéomorphisme entre M et $\mathbb{R} \times S_0$ où S_0 est une variété de dimension 3, cette variété étant compacte et sans bords.

Néanmoins, bien que ce théorème constitue l'un des résultats les plus importants en géométrie Lorentzienne, il ne donne aucune indication sur le caractère difféomorphe de la relation. Ce "trou" vient d'être comblé très récemment (2003) par Bernal et Sánchez dans [37] et [38] :

Théorème 120. *Tout espace temps globalement hyperbolique admet une smooth hypersurface de Cauchy temporelle S_0 , et par conséquent est difféomorphe à $\mathbb{R} \times S_0$.*

Nous nous placerons sous une telle hypothèse afin de garantir l'existence de la décomposition.

Nous sommes donc en présence d'une famille d'hypersurfaces de Cauchy $\{S_t\}$ paramétrée par une variable temporelle $t \in \mathbb{R}$, et il existe un difféomorphisme $X : \mathbb{R} \times S_0 \rightarrow M : (t, x) \rightsquigarrow X(t, x) := X_t(x)$ tel que $\forall t, S_t = \{X_t(x) : x \in S_0\}$.

Néanmoins, il existe un certain nombre de degrés de liberté dans le choix de ce difféomorphisme. Nous allons maintenant introduire certaines fonctions particulières, appelées *lapse* et *shift*, afin de paramétrer ces degrés de liberté. Pour cela, nous allons considérer la division du champ de vecteur de déformation en ses parties tangente et normale aux hypersurfaces S_t :

$$\left(\frac{\partial X^\mu(t, x)}{\partial t} \right)_{|X=X(t, x)} = N(X)n^\mu(X) + N^\mu(X) \quad (4.1)$$

avec n^μ le champ de vecteur unitaire normal à S_t et dirigé vers le futur, $\mu = 0, 1, 2, 3$.

¹Intuitivement : ne pouvant être prolongée.

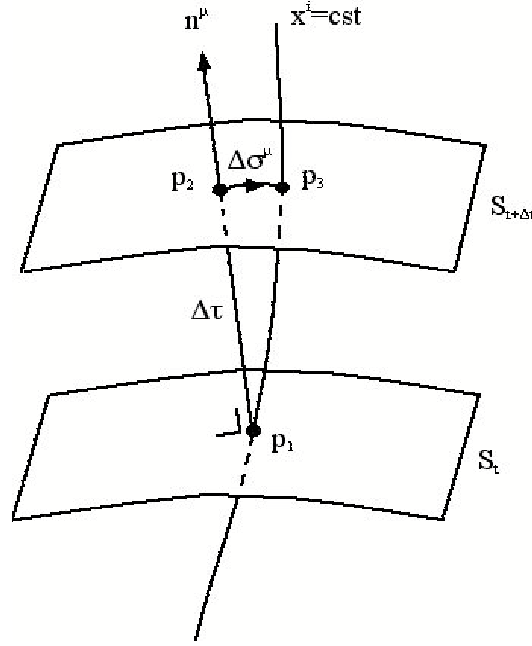
Définition 121. Le champ scalaire N est appelé **lapse function**².

Définition 122. Les composantes du champ vectoriel N^μ sont appelées **shift functions**.

Ces fonctions contiennent bien l'ensemble de l'information sur la décomposition de M en hypersurfaces $\{S_t\}_{t \in \mathbb{R}}$. Notons que le choix de la direction du champ de vecteur normal n^μ permet de définir une fonction *lapse* toujours positive.

Afin de visualiser ces fonctions, considérons une courbe temporelle inextensible dans $\mathbb{R} \times S_0$ de type $\{(t, x) : x^i = \alpha^i, i = 1, 2, 3\}$ et étudions son image par X dans M .

FIG. 4.1 – La décomposition 3+1 de Gauss-Codazzi



Soit p_1 et p_3 les points de percée de cette courbe respectivement avec les hypersurfaces S_t et $S_{t+\Delta t}$ ($\Delta T > 0$). Au point p_1 , considérons la normale à S_t dirigée vers le futur et notons p_2 son point de percée avec l'hypersurface $S_{t+\Delta t}$, comme représenté sur la figure 4.1.

Le vecteur de déformation de la courbe entre les hyperplans S_t et $S_{t+\Delta t}$ peut être décomposé en une partie normale à S_t et une partie tangente à $S_{t+\Delta t}$: $\Delta\tau n^\mu + \Delta\sigma^\mu$.

²L'appellation anglophone est traditionnellement conservée pour les fonctions *lapse* et *shift*.

Les fonctions *lapse* et *shift* représentent alors le taux de variation de $\Delta\tau$ et $\Delta\sigma^\mu$ en fonction de Δt lorsque celui-ci tend vers 0, i.e. :

$$\Delta\tau \approx N\Delta t, \quad \Delta\sigma^\mu \approx N^\mu\Delta t.$$

Nous allons maintenant introduire deux champs de tenseur symétrique en relation avec notre décomposition spatiale-temporelle. Il s'agit des première et deuxième formes fondamentales.

Définition 123. La **première forme fondamentale** de S_0 est le champ de tenseur $q_{\mu\nu} = g_{\mu\nu} - n_\mu n_\nu$.

Définition 124. La **seconde forme fondamentale** de S_0 est le champ de tenseur $K_{\mu\nu} = q_\mu^\rho q_\nu^\sigma \nabla_\rho n_\sigma$, où ∇ est la connexion de Levi-Civita relative à la métrique g .

Signalons que ces deux tenseurs sont de type "spatial", c'est-à-dire qu'ils s'annulent si l'un de leurs indices est contracté avec n^μ .

Notre but présent est de réécrire l'action d'Einstein-Hilbert, dont l'annulation de la variation infinitésimale conduit aux équations (1.1), en fonction des éléments décrits précédemment.

Pour plus de facilité, nous adopterons la notation suivante : les éléments, comme par exemple le tenseur de courbure, se rapportant à notre espace à quatre dimensions M seront précédés d'un (4), tandis que ceux se rapportant à notre espace à 3 dimension S_0 seront précédés d'un (3). Ce chiffre sera omis lorsqu'il n'y aura pas de risque de confusion. De même, les lettres grecques ($\mu, \nu, \dots$) représenteront des indices variant de 0 à 3, tandis que les lettres latines ($a, b, i, j, \dots$) représenteront des indices variant de 1 à 3.

De cette manière, l'action d'Einstein-Hilbert s'écrit :

$$S = \frac{1}{\kappa} \int_M {}^{(4)}R \sqrt{|\det(g)|} d^4X, \quad (4.2)$$

avec $\kappa = \frac{8\pi G}{c^4}$.

Un calcul particulièrement long et fastidieux, pouvant être retrouvé au sein des ouvrages référencés, permet d'aboutir à l'équation de **Gauss-Codazzi** reliant les courbures de nos espaces à 3 et à 4 dimensions par l'intermédiaire des première et deuxième formes fondamentales :

$${}^{(4)}R = {}^{(3)}R + K_{\mu\nu} K^{\mu\nu} - K^2 - 2\nabla_\mu (n^\nu \nabla_\nu n^\mu - n^\mu \nabla_\nu n^\nu). \quad (4.3)$$

Il nous est donc loisir de réécrire l'action (4.2) non plus dans notre espace à 4 dimensions M , mais bien dans notre espace produit $\mathbb{R} \times S_0$ en utilisant la première forme fondamentale ${}^{(3)}q_{ab}$ comme champ de métrique pour S_0 .

Le caractère covariant de la forme de volume nous donne :

$$\det(X^*g) = -N^2 \det({}^{(3)}q).$$

où X^*g désigne le *pull-back* du champ de métrique g par le difféomorphisme X .

Après séparation des parties spatiales et temporelles et simplification des termes nuls, notamment le dernier terme de (4.3) qui est à différentielle exacte, l'écriture de l'action devient la suivante :

$$S = \frac{1}{\kappa} \int_{\mathbb{R}} \int_{S_0} \left({}^{(3)}R + {}^{(3)}K_{ab} {}^{(3)}K^{ab} - {}^{(3)}K^2 \right) N \sqrt{\det({}^{(3)}q)} d^3x dt. \quad (4.4)$$

Vu l'absence de confusion possible, nous pouvons réécrire cette équation de façon plus simple :

$$S = \frac{1}{\kappa} \int_{\mathbb{R} \times S_0} \left(R + K_{ab} K^{ab} - K^2 \right) N \sqrt{\det(q)} d^3x dt. \quad (4.5)$$

4.2 Le formalisme ADM

Attaquons nous maintenant à la formulation hamiltonienne des équations de la Relativité Générale, connue sous le nom de *formalisme ADM*. Ce formalisme fut introduit par Arnowitt, Deser et Misner dans [39]. Les références introduites à la section précédente valent également pour les développements de cette section.

Pour cela, nous devons effectuer une transformation de Legendre, comme explicité à la section (2.5).

Malheureusement, l'action (4.5) contenant la densité Lagrangienne, bien que dépendante de $\dot{q}_{ab}$, est indépendante des vitesses $\dot{N}$ et $\dot{N}_a$. La transformation est donc singulière, et nous nous retrouvons avec un jeu de quatre contraintes :

$$\begin{aligned} \mathcal{C}(t, x) &= \frac{\partial S}{\partial \dot{N}(t, x)} = 0 \\ \mathcal{C}_a(t, x) &= \frac{\partial S}{\partial \dot{N}^a(t, x)} = 0. \end{aligned} \quad (4.6)$$

Les moments conjugués aux q_{ab} sont donnés par :

$$\Pi^{ab}(t, x) = \frac{\delta S}{\delta \dot{q}_{ab}(t, x)} = \frac{1}{\kappa} (K^{ab} - q^{ab} K) \sqrt{\det(q)}. \quad (4.7)$$

En conséquence du raisonnement présenté à la section (2.5), nous devons associer quatre champs de multiplicateurs de Lagrange $\lambda(t, x), \lambda_a(t, x)$ à notre ensemble de contraintes $C(t, x), C^a(t, x)$.

Il est alors possible, au bout d'une série de calculs gargantuesques que nous ne reproduirons pas ici, de réexprimer l'action S sous la forme suivante :

$$S = \frac{1}{\kappa} \int_{\mathbb{R} \times S_0} \left(\dot{q}_{ab} \Pi^{ab} + \dot{N}^a C_a + \dot{N} C - [\lambda^a C_a + \lambda C + N^a H_a + N H] \right) d^3x dt, \quad (4.8)$$

où

$$\begin{aligned} H_a &= -2q_{ac} \tilde{\nabla}_b \Pi^{bc} \\ H &= \frac{1}{\sqrt{\det q}} [q_{ac} q_{bd} - \frac{1}{2} q_{ab} q_{cd}] \Pi^{ab} \Pi^{cd} - \sqrt{\det q} R, \end{aligned} \quad (4.9)$$

$\tilde{\nabla}$ étant la connexion de Levi-Civita relative à la métrique q .

Définition 125. Les contraintes H_a et H sont appelées respectivement **Contraintes de difféomorphisme spatial** et **Contrainte Hamiltonienne**.

L'expression entre crochets de l'action (4.8) représente en réalité l'expression de la fonction Hamiltonienne, que nous désignerons par $\mathbf{H}$ afin d'éviter toute confusion :

$$\begin{aligned} \mathbf{H} &= \frac{1}{\kappa} \int_{S_0} [\lambda^a C_a + \lambda C + N^a H_a + N H] d^3x \\ &= \vec{C}(\vec{\lambda}) + C(\lambda) + \vec{H}(\vec{N}) + H(N). \end{aligned} \quad (4.10)$$

Rappelons que la dynamique de notre système est confinée sur l'hypersurface définie par les contraintes (4.6), et vu que les champs scalaires C et C_a s'annulent pour tout (t, x) , leurs dérivées doivent également s'annuler. Nous trouvons donc les conditions :

$$\begin{aligned} \dot{\vec{C}}(\vec{\lambda}) &= \{\vec{C}(\vec{\lambda}); \mathbf{H}\} = 0 \\ \dot{C}(\lambda) &= \{C(\lambda); \mathbf{H}\} = 0, \end{aligned} \quad (4.11)$$

où $\{ ; \}$ représente l'algèbre de Poisson comme décrite à la section (1.3).

Or, un calcul explicite de ces relations d'évolution nous donne :

$$\begin{aligned} \{\vec{C}(\vec{\lambda}); \mathbf{H}\} &= \vec{H}(\vec{N}) \\ \{C(\lambda); \mathbf{H}\} &= H(N). \end{aligned} \quad (4.12)$$

Par conséquent, nous obtenons :

$$\begin{aligned} C_a(t, x) = 0, \quad C(t, x) = 0, \quad H_a(t, x) = 0, \quad H(t, x) = 0, \\ \iff \\ \vec{C}(\vec{\lambda}) = 0, \quad C(\lambda) = 0, \quad \vec{H}(\vec{N}) = 0, \quad H(N) = 0, \end{aligned} \quad (4.13)$$

et donc, par l'expression (4.10), l'Hamiltonien $\mathbf{H}$ de la Relativité Générale est forcé de s'annuler !

Cet Hamiltonien ne correspond donc pas à une réelle fonction Hamiltonienne, et nous dirons que le formalisme de la Relativité Générale ne possède pas de vrai Hamiltonien.

Nous pouvons par contre remarquer que l'appellation *contraintes* de la définition 125, pour les fonctions H_a et H , était bien justifiée.

Le fait de posséder une fonction Hamiltonienne s'annulant dans un système devant être quantifié engendre une conséquence importante au sujet des équations de la dynamique de ce système une fois celui-ci quantifié. En effet, comme nous l'avons évoqué à la section (1.3), l'évolution d'un opérateur quelconque A de type observable est donnée par :

$$\frac{d}{dt}A = -\frac{i}{\hbar}[A, \hat{\mathbf{H}}]. \quad (4.14)$$

Or, l'Hamiltonien $\hat{\mathbf{H}}$ s'annulant, toutes les observables commutent avec lui, et les équations d'évolution deviennent :

$$\frac{d}{dt}A = 0. \quad (4.15)$$

En conséquence, les états physiques produits par le système quantifié ne décrivent plus un état quantique à un temps particulier, mais bien l'état quantique pour tout temps, c'est-à-dire qu'ils contiennent toute l'information sur la manière dont l'état est invariant vis-à-vis d'un difféomorphisme à 4 dimensions. Il n'y a donc plus de notion de temps particulière, et nous trouvons ici la réapparition du principe de covariance généralisée de la Relativité Générale.

Revenons maintenant à notre problème initial et intéressons-nous à l'évolution des fonctions *lapse* et *shift*. Nous trouvons :

$$\begin{aligned} \dot{N}^a &= \{N^a; \mathbf{H}\} = \lambda^a \\ \dot{N} &= \{N; \mathbf{H}\} = \lambda. \end{aligned} \quad (4.16)$$

Or les multiplicateurs de Lagrange λ^a, λ sont totalement arbitraires, ainsi le seront également les trajectoires des fonctions *lapse* et *shift*.

De plus, l'action (4.8) devient totalement indépendante des fonctions C_a, C , vu que :

$$S = \frac{1}{\kappa} \int_{\mathbb{R} \times S_0} \left(\dot{q}_{ab} \Pi^{ab} + (\dot{N}^a - \lambda^a) C_a + (\dot{N} - \lambda) C - N^a H_a - N H \right) d^3x dt. \quad (4.17)$$

En résumé, nous trouvons l'action réduite :

$$S = \frac{1}{\kappa} \int_{\mathbb{R} \times S_0} \left(\dot{q}_{ab} \Pi^{ab} - N^a H_a - N H \right) d^3x dt, \quad (4.18)$$

appelée **action Arnowitt - Deser - Misner**, ainsi que l'Hamiltonien réduit :

$$\mathbf{H} = \frac{1}{\kappa} \int_{S_0} [N^a H_a + N H] d^3x, \quad (4.19)$$

où les fonctions *lapse* et *shift* N^a, N peuvent être traitées comme les multiplicateurs de Lagrange des contraintes de difféomorphisme spatial et Hamiltonienne.

4.3 L'introduction des nouvelles variables

Comme nous l'avons vu, le formalisme de la Gravité Quantique à Boucles se base, non pas sur le champ de métrique, mais bien sur la connexion dont on peut munir l'espace-temps. La découverte de la possibilité de considérer la connexion comme variable fut exposée par Abhay Ashtekar en 1986-1987 ([40], [41]), soit 25 ans après l'introduction du formalisme ADM.

Pour comprendre l'utilité exacte de ces nouvelles variables et la nécessité de leur introduction, nous devons considérer ce que l'on appelle communément le programme de quantification canonique. Ce programme sert à construire une théorie hamiltonienne quantique à partir d'une théorie hamiltonienne classique, comme nous l'avons illustré dans notre premier chapitre (section (1.3)).

Nous n'allons pas reprendre ici la totalité de ce programme, et nous nous limiterons aux éléments qui nous semblent les plus importants. Les détails de ce processus peuvent être trouvés dans [2] et [13].

Première étape : La polarisation

Rappelons-nous l'idée générale du principe de quantification menant de l'espace de phase $T^*(\mathbb{R}^3)$ à l'espace des fonctions d'ondes de la Mécanique Quantique. La première étape était de ne plus considérer comme variables les paires canoniques (q_i, p^i) , mais bien l'ensemble des fonctions intégrables sur $\mathbb{R}^3$, i.e. $L^2(\mathbb{R}^3)$. Ces fonctions étaient exprimées à l'aide de la seule moitié (q_i) des variables³, l'espace décrit par ces variables étant nommé l'*espace de configuration* $\mathcal{C}$. Ces fonctions étaient ensuite quantifiées pour donner naissance aux *Kets* de la Mécanique Quantique.

La section précédente nous a pourvus de variables canoniques q_{ab}, Π^{ab} . Ces variables permettent de déterminer un point particulier dans un ensemble $\mathcal{M}$ possédant une infinité de dimensions. Cet ensemble peut être vu comme le fibré cotangent construit sur l'ensemble des 3-métriques Riemanniennes, et est muni du

³Voire également de la seule moitié (p^i) pour ce qui est appelé communément la *représentation* P .

système de contraintes de première classe H_a, H^4 .

Les variables q_{ab}, Π^{ab} sont appelées *variables élémentaires*, en le sens que toute fonction définie sur $\mathcal{M}$ peut être décrite en terme de ces variables. Elles sont séparées en deux jeux distincts, les variables de configuration q_{ab} et les moments Π^{ab} .

Cette séparation est appelée *polarisation* de la variété $\mathcal{M}$. Elle est totalement arbitraire, et le choix d'une polarisation particulière peut mener à une expression différente des contraintes H_a et H . En réalité, polariser une variété $\mathcal{M}$ revient à déterminer une sous-variété $\mathcal{C}$ de $\mathcal{M}$ tel que $\mathcal{M} = T^*(\mathcal{C})$.

Définition 126. Pour une polarisation particulière, l'ensemble $\mathcal{C}$ des variables de configuration est appelé **espace de configuration** de la variété.

Ces variables doivent maintenant conduire à une classe de variables plus générale, dont l'index ne serait plus fini mais bien infini. Un choix naturel et similaire à la Mécanique Quantique serait de prendre l'ensemble des fonctions intégrables définies sur l'espace de configuration, $L^2(\mathcal{C})$, c'est-à-dire l'ensemble des fonctions intégrables sur l'ensemble des 3-métriques Riemanniennes.

Malheureusement, il est particulièrement difficile de donner un sens à ce type de fonction, en particulier sur son caractère intégrable. Nous définirons donc les variables suivantes :

$$F(q) = \int_{S_0} F^{ab} q_{ab} d^3x, \quad P(f) = \int_{S_0} f_{ab} \Pi^{ab} d^3x, \quad (4.20)$$

où F^{ab}, f_{ab} sont des tenseurs symétriques *smooth* garantissant la convergence des intégrales, les espaces auxquels appartiennent ces tenseurs restant non-complètement spécifiés.

Deuxième étape : L'espace de configuration quantique

L'espace de configuration $\mathcal{C}$, reprenant l'ensemble des 3-métriques Riemanniennes, n'est généralement pas suffisant pour construire la totalité des états quantiques. Cette affirmation vient de la contribution apportée par l'expérience. Nous devons donc déterminer un nouvel espace $\bar{\mathcal{C}}$ plus général, que nous appellerons **espace de configuration quantique**.

⁴Remarquons que nous ne considérons plus ici les contraintes C_a, C . En effet, celles-ci ont été retirées de l'action (4.18). La raison vient simplement du fait que nous ne travaillons plus qu'à partir de l'espace à 3 dimensions S_0 , comme nous le montre l'Hamiltonien (4.19), alors que ces contraintes concernaient les variables N^a, N qui ne sont actuellement plus considérées que comme multiplicateurs de Lagrange.

En se basant sur l'expérience des champs quantiques scalaires, nous prendrons pour $\bar{\mathcal{C}}$ l'espace des distributions tempérées⁵ sur S_0 .

Troisième étape : L'espace cinématique

L'espace *cinématique* est ainsi appelé par le fait qu'il ne contient aucune information sur la dynamique du système, c'est-à-dire dans notre cas les contraintes H_a et H . Ce n'est donc pas encore l'espace des états physiques proprement dit. Il est simplement constitué de l'espace de configuration quantique $\bar{\mathcal{C}}$ muni d'une structure d'espace de Hilbert $\mathcal{H}$.

La principale difficulté réside en la définition d'une mesure $d\mu_0$ caractérisant cet espace de Hilbert $\mathcal{H} = L_2(\bar{\mathcal{C}}, d\mu_0)$.

Cette mesure doit satisfaire certaines propriétés techniques, telles que la σ -additivité, la préservation des relations canoniques, i.e. $[\hat{P}(f), F(\hat{q})] = i\hbar \{P(f), F(q)\}^\wedge$ où $\hat{P}(f), F(\hat{q})$ et $\{\cdot, \cdot\}^\wedge$ sont les représentations de $P(f), F(q)$ et $\{\cdot, \cdot\}$ dans $\mathcal{H}$ en terme d'opérateurs linéaires, ainsi que les relations classiques de conjugaisons complexes.

Vu la nature spéciale de notre espace $\hat{\mathcal{C}}$, il peut paraître logique que cette mesure soit une sorte de mesure de probabilité. Par exemple, une mesure de type Gaussienne donnerait comme fonction caractéristique⁶ :

$$\chi(F) = \int_{\bar{\mathcal{C}}} e^{iF(q)} d\mu(q) = e^{-\frac{1}{2} \int \frac{1}{\sqrt{\det(q^0)}} F^{ab} F^{cd} q_{ac}^0 q_{bd}^0 d^3x}, \quad (4.21)$$

où q^0 est une métrique fixée définie positive sur S_0 .

Malheureusement, cette mesure viole l'invariance du système par un difféomorphisme à 3 dimensions, et il n'y a vraisemblablement à l'heure actuelle aucune définition rigoureuse d'une mesure invariante par difféomorphisme pour notre processus de type stochastique.

⁵Une distribution $u(\varphi) = \int f\varphi d\mu$ associée à f appartenant à un espace de Schwartz est dite tempérée si et seulement si il existe une constante C et un entier p tels que :

$$\forall \varphi \in \mathcal{C}^\infty, |u(\varphi)| \leq C N_p(\varphi) \quad \text{où} \quad N_p(\varphi) = \sup_{k, j \leq p} \left| x^k \varphi^{(j)}(x) \right| < +\infty.$$

⁶La fonction caractéristique d'une mesure est simplement la transformée de Fourier relative à cette mesure. Elle caractérise complètement cette dernière.

Quatrième étape : Les opérateurs de contraintes

Nous arrivons maintenant à la quantification proprement dite, avec la quantification des équations de contraintes de difféomorphisme spatial et Hamiltonienne (définition 125).

Pour plus de simplicité, notons ces contraintes par $H_I(N^I)$, $I = 0, 1, 2, 3$. Ces contraintes sont en réalité des fonctions de l'ensemble des variables élémentaires :

$$H_I(N^I) = h_I(N^I, \{F(q)\}_q, \{P(f)\}_f). \quad (4.22)$$

Une quantification naïve de ces contraintes serait donnée par :

$$\hat{H}_I(N^I) = h_I(N^I, \{F(\hat{q})\}, \{\hat{P}(f)\}). \quad (4.23)$$

Ce procédé de quantification ne fonctionne malheureusement pas bien dans la plupart des cas, et ce pour les raisons suivantes :

- La quantification d'un espace de phase de fonctions n'est pas unique. En effet, il est possible d'effectuer des changements dans cette quantification de l'ordre de $\hbar$, qui dans ce cas donneront le même opérateur comme limite classique du système. Ce procédé est appelé *ambiguïté du facteur d'ordre*.
- De plus, certains des opérateurs obtenus peuvent se révéler être totalement divergents, et ce n'est qu'après un changement du facteur d'ordre que ceux-ci peuvent être correctement définis, ce qui est appelé *singularité du facteur d'ordre*.
- Enfin, un changement du facteur d'ordre ne permet pas toujours de résoudre les singularités d'un opérateur. Il est alors nécessaire de procéder à une régularisation de l'opérateur afin de lui soustraire sa partie divergente et de produire un opérateur correctement densément défini. Ce procédé est appelé la *renormalisation* de l'opérateur.

Ce dernier point est le plus important en ce qui nous concerne. En effet, la quantification de la contrainte Hamiltonienne H (4.9) conduit à la très connue **Equation de Wheeler-DeWitt** :

$$\hat{H}\phi = 0. \quad (4.24)$$

Or, l'opérateur $\hat{H}$ produit lors de la quantification se révèle être non-renormalisable⁷. Ce problème est entièrement dû au fait que la contrainte Hamiltonienne H (4.9) dépend de la métrique q_{ab} de façon non-polynomiale, et ce en raison du terme en $\sqrt{\det(q)}$.

⁷NB : Du moins à l'heure actuelle.

Ce problème va conduire à un blocage complet du programme de quantification canonique, comme nous allons le voir au point suivant.

Cinquième étape : La définition de l'espace physique

Nous devons maintenant définir un espace physique, c'est-à-dire un sous-espace de l'espace cinématique $\mathcal{H}$ dont les éléments seront considérés comme des états physiques.

La méthode la plus simple serait de définir $\psi \in \mathcal{H}$ comme étant un état physique si et seulement si $\hat{H}_I(N^I)\psi = 0$, $I = 1, 2, 3, 4$.

Cependant, en raison du problème des valeurs propres généralisées de ces opérateurs, nous devons donc introduire ce que nous avons défini à la section 2.6 comme étant un triplet de Gel'fand :

$$\mathcal{D} \subset \mathcal{H} \subset \mathcal{D}^*, \quad (4.25)$$

ainsi que le triplet des états physiques :

$$\mathcal{D}_{phys} \subset \mathcal{H}_{phys} \subset \mathcal{D}_{phys}^*. \quad (4.26)$$

Que peut-il donc nous empêcher maintenant de continuer le processus de formation de l'espace quantifié et de définir les observables du systèmes ? Simplement la recherche de notre espace physique par la résolution de l'équation de Wheeler-DeWitt.

Jusqu'à ce jour, personne n'est arrivé à formuler une solution de cette équation sous la forme (4.24), excepté certaines expressions formelles auxquelles il est difficile de donner un sens, ou certaines résolutions dans un espace tronqué de dimension finie. En conséquence, il paraît obligatoire de chercher un moyen de simplifier l'expression de cette contrainte avant sa quantification (4.9).

Notre programme de quantification se trouve donc bloqué à cette étape, et c'est ici que la nécessité d'introduire les nouvelles variables intervient.

Les nouvelles variables d'Ashtekar

Dans un premier temps, nous allons introduire ce que nous appellerons le champ de cotriades gravitationnel.

Définition 127. Le **champ de cotriade gravitationnel** est le champ de cotriade e_a^i sur S_0 tel que :

$$q_{ab} = \delta_{ij} e_a^i e_b^j, \quad (4.27)$$

où $a, b, \dots = 1, 2, 3$ sont des indices tangents et $i, j, \dots = 1, 2, 3$ sont des indices internes relatifs à un fibré associé de groupe de jauge $SU(2)$.

Signalons que nous travaillons ici sur un espace de phase plus large que celui utilisé précédemment. Nous l'appellerons *l'espace de phase étendu*.

Nous pouvons introduire également une 1-forme à valeur dans $\mathfrak{su}(2)$ définie sur S_0 , K_a^i , dérivée à partir de la seconde forme fondamentale⁸ :

$$K_{ab} = -s \operatorname{sgn}(\det(e)) K_a^i e_b^i. \quad (4.28)$$

Par les propriétés de symétrie de la seconde forme fondamentale, K_{ab} est un champ de tenseur symétrique. En conséquence, vu la relation précédente, le champ K_a^i doit satisfaire la condition suivante :

$$K_{[a}^j e_{b]}^j = 0, \quad (4.29)$$

où les crochets $[a b]$ désignent l'opération d'antisymétrisation du tenseur $K_a^j e_b^j$ vis-à-vis des indices a et b .

Nous allons maintenant introduire dans nos équations une combinaison de champs de cotriade gravitationnels. Cette combinaison portera le nom de *champ électrique* (suite à une certaine analogie avec l'électromagnétisme de Maxwell et la théorie de Yang-Mills) et constituera un premier jeu de nouvelles variables.

Définition 128. Le champ :

$$E_j^a = \frac{1}{2} \epsilon^{abcd} \epsilon_{jklm} e_b^k e_c^l e_d^m \quad (4.30)$$

est appelé **champ électrique**.

Suite à ces nouvelles variables, nous pouvons donner une formulation équivalente de la condition (4.29) :

$$K_{a[j} E_{k]}^a = 0 \quad (4.31)$$

$$\iff \epsilon_{jkl} K_a^k E_l^a = 0, \quad j = 1, 2, 3. \quad (4.32)$$

Nous noterons :

$$G_j = \epsilon_{jkl} K_a^k E_l^a = 0. \quad (4.33)$$

Définition 129. La contrainte $G_j = 0$ est appelée **contrainte de Gauss**.

Munissons l'espace de phase étendu, coordonné par les jeux de variables (K_a^i, E_i^a) , d'une algèbre de Poisson $\{\cdot, \cdot\}$.

⁸ $s = \pm 1$ représente la signature de l'espace considéré. Bien que l'espace actuel S_0 ait une signature positive, ce paramètre sera conservé afin d'étendre plus facilement les résultats à l'espace complet à 4 dimensions.

Définissons maintenant les fonctions :

$$\tilde{q}_{ab} = |\det(E)| E_a^j E_b^j, \quad \tilde{\Pi}^{ab} = \frac{1}{|\det(E)|} E_k^a E_k^d K_{[d}^i \delta_{c]}^b E_i^c, \quad (4.34)$$

où E_a^j est le tenseur inverse de E_j^a et $\det(E)$ est le déterminant relatif aux variables E_j^a .

Alors il est possible de montrer que ces fonctions se réduisent aux variables précédemment utilisées dans le formalisme ADM, q_{ab} et Π^{ab} , lorsque la condition de Gauss (4.33) est respectée.

De plus, les variables (q_{ab}, Π^{ab}) formant un ensemble de couples canoniques, les crochets de Poisson de ces fonctions $(\tilde{q}_{ab}, \tilde{\Pi}^{ab})$ doivent correspondre à ceux des variables (q_{ab}, Π^{ab}) , ce qui est vérifié lorsque l'algèbre de Poisson de l'espace de phase étendu forme une structure symplectique traditionnelle :

$$\{E_i^a(x), E_j^b(y)\} = 0, \quad \{K_a^i(x), K_b^j(y)\} = 0, \quad \{E_i^a(x), K_b^j(y)\} = \kappa \delta_b^a \delta_i^j \delta(x, y). \quad (4.35)$$

Vu d'une autre manière, nous pouvons considérer que l'espace de phase étendu, coordonné par les variables (K_a^i, E_i^a) , est tel que l'hypersurface définie par la contrainte (4.33) n'est autre que l'espace de phase du formalisme ADM.

Au sein de cette hypersurface, il est possible de réécrire les équations de contraintes de difféomorphisme spatial et Hamiltonienne (4.9) en fonction des nouvelles variables K_a^i et E_i^a . En voici la formulation explicite :

$$\begin{aligned} H_a &= -2\tilde{\nabla}_b [K_a^j E_j^b - \delta_a^b K_c^j E_j^c] \\ H &= \frac{-s}{\sqrt{|\det E|}} [E_k^a E_j^b - E_j^a E_k^b] K_a^j K_b^k - \sqrt{|\det E|} R(E_l^c), \end{aligned} \quad (4.36)$$

où la courbure scalaire $R = R(E_l^c)$ est considérée comme une fonction du champ électrique E_l^c .

Nous allons maintenant procéder à deux transformations successives sur nos jeux de variables (K_a^i, E_i^a) . La première transformation sera un (a priori) simple changement d'échelle, la seconde sera une transformation affine un peu plus complexe.

Le paramètre d'Immirzi

La transformation suivante :

$$\begin{cases} \tilde{K}_a^j = \beta K_a^j \\ \tilde{E}_j^a = \frac{1}{\beta} E_j^a \end{cases} \quad (4.37)$$

où β est un nombre complexe non nul, est trivialement une transformation canonique.

Définition 130. Le paramètre complexe non nul β est appelé **paramètre d'Immirzi**.

Ce paramètre peut paraître insignifiant. Il l'est effectivement au niveau du système non quantifié. Mais, étrangement, la quantification du système pour des paramètres d'Immirzi différents conduit par moment à des prédictions physiques complètement différentes. Nous aurons l'occasion de discuter à nouveau de ce paramètre lors de l'écriture de la contrainte Hamiltonienne.

La transformation affine

Rappelons-nous la *connexion de spin* (2.22) appliquée ici au champ électrique :

$$D_a E_j^a = \partial_a E_j^a + \Gamma_{aj}^k E_k^a = \partial_a E_j^a + \epsilon_{ljk} \Gamma_a^l E_k^a, \quad (4.38)$$

où D_a est la dérivée covariante compatible avec le champ électrique, et $\Gamma_{aj}^k = \Gamma_a^l (T_l)_j^k$ avec $(T_l)_j^k = \epsilon_{ljk}$ prises comme constantes de structure de l'algèbre $\mathfrak{su}(2)$.

La condition de compatibilité de la dérivée covariante⁹ :

$$D_a E_j^a = 0 \iff \partial_a E_j^a + \epsilon_{ljk} \Gamma_a^l E_k^a = 0 \quad (4.39)$$

nous permet de déterminer Γ_a^j en fonction de E_j^a :

$$\begin{aligned} \Gamma_a^j = & \frac{1}{2} \epsilon_{ijk} E_k^b \left(\partial_b E_a^i - \partial_a E_b^i + E_i^c E_a^l \partial_b E_c^l \right) \\ & + \frac{1}{4} \epsilon_{ijk} E_k^b \left(2 E_a^i \frac{\partial_b (\det(E))}{\det(E)} - E_b^i \frac{\partial_a (\det(E))}{\det(E)} \right). \end{aligned} \quad (4.40)$$

Remarquons que Γ_a^j est indépendant du facteur d'échelle β . Une conséquence de cette remarque est que D_a est totalement indépendant de β , et nous avons donc :

$$D_a \tilde{E}_j^a = \frac{1}{\beta} D_a E_j^a = 0. \quad (4.41)$$

Dès lors, si nous additionnons la condition (4.39) à notre contrainte de Gauss (4.33), toutes deux réécrites dans les nouvelles variables, nous obtenons une nouvelle version de la contrainte :

$$G_j = \epsilon_{jkl} \tilde{K}_a^k \tilde{E}_l^a = \epsilon_{jkl} \tilde{K}_a^k \tilde{E}_l^a + \partial_a \tilde{E}_j^a + \epsilon_{jkl} \Gamma_a^k \tilde{E}_l^a = 0. \quad (4.42)$$

Un réarrangement des termes fait apparaître une structure bien connue :

$$G_j = \partial_a \tilde{E}_j^a + \epsilon_{jkl} \left(\Gamma_a^k + \tilde{K}_a^k \right) \tilde{E}_k^a = 0. \quad (4.43)$$

⁹cf. section 2.4.

Nous pouvons alors définir cette expression comme étant la nouvelle dérivée covariante compatible avec le champ électrique modifié $\tilde{E}_j^a$:

$$\tilde{D}_a \tilde{E}_j^a = \partial_a \tilde{E}_j^a + \epsilon_{jkl} \left(\Gamma_a^k + \tilde{K}_a^k \right) \tilde{E}_k^a, \quad (4.44)$$

ce qui introduit la nouvelle connexion :

$$A_a^j = \Gamma_a^j + \tilde{K}_a^j. \quad (4.45)$$

Définition 131. La connexion

$$A_a^j = \Gamma_a^j + \tilde{K}_a^j = \Gamma_a^j + \beta K_a^j \quad (4.46)$$

est la **nouvelle connexion d'Ashtekar**.

Vu la structure particulièrement compliquée de la transformation affine introduite, le résultat suivant est particulièrement surprenant :

Théorème 132. *Les paires de variables $(A_a^j, \tilde{E}_j^a)$ forment des couples conjugués canoniques, i.e.*

$$\{\tilde{E}_i^a(x), \tilde{E}_j^b(y)\} = 0, \quad \{A_a^i(x), A_b^j(y)\} = 0, \quad \{\tilde{E}_i^a(x), A_b^j(y)\} = \kappa \delta_b^a \delta_i^j \delta(x, y). \quad (4.47)$$

La preuve de ce théorème tient seulement en la relation non-triviale $\{\tilde{E}_i^a(x), \Gamma_b^j(y)\} = 0$.

Introduisons maintenant la courbure relative à la nouvelle dérivée covariante $\tilde{D}_a$:

$$\tilde{F}_{ab}^j = \partial_a A_b^j - \partial_b A_a^j + \epsilon_{jkl} A_a^k A_b^l. \quad (4.48)$$

Il est maintenant possible de réécrire l'ensemble de nos contraintes, au prix d'un calcul très fastidieux, dans notre nouveau formalisme :

$$\begin{aligned} G_j &= \tilde{D}_a \tilde{E}_j^a \\ H_a &= \tilde{F}_{ab}^j \tilde{E}_j^b \\ H &= \left(\tilde{F}_{ab}^j + \frac{(\beta^2 - s)}{\beta^2} \epsilon_{jmn} (A_a^m - \Gamma_a^m) (A_b^n - \Gamma_b^n) \right) \frac{\epsilon_{jkl} \tilde{E}_k^a \tilde{E}_l^b}{\beta \sqrt{\det(q)}}. \end{aligned} \quad (4.49)$$

Notre but ultime est donc atteint, car sous un simple ajustement de facteur $\frac{1}{\beta \sqrt{\det(q)}}$, notre contrainte Hamiltonienne possède maintenant une structure polynomiale :

$$H' = \left(\tilde{F}_{ab}^j + \frac{(\beta^2 - s)}{\beta^2} \epsilon_{jmn} (A_a^m - \Gamma_a^m) (A_b^n - \Gamma_b^n) \right) \epsilon_{jkl} \tilde{E}_k^a \tilde{E}_l^b. \quad (4.50)$$

Nous retombons bien évidemment sur les équations de la théorie exposées au chapitre 3.

Discussion sur l'interprétation à quatre dimensions et sur le paramètre d'Immirzi

Nous pouvons donner une interprétation de notre nouvelle connexion A pour un espace à quatre dimensions. Il suffit pour cela de compléter notre champ de cotriade e_i^a en un champ de cotétrade e_I^α avec $\alpha, I = 0, 1, 2, 3$.

Pour cela, il suffit de fixer les composantes manquantes de façon à conserver l'orthonormalité de la tétrade pour l'indice d'espace-temps μ , ce qui donne :

$$e_0^0 = \frac{1}{N}, \quad e_0^a = \frac{-N^a}{N}, \quad e_i^0 = 0. \quad (4.51)$$

Reprenons maintenant notre discussion sur le paramètre d'Immirzi. Pour une signature donnée $s = \pm 1$, il existe une valeur préférentielle $\beta^2 = s$ de ce paramètre d'ajustement. Avec un tel choix de paramètre, l'équation de contrainte Hamiltonienne se trouve fortement simplifiée :

$$\begin{aligned} G_j &= \tilde{D}_a \tilde{E}_j^a \\ H_a &= \tilde{F}_{ab}^j \tilde{E}_j^b \\ H' &= \epsilon_{jkl} \tilde{F}_{ab}^j \tilde{E}_k^a \tilde{E}_l^b. \end{aligned} \quad (4.52)$$

Pour un espace-temps de type Euclidien, nous trouvons comme valeur préférentielle $\beta = \pm 1$, ce qui implique que nos deux variables $A_a^j, \tilde{E}_j^a$ sont réelles.

Par contre, pour un espace-temps de type Lorentzien, nous trouvons $\beta = \pm i$, ce qui conduit la connexion A_a^j à être complexe au lieu de réelle. Le caractère complexe pose nettement moins de problème pour le champs électrique modifié $\tilde{E}_j^a$, car il est parfaitement possible de réécrire les contraintes (4.52) en fonction du champ réel E_j^a , ce qui conduit à la formulation traditionnelle de la théorie :

$$G_j = \tilde{D}_a \frac{E_j^a}{\beta} \quad H_a = \tilde{F}_{ab}^j \frac{E_j^b}{\beta} \quad H' = \epsilon_{jkl} \tilde{F}_{ab}^j \frac{E_k^a}{\beta} \frac{E_l^b}{\beta} \quad (4.53)$$

$$\Longleftrightarrow$$

$$G'_j = \tilde{D}_a E_j^a \quad H'_a = \tilde{F}_{ab}^j E_j^b \quad H'' = \epsilon_{jkl} \tilde{F}_{ab}^j E_k^a E_l^b. \quad (4.54)$$

Seulement, afin de garantir que le nombre de degrés de liberté de la théorie soit conservé, il est nécessaire d'imposer la condition suivante :

$$\frac{A_a^j - \Gamma_a^j}{\beta} = \overline{\left(\frac{A_a^j - \Gamma_a^j}{\beta} \right)}. \quad (4.55)$$

Définition 133. La condition (4.55) est appelée **condition de réalité**.

Cette condition est triviale pour des valeurs réelles de β , mais l'est nettement moins pour des valeurs complexes. Dans le cas d'un paramètre d'Immirzi imaginaire, et donc d'une connexion A_a^j complexe, cette condition se réécrit généralement sous la forme suivante :

$$A_a^j + \overline{A_a^j} = 2\Gamma_a^j. \quad (4.56)$$

Nous sommes donc en face de deux possibilités : introduire une connexion complexe simplifiant fortement la contrainte Hamiltonienne avec l'ajout d'une contrainte supplémentaire non-triviale, ou conserver une connexion réelle rendant triviale cette condition au prix d'une contrainte Hamiltonienne nettement plus compliquée.

La version complexe est la connexion initiale introduite par Ashtekar dans [40], [41]. Cette version fut originellement celle choisie pour la LQG en raison de l'expression simplifiée de la contrainte Hamiltonienne. Malheureusement, la condition de réalité fut laissée de côté sans jamais être traitée, et resta longtemps le fardeau de la théorie.

La formulation réelle de la théorie a été étudiée pas Barbero dans [42], [43], [44]. C'est elle qui a permis de se débarrasser de la condition de réalité et de faire progresser la théorie de façon fulgurante. En effet, une connexion complexe conduit à une théorie basée sur le groupe de jauge $SL(2, \mathbb{C})$ au lieu de $SU(2)$. Or, le groupe $SL(2, \mathbb{C})$ n'est pas un groupe compact, et donc la bijection (3.36) ne mène pas à la définition d'une limite projective compacte. En conséquence, le théorème de représentation de Riesz ne peut être appliqué et la définition de la mesure est rendue caduque. L'introduction du groupe compact $SU(2)$ relatif à la connexion réelle fut la clé du développement du formalisme différentiel.

Cette progression fut néanmoins effectuée, dans un premier temps, seulement pour des espaces de type euclidien, afin de conserver la formulation simple de la contrainte Hamiltonienne. La possibilité de résolution de l'équation sous sa forme complète pour un espace Lorentzien fut introduite par Thiemann dans [45], [46] par l'intermédiaire d'une rotation dans le plan complexe connue sous le nom de *Wick transform*.

Il n'existe à l'heure actuelle aucune version de la théorie permettant de donner une formulation simple à la fois pour la contrainte Hamiltonienne et pour la condition de réalité.

Conclusion

Nous avons exposé, tout au long de cet ouvrage, l'origine et la structure fondamentale du formalisme de la Gravité Quantique à Boucles. Nous allons maintenant, en guise de conclusion, donner un aperçu des principaux résultats et des problèmes actuels de la théorie.

L'espace $\mathcal{H}_{diff}$, solution des contraintes de Gauss de de difféomorphisme, est maintenant bien connu. Plusieurs opérateurs relatifs à cet espace ont été construits et beaucoup de propriétés ont été étudiées.

Le premier de ces opérateurs est l'opérateur d'aire [47]. C'est le plus simple qui ait été étudié jusqu'à présent, et c'est aussi celui qui a fourni le premier résultat important de la Gravité Quantique à Boucles. Voici ce résultat : le spectre de l'opérateur d'aire est discret à l'échelle de Planck, et la plus petite valeur propre vaut $\lambda_0 = \frac{\sqrt{3}}{4} l_p^2 \beta$, où $l_p = \sqrt{\hbar \kappa}$ est la longueur de Planck. En conséquence, il existe en Gravité Quantique à Boucles un "area gap", en dessous duquel aucune valeur d'aire n'est permise.

Un opérateur de volume a également été étudié en détail [48], et le spectre de cet opérateur est relativement bien connu, malgré que sa détermination soit nettement moins aisée. Thiemann a aussi proposé un opérateur de longueur [49], mais son expression particulièrement compliquée empêche d'en tirer un grand nombre d'informations.

Le second résultat important de la Gravité Quantique à Boucles est l'établissement de la formule de Bekenstein-Hawking de l'entropie d'un trou noir [50]. Signalons néanmoins que la solution donnée par la Gravité Quantique à Boucles possède un facteur dépendant du paramètre d'Immirzi β , et que ce facteur ne correspond à celui donné par Hawking que pour la valeur $\beta = \frac{\ln 2}{\pi \sqrt{3}}$. Les discussions sur la valeur du paramètre d'Immirzi vont donc bon train.

La partie de la Gravité Quantique à Boucles qui pose actuellement le plus de problèmes et de complications est sa dynamique, ou plus précisément la résolution de la contrainte Hamiltonienne. En effet, bien que la *Wick transform* proposée par Thiemann ait permis d'avancer considérablement et qu'il fut même possible de combiner cette équation avec un champ de matière, le résultat de cette transformation est la formation d'une infinité d'opérateurs Hamiltoniens formant une algèbre qui

n'est pas définie.

L'essentiel de la recherche dans ce domaine est donc concentré maintenant sur la formation d'une algèbre de contraintes alternative éliminant les problèmes présents actuellement dans la théorie mais dont les solutions correspondraient à celles de l'algèbre actuellement utilisée.

Ce programme est appelé *Master Constraint Programme* et est actuellement en test sur divers espaces particuliers [51], [52], [53], [54], [55], [56].

La fameuse équation de Wheeler-DeWitt est donc encore loin d'être complètement résolue.

Bibliographie

- [1] C. Rovelli (2004), *Quantum Gravity*, Cambridge University Press, Cambridge.
- [2] T. Thiemann (2001), *Introduction to Modern Canonical Quantum General relativity*, gr-qc/0110034.
- [3] M. Huan, W. Huang et Y. Ma (2005), *Fundamental Structure of Loop Quantum Gravity*, gr-qc/0509064.
- [4] M. Felden (1992), *Le modèle géométrique de la physique*, Masson, Paris.
- [5] M. Carroll (avril 2002), *Cours de Relativité Générale*,
url: <http://www-cosmosafr.iap.fr/MIT-RG1F.pdf>,
traduction et adaptation par J. Fric de *Lecture notes on General relativity*,
url: <http://pancake.uchicago.edu/~carroll/notes/>.
- [6] L. Landau et E. Lifchitz (1994), *Théorie des Champs*, Mir-Ellipses, Paris.
- [7] C. Cohen-Tannoudji (1978), B. Diu et F. Laloë, *Mécanique quantique*, Hermann, Paris.
- [8] J. E. Roberts (1966), *Rigged Hilbert Spaces in Quantum Mechanics*, Commun. math Phys **3** 98–119.
- [9] T. Thiemann (2003), *Lectures on Loop Quantum Gravity*, Lecture Notes in Physics **631** 41-135, gr-qc/0210094.
- [10] R. Vaas (2004), *The Duel : Strings versus Loops*, Bild.Wiss. **4** 44-49, physics/0403112.
- [11] C. Rovelli (2003), *A dialog on quantum gravity*, Int.J.Mod.Phys. **D12** 1509-1528, hep-th/0310077.
- [12] M. Lipschultz (1969), *Differential Geometry*, Schaum's outlines series, McGraw-Hill, New-York.
- [13] J. Baez et J. P. Muniain (1994), *Gauge Fields, Knots and Gravity*, Series on Knots and Everything - vol. 4, World Scientific Publishing, Singapore.
- [14] R. Coquereaux (2002), *Espaces Fibrés et Connexions : Une introduction aux géométries classiques et quantiques de la physique théorique*, Centre de Physique Théorique, Luminy - Marseille.
- [15] P. A. M. Dirac (1964), *Lecture on Quantum Mechanics*, Belfer Graduate School of Sciences, Yeshiva University Press, New York.

- [16] A. Hanson, T. Regge et C. Teitelboim (1976), *Constrained Hamiltonian Systems*, Accademia Nazionale dei Lincei, Roma.
- [17] S. Lipschutz (1965, 1981 pour la traduction française), *Topologie : cours et problèmes*, Série Schaum (Schaum's outlines series), McGraw-Hill, New-York, Paris.
- [18] R. V. Kadison et J. R. Ringrose (1983), *Fundamentals of the Theory of Operator Algebras*, vol. 1,2, Academic Press, London.
- [19] J. Dixmier (1957), *Les Algèbres d'Opérateurs dans l'Espace Hilbertien (Algèbres de von Neumann)*, Gauthiers-Villars, Berlin.
- [20] I. M. Gel'fand et N. Ya. Vilenkin (1964), *Generalized functions. Applications of harmonic analysis*, Acad.Press. **4**.
- [21] C. Rovelli et L. Smolin (1988), *Knot theory and quantum gravity*, Phys.Rev.Lett. **61** 1155.
- [22] C. Rovelli et L. Smolin (1990), *Loop space representation for quantum general relativity*, Nucl.Phys **B331** 295.
- [23] C. Rovelli (1998), *Loop Quantum Gravity*, Living Reviews in Relativity, journal électronique, gr-qc/9710008,
url: <http://www.livingreviews.org/Articles/Volume1/1998-1rovelli>,
 Une traduction française se trouve à l'adresse suivante :
url: <http://www-cosmosafr.iap.fr/gravitation%20quantique.html>.
- [24] R. De Pietri et C. Rovelli (1996), *Geometry Eigenvalues and Scalar Product from Recoupling theory in Loop Quantum Gravity*, Phys.Rev. **D54** 2664-2690, gr-qc/9602023.
- [25] R. Penrose (1971), *Angular momentum : an approach to combinatorial space-time*, dans *Quantum Theory and Beyond*, ed. T. Bastin, Cambridge University Press, Cambridge, 221-243.
- [26] C. Rovelli et L. Smolin (1995), *Spin networks and quantum gravity*, Phys.Rev. **D52** 5743-5759, gr-qc/9505006.
- [27] A. Ashtekar et C. J. Isham (1992), *Representations of the analytic Holonomy Algebras of Gravity and Non-Abelian Gauge Theories*, Class. Quantum Grav. **9**, hep-th/9202053.
- [28] A. Ashtekar, J. Lewandowski, D. Marolf, J. Mourão et T. Thiemann (1995), *Quantization for diffeomorphism invariant theories of connections with local degrees of freedom*, Journ.Math.Phys. **36** 6456-6493, gr-qc/9504018.
- [29] A. Ashtekar et J. Lewandowski (1995), *Differential geometry on the space of connections via graphs and projective limits*, Journ.Geo.Physics. **17** 191, gr-qc/9412073.
- [30] D. Marolf et J. Mourão (1995), *On the support of the Ashtekar-Lewandowski measure*, Commun.Math.Phys. **170** 583-606, hep-th/9403112.

- [31] M. R. Spiegel (1969), *Theory and Problems of Real Variables*, Schaum's outlines series, McGraw-Hill, New-York.
- [32] W. Rudin (1987), *Real and Complex Analysis*, Schaum's outlines series, McGraw-Hill, New-York.
- [33] R. De Pietri (1997), *On the relation between the connection and the loop representation of quantum gravity*, Class. and Quantum Grav. **14** 53, gr-qc/9605054.
- [34] S. Pépin (1991), *Introduction à la Cosmologie Quantique*, mémoire de licence, Université de Liège, Liège.
- [35] C. Laforge (1997), *Etude des systèmes avec contraintes : Algorithme de Dirac-Bergmann pour les théories classiques et extension au formalisme A.D.M. pour la relativité générale*, mémoire de licence, Facultés Universitaires Notre-Dame de la Paix, Namur.
- [36] R. Geroch (1970), *Domaine of dependance*, J.Math.Phys. **11** 437-449.
- [37] N. Bernal et M. Sánchez (2003), *On smooth Cauchy hypersurfaces and Geroch's splitting theorem*, Commun.Math.Phys. **243** 461-470, gr-qc/0306108.
- [38] N. Bernal et M. Sánchez (2005), *Smoothness of time functions and the metric splitting of globally hyperbolic spacetimes*, Commun.Math.Phys. **257** 43-50, gr-qc/0401112.
- [39] R. Arnowitt, S. Deser et C. W. Misner (1962), dans : *Gravitation : An Introduction to current Research*, L. Witten (ed.), Wiley, New York.
- [40] A. Ashtekar (1986), Phys.Rev.Lett. **57**, 2244.
- [41] A. Ashtekar (1987), Phys.Rev. **D36**, 1587.
- [42] J. Fernando Barbero (1995), *Reality Conditions and Ashtekar Variables : a Different Perspective*, Phys.Rev. **D51**, 5498-5506, gr-qc/9410013.
- [43] J. Fernando Barbero (1995), *Real Ashtekar Variables for Lorentzian Signature Space-times*, Phys.Rev. **D51**, 5507-5510, gr-qc/9410014.
- [44] J. Fernando Barbero (1996), *From Euclidean to Lorentzian General Relativity : The Real Way*, Phys.Rev. **D54**, 1492-1499, gr-qc/9605066.
- [45] T. Thiemann (1996), *Reality conditions inducing transforms for quantum gauge field theory and quantum gravity*, Class.Quant.Grav. **13** 1383-1404, gr-qc/9511057.
- [46] T. Thiemann (1996), *Anomaly-free formulation of non-perturbative, four-dimensional Lorentzian quantum gravity*, Phys.Lett. **B380** 257, gr-qc/9606088.
- [47] A. Ashtekar et J. Lewandowski (1997), *Quantum Theory of Geometry I : Area Operators*, Class.Quant.Grav. **14** A55-A82, gr-qc/9602046.
- [48] A. Ashtekar et J. Lewandowski (1997), *Quantum Theory of Geometry II : Volume Operators*, gr-qc/9711031.
- [49] T. Thiemann (1998), *A length operator for canonical quantum gravity*, J.Math.Phys. **39** 3372-3392, gr-qc/9606092.

- [50] A. Ashtekar, J. Baez, A. Corichi, K. Krasnov, (1998), *Quantum Geometry and black hole entropy*, Phys.Rev.Lett. **80** 904-907, gr-qc/9710007.
- [51] T. Thiemann (2006), *The Phoenix Project : Master Constraint Programme for Loop Quantum Gravity*, Class.Quant.Grav. **23** 2211-2248, gr-qc/0305080.
- [52] T. Thiemann (2006), *Testing the Master Constraint Programme for Loop Quantum Gravity I. General Framework*, Class.Quant.Grav. **23** 1025-1066, gr-qc/0411138.
- [53] T. Thiemann (2006), *Testing the Master Constraint Programme for Loop Quantum Gravity II. Finite Dimensional Systems*, Class.Quant.Grav. **23** 1067-1088 , gr-qc/0411139.
- [54] T. Thiemann (2006), *Testing the Master Constraint Programme for Loop Quantum Gravity III. $SL(2, \mathbb{R})$ Models*, Class.Quant.Grav. **23** 1089-1120 , gr-qc/0411140.
- [55] T. Thiemann (2006), *Testing the Master Constraint Programme for Loop Quantum Gravity IV. Free Field Theories*, Class.Quant.Grav. **23** 1121-1142 , gr-qc/0411141.
- [56] T. Thiemann (2006), *Testing the Master Constraint Programme for Loop Quantum Gravity V. Interacting field theories*, Class.Quant.Grav. **23** 1143-1162, gr-qc/0411142.