

RESEARCH OUTPUTS / RÉSULTATS DE RECHERCHE

Análisis de bifurcación de Hopf para el modelo de Rössler

Ramirez Avila, Gonzalo Marcelo; Cabrera Lafuente, Renán

Published in:
Revista Boliviana de Física

Publication date:
2001

[Link to publication](#)

Citation for pulished version (HARVARD):

Ramirez Avila, GM & Cabrera Lafuente, R 2001, 'Análisis de bifurcación de Hopf para el modelo de Rössler', *Revista Boliviana de Física*, vol. 7, no. 7, pp. 115-128.

General rights

Copyright and moral rights for the publications made accessible in the public portal are retained by the authors and/or other copyright owners and it is a condition of accessing publications that users recognise and abide by the legal requirements associated with these rights.

- Users may download and print one copy of any publication from the public portal for the purpose of private study or research.
- You may not further distribute the material or use it for any profit-making activity or commercial gain
- You may freely distribute the URL identifying the publication in the public portal ?

Take down policy

If you believe that this document breaches copyright please contact us providing details, and we will remove access to the work immediately and investigate your claim.

ANÁLISIS DE BIFURCACIÓN DE HOPF PARA EL MODELO DE RÖSSLER

Marcelo Ramírez Ávila
Renán Cabrera Lafuente
Carrera de FÍSICA-UMSA
La Paz-Bolivia

Resumen

Se analiza la bifurcación de Hopf, en base al desarrollo perturbativo multiescala,¹ para el modelo de Rössler trabajando en una región prefijada del espacio de parámetros. Se encuentra la forma normal de la bifurcación de Hopf y su solución para este caso. Finalmente se muestran las gráficas correspondientes a las regiones donde es posible esta bifurcación y sucesivos ciclos límites de acuerdo al valor que toma el parámetro de control a .

1 Introducción

El objetivo principal del presente artículo es mostrar en detalle el análisis de bifurcación de Hopf para un modelo específico a tres dimensiones.

Cuando se hace referencia a una bifurcación de Hopf, lo primero que resalta es el desarrollo de órbitas periódicas a partir de un punto fijo estable cuando el parámetro de control pasa el umbral de su valor crítico. Estas auto-oscilaciones se presentan en sistemas de la más diversa índole tales como los hamiltonianos y los disipativos que encuentran sus aplicaciones en sistemas biológicos (morfogénesis, población), químicos (auto-catalíticos), meteorológicos, etc.

¹Para este fin se utilizó MapleV 5.1

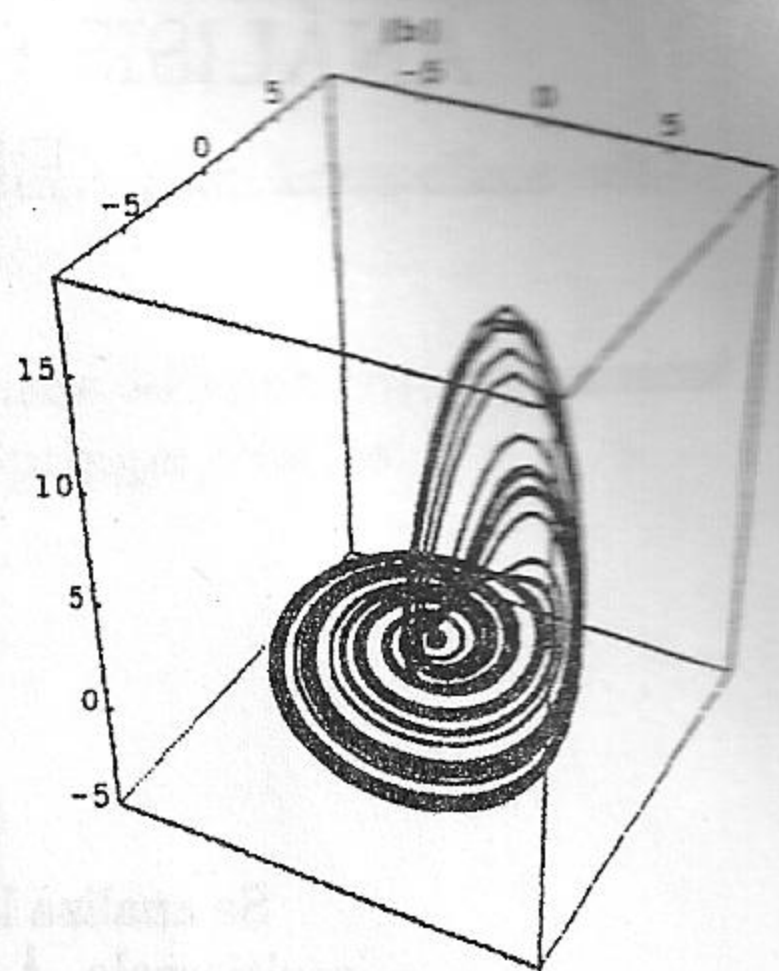
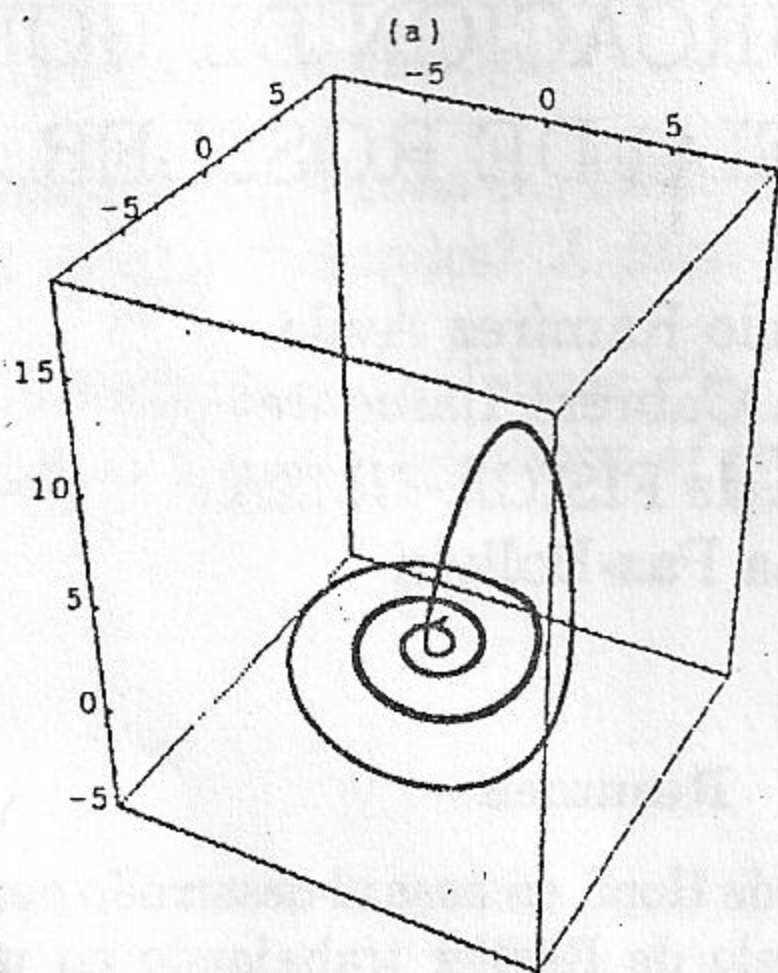


Figura 1: (a) Órbita homoclínica para el modelo de Rössler correspondiente a los valores de los parámetros $a = 0.3501$, $b = 0.30$ y $c = 4.541$. (b) Atractor extraño correspondiente a los valores de los parámetros $a = 0.38$, $b = 0.30$ y $c = 4.8$

2 El Modelo de Rössler

Este modelo consiste de un acoplamiento de tres ecuaciones con una no linealidad cuadrática simple [1]:

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= -y - z \\ \frac{dy}{dt} &= x + ay \\ \frac{dz}{dt} &= bx - cz + xz \end{aligned} \quad (1)$$

Este es uno de los más conocidos y analizados [2] en la ciencia no lineal. Como ejemplo (ver Fig. 1) se muestra una órbita homoclínica y un atractor extraño para determinados valores de los parámetros.

3 Análisis de Estabilidad Lineal

3.1 Puntos Fijos

Para todo el análisis nos limitaremos al caso en el que cada uno de los parámetros a , b , c son positivos. Haciendo el cálculo correspondiente, se encuentran dos puntos singulares para el sistema:

$$\begin{aligned}x_1 &= 0, & y_1 &= 0, & z_1 &= 0 \\x_2 &= c - ab, & y_2 &= b - \frac{c}{a}, & z_2 &= \frac{c}{a} - b\end{aligned}$$

3.2 Linealización

Considerando pequeñas perturbaciones respecto al estado de referencia: $\mathbf{x} = \mathbf{x}_s + \mathbf{X}$, se obtiene para cada uno de los puntos singulares la forma matricial de la ecuación:

$$\frac{d\mathbf{X}}{dt} = \mathcal{L}(\lambda) \cdot \mathbf{X} + \mathbf{h}(\mathbf{X}, \lambda) \quad (2)$$

donde

$$\mathcal{L}(\lambda) = \left(\frac{\delta \mathbf{F}}{\delta \mathbf{x}} \right)_{\mathbf{x}_s}$$

es la parte linealizada, y

$$\mathbf{h}(\mathbf{x}, \lambda) = \frac{1}{2} \left(\frac{\delta^2 \mathbf{F}}{\delta \mathbf{x} \delta \mathbf{x}} \right)_{\mathbf{x}_s} \cdot \mathbf{X}\mathbf{X} + \dots$$

son las contribuciones no lineales.

(x_1, y_1, z_1) :

$$\frac{d}{dt} \begin{pmatrix} X \\ Y \\ Z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1 & -1 \\ 1 & a & 0 \\ b & 0 & -c \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X \\ Y \\ Z \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ XZ \end{pmatrix} \quad (3)$$

(x_2, y_2, z_2) :

$$\frac{d}{dt} \begin{pmatrix} X \\ Y \\ Z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1 & -1 \\ 1 & a & 0 \\ \frac{c}{a} & 0 & -ab \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X \\ Y \\ Z \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ XZ \end{pmatrix} \quad (4)$$

3.3 Ecuación característica

Para hallar la misma se debe calcular:

$$\det(\mathcal{L} - \lambda \mathcal{I})$$

para cada punto singular.

(x_1, y_1, z_1) :

$$\lambda^3 + (c - a)\lambda^2 + (1 + b - ac)\lambda + c - ab = 0 \quad (5)$$

Si las raíces son de la forma $(i\omega, -i\omega, \lambda)$, se tendrá de acuerdo con las propiedades de una ecuación cúbica, que:

$$a_{\pm} = \frac{1 + c^2 \pm \sqrt{(1 + c^2)^2 - 4bc^2}}{2c} \quad (6)$$

(x_2, y_2, z_2) :

$$\lambda^3 + a(b - 1)\lambda^2 + \left(1 + \frac{c}{a} - a^2b\right)\lambda + ab - c = 0 \quad (7)$$

y de la misma forma con la que se trabajó con el anterior punto, se encuentra:

$$c = \frac{a}{b} + (b - 1)a^3 \quad (8)$$

4 Bifurcación de Hopf

Para hacer este análisis se considerarán las siguientes regiones en el espacio de parámetros [2]:

$$\begin{aligned} b &= 0.3 \\ 0 &\leq a \leq 0.55 \\ 4 &\leq c \leq 5.8 \end{aligned}$$

Para estos valores de c y a , la relación (8) nunca se satisface, en cambio, la relación (6) puede ser satisfecha para a_- .

Entonces, se va a considerar que el parámetro de control es a y en la criticalidad se tendrá a_- . Es decir

$$\lambda_c = a_-$$

Por lo que (2) se puede escribir:

$$\frac{d\mathbf{X}}{dt} = \mathcal{L}(a) \cdot \mathbf{X} + \mathbf{h}(\mathbf{X}, a)$$

4.1 Desarrollo perturbativo multiescala

Para hacer esto, se utilizará:

$$\begin{aligned} \mathbf{X} &= \epsilon \mathbf{X}_1 + \epsilon^2 \mathbf{X}_2 + \dots \\ a - a_- &= \epsilon \gamma_1 + \epsilon^2 \gamma_2 + \dots \\ \frac{d}{dt} &= \Omega_c \frac{\partial}{\partial T} + \epsilon \frac{\partial}{\partial \tau_1} + \epsilon^2 \frac{\partial}{\partial \tau_2} + \dots \end{aligned} \quad (9)$$

Se sabe que (5) tiene como soluciones $(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) = (\rho + i\omega, \rho - i\omega, \lambda)$ y se ha considerado que el conjunto de soluciones era $(i\omega, -i\omega, \lambda)$, por lo que para determinar Ω_c se tiene:

$$\text{Im } \omega_c = \Omega_c = \sqrt{1 + b - a_- c} \equiv \omega \quad (10)$$

4.1.1 Primer orden: $O(\epsilon)$

A partir de la ecuación

$$\left[\Omega_c \frac{\partial}{\partial T} \mathcal{I} - \mathcal{L}(a_-) \right] \cdot \mathbf{X}_1 = 0 \quad (11)$$

Se encuentran soluciones de la forma:

$$\mathbf{X}_1 = k u e^{iT} + k^* u^* e^{-iT} \quad (12)$$

Primeramente se debe determinar \mathbf{u} del hecho que:

$$\mathcal{L}(a_-) \cdot \mathbf{u} = i\Omega_c \mathbf{u}$$

De donde se obtiene el sistema de ecuaciones:

$$\begin{aligned} -u_2 \quad -u_3 &= i\omega u_1 \\ u_1 + a_- u_2 &= i\omega u_2 \\ b u_1 \quad -c u_3 &= i\omega u_3 \end{aligned} \quad (13)$$

Trabajando con (13) y haciendo una normalización arbitraria con $U_2 = \frac{u_2}{u_1}$ y $U_3 = \frac{u_3}{u_1}$, se obtiene para \mathbf{u} :

$$\mathbf{u} = \begin{pmatrix} 1 \\ U_2 \\ U_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -\frac{a_- + i\omega}{a_-^2 + \omega^2} \\ \frac{a_- - i\omega(\omega^2 + a_-^2 - 1)}{a_-^2 + \omega^2} \end{pmatrix} \quad (14)$$

En consecuencia (12) será:

$$\begin{pmatrix} X_1 \\ Y_1 \\ Z_1 \end{pmatrix} = k(\tau_1 \dots) \begin{pmatrix} 1 \\ -\frac{a_- + i\omega}{a_-^2 + \omega^2} \\ \frac{a_- - i\omega(\omega^2 + a_-^2 - 1)}{a_-^2 + \omega^2} \end{pmatrix} e^{iT} + c.c. \quad (15)$$

4.1.2 Segundo orden $O(\epsilon^2)$

A partir de la ecuación:

$$q_2 = \left[\Omega_c \frac{\partial}{\partial T} \mathcal{I} - \mathcal{L}(a_-) \right] \cdot \mathbf{X}_2 = \gamma_1 \mathcal{L}_a(a_-) \cdot \mathbf{X}_1 + \frac{1}{2} h_{XX}(a_-) \cdot \mathbf{X}_1 \mathbf{X}_1 - \frac{\partial \mathbf{X}_1}{\partial \tau_1} \quad (16)$$

y aplicando la *condición de solvencia* a este orden:

$$(\mathbf{u}^\dagger, \mathbf{q}_2) = 0$$

se determinará \mathbf{X}_2 . Antes de nada, se debe calcular \mathbf{u}^\dagger a partir de:

$$\mathcal{L}^\dagger(a_-) \mathbf{u}^\dagger = -i\omega \mathbf{u}^\dagger$$

Con lo que se obtiene, luego de hacer los cambios de variable $\frac{u_2^\dagger}{u_1^\dagger} = U_2^\dagger$ y $\frac{u_3^\dagger}{u_1^\dagger} = U_3^\dagger$ además de la normalización, la expresión:

$$\mathbf{u}^\dagger = \begin{pmatrix} 1 \\ U_2^\dagger \\ U_3^\dagger \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -\frac{\omega[\omega a_- + i(a_- b - c)]}{(a_- b - c)^2 + \omega^2 a_-^2} \\ \frac{\omega b[\omega c - i(a_- b - c)]}{(a_- b - c)^2 + \omega^2 c^2} \end{pmatrix} \quad (17)$$

Considerando la definición del producto escalar:

$$(\mathbf{a}(T), \mathbf{b}(T)) = \int_0^{2\pi} dT \mathbf{a}^*(T) \cdot \mathbf{b}(T)$$

tendremos:

$$\int_0^{2\pi} dT e^{-iT} \mathbf{u}^{\dagger*}(T) \cdot \mathbf{q}_2 = 0 \quad (18)$$

Que escribiendo de manera explícita:

$$\int_0^{2\pi} dT e^{-iT} \begin{pmatrix} 1 & U_2^{\dagger*} & U_3^{\dagger*} \end{pmatrix} \cdot \left[\underbrace{\gamma_1 \begin{pmatrix} 0 \\ Y_1 \\ 0 \end{pmatrix}}_{\gamma_1 \mathcal{L}_a(a_-) \cdot \bar{X}_2} + \underbrace{\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ X_1 Z_1 \end{pmatrix}}_{\frac{1}{2} h_{XX}(a_-) \bar{X}_1 \bar{X}_1} - \frac{\partial}{\partial \tau_1} \begin{pmatrix} X_1 \\ Y_1 \\ Z_1 \end{pmatrix} \right] = 0 \quad (19)$$

$\gamma_1 \mathcal{L}_a(a_-) \cdot \bar{X}_2 + \frac{1}{2} h_{XX}(a_-) \bar{X}_1 \bar{X}_1 - \frac{\partial}{\partial \tau_1} \bar{X}_2$

Poniendo en evidencia los términos que contienen e^{iT} en la anterior integral

$$\int_0^{2\pi} dT e^{-iT} \left(1 - \frac{\omega[\omega a_- + i(a_- b - c)]}{(a_- b - c)^2 + \omega^2 a_-^2} \quad \frac{\omega b[\omega c - i(a_- b - c)]}{(a_- b - c)^2 + \omega^2 c^2} \right) \cdot \left[-\gamma_1 k \frac{a_- + i\omega}{a_-^2 + \omega^2} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} e^{iT} - \frac{\partial k}{\partial \tau_1} \begin{pmatrix} 1 \\ -\frac{a_- + i\omega}{a_-^2 + \omega^2} \\ \frac{a_- - i\omega(\omega^2 + a_-^2 - 1)}{a_-^2 + \omega^2} \end{pmatrix} e^{iT} + \text{term. que no contienen } e^{iT} \right] = 0$$

Se hace notar que los términos que no contienen e^{iT} son aquellos que provienen de los complejos conjugados asociados a X_1 (ver (15)) y a los correspondientes al producto entre las componentes $X_1 Z_1$. Desarrollando el producto y la integral se obtiene

$$\frac{\partial k}{\partial \tau_1} = \frac{k\gamma_1}{(\omega^2 - 1)^2 + (\omega^2 + 1)(a_-^2 + 1)}$$

dando como resultado para la condición de solvencia:

$$\gamma_1 = 0, \quad \frac{\partial k}{\partial \tau_1} = 0$$

Por lo que reemplazando en (16):

$$\left[\omega \frac{\partial}{\partial T} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & -1 & -1 \\ 1 & a_- & 0 \\ b & 0 & -c \end{pmatrix} \right] \begin{pmatrix} X_2 \\ Y_2 \\ Z_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ X_1 Z_1 \end{pmatrix} \quad (20)$$

Se postula para X_2 una solución que depende de T en la forma:

$$\begin{pmatrix} X_2 \\ Y_2 \\ Z_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} F_0 \\ G_0 \\ H_0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} F_2 \\ G_2 \\ H_2 \end{pmatrix} e^{2iT} + \begin{pmatrix} F_2^* \\ G_2^* \\ H_2^* \end{pmatrix} e^{-2iT}$$

Por lo que reemplazando en (20) y sabiendo que

$$X_1 Z_1 = k^2 U_3 e^{2iT} + 2 |k|^2 \text{Re}(U_3) + k^{*2} U_3^* e^{-2iT}$$

Con lo que de (20) se obtendrán los sistemas de ecuaciones:

$$\begin{aligned} G_0 + H_0 &= 0 \\ -F_0 - a_- G_0 &= 0 \\ bF_0 + cH_0 &= 2 |k|^2 \text{Re}(U_3) \end{aligned} \quad (21)$$

y

$$\begin{aligned} 2i\omega F_2 + G_2 + H_2 &= 0 \\ -F_2 + (2i\omega - a_-)G_2 &= 0 \\ -bF_2 + (2i\omega + c)H_2 &= |k|^2 U_3 \end{aligned} \quad (22)$$

Resolviéndolos se encuentra que:

$$\begin{aligned} F_0 &= -\frac{2a_-^2 |k|^2}{(a_-^2 + \omega^2)(a_- b - c)} = -a_- G_0 \\ G_0 &= \frac{2a_- |k|^2}{(a_-^2 + \omega^2)(a_- b - c)} \\ H_0 &= -\frac{2a_- |k|^2}{(a_-^2 + \omega^2)(a_- b - c)} = -G_0 \end{aligned} \quad (23)$$

y

$$\begin{aligned} F_2 &= -\frac{k^2 U_3 (2\omega - ia_-)}{\alpha} \\ G_2 &= \frac{k^2 U_3 (2a_- \omega + i)}{\alpha} \\ H_2 &= \frac{k^2 U_3 i (4\omega^2 - 1)}{\alpha} \end{aligned} \quad (24)$$

con

$$\alpha = 2\omega(4\omega^2 + b + 1) + i(4c\omega^2 - c - a_- b)$$

Lo que nos permite escribir finalmente para \mathbf{X}_2 :

$$\begin{pmatrix} X_2 \\ Y_2 \\ Z_2 \end{pmatrix} = G_0 \begin{pmatrix} -a_- \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} + \frac{k^2 U_3}{\alpha} \begin{pmatrix} -2\omega + ia_- \\ 2a_- \omega + i \\ i(4\omega^2 - 1) \end{pmatrix} e^{2iT} + c.c. \quad (25)$$

4.1.3 $O(\epsilon^3)$. Forma normal de la bifurcación de Hopf

Para el tercer orden, se tiene:

$$\begin{aligned} \left[\Omega_c \frac{\partial}{\partial T} \mathcal{I} - \mathcal{L}(a_-) \right] \cdot \mathbf{X}_3 &= \gamma_1 \mathcal{L}_a(a_-) \cdot \mathbf{X}_2 + \gamma_2 \mathcal{L}_a(a_-) \cdot \mathbf{X}_1 + \frac{1}{2} \gamma_1^2 \mathcal{L}_{aa}(a_-) \cdot \mathbf{X}_1 \\ &+ \frac{1}{2} \gamma_1 \mathbf{h}_{XXa}(a_-) \cdot \mathbf{X}_1 \mathbf{X}_1 + \frac{1}{6} \mathbf{h}_{XXX}(a_-) \cdot \mathbf{X}_1 \mathbf{X}_1 \mathbf{X}_1 \\ &+ \mathbf{h}_{XX}(a_-) \cdot \mathbf{X}_1 \mathbf{X}_2 - \frac{\partial \mathbf{X}_1}{\partial \tau_2} - \frac{\partial \mathbf{X}_2}{\partial \tau_1} \end{aligned} \quad (26)$$

Lo que nos interesa es encontrar la forma normal de la bifurcación de Hopf. Para llegar a esto, aplicamos de nuevo la condición de solvencia a este orden:

$$(\mathbf{u}^\dagger, \mathbf{q}_3) = 0$$

Por consiguiente, utilizando los aspectos resultantes de la condición de solvencia en el $O(\epsilon^2)$ y reemplazando en la integral (18) q_2 por q_3 esta se transforma en:

$$\int_0^{2\pi} dT e^{-iT} (1 \ U_2^{\dagger*} \ U_3^{\dagger*}) \cdot \left[\gamma_2 \begin{pmatrix} 0 \\ Y_1 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ X_1 Z_2 + Z_1 X_2 \end{pmatrix} - \frac{\partial}{\partial \tau_2} \begin{pmatrix} X_1 \\ Y_1 \\ Z_1 \end{pmatrix} \right] = 0 \quad (27)$$

y solamente los términos resultantes del producto escalar con factor e^{iT} contribuirán al resultado (ver (15) y (25)). Estos términos son:

$$\begin{aligned} Y_1 &= K U_2 \\ X_1 Z_2 + Z_1 X_2 &= K(H_0 + U_3 F_0) + K^*(H_2 + U_3^* F_2) \\ \begin{pmatrix} X_1 \\ Y_1 \\ Z_1 \end{pmatrix} &= K \begin{pmatrix} 1 \\ U_2 \\ U_3 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Por lo que desarrollando (27) se encuentra:

$$\frac{\partial K}{\partial \tau_2} = - \frac{\gamma_2 K U_2^{\dagger*} U_2}{1 + U_2^{\dagger*} U_2 + U_3^{\dagger*} U_3} - \frac{U_3^{\dagger*} [K(H_0 + U_3 F_0) + K^*(H_2 + U_3^* F_0)]}{1 + U_2^{\dagger*} U_2 + U_3^{\dagger*} U_3} \quad (28)$$

Recordando las expresiones para los coeficientes F y G , se pueden escribir los mismos bajo la forma:

$$\begin{aligned} F_0 &= -a_- |K|^2 \beta', \quad G_0 = |K|^2 \beta', \quad H_0 = -|K|^2 \beta' \\ F_2 &= -K^2 U_3 \delta', \quad G_2 = K^2 U_3 \delta'', \quad H_2 = -K^2 U_3 \delta''' \end{aligned}$$

con

$$\begin{aligned} \beta' &= \frac{2a_-}{(a_-^2 + \omega^2)(a_- b - c)} \\ \delta' &= \frac{4\omega^2(4\omega^2 + b + 1) + a_- (4c\omega^2 - c - a_- b) + 2i\omega[4c\omega^2 - c - a_- b - a_- (4\omega^2(4\omega^2 + b + 1))]}{4\omega^2(4\omega^2 + b + 1)^2 - (4c\omega^2 - c - a_- b)^2} \\ \delta'' &= \frac{4a_- \omega^2(4\omega^2 + b + 1) - (4c\omega^2 + c + a_- b) + i[2\omega(4\omega^2 + b + 1) + 4c\omega^2 - c - a_- b]}{4\omega^2(4\omega^2 + b + 1)^2 - (4c\omega^2 - c - a_- b)^2} \\ \delta''' &= \frac{(4\omega^2 - 1)(4c\omega^2 - c - a_- b) - 2i\omega(4\omega^2 - 1)(4\omega^2 + b + 1)}{4\omega^2(4\omega^2 + b + 1)^2 - (4c\omega^2 - c - a_- b)^2} \end{aligned}$$

Por consiguiente (28) se transforma en:

$$\frac{\partial K}{\partial \tau_2} = - \frac{\gamma_2 K U_2^{\dagger*} U_2}{1 + U_2^{\dagger*} U_2 + U_3^{\dagger*} U_3} + \frac{|K|^2 K U_3^{\dagger*} [\beta'(1 + U_3) + U_3(\delta''' + U_3^* \delta')]}{1 + U_2^{\dagger*} U_2 + U_3^{\dagger*} U_3}$$

$$\frac{\partial K \epsilon^3}{\partial \tau_2} =$$

Para encontrar la forma normal de la bifurcación de Hopf se multiplica la anterior ecuación por ϵ^3 , se utilizan las relaciones (9) del desarrollo perturbativo multiescala y se considerará $z = \epsilon K$, con lo que finalmente se obtiene:

$$\frac{dz}{dt} = \frac{(a - a_-)U_2^{\dagger*}U_2}{-1 - U_2^{\dagger*}U_2 - U_3^{\dagger*}U_3} z - \frac{U_3^{\dagger*}[\beta'(1 + U_3) + U_3(\delta''' + U_3^* \delta')]}{-1 - U_2^{\dagger*}U_2 - U_3^{\dagger*}U_3} |z|^2 z \quad (29)$$

que constituye la forma normal[3]

$$\frac{dz}{dt} = (\lambda - \lambda_c)P_1 z - P_3 |z|^2 z \quad (30)$$

de la bifurcación de Hopf para el modelo de Rössler.

4.2 Resolución de la Forma Normal de la Bifurcación de Hopf

Los coeficientes $P_1 = -\frac{U_2^{\dagger*}U_2}{1+U_2^{\dagger*}U_2+U_3^{\dagger*}U_3}$ y $P_3 = -\frac{U_3^{\dagger*}[\beta'(1+U_3)+U_3(\delta''' + U_3^* \delta')]}{1+U_2^{\dagger*}U_2+U_3^{\dagger*}U_3}$ son cantidades complejas que pueden escribirse en la forma $P_1 = P_1' + iP_1''$, $P_3 = P_3' + iP_3''$. Entonces para resolver (30) es conveniente trabajar en coordenadas polares $z = re^{i\phi}$ con lo que separando las partes real e imaginaria, se obtiene:

$$\begin{aligned} \frac{dr}{dt} &= (\lambda - \lambda_c)P_1' r - P_3' r^3 \\ \frac{d\phi}{dt} &= (\lambda - \lambda_c)P_1'' - P_3'' r^2 \end{aligned} \quad (31)$$

Se sabe también que en $\lambda = \lambda_c$ r sufre bifurcación desde la solución trivial $r_0 = 0$ a la no trivial $r_s = \sqrt{\frac{(\lambda - \lambda_c)P_1'}{P_3'}}$. Lo que nos permite encontrar la regiones en las que es posible este tipo de bifurcación. En nuestro caso, la condiciones para que se de este fenómeno estarán dadas por:

$$\begin{aligned} \text{En el dominio } a > a_- & \text{ si } \frac{P_1'}{P_3'} > 0 \\ \text{En el dominio } a < a_- & \text{ si } \frac{P_1'}{P_3'} < 0 \end{aligned}$$

De acuerdo con la condición anterior y en base a resultados numéricos, se halló que para el rango de valores elegido de los parámetros, $\frac{P_1'}{P_3'}$ es siempre mayor que cero, lo que implica que habrá bifurcación de Hopf si y sólo si $a > a_-$, situación que se muestra en la Fig. 2 donde el límite que separa ambas regiones, es la curva $a_- = a_-(c)$.

Se encuentra finalmente de (31) que:

$$\phi = \phi_0 + \left(P_1'' - \frac{P_3'' P_1'}{P_3'} \right) (\lambda - \lambda_c) t = \phi_0 + \Delta \Omega t \quad (32)$$

$$b=0.30$$

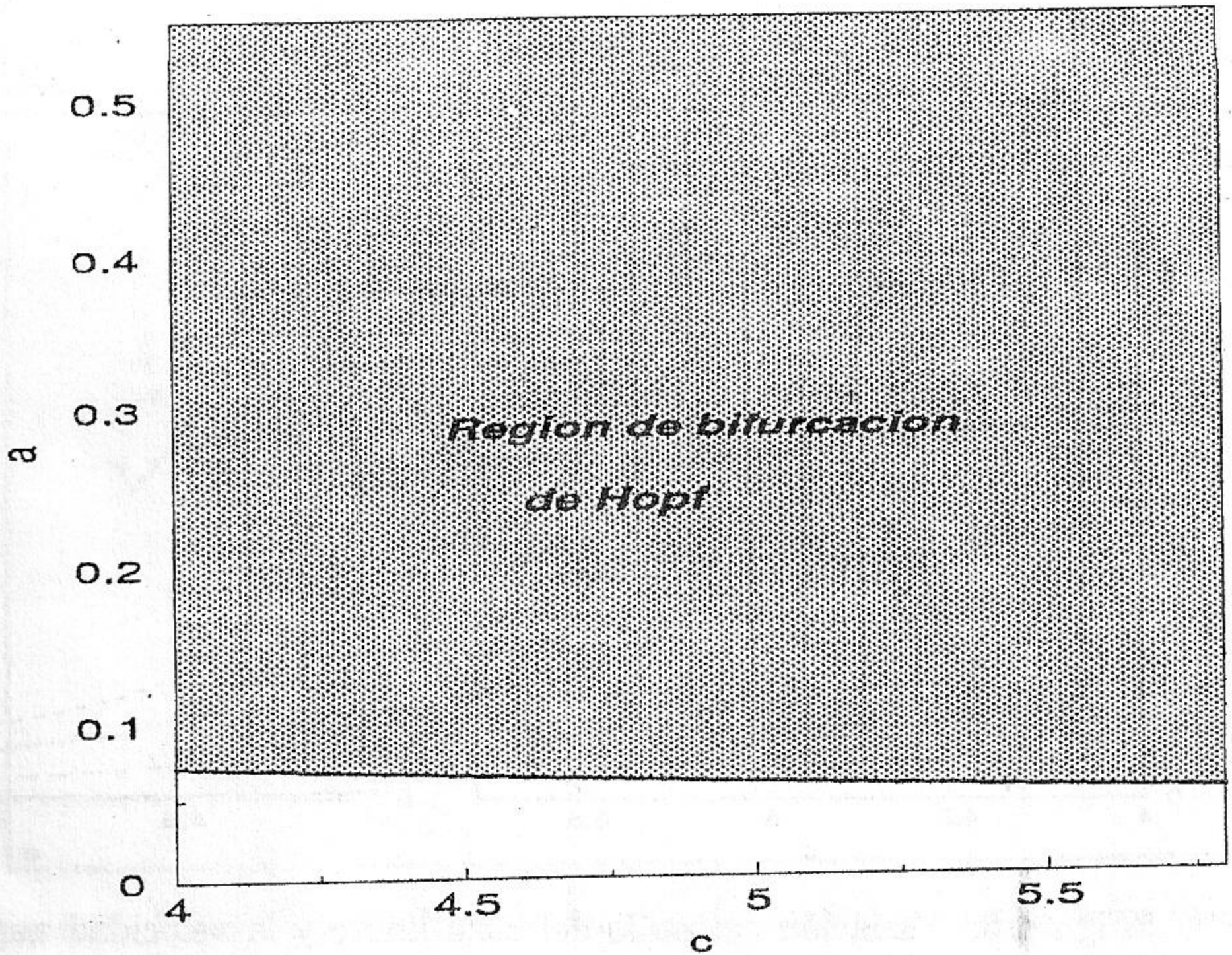


Figura 2: Espacio de parámetros mostrando las región en la que es posible la bifurcación de Hopf.

La frecuencia $\Delta\Omega$ de la z -oscilación corrige el valor Ω_c por términos del orden de $\lambda - \lambda_c$. Con todos estos elementos, se halló para el modelo de Rössler el ciclo límite para diferentes valores de los parámetros en el espacio elegido. La Fig. 3 muestra la variación del radio del ciclo límite y de la velocidad angular para algunos valores del parámetro a en función de c .

Como un ejemplo se muestra la Fig. 4, en el espacio de fases (Imz, Rez), la manera en que las trayectorias -sin importar la condición inicial- se enrollan hacia la curva invariante $|z| = r_s$ (ciclo límite) se deduce a partir de la forma normal ec. (29).

Una observación importante de las ecs. (30) y (31), es que las mismas son *universales* ya que ellas constituyen la *forma normal* de cualquier sistema dinámico funcionando en las cercanías de una bifurcación de Hopf [1].

Con todo lo anterior, se encuentran explícitamente los valores de la frecuencia de las z -oscilaciones y del radio del ciclo límite para los valores de los parámetros utilizados: $\Delta\Omega = 0.25$ y $r_s = 9.30$ ($a = 0.38$, $b = 0.30$, $c = 4.8$). La Fig. 5 muestra la bifurcación de Hopf en función del parámetro de control a el cual varía en el rango establecido al inicio de esta sección.

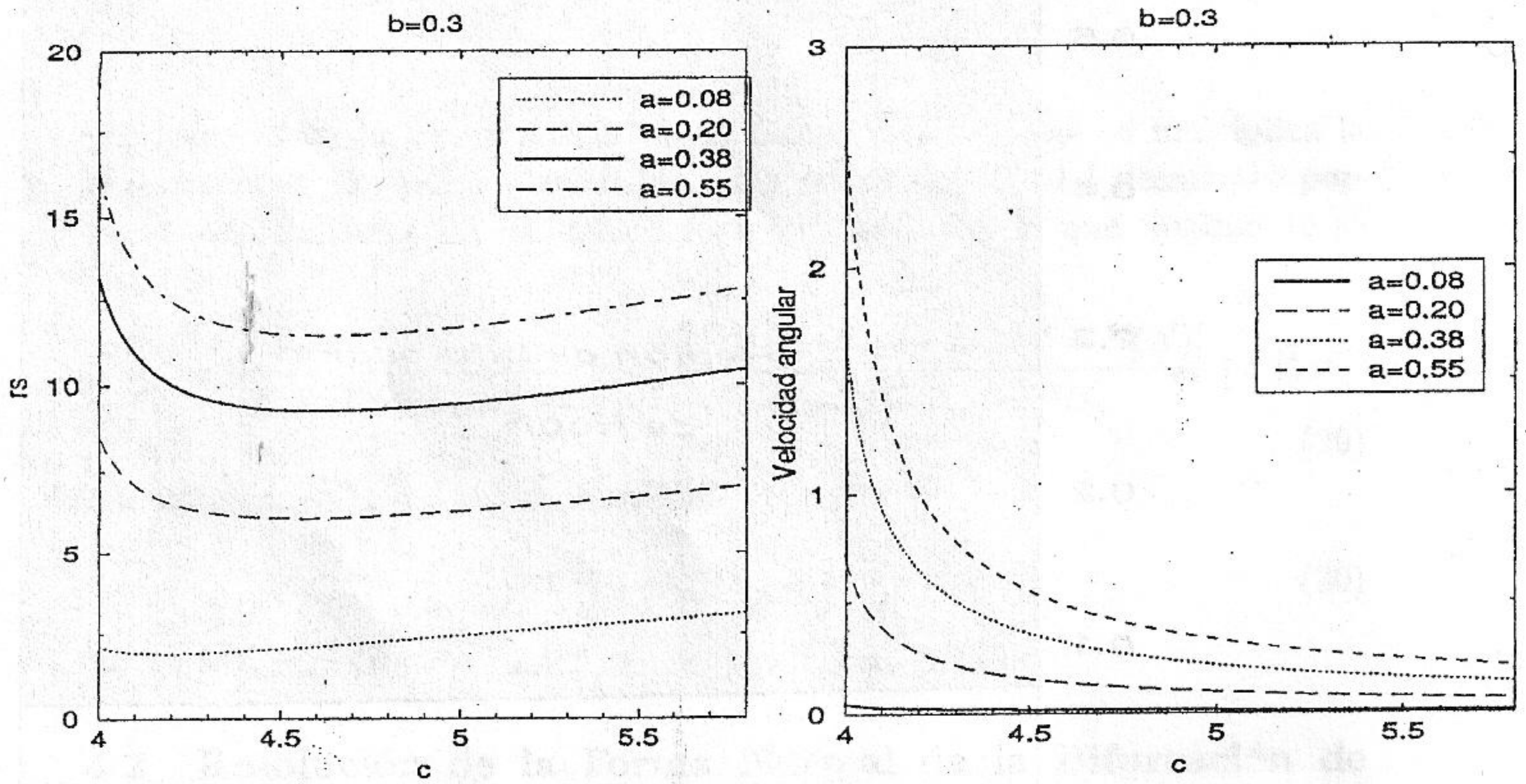


Figura 3: Variación del radio del ciclo límite y la velocidad angular para diferentes valores de a .

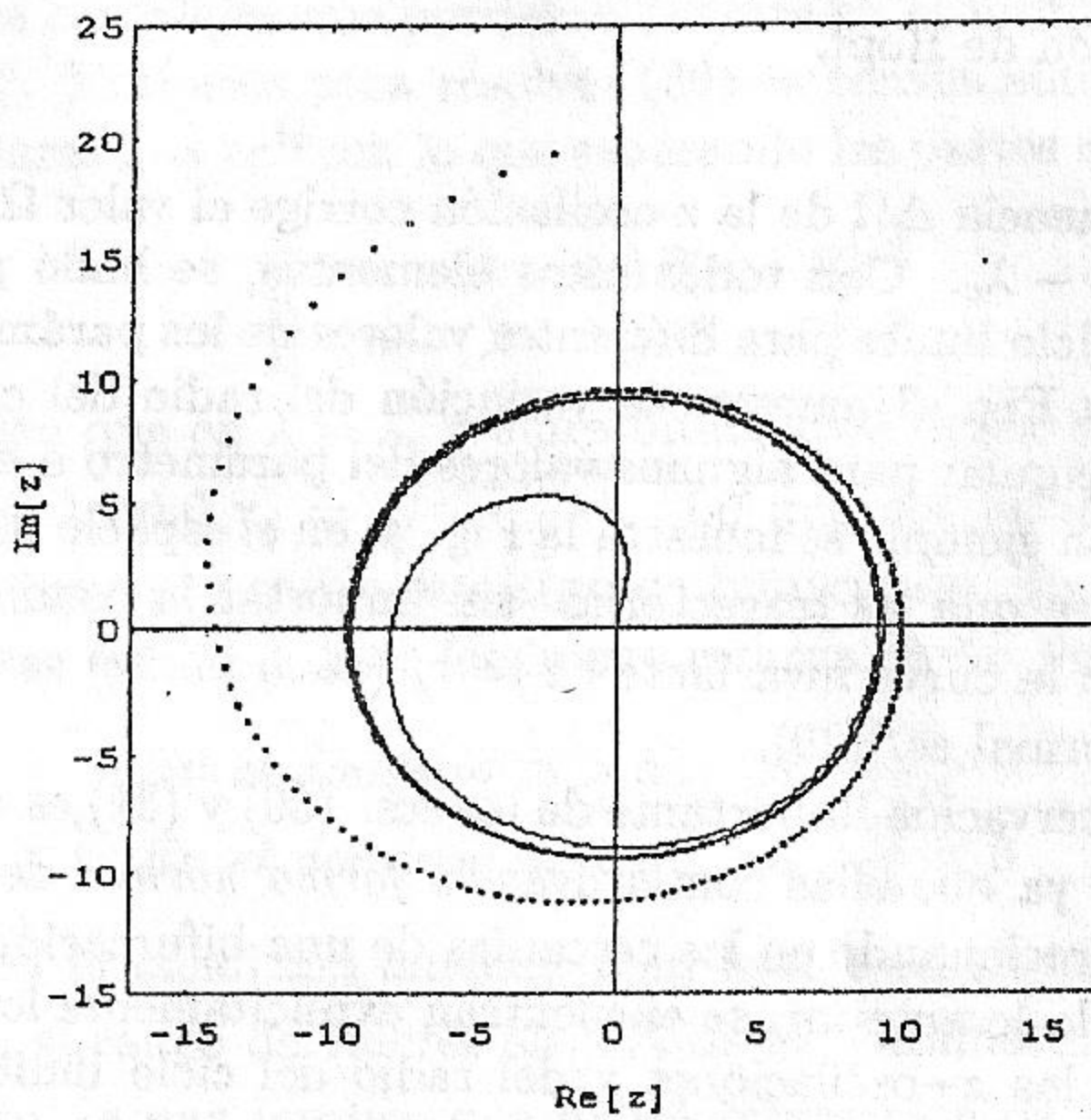


Figura 4: Retrato de fases para la bifurcación de Hopf en el modelo de Rössler, utilizando los valores de parámetros $a = 0.38$, $b = 0.30$ y $c = 4.8$, con condiciones iniciales $(0.15, \frac{\pi}{2})$ (trayectoria de trazo continuo) y $(20, \frac{\pi}{2})$ (trayectoria de trazo punteado).

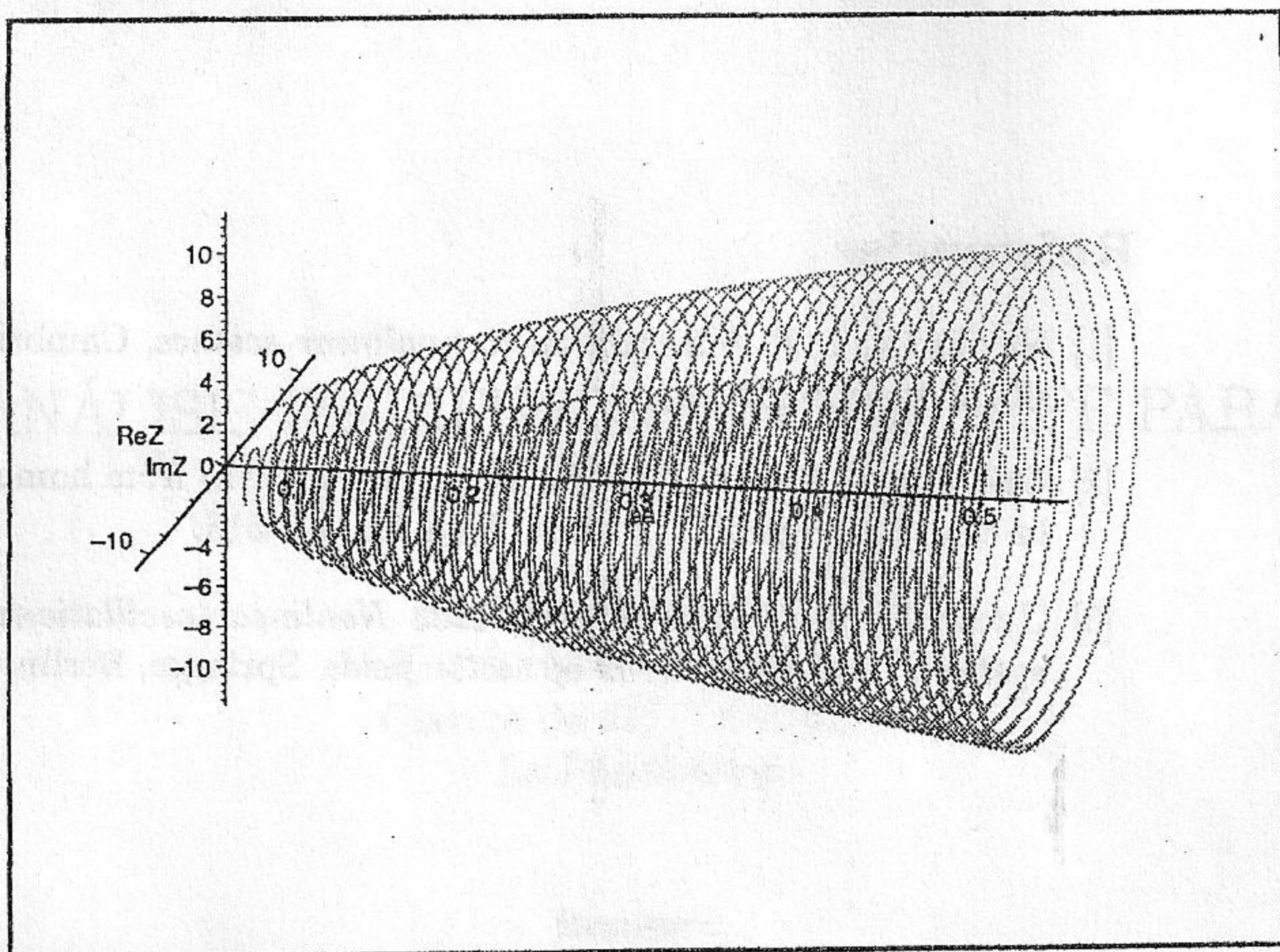


Figura 5: Bifurcación de Hopf en función del parámetro a y para los valores $b = 0.3$ y $c = 4.8$.

5 Conclusiones

Se observa que este modelo presenta diversos comportamientos en el espacio de parámetros, entre los que se pueden destacar la existencia de órbitas homoclinicas que luego se transforman en atractores extraños, rúbrica de comportamiento caótico.

En la región del espacio de parámetros en la cual se trabajó, existe una zona en la cual se manifiesta la bifurcación de Hopf. Tomando a como parámetro de control principal, se determina que el radio de los ciclos límites generados en la bifurcación de Hopf varía entre $(0, 16.37]$ y la velocidad angular entre $[0, 2.58]$. Se observa gráficamente la familia continua de soluciones correspondiendo a diferentes valores de la fase del movimiento oscilatorio.

Este modelo es susceptible a ser analizado más detalladamente en el espacio de parámetros para ver el comportamiento que tiene para las diferentes variaciones de a , b y c .