

RESEARCH OUTPUTS / RÉSULTATS DE RECHERCHE

Une rédaction correcte en finale de l'OMB

Franco, Nicolas

Published in:
Losanges

Publication date:
2013

Document Version
le PDF de l'éditeur

[Link to publication](#)

Citation for pulished version (HARVARD):

Franco, N 2013, 'Une rédaction correcte en finale de l'OMB' *Losanges*, vol. 21, pp. 16-19.
<<http://www.sbp.m.be/2013/06/losanges-21/>>

General rights

Copyright and moral rights for the publications made accessible in the public portal are retained by the authors and/or other copyright owners and it is a condition of accessing publications that users recognise and abide by the legal requirements associated with these rights.

- Users may download and print one copy of any publication from the public portal for the purpose of private study or research.
- You may not further distribute the material or use it for any profit-making activity or commercial gain
- You may freely distribute the URL identifying the publication in the public portal ?

Take down policy

If you believe that this document breaches copyright please contact us providing details, and we will remove access to the work immediately and investigate your claim.

Une rédaction correcte en finale de l'Olympiade Mathématique Belge

Nicolas Franco

Mots clés : OMB, rédaction, finale.

Résumé :

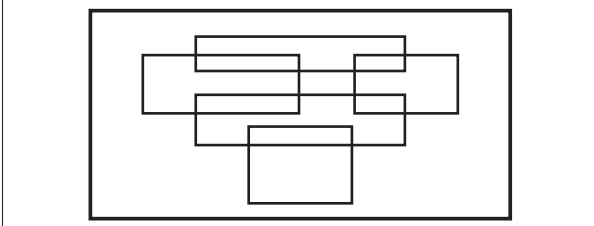
L'épreuve finale de l'Olympiade Mathématique Belge est un moment difficile pour la plupart des participants. En effet, si les épreuves éliminatoire et de demi-finale consistent en de simples questions résolubles en quelques minutes et dont la réponse est soit un choix multiple soit un nombre entier, l'épreuve finale présente des problèmes dont la résolution demande environ une heure et dont la réponse attendue est la rédaction complète d'une démonstration. Les étudiants des premières années du secondaire étant peu habitués, voire pas du tout, à rédiger des démonstrations, les réponses proposées par les concurrents sont souvent fort incomplètes. Ainsi par exemple, certains participants pensent qu'un simple dessin suffit à prouver un résultat de géométrie, alors que le jury de l'Olympiade attend un raisonnement mathématique complet. Au final, un bon nombre de concurrents sortent de l'épreuve en s'imaginant avoir résolu les questions bien que leurs copies ne présentent que des réponses très partielles.

Nous vous proposons dans cet article d'analyser une question de finale de l'Olympiade Mathématique Belge et de détailler différentes solutions qui peuvent être proposées par des concurrents. Pour chaque solution, une estimation du nombre de points que pourrait rapporter cette solution est présentée et expliquée. Ces points ne représentent pas nécessairement de véritables points donnés, mais permettent de montrer la valeur que le jury pourrait attribuer aux différentes solutions proposées. Une version de cet article destinée aux étudiants est disponible sur le site de l'Olympiade Mathématique Belge : <http://omb.sbp.m.be>.

Nous allons étudier la partie (a) de la question 3 de la finale MINI 2012. Nous allons supposer que cette question est notée sur 10 points, et que la partie (a) représente 4 points sur 10. Nous allons regarder la solution de cinq concurrents imaginaires, Arthur, Baptiste, Clara, Damien et Emma, et leur attribuer une note de 0 à 4 pour cette partie de question.

Justin souhaite fixer cinq documents rectangulaires (de dimensions quelconques), éventuellement superposés, partiellement ou totalement, à un tableau métallique rectangulaire en plaçant des aimants, cela de sorte que chacun des documents soit coincé entre le tableau et trois aimants au moins.

(a) Dans le cas de la disposition suivante des cinq documents, combien d'aimants doit-il utiliser au minimum ?



Répondre correctement à une telle question n'est pas aussi simple qu'on pourrait le penser. En effet, il est demandé de trouver un nombre qui soit un *minimum* selon certaines conditions. Une preuve mathématique complète devra obligatoirement présenter trois éléments :

- donner ce nombre (1 point sur 4) ;
- prouver que ce nombre fonctionne (1 point sur 4) ;

- prouver que ce nombre est bien un minimum, c'est-à-dire qu'un nombre plus petit ne pourrait fonctionner (plus difficile, 2 points sur 4).

Regardons les différentes copies.

Solution proposée par Arthur

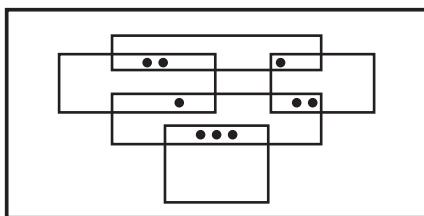
Il faut 9 aimants au minimum.

Arthur a donné la bonne réponse. Le jury peut considérer que sa réponse est meilleure que celle d'un concurrent qui aurait remis un feuille blanche et peut lui attribuer 1 point pour cela. Cependant, Arthur ne donne absolument aucune preuve de sa réponse. Il ne montre même pas qu'il est possible d'attacher les documents avec ces 9 aimants.

Total des points pour la solution d'Arthur : 1 point sur 4

Solution proposée par Baptiste

Il faut 9 aimants au minimum.

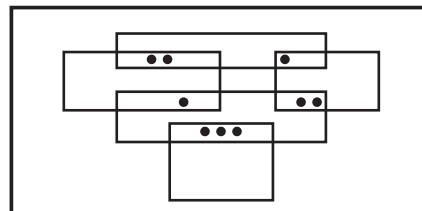


Baptiste donne un élément de preuve grâce à son dessin. Il montre une façon possible de placer les 9 aimants, et donc prouve que 9 est un nombre qui convient. Le jury peut lui attribuer une note supérieure à celle d'Arthur. Cependant, cette preuve est incomplète. Baptiste ne prouve nulle part que 9 est bien un minimum. Pour compléter sa preuve, il faudrait par exemple prouver que ce n'est pas possible avec seulement 8 aimants.

Total des points pour la solution de Baptiste : 2 points sur 4

Solution proposée par Clara

Il faut 9 aimants au minimum, en les plaçant comme sur le dessin :



9 est bien le nombre minimum d'aimants, car si on en retire un, l'un des documents n'est plus attaché par 3 aimants.

Clara, comme Baptiste, donne la réponse ainsi qu'une façon possible de placer les aimants. Elle propose également une tentative de preuve que 9 est bien un minimum : Clara montre que, à partir de la solution qu'elle a trouvée pour 9 aimants, il n'est pas possible de trouver une solution à 8 aimants. Malheureusement, ce type de raisonnement est incorrect. Vu que Clara se base sur une disposition particulière de 9 aimants pour créer différentes dispositions de 8 aimants, les différents cas étudiés restent des cas particuliers et ne représentent pas l'ensemble général des dispositions possibles de 8 aimants. Ainsi, il n'y a aucune preuve qu'une construction à 8 aimants est impossible, et donc aucune preuve que 9 est un minimum.

Total des points pour la solution de Clara : 2 points sur 4

Solution proposée par Damien

Un aimant peut toujours être placé sur une intersection de deux documents. On peut donc supposer que tous les aimants sont placés à des intersections.

Commençons par placer 3 aimants sur le document le plus à gauche, avec 2 sur l'intersection avec le document du haut, et 1 sur l'intersection avec le document du milieu.

Le document du haut doit être attaché avec un 3^e aimant placé sur l'intersection avec le document de droite. Il manque encore 2 aimants pour le document de droite, qui sont placés sur l'intersection avec le document du milieu. Le document du milieu est attaché par 3 aimants et n'en nécessite pas d'autres. On a placé 6 aimants. Il reste le document du bas, toujours sans aimant. Il faut donc 3 aimants supplémentaires, ce qui fait un total de 9 aimants. 9 est bien le nombre minimum d'aimants.

La solution de Damien peut paraître plus étrange, car elle ne comporte aucun dessin. Seulement, Damien explique par écrit la façon exacte de placer ces aimants, ce qui a la même valeur qu'un dessin.

Pour prouver que 9 est bien le nombre minimum d'aimants, Damien propose des arguments intéressants qui peuvent être considérés par le jury. Premièrement, il remarque que le problème est le même si nous plaçons tous les aimants à des intersections, ce qui simplifie le problème. Il ne reste plus que 5 endroits où placer les aimants. Ensuite, à partir de ses 3 premiers aimants attachant le document de gauche, il montre clairement par sa construction progressive qu'il en faudra minimum 6 autres pour attacher les autres documents. Le raisonnement employé par Damien ressemble à un algorithme de type « glouton » car il utilise des optimisations locales afin d'obtenir une optimisation globale. En règle générale, un tel algorithme ne donne qu'une solution approchant l'optimum (solution heuristique). Mais dans le cas particulier de ce problème, et par le fait que Damien considère les intersections une par une dans le sens horlogique, chaque optimisation locale au delà de la première est forcée et l'algorithme aboutit bien à un minimum global pour la situation initiale choisie des 3 premiers aimants.

Cependant, la preuve que 9 est bien un minimum est incomplète. En effet, Damien est parti d'une disposition particulière des 3 aimants attachant le document de gauche, et donc ne considère par toutes les possibilités de départ. Il existe peut-être une disposition à 8 aimants avec une configuration différente pour les 3 aimants attachant le document de gauche.

Néanmoins, la preuve de Damien aurait pu être complétée. Il aurait pu considérer toutes les façons de placer les 3 premiers aimants sur le document

de gauche. Par la simplification du problème aux intersections, il n'existe que 4 départs différents :

- 2 aimants au-dessus et 1 en dessous ;
- 1 aimant au-dessus et 2 en dessous ;
- les 3 aimants au-dessus ;
- les 3 aimants en dessous.

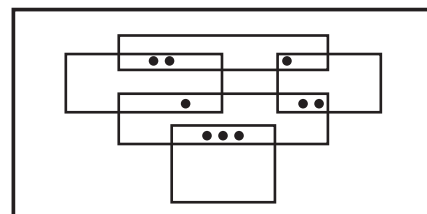
Pour chacun de ces départs, Damien aurait pu proposer une construction similaire qui aurait conduit à l'obligation de 6 aimants supplémentaires, et donc une preuve que 9 est bien un minimum.

Damien n'a pas résolu le problème complètement, mais a donné des arguments intéressants qui auraient pu conduire à une preuve complète. Le jury peut donc lui attribuer une partie des points pour la preuve que 9 est un minimum.

Total des points pour la solution de Damien : 3 points sur 4

Solution proposée par Emma

Il faut 9 aimants au minimum. Voici un exemple de 9 aimants qui fixent tous les documents.



Ensuite, pour prouver que 9 est bien le nombre minimum d'aimants, il suffit de remarquer que 3 documents (le plus à gauche, le plus à droite et celui du bas) sont totalement disjoints. Ils nécessitent donc chacun minimum 3 aimants.

Emma a une solution complète. Elle donne la réponse et montre comment attacher les 5 documents à l'aide de 9 aimants. Ensuite elle présente un argument montrant qu'il faudra toujours au minimum $3 \times 3 = 9$ aimants pour attacher les documents. Elle peut donc recevoir la totalité des points.

Total des points pour la solution d'Emma : 4 points sur 4

Nos cinq concurrents imaginaires seraient probablement tous sortis de l'épreuve en pensant avoir résolu le problème. Or seule Emma l'aurait correctement résolu, les autres ne pouvant recevoir qu'une partie des points. Cependant, des arguments permettant d'avancer dans le problème ou qui auraient pu mener à une solution complète seront toujours considérés par le jury comme étant une partie de preuve

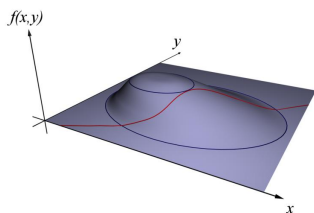
susceptible d'augmenter le score du candidat. Pour conclure, nous pouvons remarquer que la longueur d'une solution ne garantit en rien sa qualité. Un bon argument donnera plus souvent une preuve simple, efficace et originale. Signalons que l'originalité ou l'élégance d'une démonstration peut permettre à un candidat de remporter le fameux prix Willy VAN-HAMME.

Nicolas Franco est actuellement chercheur à l'Université Jagellonne de Cracovie... ✉ nicolas.franco@math.unamur.be

Une approche intuitive de la théorie de Lagrange

Lors d'une randonnée sur un chemin de montagne, comment savoir que l'on atteint le point d'altitude maximale ?

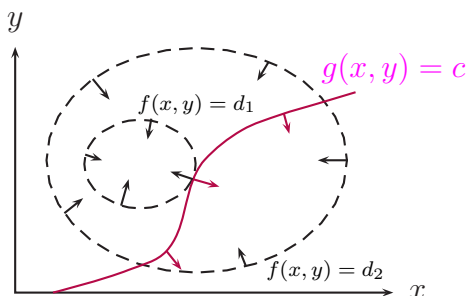
Il est facile d'apporter intuitivement un élément décisif de réponse à cette question. En effet, il est évident qu'un point où le chemin monte ou descend n'est certainement pas le plus haut ; or, un tel point est caractérisé par le fait que le sentier γ croise une courbe de niveau (c'est-à-dire, rappelons-le, une courbe d'égale altitude située sur la surface terrestre). En conséquence, le maximum d'altitude ne peut pas être atteint en un point où le sentier coupe une courbe de niveau.



Traduisons tout ceci en langage mathématique. Il s'agit de rechercher le maximum d'une fonction f (toujours l'altitude) sous une contrainte (déterminée par le sentier). Géométriquement, on souhaite donc trouver le point le plus haut parmi ceux de la surface S (ici, la surface terrestre) représentative de f qui appartiennent à la courbe (dans ce cas, le sentier) décrite par la contrainte ; cette situation est illustrée par

la figure suivante où la surface est dessinée en bleu, la contrainte définissant la courbe étant tracée en rouge.

Si l'on projette la surface S sur le plan horizontal de base xOy , la contrainte définit une courbe (tracée toujours en couleur sur la figure ci-dessous), tandis que différentes lignes de niveau (dessinées en noir) permettent de se faire une idée des valeurs prises par f (en fait, par l'altitude au-dessus des points du plan).



La conclusion trouvée intuitivement ci-dessus se traduit mathématiquement comme suit : au point cherché, la ligne de niveau correspondante est tangente à la courbe définie par la contrainte, ainsi que le suggère la figure ci-contre. Cette règle est à la base de la méthode de LAGRANGE pour l'obtention du maximum d'une fonction de deux variables sous une contrainte.