



## THESIS / THÈSE

### MASTER EN SCIENCES MATHÉMATIQUES

#### Les théories de la gravitation

SELLE, Alessia

*Award date:*  
2014

[Link to publication](#)

#### **General rights**

Copyright and moral rights for the publications made accessible in the public portal are retained by the authors and/or other copyright owners and it is a condition of accessing publications that users recognise and abide by the legal requirements associated with these rights.

- Users may download and print one copy of any publication from the public portal for the purpose of private study or research.
- You may not further distribute the material or use it for any profit-making activity or commercial gain
- You may freely distribute the URL identifying the publication in the public portal ?

#### **Take down policy**

If you believe that this document breaches copyright please contact us providing details, and we will remove access to the work immediately and investigate your claim.

UNIVERSITÉ DE NAMUR  
Deuxième année de Master en Sciences Mathématiques



Alessia SELLE

---

MÉMOIRE :

*Les théories de la gravitation*

---

Promoteur : André Füzfa

Année académique 2013-2014

# Remerciements

*« Il n'y a guère au monde un plus bel excès  
que celui de la reconnaissance. »*

Jean de La Bruyère

Depuis ma plus tendre enfance, on m'a constamment répété que *« il y a toujours plus d'idées dans plusieurs têtes que dans une seule »*. Ce mémoire est le résultat d'un long travail de recherche et de rédaction effectué durant deux années, qui n'aurait pu totalement aboutir sans cette effusion d'idées et de conseils en tout genre qui m'ont été prodigués par différentes personnes. C'est pourquoi je souhaite leur adresser ici mes profonds et sincères remerciements.

Je remercie tout d'abord mon promoteur André Füzfa pour sa disponibilité, sa compétence, son aide précieuse et la confiance qu'il m'a accordée tout au long de ces deux années. Merci également à Sébastien Clesse, Eve-Aline Dubois et Sandrine Schlögel pour leur aide ponctuelle.

Je remercie ensuite ma famille proche, ma maman Anne Eloy, mon papa Albino Selle et mon frère Adrien Selle pour leur soutien quotidien et leurs sacrifices à mon égard. Je suis autant reconnaissante à ma grand-tante Malvina Bousette pour tous ses encouragements réguliers.

Merci à ma plus belle rencontre durant mes études à Namur Frédéric Ambroise, pour cette amitié fraternelle qui nous unit et qui m'est chère ainsi que pour ses relectures critiques et constructives. Merci également à mon amie Gaëlle Picard, pour son amitié sans faille sans laquelle je n'aurais pu avancer et ses qualités linguistiques en anglais.

Merci itou à mes cousines Aude & Emilie Eloy, à mon oncle Luc Eloy et à mon amie Nathalie Nikis pour leurs relectures orthographiques attentives et leurs conseils avisés m'ayant permis d'améliorer mon texte et ma mise en page.

Enfin, je tiens à gratifier d'un signe d'affection ma bonne-maman Francine Bousette. Elle portait un intérêt particulier pour le travail que j'ai effectué et n'a malheureusement pas la chance de pouvoir apprécier le produit final. Puisse-t-elle être fière de moi.

Alessia

# Résumé

Ce mémoire présente la théorie de la relativité générale d'Einstein ainsi qu'une théorie alternative de la gravitation, à savoir la théorie de Nordström. Nous étudions les principes auxquels celles-ci satisfont et nous montrons comment obtenir les équations du champ, notamment via un principe variationnel. Nous les comparons pour finir. Concernant la théorie de Nordström, nous suivons d'abord une démarche historique, puis une démarche géométrique. Ces théories employant un formalisme tensoriel pouvant paraître rébarbatif, le premier chapitre est conçu de manière à informer le lecteur sur le calcul tensoriel et lui en permettre une compréhension plus aisée.

**Mots-clés** : gravitation et champ scalaire, relativité générale, Einstein, Nordström, principe d'équivalence, équations du champ.

# Abstract

This master's thesis deals with the Einstein's theory of general relativity and an alternative theory of gravitation, namely Nordström's theory. We study principles which they respect and we show how to obtain field equations, especially through a variational principle. Finally we compare them. Concerning Nordström's theory, we first follow a historical approach and then a geometric one. Since these theories use a tensor formalism that may seem daunting, the first chapter is designed to inform the reader about tensor calculus and allow him an easier understanding of it.

**Keywords** : gravitation and scalar field, general relativity, Einstein, Nordström, equivalence principle, field equations.

# Table des matières

<b>Remerciements</b>	<b>i</b>
<b>Résumé</b>	<b>ii</b>
<b>Abstract</b>	<b>iii</b>
<b>Introduction</b>	<b>1</b>
<b>1 Rappels de géométrie différentielle</b>	<b>2</b>
1.1 Variétés différentiables . . . . .	2
1.2 Objets géométriques de base . . . . .	5
1.2.1 Vecteurs et espace tangent . . . . .	5
1.2.2 Un-formes différentielles et espace cotangent . . . . .	6
1.2.3 Tenseurs . . . . .	7
1.3 Propriétés géométriques . . . . .	8
1.3.1 Connexion affine et dérivée covariante . . . . .	8
1.3.2 Géodésiques . . . . .	10
1.4 Torsion et courbure . . . . .	11
1.5 Géométrie riemannienne . . . . .	12
1.5.1 Tenseur de métrique . . . . .	12
1.5.2 Connexion métrique . . . . .	14
1.5.3 Connexion de Levi-Civita . . . . .	15
1.5.4 Équations des géodésiques avec la connexion de Levi-Civita . . . . .	17
1.5.5 Tenseur de Riemann avec la connexion de Levi-Civita . . . . .	19
<b>2 Les deux théories relativistes d'Albert Einstein</b>	<b>21</b>
2.1 La théorie de la relativité restreinte . . . . .	21
2.2 La théorie de la relativité générale . . . . .	22
2.2.1 Le principe de covariance généralisée . . . . .	23
2.2.2 Les principes d'équivalence . . . . .	24
Le principe d'équivalence de Galilée . . . . .	24
Le principe d'équivalence d'Einstein . . . . .	24
Le principe d'équivalence fort . . . . .	25
2.2.3 Cinématique de la théorie de la relativité générale . . . . .	25
2.2.4 Dynamique de la théorie de la relativité générale . . . . .	28
Construction des équations d'Einstein à partir de l'équation de Poisson	29
Construction des équations d'Einstein à partir du principe variationnel	33
2.2.5 La précession du périhélie de Mercure . . . . .	43

2.2.6	La déviation de la lumière par le Soleil . . . . .	54
<b>3</b>	<b>La théorie scalaire de Gunnar Nordström</b>	<b>60</b>
3.1	Première théorie de Nordström . . . . .	60
3.2	Seconde théorie de Nordström . . . . .	63
3.3	Géométrie de la théorie de Nordström . . . . .	65
3.3.1	Équations des géodésiques . . . . .	65
3.3.2	Scalaire de courbure . . . . .	67
3.3.3	Équations du champ . . . . .	71
3.3.4	Principe variationnel . . . . .	72
	Un premier essai . . . . .	72
	Un second essai . . . . .	73
3.4	La précession du périhélie de Mercure . . . . .	76
	<b>Conclusion</b>	<b>82</b>
	<b>Bibliographie</b>	<b>84</b>

# Table des figures

1.1	Représentation d'un espace topologique séparé . . . . .	3
1.2	Variété sans bord . . . . .	4
1.3	Changement de coordonnées entre deux cartes locales . . . . .	4
1.4	Cône de lumière . . . . .	14
2.1	Schématisation du problème variationnel décrit de manière formelle . . . . .	33
2.2	Schématisation du problème variationnel décrit sous forme covariante . . . . .	36
2.3	Orbite elliptique d'une planète autour du Soleil, inspirée de la référence [9] . . . . .	51
2.4	Précession d'une orbite elliptique, issue de la référence [9] . . . . .	52
2.5	Déviations de la lumière en incidence rasante auprès du Soleil, inspirée de la référence [9] . . . . .	55

# Introduction

« *If you can't explain it simply,  
you don't understand it well enough.* »

A. Einstein

De nos jours, la théorie de la relativité générale d'Einstein constitue la théorie la plus fiable pour décrire la gravitation. Il existe néanmoins d'autres théories pouvant la caractériser et ayant connu un certain succès dans l'entre-deux-guerres, mais qui finalement ont été rejetées, faute de cohérence ou d'intérêt de la part de la communauté scientifique de l'époque. Cependant, ces théories reviennent au goût du jour ; c'est pourquoi nous nous y intéressons ici. Plus particulièrement, nous nous concentrons sur une théorie dont la motivation est purement géométrique, à savoir la théorie de Nordström. Nous étudions l'impact des principes d'équivalence sur cette théorie, ceux-ci – presque sacro-saints et constituant des conditions *sine qua non* de la relativité générale – étant quelquefois enfreints. Nous posons les hypothèses de cette théorie et nous les comparons à celles de la relativité générale. Il est à noter que les faits rapportés ne suivent pas nécessairement un ordre chronologique, seules quelques dates importantes sont citées.

Durant toute sa vie, Einstein fut guidé par le désir obsédant d'unifier la gravitation à l'électromagnétisme de Maxwell. Nous savons aujourd'hui que cela n'est pas encore possible, bien que de grandes avancées vers une unification ultime aient été accomplies. Par exemple, l'interaction électrofaible résulte de l'unification de deux des quatre interactions fondamentales de l'Univers, à savoir l'interaction électromagnétique et l'interaction nucléaire faible. Il existe également la GUT (pour *Grand Unified Theory*), unifiant les interactions électromagnétique, nucléaire faible et nucléaire forte. La gravitation donne quelque peu du fil à retordre à l'homme, et celui-ci paraît pour l'instant poursuivre une fascinante quête sans fin...

Le Chapitre 1 présente les rudiments de la géométrie différentielle, sans aucune démonstration. Nous y définissons les variétés différentiables, les objets géométriques définis sur ces variétés ainsi que leurs propriétés, la torsion et la courbure et enfin nous faisons le point sur la géométrie riemannienne. Le Chapitre 2 pose le cadre général de ce mémoire, au travers de la théorie de la relativité générale. Nous y définissons le concept de covariance généralisée ainsi que les principes d'équivalence puis nous présentons la cinématique et la dynamique de la relativité générale, en construisant les équations d'Einstein à partir de l'équation de Poisson et d'un principe variationnel via l'action d'Einstein-Hilbert. Nous y développons pour finir les deux tests classiques de cette théorie, à savoir la précession du périhélie de Mercure et la déviation de la lumière par le Soleil. Le Chapitre 3 présente la théorie scalaire de Nordström d'abord de manière historique, puis de manière géométrique via les équations des géodésiques et les équations du champ. Nous tentons de les obtenir à partir d'un principe variationnel. Finalement, nous calculons la précession du périhélie de Mercure pour cette théorie.

# Chapitre 1

## Rappels de géométrie différentielle

« *Que nul n'entre ici s'il n'est géomètre.* »  
Platon

Ce premier chapitre rappelle au lecteur les notions de base ainsi que les résultats principaux de la géométrie différentielle qui est l'outil mathématique au cœur de ce mémoire, afin de lui en permettre une compréhension plus aisée. Toutes les définitions, propriétés et théorèmes ont été repris des références [1] et [2] ainsi que des notes personnelles de cours de l'auteur de ce mémoire (années 2010-2011). Les démonstrations des différents théorèmes ne sont pas présentées; le lecteur intéressé peut les trouver dans la référence [1]. Nous définissons pour commencer les variétés différentiables, puis nous poursuivons avec les objets géométriques définis sur ces variétés ainsi que leurs propriétés géométriques. Nous définissons ensuite la torsion et la courbure et nous finissons par les bases de la géométrie riemannienne.

Avant toute chose, nous mentionnons que nous appliquons la convention d'Einstein, qui stipule que la sommation sur un indice contravariant (indice en haut) et un indice covariant (indice en bas) répété deux fois est omise. Cet indice est alors dit muet. Par exemple

$$ds^2 = \sum_{\mu=1}^n \sum_{\nu=1}^n g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu \stackrel{\text{Einstein}}{=} g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu$$

### 1.1 Variétés différentiables

Une variété de dimension  $n$  est un espace topologique localement homéomorphe à  $\mathbb{R}^n$ . Le concept de **localité** est primordial, puisque toutes les définitions qui suivent ne sont valables que localement.

**Définition 1.1.1** *Variété différentiable*

$V$  est une **variété différentiable** de dimension  $n$  si

1.  $V$  est un espace topologique séparé (représenté à la FIGURE 1.1) : pour tous points  $P, Q \in V$  tels que  $P \neq Q$ , il existe deux voisinages  $G_P$  et  $G_Q$  de  $P$  et  $Q$  respectivement tels que  $G_P \cap G_Q = \emptyset$ .

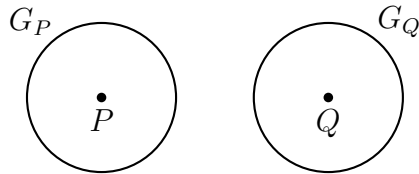


FIGURE 1.1 – Représentation d'un espace topologique séparé

2. Pour tout point  $P \in V$ , il existe un couple  $(U_i, \varphi_i)$  appelé **carte locale**, tel que
  - le **voisinage de coordonnées**  $U_i$  est un ensemble ouvert de  $V$  contenant le point  $P$  ;
  - la **fonction de coordonnées**

$$\begin{aligned} \varphi_i : U_i \subset V &\rightarrow W \subset \mathbb{R}^n \\ P &\rightsquigarrow \varphi_i(P) = \{x^1, x^2, \dots, x^n\} = \{x^\mu\}_{\mu=1, \dots, n} \end{aligned}$$

est un homéomorphisme, où  $W$  est un ouvert,  $n$  est la dimension de  $V$  et  $\mathbb{R}^n$  est appelé l'**espace de représentation**.

L'ensemble des cartes locales  $\{(U_i, \varphi_i)\}_{i \in I}$  tel que les voisinages de coordonnées  $\{U_i\}$  forment un recouvrement de  $V$ , c'est-à-dire  $\bigcup_{i \in I} U_i = V$ , s'appelle un **atlas**.

3. Soient deux ouverts  $U_i$  et  $U_j$  tels que  $U_i \cap U_j \neq \emptyset$ . L'application

$$\begin{aligned} \psi_{ij} \stackrel{\text{d\'ef.}}{=} \varphi_j \circ \varphi_i^{-1} : \varphi_i(U_i \cap U_j) &\rightarrow \varphi_j(U_i \cap U_j) \\ \{x^\mu\}_{\mu=1, \dots, n} &\rightsquigarrow \{y^\nu\}_{\nu=1, \dots, n} \end{aligned}$$

est un homéomorphisme de classe  $C^\infty$  décrivant le **changement de coordonnées** de la carte  $(U_i, \varphi_i)$  vers la carte  $(U_j, \varphi_j)$ .

Les FIGURES 1.2 et 1.3 représentent respectivement une variété dite sans bord et un changement de coordonnées entre deux cartes locales.

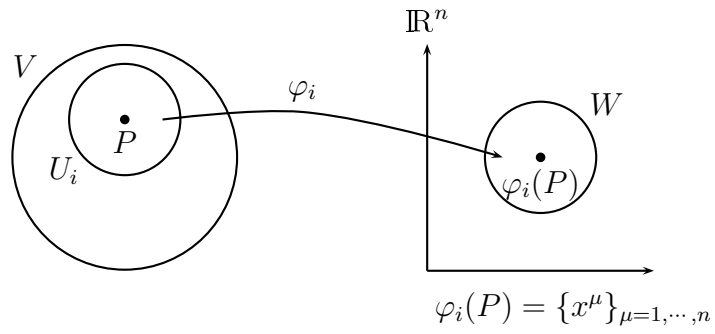


FIGURE 1.2 – Variété sans bord

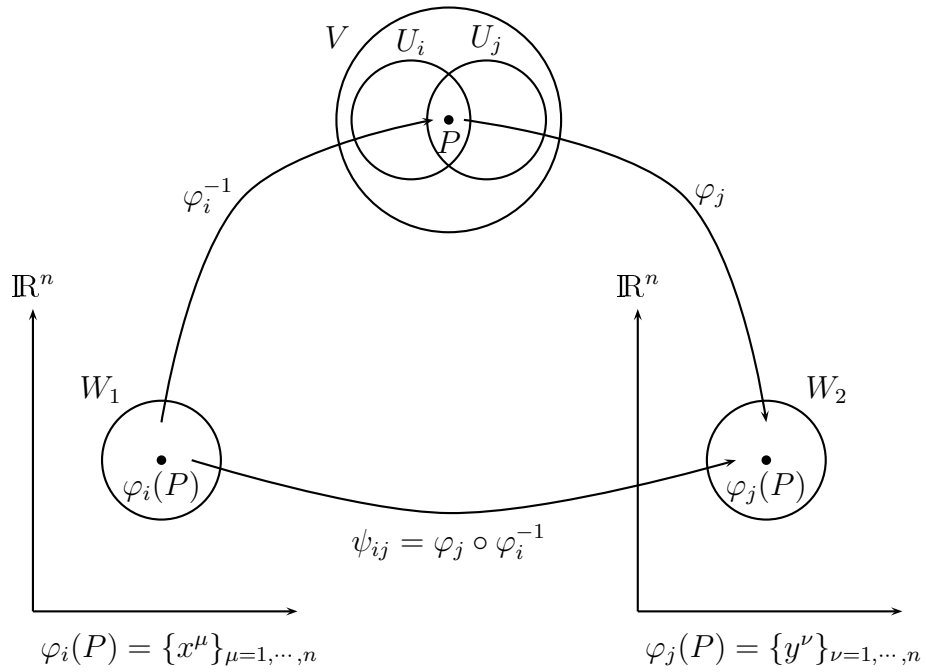


FIGURE 1.3 – Changement de coordonnées entre deux cartes locales

## 1.2 Objets géométriques de base

Il est à noter que par abus de langage, nous parlons en général d'un objet géométrique uniquement via ses composantes.

### 1.2.1 Vecteurs et espace tangent

Un vecteur est défini comme étant un vecteur tangent à une courbe sur la variété.

#### Définition 1.2.1 Vecteur tangent

Soient une courbe  $c : ]a, b[ \subset \mathbb{R} \rightarrow V$  ( $a < 0 < b$ ) et un champ scalaire  $f : V \rightarrow \mathbb{R}$ . Le **vecteur tangent** à la courbe  $c$  en  $t = 0$  est défini via la dérivée directionnelle de la fonction  $f(c(t))$  le long de la courbe  $c(t)$  en  $t = 0$  par

$$X[f] = \frac{df(c(t))}{dt} \Big|_{t=0} = X^\mu \frac{\partial f}{\partial x^\mu} \stackrel{\text{not.}}{=} X^\mu \partial_\mu f$$

Ceci implique que le vecteur  $X = X^\mu \partial_\mu$  tangent à la variété  $V$  au point  $P$  est un opérateur différentiel linéaire du premier ordre agissant sur des champs scalaires, auquel on peut associer un espace vectoriel appelé **espace tangent** de  $V$  au point  $P$  et noté  $T_P(V)$ . À cet espace tangent peut être associée une base formée des opérateurs différentiels  $\partial_\mu$ , appelée **base naturelle** et notée  $\{e_\mu\} = \{\partial_\mu\}$  où  $1 \leq \mu \leq n$ , de sorte que

$$T_P(V) = \text{span}\{e_\mu\}$$

Les composantes contravariantes du vecteur tangent se transforment via la formule

$$\tilde{X}^\nu = X^\mu \frac{\partial y^\nu}{\partial x^\mu} \quad (1.1)$$

tandis que la transformation inverse est donnée par

$$X^\mu = \tilde{X}^\nu \frac{\partial x^\mu}{\partial y^\nu}$$

#### Définition 1.2.2 Champ vectoriel

Un **champ vectoriel** est une application qui associe à tout point  $P$  de la variété  $V$  un vecteur. On a

$$\begin{aligned} X|_P : V &\rightarrow T_P(V) \\ P &\rightsquigarrow X|_P = X^\mu(P) \partial_{\mu|_P} \end{aligned}$$

L'ensemble des champs vectoriels sur la variété  $V$  est noté  $\mathcal{X}(V)$ .

### 1.2.2 Un-formes différentielles et espace cotangent

Notons qu'une un-forme différentielle peut également porter le nom de **covecteur**.

#### Définition 1.2.3 Un-forme différentielle (ou covecteur)

Soit l'espace vectoriel dual de l'espace tangent  $T_P(V)$ , appelé **espace cotangent** et noté  $T_P^*(V)$ . Une **un-forme différentielle** est un élément  $\omega \in T_P^*(V) : T_P(V) \rightarrow \mathbb{R}$  et s'écrit

$$\omega = \omega_\mu dx^\mu$$

On peut associer à l'espace cotangent une base, appelée **base naturelle duale**, formée des  $\{dx^\mu\}$  où  $1 \leq \mu \leq n$ , de sorte que

$$T_P^*(V) = \text{span}\{dx^\mu\}$$

De plus, si l'on considère le **produit interne** défini par

$$\langle \bullet, \circ \rangle : T_P^*(V) \times T_P(V) \rightarrow \mathbb{R}$$

alors

$$\langle dx^\mu, \frac{\partial}{\partial x^\nu} \rangle = \frac{\partial x^\mu}{\partial x^\nu} = \delta_\nu^\mu = \begin{cases} 1 & \text{si } \mu = \nu \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

Les composantes covariantes d'une un-forme se transforment via la formule

$$\tilde{\omega}_\nu = \frac{\partial x^\mu}{\partial y^\nu} \omega_\mu \quad (1.2)$$

tandis que la transformation inverse est donnée par

$$\omega_\mu = \frac{\partial y^\nu}{\partial x^\mu} \tilde{\omega}_\nu$$

#### Définition 1.2.4 Champ de covecteurs

Un **champ de covecteurs** est une application qui associe à tout point  $P$  de la variété  $V$  un covecteur. On a

$$\begin{aligned} \omega|_P : V &\rightarrow T_P^*(V) \\ P &\rightsquigarrow \omega|_P = \omega_\mu(P) dx^\mu|_P \end{aligned}$$

L'ensemble des champs de covecteurs sur la variété  $V$  est noté  $\Omega^1(V)$ .

### 1.2.3 Tenseurs

#### Définition 1.2.5 Tenseur de type $(p, q)$

Un tenseur de type  $(p, q)$  est une application multilinéaire définie par

$$T : \times^p T_P^*(V) \times^q T_P(V) \rightarrow \mathbb{R}$$

et tel que

$$T = T^{\mu_1 \dots \mu_p}_{\nu_1 \dots \nu_q} \frac{\partial}{\partial x^{\mu_1}} \otimes \dots \otimes \frac{\partial}{\partial x^{\mu_p}} \otimes dx^{\nu_1} \otimes \dots \otimes dx^{\nu_q}$$

où  $\otimes$  est le produit tensoriel.

L'ensemble des tenseurs de type  $(p, q)$  au point  $P \in V$  est noté  $\mathcal{T}_{q,P}^p(V)$ .

#### Définition 1.2.6 Produit tensoriel

Soient deux tenseurs,  $a \in \mathcal{T}_{q,P}^p(V)$  et  $b \in \mathcal{T}_{q',P}^{p'}(V)$ . Alors  $c = a \otimes b \in \mathcal{T}_{q+q',P}^{p+p'}(V)$  et

$$c(\omega_1, \dots, \omega_p, \xi_1, \dots, \xi_{p'}; V_1, \dots, V_q, U_1, \dots, U_{q'}) \stackrel{\text{déf.}}{=} a(\omega_1, \dots, \omega_p; V_1, \dots, V_q) \cdot b(\xi_1, \dots, \xi_{p'}; U_1, \dots, U_{q'})$$

qui n'est autre que le produit algébrique de l'action des tenseurs  $a$  et  $b$ .

La loi de transformation des tenseurs est donnée par la formule

$$\tilde{T}^{\mu_1 \dots \mu_p}_{\nu_1 \dots \nu_q} = \frac{\partial y^{\mu_1}}{\partial x^{\rho_1}} \dots \frac{\partial y^{\mu_p}}{\partial x^{\rho_p}} \frac{\partial x^{\sigma_1}}{\partial y^{\nu_1}} \dots \frac{\partial x^{\sigma_q}}{\partial y^{\nu_q}} T^{\rho_1 \dots \rho_p}_{\sigma_1 \dots \sigma_q} \quad (1.3)$$

De plus, un tenseur qui est nul sera toujours complètement nul, quel que soit le jeu de coordonnées. Cette propriété est fondamentale pour les tenseurs.

Notons que la loi donnée par l'équation (1.3) permet de mathématiser le principe de covariance, qui stipule que les équations de la physique doivent être les mêmes dans n'importe quel jeu de coordonnées. Ce principe est automatiquement garanti si l'on utilise des équations tensorielles. En effet, prenons par exemple les équations d'Einstein (décrites plus amplement au Chapitre 2) dans les coordonnées  $\{x^\mu\}_{\mu=1, \dots, n}$  et appliquons-leur la loi de transformation des tenseurs afin de passer dans les coordonnées  $\{y^\nu\}_{\nu=1, \dots, n}$ . Nous obtenons

$$\begin{aligned} G_{\mu\nu} = \frac{8\pi G}{c^4} T_{\mu\nu} &\stackrel{(1.3)}{\iff} \frac{\partial y^\alpha}{\partial x^\mu} \frac{\partial y^\beta}{\partial x^\nu} \tilde{G}_{\alpha\beta} = \frac{8\pi G}{c^4} \frac{\partial y^\alpha}{\partial x^\mu} \frac{\partial y^\beta}{\partial x^\nu} \tilde{T}_{\alpha\beta} \\ &\iff \tilde{G}_{\alpha\beta} = \frac{8\pi G}{c^4} \tilde{T}_{\alpha\beta} \end{aligned}$$

Nous remarquons alors de manière évidente que les équations sont équivalentes dans les deux jeux de coordonnées  $\{x^\mu\}_{\mu=1, \dots, n}$  et  $\{y^\nu\}_{\nu=1, \dots, n}$ , satisfaisant par conséquent au principe de covariance.

**Définition 1.2.7** *Champ tensoriel*

Un **champ tensoriel** est une application qui associe à tout point  $P$  de la variété  $V$  un tenseur. On a

$$T|_P : V \rightarrow \mathcal{T}_{q,P}^p(V)$$

$$P \rightsquigarrow T|_P = T^{\mu_1 \dots \mu_p}_{\nu_1 \dots \nu_q}(P) \left( \frac{\partial}{\partial x^{\mu_1}} \otimes \dots \otimes \frac{\partial}{\partial x^{\mu_p}} \otimes dx^{\nu_1} \otimes \dots \otimes dx^{\nu_q} \right)|_P$$

### 1.3 Propriétés géométriques

Les propriétés suivantes permettent de se **détacher de la localité** et notamment de définir le concept de transport parallèle (non trivial) sur la variété.

#### 1.3.1 Connexion affine et dérivée covariante

La connexion spécifie comment les tenseurs sont transportés le long d'une courbe sur la variété. Elle permet donc de déplacer un objet sur la variété sans en changer ses propriétés.

**Définition 1.3.1** *Connexion affine*

Soient  $f$  un champ scalaire et  $X, Y$  et  $Z$  des champs vectoriels. Une **connexion affine** est une application de la forme

$$\nabla : \mathcal{X}(V) \times \mathcal{X}(V) \rightarrow \mathcal{X}(V)$$

$$(X, Y) \rightsquigarrow \nabla_X Y$$

Cette application satisfait aux quatre conditions suivantes.

$$\begin{aligned} \nabla_X(Y + Z) &= \nabla_X Y + \nabla_X Z \\ \nabla_{(X+Y)}Z &= \nabla_X Z + \nabla_Y Z \\ \nabla_{(fX)}Y &= f \nabla_X Y \\ \nabla_X(fY) &= X[f]Y + f \nabla_X Y \quad (\text{Leibniz}) \end{aligned}$$

**Définition 1.3.2** *Coefficients de connexion*

Si  $n$  est la dimension de la variété  $V$ , alors il existe  $n^3$  **coefficients de connexion**  $\Gamma^{\lambda}_{\nu\mu}$  définis par

$$\nabla_{e_\nu} e_\mu \stackrel{\text{not.}}{=} \nabla_\nu e_\mu = \Gamma^{\lambda}_{\nu\mu} e_\lambda$$

où les  $\{e_\mu\}$  désignent la base naturelle de  $T_P(V)$ .

À ce stade, nous ne pouvons pas encore calculer explicitement les coefficients de connexion. Ce n'est que par le choix de la connexion de Levi-Civita que nous pourrions donner des règles de calcul explicites.

La **loi de transformation des coefficients de connexion** est donnée par la formule

$$\tilde{\Gamma}^{\gamma}_{\alpha\beta} = \frac{\partial x^{\lambda}}{\partial y^{\alpha}} \frac{\partial x^{\mu}}{\partial y^{\beta}} \frac{\partial y^{\gamma}}{\partial x^{\nu}} \Gamma^{\nu}_{\lambda\mu} + \frac{\partial^2 x^{\nu}}{\partial y^{\alpha} \partial y^{\beta}} \frac{\partial y^{\gamma}}{\partial x^{\nu}} \quad (1.4)$$

Remarquons également que les coefficients de connexion ne sont pas des tenseurs de type (1, 2) car ils ne vérifient pas la loi de transformation donnée par l'équation (1.3). En effet, le premier terme du membre de droite de l'équation (1.4) est tensoriel, tandis que le second (représentant les forces d'inertie) ne l'est pas. Par contre, si les forces d'inertie s'annulent (autrement dit lorsque l'on se trouve dans un référentiel galiléen), il ne subsiste plus que le premier terme et les coefficients de connexion sont dès lors complètement tensoriels ; mais ceci n'est valable qu'en relativité restreinte. De plus, les coefficients de connexion sont des pseudo-forces pour les équations des géodésiques définies à la section suivante. Notons que « *une pseudo-force est une force physique apparente mais qui n'existe pas et qui est ressentie par un observateur dans un référentiel non inertiel (c'est-à-dire un référentiel soumis à une accélération). Les lois du mouvement de Newton sont valables dans un tel référentiel seulement si l'existence d'une pseudo-force est supposée. Par exemple, la force centrifuge est une pseudo-force.* »<sup>1</sup>.

La **dérivée covariante**, quant à elle, est un opérateur permettant de caractériser le **transport parallèle** et est définie à partir de la connexion affine et des coefficients de connexion. Ces coefficients spécifient comment les vecteurs de base des espaces tangents changent d'un point à l'autre de la variété lors du transport parallèle.

**Définition 1.3.3 Dérivée covariante d'un champ tensoriel**

Soit un champ tensoriel  $T \in \mathcal{T}_q^p(V)$ . Les composantes de la dérivée covariante de ce champ tensoriel sont données par

$$\begin{aligned} \nabla_{\lambda} T^{\nu_1 \dots \nu_p}_{\mu_1 \dots \mu_q} &= \partial_{\lambda} T^{\nu_1 \dots \nu_p}_{\mu_1 \dots \mu_q} \\ &+ \Gamma^{\nu_1}_{\lambda\rho} T^{\rho\nu_2 \dots \nu_p}_{\mu_1 \dots \mu_q} + \dots + \Gamma^{\nu_p}_{\lambda\rho} T^{\nu_1 \dots \nu_{p-1}\rho}_{\mu_1 \dots \mu_q} \\ &- \Gamma^{\rho}_{\lambda\mu_1} T^{\nu_1 \dots \nu_p}_{\rho\mu_2 \dots \mu_q} - \dots - \Gamma^{\rho}_{\lambda\mu_q} T^{\nu_1 \dots \nu_p}_{\mu_1 \dots \mu_{q-1}\rho} \end{aligned} \quad (1.5)$$

À partir de cette définition, nous obtenons aisément la dérivée covariante d'un champ vectoriel et d'un champ de covecteurs.

1. Traduit de l'anglais dans *The American Heritage Science Dictionary*, accessible en ligne à l'adresse <http://science.yourdictionary.com/>

**Définition 1.3.4** *Dérivée covariante d'un champ vectoriel*

Soit un champ vectoriel  $Y \in \mathcal{X}(V)$ . Les composantes de la dérivée covariante de ce champ vectoriel sont données par

$$\nabla_{\mu} Y^{\lambda} = \partial_{\mu} Y^{\lambda} + \Gamma^{\lambda}_{\mu\rho} Y^{\rho}$$

**Définition 1.3.5** *Dérivée covariante d'un champ de covecteurs*

Soit un champ de covecteurs  $\omega \in \Omega^1(V)$ . Les composantes de la dérivée covariante de ce champ de covecteurs sont données par

$$\nabla_{\mu} \omega_{\nu} = \partial_{\mu} \omega_{\nu} - \Gamma^{\rho}_{\mu\nu} \omega_{\rho}$$

En particulier, si  $\omega = dx^{\nu}$ ,

$$\nabla_{\mu} dx^{\nu} = -\Gamma^{\nu}_{\mu\rho} dx^{\rho}$$

### 1.3.2 Géodésiques

Les équations des géodésiques, qui sont les trajectoires les plus courtes entre deux points quelconques de la variété en géométrie riemannienne, sont définies à partir du transport parallèle d'un champ vectoriel.

**Définition 1.3.6** *Transport parallèle d'un champ vectoriel*

Soient une courbe  $c : ]a, b[ \subset \mathbb{R} \rightarrow V$  et un champ vectoriel  $X$  défini le long de  $c$  par

$$X|_{c(t)} = X^{\mu}(c(t)) e_{\mu}|_{c(t)}$$

On dit que  $X$  est **transporté parallèlement** le long de  $c$  si

$$\nabla_V X = 0 \quad \forall t \in ]a, b[$$

où  $V = \frac{dx^{\mu}(c(t))}{dt} e_{\mu}|_{c(t)}$  est le vecteur tangent à la courbe  $c(t)$ .

**Définition 1.3.7** *Géodésique*

Une **géodésique** est une courbe telle que son vecteur tangent est transporté parallèlement le long de la courbe  $c(t)$ , autrement dit si  $\nabla_V V = 0$ . L'équation des géodésiques est donnée par

$$\frac{d^2 x^{\mu}}{dt^2} + \Gamma^{\mu}_{\nu\rho} \frac{dx^{\nu}}{dt} \frac{dx^{\rho}}{dt} = 0 \tag{1.6}$$

Remarquons que les équations des géodésiques sont les équations d'Euler-Lagrange liées au principe variationnel, dans le cas de la connexion de Levi-Civita. Nous démontrerons ce résultat lorsque la connexion de Levi-Civita aura été définie.

## 1.4 Torsion et courbure

Les coefficients de connexion définis auparavant n'étant pas des tenseurs (cf. loi de transformation des coefficients de connexion donnée par l'équation (1.4)), ils ne peuvent pas constituer une mesure de la courbure d'une variété. C'est pourquoi nous définissons le tenseur de torsion et le tenseur de courbure de Riemann.

### Définition 1.4.1 Tenseur de torsion

Le *tenseur de torsion* est un tenseur de type (1,2) défini par

$$\begin{aligned} T : \mathcal{X}(V) \times \mathcal{X}(V) &\rightarrow \mathcal{X}(V) \\ (X, Y) &\rightsquigarrow T(X, Y) = \nabla_X Y - \nabla_Y X - [X, Y] \end{aligned}$$

où  $[X, Y]$  est le crochet de Lie de  $X$  et  $Y$ . De plus, ce tenseur vérifie

$$T(X, Y) = -T(Y, X)$$

Les composantes du tenseur de torsion sont données par

$$T^\lambda_{\mu\nu} = \Gamma^\lambda_{\mu\nu} - \Gamma^\lambda_{\nu\mu}$$

Géométriquement, la torsion mesure la composante suivant la dérivée covariante du champ vectoriel.

### Définition 1.4.2 Tenseur de courbure de Riemann

Le *tenseur de courbure de Riemann* est un tenseur de type (1,3) défini par

$$\begin{aligned} R : \mathcal{X}(V) \times \mathcal{X}(V) \times \mathcal{X}(V) &\rightarrow \mathcal{X}(V) \\ (X, Y, Z) &\rightsquigarrow R(X, Y, Z) \stackrel{\text{not.}}{=} R(X, Y)Z \\ &= \nabla_X \nabla_Y Z - \nabla_Y \nabla_X Z - \nabla_{[X, Y]} Z \end{aligned}$$

où  $[X, Y]$  est le crochet de Lie de  $X$  et  $Y$ . De plus, ce tenseur vérifie

$$R(X, Y)Z = -R(Y, X)Z$$

Les composantes du tenseur de courbure de Riemann sont données par

$$R^\kappa_{\lambda\mu\nu} = \partial_\mu \Gamma^\kappa_{\nu\lambda} - \partial_\nu \Gamma^\kappa_{\mu\lambda} + \Gamma^\eta_{\nu\lambda} \Gamma^\kappa_{\mu\eta} - \Gamma^\eta_{\mu\lambda} \Gamma^\kappa_{\nu\eta} \quad (1.7)$$

Géométriquement, le tenseur de Riemann mesure la partie du résultat du transport parallèle sur la boucle qui est dans la direction du champ vectoriel (cf. référence [1]).

À partir de ce tenseur de courbure de Riemann, on peut construire le tenseur de Ricci, qui mesure lui aussi la courbure d'une variété.

**Définition 1.4.3 Tenseur de Ricci**

Le *tenseur de Ricci* est un tenseur de type  $(0, 2)$  défini par

$$\text{Ric}(X, Y) = \langle dx^\mu, R(e_\mu, Y)X \rangle$$

Les composantes du tenseur de Ricci sont données par

$$\text{Ric}_{\mu\nu} = R^\lambda_{\mu\lambda\nu} \quad (1.8)$$

## 1.5 Géométrie riemannienne

La définition du transport parallèle et de la connexion affine nous a conduit aux variétés affines, via la courbure et la torsion. Nous allons ici rajouter une notion de distance métrique, qui nous amène aux variétés (pseudo-)riemanniennes et au calcul explicite des coefficients de connexion.

### 1.5.1 Tenseur de métrique

Le tenseur de métrique est une généralisation de la notion de produit scalaire entre deux vecteurs de  $\mathbb{R}^n$ . L'espace-temps physique étant décrit par une métrique pseudo-riemannienne, nous ne considérons ici que ce cas précis. Grâce à ce type de métrique, la distance entre deux points distincts de cet espace peut être nulle.

**Définition 1.5.1 Métrique pseudo-riemannienne**

Une *métrique pseudo-riemannienne*  $g$  sur une variété différentiable  $V$ , appelée également *métrique lorentzienne*, est un champ de tenseurs de type  $(0, 2)$  tel que

$$g = g_{\mu\nu} dx^\mu \otimes dx^\nu$$

La métrique lorentzienne satisfait aux deux conditions suivantes pour tout point  $P \in V$ .

1. **Symétrie** :  $g|_P(X, Y) = g|_P(Y, X) \forall X, Y \in \mathcal{X}(V)$
2. **Non-dégénérescence** : si  $g|_P(X, Y) = 0 \forall X \in \mathcal{X}(V)$  alors  $Y = 0$

Par conséquent, une métrique pseudo-riemannienne est une forme bilinéaire symétrique non dégénérée. De plus, l'**élément de ligne** est donné par

$$ds^2 = g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu$$

L'inverse de la métrique  $g_{\mu\nu}$  est donnée par  $g^{\mu\nu}$  de sorte que

$$g_{\mu\nu} g^{\nu\lambda} = g^{\lambda\nu} g_{\nu\mu} = \delta_\mu^\lambda = \begin{cases} 1 & \text{si } \lambda = \mu \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

En particulier, si  $n$  est la dimension de la variété, alors la trace de  $g_{\mu\nu}$  vaut

$$g^{\mu\nu}g_{\mu\nu} = \delta_{\nu}^{\nu} = n$$

En pratique, le tenseur de métrique permet de passer des coordonnées contravariantes aux coordonnées covariantes et *vice-versa* ; autrement dit, la métrique sert à monter et descendre les indices dans les différentes expressions. Cette propriété est en fait une application aux variétés riemanniennes (ou dans le cas présent aux variétés pseudo-riemanniennes) du théorème de réflexivité dans les espaces métriques : la métrique permet d'engendrer un isomorphisme réflexif (ou isomorphisme musical) entre l'espace tangent  $T_P(V)$  (assimilé au primal) et l'espace cotangent  $T_P^*(V)$  (assimilé au dual).

**Définition 1.5.2 Variété pseudo-riemannienne**

Une *variété pseudo-riemannienne* est un couple  $(V, g)$  où  $V$  est une variété différentiable et  $g$  est une métrique pseudo-riemannienne.

Comme déjà dit précédemment, les variétés pseudo-riemanniennes ont une grande importance pour la géométrie de l'espace-temps plat de la relativité restreinte. En effet, en diagonalisant une métrique pseudo-riemannienne, on obtient la **métrique de Minkowski**  $\eta$ , qui décrit un tel espace-temps. Dans l'espace  $\mathbb{R}^n$ ,

$$\eta = \begin{pmatrix} -1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & 1 \end{pmatrix}_{n \times n}$$

Pratiquement, nous travaillons en relativité restreinte sur un espace vectoriel que l'on note  $\mathbb{R}^{3,1}$  (ceci découle de la signature<sup>2</sup> de la métrique) avec la métrique de Minkowski qui est la suivante.

$$\eta_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Remarquons qu'en relativité générale, l'espace-temps est courbe car il n'est pas possible de trouver un système de coordonnées qui soit tel que la métrique prenne sa forme fondamentale  $\eta_{\mu\nu}$  partout.

De plus, dans  $(\mathbb{R}^2, \eta)$ , si  $x^1 = c \cdot t$  où  $c$  est la vitesse de la lumière et  $x^2 = x$  (les exposants sur  $x$  réfèrent ici à un indice et non pas à une puissance), alors

$$\begin{aligned} ds^2 &= \eta_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu \\ &= -(dx^1 dx^1) + (dx^2 dx^2) \quad (\text{car } \eta_{\mu\nu} = 0 \quad \forall \mu \neq \nu) \\ &= -c^2(dt)^2 + (dx)^2 \end{aligned}$$

2. Il existe officiellement deux signatures pour la métrique. Il s'agit d'une convention qui découle des signes que prennent les éléments diagonaux de la matrice  $\eta_{\mu\nu}$ . Celle-ci peut différer d'un ouvrage à l'autre. On trouvera plus souvent la signature  $(-+++)$  dans les ouvrages français, tandis que l'on trouvera plus fréquemment la signature  $(+---)$  dans les ouvrages anglais. Nous avons choisi d'appliquer la convention  $(-+++)$  tout au long de ce mémoire.

Le signe de cet élément de ligne détermine le genre de vecteur auquel nous sommes confrontés :

- si  $ds^2 > 0$ , le vecteur est de **genre espace** ou **spacelike** ;
- si  $ds^2 = 0$ , le vecteur est de **genre lumière** ou **null** ;
- si  $ds^2 < 0$ , le vecteur est de **genre temps** ou **timelike**.

Cette classification des vecteurs indique quels sont les évènements de l'espace-temps reliés causalement entre eux, lorsqu'ils se trouvent à l'intérieur du **cône de lumière**, représenté à la FIGURE 1.4.

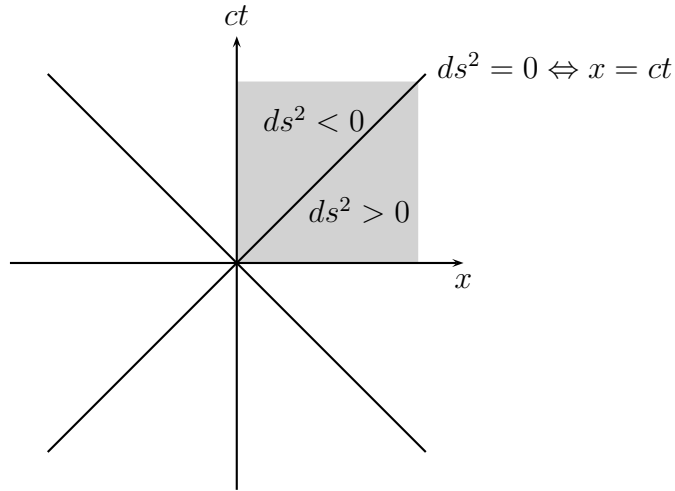


FIGURE 1.4 – Cône de lumière

## 1.5.2 Connexion métrique

La métrique que nous venons de définir va nous permettre à présent de calculer explicitement les coefficients de connexion. Au préalable, nous définissons la connexion métrique, qui conserve l'angle entre deux vecteurs ainsi que la norme d'un vecteur lors du transport parallèle.

### Définition 1.5.3 Connexion métrique

Une connexion affine  $\nabla$  est une **connexion métrique** si

$$\nabla_{\lambda} g_{\mu\nu} = 0$$

L'équation (1.5) donnant la dérivée covariante d'un champ tensoriel permet d'obtenir les composantes suivantes de la connexion métrique.

$$\nabla_{\lambda} g_{\mu\nu} = \partial_{\lambda} g_{\mu\nu} - \Gamma^{\sigma}_{\lambda\mu} g_{\sigma\nu} - \Gamma^{\sigma}_{\lambda\nu} g_{\sigma\mu} = 0 \quad (1.9)$$

Ainsi, les coefficients de connexion d'une connexion métrique sont donnés via l'équation (1.9) par

$$\Gamma^\lambda_{\mu\nu} = \left\{ \begin{array}{c} \lambda \\ \mu\nu \end{array} \right\} + K^\lambda_{\mu\nu}$$

$$\text{où } \left\{ \begin{array}{l} \left\{ \begin{array}{c} \lambda \\ \mu\nu \end{array} \right\} = \frac{1}{2} g^{\lambda\kappa} (\partial_\mu g_{\nu\kappa} + \partial_\nu g_{\mu\kappa} - \partial_\kappa g_{\mu\nu}) \text{ sont les } \mathbf{symboles de Christoffel} \\ K^\lambda_{\mu\nu} = \frac{1}{2} (T^\lambda_{\mu\nu} + T^\lambda_{\nu\mu} + T^\lambda_{\nu\mu}) \text{ est le } \mathbf{tenseur de contorsion} \end{array} \right.$$

### 1.5.3 Connexion de Levi-Civita

La connexion de Levi-Civita est un cas particulier de connexion affine. Cette connexion particulière est définie par le théorème 1.5.1, appelé **théorème fondamental de la géométrie (pseudo-)riemannienne**.

#### Théorème 1.5.1 *Théorème fondamental*

*Sur une variété (pseudo-)riemannienne  $(V, g)$ , il existe une et une seule connexion symétrique (à savoir une connexion pour laquelle le tenseur de torsion s'annule) et compatible avec la métrique  $g$ , autrement dit*

1.  $\nabla_\mu g = 0$
2.  $\Gamma^\lambda_{\mu\nu} = \Gamma^\lambda_{\nu\mu} \iff T^\lambda_{\mu\nu} = 0$

*Cette connexion unique est appelée la **connexion de Levi-Civita**.*

Par conséquent, dans le cas de la connexion de Levi-Civita, les coefficients de connexion se réduisent aux symboles de Christoffel. De plus, ces coefficients permettent de géométriser la gravitation : on peut reproduire les équations du mouvement de Newton dans un champ gravitationnel via les équations des géodésiques. En effet, considérons la métrique

$$g_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} g_{rr} & g_{r\theta} \\ g_{\theta r} & g_{\theta\theta} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & r^2 \end{pmatrix}$$

ainsi que son inverse

$$g^{\mu\nu} = \begin{pmatrix} g^{rr} & g^{r\theta} \\ g^{\theta r} & g^{\theta\theta} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \frac{1}{r^2} \end{pmatrix}$$

Dans cette métrique, seules les connexions  $\Gamma^r_{\theta\theta}$  et  $\Gamma^\theta_{r\theta}$  sont non nulles. Nous avons

$$\begin{aligned} \Gamma^r_{\theta\theta} &= \frac{1}{2} g^{rr} (\partial_\theta g_{\sigma\theta} + \partial_\theta g_{\sigma\theta} - \partial_\sigma g_{\theta\theta}) \\ &\stackrel{\text{Sommat. sur } \sigma}{=} \frac{1}{2} g^{rr} (\underbrace{\partial_\theta g_{r\theta}}_{=0} + \underbrace{\partial_\theta g_{r\theta}}_{=0} - \partial_r g_{\theta\theta}) + \frac{1}{2} \underbrace{g^{\theta r}}_{=0} (\partial_\theta g_{\theta\theta} + \partial_\theta g_{\theta\theta} - \partial_\theta g_{\theta\theta}) \\ &= \frac{1}{2} g^{rr} (-\partial_r g_{\theta\theta}) \\ &= -\frac{1}{2} \frac{\partial(r^2)}{\partial r} \\ &= -r \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}
 \Gamma_{r\theta}^{\theta} &= \frac{1}{2} g^{\sigma\theta} (\partial_{\theta} g_{\sigma r} + \partial_r g_{\sigma\theta} - \underbrace{\partial_{\sigma} g_{r\theta}}_{=0}) \\
 &\stackrel{\text{Sommat. sur } \sigma}{=} \frac{1}{2} \underbrace{g^{r\theta}}_{=0} (\partial_{\theta} g_{rr} + \partial_r g_{r\theta}) + \frac{1}{2} g^{\theta\theta} (\underbrace{\partial_{\theta} g_{\theta r}}_{=0} + \partial_r g_{\theta\theta}) \\
 &= \frac{1}{2} g^{\theta\theta} (\partial_r g_{\theta\theta}) \\
 &= \frac{1}{2r^2} \frac{\partial(r^2)}{\partial r} \\
 &= \frac{1}{r} \\
 &= \Gamma_{\theta r}^{\theta} \text{ par symétrie de la connexion de Levi-Civita}
 \end{aligned}$$

Ainsi, les équations des géodésiques pour les coordonnées  $(r, \theta)$  sont données par (pour  $\mu = r$  et  $\mu = \theta$  respectivement dans l'équation (1.6))

$$\frac{d^2 x^r}{dt^2} + \Gamma_{\theta\theta}^r \frac{dx^{\theta}}{dt} \frac{dx^{\theta}}{dt} \iff \frac{d^2 r}{dt^2} - r \left( \frac{d\theta}{dt} \right)^2 = 0 \quad (1.10)$$

$$\frac{d^2 x^{\theta}}{dt^2} + (\Gamma_{r\theta}^{\theta} + \Gamma_{\theta r}^{\theta}) \frac{dx^r}{dt} \frac{dx^{\theta}}{dt} \iff \frac{d^2 \theta}{dt^2} + \frac{2}{r} \frac{dr}{dt} \frac{d\theta}{dt} = 0 \quad (1.11)$$

L'équation (1.11) admet une intégrale première de la forme

$$r^2 \frac{d\theta}{dt} = \text{constante}$$

Cette dernière équation exprime la conservation du moment angulaire

$$L = mr^2 \frac{d\theta}{dt}$$

Plaçons-nous dans le cas particulier où

$$\frac{d\theta}{dt} = \omega t$$

autrement dit, dans le cas d'un mouvement circulaire uniforme. Dans ce cadre spécifique,

$$L = mr^2 \omega t$$

et l'équation (1.10) devient

$$\frac{d^2 r}{dt^2} - r\omega^2 = 0$$

Cette dernière équation n'est autre que l'équation de Newton  $\vec{F} = m\vec{a}$  à la masse d'inertie  $m$  près dans un référentiel tournant non inertiel, avec le terme  $r^2\omega$  lié à la connexion exprimant la force centrifuge. Cette force étant en réalité une pseudo-force, on retrouve bien le fait que les coefficients de connexion sont des pseudo-forces pour les équations des géodésiques, comme nous l'avons établi dans l'analyse de la loi de transformation des coefficients de connexion donnée par l'équation (1.4).

### 1.5.4 Équations des géodésiques avec la connexion de Levi-Civita

Bien que nous avons précisé au début de ce chapitre qu'aucune démonstration n'y serait donnée, nous allons montrer à présent que les équations des géodésiques sont les équations d'Euler-Lagrange liées au principe variationnel dans le cas de la connexion de Levi-Civita, afin d'introduire la notion de calcul variationnel. Néanmoins, plus de détails à ce sujet sont donnés dans le Chapitre 2 à la section 2.2.4. La démonstration est tirée de la référence [1].

Soit une courbe  $x^\mu$  paramétrée par la distance curviligne  $s$  sur cette courbe, c'est-à-dire  $x^\mu = x^\mu(s)$ . La longueur du chemin reliant deux points  $P$  et  $Q$  sur la variété peut donc s'écrire comme une fonctionnelle  $I$  des  $x^\mu(s)$ . Nous rappelons en passant qu'une fonctionnelle est un opérateur à valeurs dans un champ scalaire, typiquement  $\mathbb{R}$  ou  $\mathbb{C}$ . La fonctionnelle que nous définissons ici est un opérateur intégral. Nous avons

$$ds^2 = g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu \iff 1 = g_{\mu\nu} \frac{dx^\mu dx^\nu}{ds^2}$$

Élevons les deux membres de l'égalité à la puissance  $\frac{1}{2}$ . Nous obtenons

$$\begin{aligned} 1 = g_{\mu\nu} \frac{dx^\mu dx^\nu}{ds^2} &\iff 1 = \sqrt{g_{\mu\nu} \frac{dx^\mu}{ds} \frac{dx^\nu}{ds}} \\ &\iff \int_P^Q ds = \int_P^Q \sqrt{g_{\mu\nu} \frac{dx^\mu}{ds} \frac{dx^\nu}{ds}} ds \\ &\iff \int_P^Q ds = \int_P^Q \sqrt{g_{\mu\nu} x'^\mu x'^\nu} ds \end{aligned}$$

Il vient alors l'action suivante

$$I[x^\mu(s)] = \int_P^Q ds = \int_P^Q \sqrt{g_{\mu\nu} x'^\mu x'^\nu} ds \stackrel{\text{not.}}{=} \int_P^Q L ds \quad \text{où } x'^\mu = \frac{dx^\mu}{ds} \quad (1.12)$$

avec  $L$  qui vérifie l'équation d'Euler-Lagrange

$$\frac{d}{ds} \left( \frac{\partial L}{\partial x'^\lambda} \right) - \frac{\partial L}{\partial x^\lambda} = 0 \quad (1.13)$$

Notons que la notation primée, comme nous l'avons définie dans le cas présent, désigne une dérivée et non un changement de carte.

Considérons maintenant le problème variationnel

$$\delta I = 0$$

où  $\delta$  est défini comme la dérivée variationnelle. La solution de ce problème donnant les extrema de la longueur  $I$  est obtenue via la résolution de l'équation d'Euler-Lagrange associée à l'action donnée par l'équation (1.12). Nous supposons ce résultat acquis (puisque ce n'est pas ce qui nous occupe ici) et nous posons

$$F = \frac{1}{2} g_{\mu\nu} x'^{\mu} x'^{\nu}$$

de sorte que

$$I = \int_P^Q L(F) ds \quad \text{avec } F = \frac{L^2}{2}$$

Ainsi,

$$\begin{aligned} \frac{d}{ds} \left( \frac{\partial F}{\partial x'^{\lambda}} \right) - \frac{\partial F}{\partial x^{\lambda}} &= \frac{d}{ds} \left[ \frac{\partial}{\partial x'^{\lambda}} \left( \frac{L^2}{2} \right) \right] - \left[ \frac{\partial}{\partial x^{\lambda}} \left( \frac{L^2}{2} \right) \right] \\ &= \frac{d}{ds} \left( L \frac{\partial L}{\partial x'^{\lambda}} \right) - L \frac{\partial L}{\partial x^{\lambda}} \\ &= \frac{dL}{ds} \frac{\partial L}{\partial x'^{\lambda}} + L \frac{d}{ds} \left( \frac{\partial L}{\partial x'^{\lambda}} \right) - L \frac{\partial L}{\partial x^{\lambda}} \\ &= L \left[ \frac{d}{ds} \left( \frac{\partial L}{\partial x'^{\lambda}} \right) - \frac{\partial L}{\partial x^{\lambda}} \right] + \frac{dL}{ds} \frac{\partial L}{\partial x'^{\lambda}} \\ &\stackrel{(1.13)}{=} \frac{dL}{ds} \frac{\partial L}{\partial x'^{\lambda}} \end{aligned} \tag{1.14}$$

Or, puisque par définition  $1 = \sqrt{g_{\mu\nu} \frac{dx^{\mu}}{ds} \frac{dx^{\nu}}{ds}}$ , cela signifie que  $L = 1$  le long de la courbe.

Il s'en suit que  $\frac{dL}{ds} = 0$ , ce qui veut dire que le membre de droite de l'équation (1.14) est identiquement nul. Nous avons par conséquent

$$\frac{d}{ds} \left( \frac{\partial L}{\partial x'^{\lambda}} \right) - \frac{\partial L}{\partial x^{\lambda}} = 0 \iff \frac{d}{ds} \left( \frac{\partial F}{\partial x'^{\lambda}} \right) - \frac{\partial F}{\partial x^{\lambda}} = 0$$

Autrement dit,  $F$  vérifie l'équation d'Euler-Lagrange si et seulement si  $L$  la vérifie aussi.

Enfin,

$$\begin{aligned} \frac{d}{ds} \left( \frac{\partial F}{\partial x'^{\lambda}} \right) - \frac{\partial F}{\partial x^{\lambda}} = 0 &\iff \frac{d}{ds} \left[ \frac{\partial}{\partial x'^{\lambda}} \left( \frac{1}{2} g_{\mu\nu} x'^{\mu} x'^{\nu} \right) \right] - \frac{\partial}{\partial x^{\lambda}} \left( \frac{1}{2} g_{\mu\nu} x'^{\mu} x'^{\nu} \right) = 0 \\ &\iff \frac{d}{ds} \left[ \frac{1}{2} g_{\mu\nu} \left( \frac{\partial x'^{\mu}}{\partial x'^{\lambda}} x'^{\nu} + \frac{\partial x'^{\nu}}{\partial x'^{\lambda}} x'^{\mu} \right) \right] - \frac{1}{2} \frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x^{\lambda}} x'^{\mu} x'^{\nu} = 0 \\ &\iff \frac{d}{ds} \left[ \frac{1}{2} g_{\mu\nu} \left( \delta_{\lambda}^{\mu} x'^{\nu} + \delta_{\lambda}^{\nu} x'^{\mu} \right) \right] - \frac{1}{2} \frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x^{\lambda}} x'^{\mu} x'^{\nu} = 0 \\ &\iff \frac{d}{ds} \left[ \frac{1}{2} g_{\mu\nu} \delta_{\lambda}^{\mu} x'^{\nu} + \frac{1}{2} g_{\mu\nu} \delta_{\lambda}^{\nu} x'^{\mu} \right] - \frac{1}{2} \frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x^{\lambda}} x'^{\mu} x'^{\nu} = 0 \\ &\iff \frac{d}{ds} \left[ \frac{1}{2} g_{\lambda\nu} x'^{\nu} + \frac{1}{2} g_{\mu\lambda} x'^{\mu} \right] - \frac{1}{2} \frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x^{\lambda}} x'^{\mu} x'^{\nu} = 0 \\ &\iff \frac{d}{ds} (g_{\lambda\mu} x'^{\mu}) - \frac{1}{2} \frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x^{\lambda}} x'^{\mu} x'^{\nu} = 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &\Leftrightarrow \frac{d}{ds}(g_{\lambda\mu})x'^{\mu} + g_{\lambda\mu} \frac{d^2x^{\mu}}{ds^2} - \frac{1}{2} \frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x^{\lambda}} x'^{\mu} x'^{\nu} = 0 \\
 &\Leftrightarrow \frac{\partial g_{\lambda\mu}}{\partial x^{\nu}} \frac{\partial x^{\nu}}{\partial s} x'^{\mu} + g_{\lambda\mu} \frac{d^2x^{\mu}}{ds^2} - \frac{1}{2} \frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x^{\lambda}} x'^{\mu} x'^{\nu} = 0 \\
 &\Leftrightarrow \frac{\partial g_{\lambda\mu}}{\partial x^{\nu}} x'^{\mu} x'^{\nu} + g_{\lambda\mu} \frac{d^2x^{\mu}}{ds^2} - \frac{1}{2} \frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x^{\lambda}} x'^{\mu} x'^{\nu} = 0 \\
 &\Leftrightarrow \left( \frac{1}{2} \frac{\partial g_{\lambda\mu}}{\partial x^{\nu}} + \frac{1}{2} \frac{\partial g_{\lambda\nu}}{\partial x^{\mu}} \right) x'^{\mu} x'^{\nu} + g_{\lambda\mu} \frac{d^2x^{\mu}}{ds^2} - \frac{1}{2} \frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x^{\lambda}} x'^{\mu} x'^{\nu} = 0 \\
 &\stackrel{\times g^{\kappa\lambda}}{\Leftrightarrow} g^{\kappa\lambda} \left[ g_{\lambda\mu} \frac{d^2x^{\mu}}{ds^2} + \frac{1}{2} \left( \frac{\partial g_{\lambda\mu}}{\partial x^{\nu}} + \frac{\partial g_{\lambda\nu}}{\partial x^{\mu}} - \frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x^{\lambda}} \right) \frac{dx^{\mu}}{ds} \frac{dx^{\nu}}{ds} \right] = 0 \\
 &\Leftrightarrow \delta_{\mu}^{\kappa} \frac{d^2x^{\mu}}{ds^2} + \frac{1}{2} g^{\kappa\lambda} (\partial_{\nu} g_{\lambda\mu} + \partial_{\mu} g_{\lambda\nu} - \partial_{\lambda} g_{\mu\nu}) \frac{dx^{\mu}}{ds} \frac{dx^{\nu}}{ds} = 0 \\
 &\Leftrightarrow \frac{d^2x^{\kappa}}{ds^2} + \Gamma^{\kappa}_{\mu\nu} \frac{dx^{\mu}}{ds} \frac{dx^{\nu}}{ds} = 0
 \end{aligned}$$

Cette dernière équation est bien l'équation des géodésiques, ce que nous cherchions à obtenir via les équations d'Euler-Lagrange liées au principe variationnel  $\delta I = 0$ .

### 1.5.5 Tenseur de Riemann avec la connexion de Levi-Civita

Les composantes du tenseur de Riemann avec la connexion de Levi-Civita sont données par

$$R_{\kappa\lambda\mu\nu} = \frac{1}{2} \left( -\frac{\partial^2 g_{\kappa\mu}}{\partial x^{\lambda} \partial x^{\nu}} + \frac{\partial^2 g_{\lambda\mu}}{\partial x^{\kappa} \partial x^{\nu}} + \frac{\partial^2 g_{\kappa\nu}}{\partial x^{\lambda} \partial x^{\mu}} - \frac{\partial^2 g_{\lambda\nu}}{\partial x^{\kappa} \partial x^{\mu}} \right) - g_{\xi\eta} \left( \Gamma^{\xi}_{\kappa\mu} \Gamma^{\eta}_{\lambda\nu} - \Gamma^{\xi}_{\kappa\nu} \Gamma^{\eta}_{\lambda\mu} \right) \quad (1.15)$$

avec  $R_{\kappa\lambda\mu\nu} = g_{\kappa\xi} R^{\xi}_{\lambda\mu\nu}$ .

Le tenseur de Riemann avec la connexion de Levi-Civita satisfait aux propriétés suivantes.

1. Antisymétrie sur les deux premiers indices :  $R_{\kappa\lambda\mu\nu} = -R_{\lambda\kappa\mu\nu}$
2. Antisymétrie sur les deux derniers indices :  $R_{\kappa\lambda\mu\nu} = -R_{\kappa\lambda\nu\mu}$
3. Symétrie sous permutation des groupes d'indices :  $R_{\kappa\lambda\mu\nu} = R_{\mu\nu\kappa\lambda}$
4. Symétrie du tenseur de Ricci :  $Ric_{\mu\nu} = Ric_{\nu\mu}$
5. Première identité de Bianchi :  $R^{\kappa}_{\lambda\mu\nu} + R^{\kappa}_{\nu\lambda\mu} + R^{\kappa}_{\mu\nu\lambda} = 0$
6. Seconde identité de Bianchi :  $(\nabla_{\kappa} R)^{\xi}_{\lambda\mu\nu} + (\nabla_{\nu} R)^{\xi}_{\lambda\kappa\mu} + (\nabla_{\mu} R)^{\xi}_{\lambda\nu\kappa} = 0$

#### Définition 1.5.4 *Scalaire de courbure*

Le *scalaire de courbure* est défini par

$$R = g^{\mu\nu} Ric_{\mu\nu}$$

Le scalaire de courbure est donc une contraction du tenseur de Ricci.

**Définition 1.5.5** *Tenseur d'Einstein*

Le *tenseur d'Einstein* est défini par

$$G_{\mu\nu} = Ric_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} R$$

À partir de la seconde identité de Bianchi, on peut obtenir l'**identité de Bianchi pour le tenseur d'Einstein**, qui traduit les équations de conservation de l'énergie et de l'impulsion en relativité générale. Cette identité est donnée par

$$\nabla_{\mu} G^{\mu\nu} = 0$$

avec  $G^{\mu\nu} = g^{\mu\alpha} g^{\nu\beta} G_{\alpha\beta}$ .

L'essentiel des outils nécessaires par la suite étant maintenant définis, nous nous arrêtons ici pour les rappels.

# Chapitre 2

## Les deux théories relativistes d'Albert Einstein

« *Puis me vint la "glücklichste Gedanke meines Leben",  
l'idée la plus heureuse de ma vie... »*

A. Einstein

Ce deuxième chapitre présente brièvement la théorie de la relativité restreinte et s'étend plus amplement sur la théorie de la relativité générale. L'ensemble des définitions reprises dans ce chapitre est essentiellement tiré des références [3], [4], [5], [6] et [7]. Nous commençons par introduire le sujet via la théorie de la relativité restreinte, puis nous présentons la théorie de la relativité générale en définissant le principe de covariance généralisée, le principe de Galilée, le principe d'équivalence faible et le principe d'équivalence fort. Nous en décrivons ensuite la cinématique et la dynamique. Nous terminons par la démonstration des deux tests classiques que sont la précession du périhélie de Mercure et la déviation de la lumière par le Soleil.

### 2.1 La théorie de la relativité restreinte

La théorie de la relativité restreinte, publiée par Albert Einstein en 1905, est de nature purement cinématique. Comme le dit Pais dans la référence [6],

« *La relativité restreinte oblige à abandonner les représentations mécaniques pour interpréter l'électromagnétisme. Elle renonce au seul système privilégié, le référentiel au repos absolu, et lui substitue un ensemble infini de systèmes de référence privilégiés, les repères inertiels. Par définition, deux quelconques de ces repères sont en mouvement uniforme l'un par rapport à l'autre. Le fait que ce mouvement soit uniforme donne le caractère restreint de la relativité.* »

En effet, au stade de la relativité restreinte, les référentiels inertiels sont ceux qui correspondent à une transformation linéaire des coordonnées, donnée par le groupe de Poincaré. Puisqu'en relativité restreinte l'espace-temps est plat, considérons l'espace de Minkowski  $\mathbb{R}^{3,1}$  et sa métrique associée  $\eta_{\mu\nu}$  telle que

$$ds^2 = -c^2 dt^2 + dl^2 \quad (2.1)$$

Dans l'espace de Minkowski  $\mathbb{R}^{3,1}$  qui est un espace vectoriel, les transformations orthogonales préservent la métrique (et donc l'élément de ligne donné par l'équation (2.1))

sous changement de coordonnées entre deux cartes locales décrites par les coordonnées  $\{x^\mu\}$  et  $\{x'^\mu\}$ , autrement dit  $ds^2 = ds'^2$ . Ce sont ces transformations orthogonales de l'espace  $\mathbb{R}^{3,1}$  qui caractérisent le groupe de Poincaré. Celles-ci sont données par

- des **translations** et des **rotations spatiales** telles que  $dl^2 = dl'^2$  ;
- des **translations temporelles** telles que  $dt^2 = dt'^2$  ;
- des **transformations de Lorentz pures** telles que  $-c^2 dt^2 + dl^2 = -c^2 dt'^2 + dl'^2$ .

Comme dit précédemment, ces transformations définissent un changement de carte linéaire et peuvent être réécrites

$$x'^\mu = \Lambda^\mu_\nu x^\nu + a^\mu$$

où  $a^\mu$  est un terme désignant les translations. De plus, le groupe de Lorentz (cf. référence [8]), fréquemment usité en relativité restreinte, est un sous-groupe du groupe de Poincaré comprenant les rotations spatiales et les transformations de Lorentz pures. Celui-ci peut être tout simplement défini par

$$x'^\mu = \Lambda^\mu_\nu x^\nu \iff \begin{pmatrix} ct' \\ x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma & -\gamma\beta & 0 & 0 \\ -\gamma\beta & \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} ct \\ x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

avec  $\beta = \frac{v}{c}$  où  $v$  désigne une vitesse,  $c$  est la vitesse de la lumière et  $\gamma$  est le **facteur de Lorentz** tel que

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} = (1 - \beta^2)^{-\frac{1}{2}} \quad (2.2)$$

Il est également à noter qu'en relativité restreinte, aucun objet ne peut avoir une vitesse supérieure à celle de la lumière.

## 2.2 La théorie de la relativité générale

La théorie de la relativité générale fut produite par Albert Einstein en 1915, dix ans après la théorie de la relativité restreinte. Pour l'époque, la relativité générale dévoilait une nouvelle cinématique ainsi qu'une nouvelle dynamique, au contraire de la relativité restreinte qui, comme nous l'avons déjà dit à la section précédente, était de nature purement cinématique.

Dans un premier temps, Einstein a tant bien que mal tenté d'inclure la gravitation à la théorie de la relativité restreinte, mais sans succès. C'est cela qui l'a mené, dans un second temps, à créer la théorie de la relativité générale : d'une inclusion dans la théorie de la relativité restreinte, on est passé à une extension de cette théorie. La théorie de la relativité générale a donc été construite de façon à ce que la relativité restreinte en soit un cas particulier : il s'agit d'une généralisation qui étend l'invariance par rapport à des systèmes de coordonnées en mouvement uniforme à l'invariance par rapport à des systèmes de coordonnées en mouvement quelconque. Dit autrement, il s'agit du passage des transformations de coordonnées linéaires aux transformations de coordonnées difféomorphes générales.

En relativité générale, l'espace-temps est courbe. Celui-ci est ainsi identifié à une variété différentiable de dimension 4 dont l'espace tangent est celui de Minkowski. Par conséquent en relativité générale, localement seulement, l'espace-temps est plat. Le théorème 2.2.1, issu de la référence [3], donne une condition nécessaire et suffisante permettant de déterminer si l'espace-temps est plat ou non.

**Théorème 2.2.1**

*L'espace-temps est plat si et seulement si le tenseur de Riemann s'annule partout, c'est-à-dire*

$$R^{\kappa}{}_{\lambda\mu\nu} = 0,$$

*auquel cas il est toujours possible de trouver un système de coordonnées global dans lequel la métrique prend en tous points sa forme fondamentale  $g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu}$ . Réciproquement, s'il est possible de trouver un tel système de coordonnées, alors l'espace-temps est plat. Lorsque l'espace-temps n'est pas plat, en revanche, un tel système de coordonnées n'existe pas, et réciproquement.*

De plus, la théorie de la relativité générale satisfait au principe de covariance, au principe d'équivalence faible et au principe d'équivalence fort. Elle prédit la précession du périhélie de Mercure et prédit également la déviation de la lumière par le Soleil. Préalablement à la démonstration de ces deux prédictions, appelées également tests classiques de la relativité générale, nous donnons quelques précisions sur les trois principes que nous venons de citer.

### 2.2.1 Le principe de covariance généralisée

Il était primordial pour Einstein que le choix du système de coordonnées dans lequel on travaille puisse être complètement arbitraire. Cela l'a mené à exiger la **covariance générale**, ou **principe de covariance généralisée**, ou encore **principe de relativité**, qui n'est autre qu'une généralisation du principe de relativité de Galilée. Le principe de relativité de Galilée stipule que « *Toutes les lois de la mécanique sont identiques dans tous les référentiels galiléens* » (cf. référence [4]). Par définition, un référentiel galiléen est un référentiel dans lequel est vérifiée la première loi de Newton, à savoir

$$\sum \vec{F} = \vec{0}$$

Autrement dit, tout corps sur lequel la résultante des forces est nulle reste dans son état de mouvement uniforme et possède par conséquent une vitesse constante. Il est possible de passer d'un référentiel galiléen à un autre via le groupe de Galilée, défini par les transformations suivantes.

$$\begin{cases} t' &= t \\ \vec{x}' &= \vec{x} - \vec{v}t \end{cases}$$

Ainsi, par le principe de relativité de Galilée,

$$\sum \vec{F} = \sum \vec{F}'$$

Le principe de covariance généralisée découle du principe de relativité de Galilée et s'énonce comme suit : « *Toutes les lois de la physique sont identiques dans tous les référentiels* » (cf. référence [4]). Or, comme nous l'avons déjà dit au Chapitre 1, l'utilisation d'équations tensorielles sous difféomorphismes garantit automatiquement la covariance générale. Ceci illustre bien le passage des transformations de coordonnées linéaires (comme en relativité restreinte avec le groupe de Poincaré) aux transformations de coordonnées difféomorphes générales. L'usage de la géométrie différentielle s'impose alors naturellement pour la relativité générale et son principe de covariance généralisée.

### 2.2.2 Les principes d'équivalence

On distingue trois principes d'équivalence : le principe d'équivalence de Galilée, le principe d'équivalence d'Einstein (noté parfois PEE) et le principe d'équivalence fort (noté parfois PEF). Ces trois principes sont liés entre eux, comme nous allons le voir à présent.

- **Le principe d'équivalence de Galilée**

Le **principe d'équivalence de Galilée**, ou encore l'**universalité de la chute libre**, stipule que « *Tous les corps soumis à un même champ gravitationnel subissent la même accélération, quelle que soit leur masse* » (cf. références [3] et [4]). Ainsi, les masses inertielle et gravitationnelle coïncident. Notons que ce principe ne s'applique qu'à des particules tests.

- **Le principe d'équivalence d'Einstein**

Le **principe d'équivalence d'Einstein**, ou **principe d'équivalence faible**, est une extension du principe d'équivalence de Galilée. Ce principe, qui s'applique à toute forme d'énergie, stipule que « *Il est impossible, localement, de distinguer un champ gravitationnel réel d'un champ d'accélération* » (cf. référence [3]). Autrement dit, comme l'énonce Hees dans la référence [4],

*« Localement, les effets d'un champ gravitationnel sur une expérience n'utilisant pas la gravitation sont identiques aux effets d'une accélération correspondante du référentiel de l'observateur. »*

Le principe d'équivalence d'Einstein se mathématise par une variété riemannienne (d'où le caractère local du PEE) et l'existence d'une métrique localement diagonalisable en une métrique minkowskienne. C'est l'existence de cette métrique localement diagonalisable qui annule l'effet de la gravitation, de sorte que les référentiels inertiels sont ici les référentiels en chute libre. Lorsque l'on passe dans ce référentiel en chute libre, on passe en réalité dans l'espace de représentation local (au sens où nous l'avons défini au Chapitre 1) qui est l'espace-temps de Minkowski. Le principe d'équivalence d'Einstein peut donc être vu comme une théorie métrique.

Notons que le principe d'équivalence d'Einstein amène à un des arguments forts en faveur d'un espace-temps courbe. Cet argument est le redshift gravitationnel, ou décalage vers le rouge : la lumière est décalée vers le rouge lorsqu'elle monte dans un champ gravitationnel (autrement dit, les photons qui montent dans un champ gravitationnel ont une fréquence qui diminue). Par conséquent, la métrique doit dépendre du point considéré, puisque l'effet du redshift gravitationnel au premier ordre est décrit par la métrique suivante (qui est la limite

newtonienne de la métrique de Schwarzschild), dépendant de la masse  $M$  d'un corps et de la distance  $r$  entre deux corps dans l'espace-temps.

$$ds^2 = g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu = - \left( 1 - \frac{2GM}{rc^2} \right) c^2 dt^2 + d\vec{x}^2$$

Cette métrique ne peut donc être réduite en tout point par une transformation globale à celle de Minkowski. Ainsi, l'espace-temps n'est pas plat mais est courbé par le contenu en matière (cf. référence [3]).

• **Le principe d'équivalence fort**

Le **principe d'équivalence fort** est simplement une extension du principe d'équivalence d'Einstein aux cas où l'on considère des expériences gravitationnelles.

Une des difficultés rencontrée est la mathématisation du principe d'équivalence fort, qui est loin d'être triviale. Dans le cas de la relativité générale, celui-ci est lié à l'action d'Einstein-Hilbert (notée  $S_{EH}$ ), définie comme suit.

$$S_{EH} = \frac{c^4}{16\pi G} \int_V R \sqrt{-g} d^4x$$

où  $V$  est une variété,  $R$  est le scalaire de courbure et  $g$  est le déterminant de la métrique  $g_{\mu\nu}$ . La section 2.2.4 décrivant la dynamique de la relativité générale montre qu'il est possible d'obtenir les équations d'Einstein en imposant la stationnarité de l'action  $S_{EH}$  (c'est-à-dire  $\delta S_{EH} = 0$ ) sous variation des champs.

Le principe d'équivalence fort implique le principe d'équivalence d'Einstein (ce qui veut dire que si l'on a l'action d'Einstein-Hilbert, alors on a une théorie métrique), mais la réciproque de cette implication est fautive. Le fait de ne pas avoir l'équivalence entre ces deux principes peut parfois compliquer le problème auquel nous sommes confrontés. De plus, le principe d'équivalence fort implique le principe de covariance. La réciproque de cette implication est également fautive.

### 2.2.3 Cinématique de la théorie de la relativité générale

Dans la théorie de Newton, la trajectoire d'un corps dans l'espace-temps est paramétrée par le temps  $t$ . En relativité générale, cette trajectoire (appelée ligne d'Univers) est paramétrée par le temps propre<sup>1</sup>  $\tau$  du corps (du fait de la dilatation du temps ; effectivement,  $dt = \gamma d\tau$  où  $\gamma$  est le facteur de Lorentz). L'avantage du temps propre est qu'il est invariant sous les transformations de Lorentz. En effet,

---

1. Par définition, le temps propre est le temps lu sur une horloge dite fixe dans un référentiel, ou, dit autrement, il s'agit de la durée entre deux évènements se produisant au même point d'espace dans le référentiel (cf. référence [3]).

$$\begin{aligned}
 ds^2 &= -c^2 dt^2 + d\vec{x}^2 \\
 &= -c^2 dt^2 \left[ 1 - \left( \frac{1}{c} \frac{d\vec{x}}{dt} \right)^2 \right] \\
 &= -c^2 dt^2 \left[ 1 - \left( \frac{v}{c} \right)^2 \right] \\
 &= -c^2 dt^2 (1 - \beta^2) \\
 &\stackrel{(2.2)}{=} -\frac{c^2 dt^2}{\gamma^2} \\
 &= -c^2 d\tau^2
 \end{aligned}$$

De plus, on travaille avec des quadri-vecteurs : il s'agit de vecteurs à quatre composantes. On peut ainsi définir une quadri-vitesse, une quadri-accélération et une quadri-impulsion.

- **Quadri-vitesse**

La quadri-vitesse  $U^\mu$  est définie par

$$U^\mu = \frac{dx^\mu}{d\tau} = \left( \frac{c dt}{d\tau}, \frac{dx^i}{d\tau} \right) = \left( \gamma c, \gamma \frac{dx^i}{dt} \right) = (\gamma c, \gamma \vec{v}) = (\gamma c, \gamma \vec{\beta} c) \quad (2.3)$$

où  $i = 2, 3, 4$  et  $\vec{\beta}$  est ici un vecteur à trois composantes.

- **Quadri-accélération**

La quadri-accélération  $A^\mu$  est définie par

$$A^\mu = \frac{dU^\mu}{d\tau}$$

et a pour propriété d'être orthogonale à la quadri-vitesse. En effet, la norme de la quadri-vitesse est une constante, comme le montre le développement suivant.

$$\begin{aligned}
 U^2 &= U^\mu U_\mu \\
 &= \eta_{\mu\nu} U^\mu U^\nu \\
 &= -(U^1)^2 + \sum_{i=2}^4 (U^i)^2 \\
 &\stackrel{(2.3)}{=} -\gamma^2 c^2 + \gamma^2 \vec{\beta}^2 c^2 \\
 &= -\gamma^2 c^2 (1 - \vec{\beta}^2) \\
 &\stackrel{(2.2)}{=} -c^2
 \end{aligned} \quad (2.4)$$

Donc

$$\frac{d(U^\mu U_\mu)}{d\tau} = 2A^\mu U_\mu \stackrel{(2.4)}{=} 0 \implies A^\mu U_\mu = 0$$

ce qui signifie bel et bien que la quadri-accélération est orthogonale à la quadri-vitesse, puisque leur produit scalaire est nul.

• **Quadri-impulsion**

La quadri-impulsion  $P^\mu$  est définie par

$$P^\mu = mU^\mu \stackrel{(2.3)}{=} (\gamma mc, \gamma m \vec{\beta} c)$$

où  $m$  est la masse du corps,  $\vec{\beta}$  est un vecteur à trois composantes et  $\gamma m \vec{\beta} c = \gamma m \vec{v}$  est l'impulsion relativiste que nous notons  $\vec{p}$ .

La première composante de  $P^\mu$ , à savoir  $\gamma mc$ , a la dimension d'une énergie lorsqu'elle est multipliée à nouveau par la vitesse de la lumière  $c$ . On obtient ainsi

$$E = \gamma mc^2 \quad (2.5)$$

ou encore, lorsque le corps est au repos (c'est-à-dire lorsque  $\gamma = 1$ )

$$E = mc^2$$

qui n'est autre que la plus célèbre formule mathématique d'Einstein. Cependant, il existe une forme plus générale de cette équation. En effet,

$$P^\mu P_\mu = m^2 U^\mu U_\mu \stackrel{(2.4)}{=} -m^2 c^2 \quad (2.6)$$

et

$$P^\mu = (\gamma mc, \gamma m \vec{\beta} c) \stackrel{(2.5)}{=} \left( \frac{E}{c}, \vec{p} \right) \implies P^\mu P_\mu = \eta_{\mu\nu} P^\mu P^\nu = -\frac{E^2}{c^2} + \vec{p}^2 \quad (2.7)$$

Par conséquent, en combinant les équations (2.6) et (2.7), on trouve pour forme générale

$$-\frac{E^2}{c^2} + \vec{p}^2 = -m^2 c^2 \iff E^2 = m^2 c^4 + \vec{p}^2 c^2$$

Enfin, il est possible de généraliser la seconde loi de Newton de la façon suivante (en supposant que la masse  $m$  est constante).

$$\sum \vec{F}_N = m \vec{a} = m \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d\vec{p}}{dt} \implies \sum F^\mu = mA^\mu = m \frac{dU^\mu}{d\tau} = \frac{dP^\mu}{d\tau} \quad (2.8)$$

avec  $F^\mu$  une quadri-force de la forme

$$F^\mu = (\vec{F} \cdot \vec{\beta}, \vec{F}) \quad (2.9)$$

Afin de mettre ceci en relation avec la seconde loi de Newton, posons  $\vec{F} = \gamma \vec{F}_N$ . Nous obtenons

$$\frac{dP^\mu}{d\tau} = \left( \gamma \frac{d}{dt} \left( \frac{E}{c} \right), \gamma \frac{d\vec{p}}{dt} \right) \stackrel{(2.8) \text{ et } (2.9)}{=} (\vec{F} \cdot \vec{\beta}, \vec{F}) = (\gamma \vec{F}_N \cdot \vec{\beta}, \gamma \vec{F}_N)$$

En identifiant terme à terme, nous avons

$$\begin{cases} \gamma \frac{d}{dt} \left( \frac{E}{c} \right) = \gamma \vec{F}_N \cdot \vec{\beta} & \iff \frac{dE}{dt} = \vec{F}_N \cdot \vec{v} \\ \gamma \frac{d\vec{p}}{dt} = \gamma \vec{F}_N & \iff \frac{d\vec{p}}{dt} = \vec{F}_N \end{cases} \quad (2.10)$$

Nous remarquons que la première équation correspond à la puissance d'une force en théorie de Newton. La seconde équation, quant à elle, est semblable à la seconde loi de Newton, à un facteur  $\gamma$  près (puisqu'il convient de se rappeler qu'ici  $\vec{p} = \gamma m \vec{v}$ ). Notons finalement à titre indicatif que la formulation relativiste de la seconde loi de Newton donnée par l'équation (2.8) est covariante sous les transformations de Lorentz.

### 2.2.4 Dynamique de la théorie de la relativité générale

Les équations d'Einstein

$$Ric_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} R + \Lambda g_{\mu\nu} = \frac{8\pi G}{c^4} T_{\mu\nu}$$

déterminent l'évolution de la métrique lorentzienne  $g_{\mu\nu}$ , où  $Ric_{\mu\nu}$  est le tenseur de Ricci,  $R$  est le scalaire de courbure,  $G$  est la constante de Newton,  $\Lambda$  est la constante cosmologique et  $T_{\mu\nu}$  est le tenseur énergie-impulsion. Notons qu'en général, la constante cosmologique  $\Lambda$  est prise égale à zéro ; elle peut être considérée comme étant non nulle dans certains cas, mais nous ne nous attardons pas là-dessus car il s'agit d'un autre sujet. C'est pourquoi à partir de maintenant, nous imposons que  $\Lambda = 0$  et les équations d'Einstein s'écriront toujours comme suit dans le cadre de ce mémoire.

$$Ric_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} R = \frac{8\pi G}{c^4} T_{\mu\nu} \quad (2.11)$$

Considérons à présent le tenseur d'Einstein défini au Chapitre 1 par

$$G_{\mu\nu} = Ric_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} R$$

Les équations d'Einstein données par l'équation (2.11) peuvent alors être réécrites

$$G_{\mu\nu} = \frac{8\pi G}{c^4} T_{\mu\nu}$$

Le membre de gauche de ces équations vérifie les identités de Bianchi, autrement dit

$$\nabla_\nu G^{\mu\nu} = 0 \quad (2.12)$$

et ceci implique que

$$\nabla_\nu T^{\mu\nu} = 0$$

Cette dernière équation n'est autre que l'équation de conservation du tenseur énergie-impulsion. À titre indicatif, ce résultat peut être démontré grâce au théorème de Noether.

Notons également qu'en relativité générale, d'un point de vue géométrique, la connexion de Levi-Civita est d'application. Les coefficients de connexion  $\Gamma^\lambda_{\mu\nu}$  sont par conséquent symétriques sur les deux indices covariants et la torsion est nulle. Ceci implique également que les composantes de cette connexion sont réduites aux symboles de Christoffel. Les composantes du tenseur de Riemann sont données par l'équation (1.15).

Nous allons à présent montrer de deux manières différentes comment construire les équations d'Einstein : d'abord à partir de l'équation de Poisson et ensuite à partir du principe variationnel.

• **Construction des équations d'Einstein à partir de l'équation de Poisson**

Cette démonstration est tirée de la référence [3]. Elle consiste à montrer que la relativité générale se réduit à la théorie de Newton lorsque l'on pose  $k = \frac{8\pi G}{c^4}$  dans l'équation

$$G_{\mu\nu} = k T_{\mu\nu} \quad (2.13)$$

Soit l'équation de Poisson

$$\Delta\phi = 4\pi G\rho \quad (2.14)$$

et l'accélération

$$\vec{a} = -\vec{\nabla}\phi \quad (2.15)$$

Nous disposons des quatre hypothèses suivantes.

1. On considère que le corps central est décrit par un fluide parfait statique (cela signifie que la distribution de matière n'évolue pas dans le temps). Ainsi, toutes les dérivées partielles  $\partial_\mu$  telles que  $\mu = 1$  (autrement dit les dérivées partielles par rapport au temps  $t$ ) sont égales à zéro.
2. Puisque nous avons considéré un fluide parfait, par définition nous avons

$$T_{\mu\nu} = \text{diag}(\rho c^2, p, p, p)$$

où  $\rho$  et  $p$  sont respectivement la densité et la pression du fluide. On suppose également que  $\rho c^2 \gg p$ , de sorte que

$$T_{\mu\nu} = \text{diag}(\rho c^2, 0, 0, 0) \quad (2.16)$$

3. On suppose que l'on a un régime de champ gravitationnel faible, ce qui signifie que la métrique  $g_{\mu\nu}$  est telle que

$$g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu} + h_{\mu\nu} \quad (2.17)$$

où  $h_{\mu\nu}$  est une perturbation telle que  $h_{\mu\nu} \ll 1$  et  $\eta_{\mu\nu}$  est la métrique de Minkowski.

4. On suppose que les vitesses des particules suivant une géodésique sont petites devant la vitesse de la lumière  $c$ . On suppose également que  $\vec{\beta} \ll 1$  et donc  $\gamma \simeq 1$ . Ainsi, pour  $i = 2, 3, 4$ ,

$$U^1 \gg U^i \implies U^i \ll 1$$

Considérons d'abord l'équation des géodésiques et réécrivons-la en terme de quadri-vitesse.

$$\begin{aligned} \frac{d^2 x^\mu}{c^2 dt^2} + \Gamma^\mu_{\alpha\beta} \frac{dx^\alpha}{dt} \frac{dx^\beta}{dt} = 0 &\iff \frac{1}{\gamma} \frac{d^2 x^\mu}{c^2 d\tau^2} + \Gamma^\mu_{\alpha\beta} \left( \frac{1}{\gamma^2} \right) \frac{dx^\alpha}{d\tau} \frac{dx^\beta}{d\tau} = 0 \\ &\stackrel{\gamma \simeq 1}{\iff} \frac{d^2 x^\mu}{c^2 d\tau^2} + \Gamma^\mu_{\alpha\beta} U^\alpha U^\beta = 0 \\ &\stackrel{U^i \ll 1}{\iff} \frac{d^2 x^\mu}{c^2 d\tau^2} + \Gamma^\mu_{11} U^1 U^1 = 0 \end{aligned} \quad (2.18)$$

Observons à présent la connexion  $\Gamma^\mu_{\alpha\beta}$  de l'équation des géodésiques.

$$\Gamma^\mu_{\alpha\beta} \stackrel{\text{déf.}}{=} \frac{1}{2} g^{\mu\nu} (\partial_\beta g_{\alpha\nu} + \partial_\alpha g_{\beta\nu} - \partial_\nu g_{\alpha\beta})$$

avec

$$\begin{aligned}\partial_\sigma g_{\mu\nu} &\stackrel{(2.17)}{=} \partial_\sigma \eta_{\mu\nu} + \partial_\sigma h_{\mu\nu} \\ &= \partial_\sigma h_{\mu\nu} \quad (\text{car } \partial_\sigma \eta_{\mu\nu} = 0 \text{ puisque } \eta_{\mu\nu} = \text{diag}(-1, 1, 1, 1))\end{aligned}$$

Ainsi, la connexion peut être approximée par

$$\Gamma^\mu_{\alpha\beta} \simeq \frac{1}{2} \eta^{\mu\nu} (\partial_\beta h_{\alpha\nu} + \partial_\alpha h_{\beta\nu} - \partial_\nu h_{\alpha\beta})$$

et donc

$$\begin{aligned}\Gamma^\mu_{11} &\simeq \frac{1}{2} \eta^{\mu\nu} (\partial_1 h_{1\nu} + \partial_1 h_{1\nu} - \partial_\nu h_{11}) \\ &= -\frac{1}{2} \eta^{\mu\nu} \partial_\nu h_{11} \text{ par l'hypothèse n}^\circ 1 \\ &= -\frac{1}{2} \partial^\mu h_{11}\end{aligned}\tag{2.19}$$

Examinons à présent l'équation (2.18) pour chaque valeur de  $\mu$ .

▷ Pour  $\mu = 1$ ,

$$\begin{aligned}\frac{d^2 x^1}{c^2 d\tau^2} + \Gamma^1_{11} (U^1)^2 = 0 &\stackrel{(2.19)}{\iff} \frac{d^2 x^1}{c^2 d\tau^2} - \frac{1}{2} \partial^1 h_{11} (U^1)^2 = 0 \\ &\iff \frac{d^2 x^1}{c^2 d\tau^2} = 0 \text{ par l'hypothèse n}^\circ 1 \\ &\iff \frac{dx^1}{d\tau} = \text{constante} \\ &\iff \frac{dt}{d\tau} = \text{constante}\end{aligned}$$

Nous choisissons la constante égale à 1. Ainsi,  $dt = d\tau$  et l'on rejoint l'hypothèse 4 car

$$U^1 = \frac{dx^1}{d\tau} = \frac{dt}{d\tau} = 1$$

▷ Pour  $\mu = 2, 3, 4$ ,

$$\begin{aligned}\frac{d^2 x^\mu}{c^2 d\tau^2} + \Gamma^\mu_{11} (U^1)^2 = 0 &\stackrel{dt=d\tau \text{ et } U^1=1}{\iff} \frac{d^2 x^\mu}{c^2 dt^2} + \Gamma^\mu_{11} = 0 \\ &\iff \frac{d^2 x^\mu}{dt^2} + c^2 \Gamma^\mu_{11} = 0 \\ &\stackrel{(2.19)}{\iff} \frac{d^2 x^\mu}{dt^2} = \frac{c^2}{2} \partial^\mu h_{11} \\ &\iff \frac{d^2 \vec{x}}{dt^2} = \frac{c^2}{2} \vec{\nabla} h_{11}\end{aligned}\tag{2.20}$$

Or, le membre de gauche de l'équation (2.20) n'est autre que l'accélération  $\vec{a}$  et, par analogie, le membre de droite correspond au potentiel  $\phi$  de l'équation (2.15). Ainsi,

$$\phi = -\frac{c^2}{2}h_{11} \iff h_{11} = -\frac{2\phi}{c^2} \quad (2.21)$$

Considérons maintenant l'équation (2.13) et essayons de nous ramener à l'équation de Poisson afin de montrer que  $k = \frac{8\pi G}{c^4}$ .

$$\begin{aligned} G_{\mu\nu} = k T_{\mu\nu} &\iff Ric_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} R = k T_{\mu\nu} & (2.22) \\ \xrightarrow{\times g^{\mu\nu}} &\iff g^{\mu\nu} Ric_{\mu\nu} - \frac{1}{2} \underbrace{g^{\mu\nu} g_{\mu\nu}}_{=\delta^\mu_\mu=4} R = k g^{\mu\nu} T_{\mu\nu} \\ &\iff R - 2R = k T \\ &\iff R = -k T \end{aligned}$$

Reportons maintenant cette valeur de  $R$  dans l'équation (2.22). Nous trouvons

$$Ric_{\mu\nu} = \frac{1}{2} g_{\mu\nu}(-k T) + k T_{\mu\nu} \iff Ric_{\mu\nu} = k \left( T_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} T \right) \quad (2.23)$$

Or, puisque nous avons considéré un fluide parfait statique, nous savons par l'équation (2.16) que seule la composante  $T_{11}$  de  $T_{\mu\nu}$  est non nulle et vaut

$$T_{11} = \rho c^2 \quad (2.24)$$

Donc la trace  $T$  du tenseur énergie-impulsion vaut

$$T = g^{\mu\nu} T_{\mu\nu} = g^{11} T_{11} \stackrel{(2.17)}{=} (\eta^{11} + h^{11}) T_{11} \stackrel{h_{\mu\nu} \ll 1}{=} \eta^{11} T_{11} = -\rho c^2 \quad (2.25)$$

Il s'en suit que le membre de gauche de l'équation (2.23) est non nul pour la même composante et nous obtenons

$$Ric_{11} = k \left( T_{11} - \frac{1}{2} g_{11} T \right) \quad (2.26)$$

$$\stackrel{(2.24) \text{ et } (2.25)}{=} k \left( \rho c^2 - \frac{1}{2} g_{11} (-\rho c^2) \right)$$

$$\stackrel{(2.17) \text{ et } h_{\mu\nu} \ll 1}{=} k \left( \rho c^2 - \frac{1}{2} \rho c^2 \right)$$

$$= \frac{k}{2} \rho c^2 \quad (2.27)$$

Finalement,

$$Ric_{11} \stackrel{\text{déf.}}{=} R^\alpha_{1\alpha 1} = R^1_{111} + R^i_{i1}$$

pour  $i = 2, 3, 4$ . Le premier terme du membre de droite de cette équation est nul par antisymétrie du tenseur de Riemann. Le second terme vaut, quant à lui,

$$R^i{}_{i1} \stackrel{\text{d\'ef.}}{=} \partial_i \Gamma^i{}_{11} - \partial_1 \Gamma^i{}_{i1} + \Gamma^\sigma{}_{11} \Gamma^i{}_{i\sigma} - \Gamma^\sigma{}_{i1} \Gamma^i{}_{1\sigma}$$

Seul le premier terme de cette équation subsiste. En effet, le deuxième terme est nul puisque les dérivées partielles par rapport au temps sont nulles du fait que l'on a considéré un fluide parfait statique. Nous pouvons également négliger les deux derniers termes car ils sont de l'ordre de  $h^2$ . Il en résulte que

$$\begin{aligned} Ric_{11} &= R^i{}_{i1} \\ &= \partial_i \Gamma^i{}_{11} \\ &\stackrel{(2.19)}{=} \partial_i \left( -\frac{1}{2} \partial^i h_{11} \right) \\ &= -\frac{1}{2} (\partial_i \partial^i) h_{11} \\ &= -\frac{1}{2} \Delta h_{11} \\ &\stackrel{(2.21)}{=} \frac{\Delta \phi}{c^2} \end{aligned}$$

Ainsi,

$$\begin{aligned} \Delta \phi &= c^2 Ric_{11} \\ &\stackrel{(2.26)}{\iff} \Delta \phi = \frac{k}{2} \rho c^4 \\ &\stackrel{(2.14)}{\iff} \frac{k}{2} \rho c^4 = 4\pi G \rho \\ &\iff k = \frac{8\pi G}{c^4} \end{aligned}$$

Nous retrouvons donc finalement les équations d'Einstein

$$G_{\mu\nu} = k T_{\mu\nu} \iff G_{\mu\nu} = \frac{8\pi G}{c^4} T_{\mu\nu}$$

• **Construction des équations d'Einstein à partir du principe variationnel**

Cette démonstration est tirée des références [8] et [9]. Nous décrivons d'abord le principe de la démonstration formellement, nous l'écrivons ensuite sous sa forme covariante et enfin nous montrons que les équations d'Einstein sont les équations d'Euler-Lagrange résultant du principe variationnel avec l'action d'Einstein-Hilbert.

**Description formelle de la démonstration**

Considérons  $J[y]$ , une fonctionnelle de  $y(x) : [x_0, x_1] \rightarrow \mathbb{R}$ . Cette fonctionnelle est définie par

$$J[y(x)] = \int_{x_0}^{x_1} f \left( x, y(x), \frac{dy(x)}{dx} \right) dx \tag{2.28}$$

avec  $f$ , une fonction donnée. La fonction  $y(x)$  est inconnue, sauf aux bornes de son domaine de définition. Dès lors nous posons

$$y(x_0) = y_0 \text{ et } y(x_1) = y_1$$

Les principes variationnels consistent en fait à déterminer la fonction  $y(x)$  telle que la fonctionnelle  $J[y]$  soit minimale ou, du moins, stationnaire (autrement dit,  $\delta J[y] = 0$  où  $\delta$  est la dérivée variationnelle, déjà brièvement rencontrée à la section 1.5.4 du Chapitre 1). Soit  $y_{\text{sol}}(x)$ , la solution du problème variationnel. Supposons que cette solution soit perturbée par une perturbation  $\delta y(x)$  telle que

$$\delta y(x_0) = \delta y(x_1) = 0$$

La fonctionnelle  $J[y]$  sera stationnaire sous variations infinitésimales de la forme

$$y_{\text{sol}}(x) + \delta y(x)$$

Ceci a pour effet de faire varier l'intégrale donnée par l'équation (2.28), de sorte que  $J[y] \rightsquigarrow J[y] + \delta J[y]$ , où le terme  $\delta J[y]$  est nul autour de la solution  $y_{\text{sol}}(x)$  par stationnarité.

La FIGURE 2.1 schématise le problème variationnel. La courbe continue représente la solution  $y_{\text{sol}}(x)$  tandis que la courbe discontinue représente la solution perturbée  $y_{\text{sol}}(x) + \delta y(x)$ .

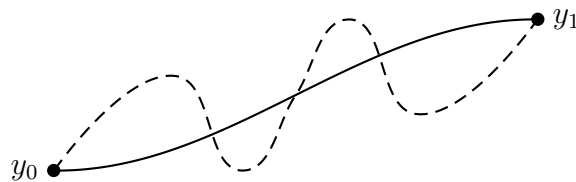


FIGURE 2.1 – Schématisation du problème variationnel décrit de manière formelle

Posons maintenant, pour  $\epsilon \ll 1$ ,

$$\delta y(x) = \epsilon \eta(x) \tag{2.29}$$

satisfaisant aux conditions

$$\eta(x_0) = \eta(x_1) = 0 \quad (2.30)$$

et tel que  $\eta(x)$  soit différentiable pour que l'on puisse calculer  $\frac{dy(x)}{dx}$ .

Nous remplaçons alors  $y(x)$  par  $y(x) + \delta y(x) \stackrel{(2.29)}{=} y(x) + \epsilon \eta(x)$  dans l'équation (2.28), de sorte que

$$\begin{aligned} J[y(x)] &= \int_{x_0}^{x_1} f \left( x, y(x), \frac{dy(x)}{dx} \right) dx \\ y(x) \leftrightarrow y(x) + \epsilon \eta(x) \quad J[y(x) + \epsilon \eta(x)] &= \int_{x_0}^{x_1} f \left( x, y(x) + \epsilon \eta(x), \frac{d(y(x) + \epsilon \eta(x))}{dx} \right) dx \\ \iff J[y(x) + \epsilon \eta(x)] &= \int_{x_0}^{x_1} f(x, y(x) + \epsilon \eta(x), y'(x) + \epsilon \eta'(x)) dx \end{aligned}$$

Il s'en suit que ce résultat devient fonction de  $\epsilon$  si  $y(x)$  et  $\eta(x)$  sont fixées telles que

$$\left. \frac{dJ[y(x)]}{d\epsilon} \right|_{\epsilon=0} = 0$$

pour  $y(x) = y_{\text{sol}}(x)$ , autrement dit, si  $J[y(x)]$  est stationnaire.

Ainsi,

$$\begin{aligned} \frac{dJ[y(x)]}{d\epsilon} &= \frac{d}{d\epsilon} \int_{x_0}^{x_1} f(x, y(x) + \epsilon \eta(x), y'(x) + \epsilon \eta'(x)) dx \\ &= \int_{x_0}^{x_1} \frac{d}{d\epsilon} f(x, y(x) + \epsilon \eta(x), y'(x) + \epsilon \eta'(x)) dx \\ &= \int_{x_0}^{x_1} \left( \frac{\partial f}{\partial y} \frac{d(y(x) + \epsilon \eta(x))}{d\epsilon} + \frac{\partial f}{\partial y'} \frac{d(y'(x) + \epsilon \eta'(x))}{d\epsilon} \right) dx \\ &= \int_{x_0}^{x_1} \left( \frac{\partial f}{\partial y} \eta(x) + \frac{\partial f}{\partial y'} \eta'(x) \right) dx \\ &= \int_{x_0}^{x_1} \frac{\partial f}{\partial y} \eta(x) dx + \int_{x_0}^{x_1} \frac{\partial f}{\partial y'} \eta'(x) dx \end{aligned} \quad (2.31)$$

Intégrons par parties la seconde intégrale du membre de droite de l'équation (2.31). Posons dès lors

$$\begin{cases} u = \frac{\partial f}{\partial y'} & \rightarrow & u' = \frac{d}{dx} \left( \frac{\partial f}{\partial y'} \right) \\ v' = \eta'(x) & \rightarrow & v = \eta(x) \end{cases}$$

Nous obtenons ainsi

$$\frac{dJ[y(x)]}{d\epsilon} = \int_{x_0}^{x_1} \frac{\partial f}{\partial y} \eta(x) dx + \left[ \frac{\partial f}{\partial y'} \eta(x) \right]_{x_0}^{x_1} - \int_{x_0}^{x_1} \frac{d}{dx} \left( \frac{\partial f}{\partial y'} \right) \eta(x) dx$$

Nous remarquons que le deuxième terme est nul en raison des conditions données par l'équation (2.30) et donc

$$\frac{dJ[y(x)]}{d\epsilon} = \int_{x_0}^{x_1} \left[ \frac{\partial f}{\partial y} - \frac{d}{dx} \left( \frac{\partial f}{\partial y'} \right) \right] \eta(x) dx$$

Or,

$$\frac{\partial f}{\partial y} - \frac{d}{dx} \left( \frac{\partial f}{\partial y'} \right) = 0$$

puisque'il s'agit de l'équation d'Euler-Lagrange, qui est une condition suffisante de stationnarité de la fonctionnelle  $J[y]$ . Par conséquent,

$$\frac{dJ[y(x)]}{d\epsilon} = 0$$

pour tout  $\eta(x)$  associé aux conditions données par l'équation (2.30) et  $y(x) = y_{\text{sol}}(x)$ .

### Description de la démonstration sous forme covariante

Afin d'obtenir le principe variationnel sous forme covariante, il suffit de poser

$$\begin{cases} y(t) \rightsquigarrow \phi(x^\mu) \text{ (champ)} \\ \dot{y}(t) \rightsquigarrow \partial_\nu \phi(x^\mu) \end{cases}$$

de sorte que la fonctionnelle  $J[y]$  soit assimilée à l'intégrale  $S$  suivante.

$$S = \int_{t_0}^{t_1} L dt \rightsquigarrow S = \int_{\Omega} \mathcal{L}(\phi, \partial_\nu \phi) dV_{\Omega} \quad (2.32)$$

où  $\mathcal{L}$  est une densité lagrangienne et  $dV_{\Omega}$  est une forme de volume définie par

$$dV_{\Omega} = \sqrt{-g} d^4x \quad (2.33)$$

avec  $g$ , le déterminant de la métrique lorentzienne  $g_{\mu\nu}$ .

L'intégrale  $S$  sera stationnaire sous variations infinitésimales des champs de la forme

$$\bar{\phi}(x^\mu) = \phi(x^\mu) + \delta \phi(x^\mu) \quad (2.34)$$

avec  $\delta \phi(x^\mu) = 0$  et  $\phi(x^\mu)$  fixé sur la frontière  $\partial\Omega$  du volume. De plus,

$$\partial_\nu \bar{\phi}(x^\mu) = \partial_\nu \phi(x^\mu) + \partial_\nu (\delta \phi(x^\mu)) \quad (2.35)$$

Remarquons que la dérivée variationnelle  $\delta$  commute avec la dérivée partielle  $\partial_\nu$ . En effet,

$$\partial_\nu (\delta \phi(x^\mu)) \stackrel{(2.34)}{=} \partial_\nu (\bar{\phi}(x^\mu) - \phi(x^\mu)) = \partial_\nu \bar{\phi}(x^\mu) - \partial_\nu \phi(x^\mu) = \delta (\partial_\nu \phi(x^\mu)) \quad (2.36)$$

La FIGURE 2.2 schématise le problème variationnel sous forme covariante. La courbe continue représente le champ  $\phi(x^\mu)$  tandis que la courbe discontinue représente le champ perturbé  $\phi(x^\mu) + \delta\phi(x^\mu)$  dans le volume  $\Omega$ .

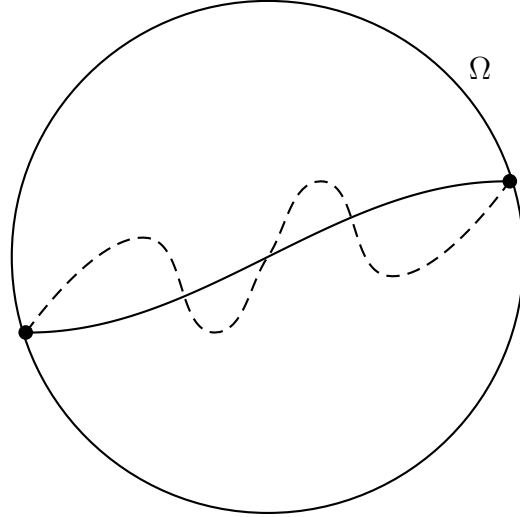


FIGURE 2.2 – Schématisation du problème variationnel décrit sous forme covariante

Comme précédemment, les équations (2.34) et (2.35) amènent à une variation de l'intégrale donnée par l'équation (2.32), de sorte que  $S \rightsquigarrow S + \delta S$  avec

$$\begin{aligned}
 \delta S &= \delta \int_{\Omega} \mathcal{L}(\phi, \partial_{\nu} \phi) dV_{\Omega} \\
 &\stackrel{(2.33)}{=} \int_{\Omega} \delta(\sqrt{-g} \mathcal{L}(\phi, \partial_{\nu} \phi)) d^4x \\
 &= \int_{\Omega} \left[ \frac{\partial(\sqrt{-g} \mathcal{L})}{\partial \phi} \delta \phi + \frac{\partial(\sqrt{-g} \mathcal{L})}{\partial(\partial_{\nu} \phi)} \delta(\partial_{\nu} \phi) \right] d^4x \\
 &\stackrel{(2.36)}{=} \int_{\Omega} \left[ \frac{\partial(\sqrt{-g} \mathcal{L})}{\partial \phi} \delta \phi + \frac{\partial(\sqrt{-g} \mathcal{L})}{\partial(\partial_{\nu} \phi)} \partial_{\nu}(\delta \phi) \right] d^4x \\
 &= \int_{\Omega} \frac{\partial(\sqrt{-g} \mathcal{L})}{\partial \phi} \delta \phi d^4x + \int_{\Omega} \frac{\partial(\sqrt{-g} \mathcal{L})}{\partial(\partial_{\nu} \phi)} \partial_{\nu}(\delta \phi) d^4x \tag{2.37}
 \end{aligned}$$

En mettant en évidence la dérivée partielle  $\partial_{\nu}$ , la seconde intégrale du membre de droite de l'équation (2.37) devient

$$\int_{\Omega} \frac{\partial(\sqrt{-g} \mathcal{L})}{\partial(\partial_{\nu} \phi)} \partial_{\nu}(\delta \phi) d^4x = \int_{\Omega} \partial_{\nu} \left( \frac{\partial(\sqrt{-g} \mathcal{L})}{\partial(\partial_{\nu} \phi)} \delta \phi \right) d^4x - \int_{\Omega} \partial_{\nu} \left( \frac{\partial(\sqrt{-g} \mathcal{L})}{\partial(\partial_{\nu} \phi)} \right) \delta \phi d^4x$$

Or, par le théorème d'Ostrogradsky<sup>2</sup>,

$$\int_{\Omega} \partial_{\nu} \left( \frac{\partial(\sqrt{-g} \mathcal{L})}{\partial(\partial_{\nu} \phi)} \delta \phi \right) d^4x = \int_{\partial \Omega} n_{\mu} \left( \frac{\partial(\sqrt{-g} \mathcal{L})}{\partial(\partial_{\nu} \phi)} \delta \phi \right) d^3x$$

où  $n_{\mu}$  est le vecteur unité. Cette intégrale est nulle puisque  $\delta \phi(x^{\mu}) = 0$  sur la frontière  $\partial \Omega$  du volume. Par conséquent,

---

2. Le théorème d'Ostrogradsky stipule que  $\int_{\Omega} \vec{\nabla} \cdot \vec{\psi} dV_{\Omega} = \int_{\partial \Omega} \vec{\psi} \cdot d\vec{S}$ , où  $\Omega$  est le volume sur lequel on travaille,  $\partial \Omega$  est sa frontière,  $\vec{\psi}$  est un champ vectoriel et  $d\vec{S}$  est le vecteur normal à la surface du volume.

$$\int_{\Omega} \frac{\partial(\sqrt{-g} \mathcal{L})}{\partial(\partial_{\nu} \phi)} \partial_{\nu} (\delta \phi) d^4x = - \int_{\Omega} \partial_{\nu} \left( \frac{\partial(\sqrt{-g} \mathcal{L})}{\partial(\partial_{\nu} \phi)} \right) \delta \phi d^4x$$

et donc

$$\begin{aligned} \delta S &= \int_{\Omega} \frac{\partial(\sqrt{-g} \mathcal{L})}{\partial \phi} \delta \phi d^4x - \int_{\Omega} \partial_{\nu} \left( \frac{\partial(\sqrt{-g} \mathcal{L})}{\partial(\partial_{\nu} \phi)} \right) \delta \phi d^4x \\ &= \int_{\Omega} \left[ \frac{\partial(\sqrt{-g} \mathcal{L})}{\partial \phi} - \partial_{\nu} \left( \frac{\partial(\sqrt{-g} \mathcal{L})}{\partial(\partial_{\nu} \phi)} \right) \right] \delta \phi d^4x \end{aligned}$$

Or,

$$\frac{\partial(\sqrt{-g} \mathcal{L})}{\partial \phi} - \partial_{\nu} \left( \frac{\partial(\sqrt{-g} \mathcal{L})}{\partial(\partial_{\nu} \phi)} \right) = 0$$

puisqu'il s'agit de l'équation d'Euler-Lagrange. Il s'en suit que quelle que soit la perturbation  $\delta \phi(x^{\mu})$ ,

$$\delta S = 0$$

et donc l'intégrale  $S$  est stationnaire.

### Démonstration en tant que telle

Nous disposons à présent de tous les outils pour montrer que les équations d'Einstein sont les équations d'Euler-Lagrange résultant de la stationnarité de l'action d'Einstein-Hilbert.

Soit l'action d'Einstein-Hilbert

$$S_{EH} = \frac{c^4}{16\pi G} \int_V R \sqrt{-g} d^4x$$

où nous rappelons que  $R$  est le scalaire de courbure défini par

$$R = g_{\mu\nu} Ric^{\mu\nu} = g^{\mu\nu} Ric_{\mu\nu} = Ric^{\mu}_{\mu}$$

Les équations d'Einstein sont obtenues en imposant la stationnarité de l'action  $S_{EH}$ , autrement dit en imposant

$$\delta S_{EH} = 0$$

sous variations des champs de la forme (covariante et contravariante respectivement)

$$\bar{g}_{\mu\nu} = g_{\mu\nu} + \delta g_{\mu\nu} \quad \text{ou} \quad \bar{g}^{\mu\nu} = g^{\mu\nu} + \delta g^{\mu\nu}$$

avec  $\delta g_{\mu\nu} = \delta g^{\mu\nu} = 0$  sur la frontière  $\partial V$  du volume. De plus,

$$\partial_{\sigma} \bar{g}_{\mu\nu} = \partial_{\sigma} g_{\mu\nu} + \partial_{\sigma} (\delta g_{\mu\nu}) \quad \text{ou} \quad \partial_{\sigma} \bar{g}^{\mu\nu} = \partial_{\sigma} g^{\mu\nu} + \partial_{\sigma} (\delta g^{\mu\nu}) \quad (2.38)$$

avec  $\partial_{\sigma} (\delta g_{\mu\nu}) = \partial_{\sigma} (\delta g^{\mu\nu}) = \delta (\partial_{\sigma} g_{\mu\nu}) = \delta (\partial_{\sigma} g^{\mu\nu}) = 0$  sur la frontière  $\partial V$  du volume.

On a

$$\begin{aligned}
 \delta S_{EH} &= \frac{c^4}{16\pi G} \delta \int_V R \sqrt{-g} d^4x \\
 &= \frac{1}{2k} \int_V \delta (g^{\mu\nu} Ric_{\mu\nu} \sqrt{-g}) d^4x \text{ avec } k = \frac{8\pi G}{c^4} \\
 &= \frac{1}{2k} \int_V [(\delta g^{\mu\nu}) Ric_{\mu\nu} \sqrt{-g} + g^{\mu\nu} (\delta Ric_{\mu\nu}) \sqrt{-g} + g^{\mu\nu} Ric_{\mu\nu} \delta(\sqrt{-g})] d^4x \\
 &\stackrel{\text{not.}}{=} \frac{1}{2k} \int_V (\delta S_1 + \delta S_2 + \delta S_3) d^4x
 \end{aligned}$$

Il s'agit maintenant de factoriser  $\delta g^{\mu\nu}$ . Dans le terme  $\delta S_1$ , le travail est déjà accompli puisque  $\delta g^{\mu\nu}$  y apparaît clairement. Examinons à présent le terme  $\delta S_2$ . Par définition,

$$Ric_{\mu\nu} \stackrel{(1.8)}{=} R^\gamma_{\mu\gamma\nu} \stackrel{(1.7)}{=} \partial_\gamma \Gamma^\gamma_{\mu\nu} - \partial_\nu \Gamma^\gamma_{\mu\gamma} + \Gamma^\eta_{\mu\nu} \Gamma^\gamma_{\gamma\eta} - \Gamma^\eta_{\mu\gamma} \Gamma^\gamma_{\nu\eta}$$

et

$$\delta Ric_{\mu\nu} = \delta (\partial_\gamma \Gamma^\gamma_{\mu\nu}) - \delta (\partial_\nu \Gamma^\gamma_{\mu\gamma}) + \delta (\Gamma^\eta_{\mu\nu} \Gamma^\gamma_{\gamma\eta}) - \delta (\Gamma^\eta_{\mu\gamma} \Gamma^\gamma_{\nu\eta})$$

avec les  $\delta \Gamma^\gamma_{\mu\nu}$  qui sont des différences de connexion telles que

$$\delta \Gamma^\gamma_{\mu\nu} = \bar{\Gamma}^\gamma_{\mu\nu} - \Gamma^\gamma_{\mu\nu}$$

Remarquons que les  $\delta \Gamma^\gamma_{\mu\nu}$  sont les composantes d'un tenseur, même si les  $\Gamma^\gamma_{\mu\nu}$  ne le sont pas. En effet,

$$\begin{aligned}
 \delta \bar{\Gamma}^\gamma_{\mu\nu} &= \bar{\bar{\Gamma}}^\gamma_{\mu\nu} - \bar{\Gamma}^\gamma_{\mu\nu} \\
 &\stackrel{(1.4)}{=} \frac{\partial x^\alpha}{\partial y^\mu} \frac{\partial x^\beta}{\partial y^\nu} \frac{\partial y^\gamma}{\partial x^\lambda} \bar{\Gamma}^\lambda_{\alpha\beta} + \frac{\partial^2 x^\lambda}{\partial y^\mu \partial y^\nu} \frac{\partial y^\gamma}{\partial x^\lambda} - \left( \frac{\partial x^\alpha}{\partial y^\mu} \frac{\partial x^\beta}{\partial y^\nu} \frac{\partial y^\gamma}{\partial x^\lambda} \Gamma^\lambda_{\alpha\beta} + \frac{\partial^2 x^\lambda}{\partial y^\mu \partial y^\nu} \frac{\partial y^\gamma}{\partial x^\lambda} \right) \\
 &= \frac{\partial x^\alpha}{\partial y^\mu} \frac{\partial x^\beta}{\partial y^\nu} \frac{\partial y^\gamma}{\partial x^\lambda} (\bar{\Gamma}^\lambda_{\alpha\beta} - \Gamma^\lambda_{\alpha\beta}) \\
 &= \frac{\partial x^\alpha}{\partial y^\mu} \frac{\partial x^\beta}{\partial y^\nu} \frac{\partial y^\gamma}{\partial x^\lambda} \delta \Gamma^\lambda_{\alpha\beta}
 \end{aligned}$$

Nous retrouvons la loi de transformation des tenseurs donnée par l'équation (1.3) et par conséquent, les  $\delta \Gamma^\gamma_{\mu\nu}$  sont bien les composantes d'un tenseur. Plaçons-nous donc dans un référentiel localement en chute libre, autrement dit dans le cas où  $\Gamma^\gamma_{\mu\nu} = 0$ . Dans ce référentiel,

$$\begin{aligned}
 \delta Ric_{\mu\nu} &= \delta (\partial_\gamma \Gamma^\gamma_{\mu\nu}) - \delta (\partial_\nu \Gamma^\gamma_{\mu\gamma}) + \delta (\Gamma^\eta_{\mu\nu} \Gamma^\gamma_{\gamma\eta}) - \delta (\Gamma^\eta_{\mu\gamma} \Gamma^\gamma_{\nu\eta}) \\
 &\stackrel{(2.36)}{=} \partial_\gamma (\delta \Gamma^\gamma_{\mu\nu}) - \partial_\nu (\delta \Gamma^\gamma_{\mu\gamma}) + (\delta \Gamma^\eta_{\mu\nu}) \Gamma^\gamma_{\gamma\eta} + \Gamma^\eta_{\mu\nu} (\delta \Gamma^\gamma_{\gamma\eta}) \\
 &\quad - (\delta \Gamma^\eta_{\mu\gamma}) \Gamma^\gamma_{\nu\eta} - \Gamma^\eta_{\mu\gamma} (\delta \Gamma^\gamma_{\nu\eta}) \\
 &= \partial_\gamma (\delta \Gamma^\gamma_{\mu\nu}) - \partial_\nu (\delta \Gamma^\gamma_{\mu\gamma})
 \end{aligned}$$

De plus, dans un tel référentiel, l'équation (1.5) donnant la dérivée covariante d'un champ tensoriel montre que la dérivée partielle et la dérivée covariante coïncident. Ainsi,

$$\begin{aligned}\delta Ric_{\mu\nu} &= \partial_\gamma (\delta \Gamma^\gamma_{\mu\nu}) - \partial_\nu (\delta \Gamma^\gamma_{\mu\gamma}) \\ &= \nabla_\gamma (\delta \Gamma^\gamma_{\mu\nu}) - \nabla_\nu (\delta \Gamma^\gamma_{\mu\gamma})\end{aligned}\quad (2.39)$$

Nous avons finalement pour le terme  $\delta S_2$

$$\begin{aligned}\delta S_2 &= \int_V g^{\mu\nu} (\delta Ric_{\mu\nu}) \sqrt{-g} d^4x \\ &\stackrel{(2.39)}{=} \int_V g^{\mu\nu} [\nabla_\gamma (\delta \Gamma^\gamma_{\mu\nu}) - \nabla_\nu (\delta \Gamma^\gamma_{\mu\gamma})] \sqrt{-g} d^4x\end{aligned}\quad (2.40)$$

$$= \int_V [\nabla_\gamma (g^{\mu\nu} (\delta \Gamma^\gamma_{\mu\nu})) - \nabla_\nu (g^{\mu\nu} (\delta \Gamma^\gamma_{\mu\gamma}))] \sqrt{-g} d^4x\quad (2.41)$$

$$= \int_V \nabla_\nu [g^{\mu\sigma} (\delta \Gamma^\nu_{\mu\sigma}) - g^{\mu\nu} (\delta \Gamma^\sigma_{\mu\sigma})] \sqrt{-g} d^4x\quad (2.42)$$

$$= \int_{\partial V} n_\mu [g^{\mu\sigma} (\delta \Gamma^\nu_{\mu\sigma}) - g^{\mu\nu} (\delta \Gamma^\sigma_{\mu\sigma})] \sqrt{-\gamma} d^3x\quad (2.43)$$

où  $\gamma$  est la métrique induite sur la frontière  $\partial V$ . D'une part, puisque la connexion de Levi-Civita est d'application ici, nous avons appliqué le fait que  $\nabla_\nu g^{\mu\nu} = 0$  pour passer de l'équation (2.40) à l'équation (2.41). D'autre part, pour passer de l'équation (2.41) à l'équation (2.42), nous avons renommé les indices de manière à pouvoir mettre en évidence la dérivée covariante. Enfin, pour passer de l'équation (2.42) à l'équation (2.43), nous avons appliqué le théorème d'Ostrogradsky.

De plus,

$$\begin{aligned}\delta \Gamma^\gamma_{\mu\nu} &\stackrel{\text{déf.}}{=} \frac{1}{2} \delta [g^{\gamma\sigma} (\partial_\mu g_{\nu\sigma} + \partial_\nu g_{\mu\sigma} - \partial_\sigma g_{\mu\nu})] \\ &= \frac{1}{2} (\delta g^{\gamma\sigma}) (\partial_\mu g_{\nu\sigma} + \partial_\nu g_{\mu\sigma} - \partial_\sigma g_{\mu\nu}) + \frac{1}{2} g^{\gamma\sigma} (\delta (\partial_\mu g_{\nu\sigma}) + \delta (\partial_\nu g_{\mu\sigma}) - \delta (\partial_\sigma g_{\mu\nu})) \\ &= 0\end{aligned}$$

car  $\delta g_{\mu\nu} = 0$  et  $\delta (\partial_\sigma g_{\mu\nu}) = 0$  sur la frontière  $\partial V$  du volume. Par conséquent,

$$\delta S_2 = 0$$

Examinons pour finir le terme  $\delta S_3$  en calculant  $\delta(\sqrt{-g})$ . Nous avons

$$\begin{aligned}\delta(\sqrt{-g}) &= -\frac{\delta g}{2\sqrt{-g}} \\ &= -\frac{\delta(\det(g_{\mu\nu}))}{2\sqrt{-g}}\end{aligned}$$

Il s'agit maintenant de voir ce que vaut  $\delta(\det(g_{\mu\nu}))$ . Si  $g_{\mu\nu}$  est de taille  $3 \times 3$ , alors

$$\begin{aligned} g &= \det(g_{\mu\nu}) \\ &= \begin{vmatrix} g_{11} & g_{12} & g_{13} \\ g_{21} & g_{22} & g_{23} \\ g_{31} & g_{32} & g_{33} \end{vmatrix} \\ &\stackrel{\div L_1}{=} g_{11}(g_{22}g_{33} - g_{32}g_{23}) - g_{12}(g_{21}g_{33} - g_{31}g_{23}) + g_{13}(g_{21}g_{32} - g_{31}g_{22}) \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} \delta g &= \delta [g_{11}(g_{22}g_{33} - g_{32}g_{23}) - g_{12}(g_{21}g_{33} - g_{31}g_{23}) + g_{13}(g_{21}g_{32} - g_{31}g_{22})] \\ &= \delta [g_{11}(g_{22}g_{33} - g_{32}g_{23})] - \delta [g_{12}(g_{21}g_{33} - g_{31}g_{23})] + \delta [g_{13}(g_{21}g_{32} - g_{31}g_{22})] \\ &= (\delta g_{11})(g_{22}g_{33} - g_{32}g_{23}) - (\delta g_{12})(g_{21}g_{33} - g_{31}g_{23}) + (\delta g_{13})(g_{21}g_{32} - g_{31}g_{22}) \\ &\quad + g_{11} \delta(g_{22}g_{33} - g_{32}g_{23}) - g_{12} \delta(g_{21}g_{33} - g_{31}g_{23}) + g_{13} \delta(g_{21}g_{32} - g_{31}g_{22}) \\ &= (\delta g_{11})(g_{22}g_{33} - g_{32}g_{23}) - (\delta g_{12})(g_{21}g_{33} - g_{31}g_{23}) + (\delta g_{13})(g_{21}g_{32} - g_{31}g_{22}) \\ &\quad + g_{11}[(\delta g_{22})g_{33} + g_{22}(\delta g_{33}) - (\delta g_{32})g_{23} - g_{32}(\delta g_{23})] \\ &\quad - g_{12}[(\delta g_{21})g_{33} + g_{21}(\delta g_{33}) - (\delta g_{31})g_{23} - g_{31}(\delta g_{23})] \\ &\quad + g_{13}[(\delta g_{21})g_{32} + g_{21}(\delta g_{32}) - (\delta g_{22})g_{31} - g_{22}(\delta g_{31})] \\ &= (\delta g_{11})(g_{22}g_{33} - g_{32}g_{23}) - (\delta g_{12})(g_{21}g_{33} - g_{31}g_{23}) + (\delta g_{13})(g_{21}g_{32} - g_{31}g_{22}) \\ &\quad - (\delta g_{21})(g_{12}g_{33} - g_{13}g_{32}) + (\delta g_{22})(g_{11}g_{33} - g_{13}g_{31}) - (\delta g_{23})(g_{11}g_{32} - g_{12}g_{31}) \\ &\quad + (\delta g_{31})(g_{12}g_{23} - g_{13}g_{22}) - (\delta g_{32})(g_{11}g_{23} - g_{13}g_{21}) + (\delta g_{33})(g_{11}g_{22} - g_{12}g_{21}) \end{aligned}$$

Plus généralement, nous pouvons écrire

$$\delta g = \sum_{\mu, \nu=1}^n \delta g_{\mu\nu} \cdot M_{\mu\nu}$$

où  $M_{\mu\nu}$  est le cofacteur de  $g_{\mu\nu}$ .

Or,

$$[g^{\mu\nu}]_{\rho\sigma} = [(g_{\mu\nu})^{-1}]_{\rho\sigma} \stackrel{\text{déf.}}{=} \frac{1}{g} M_{\rho\sigma} \iff M_{\rho\sigma} = g^{\rho\sigma} g \quad (2.44)$$

Donc

$$\begin{aligned} \delta g &= \sum_{\mu, \nu=1}^n \delta g_{\mu\nu} \cdot M_{\mu\nu} \\ &\stackrel{(2.44)}{=} (\delta g_{\mu\nu}) g^{\mu\nu} g \end{aligned} \quad (2.45)$$

où nous rappelons que l'on peut omettre le symbole de sommation grâce à la convention d'Einstein.

De plus,

$$\begin{aligned}
 g^{\mu\sigma} g_{\sigma\nu} = \delta_\nu^\mu &\iff \delta(g^{\mu\sigma} g_{\sigma\nu}) = \delta(\delta_\nu^\mu) \\
 &\iff (\delta g^{\mu\sigma}) g_{\sigma\nu} + g^{\mu\sigma} (\delta g_{\sigma\nu}) = 0 \\
 &\stackrel{\times g^{\nu\rho}}{\iff} g^{\nu\rho} [(\delta g^{\mu\sigma}) g_{\sigma\nu} + g^{\mu\sigma} (\delta g_{\sigma\nu})] = 0 \\
 &\iff (\delta g^{\mu\sigma}) (g^{\nu\rho} g_{\sigma\nu}) = -g^{\mu\sigma} g^{\nu\rho} (\delta g_{\sigma\nu}) \\
 &\iff (\delta g^{\mu\sigma}) \delta_\sigma^\rho = -g^{\mu\sigma} g^{\nu\rho} (\delta g_{\sigma\nu}) \\
 &\iff \delta g^{\mu\rho} = -g^{\mu\sigma} g^{\nu\rho} (\delta g_{\sigma\nu}) \\
 &\iff (\delta g_{\sigma\nu}) = -g_{\mu\sigma} g_{\nu\rho} (\delta g^{\mu\rho})
 \end{aligned} \tag{2.46}$$

Il s'en suit que

$$\begin{aligned}
 \delta(\sqrt{-g}) &= -\frac{\delta g}{2\sqrt{-g}} \\
 &\stackrel{(2.45)}{=} -\frac{(\delta g_{\mu\nu}) g^{\mu\nu} g}{2\sqrt{-g}} \\
 &\stackrel{(2.46)}{=} -\frac{(-g_{\sigma\mu} g_{\nu\rho} (\delta g^{\sigma\rho})) g^{\mu\nu} g}{2\sqrt{-g}} \\
 &= \frac{1}{2\sqrt{-g}} (g g_{\nu\rho} \delta_\sigma^\nu (\delta g^{\sigma\rho})) \\
 &= \frac{1}{2\sqrt{-g}} (g g_{\rho\nu} (\delta g^{\rho\nu})) \\
 &= -\frac{1}{2\sqrt{-g}} (-g g_{\rho\nu} (\delta g^{\rho\nu})) \\
 &= -\frac{\sqrt{-g}}{2} g_{\rho\nu} (\delta g^{\rho\nu})
 \end{aligned} \tag{2.47}$$

Par conséquent,

$$\begin{aligned}
 \delta S_3 &= \int_V g^{\mu\nu} Ric_{\mu\nu} \delta(\sqrt{-g}) d^4x \\
 &\stackrel{(2.47)}{=} - \int_V R \frac{\sqrt{-g}}{2} g_{\mu\nu} (\delta g^{\mu\nu}) d^4x
 \end{aligned}$$

Finalement, nous avons

$$\begin{aligned}
 \delta S_{EH} &= \frac{1}{2k} (\delta S_1 + \delta S_2 + \delta S_3) \\
 &= \frac{1}{2k} \int_V (\delta g^{\mu\nu}) Ric_{\mu\nu} \sqrt{-g} - R \frac{\sqrt{-g}}{2} g_{\mu\nu} (\delta g^{\mu\nu}) d^4x \\
 &= \frac{1}{2k} \int_V \sqrt{-g} (Ric_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} R) (\delta g^{\mu\nu}) d^4x
 \end{aligned} \tag{2.48}$$

pour  $\delta g^{\mu\nu}$  arbitraire.

En imposant la stationnarité de l'action  $S_{EH}$ , nous obtenons

$$\delta S_{EH} = 0 \iff Ric_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu} R = 0$$

Cette dernière équation n'est autre que l'équation d'Einstein dans le vide, autrement dit telle que  $T_{\mu\nu} = 0$ . Pour obtenir cette équation en présence de matière, c'est-à-dire lorsque  $T_{\mu\nu} \neq 0$ , il suffit d'ajouter à l'action d'Einstein-Hilbert une action liée à la matière (que nous notons  $S_{\text{mat}}$ ) de sorte que

$$S_{\text{tot}} = S_{EH} - S_{\text{mat}}$$

où  $S_{\text{tot}}$  dénote l'action totale. Notons que le signe moins a été choisi par commodité.

À nouveau, les équations d'Einstein sont obtenues en imposant la stationnarité de cette action, autrement dit en imposant

$$\delta S_{\text{tot}} = 0 \iff \delta S_{EH} = \delta S_{\text{mat}}$$

Nous savons déjà comment varie l'action  $S_{EH}$ , il nous reste donc à déterminer comment varie l'action  $S_{\text{mat}}$ . Celle-ci est définie par

$$S_{\text{mat}} = \int_V \sqrt{-g} \mathcal{L}_{\text{mat}} d^4x$$

où  $\mathcal{L}_{\text{mat}}$  est la densité lagrangienne de la matière.

Soit  $\delta S_{\text{mat}}$ , la variation de l'action  $S_{\text{mat}}$ , avec  $\delta$  qui a pour effet de faire varier par rapport à la métrique  $g_{\mu\nu}$ . La démarche étant similaire à celle effectuée dans la formulation covariante du problème variationnel, nous nous permettons d'omettre certains détails dans les calculs qui suivent.

$$\begin{aligned} \delta S_{\text{mat}} &= \int_V \delta(\sqrt{-g} \mathcal{L}_{\text{mat}}) d^4x \\ &= \int_V \left[ \frac{\partial(\sqrt{-g} \mathcal{L}_{\text{mat}})}{\partial g^{\mu\nu}} \delta g^{\mu\nu} + \frac{\partial(\sqrt{-g} \mathcal{L}_{\text{mat}})}{\partial(\partial_\rho g^{\mu\nu})} \delta(\partial_\rho g^{\mu\nu}) \right] d^4x \end{aligned}$$

En appliquant successivement  $\delta(\partial_\rho g^{\mu\nu}) = \partial_\rho(\delta g^{\mu\nu})$ , le théorème d'Ostrogradsky et le fait que  $\delta g^{\mu\nu} = 0$  sur la frontière  $\delta V$  du volume, nous obtenons

$$\delta S_{\text{mat}} = \int_V \left[ \frac{\partial(\sqrt{-g} \mathcal{L}_{\text{mat}})}{\partial g^{\mu\nu}} - \frac{\partial}{\partial x^\rho} \left( \frac{\partial(\sqrt{-g} \mathcal{L}_{\text{mat}})}{\partial(\partial_\rho g^{\mu\nu})} \right) \right] (\delta g^{\mu\nu}) d^4x \quad (2.49)$$

Enfin, par stationnarité, nous avons

$$\begin{aligned} &\delta S_{EH} = \delta S_{\text{mat}} \\ (2.48) \text{ et } (2.49) \iff &\frac{1}{2k} \sqrt{-g} (Ric_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu} R) = \frac{\partial(\sqrt{-g} \mathcal{L}_{\text{mat}})}{\partial g^{\mu\nu}} - \frac{\partial}{\partial x^\rho} \left( \frac{\partial(\sqrt{-g} \mathcal{L}_{\text{mat}})}{\partial(\partial_\rho g^{\mu\nu})} \right) \\ \iff &Ric_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu} R = \frac{8\pi G}{c^4} \frac{2}{\sqrt{-g}} \left[ \frac{\partial(\sqrt{-g} \mathcal{L}_{\text{mat}})}{\partial g^{\mu\nu}} - \frac{\partial}{\partial x^\rho} \left( \frac{\partial(\sqrt{-g} \mathcal{L}_{\text{mat}})}{\partial(\partial_\rho g^{\mu\nu})} \right) \right] \\ \iff &Ric_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu} R = \frac{8\pi G}{c^4} T_{\mu\nu} \end{aligned} \quad (2.50)$$

où le tenseur énergie-impulsion est défini par

$$T_{\mu\nu} = \frac{2}{\sqrt{-g}} \left[ \frac{\partial(\sqrt{-g} \mathcal{L}_{\text{mat}})}{\partial g^{\mu\nu}} - \frac{\partial}{\partial x^\rho} \left( \frac{\partial(\sqrt{-g} \mathcal{L}_{\text{mat}})}{\partial(\partial_\rho g^{\mu\nu})} \right) \right]$$

L'équation (2.50) correspond bel et bien aux équations d'Einstein en présence de matière.

Nous terminons ce chapitre par la démonstration des deux prédictions de la relativité générale : la précession du périhélie de Mercure et la déviation de la lumière par le Soleil.

### 2.2.5 La précession du périhélie de Mercure

Considérons la planète Mercure de masse  $M$  progressant sur son orbite à une distance  $r$  du Soleil. Puisque l'espace-temps est courbe, la métrique doit dépendre du point considéré. C'est pourquoi nous employons la métrique de Schwarzschild suivante, qui est la solution des équations d'Einstein dans le vide.

$$\begin{aligned} ds^2 &= - \left( 1 - \frac{2GM}{rc^2} \right) dt^2 + \left( 1 - \frac{2GM}{rc^2} \right)^{-1} dr^2 + r^2 d\theta^2 + r^2 \sin^2 \theta d\varphi^2 \\ &\stackrel{\text{not.}}{=} g_{tt} dt^2 + g_{rr} dr^2 + g_{\theta\theta} d\theta^2 + g_{\varphi\varphi} d\varphi^2 \end{aligned}$$

Ainsi,

$$g_{\mu\nu} = \text{diag} (g_{tt}, g_{rr}, g_{\theta\theta}, g_{\varphi\varphi})$$

La précession du périhélie de Mercure se calcule grâce à la résolution des équations des géodésiques de genre temps dans la géométrie de l'espace-temps décrite par la métrique de Schwarzschild.

Soit l'équation des géodésiques sous forme contravariante

$$\ddot{x}^\mu + \Gamma^\mu_{\alpha\beta} \dot{x}^\alpha \dot{x}^\beta = 0$$

Afin de faciliter les calculs, nous utilisons cette équation sous sa forme covariante, à savoir

$$\ddot{x}_\mu = \frac{1}{2} \partial_\mu g_{\alpha\beta} \dot{x}^\alpha \dot{x}^\beta \quad (2.51)$$

Dans le cas où la métrique  $g_{\mu\nu}$  est indépendante de certaines coordonnées, cette forme de l'équation facilite énormément les calculs. Or, dans le cas présent, la métrique est indépendante du temps  $t$  ainsi que de l'angle azimutal  $\varphi$ . Donc,

$$\begin{cases} \partial_t g_{\mu\nu} = 0 & \stackrel{(2.51)}{\implies} \ddot{x}_t = 0 & \implies \dot{x}_t = u_0 & \implies \dot{x}_t = -k \\ \partial_\varphi g_{\mu\nu} = 0 & \stackrel{(2.51)}{\implies} \ddot{x}_\varphi = 0 & \implies \dot{x}_\varphi = u_\varphi & \implies \dot{x}_\varphi = L \end{cases} \quad (2.52)$$

où  $u_0$  et  $u_\varphi$  sont des constantes que l'on pose respectivement égales à  $-k$  et  $L$  par commodité. Notons que la dérivée désignée par le point est définie par

$$\dot{y} = \frac{dy}{c d\tau}$$

Tout d'abord, déterminons les équations du mouvement d'une particule massive dans la géométrie de l'espace-temps décrite par la métrique de Schwarzschild. Nous avons

$$\begin{aligned}
 \dot{x}_t = g_{tt} \dot{x}^t &\iff \dot{x}_t \stackrel{\text{déf.}}{=} g_{tt} \frac{d(ct)}{c d\tau} \\
 &\iff \dot{x}_t = g_{tt} \dot{ct} \\
 &\iff \dot{x}_t = - \left( 1 - \frac{2GM}{rc^2} \right) \dot{ct} \\
 \stackrel{(2.52)}{\iff} k &= \left( 1 - \frac{2GM}{rc^2} \right) \dot{ct} \tag{2.53}
 \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}
 \dot{x}_\varphi = g_{\varphi\varphi} \dot{x}^\varphi &\iff \dot{x}_\varphi \stackrel{\text{déf.}}{=} g_{\varphi\varphi} \frac{d\varphi}{c d\tau} \\
 &\iff \dot{x}_\varphi = g_{\varphi\varphi} \dot{\varphi} \\
 &\iff \dot{x}_\varphi = r^2 \sin^2 \theta \dot{\varphi} \\
 \stackrel{(2.52)}{\iff} L &= r^2 \dot{\varphi} \sin^2 \theta \tag{2.54}
 \end{aligned}$$

Enfin,

$$\begin{aligned}
 \dot{x}_\theta = g_{\theta\theta} \dot{x}^\theta &\iff \dot{x}_\theta \stackrel{\text{déf.}}{=} g_{\theta\theta} \frac{d\theta}{c d\tau} \\
 &\iff \dot{x}_\theta = g_{\theta\theta} \dot{\theta} \\
 &\iff \dot{x}_\theta = r^2 \dot{\theta} \tag{2.55}
 \end{aligned}$$

Considérons maintenant l'équation (2.51) donnant les géodésiques sous forme covariante en remplaçant l'indice  $\mu$  par  $\theta$ . Nous avons

$$\begin{aligned}
 \ddot{x}_\theta &= \frac{1}{2} \partial_\theta g_{\alpha\beta} \dot{x}^\alpha \dot{x}^\beta \\
 &= \frac{1}{2} \partial_\theta g_{\varphi\varphi} \dot{x}^\varphi \dot{x}^\varphi \\
 &\quad (\text{car } g_{\alpha\beta} \text{ est indépendant de } \theta \text{ sauf pour } \alpha = \beta = \varphi) \\
 &= \frac{1}{2} \partial_\theta (r^2 \sin^2 \theta) \dot{\varphi}^2 \\
 &= \frac{2r^2 \sin \theta \cos \theta \dot{\varphi}^2}{2} \\
 &= r^2 \dot{\varphi}^2 \sin \theta \cos \theta \tag{2.56}
 \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}
 \ddot{x}_\theta &= \frac{d(\dot{x}_\theta)}{c d\tau} \\
 \stackrel{(2.55)}{=} &\frac{d(r^2 \dot{\theta})}{c d\tau} \\
 &= 2r\dot{r}\dot{\theta} + r^2\ddot{\theta} \tag{2.57}
 \end{aligned}$$

Ainsi, en combinant les équations (2.56) et (2.57), nous obtenons

$$r^2 \dot{\varphi}^2 \sin \theta \cos \theta = 2r\dot{r}\dot{\theta} + r^2\ddot{\theta} \iff \ddot{\theta} + \frac{2\dot{r}\dot{\theta}}{r} - \dot{\varphi}^2 \sin \theta \cos \theta = 0$$

Cette dernière équation est satisfaite pour  $\theta = \frac{\pi}{2}$ , qui correspond au fait que la trajectoire orbitale relativiste reste plane dans ce plan. Ce résultat nous amène à reconsidérer les équations (2.54) et (2.55), qui deviennent respectivement pour  $\theta = \frac{\pi}{2}$

$$L = r^2 \dot{\varphi} \sin^2 \left( \frac{\pi}{2} \right) \iff L = r^2 \dot{\varphi} \quad (2.58)$$

et

$$\dot{x}^\theta = r^2 \frac{\dot{\pi}}{2} \iff \dot{x}^\theta = 0 \quad (2.59)$$

Déterminons maintenant l'équation pour la distance radiale  $r$ . Puisque nous nous intéressons au type de mouvements décrits par une particule massive, c'est-à-dire dans le cas où  $\dot{x}_\mu \dot{x}^\mu = -1$ , nous obtenons

$$\begin{aligned} \dot{x}_\mu \dot{x}^\mu = -1 &\iff g_{\mu\nu} \dot{x}^\mu \dot{x}^\nu = -1 \\ &\iff g_{tt} (\dot{x}^t)^2 + g_{rr} (\dot{x}^r)^2 + g_{\theta\theta} (\dot{x}^\theta)^2 + g_{\varphi\varphi} (\dot{x}^\varphi)^2 = -1 \\ &\quad (\text{car } g_{\mu\nu} = 0 \ \forall \mu \neq \nu) \\ &\stackrel{(2.59)}{\iff} - \left( 1 - \frac{2GM}{rc^2} \right) (c\dot{t})^2 + \left( 1 - \frac{2GM}{rc^2} \right)^{-1} \dot{r}^2 + r^2 \sin^2 \theta \dot{\varphi}^2 = -1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \theta = \frac{\pi}{2}, (2.53) \text{ et } (2.58) &\iff -k c\dot{t} + \dot{r}^2 \left( 1 - \frac{2GM}{rc^2} \right)^{-1} + \frac{L^2}{r^2} = -1 \\ &\times \left( 1 - \frac{2GM}{rc^2} \right) \\ &\iff -k^2 + \dot{r}^2 + \frac{L^2}{r^2} \left( 1 - \frac{2GM}{rc^2} \right) = - \left( 1 - \frac{2GM}{rc^2} \right) \\ &\iff \dot{r}^2 - \frac{2GM}{rc^2} + \frac{L^2}{r^2} - \frac{2GML^2}{r^3 c^2} = k^2 - 1 \end{aligned}$$

Finalement, les mouvements de la particule massive sont décrits par les quatre équations suivantes, dont la dernière permet de calculer la précession du périhélie de Mercure après un changement de variable.

$$\begin{cases} k = \left( 1 - \frac{2GM}{rc^2} \right) c\dot{t} \\ r^2 \dot{\varphi} = L \\ \theta = \frac{\pi}{2} \\ \dot{r}^2 - \frac{2GM}{rc^2} + \frac{L^2}{r^2} - \frac{2GML^2}{r^3 c^2} = k^2 - 1 \end{cases}$$

Multiplions à présent la dernière équation par  $\frac{c^2}{2}$ . Nous obtenons

$$\begin{aligned}
 & \dot{r}^2 - \frac{2GM}{rc^2} + \frac{L^2}{r^2} - \frac{2GML^2}{r^3c^2} = k^2 - 1 \\
 \Leftrightarrow & \frac{c^2}{2} \left( \frac{dr}{c d\tau} \right)^2 - \frac{c^2}{2} \frac{2GM}{rc^2} + \frac{c^2}{2} \frac{L^2}{r^2} - \frac{c^2}{2} \frac{2GML^2}{r^3c^2} = \frac{c^2}{2} (k^2 - 1) \\
 \Leftrightarrow & \frac{1}{2} \left( \frac{dr}{d\tau} \right)^2 - \frac{GM}{r} + \frac{L^2c^2}{2r^2} - \frac{GML^2}{r^3} = c^2 \left( \frac{k^2 - 1}{2} \right)
 \end{aligned} \tag{2.60}$$

Soit  $h = Lc$ , la constante des aires telle que

$$h = Lc \stackrel{(2.58)}{=} r^2 \dot{\varphi} c = r^2 \frac{d\varphi}{c d\tau} c = r^2 \frac{d\varphi}{d\tau}$$

Injectons cette constante dans l'équation (2.60). Celle-ci devient alors

$$\frac{1}{2} \left( \frac{dr}{d\tau} \right)^2 - \frac{GM}{r} + \frac{h^2}{2r^2} - \frac{GMh^2}{r^3c^2} = c^2 \left( \frac{k^2 - 1}{2} \right)$$

Dérivons cette dernière équation par rapport au temps propre  $\tau$ . Nous avons

$$\begin{aligned}
 & \frac{d}{d\tau} \left[ \frac{1}{2} \left( \frac{dr}{d\tau} \right)^2 - \frac{GM}{r} + \frac{h^2}{2r^2} - \frac{GMh^2}{r^3c^2} \right] = \frac{d}{d\tau} \left[ c^2 \left( \frac{k^2 - 1}{2} \right) \right] \\
 \Leftrightarrow & \frac{d^2r}{d\tau^2} \frac{dr}{d\tau} + \frac{GM}{r^2} \frac{dr}{d\tau} - \frac{2rh^2}{2r^4} \frac{dr}{d\tau} + \frac{3r^2GMh^2}{r^6c^2} \frac{dr}{d\tau} = 0 \\
 \Leftrightarrow & \frac{dr}{d\tau} \left[ \frac{d^2r}{d\tau^2} + \frac{GM}{r^2} - \frac{h^2}{r^3} + \frac{3GMh^2}{r^4c^2} \right] = 0 \\
 \Leftrightarrow & \frac{d^2r}{d\tau^2} + \frac{GM}{r^2} - \frac{h^2}{r^3} + \frac{3GMh^2}{r^4c^2} = 0
 \end{aligned} \tag{2.61}$$

Posons maintenant  $u(\varphi) = \frac{1}{r(\varphi(\tau))}$  telle que  $u' = \frac{du}{d\varphi}$ . Ce changement de variable appliqué à l'équation (2.61) donne

$$\frac{d^2r}{d\tau^2} + GMu^2 - h^2u^3 + \frac{3GMh^2u^4}{c^2} = 0$$

Exprimons maintenant le terme  $\frac{d^2r}{d\tau^2}$  en fonction de  $u$ ,  $u'$  et  $u''$ . Or,

$$\begin{aligned}
 \frac{dr}{d\tau} &= \frac{d}{d\tau} \left( \frac{1}{u(\varphi(\tau))} \right) \\
 &= -\frac{1}{u^2} \frac{du}{d\tau} \\
 &= -\frac{1}{u^2} \frac{du}{d\varphi} \frac{d\varphi}{d\tau} \\
 &= -\frac{u'}{u^2} \frac{d\varphi}{d\tau}
 \end{aligned}$$

De plus, comme  $h = r^2 \frac{d\varphi}{d\tau}$ ,

$$\frac{d\varphi}{d\tau} = \frac{h}{r^2}$$

$$\iff \frac{d\varphi}{d\tau} = hu^2 \quad (2.62)$$

$$\iff \frac{1}{u^2} \frac{d\varphi}{d\tau} = h \quad (2.63)$$

Donc

$$\begin{aligned} \frac{dr}{d\tau} &= -\frac{u'}{u^2} \frac{d\varphi}{d\tau} \\ &\stackrel{(2.63)}{=} -u'h \end{aligned} \quad (2.64)$$

Il s'en suit que

$$\begin{aligned} \frac{d^2r}{d\tau^2} &= \frac{d}{d\tau} \left( \frac{dr}{d\tau} \right) \\ &\stackrel{(2.64)}{=} \frac{d}{d\tau} (-u'h) \\ &= -h \frac{d(u')}{d\varphi} \frac{d\varphi}{d\tau} \\ &\stackrel{(2.62)}{=} -hu'' hu^2 \\ &= -h^2 u^2 u'' \end{aligned} \quad (2.65)$$

Pour finir, nous avons

$$\begin{aligned} \frac{d^2r}{d\tau^2} + GMu^2 - h^2u^3 + \frac{3GMh^2u^4}{c^2} &= 0 \\ \stackrel{(2.65)}{\iff} -h^2u^2u'' + GMu^2 - h^2u^3 + \frac{3GMh^2u^4}{c^2} &= 0 \\ \iff u^2h^2 \left[ -u'' + \frac{GM}{h^2} - u + \frac{3GMu^2}{c^2} \right] &= 0 \\ \iff u'' + u = \frac{GM}{h^2} + \frac{3GMu^2}{c^2} \end{aligned} \quad (2.66)$$

Nous obtenons une équation différentielle du second ordre quasi-linéaire (l'opérateur différentiel est linéaire, la non-linéarité apparaît sur la fonction  $u$  du membre de droite de l'équation (2.66) et pas sur les dérivées) à coefficients constants et avec membre de droite, que l'on peut comparer avec l'équation de Newton obtenue via l'approche en mécanique classique du problème des deux corps, à savoir

$$u'' + u = \frac{GM}{h^2}$$

et admettant pour solution

$$u_{\text{Newton}} = \frac{GM}{h^2}(1 + e \cos \varphi) \quad (2.67)$$

avec  $0 \leq e < 1$ , l'excentricité de l'orbite.

La solution de l'équation (2.66) est une solution perturbée du type

$$u = u_{\text{Newton}} + \Delta u$$

Injectons l'expression de la solution perturbée dans l'équation (2.66). Nous avons

$$\begin{aligned} (u_{\text{Newton}} + \Delta u)'' + u_{\text{Newton}} + \Delta u &= \frac{GM}{h^2} + \frac{3GM(u_{\text{Newton}} + \Delta u)^2}{c^2} \\ &= \frac{GM}{h^2} + \frac{3GMu_{\text{Newton}}^2}{c^2} \left(1 + \frac{\Delta u}{u_{\text{Newton}}}\right)^2 \end{aligned} \quad (2.68)$$

Comme  $\frac{\Delta u}{u_{\text{Newton}}} \ll 1$ , le second terme du membre de droite de l'équation (2.68) peut être approximé par

$$\frac{3GMu_{\text{Newton}}^2}{c^2}$$

Nous obtenons alors

$$\begin{aligned} (u_{\text{Newton}} + \Delta u)'' + u_{\text{Newton}} + \Delta u &= \frac{GM}{h^2} + \frac{3GMu_{\text{Newton}}^2}{c^2} \\ \stackrel{(2.67)}{\Leftrightarrow} \frac{d^2}{d\varphi^2} \left( \frac{GM}{h^2}(1 + e \cos \varphi) + \Delta u \right) + \frac{GM}{h^2}(1 + e \cos \varphi) + \Delta u &= \frac{GM}{h^2} + \frac{3G^3M^3}{h^4c^2}(1 + e \cos \varphi)^2 \\ \Leftrightarrow -\frac{GMe \cos \varphi}{h^2} + \frac{d^2(\Delta u)}{d\varphi^2} + \frac{GM}{h^2} + \frac{GMe \cos \varphi}{h^2} + \Delta u &= \frac{GM}{h^2} + \frac{3G^3M^3}{h^4c^2}(1 + e \cos \varphi)^2 \\ \Leftrightarrow \frac{d^2(\Delta u)}{d\varphi^2} + \Delta u &= \frac{3G^3M^3}{h^4c^2}(1 + 2e \cos \varphi + e^2 \cos^2 \varphi) \end{aligned}$$

Il s'agit maintenant de faire disparaître le  $\cos^2 \varphi$  apparaissant dans le troisième terme entre parenthèses. Or,

$$\begin{aligned} \cos 2\varphi &= \cos^2 \varphi - \sin^2 \varphi \\ &= \cos^2 \varphi - (1 - \cos^2 \varphi) \\ &= 2 \cos^2 \varphi - 1 \end{aligned}$$

et donc

$$\cos^2 \varphi = \frac{1 + \cos 2\varphi}{2}$$

Nous obtenons alors

$$\begin{aligned} \frac{d^2(\Delta u)}{d\varphi^2} + \Delta u &= \frac{3G^3M^3}{h^4c^2} \left( 1 + 2e \cos \varphi + \frac{e^2}{2} + \frac{e^2}{2} \cos 2\varphi \right) \\ &= \underbrace{\frac{3G^3M^3}{h^4c^2}}_{\text{Terme constant}} + \underbrace{\frac{3G^3M^3e^2}{2h^4c^2}}_{\text{Terme en } \cos \varphi} + \underbrace{\frac{6G^3M^3e}{h^4c^2} \cos \varphi}_{\text{Terme en } \cos \varphi} + \underbrace{\frac{3G^3M^3e^2}{2h^4c^2} \cos 2\varphi}_{\text{Terme en } \cos 2\varphi} \\ &\stackrel{\text{not.}}{=} A + B \cos \varphi + C \cos 2\varphi \end{aligned} \quad (2.69)$$

Nous devons à présent déterminer les solutions particulières de cette équation différentielle afin d'obtenir la solution générale  $\Delta u$ .

- **Pour le terme constant** : il convient de résoudre l'équation différentielle

$$\frac{d^2(\Delta u)}{d\varphi^2} + \Delta u = A$$

La solution est trivialement donnée par

$$\Delta u = A$$

- **Pour le terme en  $\cos \varphi$**  : il convient de résoudre l'équation différentielle

$$\frac{d^2(\Delta u)}{d\varphi^2} + \Delta u = B \cos \varphi$$

On propose comme solution

$$\Delta u = \frac{B}{2} \varphi \sin \varphi$$

Vérifions que cette solution convient. On a

$$\frac{d(\Delta u)}{d\varphi} = \frac{B}{2} (\sin \varphi + \varphi \cos \varphi)$$

et

$$\frac{d^2(\Delta u)}{d\varphi^2} = \frac{B}{2} (\cos \varphi + \cos \varphi - \varphi \sin \varphi)$$

donc

$$\begin{aligned} \frac{d^2(\Delta u)}{d\varphi^2} + \Delta u &= B \cos \varphi - \frac{B}{2} \varphi \sin \varphi + \frac{B}{2} \varphi \sin \varphi \\ &= B \cos \varphi \end{aligned}$$

- **Pour le terme en  $\cos 2\varphi$**  : il convient de résoudre l'équation différentielle

$$\frac{d^2(\Delta u)}{d\varphi^2} + \Delta u = C \cos 2\varphi$$

On propose comme solution

$$\Delta u = -\frac{C}{3} \cos 2\varphi$$

Vérifions que cette solution convient. On a

$$\frac{d(\Delta u)}{d\varphi} = \frac{2C}{3} \sin 2\varphi$$

et

$$\frac{d^2(\Delta u)}{d\varphi^2} = \frac{4C}{3} \cos 2\varphi$$

donc

$$\begin{aligned} \frac{d^2(\Delta u)}{d\varphi^2} + \Delta u &= \frac{4C}{3} \cos 2\varphi - \frac{C}{3} \cos 2\varphi \\ &= C \cos 2\varphi \end{aligned}$$

Il s'en suit que la solution

$$\Delta u = A + \frac{B}{2} \varphi \sin \varphi - \frac{C}{3} \cos 2\varphi$$

satisfait à l'équation (2.69) et donc

$$\begin{aligned} \Delta u &= \left( \frac{3G^3 M^3}{h^4 c^2} + \frac{3G^3 M^3 e^2}{2h^4 c^2} \right) + \frac{1}{2} \left( \frac{6G^3 M^3 e}{h^4 c^2} \right) \varphi \sin \varphi - \frac{1}{3} \left( \frac{3G^3 M^3 e^2}{2h^4 c^2} \right) \cos 2\varphi \\ &= \frac{3G^3 M^3}{h^4 c^2} \left( 1 + \frac{e^2}{2} \right) + \frac{3G^3 M^3 e}{h^4 c^2} \varphi \sin \varphi - \frac{G^3 M^3 e^2}{2h^4 c^2} \cos 2\varphi \end{aligned} \quad (2.70)$$

En définitive, la solution  $u$  de l'équation différentielle (2.66) est donnée par

$$\begin{aligned} u &= u_{\text{Newton}} + \Delta u \\ (2.67) \text{ et } (2.70) \quad & \frac{GM}{h^2} (1 + e \cos \varphi) + \frac{3G^3 M^3}{h^4 c^2} \left( 1 + \frac{e^2}{2} \right) + \frac{3G^3 M^3 e}{h^4 c^2} \varphi \sin \varphi - \frac{G^3 M^3 e^2}{2h^4 c^2} \cos 2\varphi \\ &= \frac{GM}{h^2} \left[ 1 + \frac{3G^2 M^2}{h^2 c^2} \left( 1 + \frac{e^2}{2} \right) + e \cos \varphi + \frac{3G^2 M^2 e}{h^2 c^2} \varphi \sin \varphi - \frac{G^2 M^2 e^2}{2h^2 c^2} \cos 2\varphi \right] \\ &= \frac{GM}{h^2} \left[ 1 + \frac{3G^2 M^2}{h^2 c^2} \left( 1 + \frac{e^2}{2} \right) \right] \left[ 1 + \frac{e}{1 + \frac{3G^2 M^2}{h^2 c^2} \left( 1 + \frac{e^2}{2} \right)} \cos \varphi + \dots \right] \end{aligned}$$

Posons  $\tilde{e} = \frac{e}{1 + \frac{3G^2 M^2}{h^2 c^2} \left( 1 + \frac{e^2}{2} \right)}$ . Alors nous avons

$$u = \underbrace{\frac{GM}{h^2} \left[ 1 + \frac{3G^2 M^2}{h^2 c^2} \left( 1 + \frac{e^2}{2} \right) \right]}_{\text{not. } u_i} \left[ 1 + \underbrace{\tilde{e}}_{\text{not. } u_{ii}} \cos \varphi + \underbrace{\frac{3G^2 M^2}{h^2 c^2} \tilde{e} \varphi \sin \varphi}_{\text{not. } u_{iii}} - \underbrace{\frac{G^2 M^2}{2h^2 c^2} e \tilde{e} \cos 2\varphi}_{\text{not. } u_{iv}} \right]$$

Le facteur  $u_i$  produit une modification dans la distance du périhélie tandis que le facteur  $u_{ii}$  produit une modification de l'excentricité. Le terme  $u_{iv}$  est périodique mais le terme  $u_{iii}$  ne l'est pas et a pour conséquent un effet cumulatif... Donc, en première approximation, nous retenons le terme  $u_{iii}$  et nous obtenons la solution suivante.

$$\begin{aligned} u &= \frac{GM}{h^2} (1 + e \cos \varphi) + \frac{3G^3 M^3 e}{h^4 c^2} \varphi \sin \varphi \\ &= \frac{GM}{h^2} \left[ 1 + e \left( \cos \varphi + \frac{3G^2 M^2}{h^2 c^2} \varphi \sin \varphi \right) \right] \end{aligned} \quad (2.71)$$

Il reste à présent à réécrire la solution donnée par l'équation (2.71) sous la forme de l'équation d'une ellipse. Pour ce faire, nous allons user de l'artifice suivant. Si  $b \ll 1$ , alors

$$\begin{aligned} \cos(a - b) &= \cos a \underbrace{\cos b}_{\simeq 1} + \sin a \underbrace{\sin b}_{\simeq b} \\ &\simeq \cos a + b \cdot \sin a \end{aligned}$$

Dans notre cas,  $b$  est assimilé à  $\frac{3G^2M^2}{h^2c^2} \varphi$  et donc

$$\frac{3G^2M^2}{h^2c^2} \varphi \ll 1, \quad \cos\left(\frac{3G^2M^2}{h^2c^2} \varphi\right) \simeq 1 \quad \text{et} \quad \sin\left(\frac{3G^2M^2}{h^2c^2} \varphi\right) \simeq \frac{3G^2M^2}{h^2c^2} \varphi \quad (2.72)$$

La solution donnée par l'équation (2.71) peut ainsi être réécrite de la manière suivante.

$$\begin{aligned} u &= \frac{GM}{h^2} \left[ 1 + e \left( \cos \varphi + \frac{3G^2M^2}{h^2c^2} \varphi \sin \varphi \right) \right] \\ &\stackrel{(2.72)}{\simeq} \frac{GM}{h^2} \left[ 1 + e \left( \cos \varphi \cdot \cos\left(\frac{3G^2M^2}{h^2c^2} \varphi\right) + \sin \varphi \cdot \sin\left(\frac{3G^2M^2}{h^2c^2} \varphi\right) \right) \right] \\ &= \frac{GM}{h^2} \left[ 1 + e \cos\left(\varphi - \frac{3G^2M^2}{h^2c^2} \varphi\right) \right] \\ &= \frac{GM}{h^2} \left[ 1 + e \cos\left(\varphi \left(1 - \frac{3G^2M^2}{h^2c^2}\right)\right) \right] \end{aligned}$$

Posons  $\alpha = \frac{3G^2M^2}{h^2c^2}$ . Alors la solution est finalement donnée par

$$u \simeq \frac{GM}{h^2} [1 + e \cos((1 - \alpha)\varphi)]$$

Considérons le schéma de la FIGURE 2.3, représentant l'orbite elliptique d'une planète autour du Soleil. Puisque le périhélie et l'aphélie correspondent aux points de la trajectoire d'une planète respectivement le plus proche et le plus éloigné du Soleil, la distance du Soleil au périhélie correspond à  $r_{\min}$  tandis que la distance du Soleil à l'aphélie correspond à  $r_{\max}$ .

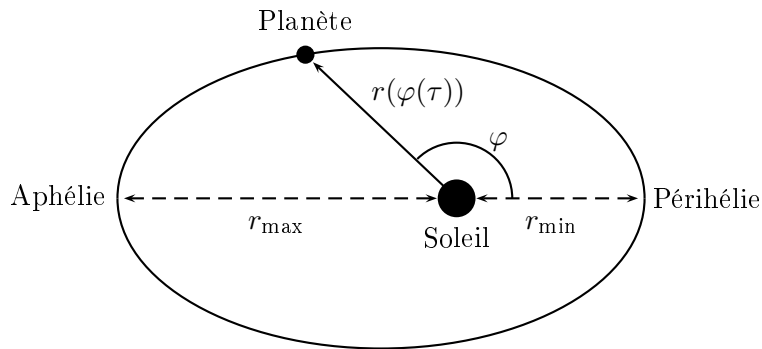


FIGURE 2.3 – Orbite elliptique d'une planète autour du Soleil, inspirée de la référence [9]

Comme nous avons posé  $u(\varphi) = \frac{1}{r(\varphi(\tau))}$ , cela signifie que

$$\begin{cases} u_{\max} = \frac{1}{r_{\min}} = \frac{GM}{h^2}(1 + e) \\ u_{\min} = \frac{1}{r_{\max}} = \frac{GM}{h^2}(1 - e) \end{cases} \quad (2.73)$$

Autrement dit, la distance  $r$  est minimale lorsque  $u$  est maximale et cela se vérifie pour

$$\begin{aligned} \cos((1 - \alpha)\varphi) = 1 &\iff (1 - \alpha)\varphi = 2k\pi, \quad k \in \mathbb{Z} \\ &\iff \varphi = \frac{2k\pi}{1 - \alpha}, \quad k \in \mathbb{Z} \end{aligned}$$

c'est-à-dire, pour  $k = 1$ ,

$$\varphi = \frac{2\pi}{1 - \alpha}$$

On obtient donc une orbite périodique de période  $\frac{2\pi}{1 - \alpha} > 2\pi$ , ce qui signifie que la planète ne revient pas à son point de départ après un tour complet de l'orbite : on observe la précession de l'ellipse et par conséquent, la précession du périhélie, comme l'illustre la FIGURE 2.4.

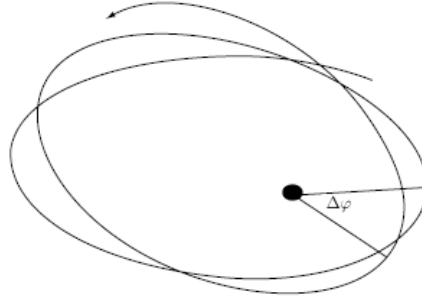


FIGURE 2.4 – Précession d'une orbite elliptique, issue de la référence [9]

L'ellipse se décale ainsi à chaque révolution d'un angle

$$\Delta\varphi = \frac{2\pi}{1 - \alpha} - 2\pi = \frac{2\pi - 2\pi(1 - \alpha)}{1 - \alpha} = \frac{2\alpha\pi}{1 - \alpha} \approx 2\alpha\pi = \frac{6\pi G^2 M^2}{h^2 c^2}$$

Calculons maintenant ce que vaut  $h^2$ . On sait que le demi-grand axe  $a$  de l'ellipse est donné par

$$\begin{aligned} 2a &= r_{\min} + r_{\max} \\ \iff 2a &\stackrel{(2.73)}{=} \frac{h^2}{GM} \left( \frac{1}{1+e} + \frac{1}{1-e} \right) \\ \iff 2a &= \frac{h^2}{GM} \left( \frac{(1-e) + (1+e)}{1-e^2} \right) \\ \iff 2a &= \frac{h^2}{GM} \left( \frac{2}{1-e^2} \right) \\ \iff a &= \frac{h^2}{GM(1-e^2)} \end{aligned}$$

et donc

$$h^2 = aGM(1 - e^2) \tag{2.74}$$

Nous obtenons ainsi

$$\Delta\varphi \approx \frac{6\pi G^2 M^2}{h^2 c^2} \stackrel{(2.74)}{=} \frac{6\pi GM}{a(1-e^2)c^2} \quad (2.75)$$

Il s'agit à présent de calculer la valeur de  $\Delta\varphi$  pour la planète Mercure (cf. référence [10]), à l'aide des paramètres suivants. Notons qu'il convient de travailler en centimètres et en grammes plutôt qu'en mètres et en kilogrammes.

$$\left\{ \begin{array}{l} a = 5.8 \cdot 10^{10} \text{ m} = 5.8 \cdot 10^{12} \text{ cm} \\ e = 0.2 \\ T_{\text{Mercure}} = 88 \text{ jours} \\ M_{\text{Soleil}} = 2 \cdot 10^{30} \text{ kg} = 2 \cdot 10^{33} \text{ g} \\ G = 6.67 \cdot 10^{-11} \frac{\text{m}^3}{\text{kg} \cdot \text{s}^2} = 6.67 \cdot 10^{-8} \frac{\text{cm}^3}{\text{kg} \cdot \text{s}^2} \\ c = 3 \cdot 10^8 \text{ m/s} = 3 \cdot 10^{10} \text{ cm/s} \end{array} \right. \quad (2.76)$$

Remarquons également que  $\Delta\varphi$  s'exprime en radians, mais qu'il convient de travailler en secondes d'arc. Par conséquent,

$$360^\circ = 2\pi \text{ rad} \iff 1 \text{ rad} = \frac{180^\circ}{\pi}$$

et

$$1^\circ = 60 \cdot 60 \text{ secondes d'arc} = 3\,600 \text{ secondes d'arc}$$

Donc

$$1 \text{ rad} = \frac{180^\circ}{\pi} = \frac{180 \cdot 3\,600}{\pi} \text{ secondes d'arc}$$

Il s'en suit que

$$\Delta\varphi = \frac{6\pi GM_{\text{Soleil}}}{a(1-e^2)c^2} \text{ rad} \quad (2.77)$$

$$= \frac{6\pi GM_{\text{Soleil}}}{a(1-e^2)c^2} \frac{180 \cdot 3\,600}{\pi} \text{ secondes d'arc}$$

$$= \frac{6GM_{\text{Soleil}}}{a(1-e^2)c^2} \cdot 180 \cdot 3\,600$$

$$\stackrel{(2.76)}{=} \frac{6 \cdot 6.67 \cdot 10^{-8} \cdot 2 \cdot 10^{33}}{5.8 \cdot 10^{12} \cdot (1-0.2^2) \cdot (3 \cdot 10^{10})^2} \cdot 180 \cdot 3\,600$$

$$= 0.1035 \quad (2.78)$$

Si  $T$  est la période de révolution de la planète, la précession du périhélie de Mercure sur 100 ans (autrement dit sur un siècle) est donnée par

$$\begin{aligned} \Delta\phi &= \frac{100 \cdot T_{\text{Terre}}}{T_{\text{Mercure}}} \Delta\varphi \\ &\stackrel{(2.76) \text{ et } (2.78)}{=} \frac{100 \cdot 365}{88} \cdot 0.1035 \\ &= 42.93'' \end{aligned}$$

En conclusion, nous trouvons que le périhélie de Mercure avance de 42.93 secondes par siècle, ce qui est en adéquation avec la précession mesurée qui est de 43 secondes par siècle.

### 2.2.6 La déviation de la lumière par le Soleil

Afin de démontrer la déviation de la lumière par le Soleil, nous nous intéressons à la résolution des équations des géodésiques de genre lumière. Les mouvements des photons (autrement dit des particules non massives) sont décrits par les mêmes équations que dans le cas des particules massives à la section précédente, à l'exception de celle pour la distance radiale  $r$  puisque dans le cas des photons, il convient de considérer l'équation  $\dot{x}_\mu \dot{x}^\mu = 0$ . Nous avons dès lors

$$\begin{aligned}
 \dot{x}_\mu \dot{x}^\mu = 0 & \iff g_{\mu\nu} \dot{x}^\mu \dot{x}^\nu = 0 \\
 & \iff g_{tt} (\dot{x}^t)^2 + g_{rr} (\dot{x}^r)^2 + g_{\theta\theta} (\dot{x}^\theta)^2 + g_{\varphi\varphi} (\dot{x}^\varphi)^2 = 0 \\
 & \quad (\text{car } g_{\mu\nu} = 0 \ \forall \mu \neq \nu) \\
 & \stackrel{(2.59)}{\iff} - \left(1 - \frac{2GM}{rc^2}\right) (c\dot{t})^2 + \left(1 - \frac{2GM}{rc^2}\right)^{-1} \dot{r}^2 + r^2 \sin^2 \theta \dot{\varphi}^2 = 0 \\
 \theta = \frac{\pi}{2}, (2.53) \text{ et } (2.58) & \iff -k c\dot{t} + \dot{r}^2 \left(1 - \frac{2GM}{rc^2}\right)^{-1} + \frac{L^2}{r^2} = 0 \\
 \times \left(1 - \frac{2GM}{rc^2}\right) & \iff -k^2 + \dot{r}^2 + \frac{L^2}{r^2} \left(1 - \frac{2GM}{rc^2}\right) = 0 \\
 & \iff \dot{r}^2 + \frac{L^2}{r^2} - \frac{2GML^2}{r^3 c^2} = k^2
 \end{aligned}$$

Ainsi, les mouvements des photons sont décrits par les quatre équations suivantes, dont la dernière permet de mettre en évidence la déviation de la lumière par le Soleil.

$$\left\{ \begin{array}{l} k = \left(1 - \frac{2GM}{rc^2}\right) c\dot{t} \\ r^2 \dot{\varphi} = L \\ \theta = \frac{\pi}{2} \\ \dot{r}^2 + \frac{L^2}{r^2} - \frac{2GML^2}{r^3 c^2} = k^2 \end{array} \right.$$

Notons qu'ici, puisque les photons sont des particules non massives, on ne peut utiliser le temps propre  $\tau$  comme paramètre de la dérivée. Nous choisissons par conséquent un paramètre affine  $\lambda$  de sorte que

$$\dot{r} = \frac{dr}{d\lambda}$$

Soit  $r_0$ , la distance minimale d'approche du rayon lumineux par rapport au Soleil et tel que  $\dot{r}_0 = 0$ . Cette distance est représentée à la FIGURE 2.5, qui illustre la trajectoire d'un photon en incidence rasante auprès du Soleil.

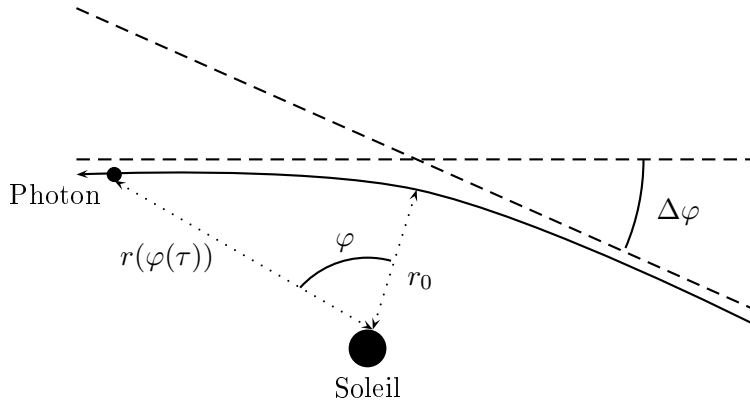


FIGURE 2.5 – Déviation de la lumière en incidence rasante auprès du Soleil, inspirée de la référence [9]

Nous cherchons à déterminer l'angle de déviation  $\Delta\varphi$  entre les deux asymptotes de la trajectoire hyperbolique du photon, c'est-à-dire l'expression de  $\frac{d\varphi}{dr}$ . D'abord, exprimons  $k$  en fonction de  $r_0$ . Puisque l'on a supposé que  $\dot{r}_0 = 0$ , par la dernière des quatre équations ci-dessus, nous avons

$$\begin{aligned}
 \dot{r}_0^2 + \frac{L^2}{r_0^2} - \frac{2GML^2}{r_0^3 c^2} &= k^2 \\
 \Leftrightarrow \frac{L^2}{r_0^2} - \frac{r_s L^2}{r_0^3} &= k^2 \\
 \Leftrightarrow k^2 &= \frac{L^2}{r_0^2} \left(1 - \frac{r_s}{r_0}\right)
 \end{aligned} \tag{2.79}$$

avec  $r_s \stackrel{\text{déf.}}{=} \frac{2GM}{c^2}$ , le rayon de Schwarzschild. Nous obtenons alors

$$\begin{aligned}
 \dot{r}^2 + \frac{L^2}{r^2} - \frac{2GML^2}{r^3 c^2} &= k^2 \\
 \stackrel{(2.79)}{\Leftrightarrow} \dot{r}^2 + \frac{L^2}{r^2} - \frac{r_s L^2}{r^3} &= \frac{L^2}{r_0^2} \left(1 - \frac{r_s}{r_0}\right) \\
 \Leftrightarrow \dot{r}^2 &= \frac{L^2}{r_0^2} \left(1 - \frac{r_s}{r_0}\right) - \frac{L^2}{r^2} \left(1 - \frac{r_s}{r}\right) \\
 \Leftrightarrow \dot{r} &= \left[ \frac{L^2}{r_0^2} \left(1 - \frac{r_s}{r_0}\right) - \frac{L^2}{r^2} \left(1 - \frac{r_s}{r}\right) \right]^{\frac{1}{2}}
 \end{aligned} \tag{2.80}$$

Ainsi,

$$\begin{aligned}
 & \frac{d\varphi}{dr} = \frac{d\varphi}{d\lambda} \frac{d\lambda}{dr} \\
 \Leftrightarrow & \frac{d\varphi}{dr} = \frac{\dot{\varphi}}{\dot{r}} \\
 \stackrel{\varphi = \frac{L}{r^2} \text{ et (2.80)}}{\Leftrightarrow} & \frac{d\varphi}{dr} = \frac{L}{r^2} \left[ \frac{L^2}{r_0^2} \left( 1 - \frac{r_s}{r_0} \right) - \frac{L^2}{r^2} \left( 1 - \frac{r_s}{r} \right) \right]^{-\frac{1}{2}} \\
 \Leftrightarrow & \left( \frac{d\varphi}{dr} \right)^2 = \frac{L^2}{r^4} \left[ \frac{L^2}{r_0^2} \left( 1 - \frac{r_s}{r_0} \right) - \frac{L^2}{r^2} \left( 1 - \frac{r_s}{r} \right) \right]^{-1} \\
 \Leftrightarrow & \left( \frac{d\varphi}{dr} \right)^2 = \frac{L^2}{r^4 \left[ \frac{L^2}{r_0^2} \left( 1 - \frac{r_s}{r_0} \right) - \frac{L^2}{r^2} \left( 1 - \frac{r_s}{r} \right) \right]} \\
 \Leftrightarrow & \left( \frac{d\varphi}{dr} \right)^2 = \left[ \frac{r^4}{r_0^2} \left( 1 - \frac{r_s}{r_0} \right) - \frac{r^4}{r^2} \left( 1 - \frac{r_s}{r} \right) \right]^{-1} \\
 \Leftrightarrow & \left( \frac{d\varphi}{dr} \right)^2 = \left[ r^2 \left( \frac{r}{r_0} \right)^2 \left( 1 - \frac{r_s}{r_0} \right) - r^2 \left( 1 - \frac{r_s}{r} \right) \right]^{-1} \\
 \Leftrightarrow & \left( \frac{d\varphi}{dr} \right)^2 = \frac{1}{r^2} \left[ \left( \frac{r}{r_0} \right)^2 \left( 1 - \frac{r_s}{r_0} \right) - \left( 1 - \frac{r_s}{r} \right) \right]^{-1} \\
 \Leftrightarrow & \frac{d\varphi}{dr} = \frac{1}{r} \left[ \left( \frac{r}{r_0} \right)^2 \left( 1 - \frac{r_s}{r_0} \right) - \left( 1 - \frac{r_s}{r} \right) \right]^{-\frac{1}{2}} \\
 \Leftrightarrow & \varphi(r) = \int \frac{1}{r} \left[ \left( \frac{r}{r_0} \right)^2 \left( 1 - \frac{r_s}{r_0} \right) - \left( 1 - \frac{r_s}{r} \right) \right]^{-\frac{1}{2}} dr \\
 \Leftrightarrow & \varphi(r) \stackrel{\text{not.}}{=} \int f(r) dr
 \end{aligned}$$

Ensuite, par symétrie du problème autour de  $r_0$ , nous avons

$$\Delta\varphi = 2(\varphi(+\infty) - \varphi(r_0)) - \pi$$

et

$$\varphi(+\infty) - \varphi(r_0) = [\varphi(r)]_{r_0}^{+\infty} = \int_{r_0}^{+\infty} f(r) dr$$

d'où

$$\Delta\varphi = 2 \int_{r_0}^{+\infty} \frac{1}{r} \left[ \left( \frac{r}{r_0} \right)^2 \left( 1 - \frac{r_s}{r_0} \right) - \left( 1 - \frac{r_s}{r} \right) \right]^{-\frac{1}{2}} dr - \pi$$

Il reste enfin à intégrer pour déterminer l'expression de l'angle de déviation. Nous avons (cf. références [11] et [12])

$$\begin{aligned}\Delta\varphi &= 2 \int_{r_0}^{+\infty} \frac{1}{r} \left[ \left( \frac{r}{r_0} \right)^2 \left( 1 - \frac{r_s}{r_0} \right) - \left( 1 - \frac{r_s}{r} \right) \right]^{-\frac{1}{2}} dr - \pi \\ \Leftrightarrow \Delta\varphi &= 2 \int_{r_0}^{+\infty} \frac{1}{r} \left[ \frac{r^2}{r_0^2} - \frac{r^2 r_s}{r_0^2 r_0} - 1 + \frac{r_s}{r} \right]^{-\frac{1}{2}} dr - \pi\end{aligned}$$

Ajoutons et retranchons  $\frac{r^2 r_s}{r_0^2 r}$  à l'expression sous la puissance moins un demi. Nous obtenons

$$\begin{aligned}\Delta\varphi &= 2 \int_{r_0}^{+\infty} \frac{1}{r} \left[ \frac{r^2}{r_0^2} - \frac{r^2 r_s}{r_0^2 r_0} - 1 + \frac{r_s}{r} \right]^{-\frac{1}{2}} dr - \pi \\ \Leftrightarrow \Delta\varphi &= 2 \int_{r_0}^{+\infty} \frac{1}{r} \left[ \frac{r^2}{r_0^2} - \frac{r^2 r_s}{r_0^2 r_0} + \frac{r^2 r_s}{r_0^2 r} - 1 + \frac{r_s}{r} - \frac{r^2 r_s}{r_0^2 r} \right]^{-\frac{1}{2}} dr - \pi \\ \Leftrightarrow \Delta\varphi &= 2 \int_{r_0}^{+\infty} \frac{1}{r} \left[ \frac{r^2}{r_0^2} - 1 - \frac{r_s}{r} \left( \frac{r^2}{r_0^2} - 1 \right) + r_s \frac{r^2}{r_0^2} \left( \frac{1}{r} - \frac{1}{r_0} \right) \right]^{-\frac{1}{2}} dr - \pi\end{aligned}$$

Récrivons maintenant le quatrième terme sous la puissance moins un demi d'une autre manière. Comme

$$\begin{aligned}\frac{r^2}{r_0^2} - 1 &= \left( \frac{r}{r_0} - 1 \right) \left( \frac{r}{r_0} + 1 \right) \\ &= \frac{(r - r_0)(r + r_0)}{r_0^2}\end{aligned}\tag{2.81}$$

il s'en suit que

$$\begin{aligned}\frac{r^2}{r_0^2} \left( \frac{1}{r} - \frac{1}{r_0} \right) &= \frac{r^2}{r_0^2} \left( \frac{r_0 - r}{rr_0} \right) \\ &= -\frac{r^2}{r_0^2} \left( \frac{r - r_0}{rr_0} \right) \\ &\stackrel{(2.81)}{=} -\frac{r^2}{r_0^2} \frac{r_0^2}{rr_0(r + r_0)} \left( \frac{r^2}{r_0^2} - 1 \right) \\ &= -\left( \frac{r^2}{r_0^2} - 1 \right) \left( \frac{r}{r_0(r + r_0)} \right)\end{aligned}$$

Ainsi,

$$\begin{aligned} \Delta\varphi &= 2 \int_{r_0}^{+\infty} \frac{1}{r} \left[ \frac{r^2}{r_0^2} - 1 - \frac{r_s}{r} \left( \frac{r^2}{r_0^2} - 1 \right) + r_s \frac{r^2}{r_0^2} \left( \frac{1}{r} - \frac{1}{r_0} \right) \right]^{-\frac{1}{2}} dr - \pi \\ \Leftrightarrow \Delta\varphi &= 2 \int_{r_0}^{+\infty} \frac{1}{r} \left[ \frac{r^2}{r_0^2} - 1 - \frac{r_s}{r} \left( \frac{r^2}{r_0^2} - 1 \right) - r_s \left( \frac{r^2}{r_0^2} - 1 \right) \left( \frac{r}{r_0(r+r_0)} \right) \right]^{-\frac{1}{2}} dr - \pi \end{aligned}$$

Mettons en évidence le facteur  $\frac{r^2}{r_0^2} - 1$ . Nous obtenons

$$\Delta\varphi = 2 \int_{r_0}^{+\infty} \frac{1}{r} \left( \frac{r^2}{r_0^2} - 1 \right)^{-\frac{1}{2}} \left[ 1 - \frac{r_s}{r} - r_s \left( \frac{r}{r_0(r+r_0)} \right) \right]^{-\frac{1}{2}} dr - \pi$$

Effectuons maintenant un développement limité du second facteur à la puissance moins un demi, en ne gardant que les termes du premier ordre. Nous avons

$$\left( 1 - \frac{r_s}{r} - r_s \left( \frac{r}{r_0(r+r_0)} \right) \right)^{-\frac{1}{2}} \simeq 1 + \frac{GM}{rc^2} + \frac{GM}{c^2} \left( \frac{r}{r_0(r+r_0)} \right) \quad (2.82)$$

L'expression de l'angle de déviation devient alors

$$\begin{aligned} \Delta\varphi &\stackrel{(2.82)}{=} 2 \int_{r_0}^{+\infty} \frac{1}{r} \left( \frac{r^2}{r_0^2} - 1 \right)^{-\frac{1}{2}} \left[ 1 + \frac{GM}{rc^2} + \frac{GM}{c^2} \left( \frac{r}{r_0(r+r_0)} \right) \right] dr - \pi \\ \Leftrightarrow \Delta\varphi &= 2 \int_{r_0}^{+\infty} \frac{1}{r} \left( \frac{r^2}{r_0^2} - 1 \right)^{-\frac{1}{2}} dr + \frac{2GM}{c^2} \int_{r_0}^{+\infty} \frac{1}{r^2} \left( \frac{r^2}{r_0^2} - 1 \right)^{-\frac{1}{2}} dr \\ &\quad + \frac{2GM}{c^2} \int_{r_0}^{+\infty} \left( \frac{r^2}{r_0^2} - 1 \right)^{-\frac{1}{2}} \left( \frac{1}{r_0(r+r_0)} \right) dr - \pi \end{aligned}$$

En utilisant les intégrales suivantes avec  $x = \frac{r}{r_0}$  tel que  $dx = \frac{1}{r_0} dr$

$$\begin{aligned} \int \frac{1}{x\sqrt{x^2-1}} dx &= -\arcsin\left(\frac{1}{x}\right) \\ \int \frac{1}{x^2\sqrt{x^2-1}} dx &= \frac{\sqrt{x^2-1}}{x} \\ \int \frac{1}{(x+1)\sqrt{x^2-1}} dx &= \sqrt{\frac{x-1}{x+1}} \end{aligned}$$

nous trouvons finalement

$$\begin{aligned}
 \Delta\varphi &= 2 \left[ -\arcsin\left(\frac{r_0}{r}\right) \right]_{r_0}^{+\infty} + \frac{2GM}{r_0c^2} \left[ \frac{\sqrt{\frac{r^2}{r_0^2} - 1}}{\frac{r}{r_0}} \right]_{r_0}^{+\infty} + \frac{2GM}{r_0c^2} \left[ \sqrt{\frac{\frac{r}{r_0} - 1}{\frac{r}{r_0} + 1}} \right]_{r_0}^{+\infty} - \pi \\
 &= 2 \left[ -\arcsin\left(\frac{r_0}{r}\right) \right]_{r_0}^{+\infty} + \frac{2GM}{r_0c^2} \left[ \frac{r_0}{r} \sqrt{\frac{r^2}{r_0^2} \left(1 - \frac{r_0^2}{r^2}\right)} \right]_{r_0}^{+\infty} + \frac{2GM}{r_0c^2} \left[ \sqrt{\frac{r - r_0}{r + r_0}} \right]_{r_0}^{+\infty} - \pi \\
 &= 2 \left[ -\arcsin\left(\frac{r_0}{r}\right) \right]_{r_0}^{+\infty} + \frac{2GM}{r_0c^2} \left[ \sqrt{1 - \frac{r_0^2}{r^2}} \right]_{r_0}^{+\infty} + \frac{2GM}{r_0c^2} \left[ \sqrt{\frac{r - r_0}{r + r_0}} \right]_{r_0}^{+\infty} - \pi \\
 &= 2 \left[ 0 - \left(-\frac{\pi}{2}\right) \right] + \frac{2GM}{r_0c^2} [1 - 0] + \frac{2GM}{r_0c^2} [1 - 0] - \pi \\
 &= \pi + \frac{2GM}{r_0c^2} + \frac{2GM}{r_0c^2} - \pi \\
 &= \frac{4GM}{r_0c^2}
 \end{aligned}$$

Dans le cas d'une lumière rasant la surface du Soleil,  $r_0$  est égal au rayon du Soleil, autrement dit  $r_0 = 6.95 \cdot 10^8 \text{ m} = 6.95 \cdot 10^{10} \text{ cm}$ . De plus, puisque l'on travaille en centimètres et en grammes ainsi qu'en secondes d'arc (comme dans le cas de la précession du périhélie de Mercure), nous avons alors

$$\begin{aligned}
 \Delta\varphi &= \frac{4GM}{r_0c^2} \text{ rad} \\
 &\stackrel{2.76}{=} \frac{4 \cdot 6.67 \cdot 10^{-8} \cdot 2 \cdot 10^{33}}{6.95 \cdot 10^{10} \cdot (3 \cdot 10^{10})^2} \cdot \frac{180 \cdot 3600}{\pi} \text{ secondes d'arc} \\
 &= 1.75 \text{ secondes d'arc}
 \end{aligned}$$

En conclusion, nous trouvons une valeur théorique pour l'angle de déviation  $\Delta\varphi$  de 1.75 secondes d'arc, ce qui est en adéquation avec les observations.

## Chapitre 3

# La théorie scalaire de Gunnar Nordström

« Ah, Monsieur le Comte veut danser ?  
Eh bien, je vais lui faire la musique ! »

A. Einstein

Ce troisième chapitre présente la théorie scalaire de Nordström et se base essentiellement sur les références [6], [13], [14], [15] et [16]. La théorie scalaire de Nordström date de la fin de l'année 1913 et décrit la gravitation via, comme son nom l'indique, un modèle scalaire. Cette théorie, à laquelle Einstein s'est intéressé un temps et dont il s'est inspiré avant de s'en écarter, semblait jusqu'alors la seule théorie cohérente décrivant la gravitation. Puis, la relativité générale d'Einstein est apparue, balayant ainsi la théorie scalaire de Nordström, jugée peu esthétique. Comme le dit Einstein dans l'ouvrage [6] de Pais, « *La théorie de Nordström [...] repose sur un espace quadri-dimensionnel à priori euclidien, et croire en cet espace tient, à mon avis, de la superstition* ». Néanmoins, Einstein s'étant quelque peu inspiré de Nordström, certaines similitudes existent entre les deux théories qu'ils ont chacun élaborées.

Le manque d'esthétisme de la théorie scalaire de Nordström n'est pas le seul argument ayant entraîné sa perte. En effet, celle-ci ne suppose aucune déviation de la lumière et prédit un retard du périhélie de Mercure au lieu d'une avance de celui-ci, ce qui a d'autant plus contribué à privilégier la relativité générale. En réalité, il existe deux versions de la théorie scalaire de Nordström : ces deux théories font l'objet des deux premières sections de ce chapitre, en suivant une démarche purement historique. Nous décrivons ensuite la géométrie de la théorie scalaire de Nordström, en suivant une démarche plus mathématique. Nous terminons enfin par calculer la précession du périhélie de Mercure pour cette théorie.

### 3.1 Première théorie de Nordström

Tout d'abord, notons que Nordström suppose que la vitesse de la lumière  $c$  est indépendante du potentiel gravitationnel et est une constante universelle. Soit  $\phi$  un potentiel gravitationnel satisfaisant à l'équation de Poisson

$$\Delta\phi = 4\pi G\rho$$

Dans le cas où  $\phi$  dépend du temps, l'équation de Poisson se généralise de la façon suivante.

$$-\square\phi = \frac{4\pi G}{c^4}\rho \tag{3.1}$$

où  $\square$  désigne le d'Alembertien<sup>1</sup>,  $G$  est la constante de Newton et  $\rho$  est un champ scalaire identifié à une densité de masse au repos.

Soient également  $\vec{K}$ , la force gravitationnelle agissant sur l'unité de masse et  $\vec{a}$ , l'accélération. Considérons la seconde loi de Newton pour une particule ponctuelle

$$\begin{aligned} \vec{K} = -\vec{\nabla}\phi &\iff \vec{K} = \vec{a} \\ &\iff \vec{K} = \ddot{\vec{x}} \end{aligned} \quad (3.2)$$

En composantes, cette loi peut se réécrire

$$K_\mu = -\frac{\partial\phi}{\partial x^\mu} \quad (3.3)$$

$$\stackrel{(3.2)}{\iff} K_\mu = \ddot{x}_\mu \quad \forall \mu = 1, \dots, 4 \quad (3.4)$$

Si l'on multiplie à présent par la masse  $m$  d'une particule ponctuelle de part et d'autre de l'égalité dans l'équation (3.4),

$$\begin{aligned} K_\mu = \ddot{x}_\mu &\iff mK_\mu = m\ddot{x}_\mu \\ &\iff mK_\mu = \frac{d}{d\tau}(m\dot{x}_\mu) \end{aligned} \quad (3.5)$$

Nordström proposa alors d'imposer une dépendance de la masse relativement au potentiel  $\phi$ , et non plus relativement à la vitesse de la lumière (puisqu'elle est considérée comme constante). La masse est donc maintenant variable dans le temps à travers le potentiel  $\phi$ . Cette hypothèse de variabilité de la masse viole le principe de relativité de Galilée, puisque celui-ci doit être valable quelle que soit la masse. Or si la masse varie, cela signifie qu'elle n'est plus la même en tout point de l'espace et donc, le principe d'équivalence de Galilée n'est plus satisfait. Par variabilité de la masse, l'équation (3.5) devient

$$mK_\mu = \frac{d}{d\tau}(m\dot{x}_\mu) \iff mK_\mu = m\ddot{x}_\mu + \dot{m}\dot{x}_\mu \quad (3.6)$$

où  $\tau$  désigne le temps propre, tel que  $d\tau^2 = -dx^\mu dx_\mu = -\eta_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu$  avec  $\eta_{\mu\nu}$  la métrique de Minkowski. On remarque alors qu'un nouveau terme en  $\dot{m}$  vient d'apparaître. Considérons maintenant

$$\begin{aligned} mK_\mu = \frac{d}{d\tau}(m\dot{x}_\mu) &\stackrel{(3.3)}{\iff} -m\frac{\partial\phi}{\partial x^\mu} = \frac{d}{d\tau}(m\dot{x}_\mu) \\ &\stackrel{\times\dot{x}^\mu}{\iff} -m\dot{x}^\mu\frac{\partial\phi}{\partial x^\mu} = \dot{x}^\mu\frac{d}{d\tau}(m\dot{x}_\mu) \\ &\iff -m\frac{\partial x^\mu}{\partial\tau}\frac{\partial\phi}{\partial x^\mu} = \dot{x}^\mu\frac{d}{d\tau}(m\dot{x}_\mu) \\ &\iff -m\frac{d\phi}{d\tau} = \dot{x}^\mu\frac{d}{d\tau}(m\dot{x}_\mu) \end{aligned}$$

---

1. Le d'Alembertien  $\square$  est une généralisation du Laplacien  $\Delta$  dans le cas où le potentiel  $\phi$  dépend du temps. Schématiquement, nous avons  $\square = -\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2} + \Delta$ .

Ainsi, de l'équation (3.6), il découle que

$$\begin{aligned}
 -m \frac{d\phi}{d\tau} = \dot{x}^\mu \frac{d}{d\tau}(m \dot{x}_\mu) &\iff -m \frac{d\phi}{d\tau} = m \dot{x}^\mu \ddot{x}_\mu + \dot{m} \underbrace{\dot{x}^\mu \dot{x}_\mu}_{\stackrel{\text{déf.}}{=} -c^2} \\
 &\iff -m \frac{d\phi}{d\tau} = m \dot{x}^\mu \ddot{x}_\mu - c^2 \frac{dm}{d\tau} \tag{3.7}
 \end{aligned}$$

$$\iff m \frac{d\phi}{d\tau} = c^2 \frac{dm}{d\tau} \tag{3.8}$$

où, pour passer de l'équation (3.7) à l'équation (3.8), on a utilisé le fait que la quadri-vitesse  $\dot{x}^\mu$  est orthogonale à la quadri-accélération  $\ddot{x}_\mu$ , ce qui signifie que leur produit scalaire est nul, comme nous l'avons déjà détaillé à la section 2.2.3.

En intégrant maintenant de part et d'autre de l'égalité dans l'équation (3.8) et en regroupant toutes les constantes d'intégration en un seul terme noté  $m_0$ , nous trouvons

$$m = m_0 e^{\left(\frac{\phi}{c^2}\right)}$$

ce qui signifie que la masse inertielle d'une particule ponctuelle n'est plus constante mais dépend exponentiellement du potentiel gravitationnel.

De plus, des équations (3.6) et (3.8), nous déduisons

$$\begin{aligned}
 -m \frac{\partial \phi}{\partial x^\mu} = m \ddot{x}_\mu + \dot{m} \dot{x}_\mu &\iff -m \frac{\partial \phi}{\partial x^\mu} = m \ddot{x}_\mu + \frac{dm}{d\tau} \dot{x}_\mu \\
 &\stackrel{(3.8)}{\iff} -m \frac{\partial \phi}{\partial x^\mu} = m \ddot{x}_\mu + \frac{m}{c^2} \frac{d\phi}{d\tau} \dot{x}_\mu \\
 &\iff -\frac{\partial \phi}{\partial x^\mu} = \ddot{x}_\mu + \frac{\dot{x}_\mu}{c^2} \dot{\phi} \tag{3.9}
 \end{aligned}$$

L'équation (3.9) que nous venons d'obtenir est la **première équation du mouvement** de Nordström. Nous remarquons que celle-ci est indépendante de la masse  $m$  (le principe de relativité de Galilée est par conséquent finalement satisfait, alors qu'à première vue ce n'était pas le cas), et le potentiel gravitationnel  $\phi$  en est la limite non relativiste<sup>2</sup>. Si, en plus,  $\phi$  est un scalaire, alors cette équation est covariante de Lorentz, autrement dit elle sera identique dans tous les référentiels inertiels sous les transformations du groupe de Lorentz définies à la section 2.1 du Chapitre 2.

Le principal problème relevé par Einstein à ce stade est qu'il convient selon lui de considérer la trace du tenseur énergie-impulsion plutôt qu'une densité de masse au repos dans l'équation (3.1). En effet, la masse est la composante  $T_{00}$  du tenseur énergie-impulsion  $T_{\mu\nu}$ , ce qui signifie qu'en réalité l'équation (3.1) change sous les transformations de Lorentz, mélangeant ainsi la composante  $T_{00}$  avec les autres composantes de  $T_{\mu\nu}$ . Ceci donne lieu à la seconde théorie de Nordström, que nous allons détailler à présent.

---

2. Par définition, une limite non relativiste contient un terme newtonien et des corrections relativistes.

## 3.2 Seconde théorie de Nordström

Pour remédier au problème soulevé par Einstein, Nordström a suggéré de considérer une densité de masse  $\rho$  qui soit proportionnelle à la trace du tenseur énergie-impulsion d'une particule. Cette trace, qui constitue ici la seule source possible pour le champ scalaire gravitationnel, est définie par

$$T = \eta_{\mu\nu} T^{\mu\nu} = T^\mu{}_\mu$$

La trace  $T$  de  $T^{\mu\nu}$  est donc un scalaire. Nordström propose alors de considérer une densité de masse  $\rho$  telle que

$$\rho = g(\phi)T$$

où  $g(\phi)$  est une fonction qu'il devait déterminer. En conséquence du principe d'équivalence de Galilée, celui-ci a trouvé

$$g(\phi) = \frac{1}{\phi}$$

ce qui implique

$$\rho = \frac{T}{\phi}$$

Ainsi, en partant de l'équation (3.1), la potentiel  $\phi$  satisfait maintenant à l'équation (3.10), appelée **équation gravitationnelle de Nordström**.

$$\begin{aligned} -\square\phi = \frac{4\pi G}{c^4}\rho &\iff -\square\phi = \frac{4\pi G}{c^4}\frac{T}{\phi} \\ &\iff -\phi\square\phi = \frac{4\pi G}{c^4}T \end{aligned} \quad (3.10)$$

Remarquons que le champ électromagnétique est tel que  $T = 0$ . Par conséquent, en vertu de l'équation (3.10), il ne possède aucune interaction gravitationnelle et donc, la lumière n'est pas déviée, au contraire de la relativité générale qui, elle, prédit une telle déviation. Ce constat constitue le principal problème de la théorie de Nordström.

Si nous posons à présent  $\phi = c^2 \ln \psi$  où  $\psi$  est lui aussi un potentiel gravitationnel, alors l'équation (3.9) devient

$$\begin{aligned} -\frac{\partial\phi}{\partial x^\mu} = \ddot{x}_\mu + \frac{\dot{x}_\mu}{c^2}\dot{\phi} &\iff -\frac{\partial}{\partial x^\mu}(c^2 \ln \psi) = \ddot{x}_\mu + \frac{\dot{x}_\mu}{c^2}\frac{d}{d\tau}(c^2 \ln \psi) \\ &\iff -\frac{c^2}{\psi}\frac{\partial\psi}{\partial x^\mu} = \ddot{x}_\mu + \dot{x}_\mu\frac{d}{d\tau}(\ln \psi) \\ &\iff -\frac{c^2}{\psi}\frac{\partial\psi}{\partial x^\mu} = \ddot{x}_\mu + \dot{x}_\mu\frac{1}{\psi}\frac{d\psi}{d\tau} \\ &\iff c^2\frac{\partial\psi}{\partial x^\mu} + \psi\ddot{x}_\mu + \dot{x}_\mu\dot{\psi} = 0 \\ &\iff \frac{\partial\psi}{\partial x^\mu} + \frac{1}{c^2}\frac{d}{d\tau}(\dot{x}_\mu\psi) = 0 \end{aligned} \quad (3.11)$$

où  $\psi$  vérifie l'équation (3.10). Cette dernière équation est la **seconde équation du mouvement** de Nordström.

Partant maintenant du principe variationnel

$$\delta \int \psi ds = 0$$

où  $ds^2 = \eta_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu$ , on peut trouver l'équation du tenseur énergie-impulsion pour une particule de masse  $m$  et de volume  $V$  au repos. Celui-ci est donné par

$$T^{\mu\nu} = \frac{\rho\psi}{c^2} \dot{x}^\mu \dot{x}^\nu \quad (3.12)$$

et sa trace vaut

$$T = \eta_{\mu\nu} T^{\mu\nu} = \frac{\rho\psi}{c^2} \eta_{\mu\nu} \dot{x}^\mu \dot{x}^\nu = \frac{\rho\psi}{c^2} \underbrace{\dot{x}_\nu \dot{x}^\nu}_{=-c^2} = -\rho\psi \quad (3.13)$$

Sa divergence pour une particule ponctuelle vaut, quant à elle,

$$\begin{aligned} \frac{\partial T^{\mu\nu}}{\partial x^\mu} &\stackrel{(3.12)}{=} \frac{\partial}{\partial x^\mu} \left( \frac{\rho\psi}{c^2} \dot{x}^\mu \dot{x}^\nu \right) \stackrel{\times \eta_{\mu\nu}}{\iff} \eta_{\mu\nu} \frac{\partial T^{\mu\nu}}{\partial x^\mu} = \frac{\partial}{\partial x^\mu} \left( \frac{\rho\psi}{c^2} \eta_{\mu\nu} \dot{x}^\mu \dot{x}^\nu \right) \\ &\iff \eta_{\mu\nu} \frac{\partial T^{\mu\nu}}{\partial x^\mu} = \frac{\partial}{\partial x^\mu} \left( \frac{\rho\psi}{c^2} \underbrace{\dot{x}_\mu \dot{x}^\mu}_{=-c^2} \right) \\ &\stackrel{\times \eta^{\mu\sigma}}{\iff} \underbrace{\eta^{\mu\sigma} \eta_{\mu\nu}}_{=\delta^\sigma_\nu} \frac{\partial T^{\mu\nu}}{\partial x^\mu} = \eta^{\mu\sigma} \frac{\partial}{\partial x^\mu} (-\rho\psi) \\ &\iff \frac{\partial T^{\mu\sigma}}{\partial x^\mu} = -\rho \frac{\partial \psi}{\partial x_\sigma} \end{aligned} \quad (3.14)$$

D'autre part, si le tenseur énergie-impulsion du champ gravitationnel est défini par

$$t^{\mu\nu} = \frac{1}{4\pi G} \left[ \frac{\partial \psi}{\partial x_\mu} \frac{\partial \psi}{\partial x_\nu} - \frac{1}{2} \eta^{\mu\nu} \left( \frac{\partial \psi}{\partial x_\lambda} \frac{\partial \psi}{\partial x^\lambda} \right) \right]$$

alors sa divergence pour le champ gravitationnel découle de l'équation (3.10). En effet,

$$\begin{aligned} \frac{\partial t^{\mu\nu}}{\partial x^\mu} &\stackrel{(3.10)}{=} \eta^{\mu\nu} \frac{\partial}{\partial x^\mu} \left( -\frac{c^4 \psi \square \psi}{4\pi G} \right) \iff \frac{\partial t^{\mu\nu}}{\partial x^\mu} = \frac{\partial}{\partial x_\nu} \left( -\frac{c^4 \psi \square \psi}{4\pi G} \right) \\ &\iff \frac{\partial t^{\mu\nu}}{\partial x^\mu} = \left( -\frac{c^4 \square \psi}{4\pi G} \right) \frac{\partial \psi}{\partial x_\nu} \\ &\iff \frac{\partial t^{\mu\nu}}{\partial x^\mu} \stackrel{(3.1)}{=} \rho \frac{\partial \psi}{\partial x_\nu} \end{aligned} \quad (3.15)$$

Si nous définissons le tenseur énergie-impulsion total par  $T^{\mu\nu} + t^{\mu\nu}$ , alors les équations (3.14) et (3.15) impliquent que

$$\frac{\partial (T^{\mu\nu} + t^{\mu\nu})}{\partial x^\mu} = \frac{\partial T^{\mu\nu}}{\partial x^\mu} + \frac{\partial t^{\mu\nu}}{\partial x^\mu} = -\rho \frac{\partial \psi}{\partial x_\nu} + \rho \frac{\partial \psi}{\partial x_\nu} = 0$$

Cette dernière équation signifie que l'on a conservation de l'énergie et de l'impulsion du système, tout comme en relativité générale.

### 3.3 Géométrie de la théorie de Nordström

La géométrie de la théorie de Nordström fut précisée par Einstein à l'époque où il s'intéressait encore à cette théorie et alors qu'il était en pleine recherche sur la relativité générale. Pour Einstein, l'espace-temps courbe de la théorie de Nordström est décrit par la métrique

$$g_{\mu\nu}(x) = \phi^2(x)\eta_{\mu\nu} \quad (3.16)$$

et son inverse est donnée par

$$g^{\mu\nu}(x) = (g_{\mu\nu}(x))^{-1} = \phi^{-2}(x)\eta^{\mu\nu} \quad (3.17)$$

où  $\phi$  est un potentiel gravitationnel. Comme le dit Bruneton dans la référence [15], prendre le carré du potentiel  $\phi$  assure que  $g_{\mu\nu}$  et  $\eta_{\mu\nu}$  soient de même signature. De plus, la métrique  $g_{\mu\nu}$  ici définie est dite **conformément plate** : il s'agit de la métrique de Minkowski à une transformation conforme près (autrement dit, on a multiplié la métrique de Minkowski par une fonction). Tout comme en relativité générale, l'espace-temps est assimilé à une variété différentiable de dimension 4 et la connexion de Levi-Civita est d'application. Ainsi, la théorie de Nordström satisfait au principe d'équivalence d'Einstein.

#### 3.3.1 Équations des géodésiques

Dans la référence [13], il est stipulé qu'Einstein pensait que le mouvement des particules dans l'espace-temps courbe décrit par la métrique donnée par l'équation (3.16) produit une équation géodésique. La question est donc de savoir si l'équation (3.9) est une équation géodésique.

Partons de l'équation classique des géodésiques

$$\frac{d^2 x^\mu}{c^2 dt^2} + \Gamma^\mu_{\nu\rho} \frac{dx^\nu}{dt} \frac{dx^\rho}{dt} = 0$$

qu'il convient de modifier quelque peu puisque l'on doit dériver par rapport au temps propre  $\tau$  et non par rapport au temps  $t$ . Or, nous avons vu dans la cinématique de la théorie de la relativité générale que

$$\begin{aligned} dt &= \gamma d\tau \\ \iff \frac{d}{d\tau} &= \gamma \frac{d}{dt} \\ \iff \frac{d}{dt} &= \frac{1}{\gamma} \frac{d}{d\tau} \end{aligned} \quad (3.18)$$

où  $\gamma$  est le facteur de Lorentz. On obtient ainsi

$$\begin{aligned} \frac{d^2 x^\mu}{c^2 dt^2} + \Gamma^\mu_{\nu\rho} \frac{dx^\nu}{dt} \frac{dx^\rho}{dt} &= 0 \\ \stackrel{(3.18)}{\iff} \frac{1}{\gamma} \frac{d^2 x^\mu}{c^2 d\tau^2} + \Gamma^\mu_{\nu\rho} \left( \frac{1}{\gamma^2} \right) \frac{dx^\nu}{d\tau} \frac{dx^\rho}{d\tau} &= 0 \\ \iff \frac{d^2 x^\mu}{c^2 d\tau^2} + \Gamma^\mu_{\nu\rho} \frac{1}{\gamma} \frac{dx^\nu}{d\tau} \frac{dx^\rho}{d\tau} &= 0 \end{aligned}$$

Nous supposons que le vecteur  $\vec{\beta}$  défini dans la cinématique de la relativité générale est tel que  $\vec{\beta} \ll 1$ , c'est-à-dire  $v = c$  et donc  $\gamma \simeq 1$ . Autrement dit, les vitesses des particules suivant une géodésique sont petites devant la vitesse de la lumière. Ainsi, l'équation des géodésiques que nous allons employer est la suivante.

$$\frac{d^2 x^\mu}{c^2 d\tau^2} + \Gamma^\mu_{\nu\rho} \frac{dx^\nu}{d\tau} \frac{dx^\rho}{d\tau} = 0 \quad (3.19)$$

Commençons par calculer les coefficients de connexion  $\Gamma^\mu_{\nu\rho}$ . Puisque la connexion de Levi-Civita est ici d'application, nous avons

$$\begin{aligned} \Gamma^\mu_{\nu\rho} &\stackrel{\text{déf.}}{=} \frac{1}{2} g^{\mu\sigma} (\partial_\nu g_{\rho\sigma} + \partial_\rho g_{\nu\sigma} - \partial_\sigma g_{\nu\rho}) \\ (3.16) \text{ et } (3.17) &\stackrel{=}{=} \frac{\phi^{-2}}{2} \eta^{\mu\sigma} [\partial_\nu (\phi^2 \eta_{\rho\sigma}) + \partial_\rho (\phi^2 \eta_{\nu\sigma}) - \partial_\sigma (\phi^2 \eta_{\nu\rho})] \\ &= \frac{\phi^{-2}}{2} \eta^{\mu\sigma} [2\phi \partial_\nu \phi \eta_{\rho\sigma} + \phi^2 \partial_\nu \eta_{\rho\sigma} + 2\phi \partial_\rho \phi \eta_{\nu\sigma} + \phi^2 \partial_\rho \eta_{\nu\sigma} - 2\phi \partial_\sigma \phi \eta_{\nu\rho} - \phi^2 \partial_\sigma \eta_{\nu\rho}] \\ &= \frac{\phi^{-2}}{2} \eta^{\mu\sigma} [\underbrace{\phi^2 (\partial_\nu \eta_{\rho\sigma} + \partial_\rho \eta_{\nu\sigma} - \partial_\sigma \eta_{\nu\rho})}_{=0 \text{ car } \eta_{\mu\nu} = \text{diag}(-1,1,1,1)} + 2\phi (\partial_\nu \phi \eta_{\rho\sigma} + \partial_\rho \phi \eta_{\nu\sigma} - \partial_\sigma \phi \eta_{\nu\rho})] \\ &= \phi^{-1} \eta^{\mu\sigma} (\partial_\nu \phi \eta_{\rho\sigma} + \partial_\rho \phi \eta_{\nu\sigma} - \partial_\sigma \phi \eta_{\nu\rho}) \\ &= \phi^{-1} (\underbrace{\partial_\nu \phi \eta^{\mu\sigma} \eta_{\rho\sigma}}_{=\delta_\rho^\mu} + \underbrace{\partial_\rho \phi \eta^{\mu\sigma} \eta_{\nu\sigma}}_{=\delta_\nu^\mu} - \partial_\sigma \phi \eta^{\mu\sigma} \eta_{\nu\rho}) \\ &= \phi^{-1} (\partial_\nu \phi \delta_\rho^\mu + \partial_\rho \phi \delta_\nu^\mu - \partial_\sigma \phi \eta^{\mu\sigma} \eta_{\nu\rho}) \end{aligned} \quad (3.20)$$

Nous pouvons maintenant obtenir l'expression des équations des géodésiques. Nous avons

$$\begin{aligned} &\frac{d^2 x^\mu}{c^2 d\tau^2} + \Gamma^\mu_{\nu\rho} \frac{dx^\nu}{d\tau} \frac{dx^\rho}{d\tau} = 0 \\ (3.20) &\iff \frac{d^2 x^\mu}{c^2 d\tau^2} + \phi^{-1} (\partial_\nu \phi \delta_\rho^\mu + \partial_\rho \phi \delta_\nu^\mu - \partial_\sigma \phi \eta^{\mu\sigma} \eta_{\nu\rho}) \frac{dx^\nu}{d\tau} \frac{dx^\rho}{d\tau} = 0 \\ &\iff \frac{d^2 x^\mu}{c^2 d\tau^2} + \phi^{-1} \left( \partial_\nu \phi \delta_\rho^\mu \frac{dx^\nu}{d\tau} \frac{dx^\rho}{d\tau} + \partial_\rho \phi \delta_\nu^\mu \frac{dx^\nu}{d\tau} \frac{dx^\rho}{d\tau} - \partial_\sigma \phi \eta^{\mu\sigma} \eta_{\nu\rho} \frac{dx^\nu}{d\tau} \frac{dx^\rho}{d\tau} \right) = 0 \end{aligned}$$

Or,  $\delta_\rho^\mu = 1$  si  $\rho = \mu$ ,  $\delta_\nu^\mu = 1$  si  $\nu = \mu$  et

$$\eta_{\nu\rho} \frac{dx^\nu}{d\tau} \frac{dx^\rho}{d\tau} = \frac{dx^\nu}{d\tau} \frac{dx_\nu}{d\tau} = \dot{x}^\nu \dot{x}_\nu = -c^2$$

Donc

$$\begin{aligned} &\frac{d^2 x^\mu}{c^2 d\tau^2} + \phi^{-1} \left( \partial_\nu \phi \delta_\rho^\mu \frac{dx^\nu}{d\tau} \frac{dx^\rho}{d\tau} + \partial_\rho \phi \delta_\nu^\mu \frac{dx^\nu}{d\tau} \frac{dx^\rho}{d\tau} - \partial_\sigma \phi \eta^{\mu\sigma} \eta_{\nu\rho} \frac{dx^\nu}{d\tau} \frac{dx^\rho}{d\tau} \right) = 0 \\ &\iff \frac{d^2 x^\mu}{c^2 d\tau^2} + \phi^{-1} \left( \partial_\nu \phi \frac{dx^\nu}{d\tau} \frac{dx^\mu}{d\tau} + \partial_\rho \phi \frac{dx^\mu}{d\tau} \frac{dx^\rho}{d\tau} - (-c^2) \partial_\sigma \phi \eta^{\mu\sigma} \right) = 0 \end{aligned}$$

Changeons l'indice  $\nu$  en  $\rho$  dans le premier terme entre parenthèses. Nous avons maintenant

$$\begin{aligned}
 & \frac{d^2 x^\mu}{c^2 d\tau^2} + \phi^{-1} \left( 2 \partial_\rho \phi \frac{dx^\rho}{d\tau} \frac{dx^\mu}{d\tau} + c^2 \partial_\sigma \phi \eta^{\mu\sigma} \right) = 0 \\
 \Leftrightarrow & \frac{d^2 x^\mu}{c^2 d\tau^2} + \frac{2}{\phi} \underbrace{\frac{\partial \phi}{\partial x^\rho} \frac{dx^\rho}{d\tau}}_{=\dot{\phi}} \frac{dx^\mu}{d\tau} + \frac{c^2}{\phi} \partial_\sigma \phi \eta^{\mu\sigma} = 0 \\
 \stackrel{\times \eta_{\mu\rho}}{\Leftrightarrow} & \eta_{\mu\rho} \frac{d^2 x^\mu}{c^2 d\tau^2} + \frac{2\dot{\phi}}{\phi} \eta_{\mu\rho} \frac{dx^\mu}{d\tau} = -\frac{c^2}{\phi} \partial_\sigma \phi \underbrace{\eta_{\mu\rho} \eta^{\mu\sigma}}_{\delta_\rho^\sigma=1 \text{ si } \sigma=\rho} \\
 \Leftrightarrow & \frac{d^2 x_\rho}{c^2 d\tau^2} + \frac{2\dot{\phi}}{\phi} \frac{dx_\rho}{d\tau} = -\frac{c^2}{\phi} \frac{\partial \phi}{\partial x^\rho} \\
 \Leftrightarrow & \frac{d^2 x_\rho}{c^4 d\tau^2} + \frac{2\dot{\phi}}{c^2 \phi} \dot{x}_\rho = -\frac{1}{\phi} \frac{\partial \phi}{\partial x^\rho} \\
 \Leftrightarrow & \frac{\ddot{x}_\rho}{c^2} + \frac{2\dot{\phi}}{c^2 \phi} \dot{x}_\rho = -\frac{1}{\phi} \frac{\partial \phi}{\partial x^\rho}
 \end{aligned}$$

L'équation obtenue ne redonne pas l'équation (3.9), à savoir la première équation du mouvement de Nordström. Par contre, elle est identique à l'équation (3.11) à un facteur 2 près dans le deuxième terme du membre de gauche de l'équation. En effet, si nous transformons quelque peu l'équation (3.11), nous obtenons

$$\begin{aligned}
 & c^2 \frac{\partial \psi}{\partial x^\mu} + \psi \ddot{x}_\mu + \dot{x}_\mu \dot{\psi} = 0 \\
 \stackrel{\times \frac{1}{c^2} \text{ et } \times \frac{1}{\psi}}{\Leftrightarrow} & \frac{1}{\psi} \frac{\partial \psi}{\partial x^\mu} + \frac{\ddot{x}_\mu}{c^2} + \frac{\dot{\psi}}{c^2 \psi} \dot{x}_\mu = 0 \\
 \Leftrightarrow & \frac{\ddot{x}_\mu}{c^2} + \frac{\dot{\psi}}{c^2 \psi} \dot{x}_\mu = -\frac{1}{\psi} \frac{\partial \psi}{\partial x^\mu}
 \end{aligned}$$

Par conséquent, la seconde équation du mouvement de Nordström est une équation des géodésiques caractérisant le mouvement des particules dans l'espace-temps courbe décrit par la métrique donnée par l'équation (3.16).

### 3.3.2 Scalaire de courbure

Nous allons à présent calculer le scalaire de courbure, dans le but de déterminer les équations du champ. Dans les références [13] et [15], le scalaire de courbure est donné sous la forme

$$R = -\frac{6}{\phi^3} \square \phi$$

tandis que dans la référence [16], il est présenté sous la forme

$$R = -\frac{6}{\phi} \square \phi$$

Notons que les auteurs font l'hypothèse que les dérivées partielles du type  $\partial_\mu \phi \partial_\nu \phi$  sont nulles lorsque l'espace-temps est plat, de sorte que

$$\square \phi = \eta^{\mu\nu} \partial_\mu \partial_\nu \phi$$

Cependant, cette hypothèse nous intrigue car elle n'est apparemment pas fondée.

Calculons pour commencer le d'Alembertien du champ scalaire  $\phi$ . Nous avons

$$\square \phi \stackrel{\text{déf.}}{=} \frac{1}{\sqrt{-g}} \partial_\mu (g^{\mu\nu} \sqrt{-g} \partial_\nu \phi)$$

où

$$\begin{aligned} g &= \det(g_{\mu\nu}) \\ &= \det(\phi^2 \eta_{\mu\nu}) \\ &= \det[\phi^2 \cdot \text{diag}(-1, 1, 1, 1)] \\ &= \det[\text{diag}(-\phi^2, \phi^2, \phi^2, \phi^2)] \\ &= -\phi^8 \end{aligned}$$

et donc

$$\sqrt{-g} = \sqrt{-(-\phi^8)} = \phi^4 \quad (3.21)$$

Nous obtenons ainsi pour le d'Alembertien du champ scalaire  $\phi$

$$\begin{aligned} \square \phi &= \frac{1}{\sqrt{-g}} \partial_\mu (g^{\mu\nu} \sqrt{-g} \partial_\nu \phi) \\ &\stackrel{(3.17) \text{ et } (3.21)}{=} \frac{1}{\phi^4} \partial_\mu (\phi^{-2} \eta^{\mu\nu} \phi^4 \partial_\nu \phi) \end{aligned} \quad (3.22)$$

$$\begin{aligned} &= \frac{1}{\phi^4} \partial_\mu (\phi^2 \eta^{\mu\nu} \partial_\nu \phi) \\ &= \frac{1}{\phi^4} (2\phi \partial_\mu \phi \eta^{\mu\nu} \partial_\nu \phi + \phi^2 \eta^{\mu\nu} \partial_\mu \partial_\nu \phi) \\ &= 2\phi^{-3} \eta^{\mu\nu} \partial_\mu \phi \partial_\nu \phi + \phi^{-2} \eta^{\mu\nu} \partial_\mu \partial_\nu \phi \end{aligned} \quad (3.23)$$

$$= \phi^{-2} \eta^{\mu\nu} \partial_\mu \partial_\nu \phi \quad (3.24)$$

où l'équation (3.24) correspond au d'Alembertien du potentiel  $\phi$  avec l'hypothèse effectuée dans les trois références [13], [15] et [16].

Calculons maintenant le scalaire de courbure  $R$ .

$$\begin{aligned} R &= g^{\mu\nu} Ric_{\mu\nu} \\ &= g^{\mu\nu} R^\lambda_{\mu\lambda\nu} \\ &= g^{\mu\nu} (\partial_\lambda \Gamma^\lambda_{\nu\mu} - \partial_\nu \Gamma^\lambda_{\lambda\mu} + \Gamma^\kappa_{\nu\mu} \Gamma^\lambda_{\lambda\kappa} - \Gamma^\kappa_{\lambda\mu} \Gamma^\lambda_{\nu\kappa}) \\ &= g^{\mu\nu} \partial_\lambda \Gamma^\lambda_{\nu\mu} - g^{\mu\nu} \partial_\nu \Gamma^\lambda_{\lambda\mu} + g^{\mu\nu} \Gamma^\kappa_{\nu\mu} \Gamma^\lambda_{\lambda\kappa} - g^{\mu\nu} \Gamma^\kappa_{\lambda\mu} \Gamma^\lambda_{\nu\kappa} \end{aligned}$$

Examinons à présent chacun des termes de ce scalaire de courbure séparément.

• Premier terme  $g^{\mu\nu} \partial_\lambda \Gamma^\lambda_{\nu\mu}$ .

$$\begin{aligned}
 g^{\mu\nu} \partial_\lambda \Gamma^\lambda_{\nu\mu} &\stackrel{(3.17) \text{ et } (3.20)}{=} \phi^{-2} \eta^{\mu\nu} \partial_\lambda [\phi^{-1} \partial_\mu \phi \delta_\nu^\lambda + \phi^{-1} \partial_\nu \phi \delta_\mu^\lambda - \phi^{-1} \eta^{\lambda\kappa} \eta_{\mu\nu} \partial_\kappa \phi] \\
 &= \phi^{-2} [\phi^{-1} \eta^{\mu\nu} \partial_\lambda \partial_\mu \phi \delta_\nu^\lambda + (-\phi^{-2} \partial_\lambda \phi) \eta^{\mu\nu} \partial_\mu \phi \delta_\nu^\lambda \\
 &\quad + \phi^{-1} \eta^{\mu\nu} \partial_\lambda \partial_\nu \phi \delta_\mu^\lambda + (-\phi^{-2} \partial_\lambda \phi) \eta^{\mu\nu} \partial_\nu \phi \delta_\mu^\lambda \\
 &\quad - (-\phi^{-2} \partial_\lambda \phi) \eta^{\lambda\kappa} \underbrace{\eta_{\mu\nu} \eta^{\mu\nu}}_{=4} \partial_\kappa \phi - \phi^{-1} \eta^{\lambda\kappa} \underbrace{\eta_{\mu\nu} \eta^{\mu\nu}}_{=4} \partial_\lambda \partial_\kappa \phi] \\
 &= \phi^{-2} [\phi^{-1} \eta^{\mu\nu} \partial_\nu \partial_\mu \phi - \phi^{-2} \eta^{\mu\nu} \partial_\nu \phi \partial_\mu \phi + \phi^{-1} \eta^{\mu\nu} \partial_\mu \partial_\nu \phi \\
 &\quad - \phi^{-2} \eta^{\mu\nu} \partial_\mu \phi \partial_\nu \phi + 4\phi^{-2} \eta^{\lambda\kappa} \partial_\lambda \phi \partial_\kappa \phi - 4\phi^{-1} \eta^{\lambda\kappa} \partial_\lambda \partial_\kappa \phi] \\
 &\stackrel{\lambda=\mu \text{ et } \kappa=\nu}{=} \phi^{-2} [2\phi^{-2} \eta^{\mu\nu} \partial_\mu \phi \partial_\nu \phi - 2\phi^{-1} \eta^{\mu\nu} \partial_\mu \partial_\nu \phi] \\
 &= 2\phi^{-4} \eta^{\mu\nu} \partial_\mu \phi \partial_\nu \phi - 2\phi^{-3} \eta^{\mu\nu} \partial_\mu \partial_\nu \phi
 \end{aligned}$$

 • Deuxième terme  $-g^{\mu\nu} \partial_\nu \Gamma^\lambda_{\lambda\mu}$ .

$$\begin{aligned}
 -g^{\mu\nu} \partial_\nu \Gamma^\lambda_{\lambda\mu} &\stackrel{(3.17) \text{ et } (3.20)}{=} -\phi^{-2} \eta^{\mu\nu} \partial_\nu [\phi^{-1} \partial_\lambda \phi \delta_\mu^\lambda + \phi^{-1} \partial_\mu \phi \underbrace{\delta_\lambda^\lambda}_{=4} - \phi^{-1} \eta^{\lambda\kappa} \eta_{\lambda\mu} \underbrace{\partial_\kappa \phi}_{=\delta_\mu^\kappa}] \\
 &= -\phi^{-2} [\phi^{-1} \eta^{\mu\nu} \partial_\nu \partial_\lambda \phi \delta_\mu^\lambda + (-\phi^{-2} \partial_\nu \phi) \eta^{\mu\nu} \partial_\lambda \phi \delta_\mu^\lambda \\
 &\quad + 4\phi^{-1} \eta^{\mu\nu} \partial_\nu \partial_\mu \phi + 4(-\phi^{-2} \partial_\nu \phi) \eta^{\mu\nu} \partial_\mu \phi \\
 &\quad - (-\phi^{-2} \partial_\nu \phi) \eta^{\mu\nu} \partial_\kappa \phi \delta_\mu^\kappa - \phi^{-1} \eta^{\mu\nu} \partial_\nu \partial_\kappa \phi \delta_\mu^\kappa] \\
 &= -\phi^{-2} [\phi^{-1} \eta^{\mu\nu} \partial_\nu \partial_\mu \phi - \phi^{-2} \eta^{\mu\nu} \partial_\nu \phi \partial_\mu \phi + 4\phi^{-1} \eta^{\mu\nu} \partial_\nu \partial_\mu \phi \\
 &\quad - 4\phi^{-2} \eta^{\mu\nu} \partial_\mu \phi \partial_\nu \phi + \phi^{-2} \eta^{\mu\nu} \partial_\nu \phi \partial_\mu \phi - \phi^{-1} \eta^{\mu\nu} \partial_\nu \partial_\mu \phi] \\
 &= -\phi^{-2} [-4\phi^{-2} \eta^{\mu\nu} \partial_\mu \phi \partial_\nu \phi + 4\phi^{-1} \eta^{\mu\nu} \partial_\mu \partial_\nu \phi] \\
 &= 4\phi^{-4} \eta^{\mu\nu} \partial_\mu \phi \partial_\nu \phi - 4\phi^{-3} \eta^{\mu\nu} \partial_\mu \partial_\nu \phi
 \end{aligned}$$

 • Troisième terme  $g^{\mu\nu} \Gamma^\kappa_{\nu\mu} \Gamma^\lambda_{\lambda\kappa}$ .

$$\begin{aligned}
 g^{\mu\nu} \Gamma^\kappa_{\nu\mu} \Gamma^\lambda_{\lambda\kappa} &\stackrel{(3.17) \text{ et } (3.20)}{=} \phi^{-2} \eta^{\mu\nu} \phi^{-2} (\partial_\mu \phi \delta_\nu^\kappa + \partial_\nu \phi \delta_\mu^\kappa - \eta^{\kappa\sigma} \eta_{\mu\nu} \partial_\sigma \phi) \\
 &\quad \cdot (\partial_\lambda \phi \delta_\kappa^\lambda + \partial_\kappa \phi \underbrace{\delta_\lambda^\lambda}_{=4} - \eta^{\lambda\sigma} \eta_{\lambda\kappa} \underbrace{\partial_\sigma \phi}_{=\delta_\kappa^\sigma}) \\
 &= \phi^{-4} \eta^{\mu\nu} (\partial_\mu \phi \delta_\nu^\kappa + \partial_\nu \phi \delta_\mu^\kappa - \eta^{\kappa\sigma} \eta_{\mu\nu} \partial_\sigma \phi) (\partial_\kappa \phi + 4\partial_\kappa \phi - \partial_\kappa \phi) \\
 &= \phi^{-4} (\eta^{\mu\nu} \partial_\mu \phi \delta_\nu^\kappa + \eta^{\mu\nu} \partial_\nu \phi \delta_\mu^\kappa - \eta^{\kappa\sigma} \underbrace{\eta^{\mu\nu} \eta_{\mu\nu}}_{=4} \partial_\sigma \phi) 4\partial_\kappa \phi \\
 &= \phi^{-4} (\eta^{\mu\kappa} \partial_\mu \phi + \eta^{\kappa\nu} \partial_\nu \phi - 4\eta^{\kappa\sigma} \partial_\sigma \phi) 4\partial_\kappa \phi \\
 &\stackrel{\mu=\nu=\sigma}{=} \phi^{-4} (-2\eta^{\kappa\sigma} \partial_\sigma \phi) 4\partial_\kappa \phi \\
 &= -8\phi^{-4} \eta^{\kappa\sigma} \partial_\sigma \phi \partial_\kappa \phi
 \end{aligned}$$

• **Quatrième terme**  $-g^{\mu\nu} \Gamma_{\lambda\mu}^{\kappa} \Gamma_{\nu\kappa}^{\lambda}$ .

$$\begin{aligned}
 -g^{\mu\nu} \Gamma_{\lambda\mu}^{\kappa} \Gamma_{\nu\kappa}^{\lambda} &\stackrel{(3.17) \text{ et } (3.20)}{=} -\phi^{-2} \eta^{\mu\nu} \phi^{-2} (\partial_{\lambda} \phi \delta_{\mu}^{\kappa} + \partial_{\mu} \phi \delta_{\lambda}^{\kappa} - \eta^{\kappa\sigma} \eta_{\lambda\mu} \partial_{\sigma} \phi) \\
 &\quad \cdot (\partial_{\nu} \phi \delta_{\kappa}^{\lambda} + \partial_{\kappa} \phi \delta_{\nu}^{\lambda} - \eta^{\lambda\sigma} \eta_{\nu\kappa} \partial_{\sigma} \phi) \\
 &= -\phi^{-4} (\eta^{\mu\nu} \partial_{\lambda} \phi \delta_{\mu}^{\kappa} + \eta^{\mu\nu} \partial_{\mu} \phi \delta_{\lambda}^{\kappa} - \eta^{\kappa\sigma} \underbrace{\eta^{\mu\nu} \eta_{\lambda\mu}}_{=\delta_{\lambda}^{\nu}} \partial_{\sigma} \phi) \\
 &\quad \cdot (\partial_{\nu} \phi \delta_{\kappa}^{\lambda} + \partial_{\kappa} \phi \delta_{\nu}^{\lambda} - \eta^{\lambda\sigma} \eta_{\nu\kappa} \partial_{\sigma} \phi) \\
 &= -\phi^{-4} [(\eta^{\mu\nu} \partial_{\lambda} \phi \delta_{\mu}^{\kappa} \partial_{\nu} \phi \delta_{\kappa}^{\lambda} + \eta^{\mu\nu} \partial_{\lambda} \phi \delta_{\mu}^{\kappa} \partial_{\kappa} \phi \delta_{\nu}^{\lambda} \\
 &\quad - \underbrace{\eta^{\mu\nu} \eta_{\nu\kappa}}_{=\delta_{\kappa}^{\mu}} \eta^{\lambda\sigma} \partial_{\lambda} \phi \delta_{\mu}^{\kappa} \partial_{\sigma} \phi) + (\eta^{\mu\nu} \partial_{\mu} \phi \delta_{\lambda}^{\kappa} \partial_{\nu} \phi \delta_{\kappa}^{\lambda} \\
 &\quad + \eta^{\mu\nu} \partial_{\mu} \phi \delta_{\lambda}^{\kappa} \partial_{\kappa} \phi \delta_{\nu}^{\lambda} - \underbrace{\eta^{\mu\nu} \eta_{\nu\kappa}}_{=\delta_{\kappa}^{\mu}} \eta^{\lambda\sigma} \partial_{\mu} \phi \delta_{\lambda}^{\kappa} \partial_{\sigma} \phi) \\
 &\quad + (-\eta^{\kappa\sigma} \partial_{\sigma} \phi \delta_{\lambda}^{\nu} \partial_{\nu} \phi \delta_{\kappa}^{\lambda} - \eta^{\kappa\sigma} \partial_{\sigma} \phi \delta_{\lambda}^{\nu} \partial_{\kappa} \phi \delta_{\nu}^{\lambda} \\
 &\quad + \underbrace{\eta^{\kappa\sigma} \eta_{\nu\kappa}}_{=\delta_{\nu}^{\sigma}} \underbrace{\eta^{\lambda\sigma}}_{\sigma=\gamma} \partial_{\sigma} \phi \delta_{\lambda}^{\nu} \underbrace{\partial_{\sigma} \phi}_{\sigma=\gamma})] \\
 &= -\phi^{-4} [(\eta^{\mu\nu} \partial_{\mu} \phi \partial_{\nu} \phi + \eta^{\mu\nu} \partial_{\nu} \phi \partial_{\mu} \phi - 4\eta^{\lambda\sigma} \partial_{\lambda} \phi \partial_{\sigma} \phi) \\
 &\quad + (4\eta^{\mu\nu} \partial_{\mu} \phi \partial_{\nu} \phi + \eta^{\mu\nu} \partial_{\mu} \phi \partial_{\nu} \phi - \eta^{\kappa\sigma} \partial_{\kappa} \phi \partial_{\sigma} \phi) \\
 &\quad + (-\eta^{\kappa\sigma} \partial_{\sigma} \phi \partial_{\kappa} \phi - 4\eta^{\kappa\sigma} \partial_{\sigma} \phi \partial_{\kappa} \phi + \eta^{\nu\gamma} \partial_{\nu} \phi \partial_{\gamma} \phi)] \\
 &\stackrel{\lambda=\kappa=\mu \text{ et } \sigma=\gamma=\nu}{=} -\phi^{-4} [-2\eta^{\mu\nu} \partial_{\mu} \phi \partial_{\nu} \phi] \\
 &= 2\phi^{-4} \eta^{\mu\nu} \partial_{\mu} \phi \partial_{\nu} \phi
 \end{aligned}$$

Ainsi, le scalaire de courbure est finalement donné par

$$\begin{aligned}
 R &= 2\phi^{-4} \eta^{\mu\nu} \partial_{\mu} \phi \partial_{\nu} \phi - 2\phi^{-3} \eta^{\mu\nu} \partial_{\mu} \partial_{\nu} \phi + 4\phi^{-4} \eta^{\mu\nu} \partial_{\mu} \phi \partial_{\nu} \phi - 4\phi^{-3} \eta^{\mu\nu} \partial_{\mu} \partial_{\nu} \phi \\
 &\quad - 8\phi^{-4} \eta^{\mu\nu} \partial_{\mu} \phi \partial_{\nu} \phi + 2\phi^{-4} \eta^{\mu\nu} \partial_{\mu} \phi \partial_{\nu} \phi \\
 &= -6\phi^{-3} \eta^{\mu\nu} \partial_{\mu} \partial_{\nu} \phi \\
 &= \begin{cases} -\frac{6}{\phi^3} \square \phi & \text{si } \square \phi = \eta^{\mu\nu} \partial_{\mu} \partial_{\nu} \phi \\ -\frac{6}{\phi} \square \phi & \text{si } \square \phi = \phi^{-2} \eta^{\mu\nu} \partial_{\mu} \partial_{\nu} \phi \end{cases} \tag{3.25}
 \end{aligned}$$

Nous retrouvons le scalaire de courbure des références [13], [15] et [16] si nous faisons toutefois l'hypothèse que les dérivées partielles  $\partial_{\mu} \phi \partial_{\nu} \phi$  sont nulles dans l'équation (3.23), de manière à pouvoir l'exprimer en fonction du d'Alembertien.

### 3.3.3 Équations du champ

Maintenant que nous avons calculé le scalaire de courbure  $R$ , nous allons pouvoir déterminer les équations du champ pour la théorie de Nordström en partant des équations d'Einstein et ainsi voir si nous retombons sur l'équation gravitationnelle donnée par l'équation (3.10). Nous avons

$$\begin{aligned}
 G_{\mu\nu} &= \frac{8\pi G}{c^4} T_{\mu\nu} \\
 \iff Ric_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} R &= \frac{8\pi G}{c^4} T_{\mu\nu} \\
 \iff Ric_{\mu\nu} - \frac{1}{2} \underbrace{g_{\mu\nu} g^{\mu\nu}}_{=4\phi^2\phi^{-2}} Ric_{\mu\nu} &= \frac{8\pi G}{c^4} T_{\mu\nu} \\
 \iff Ric_{\mu\nu} - 2Ric_{\mu\nu} &= \frac{8\pi G}{c^4} T_{\mu\nu} \\
 \iff -Ric_{\mu\nu} &= \frac{8\pi G}{c^4} T_{\mu\nu} \\
 \overset{\times g^{\mu\nu}}{\iff} -g^{\mu\nu} Ric_{\mu\nu} &= \frac{8\pi G}{c^4} g^{\mu\nu} T_{\mu\nu} \\
 \iff -\phi^{-2} \eta^{\mu\nu} Ric_{\mu\nu} &= \frac{8\pi G}{c^4} \phi^{-2} \eta^{\mu\nu} T_{\mu\nu} \\
 \iff -R &= \frac{8\pi G}{c^4} T \\
 \iff \begin{cases} \frac{1}{\phi^3} \square \phi = \frac{4\pi G}{3c^4} T & \text{si } R = -\frac{6}{\phi^3} \square \phi \\ \frac{1}{\phi} \square \phi = \frac{4\pi G}{3c^4} T & \text{si } R = -\frac{6}{\phi} \square \phi \end{cases}
 \end{aligned}$$

Aucune de ces deux équations ne correspond à l'équation gravitationnelle de Nordström, bien que l'on retrouve des similitudes. En effet, le membre de gauche ne possède ni le bon signe, ni le bon facteur multipliant le d'Alembertien et le facteur du membre de droite vaut  $\frac{4}{3}$  au lieu de 4. Nous pensons par conséquent que l'équation gravitationnelle de Nordström n'est qu'une généralisation de l'équation de Poisson, voire que les paramètres ont été posés, mais ceci reste à vérifier. Effectivement, il s'agit de voir s'il est possible d'obtenir les équations du champ à partir d'un principe variationnel.

Néanmoins, en supposant que l'équation (3.10) est une équation du champ, celle-ci peut être réécrite de la façon suivante (en prenant pour  $R$  la première valeur calculée de l'équation (3.25)).

$$\begin{aligned}
 -\phi \square \phi = \frac{4\pi G}{c^4} T &\overset{(3.25)}{\iff} -\phi \left( -\frac{\phi^3}{6} R \right) = \frac{4\pi G}{c^4} T \\
 \iff R &= \frac{24\pi G}{c^4} \frac{T}{\phi^4} \tag{3.26}
 \end{aligned}$$

La trace  $T$  du tenseur énergie-impulsion est par conséquent transformée en  $\frac{T}{\phi^4}$ . Notons cette nouvelle quantité  $T$ , comme le suggère la référence [13]. Nous obtenons alors une formulation purement géométrique de l'équation gravitationnelle de Nordström, comme on la trouve classiquement dans la littérature, notamment dans les références [13], [15] et [16].

$$R = \frac{24\pi G}{c^4} T \quad (3.27)$$

Pour l'époque, en 1913, cette équation décrivait pour la première fois la gravitation de manière purement géométrique, avant d'être abandonnée pour les équations d'Einstein deux ans plus tard.

### 3.3.4 Principe variationnel

Nous allons maintenant examiner si les équations du champ données par l'équation (3.10) peuvent être obtenues à partir d'un principe variationnel.

#### • Un premier essai avec le lagrangien proposé dans la référence [9]

Considérons l'équation d'Euler-Lagrange

$$\frac{\partial(\sqrt{-g}\mathcal{L}(\phi, \partial_\mu\phi))}{\partial\phi} - \partial_\nu \left( \frac{\partial(\sqrt{-g}\mathcal{L}(\phi, \partial_\mu\phi))}{\partial(\partial_\nu\phi)} \right) = 0 \quad (3.28)$$

que nous avons obtenue dans la description sous forme covariante de la construction des équations d'Einstein à partir du principe variationnel (cf. Chapitre 2).

Considérons également le lagrangien du champ scalaire  $\phi$ , donné par (cf. référence [9])

$$\mathcal{L}(\phi, \partial_\mu\phi) \stackrel{\text{déf.}}{=} \frac{1}{2} g^{\mu\nu} \partial_\mu\phi \partial_\nu\phi \quad (3.29)$$

$$\stackrel{(3.17)}{=} \frac{1}{2} \phi^{-2} \eta^{\mu\nu} \partial_\mu\phi \partial_\nu\phi \quad (3.30)$$

et calculons chacune des dérivées partielles de l'équation (3.28). Nous avons

$$\begin{aligned} \frac{\partial(\sqrt{-g}\mathcal{L})}{\partial\phi} &\stackrel{(3.21)}{=} \frac{\partial(\phi^4\mathcal{L})}{\partial\phi} \\ &= 4\phi^3\mathcal{L} + \phi^4 \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\phi} \\ &\stackrel{(3.30)}{=} 4\phi^3 \frac{1}{2} \phi^{-2} \eta^{\mu\nu} \partial_\mu\phi \partial_\nu\phi + \phi^4 (-2\phi^{-3}) \eta^{\mu\nu} \partial_\mu\phi \partial_\nu\phi \\ &= 2\phi \eta^{\mu\nu} \partial_\mu\phi \partial_\nu\phi - 2\phi \eta^{\mu\nu} \partial_\mu\phi \partial_\nu\phi \\ &= 0 \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial(\sqrt{-g} \mathcal{L})}{\partial(\partial_\sigma \phi)} &\stackrel{(3.21)}{=} \frac{\partial(\phi^4 \mathcal{L})}{\partial(\partial_\sigma \phi)} \\
 &\stackrel{(3.29)}{=} \frac{\phi^4}{2} g^{\mu\nu} (\delta_\mu^\sigma (\partial_\nu \phi) + (\partial_\mu \phi) \delta_\nu^\sigma) \\
 &= \frac{\phi^4}{2} g^{\mu\nu} \delta_\mu^\sigma (\partial_\nu \phi) + \frac{\phi^4}{2} g^{\mu\nu} (\partial_\mu \phi) \delta_\nu^\sigma \\
 &= \frac{\phi^4}{2} g^{\sigma\nu} (\partial_\nu \phi) + \frac{\phi^4}{2} g^{\mu\sigma} (\partial_\mu \phi) \\
 &\stackrel{\nu=\mu}{=} \phi^4 g^{\mu\sigma} (\partial_\mu \phi) \\
 &\stackrel{(3.17)}{=} \phi^2 \eta^{\mu\sigma} (\partial_\mu \phi) \\
 &= \phi^2 (\partial^\sigma \phi)
 \end{aligned}$$

L'équation (3.28) devient alors

$$\begin{aligned}
 &\frac{\partial(\sqrt{-g} \mathcal{L}(\phi, \partial_\mu \phi))}{\partial \phi} - \partial_\nu \left( \frac{\partial(\sqrt{-g} \mathcal{L}(\phi, \partial_\mu \phi))}{\partial(\partial_\nu \phi)} \right) = 0 \\
 \iff & 0 - \partial_\nu (\phi^2 (\partial^\nu \phi)) = 0 \\
 \iff & \partial_\nu (\phi^2 (\partial^\nu \phi)) = 0 \\
 \iff & 2\phi \partial_\nu \phi \partial^\nu \phi + \phi^2 \partial_\nu \partial^\nu \phi = 0 \\
 \iff & 2\phi g^{\mu\nu} \partial_\mu \phi \partial_\nu \phi + \phi^2 g^{\mu\nu} \partial_\mu \partial_\nu \phi = 0 \\
 \stackrel{(3.17)}{\iff} & 2\phi^{-1} \eta^{\mu\nu} \partial_\mu \phi \partial_\nu \phi + \eta^{\mu\nu} \partial_\mu \partial_\nu \phi = 0 \\
 \stackrel{\times \phi^{-2}}{\iff} & 2\phi^{-3} \eta^{\mu\nu} \partial_\mu \phi \partial_\nu \phi + \phi^{-2} \eta^{\mu\nu} \partial_\mu \partial_\nu \phi = 0 \\
 \stackrel{(3.23)}{\iff} & \square \phi = 0
 \end{aligned}$$

Nous retrouvons finalement une équation de d'Alembert pour le potentiel  $\phi$ . Il convient donc de considérer un autre lagrangien afin d'obtenir les équations du champ. Remarquons que nous n'avons pas fait ici l'hypothèse que les dérivées partielles  $\partial_\mu \phi \partial_\nu \phi$  sont nulles.

• **Un second essai avec les lagrangiens proposés dans les références [15] et [17]**

Soient les lagrangiens proposés dans les références [15] et [17]

$$\mathcal{L}(\phi, \partial_\mu \phi) = -\frac{c^4}{8\pi G} \eta^{\mu\nu} \partial_\mu \phi \partial_\nu \phi + \mathcal{L}_{\text{mat}}$$

et

$$\mathcal{L}(\phi, \partial_\mu \phi) = \frac{1}{8\pi} \eta^{\mu\nu} \partial_\mu \phi \partial_\nu \phi - \rho \phi$$

respectivement, où  $\rho$  est une densité de masse.

En nous inspirant de ces deux lagrangiens, nous allons considérer le lagrangien suivant.

$$\mathcal{L}(\phi, \partial_\mu \phi) = \frac{c^4}{8\pi G} \eta^{\mu\nu} \partial_\mu \phi \partial_\nu \phi + \frac{\rho\phi}{5} \quad (3.31)$$

Le facteur  $\frac{1}{5}$  dans le deuxième terme du membre de droite ainsi que le signe + devant celui-ci ont été choisis par commodité et de manière à obtenir le plus précisément possible l'équation (3.10), après plusieurs essais de calculs infructueux à partir d'autres lagrangiens.

Calculons chacune des dérivées partielles de l'équation (3.28). Nous avons

$$\begin{aligned} \frac{\partial(\sqrt{-g} \mathcal{L})}{\partial \phi} &\stackrel{(3.21) \text{ et } (3.31)}{=} \frac{\partial}{\partial \phi} \left[ \phi^4 \left( \frac{c^4}{8\pi G} \eta^{\mu\nu} \partial_\mu \phi \partial_\nu \phi + \frac{\rho\phi}{5} \right) \right] \\ &= \frac{2\phi^3 c^4}{4\pi G} \eta^{\mu\nu} \partial_\mu \phi \partial_\nu \phi + \rho\phi^4 \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} \frac{\partial(\sqrt{-g} \mathcal{L})}{\partial(\partial_\sigma \phi)} &\stackrel{(3.21) \text{ et } (3.31)}{=} \phi^4 \frac{\partial}{\partial(\partial_\sigma \phi)} \left[ \frac{c^4}{8\pi G} \eta^{\mu\nu} \partial_\mu \phi \partial_\nu \phi + \frac{\rho\phi}{5} \right] \\ &= \phi^4 \left[ \frac{\partial}{\partial(\partial_\sigma \phi)} \left( \frac{c^4}{8\pi G} \eta^{\mu\nu} \partial_\mu \phi \partial_\nu \phi \right) + \underbrace{\frac{\partial}{\partial(\partial_\sigma \phi)} \left( \frac{\rho\phi}{5} \right)}_{=0} \right] \\ &= \frac{\phi^4 c^4}{8\pi G} \eta^{\mu\nu} [\delta_\mu^\sigma (\partial_\nu \phi) + (\partial_\mu \phi) \delta_\nu^\sigma] \\ &= \frac{\phi^4 c^4}{8\pi G} \eta^{\mu\nu} \delta_\mu^\sigma (\partial_\nu \phi) + \frac{\phi^4 c^4}{8\pi G} \eta^{\mu\nu} (\partial_\mu \phi) \delta_\nu^\sigma \\ &= \frac{\phi^4 c^4}{8\pi G} \eta^{\sigma\nu} (\partial_\nu \phi) + \frac{\phi^4 c^4}{8\pi G} \eta^{\mu\sigma} (\partial_\mu \phi) \\ &\stackrel{\nu=\mu}{=} \frac{\phi^4 c^4}{4\pi G} \eta^{\mu\sigma} (\partial_\mu \phi) \end{aligned}$$

L'équation (3.28) devient alors

$$\begin{aligned} &\frac{\partial(\sqrt{-g} \mathcal{L}(\phi, \partial_\mu \phi))}{\partial \phi} - \partial_\nu \left( \frac{\partial(\sqrt{-g} \mathcal{L}(\phi, \partial_\mu \phi))}{\partial(\partial_\nu \phi)} \right) = 0 \\ \iff &\frac{2\phi^3 c^4}{4\pi G} \eta^{\mu\nu} \partial_\mu \phi \partial_\nu \phi + \rho\phi^4 - \partial_\nu \left( \frac{\phi^4 c^4}{4\pi G} \eta^{\mu\nu} (\partial_\mu \phi) \right) = 0 \\ \iff &\frac{2\phi^3 c^4}{4\pi G} \eta^{\mu\nu} \partial_\mu \phi \partial_\nu \phi + \rho\phi^4 - \left( \frac{4\phi^3 c^4}{4\pi G} \eta^{\mu\nu} \partial_\mu \phi \partial_\nu \phi + \frac{\phi^4 c^4}{4\pi G} \eta^{\mu\nu} \partial_\mu \partial_\nu \phi \right) = 0 \\ \iff &-\frac{2\phi^3 c^4}{4\pi G} \eta^{\mu\nu} \partial_\mu \phi \partial_\nu \phi - \frac{\phi^4 c^4}{4\pi G} \eta^{\mu\nu} \partial_\mu \partial_\nu \phi = -\rho\phi^4 \\ \iff &-\frac{c^4}{4\pi G} (2\phi^3 \eta^{\mu\nu} \partial_\mu \phi \partial_\nu \phi + \phi^4 \eta^{\mu\nu} \partial_\mu \partial_\nu \phi) = -\rho\phi^4 \end{aligned} \quad (3.32)$$

Nous remarquons que la somme entre parenthèses s'apparente très fortement au d'Alembertien de l'équation (3.23) que nous avons calculé. Pour le retrouver, multiplions l'équation (3.32) par  $\phi^{-6}$ . Nous obtenons

$$\begin{aligned}
 & -\frac{c^4\phi^{-6}}{4\pi G} (2\phi^3\eta^{\mu\nu}\partial_\mu\phi\partial_\nu\phi + \phi^4\eta^{\mu\nu}\partial_\mu\partial_\nu\phi) = -\rho\phi^4\phi^{-6} \\
 \iff & -\frac{c^4}{4\pi G} (2\phi^{-3}\eta^{\mu\nu}\partial_\mu\phi\partial_\nu\phi + \phi^{-2}\eta^{\mu\nu}\partial_\mu\partial_\nu\phi) = -\rho\phi^{-2} \\
 \stackrel{(3.23)}{\iff} & -\square\phi = -\frac{4\pi G}{c^4}\rho\phi^{-2} \\
 \iff & -\phi\square\phi = -\frac{4\pi G}{c^4}\rho\phi^{-1} \tag{3.33}
 \end{aligned}$$

Il convient maintenant de calculer la trace  $T$  du tenseur énergie-impulsion donné par l'équation (3.12). Nous l'avons déjà calculée à l'équation (3.13) ; cependant, il est nécessaire de reconsidérer ce calcul. Effectivement, le tenseur  $T^{\mu\nu}$  a seulement été contracté par la métrique de Minkowski, puisqu'alors on ne connaissait pas encore l'expression de la métrique  $g_{\mu\nu}$  suggérée par Einstein. Nous obtenons dès lors

$$T = g_{\mu\nu}T^{\mu\nu} \stackrel{(3.12)}{=} \phi^2\eta_{\mu\nu}\frac{\rho\phi}{c^2}\dot{x}^\mu\dot{x}^\nu = \frac{\rho\phi^3}{c^2}\underbrace{\dot{x}_\nu\dot{x}^\nu}_{=-c^2} = -\rho\phi^3$$

Ainsi,

$$-\rho\phi^{-1} = \frac{T}{\phi^4}$$

et l'équation (3.33) devient

$$-\phi\square\phi = \frac{4\pi G}{c^4}\frac{T}{\phi^4}$$

Nous remarquons que la trace du tenseur énergie-impulsion est transformée en  $\frac{T}{\phi^4}$ . Si nous renommons cette quantité  $T$ , comme cela a déjà été le cas pour l'équation (3.26), alors nous retrouvons l'équation (3.10)

$$-\phi\square\phi = \frac{4\pi G}{c^4}T$$

Par conséquent, les équations données par l'équation (3.10) peuvent bel et bien être obtenues à partir d'un lagrangien et sont les équations du champ de la théorie de Nordström pour l'espace-temps courbe décrit par la métrique  $g_{\mu\nu} = \phi^2\eta_{\mu\nu}$ . Il ne s'agit pas d'une simple généralisation de l'équation de Poisson, comme nous le pensions préalablement à la section 3.3.3. Néanmoins, cela ne garantit pas que le principe d'équivalence fort est satisfait.

### 3.4 La précession du périhélie de Mercure

Nous allons à présent calculer la précession du périhélie de Mercure pour la théorie scalaire de Nordström (cf. référence [17]). L'idée est de s'inspirer de la démonstration en relativité générale, en résolvant les équations des géodésiques de genre temps. Plaçons-nous pour commencer en symétrie sphérique. Dans ce cas, la métrique de Minkowski  $\eta_{\mu\nu}$  s'écrit

$$\eta_{\mu\nu} = \text{diag}(-1, 1, \Omega^2, \Omega^2 \sin^2 \theta)$$

Comme la métrique est telle que  $g_{\mu\nu} = \phi^2 \eta_{\mu\nu}$ , l'élément de ligne est donné par

$$ds^2 = -\phi^2 dt^2 + \phi^2 d\Omega^2 + \phi^2 \Omega^2 d\theta^2 + \phi^2 \Omega^2 \sin^2 \theta d\varphi^2$$

Nous devons maintenant trouver l'expression de  $\phi$ . Pour cela, calculons la solution de l'équation gravitationnelle de Nordström donnée par l'équation (3.27) dans le vide autour d'une masse ponctuelle. Il convient par conséquent de résoudre l'équation

$$\begin{aligned} R = 0 &\stackrel{(3.25)}{\iff} -\frac{6}{\phi^3} \square \phi = 0 \\ &\iff \square \phi = 0 \end{aligned}$$

Puisque  $\phi$  est un potentiel scalaire, cette dernière équation n'est autre que l'équation de Laplace pour ce potentiel, à résoudre en coordonnées sphériques. Dans ces coordonnées, nous savons que cette équation s'écrit

$$\frac{1}{\Omega^2} \frac{d}{d\Omega} \left( \Omega^2 \frac{d\phi}{d\Omega} \right) = 0$$

et admet pour solution

$$\begin{aligned} \frac{1}{\Omega^2} \frac{d}{d\Omega} \left( \Omega^2 \frac{d\phi}{d\Omega} \right) = 0 &\iff \frac{d}{d\Omega} \left( \Omega^2 \frac{d\phi}{d\Omega} \right) = 0 \\ &\iff \Omega^2 \frac{d\phi}{d\Omega} = c_1 \\ &\iff \phi = c_1 \int \frac{1}{\Omega^2} d\Omega \\ &\iff \phi = -\frac{c_1}{\Omega} + c_2 \end{aligned}$$

avec  $c_1$  et  $c_2$ , deux constantes à déterminer. Or, puisque nous nous trouvons dans le cas statique (comme pour la solution de Schwarzschild), le potentiel  $\phi$  doit tendre vers 1 à l'infini. Cette hypothèse nous permet de déterminer la valeur de la constante  $c_2$  car, lorsque  $\phi \xrightarrow{+\infty} 1$ ,

$$\phi = c_2 = 1 \implies c_2 = 1$$

et donc

$$\phi = 1 - \frac{c_1}{\Omega}$$

À présent, le choix de la constante  $c_1$  dépend de la limite newtonienne. Afin que celle-ci soit correcte, nous imposons

$$c_1 = \frac{GM}{c^2}$$

de sorte que

$$\phi = 1 - \frac{GM}{\Omega c^2}$$

Ainsi, l'élément de ligne est donné par

$$\begin{aligned} ds^2 &= \phi^2 (-dt^2 + d\Omega^2 + \Omega^2 d\theta^2 + \Omega^2 \sin^2 \theta d\varphi^2) \\ \iff ds^2 &= \left(1 - \frac{GM}{\Omega c^2}\right)^2 (-dt^2 + d\Omega^2 + \Omega^2 d\theta^2 + \Omega^2 \sin^2 \theta d\varphi^2) \end{aligned} \quad (3.34)$$

Posons maintenant

$$\begin{aligned} r = \Omega \left(1 - \frac{GM}{\Omega c^2}\right) &\iff r = \Omega - \frac{GM}{c^2} \\ &\implies dr = d\Omega \end{aligned}$$

En appliquant ce changement de variable à l'équation (3.34), l'élément de ligne peut finalement être réécrit

$$\begin{aligned} ds^2 &= -\left(1 - \frac{GM}{rc^2}\right)^2 dt^2 + \left(1 - \frac{GM}{rc^2}\right)^2 dr^2 + r^2 d\theta^2 + r^2 \sin^2 \theta d\varphi^2 \\ &\stackrel{\text{not.}}{=} g_{tt} dt^2 + g_{rr} dr^2 + g_{\theta\theta} d\theta^2 + g_{\varphi\varphi} d\varphi^2 \end{aligned} \quad (3.35)$$

De plus, tout comme pour la métrique de Schwarzschild, la métrique donnée par l'équation (3.35) est indépendante du temps  $t$  ainsi que de l'angle azimutal  $\varphi$ . Donc, en considérant les équations des géodésiques sous forme covariante données par l'équation (2.51),

$$\begin{cases} \partial_t g_{\mu\nu} = 0 &\stackrel{(2.51)}{\implies} \ddot{x}_t = 0 \implies \dot{x}_t = u_0 \implies \dot{x}_t = -k \\ \partial_\varphi g_{\mu\nu} = 0 &\stackrel{(2.51)}{\implies} \ddot{x}_\varphi = 0 \implies \dot{x}_\varphi = u_\varphi \implies \dot{x}_\varphi = L \end{cases} \quad (3.36)$$

où  $u_0$  et  $u_\varphi$  sont des constantes que l'on pose respectivement égales à  $-k$  et  $L$  par commodité.

Déterminons maintenant les équations du mouvement d'une particule massive dans la géométrie de l'espace-temps décrite par la métrique donnée par l'équation (3.35). Nous avons

$$\begin{aligned} \dot{x}_t = g_{tt} \dot{x}^t &\iff \dot{x}_t \stackrel{\text{déf.}}{=} g_{tt} \frac{d(ct)}{c d\tau} \\ &\iff \dot{x}_t = g_{tt} c \dot{t} \\ &\iff \dot{x}_t = -\left(1 - \frac{GM}{rc^2}\right)^2 c \dot{t} \\ &\stackrel{(3.36)}{\iff} k = \left(1 - \frac{GM}{rc^2}\right)^2 c \dot{t} \end{aligned}$$

et, tout comme pour la précession du périhélie de Mercure en relativité générale,

$$\begin{aligned} \dot{x}_\varphi = g_{\varphi\varphi} \dot{x}^\varphi &\iff \dot{x}_\varphi \stackrel{\text{déf.}}{=} g_{\varphi\varphi} \frac{d\varphi}{c d\tau} \\ &\iff \dot{x}_\varphi = g_{\varphi\varphi} \dot{\varphi} \\ &\iff \dot{x}_\varphi = r^2 \sin^2 \theta \dot{\varphi} \\ &\stackrel{(3.36)}{\iff} L = r^2 \dot{\varphi} \sin^2 \theta \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \dot{x}_\theta = g_{\theta\theta} \dot{x}^\theta &\iff \dot{x}_\theta \stackrel{\text{d\'ef.}}{=} g_{\theta\theta} \frac{d\theta}{c d\tau} \\
 &\iff \dot{x}_\theta = g_{\theta\theta} \dot{\theta} \\
 &\iff \dot{x}_\theta = r^2 \dot{\theta}
 \end{aligned}$$

Ceci nous amène aux mêmes résultats qu'en relativité générale, à savoir

$$\begin{cases} \dot{\varphi} &= \frac{L}{r^2} \\ \dot{\theta} &= \frac{\pi}{2} \\ \dot{x}^\theta &= 0 \end{cases} \quad (3.37)$$

Déterminons à présent l'équation pour la distance radiale  $r$ . Puisque nous nous intéressons au type de mouvements décrits par une particule massive, c'est-à-dire dans le cas où  $\dot{x}_\mu \dot{x}^\mu = -1$ , nous obtenons

$$\begin{aligned}
 \dot{x}_\mu \dot{x}^\mu = -1 &\iff g_{\mu\nu} \dot{x}^\mu \dot{x}^\nu = -1 \\
 &\iff g_{tt} (\dot{x}^t)^2 + g_{rr} (\dot{x}^r)^2 + g_{\theta\theta} (\dot{x}^\theta)^2 + g_{\varphi\varphi} (\dot{x}^\varphi)^2 = -1 \\
 &\quad (\text{car } g_{\mu\nu} = 0 \ \forall \mu \neq \nu) \\
 \stackrel{\dot{x}^\theta=0}{\iff} &\quad - \left(1 - \frac{GM}{rc^2}\right)^2 (ct)^2 + \left(1 - \frac{GM}{rc^2}\right)^2 r^2 + r^2 \sin^2 \theta \dot{\varphi}^2 = -1 \\
 \stackrel{(3.37)}{\iff} &\quad -k ct + \dot{r}^2 \left(1 - \frac{GM}{rc^2}\right)^2 + \frac{L^2}{r^2} = -1 \\
 &\quad \times \left(1 - \frac{GM}{rc^2}\right)^{-2} \\
 \iff &\quad -k^2 \left(1 - \frac{GM}{rc^2}\right)^{-4} + \dot{r}^2 + \frac{L^2}{r^2} \left(1 - \frac{GM}{rc^2}\right)^{-2} = - \left(1 - \frac{GM}{rc^2}\right)^{-2} \\
 \iff &\quad \dot{r}^2 = - \left(1 - \frac{GM}{rc^2}\right)^{-2} - \frac{L^2}{r^2} \left(1 - \frac{GM}{rc^2}\right)^{-2} + k^2 \left(1 - \frac{GM}{rc^2}\right)^{-4} \\
 \iff &\quad \dot{r}^2 = - \underbrace{\left(1 - \frac{GM}{rc^2}\right)^{-2} \left(1 + \frac{L^2}{r^2}\right)}_{\stackrel{\text{not. } V}{=}} + k^2 \left(1 - \frac{GM}{rc^2}\right)^{-4} \quad (3.38)
 \end{aligned}$$

$$\iff \dot{r}^2 = \left[ k^2 - \left(1 - \frac{GM}{rc^2}\right)^2 \left(1 + \frac{L^2}{r^2}\right) \right] \left(1 - \frac{GM}{rc^2}\right)^{-4} \quad (3.39)$$

Poursuivons en dérivant l'équation (3.39) par rapport au temps propre  $\tau$ . Nous obtenons

$$\begin{aligned}
 \frac{d}{d\tau} [r^2] &= \frac{d}{d\tau} \left[ \left[ k^2 - \left(1 - \frac{GM}{rc^2}\right)^2 \left(1 + \frac{L^2}{r^2}\right) \right] \left(1 - \frac{GM}{rc^2}\right)^{-4} \right] \\
 \Leftrightarrow 2\dot{r}\dot{r} &= \left[ \frac{d}{d\tau} \left[ k^2 - \left(1 - \frac{GM}{rc^2}\right)^2 \left(1 + \frac{L^2}{r^2}\right) \right] \right] \left(1 - \frac{GM}{rc^2}\right)^{-4} \\
 &\quad + \left[ k^2 - \left(1 - \frac{GM}{rc^2}\right)^2 \left(1 + \frac{L^2}{r^2}\right) \right] \left[ \frac{d}{d\tau} \left(1 - \frac{GM}{rc^2}\right)^{-4} \right] \\
 \Leftrightarrow 2\dot{r}\dot{r} &= -2\dot{r} \left(1 - \frac{GM}{rc^2}\right) \left(\frac{GM}{r^2c^2}\right) \left(1 + \frac{L^2}{r^2}\right) \left(1 - \frac{GM}{rc^2}\right)^{-4} \\
 &\quad - \left(1 - \frac{GM}{rc^2}\right)^2 \left(-\frac{2L^2}{r^3} \dot{r}\right) \left(1 - \frac{GM}{rc^2}\right)^{-4} \\
 &\quad + \left[ k^2 - \left(1 - \frac{GM}{rc^2}\right)^2 \left(1 + \frac{L^2}{r^2}\right) \right] \left[ -4 \left(1 - \frac{GM}{rc^2}\right)^{-5} \left(\frac{GM}{r^2c^2} \dot{r}\right) \right] \\
 \Leftrightarrow 2\dot{r} &= -2 \left(1 - \frac{GM}{rc^2}\right)^{-3} \left(\frac{GM}{r^2c^2}\right) \left(1 + \frac{L^2}{r^2}\right) + \frac{2L^2}{r^3} \left(1 - \frac{GM}{rc^2}\right)^{-2} \\
 &\quad - 4k^2 \left(1 - \frac{GM}{rc^2}\right)^{-5} \left(\frac{GM}{r^2c^2}\right) + 4 \left(1 - \frac{GM}{rc^2}\right)^{-3} \left(1 + \frac{L^2}{r^2}\right) \left(\frac{GM}{r^2c^2}\right) \\
 \Leftrightarrow 2\dot{r} &= 2 \left(1 - \frac{GM}{rc^2}\right)^{-3} \left(\frac{GM}{r^2c^2}\right) \left(1 + \frac{L^2}{r^2}\right) + \frac{2L^2}{r^3} \left(1 - \frac{GM}{rc^2}\right)^{-2} \\
 &\quad - 4k^2 \left(1 - \frac{GM}{rc^2}\right)^{-5} \left(\frac{GM}{r^2c^2}\right) \\
 \Leftrightarrow \dot{r} &= \left(1 - \frac{GM}{rc^2}\right)^{-3} \left(\frac{GM}{r^2c^2}\right) \left(1 + \frac{L^2}{r^2}\right) + \frac{L^2}{r^3} \left(1 - \frac{GM}{rc^2}\right)^{-2} \\
 &\quad - 2k^2 \left(1 - \frac{GM}{rc^2}\right)^{-5} \left(\frac{GM}{r^2c^2}\right) \tag{3.40}
 \end{aligned}$$

Or, la référence [17] suggère que le terme noté  $V$  dans l'équation (3.38) joue le rôle d'un potentiel pour lequel il existe une orbite circulaire stable en

$$r_c = \frac{L^2c^2}{GM}$$

auquel cas

$$k = \left(1 - \frac{GM^2}{L^2c^4}\right)$$

lorsque  $\dot{t} = 1$ .

En utilisant ces résultats et en posant  $u = r - \frac{L^2 c^4}{G^2 M^2}$ , l'équation (3.40) devient <sup>3</sup>

$$\ddot{u} = -\frac{G^4 M^4}{L^8 c^8} \left( \frac{G^2 M^2}{c^4} + L^2 \right) u + \mathcal{O}(u^2)$$

Au premier ordre, cette dernière équation n'est autre que l'équation d'un mouvement harmonique simple, pour lequel la fréquence angulaire  $\omega_{\text{harm}}$  vaut

$$\omega_{\text{harm}} = \sqrt{\frac{G^4 M^4}{L^8 c^8} \left( \frac{G^2 M^2}{c^4} + L^2 \right)} = \frac{G^2 M^2}{L^4 c^4} \sqrt{\frac{G^2 M^2}{c^4} + L^2} \quad (3.41)$$

Posons

$$L = \sqrt{\frac{GM r}{c^2}} \iff \frac{GM}{c^2} = \frac{L^2}{r}$$

L'équation (3.41) devient ainsi

$$\omega_{\text{harm}} = \frac{1}{r^2} \sqrt{\frac{G^2 M^2}{c^4} + \frac{GM r}{c^2}} = \sqrt{\frac{G^2 M^2}{r^4 c^4} + \frac{GM}{r^3 c^2}}$$

D'autre part, la fréquence angulaire du mouvement orbital est donnée par

$$\omega_{\text{orb}} = \frac{L}{r^2} = \frac{1}{r^2} \sqrt{\frac{GM r}{c^2}} = \sqrt{\frac{GM}{c^2}} \cdot \frac{\sqrt{r}}{r^2} = \sqrt{\frac{GM}{r^3 c^2}}$$

Par conséquent, l'ellipse se décale à chaque révolution d'un angle

$$\begin{aligned} \Delta\varphi &= 2\pi \Delta\omega \\ &= 2\pi(\omega_{\text{orb}} - \omega_{\text{harm}}) \\ &= 2\pi \left( \sqrt{\frac{GM}{r^3 c^2}} - \sqrt{\frac{G^2 M^2}{r^4 c^4} + \frac{GM}{r^3 c^2}} \right) \end{aligned} \quad (3.42)$$

Effectuons un développement limité au premier ordre de la différence entre parenthèses dans l'équation (3.42). Nous trouvons

$$\begin{aligned} \Delta\varphi &\approx 2\pi \left( -\frac{1}{2} \sqrt{\frac{G^3 M^3}{r^5 c^6}} \right) \\ &= -\pi \sqrt{\frac{G^3 M^3}{r^5 c^6}} \end{aligned}$$

---

3. Notons qu'il conviendrait de se convaincre de ces manipulations, mais nous les laissons en perspectives pour une suite éventuelle de ce mémoire.

Il s'en suit que la vitesse à laquelle le grand axe de l'orbite elliptique se décale est donnée par

$$\begin{aligned}
 \frac{\Delta\varphi}{\omega_{\text{orb}}} &\approx -\pi\sqrt{\frac{G^3M^3}{r^5c^6}}\left(\frac{GM}{r^3c^2}\right)^{-\frac{1}{2}} \\
 &= -\pi\sqrt{\frac{G^3M^3}{r^5c^6}\frac{r^3c^2}{GM}} \\
 &= -\pi\sqrt{\frac{G^2M^2}{r^2c^4}} \\
 &= -\frac{\pi GM}{rc^2}
 \end{aligned}$$

Notons que  $r$  correspond ici à la distance  $r_{\text{min}}$  de la FIGURE 2.3 et peut donc être assimilé à  $a(1-e^2)$ , si l'on compare avec la solution donnée par l'équation (2.75) en relativité générale. La précession du périhélie de Mercure sur un siècle pour la théorie de Nordström est finalement donnée par (en rappelant que nous travaillons en grammes, centimètres et secondes d'arc comme en relativité générale)

$$\begin{aligned}
 \Delta\Phi &= -\frac{\pi GM_{\text{Soleil}}}{a(1-e^2)c^2} \cdot \frac{180 \cdot 3\,600}{\pi} \cdot \frac{100 \cdot T_{\text{Terre}}}{T_{\text{Mercure}}} \\
 &\stackrel{(2.76)}{=} -\frac{6.67 \cdot 10^{-8} \cdot 2 \cdot 10^{33}}{5.8 \cdot 10^{12} \cdot (1-0.2^2) \cdot (3 \cdot 10^{10})^2} \cdot 180 \cdot 3\,600 \cdot \frac{100 \cdot 365}{88} \\
 &= -7.15''
 \end{aligned}$$

Nous observons que la théorie scalaire de Nordström prédit un retard du périhélie de Mercure (dénnoté par le signe moins) d'environ 7 secondes par siècle, ce qui est six fois moins rapide que pour la théorie de la relativité générale, qui prédit une avance de 43 secondes par siècle.

# Conclusion

« *Alea jacta est!* »  
J. César

Céans se termine notre fabuleux périple dans l'espace-temps...

Celui-ci a débuté par une présentation des bases de la géométrie différentielle utiles à la compréhension des outils mathématiques utilisés, avant une première et longue halte sur les terres de la théorie de la relativité générale. Nous y avons mis en évidence que celle-ci satisfait à trois principes fondamentaux : le principe de covariance généralisée, le principe d'équivalence d'Einstein et le principe d'équivalence fort découlant de l'action d'Einstein-Hilbert. Nous en avons ensuite décrit quelque peu la cinématique avant d'en développer plus largement la dynamique. Celle-ci est caractérisée par les équations d'Einstein, qui déterminent l'évolution de la métrique lorentzienne  $g_{\mu\nu}$  décrivant l'espace-temps courbe et dont on peut déduire la conservation du tenseur énergie-impulsion. Nous avons montré comment construire ces équations, d'abord à partir de l'équation de Poisson, puis en imposant la stationnarité de l'action d'Einstein-Hilbert. Pour terminer, nous avons démontré que la théorie de la relativité générale prédit théoriquement une avance du périhélie de Mercure de 42.93 secondes par siècle et que la lumière est déviée d'un angle valant 1.75 secondes d'arc, ce qui s'accorde avec les observations.

Notre seconde et dernière escale a tenté d'éclaircir les zones d'ombre planant sur la théorie scalaire de Nordström. D'abord, nous l'avons présentée en suivant une démarche historique, plutôt orientée vers un raisonnement physique. À première vue, le principe de relativité de Galilée n'était pas satisfait, du fait que Nordström suppose une masse variable dans le temps ; finalement, il n'en est rien puisque les équations du mouvement sont indépendantes de cette masse. Nous avons également mis en évidence grâce à l'équation gravitationnelle de Nordström qu'aucune déviation de la lumière n'est prédite (au contraire de la relativité générale qui, elle, prédit une telle déviation) puisque celle-ci ne fait intervenir que la trace du tenseur énergie-impulsion. Néanmoins, le tenseur énergie-impulsion est conservé, tout comme en relativité générale.

Ensuite, nous avons présenté la théorie de Nordström en suivant une démarche géométrique, plutôt orientée vers un raisonnement mathématique. Nous avons mis en exergue, grâce à la métrique sous-jacente proposée par Einstein à l'époque où il s'intéressait à cette théorie, que celle-ci satisfait au principe d'équivalence faible. Nous avons également montré, via le calcul des symboles de Christoffel (la connexion de Levi-Civita étant d'application tout comme en relativité générale), que les équations du mouvement sont des équations géodésiques. Nous avons ensuite calculé le scalaire de courbure, où nous avons découvert que plusieurs auteurs émettent l'hypothèse que lorsque l'espace-temps est plat, les dérivées partielles du

type  $\partial_\mu\phi\partial_\nu\phi$  sont nulles. Nous n'avons malheureusement trouvé aucune justification convaincante pour appuyer cette hypothèse. Notre pénultième investigation a été de nous pencher sur les équations du champ. Puisqu'il n'était pas possible de les retrouver à partir des équations d'Einstein, nous pensions de premier abord que l'équation gravitationnelle de Nordström n'était qu'une généralisation de l'équation de Poisson avec des paramètres posés. Toutefois, nous avons réussi à obtenir l'équation gravitationnelle à partir d'un lagrangien choisi par nos soins, mais qui ne garantit quand même pas que le principe d'équivalence fort soit satisfait. Pour terminer, nous avons démontré que la théorie scalaire de Nordström prédit théoriquement un retard du périhélie de Mercure de 7.15 secondes par siècle, soit une précession six fois moins rapide que pour la prédiction de la théorie de la relativité générale. De plus, ce résultat ne s'accorde pas aux observations puisque celles-ci mettent en évidence une avance et non un retard du périhélie.

Afin de résumer succinctement ces résultats, la TABLE 1.1 compare la théorie de Nordström à la théorie de la relativité générale.

	<b>Relativité générale</b>	<b>Nordström</b>
Métrique	$g_{\mu\nu}$	$g_{\mu\nu} = \phi^2 \eta_{\mu\nu}$
Connexion de Levi-Civita	Oui	Oui
Principe de covariance généralisée	Satisfait	Satisfait
Principe de relativité de Galilée	Satisfait	Satisfait
Principe d'équivalence d'Einstein	Satisfait	Satisfait
Principe d'équivalence fort	Satisfait	Non satisfait
Conservation du tenseur énergie-impulsion	Oui	Oui
Périhélie de Mercure	Avance de 42.93 secondes	Retard de 7.15 secondes
Déviations de la lumière	1.75 secondes	Non prédit

TABLE 1.1 – Comparaison entre la théorie scalaire de Nordström et la théorie de la relativité générale

La théorie de la relativité générale d'Einstein et la théorie scalaire de Nordström se ressemblent finalement sous bien des aspects. Peut-être parce qu'elles n'ont été publiées qu'à deux années d'intervalle... Bien que la théorie de Nordström séduisait par la simplicité de son équation gravitationnelle, celle-ci a été abandonnée par le passé au profit de la relativité générale. Néanmoins, les théories scalaires (celle de Nordström n'étant pas la seule et l'unique) reviennent au goût du jour. Il apparaît en effet que certaines expériences en physique et en cosmologie poussent à croire que les champs scalaires sont bel et bien présents dans notre monde physique.

Notons en définitive que malgré le titre très général de ce mémoire, seules deux théories de la gravitation ont été présentées. Cependant, le sujet étant très vaste, d'autres perspectives pourraient s'offrir en étudiant d'autres théories, comme par exemple celles de Weyl, Eddington, Einstein-Palatini ou encore le télé-parallélisme, qui ne sont que quatre théories parmi tant d'autres.

# Bibliographie

- [1] A. Füzfa, *Variétés différentiables, géométrie riemannienne et calcul tensoriel (notes provisoires)*, Librairie des Sciences, Namur, 2010-2011.
- [2] M. Nakahara, *Geometry, topology and physics - Second Edition*, Institute of Physics (IoP), Londres, 2003.
- [3] J.-P. Bruneton, *Gravitation relativiste et cosmologie - Notes de cours*, Département de Mathématiques, Namur, 2011-2012.
- [4] A. Hees, *Signature d'observables en théories alternatives de la gravitation*, Secteur des Sciences et Technologies - Earth And Life Institute, Louvain-La-Neuve, 2012-2013.
- [5] J. Plebański & A. Krasinski, *An Introduction to General Relativity and Cosmology*, Cambridge University Press, New York, 2006.
- [6] A. Pais, *ALBERT EINSTEIN - La vie et l'œuvre*, Dunod, Paris, 2005.
- [7] C. W. Misner, K. S. Thorne & J. A. Wheeler, *Gravitation*, Freeman, San Francisco, 1973.
- [8] G. B. Arfken, H.-J. Weber & F. E. Harris, *Mathematical Methods for Physicists*, Seventh Edition, Academic Press, Waltham, 2013.
- [9] M. P. Hobson, G. Efstathiou & A. N. Lasenby, *General Relativity : An introduction for Physicists*, Cambridge University Press, New York, 2006.
- [10] E. Schatzman, *Astronomie*, Encyclopédie de la Pléiade, NRF Gallimard, Paris, 1962, pp. 1328-1329.
- [11] P. Bouteloup, *Chapitre 16 - La solution de Schwarzschild*, 2009, pp. 25-28.  
Accessible en ligne (au 25 juillet 2014) : [http://bouteloup.pierre.free.fr/lica/index\\_img/chap16.pdf](http://bouteloup.pierre.free.fr/lica/index_img/chap16.pdf)
- [12] Z. Nouicer, *Relativité générale et cosmologie*, Faculté des Sciences exactes - Département de physique, Université Mentouri, Constantine, 2010, pp. 68-71.  
Accessible en ligne (au 26 juillet 2014) : <http://bu.umc.edu.dz/theses/physique/NOU5816.pdf>
- [13] F. Ravndal, *Scalar Gravitation and Extra Dimensions*, arXiv:gr-qc/0405030, 2004.  
Accessible en ligne (au 8 mars 2013) : <http://arxiv.org/pdf/gr-qc/0405030.pdf>
- [14] M. Wellner & G. Sandri, *Scalar Gravitation*, American Journal of Physics, Volume 32, n°1, 1964, pp. 36-39.  
Accessible en ligne (au 8 mars 2013) : [http://www-itp.particle.uni-karlsruhe.de/~schreck/general\\_relativity\\_seminar/Scalar\\_gravitation.pdf](http://www-itp.particle.uni-karlsruhe.de/~schreck/general_relativity_seminar/Scalar_gravitation.pdf)
- [15] J.-P. Bruneton, *Théories alternatives de la gravitation et applications*, École doctorale : constituants élémentaires - systèmes complexes, Institut d'Astrophysique de Paris, 2007.

- [16] J. A. Q. Abanto, *On how to revive Nordström Theory at Planck scale*, viXra :1311.0057, 2013, pp. 1-2.  
Accessible en ligne (au 3 juillet 2014) : <http://vixra.org/pdf/1311.0057v1.pdf>
- [17] WIKIPÉDIA, Nordström's theory of gravitation, dernière modification de la page web en date du 8 mai 2014 à la date de consultation.  
Accessible en ligne (au 11 août 2014) : [http://en.wikipedia.org/wiki/Nordstrom's\\_theory\\_of\\_gravitation](http://en.wikipedia.org/wiki/Nordstrom's_theory_of_gravitation)