

## RESEARCH OUTPUTS / RÉSULTATS DE RECHERCHE

Une ingénierie pour l'étude de la proportionnalité par confrontation à la non-proportionnalité via des manipulations

Henry, Valérie; Lambrecht, Pauline

*Published in:*  
Actes de la CIEAEM 66

*Publication date:*  
2014

*Document Version*  
Première version, également connu sous le nom de pré-print

[Link to publication](#)

*Citation for published version (HARVARD):*  
Henry, V & Lambrecht, P 2014, Une ingénierie pour l'étude de la proportionnalité par confrontation à la non-proportionnalité via des manipulations. dans *Actes de la CIEAEM 66*. 66th CIEAEM International Meeting, Lyon, France, 21/07/14.

### General rights

Copyright and moral rights for the publications made accessible in the public portal are retained by the authors and/or other copyright owners and it is a condition of accessing publications that users recognise and abide by the legal requirements associated with these rights.

- Users may download and print one copy of any publication from the public portal for the purpose of private study or research.
- You may not further distribute the material or use it for any profit-making activity or commercial gain
- You may freely distribute the URL identifying the publication in the public portal ?

### Take down policy

If you believe that this document breaches copyright please contact us providing details, and we will remove access to the work immediately and investigate your claim.

# Proposition d'ingénierie pour l'étude de la proportionnalité par confrontation à la non-proportionnalité via des manipulations

Valérie HENRY, UNamur (Belgique)  
Pauline LAMBRECHT\*, UNamur et CREM (Belgique)

13 mai 2014

## Summary

This thesis is based on an engineering intended to encourage proportionality's learning and this, by the introduction of manipulations and comparison to non-proportionality. Thus, the observation of the volume's variation of a cylinder as a function of its height in a first time and according to its diameter in a second time leads students to build the characteristics of proportional phenomenon compared with a phenomenon which is not. The methodology used and some results are discussed in this text.

## Résumé

Ce travail de thèse se base sur une ingénierie destinée à favoriser l'apprentissage de la proportionnalité et ce, par l'introduction de manipulations et la confrontation à la non-proportionnalité. Ainsi, l'observation de la variation du volume d'un cylindre en fonction de sa hauteur dans un premier temps et en fonction de son diamètre dans un second temps amène les élèves à construire les caractéristiques d'un phénomène proportionnel par comparaison avec un phénomène qui ne l'est pas. La méthodologie utilisée ainsi que quelques résultats sont abordés dans ce texte.

## 1 Présentation du problème

Cet article présente un travail de thèse en cours à l'UNamur en Belgique. L'ingénierie développée dans ce cadre est en lien avec une recherche menée au Centre de Recherche sur l'Enseignement des Mathématiques (CREM) de Nivelles en Belgique. Ces trois dernières années, une équipe de chercheurs a mis au point des activités, appelées *Math & Manips*, intégrant des manipulations destinées à diverses tranches d'âge de l'enseignement (2 ans et demi à 18 ans) [8]. L'intérêt de cette recherche est de présenter aux enseignants l'apport d'une activité expérimentale dans le processus de construction des savoirs mathématiques.

Ces séquences d'apprentissage présentent une forte composante a-didactique et visent à provoquer chez les élèves de la curiosité par des expérimentations dont les résultats semblent en contradiction avec leurs connaissances antérieures. Elles doivent amener les élèves à entrer dans un processus de questionnement visant à faire émerger un modèle qui correspond au mieux à la réalité de la situation.

\*Pauline.Lambrecht@crem.be

L'ingénierie présentée dans cet article est l'une de ces activités. Elle est destinée aux élèves du début du secondaire (12-13 ans) et propose de confronter des situations de proportionnalité à d'autres qui ne le sont pas.

Dans cette séquence, le passage de l'expérimental aux modèles mathématiques se fait dans différents contextes afin de favoriser le passage d'un registre de représentation sémiotique à un autre. En effet, l'activité expérimentale débouche nécessairement sur un relevé d'informations qui doivent être traitées de diverses manières. Les résultats sont décrits dans le langage courant, intégrés dans des tableaux de nombres et interprétés sous forme de graphiques.

## 2 Articles publiés sur le sujet

De nombreux documents ayant trait à l'apprentissage de la proportionnalité ont été écrits ces dernières années et ont nourri notre réflexion. Ainsi, l'ouvrage de BOISNARD, HOUEBINE, JULO, KERBŒUF et MERRI [2] décrit la difficulté de cette notion et présente notamment une classification des problèmes de proportionnalité. Dans la publication de NOWAK, TRAN et ZUCCHETTA [12], on retrouve également différentes procédures liées à la proportionnalité. HERSANT étudie dans sa thèse [9] les problèmes de proportionnalité ainsi que l'utilisation d'un logiciel pour aider à l'apprentissage de la proportionnalité. Plusieurs articles de revues ont également traité la proportionnalité. Citons entre autres ceux de COMIN [4] et de DUPUIS et PLUVINAGE [6] dans *Recherches en Didactique des Mathématiques* pour la France et celui de HOYLES, NOSS et POZZI [10] par exemple pour la littérature anglo-saxonne. Notons qu'un groupe international de la Psychology of Mathematics Education s'intéresse à l'étude de la proportionnalité (voir notamment [11]).

La plupart de ces textes soulève la difficulté de l'apprentissage de cette notion, souvent liée à la multiplicité des catégories de problèmes. Notre angle de travail a fortement été inspiré par la lecture de travaux relatifs à la prégnance du modèle linéaire (DE BOCK, VAN DOOREN, JANSSENS & VERSCHAFFEL [5]). L'ingénierie élaborée vise donc principalement à ébranler les conceptions initiales des apprenants par rapport à la rémanence du modèle linéaire.

## 3 Hypothèses et objectifs du travail

Dès le début de ce travail, deux axes nous ont intéressés. D'un côté, l'apport de situations de non-proportionnalité dans l'étude de la proportionnalité et de l'autre, l'apport de manipulations pour les apprentissages à long terme liés à la proportionnalité.

Nous sommes effectivement convaincus que tant les manipulations que la confrontation de la proportionnalité à la non-proportionnalité peuvent amener les élèves à un meilleur apprentissage de cette notion. C'est pourquoi l'ingénierie brièvement présentée à la section 5 a été mise au point.

## 4 Cadre théorique

Cette ingénierie a été élaborée dans le cadre de la théorie des situations didactiques de BROUSSEAU [3] et en utilisant la méthodologie décrite par ARTIGUE [1] comme précisé dans la section ci-dessous. De plus, notre travail s'appuie sur la conversion de registre de représentation au sens de DUVAL [7].

## 5 Méthodologie et description du dispositif expérimental

Pour construire l'ingénierie dont il est question dans cette section, nous avons suivi le processus présenté par ARTIGUE dans [1] pour lequel elle distingue quatre phases.

La première concerne les analyses préalables. Comme nous l'avons souligné dans la section 2, de nombreux travaux ont déjà été menés quant à l'apprentissage de la proportionnalité mais la lecture des travaux de DE BOCK, VAN DOOREN, JANSSENS & VERSCHAFFEL [5] sur l'illusion de linéarité ainsi que le regard sur le contenu de différents manuels belges nous ont amenés à choisir une autre approche.

La deuxième phase reprend la conception et l'analyse *a priori*. La théorie des situations didactiques de BROUSSEAU [3] a guidé l'écriture de la séquence d'apprentissage. Nous souhaitons notamment créer un milieu qui permette de dévoluer la situation aux élèves en étant confrontés à leurs préconceptions erronées. L'analyse *a priori* complète sera présentée au cours de l'atelier.

Les troisième et quatrième phases sont respectivement celle de l'expérimentation et celle de l'analyse *a posteriori* et de l'évaluation (validation). Dans notre cas, ces deux phases se sont répétées car, afin de mettre au point cette ingénierie, nous l'avons testée de nombreuses fois en l'adaptant au fur et à mesure des expérimentations.

Comme présenté à la section 3, l'une des questions de recherche de la thèse porte sur l'apport de situations de non-proportionnalité dans l'étude de la proportionnalité. Pour traiter cette question, nous avons notamment mis en place un protocole d'expérimentation basé sur l'introduction de l'ingénierie dans certaines classes (*classes-expérimentales*) tandis que d'autres classes (*classes-témoins*) poursuivaient leur enseignement. Les enseignants de deux écoles ont accepté de nous accueillir dans leurs locaux, ce qui a donné l'occasion de mener de nombreuses autres expérimentations.

L'ingénierie consiste à proposer aux élèves d'étudier la variation du volume d'un cylindre en fonction de sa hauteur dans un premier temps et en fonction de son diamètre dans un second temps. Cela permet d'observer et de construire avec les élèves les caractéristiques d'un phénomène proportionnel par comparaison avec un phénomène qui ne l'est pas. Un enjeu important de cette ingénierie est en effet d'établir le lien entre phénomène linéaire, tableau de proportionnalité et graphique en ligne droite d'une part et phénomènes non linéaires, tableaux de non-proportionnalité et graphiques de fonctions non linéaires d'autre part.

Une situation d'introduction permet aux élèves de se familiariser avec le matériel et de mettre en évidence des points essentiels d'une démarche scientifique : placement des repères, précision, utilisation d'un matériel adéquat, etc. Ensuite, dans une première partie, on demande de remplir un cylindre jusqu'à certaines hauteurs après avoir estimé, pour chaque cas, le nombre de mesurètes nécessaires à cette opération. Les élèves écrivent leurs résultats dans un tableau et il leur est demandé de repérer et d'écrire les différents liens qu'ils observent entre les valeurs du tableau, en les symbolisant par des flèches. Les réactions des élèves sont principalement de deux sortes : certains remarquent dans ce tableau des liens de type multiplicatif et d'autres repèrent les écarts constants. Après discussion, les élèves conviennent avec l'enseignant que la multiplication est plus générale en ce sens que les additions dépendent des valeurs initiales tandis que les liens multiplicatifs internes sont les mêmes pour tous les groupes, quelles que soient les valeurs de départ. De plus, les liens de type multiplicatif permettent de trouver la réponse pour n'importe quelle hauteur sans recourir aux étapes intermédiaires.

Dans une deuxième partie, on propose de remplir des cylindres de diamètres simple, double et triple jusqu'à une même hauteur après avoir demandé, dans chacun des cas, une estimation du nombre de mesurètes nécessaires. L'importance de la démarche qui consiste à ne faire varier qu'une seule grandeur à la fois est explicitée. De nombreux élèves s'attendent à obtenir des rapports simple, double et triple comme lorsqu'ils ont fait varier la hauteur. Le passage par l'écriture des estimations est important car les élèves sont ensuite confrontés à la non-concordance des résultats avec leurs prévisions. Cela les incite à se poser davantage de questions et à chercher des justifications aux résultats obtenus.

À nouveau, il est demandé de placer les résultats obtenus pour la variation du diamètre dans un tableau. Les liens découverts entre ces différentes valeurs doivent être mis en évidence afin d'en dégager les valeurs correspondant à des diamètres par exemple quatre ou cinq fois plus grands de celui de départ.

Pour chacune des deux situations, les élèves placent les résultats dans un graphique. Sur base des tableaux et graphiques construits au cours de l'activité, l'enseignant institutionnalise les savoirs visés, au sens de Brousseau [3], en réalisant une synthèse qui met en évidence les caractéristiques permettant de distinguer

les phénomènes proportionnels des autres.

## 6 Discussion de résultats

Les questions de recherche de la thèse concernent notamment l'apport de manipulations et l'apport d'une situation de non-proportionnalité pour l'apprentissage de la proportionnalité. Pour y répondre, le procédé expérimental suivi a été de présenter aux élèves de *classes-tests* et de *classes-témoins* des questionnaires avant et après les séquences d'enseignement. Les premières analyses montrent déjà que les élèves des classes dans lesquelles l'ingénierie a été menée ont des résultats globalement équivalents à ceux des autres élèves, l'introduction d'un temps de manipulation ne porterait donc pas préjudice à l'apprentissage. Nous n'allons pas plus loin dans ces analyses ici car ce n'est pas l'objectif de cet article. Par contre, voici quelques résultats concernant la mise au point de l'ingénierie.

Les premières expérimentations ont notamment permis de voir l'importance de faire écrire aux élèves leurs estimations car, lorsque ce n'était pas explicitement demandé, ils avaient tendance à occulter leurs idées premières, ce qui réduisait l'effet positif du conflit cognitif induit par le milieu.

Les expérimentations ont été réalisées, dans un premier temps, avec l'objectif principal de mettre au point la séquence de manipulations. Nous avons laissé la partie d'institutionnalisation à charge de l'enseignant et il s'est très vite avéré nécessaire de l'introduire dans la séquence proposée aux enseignants car, sans cela, la confrontation des deux situations n'était pas exploitée correctement pour établir la caractérisation de situations de proportionnalité. Notre expérience renforce donc l'importance de la composante institutionnalisation d'une situation didactique.

## 7 Conclusion

D'autres résultats suivront avec l'avancement de la thèse. Actuellement, alimentée par ce travail de thèse, la recherche au CREM a mené à l'écriture d'un document à destination des enseignants reprenant cette ingénierie [8]. Ensuite, au cours de cette année, nous avons proposé un accompagnement aux professeurs qui souhaitaient réaliser cette séquence d'apprentissage dans leur classe et l'avons également présentée en formation d'enseignants. Nous sommes convaincus que cet encadrement est nécessaire dans un premier temps pour que les enseignants puissent s'approprier l'ingénierie et, notamment, prendre conscience de l'importance du choix des variables didactiques.

## Références

- [1] ARTIGUE M. (1988). Ingénierie didactique. *Recherches en didactique des mathématiques*, 9 (3), 281-308.
- [2] BOISNARD D., HOUEBINE J., JULO J., KERBCEUF M.-P., MERRI M. (1994). *La proportionnalité et ses problèmes*. Paris : Hachette Éducation.
- [3] BROUSSEAU G. (1998). *Théorie des situations didactiques*. Grenoble : La Pensée Sauvage.
- [4] COMIN E. (2002). L'enseignement de la proportionnalité à l'école et au collège. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, Vol.22/2.3, La Pensée Sauvage éditions, pp.135-182.
- [5] DE BOCK D., VAN DOOREN W., JANSSENS D. & VERSCHAFFEL L. (2007). *The illusion of linearity. From Analysis to improvement*. New York : Springer.
- [6] DUPUIS C., PLUVINAGE F. (2003). La proportionnalité et son utilisation. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, Vol.2/2, La Pensée Sauvage éditions, pp.165-212.
- [7] DUVAL R. (1996). Quel cognitif retenir en didactique des mathématiques? *Recherches en Didactique des Mathématiques*, Vol.16/3, La Pensée Sauvage éditions, pp.349-382.

- 
- [8] GUISSARD M.-F., HENRY V., LAMBRECHT P., VAN GEET P., VANSIMPSEN S. & WETTENDORFF I. (2013). *Math & Manips - Des manipulations pour favoriser la construction des apprentissages en mathématiques*, rapport de recherche téléchargeable sur [www.crem.be](http://www.crem.be)
- [9] HERSANT M. (2001). *Interactions didactiques et pratiques d'enseignement, le cas de la proportionnalité au collège*. Thèse, Paris : Université Paris 7 - Denis Diderot.
- [10] HOYLES C., NOSS R. & POZZI S. (2001). Proportional reasoning in nursing practice. *Journal for Research in Mathematics Education*, pp.4-27.
- [11] POST T., CRAMER K., HAREL G., KIEREN T. & LESH R. (1998). Research on rational number, ratio and proportionality. *Proceedings of the twentieth annual meeting of the north american chapter of the international group for the Psychology of Mathematics Education PME-NA XX*, Vol.1, Raleigh NC, pp.89-93.
- [12] NOWAK M.-TH., TRAN D., ZUCCHETTA J.-F. (2001). *La proportionnalité dans tous ces États*. Lyon : IREM de Lyon.