

THESIS / THÈSE

DOCTEUR EN SCIENCES

Instabilités gravitationnelles de champs de Yang-Mills et de champs scalaires dans l'univers primordial

Füzfa, André

Award date:
2004

Awarding institution:
Universite de Namur

[Link to publication](#)

General rights

Copyright and moral rights for the publications made accessible in the public portal are retained by the authors and/or other copyright owners and it is a condition of accessing publications that users recognise and abide by the legal requirements associated with these rights.

- Users may download and print one copy of any publication from the public portal for the purpose of private study or research.
- You may not further distribute the material or use it for any profit-making activity or commercial gain
- You may freely distribute the URL identifying the publication in the public portal ?

Take down policy

If you believe that this document breaches copyright please contact us providing details, and we will remove access to the work immediately and investigate your claim.



FACULTÉS UNIVERSITAIRES NOTRE-DAME DE LA PAIX NAMUR

FACULTE DES SCIENCES

Instabilités gravitationnelles de champs de Yang-Mills et de champs scalaires dans l'univers primordial

Dissertation présentée par
André Füzfa
pour l'obtention du grade
de Docteur en Sciences

Composition du Jury :

Jean-Michel ALIMI
Jean-Marc GÉRARD
Dominique LAMBERT (Promoteur)
Philippe LAMBIN
Anne LEMAÎTRE (Promoteur)
Alain MOUSSIAUX
Michael VOLKOV

28 janvier 2004

©Presses universitaires de Namur & André Füzfa
Rempart de la Vierge, 8
B-5000 Namur (Belgique)

Toute reproduction d'un extrait quelconque de ce livre,
hors des limites restrictives prévues par la loi,
par quelque procédé que ce soit, et notamment par photocopie ou scanner,
est strictement interdite pour tous pays.

Imprimé en Belgique

ISBN : 2-87037-435-6
Dépôt légal : D / 2004 / 1881 / 3

Facultés Universitaires Notre-Dame de la Paix
Faculté des Sciences
rue de Bruxelles, 61, B-5000 Namur, Belgium

Facultés Universitaires Notre-Dame de la Paix
Faculté des Sciences
Rue de Bruxelles, 61, B-5000 Namur, Belgium

**Instabilités gravitationnelles de champs de Yang-Mills
et de champs scalaires dans l'univers primordial**
par André Füzfa

Résumé : Le mécanisme d'instabilité gravitationnelle d'un champ de Yang-Mills est étudié via l'intégration numérique de la formulation hamiltonienne du système *Einstein-Yang-Mills* décrivant le couplage d'un champ de jauge à la gravitation. Une évolution en deux temps est mise en évidence : une dilution des fluctuations, conséquence de l'invariance conforme du champ, apparaît en premier lieu ; elle est suivie d'un régime d'oscillations croissantes lorsque l'on s'éloigne suffisamment de la solution homogène. Une comparaison instructive avec le mécanisme d'instabilité gravitationnelle du champ scalaire est également envisagée. Enfin, nous avons étudié l'influence de champs scalaires de quintessence sur la formation d'amas de matière noire grâce à la modification d'un code à N particules. Ceux-ci inhibent la formation des amas, en privilégiant des structures moins nombreuses et de faible masse, tout en produisant des différences assez significatives que pour permettre de discerner non seulement un modèle avec quintessence d'un autre plus conventionnel (avec constante cosmologique) mais également les divers modèles de quintessence entre eux.

**Gravitational instabilities of Yang-Mills and scalar fields
in the early universe**
by André Füzfa

Abstract : The gravitational instability of Yang-Mills fields is studied by means of a numerical integration of the hamiltonian formulation of *Einstein-Yang-Mills* equations, which describe the coupling between gravitation and a gauge field. A two-step evolution appears to rule this mechanism : the fluctuations first dilute, as a sequel of the conformal invariance of the gauge theory ; then, the fluctuations undergo oscillations of increasing amplitude as the solution moves away from the homogeneous one. An interesting comparison with the gravitational instability of a scalar field has also been made. Finally, we have established that the quintessence scalar fields inhibit the formation of dark matter halos. By analysing the results of a modified N -body code, we show that those fields produce less structures and lighter halos, and lead to significant differences that allow to distinguish either a quintessence scenario from a more conventional one with a cosmological constant either different quintessence models.

Dissertation doctorale en Sciences physiques (Ph.D. thesis in Physics)

Date : 28-01-2004

Département de Mathématique

Promoteurs (Advisors) : Prof. D. LAMBERT et Prof. A. LEMAÎTRE

Le petit prince : ” – Comment peut-on posséder les étoiles ?

– A qui sont-elles ? riposta, grincheux, le businessman.

– Je ne sais pas. A personne.

– Alors, elles sont à moi, car j’y ai pensé le premier. (...)

– Et qu’en fais-tu ?

– Je les gère. Je les compte et je les recompte, dit le businessman. C’est difficile. Mais je suis un homme sérieux ! (...)

C’est amusant, pensa le petit prince. C’est assez poétique. Mais ce n’est pas très sérieux.

Le petit prince avait sur les choses sérieuses des idées très différentes des idées des grandes personnes.

Moi, dit-il encore, je possède une fleur que j’arrose tous les jours. Je possède trois volcans que je ramone toutes les semaines. (...) C’est utile à mes volcans et c’est utile à ma fleur, que je les possède. Mais tu n’es pas utile aux étoiles...”

(...)

” Si je vous ai raconté ces détails (...), c’est à cause des grandes personnes. Les grandes personnes aiment les chiffres. Quand vous leur parlez d’un nouvel ami, elles ne vous questionnent jamais sur l’essentiel. Elles ne vous disent jamais : Quel est le son de sa voix ? Quels sont les jeux qu’il préfère ? (...) Elles vous demandent : Quel âge-a-t-il ? Combien a-t-il de frères ? Combien pèse-t-il ? Combien gagne son père ? Alors seulement elles croient le connaître. Si vous dites aux grandes personnes : J’ai vu une belle maison en briques roses, avec des géraniums aux fenêtres et des colombes sur le toit..., elles ne parviennent pas à s’imaginer cette maison. Il faut leur dire : J’ai vu une maison de cent mille francs. Alors, elles s’écrient : Comme c’est joli !”

(...)

” Mais moi, malheureusement, je ne sais pas voir les moutons à travers les caisses. Je suis peut-être un peu comme les grandes personnes. J’ai dû vieillir.”

A. de Saint-Exupéry, ” Le Petit Prince” .

Remerciements

Il est deux personnes sans lesquelles ce travail n'aurait jamais pu voir le jour et qui, à ce titre, méritent bien plus que ces modestes remerciements. C'est cependant avec un grand plaisir que je vais tenter ici de leur exprimer toute l'étendue de ma plus sincère et profonde gratitude.

Il s'agit tout d'abord de mon promoteur, le Professeur Dominique Lambert, dont le savoir encyclopédique mais toujours modeste¹ et surtout la pédagogie maïeutique ont été — et demeurent encore — mes plus précieux compagnons durant ces trop courtes années d'apprentissage à ses côtés. J'espère que bien d'autres étudiants pourront également connaître ma chance d'éprouver une telle stimulation intellectuelle en travaillant avec lui. Ensuite, il y a bien évidemment mon autre promoteur, le Professeur Anne Lemaître, dont les ressources, la rigueur mathématique et l'esprit critique aiguisé m'ont souvent été profitables. Je les remercie également tous les deux du fond du cœur pour leurs si agréables qualités humaines, notamment leur enthousiasme inébranlable et communicatif, ainsi que leur soutien inconditionnel à ce projet de thèse en cosmologie.

Je tiens également à remercier tous les membres du jury pour leurs conseils pertinents et leurs remarques constructives au sujet du manuscrit ainsi que pour leur patience et leur indulgence vis-à-vis de la longueur de celui-ci. Plus particulièrement, je souhaiterais exprimer toute ma reconnaissance à Jean-Michel Alimi pour m'avoir permis de m'initier au problème de la formation des structures cosmiques tel qu'il est abordé dans la recherche de haut niveau. Je le remercie également pour son accueil chaleureux et sa sympathie qui font de mes séjours parisiens bien plus que d'agréables moments de travail.

De même, je souhaite exprimer ma gratitude envers les différentes institutions, et les personnes au sein de celles-ci, qui ont contribué indirectement à l'achèvement de ce travail. Je pense notamment au Révérend Père Recteur Michel Scheuer qui a ardemment soutenu ce projet auprès du Fonds National de la Recherche Scientifique, à Philippe Lambin qui a accepté d'être le répondant pour cette thèse de doctorat en sciences physiques, à Jacques Henrard pour m'avoir accueilli dans son unité et pour son intérêt marqué pour la cosmologie, ainsi qu'à l'ensemble du département de mathématique pour son accueil chaleureux d'un physicien à l'époque "*Sans Laboratoire Fixe*" et pour sa disponibilité toute dévouée². Enfin, c'est également avec grand plaisir que je remercie le Fonds National de la Recherche Scientifique et les fonds associés pour avoir financé cette thèse.

Ce n'est que bien maigre consolation que de remercier vivement mes courageuses relectrices, ma sœur Aurore et Laetitia, elles qui ont maintes fois frôlé la somnolence en parcourant ces pages et qui ont tout de même émis de nombreuses remarques pour le moins judicieuses. Si,

¹J'avouerais même m'être quelquefois demandé s'il n'était pas inépuisable, après de nombreuses tentatives infructueuses de sondage tous azimuth.

²Merci notamment à Eric pour tous les "*bons tuyaux*" qu'il prodigue.

un jour, je parviens à éliminer les effets secondaires migraineux de ce prototype de soporifique entièrement naturel que vous tenez entre les mains et à en tirer un quelconque profit, je tiens à leur en assurer une large part bénéficiaire. Je remercie également Pascale d'avoir tenté avec un courage épique sinon une témérité désespérée une initiation brève mais suffisante à ce même exercice de sport extrême cérébral. Je lui dois bien d'éclairer sa lanterne : le terme un tantinet pompeux de "*prolégomènes*" signifie des principes préliminaires requis pour l'étude d'un sujet ou tout simplement une ample mais bien nécessaire introduction.

A mon grand frère, Ulrik-Matyas, et à ma grande sœur, Aurore, je tiens à dire combien leur intérêt pour mes préoccupations obscures et bizarres a été une grande source d'encouragement et que leur considération sera toujours pour moi une belle et précieuse récompense. Je remercie également ma maman, pour qui l'objet de ma profession relève un peu du mystère mais qui persiste malgré tout à laisser poindre certaines marques de fierté. Je pense également à mon père et à ma grand-mère qui continuent à s'inquiéter de mon parcours.

Je souhaite remercier Sandrine pour avoir toujours veillé à la maintenance d'une excellente ambiance de travail dans notre bureau grâce à son approvisionnement régulier en friandises abondantes et variées qu'elle a toujours partagé sans compter, grâce à ses nombreuses récréations qu'elle m'a offertes en agréables bavardages de toute sorte et surtout, pour s'être toujours évertuée à me répondre séance tenante sur des questions techniques que celles-ci fussent ardues ou triviales. Je remercie également mes collègues et amis, Ludo et Joëlle, Jean-Yves, Annick, Anne-Lau et Cédric, Laurent, Sam, Oli, Anne et tous les autres d'avoir tenu mes travaux en si haute estime et pour m'avoir maintes fois manifesté leur amical soutien.

Enfin, c'est avec une émotion profonde que je te remercie, toi, ma petite joie, discrète, humble et fidèle, pour avoir illuminé toutes ces heures de ta présence et de tes éclats de rire et pour m'avoir ramené maintes fois les pieds sur terre par ton humour et ta gentillesse. Je tiens également à m'excuser pour toutes ces journées que j'ai passées loin de toi, pour ces soirées où j'étais d'humeur maussade parce que je n'arrivais pas à sortir mes pensées d'un calcul inachevé ou d'un programme défectueux, pour toutes ces heures où j'ai présumé de mon importance et où, aveuglé, j'ai pu laisser ainsi s'échapper de si précieuses volutes de vie avec toi. La Science est une maîtresse tyrannique et ingrate, car elle conçoit en permanence l'émergence de si tristes instants. Aussi, si un jour tu désespères pendant ces moments difficiles, j'aimerais tant que tu te rappelles que jamais tu ne passeras après elle car il n'y a que toi qui puisses me faire oublier la longueur du temps avec l'allégresse que me procure l'instant d'un seul battement de cœur partagé avec toi.

Conventions

Dans ce texte, nous utiliserons l'habituelle convention d'Einstein qui consiste à omettre le symbole de sommation dans les expressions où l'indice de sommation est répété deux fois. Ainsi, le produit scalaire de deux vecteurs s'écrira, dans cette convention,

$$\vec{A} \cdot \vec{B} = \sum_i A^i B_i \equiv A^i B_i.$$

Ensuite, nous aurons coutume de recourir à des lettres grecques pour désigner les indices spatio-temporels (dont la valeur court de 0 à 3), à des lettres latines pour les indices purement spatiaux (dont la valeur court de 1 à 3) et à des lettres latines grasses telles que **a**, **b**, ... pour indiquer des indices se rapportant à une algèbre interne.

Les divers types de dérivées suivront les conventions suivantes : les dérivées partielles seront indiquées en indice par une virgule ; les dérivées covariantes sur l'espace-temps seront indiquées en indice par un point-virgule ; tandis qu'une barre verticale représentera les dérivées covariantes sur les sections spatiales de l'espace-temps. Chacun de ces symboles sera suivi du numéro de la coordonnée par rapport à laquelle on souhaite dériver.

La signature de la métrique adoptée tout au long de ces pages est la suivante : $(-, +, +, +)$. De même, nous travaillerons souvent en coordonnées sphériques (χ, θ, φ) , où χ sera donc la coordonnée comobile radiale. Sauf mention explicite du contraire, nous adopterons les conventions suivantes pour les dérivées par rapport aux coordonnées : les grandeurs primées indiquent une dérivée par rapport à χ et celles pointées par rapport au temps t .

Aux chapitres 4, 5 et 6 traitant de l'instabilité gravitationnelle, nous noterons souvent les valeurs des champs au temps initial $t = 0$ par un indice 0 ($f(0, \chi) = f_0(\chi)$, en coordonnées sphériques). De même, nous affecterons les grandeurs caractérisant le fond homogène sur lequel se développent les fluctuations par un exposant B , pour "background".

En ce qui concerne nos abréviations, on pourra consulter le tableau de la page suivante.

Enfin, sauf mention explicite du contraire, nous travaillerons dans un système d'unités

Abréviations	Significations
RG	Relativité générale
YM	Yang-Mills
EYM	Einstein-Yang-Mills
ADM	Arnowitt-Deser-Misner
IVP	Initial Value Problem (Problème de Cauchy)
PM	Particle Mesh
FLRW	Friedmann-Lemaître-Robertson-Walker

tel que la constante de Newton G et celle de vitesse de la lumière c seront égales à l'unité. La constante de couplage des interactions de jauge sera également posée égale à cette même valeur. Au chapitre 7, toutefois, nous aurons recours au système d'unités géométrisées dans lequel seule la vitesse de la lumière a été normalisée.

Table des matières

1	Prolégomènes	3
2	Champs de Yang-Mills en relativité générale	41
3	Le système Einstein-Yang-Mills (EYM) en formalisme hamiltonien	77
4	Théorie relativiste de l'instabilité gravitationnelle	95
5	Instabilité gravitationnelle des champs de Yang-Mills	119
6	Instabilité gravitationnelle du champ scalaire	145
7	Influence de la quintessence sur la formation des grandes structures	163
8	Conclusions et perspectives	195
A	Les équations de Yang-Mills en géométrie différentielle	203
B	Ecriture complète du système EYM considéré	205
C	Paramétrisation homogène et isotrope de la connexion	207
D	Détails des simulations du chapitre 5	211
E	Liste des publications	221

Chapitre 1

Prolégomènes

“ The marvelous thing about it all is that for such a wide range of important, strong phenomena – nuclear forces, electrical phenomena, and even weak ones like gravitation – over a tremendous range of physics, all the laws for these seem to be symmetrical.”

R. Feynman, [FLS89].

Sommaire

1	Symétries et lois de la physique	4
2	Théories de jauge	11
2.1	Relativité générale	11
2.2	Invariance de jauge abélienne et électrodynamique scalaire	14
2.3	Modèle de Higgs et brisure spontanée d’une symétrie de jauge . .	17
2.4	Invariance de jauge non abélienne et théorie de Yang-Mills des interactions nucléaires	20
3	Invariance d’échelle et invariance conforme en théorie classique des champs	27
4	Rudiments de modèle standard du Big Bang	31
5	Ouverture	37

1 Symétries et lois de la physique

Dans ce chapitre, nous proposons tout d’abord une introduction aux principes fondateurs de ces théories modernes de la physique que sont la théorie de la **relativité générale**, décrivant la gravitation, et **les théories de jauge**, dont les versions quantifiées régissent le monde microscopique des particules élémentaires. Notre approche, essentiellement heuristique, se base sur le concept de symétrie qui nous servira de guide tout au long de cette (re-)découverte. Ceci pourrait paraître, à raison, quelque peu artificiel aux yeux d’un lecteur critique. Certes, notre présente démarche ne suit pas exactement le cheminement historique qui a mené à ces théories, mais il convient de reconnaître, à notre décharge, qu’une introduction conventionnelle dépasserait largement le cadre de ces prolégomènes. Or le concept de symétrie a su révéler aux physiciens du siècle dernier toute sa puissance fédératrice et unifier en son sein des aspects aussi différents de la réalité que ceux qui sont décrits par la gravitation et les théories de jauge. C’est pourquoi nous avons choisi cette approche et nous laisserons aux nombreux ouvrages de référence en la matière le soin d’introduire plus amplement le lecteur à ces sujets passionnants, le cas échéant. Ensuite, nous passerons brièvement en revue le modèle standard du Big Bang, paradigme de la cosmologie moderne, en vue de situer nos recherches dans le cadre de certaines problématiques actuelles de cette théorie.

Commençons tout d’abord cette introduction en présentant la physique théorique comme la description de **phénomènes**, dont les quantités représentatives comme la vitesse ou la position se formulent en termes d’objets mathématiques ou **champs**, évoluant dans **l’espace** au cours du **temps**¹. Ce triumvirat **espace-temps-matière** fonde la théorie relativiste du champ (cf. [WEY52] pour une réflexion éclairée sur la question), paradigme de la physique théorique, dont les divers avatars (notamment quantiques) se déclinent en des noms fameux tels que relativité restreinte et générale, électromagnétisme, théorie électrofaible et chromodynamique, voire même théorie des cordes.

Dans ce cadre réducteur où la physique s’intéresse presque exclusivement aux entités mathématiques évoluant dans l’espace-temps, il est nécessaire d’adjoindre un critère permettant de distinguer les “*bons*” objets, à même de représenter adéquatement des phénomènes physiques tels que particules et interactions, des “*mauvais*”. Le critère qui a fini par s’imposer au cours de l’histoire de la physique est celui de **symétrie**, qui permet de définir des **invariants**, ou grandeurs conservées (“*constantes du mouvement*”) sous certaines opérations. Plus précisément, on dira, à l’instar de Weyl [WEY52], qu’un objet ou le phénomène qu’il incarne, est symétrique s’il est une action que nous puissions lui appliquer sans pour autant

¹Nous espérons que le lecteur indulgent nous pardonnera cette conception kantienne éminemment réductrice.

entraîner une modification d'aucune sorte de ses propriétés physiques².

Ainsi, la physique s'échine-t-elle à étudier les objets symétriques, inaltérables par des opérations visant à discréditer leur objectivité, à l'instar des phénomènes réels qu'ils se doivent de représenter. Par exemple, on ne s'attend pas à ce qu'un objet réel disparaisse lorsque l'observateur se déplace pour changer son point de vue, de sorte que son avatar mathématique devra posséder des caractéristiques particulières sous translation. Les propriétés physiques de l'objet ainsi représenté seront alors invariantes sous cette transformation qui méritera donc l'appellation de symétrie. Il est donc possible de discerner deux types de transformations pouvant donner lieu à des symétries en cas d'invariance : celles qui agissent sur l'observateur ou le procédé d'observation, les **transformations externes**, et celles qui affectent les champs eux-mêmes, les **transformations internes**. Ces deux catégories peuvent encore être divisées en deux : les transformations **continues** et **discrètes**.

Un ensemble de transformations continues obéit généralement à la structure algébrique du **groupe**, c'est-à-dire qu'elles admettent une loi de composition interne et partout définie, associative, de même que l'existence d'un neutre et la propriété de symétrisabilité³. Si, en outre, le groupe admet la propriété de **commutativité**, i.e. la composition de deux éléments est identique à celle de ces mêmes éléments pris dans l'ordre inverse, alors il est appelé groupe commutatif ou encore **groupe abélien**.

Toutefois, l'ensemble des transformations ne forme qu'une *représentation du groupe*, structure algébrique abstraite qui peut s'incarner de diverses façons, triviales ou non. Une représentation (linéaire) d'un groupe est en effet un homomorphisme du groupe à valeurs dans un ensemble d'opérateurs (linéaires) agissant sur un espace vectoriel (dit "*espace de représentation*"), éventuellement métrique. Ici, l'espace de représentation qui nous préoccupe est la version mathématisée de l'espace-temps physique, qui est décrit localement (et globalement en l'absence de gravitation) par l'ensemble⁴ $\mathbb{R}^{1,3}$.

Parmi les diverses représentations que peut posséder un groupe, il en existe des plus commodes, notamment les *représentations irréductibles* qui ne laissent invariants que les

²On consultera les références [FLS89, LAM99] pour une réflexion sur le rôle de la symétrie dans les lois de la physique.

³C'est-à-dire l'existence d'un élément pour tout autre élément du groupe qui, composé avec ce dernier redonne le neutre.

⁴L'espace-temps ne se modélise pas par le simple ensemble \mathbb{R}^4 dont on tirerait les coordonnées pour faire de la physique mais bien par l'espace pseudo-euclidien $\mathbb{R}^{1,3}$. La norme définie sur celui-ci peut être nulle sans pour autant que le vecteur concerné le soit (la matrice de métrique, dont les éléments sont définis par le produit scalaire entre deux vecteurs quelconques de la base, est une diagonale avec les éléments $-1, +1, +1, +1$). Mais ces considérations sont plus du ressort d'une introduction à la relativité restreinte.

sous-espaces triviaux de l'espace de représentation⁵. Les *représentations réductibles*, au contraire, laissent invariant au moins un sous-espace non trivial de l'espace de représentation. Les *représentations unitaires* sont, elles aussi, agréables dans la mesure où elles préservent la métrique et le produit scalaire de l'espace métrique de représentation, puisqu'elles prennent leurs valeurs dans un ensemble d'opérateurs unitaires.

Les transformations habituelles que l'on peut effectuer sur les degrés de liberté de l'espace-temps (c'est-à-dire sur les coordonnées) sont regroupées au sein du **groupe de Poincaré** qui comprend comme sous-groupes **le groupe des translations** (dans l'espace et/ou dans le temps) et **le groupe de Lorentz**⁶. Ce dernier comprend le sous-groupe des **rotations** dans l'espace et les **transformations de Lorentz pures** (appelées les *boosts*), ces dernières transformations correspondant à un déplacement à vitesse constante inférieure ou égale à celle de la lumière. Les boosts ne forment toutefois pas un sous-groupe du groupe de Lorentz, puisque le produit de deux boosts peut se décomposer en un boost et une rotation, ce qui viole le caractère clos (interne) du groupe (cf. [DEL97]). Les transformations infinitésimales représentant les éléments du groupe de Poincaré peuvent s'écrire :

$$x'^{\mu} = x^{\mu} + a^{\mu}$$

pour une translation (a est un vecteur constant et μ un indice courant de 0 à 4),

$$x'^i = x^i + \xi_j^i x^j$$

pour une rotation et

$$x'^{\mu} = x^{\mu} + \xi_0^{\mu} x^0$$

pour un boost (une transformation de Lorentz générale Λ admet Λ^{μ}_{ν} pour représentation avec $x'^{\mu} = \Lambda^{\mu}_{\nu} x^{\nu}$). Dans ce qui suit, nous rappelons que les indices latins seront spatiaux (variant de 1 à 3) et les grecs spatio-temporels (variant de 0 à 3).

Sous un groupe de transformations donné, les champs, ces entités qui doivent représenter les grandeurs fondamentales de la physique, revêtent un caractère tensoriel. Les **tenseurs** sont des formes multinéaires de l'espace vectoriel de représentation dont les composantes se transforment sous les représentations R du groupe comme

$$T'_{i_1 \dots i_p}{}^{j_1 \dots j_q} = R_{i_1}^{k_1} \dots R_{i_p}^{k_p} \dots S_{l_1}^{j_1} \dots S_{l_q}^{j_q} T_{k_1 \dots k_p}{}^{l_1 \dots l_q}$$

⁵Les noyaux des endomorphismes représentatifs sont réduits à l'élément nul.

⁶Le groupe de Lorentz est appelé $SO(3, 1)$ car il est celui des matrices orthogonales de dimension 4 sur un espace pseudo-euclidien (dont la signature de la métrique est $(+, -, -, -)$ et donc entraîne la notation $O(3, 1)$ et non $O(4)$), et de déterminant égal à $+1$ (d'où le S pour "*spécial*"). Le recouvrement universel de ce groupe est le groupe $SL(2, \mathbb{C})$ des transformations linéaires de dimension 2 sur \mathbb{C}^2 à coefficients complexes et de déterminant égal à $+1$ (cf. [JON98, DEL97]).

où les indices i sont covariants et j contravariants, où $S = R^{-1}$ et où le rang du tenseur est égal à $p + q$. On sait par exemple que le champ de position ou de vitesse d'une particule doit être représenté par un vecteur, c'est-à-dire un tenseur contravariant de rang un sous le groupe de Poincaré. On dit que les tenseurs engendrent une représentation du groupe de dimension égale au rang du tenseur, ou qu'un champ tensoriel se transforme comme une certaine représentation du groupe.

De plus, si un champ peut adopter un certain comportement sous des transformations externes (de coordonnées sur l'espace-temps), il peut tout à fait engendrer dans le même temps une représentation d'un groupe de transformations internes, relatives à des degrés de liberté différents de ceux de l'espace-temps (la phase et l'isospin, que nous introduirons plus loin en seront des exemples). Ainsi, nous noterons les champs avec des indices de différentes natures, se rapportant aux différentes représentations internes et externes qu'ils engendrent. Par exemple, dans la notation $\varphi_{\mathbf{ab}\dots}^{\mu\nu\dots}$, les indices grecs se rapportent à des degrés de liberté externes (les coordonnées) et leurs homologues latins gras à des degrés de liberté internes (coordonnées dans un espace interne). L'espace-temps proprement dit peut donc se décrire localement par le produit cartésien de l'ensemble $\mathbb{R}^{1,3}$ avec un autre, notons-le \mathcal{F} , qui est l'espace de représentation des transformations internes.

Les tableaux suivants présentent une liste de quelques symétries fréquemment rencontrées en physique. La table 1.1 reprend quelques transformations continues que l'on peut effectuer sur les champs ou sur le système (de coordonnées) les décrivant. Le champ test $\varphi(t, \vec{r})$ se transforme dans une certaine représentation L du groupe de Lorentz et engendre une représentation I d'un groupe de transformations internes. Dans la table 1.1, les nouvelles valeurs du champ sont exprimées en fonction des anciennes évaluées aux nouvelles coordonnées, le cas échéant. La table 1.2 illustre les effets d'opérations discrètes, tant internes qu'externes sur les degrés de liberté.

Une propriété remarquable des transformations continues nous est fournie par le théorème de Noether qui permet d'associer à chaque symétrie continue d'une théorie physique⁷ un ensemble de courants (et de charges) conservés dont le nombre égale la dimension du groupe de transformations concernées. La table 1.3 suivante donne les grandeurs conservées pour les transformations continues de la table 1.1.

Ainsi, les symétries apparaissent-elles déjà comme essentielles en physique, tant pour caractériser les bons objets mathématiques que pour mettre en évidence les quantités obser-

⁷Qui est invariante ou symétrique sous la transformation continue si celle-ci préserve le lagrangien et les équations d'Euler-Lagrange. Cependant, toutes les symétries des équations d'Euler-Lagrange ne sont pas nécessairement des symétries du lagrangien. Par exemple, la simple multiplication du lagrangien par un scalaire (ce qui équivaut à un changement d'unités physiques) est une symétrie des équations d'Euler-Lagrange mais évidemment pas du lagrangien lui-même.

Transformations continues	Effets sur le champ test $\varphi_{\mathbf{a}}$
Translation dans l'espace	$\varphi'(t, \vec{r}) = \varphi(t, \vec{r}' = \vec{r} + \vec{r}_0)$
Translation dans le temps	$\varphi'(t, \vec{r}) = \varphi(t + \tau, \vec{r})$
Rotation ou boost Λ	$\varphi'(x^\mu) = L(\Lambda)\varphi(x'^\mu = \Lambda^\mu_\nu x^\nu)$
Changement de phase	$\varphi'(x^\mu) = e^{-i\alpha}\varphi(x^\mu)$
Transformation interne g	$\varphi'(x^\mu) = I(g)\varphi(x^\mu)$

Tableau 1.1 – Transformations continues externes (translations, rotations et transformations de Lorentz) et internes (changement de phase, élément g d'un groupe de transformations internes) en théorie des champs

Transformations discrètes	Effets sur le champ φ ou les coordonnées
Parité	$\vec{r}' \rightarrow -\vec{r}$
Renversement du temps	$t' \rightarrow -t$
Conjugaison de charge	$Q \rightarrow -Q$
Permutation d'un système de N particules identiques	$P(\varphi^1, \varphi^2, \dots, \varphi^N) \rightarrow (\varphi^{P(1)}, \varphi^{P(2)}, \dots, \varphi^{P(N)})$

Tableau 1.2 – Transformations discrètes en théorie des champs

vables et les sacro-saints principes de conservation. Mais nous allons voir que leur présence est même intimement liée à celle des interactions elles-mêmes.

A partir des considérations introduites ci-avant, la théorie de la relativité restreinte est simplement une mécanique globalement invariante sous le groupe de Poincaré. En effet, celui-ci comprend comme sous-groupe le groupe de Galilée et celui des translations dans l'espace et le temps sous lesquels les lois de Newton de la mécanique classique sont invariantes. Ce groupe de Galilée est constitué par des rotations d'angle indépendant du temps et les translations à vitesse constante très inférieure à c . De plus, le groupe de Poincaré comprend cette extension du groupe de Galilée qu'est le groupe de Lorentz dont les translations à vitesse constante peuvent se faire à une vitesse inférieure ou égale à c . L'espace-temps de la relativité restreinte se caractérise localement par l'élément d'intervalle

Symétries continues	Grandeurs conservées
Translations dans l'espace-temps	quadri-impulsion $P^\mu \equiv (E, P^i)$
Transformations de Lorentz (rotations + boosts)	Moment cinétique total (orbital + intrinsèque (spin))
Changement de phase	Nombres quantiques additifs (charge électrique, hypercharge, étrangeté, nombre leptonique ou baryonique, etc.)
Transformation interne	spin isotopique, etc.

Tableau 1.3 – *Symétries continues et grandeurs conservées par le théorème de Noether*

ds dont le carré $ds^2 = -c^2 dt^2 + dl^2$ vaut la différence entre le carré de la distance entre deux événements (deux points de l'espace-temps) et le carré de la durée (multipliée par c) entre ceux-ci. L'élément d'intervalle constitue ainsi un bon invariant sous les transformations de Lorentz⁸. En coordonnées cartésiennes, cet élément d'intervalle s'écrit

$$ds^2 = \eta_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu \quad (1.1)$$

où $(\eta_{\mu\nu}) = \text{diag}(-1, +1, +1, +1)$ est la métrique de Minkowski. Le temps propre $d\tau$ d'une particule matérielle libre se définit comme le temps qui s'écoule pour un observateur qui l'accompagnerait le long de sa trajectoire $ds^2 = c^2 d\tau^2$. La trajectoire effective de cette particule libre sera alors décrite par un principe de moindre temps propre, via l'action

$$S = \int mc ds = \int mc^2 d\tau, \quad (1.2)$$

c'est-à-dire que la particule est au repos dans un référentiel comobile, et se déplace en ligne droite sinon, en suivant les géodésiques de l'espace-temps plat de Minkowski.

De plus, la relativité restreinte réconcilie la mécanique de Newton et l'électromagnétisme de Maxwell, à condition de formuler celui-ci de manière covariante, c'est-à-dire de lui associer une densité lagrangienne qui se comporte bien comme un scalaire sous le groupe de Lorentz

⁸En effet, l'élément de longueur dl^2 et celui de durée dt^2 , s'ils étaient de bons invariants sous le groupe de Galilée de la mécanique newtonienne, ne le sont plus sous les boosts de Lorentz, en vertu des effets de contraction des longueurs et de dilatation du temps. Par contre, il est aisé de vérifier à l'aide des transformations de Lorentz que la différence des deux, l'élément d'intervalle ds^2 , est invariante et constitue de ce fait la grandeur physique adéquate pour décrire les phénomènes dans l'espace-temps.

et, par extension, sous le groupe de Poincaré total de la théorie. Nous savons que cette quantité doit être reliée aux champs électrique et magnétique, mais nous savons aussi que chacun pris à part n'est pas invariant sous transformation de Lorentz⁹. Ainsi, une solution consiste à construire, à partir de ces quantités, un tenseur qui aurait donc six composantes indépendantes (cf. [ROL94] pour une approche didactique et [LL61, MOU98] pour une approche plus formelle). Ce tenseur s'appelle le tenseur du champ électromagnétique (ou, plus rarement, tenseur de Faraday) et ses composantes s'écrivent :

$$F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu \quad (1.3)$$

où $A_\mu = (-V, \vec{A})$ est le quadri-potential électromagnétique. La densité lagrangienne recherchée s'écrit dès lors

$$\mathcal{L}_{em} = -\frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} \quad (1.4)$$

dont les équations d'Euler-Lagrange forment le deuxième groupe d'équations de Maxwell (sans source), cf. annexe A :

$$\partial_\mu F^{\mu\nu} = 0. \quad (1.5)$$

Le premier groupe d'équations de Maxwell est, quant à lui, constitué par les identités de Bianchi sur le tenseur du champ : $F_{\alpha\beta,\gamma} + F_{\beta\gamma,\alpha} + F_{\gamma\alpha,\beta} = 0$, qui découlent naturellement de la construction (1.3) du tenseur $F_{\mu\nu}$.

Toutefois, la gravitation n'est pas naturellement incluse dans le corps de la relativité restreinte, elle doit être introduite via un potentiel d'interaction newtonien (non relativiste) dans le lagrangien. De plus, la gravitation universelle souffre de deux pathologies absolument inconciliables avec les préceptes de la relativité restreinte :

- (a) elle est censée se propager instantanément, ce qui constitue un innommable affront à la constance de la vitesse de la lumière et au principe de causalité qui en découle.
- (b) le temps et l'espace y sont considérés comme indépendants et absolus, ce qui est contredit par l'expérience (par exemple : celle de Michelson et Morley) et rejeté par la théorie de la relativité restreinte.

Ces deux raisons nous amènent à la conclusion que la théorie de la gravitation universelle n'est encore qu'un brouillon de la théorie rigoureuse qui devra lui succéder : la relativité générale.

Toutefois, une comparaison, loin d'être innocente, entre la pathologie (a) ci-dessus et la manière dont nous avons discuté des symétries auparavant mérite que l'on s'y attarde. En effet, nous avons présenté les symétries comme s'appliquant **globalement**, sur la totalité de l'espace-temps. La relativité restreinte constitue donc une mécanique globalement invariante sous les transformations de Poincaré.

⁹On sait qu'ils se mélangent sous transformations de Lorentz, cf. [FLS89].

Or comment envisager un processus physique, comme une interaction par exemple, qui garantisse globalement l’obéissance de la matière à une symétrie ? Comment l’avènement d’une symétrie en un endroit et à un moment donné de l’espace-temps pourrait-il se propager instantanément pour garantir celle-ci partout ? En fait, il est impossible d’imposer une symétrie globale sans violer des principes physiques fondamentaux. Une symétrie ne devrait être que **locale** si elle veut satisfaire au principe de causalité. Or imposer à la théorie (et à son lagrangien) une symétrie locale est infiniment plus contraignant que l’imposition d’une symétrie globale. Nous allons voir aux paragraphes suivants comment l’exigence de principes symétriques locaux implique naturellement l’existence de champs propageant des interactions et constitue le fondement même du paradigme de la **théorie de jauge**.

2 Théories de jauge

2.1 Relativité générale

Commençons notre investigation des conséquences du caractère nécessairement local des symétries par le cas des transformations externes. En règle générale, effectuer une transformation locale de coordonnées revient à écrire la transformation infinitésimale suivante

$$x'^{\mu} = x^{\mu} + \xi^{\mu}(x^{\nu}), \quad (1.6)$$

avec $\xi^{\mu}(x^{\nu}) = a^{\mu}$ pour une translation locale et $\xi^{\mu}(x^{\nu}) = \epsilon^{\mu}_{\rho}(x^{\nu})x^{\rho}$ pour une transformation de Lorentz locale¹⁰. En fait, “*jauger*” le groupe de Poincaré en imposant l’invariance de la théorie sous des transformations locales de celui-ci revient à rechercher l’invariance de la théorie sous des transformations quelconques de coordonnées proches de l’identité, de la forme (1.6), même non linéaires. Les lois de la mécanique que nous recherchons seront donc valables pour tous les observateurs, quel que soit leur état de mouvement, fût-il même accéléré. Ceci constitue le **principe de relativité généralisé**.

Cependant, l’exigence de symétrie sous des changements non linéaires de coordonnées va avoir une profonde incidence sur la description de l’espace-temps : en effet, il est clair que la métrique de Minkowski n’est pas invariante sous de telles prescriptions et il nous faudra dès lors décrire les éléments d’intervalle ds des particules d’une manière plus générale. A cette fin, on introduit le champ tensoriel dit de “*métrique*” $g_{\mu\nu}$ tel que l’élément d’intervalle (au carré) s’écrive

$$ds^2 = g_{\mu\nu} dx^{\mu} dx^{\nu}. \quad (1.7)$$

¹⁰Pour rappel, les indices μ, ρ sont exclusivement spatiaux pour une rotation, les boosts s’identifiant à des rotations autour d’un “*plan*” comprenant l’axe du temps et l’axe spatial le long duquel on se déplace.

En vue de satisfaire à l'invariance locale sous transformations de Poincaré, ce champ tensoriel ne peut pas être quelconque et doit donc satisfaire ses propres équations d'Euler-Lagrange. Celles-ci détermineront la géométrie de l'espace-temps puisqu'elles fixeront la métrique et l'on peut donc s'attendre à ce que la densité lagrangienne de la théorie soit reliée à l'une ou l'autre de ses propriétés géométriques. En recherchant de quelle(s) équation(s) celle de Poisson pour le potentiel gravitationnel peut bien être la limite non relativiste ($c \rightarrow \infty$), on montre que la théorie relativiste de la gravitation repose sur un principe de stationnarité de la **courbure** (pour l'approche originale d'Einstein, on consultera les références [EIN16, ELWM52]). Plus précisément, l'**action d'Einstein-Hilbert** dont dérivent les équations de la relativité générale, sans source, s'écrit :

$$S_{EH} = -\frac{c^4}{16\pi G} \int (R - 2\Lambda) \sqrt{-g} d^4x, \quad (1.8)$$

où G est la constante de gravitation universelle de Newton ; g est le déterminant du tenseur de métrique $g_{\mu\nu}$ qui définit l'élément d'intervalle $ds^2 = g_{\mu\nu}dx^\mu dx^\nu$; $R = g^{\mu\nu}R_{\mu\nu}$ est la courbure scalaire et Λ est la constante cosmologique. On remarquera que le lagrangien d'Einstein-Hilbert est bien un scalaire conservé sous des transformations de coordonnées quelconques, ce qui est évident pour Λ et puisque toute trace d'un tenseur est un tel scalaire¹¹.

Si la stationnarité de l'action d'Einstein-Hilbert (1.8) constitue le premier postulat de la relativité générale, le second est donné quant à lui par le **principe d'équivalence fort**. La version **faible** de ce principe remonte à Galilée et Newton et stipulait l'équivalence entre masse d'inertie et masse gravitationnelle. Une conséquence bien connue de celle-ci est l'universalité de l'accélération lors de la chute des corps, comme si la gravitation était tout à la fois une propriété reliée à ceux-ci mais également dictée depuis l'extérieur. La proposition d'Einstein est d'étendre ce principe à toutes les formes possibles de matière et d'énergie (rayonnement électromagnétique, énergies nucléaires et éléments chimiques en tout genre, etc.) en postulant qu'elles ressentent toutes le champ de gravité de la même manière. Cette prescription est indispensable pour rendre infaillible et universel le principe de relativité généralisé qui veut que les lois dérivant de l'action d'Einstein-Hilbert soient valables dans n'importe quel référentiel et pour n'importe quelle expérience. Aussi, s'il devait exister une forme de matière¹² qui ne ressent pas de la même manière que les autres le champ gravitationnel, il serait possible, du moins en principe, de construire une expérience l'utilisant pour mettre en défaut l'universalité du principe de relativité. Fort

¹¹En effet,

$$R' = g'^{\mu\nu} R'_{\mu\nu} = g^{\alpha\beta} \frac{\partial x'^\mu}{\partial x^\alpha} \frac{\partial x'^\nu}{\partial x^\beta} R_{\rho\sigma} \frac{\partial x^\rho}{\partial x'^\mu} \frac{\partial x^\sigma}{\partial x'^\nu} = g^{\alpha\beta} R_{\rho\sigma} \delta_\alpha^\rho \delta_\beta^\sigma = R$$

en vertu des lois de transformations des tenseurs de rang deux.

¹²Par matière, entendez, à l'instar d'Einstein [EIN16, ELWM52], tout champ physique qui ne soit pas de nature purement gravitationnelle (tout sauf $g_{\mu\nu}$).

heureusement, ce principe d'équivalence fort n'a encore jamais failli, et a même pu être testé avec une précision de l'ordre de 10^{-12} pour l'universalité de la chute libre (cf. [HAG02] pour une revue sur les tests expérimentaux de la gravitation). Il garantit également que l'issue d'une expérience non gravitationnelle locale ne dépend nullement du système choisi pour la mesurer et donc, en particulier, que nos expériences de physique sont insensibles à l'évolution cosmologique de l'univers (immuabilité des constantes fondamentales). De même, aucune expérience ne devrait exhiber de direction privilégiée dans l'espace-temps (isotropie), c'est-à-dire qu'elles doivent bien obéir à une invariance locale sous Lorentz¹³.

Ce second postulat se traduit mathématiquement par le fait que le champ gravitationnel $g_{\mu\nu}$ se couple universellement et minimalement avec tous les autres champs de la physique, en remplaçant partout la métrique de Minkowski de la théorie sur espace-temps pseudo-euclidien. Par exemple, dans le cas de l'électromagnétisme, on a que

$$\mathcal{L}_{em} = -\frac{1}{4}\eta^{\mu\rho}\eta^{\nu\sigma}F_{\mu\nu}F_{\rho\sigma} \rightarrow -\frac{1}{4}g^{\mu\rho}g^{\nu\sigma}F_{\mu\nu}F_{\rho\sigma}.$$

Il n'y a donc pas de nouvelles interactions à proprement parler entre le champ gravitationnel et ses autres confrères matériels qui ne modifient donc pas subitement leur dynamique parce que l'espace-temps se courbe.

Enfin, si l'invariance locale sous le groupe de Poincaré qui constitue le principe de relativité généralisé amènent aux équations d'Einstein de la relativité générale pour le champ gravitationnel $g_{\mu\nu}$, il reste encore à déterminer le mouvement des corps dans cette nouvelle mécanique. Les particules matérielles obéissent simplement au principe de moindre temps propre qui caractérise les trajectoires géodésiques. Cependant, ces trajectoires doivent être déterminées sur un espace-temps courbe, dont la métrique $g_{\mu\nu}$ est solution des équations d'Einstein, qui résultent du principe variationnel sur l'action d'Einstein-Hilbert.

Ainsi, nous avons vu comment l'imposition de symétries locales sur les changements de coordonnées dans l'espace-temps nous a conduit à considérer ce dernier comme non trivialement plat, puisqu'il doit satisfaire à ses propres équations du champ, celles d'Einstein. L'invariance locale sous Poincaré a donc introduit un nouveau champ, celui de métrique $g_{\mu\nu}$, qui permet d'assurer cette forte contrainte qu'est l'invariance locale sous changements de coordonnées. Au paragraphe suivant, nous verrons comment le principe de jauge (symétrie locale) s'applique aux transformations des degrés de liberté internes des champs habitant l'espace-temps et permet de dériver l'existence d'autres interactions, comme l'électromagnétisme ou l'interaction nucléaire faible, comme autant de conséquences de l'invariance locale de la théorie.

¹³Toutefois, on peut émettre une réserve en ce qui concerne l'interaction faible qui viole le produit CP des opérations de parité P et de conjugaison de charge C et ainsi, en vertu du théorème CPT , le renversement du temps T (cf. [PS95]).

2.2 Invariance de jauge abélienne et électrodynamique scalaire

Considérons un champ scalaire ϕ complexe et montrons comment le précepte d'invariance locale sous changement de phase de ce champ conduit naturellement à introduire le champ électromagnétique dans la théorie, tout en fixant univoquement sa symétrie de jauge et son couplage au champ matériel. Cette approche est analogue à celle envisagée habituellement pour l'électrodynamique avec des électrons/positrons (spin 1/2), mais nous avons préféré utiliser ici un champ scalaire (spin 0) par souci de simplicité. Le lagrangien de la théorie de Klein-Gordon pour le champ scalaire complexe s'écrit

$$\mathcal{L}_{KG} = \eta^{\mu\nu} (\partial_\mu \phi)^* \partial_\nu \phi - m^2 \phi \phi^*, \quad (1.9)$$

où m est la masse du champ scalaire. L'équation d'Euler-Lagrange associée à cette densité lagrangienne est l'équation bien connue de Klein-Gordon

$$(\square(\cdot) + m^2(\cdot)) \phi(\cdot) = 0 \quad (1.10)$$

où $\square(\cdot) = \eta^{\mu\nu} \partial_\mu \partial_\nu(\cdot)$ est l'opérateur d'Alembertien dans l'espace de Minkowski (relativité restreinte).

Le lagrangien (1.9) est manifestement invariant sous changement global de phase :

$$\phi' = e^{-i\alpha Q} \phi$$

avec α une constante et Q la charge électrique (pour des raisons qui apparaîtront limpides dans un instant), puisque le lagrangien est une grandeur réelle construite à partir du module du champ complexe ϕ . Par contre, lors de la transformation locale

$$\phi' = e^{-i\alpha(x^\mu)Q} \phi, \quad (1.11)$$

le terme de masse demeure bien invariant mais le terme cinétique ne se transforme plus de manière covariante (i.e., comme le champ de la relation (1.11)) mais bien comme

$$\partial_\mu \phi' = e^{-i\alpha Q} \partial_\mu \phi - iQ(\partial_\mu \alpha) e^{-i\alpha Q} \phi. \quad (1.12)$$

Le terme additionnel en dérivée de la phase empêche la symétrie locale sous changement de phase. En vue de rendre la théorie invariante sous de tels changements locaux, on introduit un nouvel opérateur différentiel, **la dérivée covariante de jauge**, que l'on définit par

$$\boxed{D_\mu = \partial_\mu - ieA_\mu(x^\nu)}, \quad (1.13)$$

où e est la constante de couplage (charge de l'électron), de sorte que le champ ϕ et ses dérivées se transforment de manière covariante :

$$\boxed{D'_\mu \phi' = e^{-i\alpha Q} D_\mu \phi} \quad (1.14)$$

sous le changement de phase local (1.11). Recherchons la loi de transformation du champ vectoriel correcteur A_μ qui permettra de satisfaire cette exigence. Développant (1.14), on trouve

$$\begin{aligned} D'_\mu \phi' &= (\partial_\mu - ie A'_\mu) \phi' = e^{-i\alpha Q} (\partial_\mu - ie A_\mu) \phi \\ e^{-i\alpha Q} \partial_\mu \phi - iQ(\partial_\mu \alpha) e^{-i\alpha Q} \phi - ie A'_\mu e^{-i\alpha Q} \phi &= e^{-i\alpha Q} \partial_\mu \phi - ie A_\mu e^{-i\alpha Q} \phi, \end{aligned}$$

soit que le champ vectoriel A_μ se transforme sous changement de phase local comme

$$\boxed{A'_\mu = A_\mu - \frac{Q}{e} \partial_\mu \alpha(x^\nu)} \quad (1.15)$$

c'est-à-dire que le champ vectoriel admet la même symétrie de jauge (aux dérivées d'une fonction scalaire près) que le potentiel électromagnétique! Ainsi, l'exigence d'invariance de la théorie sous transformation de jauge locale implique-t-elle l'existence du champ (de jauge) vectoriel A_μ qui garantit la symétrie locale. Ce champ salvateur véhicule l'interaction concernée, qui prend ici naturellement la forme de l'électromagnétisme dont la charge conservée est la charge électrique. Puisque la théorie localement invariante sous changement de phase arbitraire fait intervenir les deux champs scalaire ϕ et vectoriel A_μ , il faudra encore ajouter au lagrangien les termes cinétiques concernant ce dernier. Ces termes cinétiques prennent la forme du lagrangien (1.4) avec la définition du tenseur du champ vue au paragraphe précédent, dont l'écriture est manifestement invariante sous la transformation de jauge de seconde espèce (1.15)¹⁴. Ce faisant, ce n'est plus la phase qui devient une grandeur arbitraire de la théorie mais bien la différence de phase.

En guise de conclusion, écrivons tout d'abord le lagrangien final d'une théorie invariante sous changements de phase locaux arbitraires¹⁵

$$\mathcal{L}_{EDS} = -\frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} + \eta^{\mu\nu} (D_\mu \phi)^* D_\nu \phi - m^2 \phi \phi^* \quad (1.16)$$

$$= \underbrace{-\frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu}}_{\mathcal{L}_{em}} + \underbrace{\eta^{\mu\nu} \partial_\mu \phi^* \partial_\nu \phi - m^2 \phi \phi^*}_{\mathcal{L}_{KG}} + \underbrace{e^2 A_\mu A^\mu \phi \phi^* + e A_\mu J^\mu}_{\mathcal{L}_{INT}}, \quad (1.17)$$

où \mathcal{L}_{INT} constitue le terme d'interaction, $J^\mu = i(\phi^* \partial^\mu \phi - \partial^\mu \phi^* \phi)$ étant le courant conservé par le théorème de Noether.

L'invariance de jauge locale entraîne donc les conséquences suivantes sur la théorie :

¹⁴A condition que la phase soit une fonction deux fois continûment différentiable pour obéir au théorème de Schwartz.

¹⁵Pour rappel,

$$(D_\mu \phi)^* = \partial_\mu \phi^* + ie A_\mu \phi^*.$$

- elle impose l'existence d'un champ de jauge qui est vectoriel sous Lorentz. Ce champ est de **masse strictement nulle**, car un terme massif de la forme $m_A^2 A_\mu A^\mu$, avec m_A une constante, briserait manifestement l'invariance de jauge.
- elle fixe univoquement **la dynamique de l'interaction** entre le champ de jauge et le(s) champ(s) matériel(s). La forme de ce terme de couplage dépend de la symétrie interne concernée et du spin de la particule en interaction avec le champ de jauge¹⁶ mais en toute généralité le champ de jauge se couple directement au courant conservé (**couplage minimal**). Dans le cas de l'électrodynamique scalaire, le terme d'interaction comprend deux contributions : (a) le couplage au quadri-courant conservé (premier ordre en la constante de couplage) et (b) le couplage du second ordre en $A_\mu A^\mu$ qui constitue ainsi une pure prédiction du principe d'invariance de jauge propre au cas scalaire (cf. [GOV95]).

¹⁶Par exemple, dans le cas de l'électrodynamique des spineurs, le couplage est de la forme $e\bar{\psi}\gamma^\mu\psi A_\mu$, avec ψ le spineur et $\bar{\psi}$ son spineur adjoint, γ^μ étant une matrice de Dirac.

2.3 Modèle de Higgs et brisure spontanée d'une symétrie de jauge

A partir du lagrangien de l'électrodynamique scalaire, il est possible de construire le modèle de Higgs, qui est utilisé dans le modèle standard des particules élémentaires en vue de briser de manière perturbative l'invariance de jauge locale sous le groupe¹⁷ $SU_L(2) \times U_Y(1)$ de l'interaction électrofaible¹⁸. Un modèle de lagrangien associé au mécanisme de Higgs est celui du champ scalaire complexe (donc chargé) du paragraphe précédent affublé du potentiel de self-interaction quartique $V(\phi) = \mu^2|\phi|^2 + \lambda|\phi|^4$ (potentiel de Landau-Ginzburg des transitions de phase du second-ordre, cf. [PS95]), c'est-à-dire

$$\mathcal{L}_{Higgs} = -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} + \eta^{\mu\nu} (D_\mu\phi)^* D_\nu\phi - \mu^2|\phi|^2 - \lambda|\phi|^4. \quad (1.18)$$

Voyons comment ce modèle peut être utilisé pour caractériser une brisure spontanée de la symétrie de jauge. Choisissons tout d'abord le paramètre μ^2 négatif (*masse négative*) et λ positif. Le potentiel résultant est représenté à la Figure 1.1. Avec ce choix particulier de paramètres, l'état $\phi = 0$ ne correspond plus qu'à un maximum local du potentiel de self-interaction : il s'agit d'un état de *faux vide* (valeur nulle du champ mais qui ne minimise pas l'énergie). Le *vrai vide*, quant à lui, est situé à une valeur de la norme du champ égale à

$$|\phi| = \frac{\sqrt{2}}{2}v, \quad v = \sqrt{\frac{-\mu^2}{\lambda}}. \quad (1.19)$$

Le vide de la théorie est donc dégénéré sous la symétrie de jauge de changement de phase, qui se retrouve donc brisée spontanément. En effet, l'évolution dynamique du système va le faire transiter vers un des états vides de la théorie, stable sous perturbation, mais non univoquement spécifié par la symétrie. Cependant, la valeur moyenne du champ scalaire dans cet état n'est pas nulle de sorte que la symétrie de phase est brisée spontanément. Ainsi, le choix de l'état final du système viole la symétrie de phase, bien que *l'ensemble* des états finaux possibles obéisse toujours à celle-ci. Voyons comment la brisure de la symétrie de phase se manifeste au niveau du lagrangien en développant celui-ci autour du vrai vide (1.19). Décomposons le champ scalaire de la manière suivante

$$\phi = \frac{\sqrt{2}}{2}e^{i\xi(x^\mu)/v} (\rho(x^\mu) + v) \quad (1.20)$$

¹⁷Le groupe $SU(2)$ est le groupe des matrices unitaires de dimension 2×2 ($U(2)$) de l'espace vectoriel \mathbb{C}^2 , dont le déterminant est égal à $+1$ (d'où le S pour spécial). Ce groupe est le recouvrement universel de celui des matrices orthogonales de dimension 3×3 et de déterminant égal à $+1$, les rotations, baptisés $SO(3)$ (cf. [JON98]). Le groupe $U(1)$ est alors le groupe des matrices unitaires carrées de dimension 1 agissant sur le corps des complexes, c'est-à-dire les changements de phase.

¹⁸L'indice L indique que le groupe $SU(2)$ concerne les doublets d'isospin de leptons et de quarks gauches alors que l'indice Y désigne que la charge conservée associée à la symétrie $U(1)$ abélienne est l'hypercharge, donnée par la formule de Gell-Mann et Nishijima $Q = T_3 + \frac{Y}{2}$, avec Q la charge électrique et T_3 la troisième composante de l'isospin faible (cf. [GOV95]).

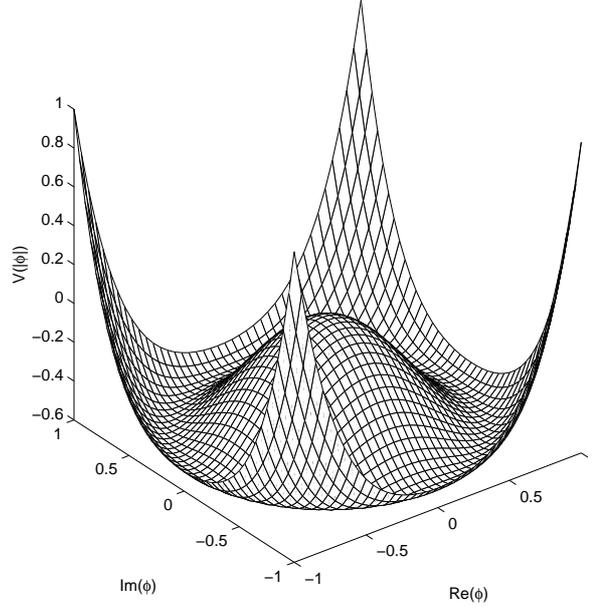


Figure 1.1 – Potentiel quartique du modèle de Higgs abélien (1.18)

avec v , la valeur moyenne dans le vide du champ ϕ , telle que donnée à la relation (1.19) et $\rho(x^\nu)$ un champ scalaire réel (neutre). Effectuons alors les transformations de jauge de première et seconde espèces suivantes

$$\begin{aligned}\phi'(x^\mu) &= e^{-i\alpha(x^\mu)}\phi(x^\mu) \\ A'_\mu(x^\nu) &= A_\mu(x^\nu) + \frac{1}{e}\partial_\mu\alpha(x^\nu)\end{aligned}$$

avec

$$\alpha(x^\nu) = \frac{1}{v}\xi(x^\nu).$$

Ceci nous amène à la configuration suivante des champs

$$\begin{aligned}\phi'(x^\mu) &= \frac{\sqrt{2}}{2}(\rho(x^\nu) + v) \\ A'_\mu(x^\nu) &= A_\mu(x^\nu) + \frac{1}{ev}\partial_\mu\xi(x^\nu)\end{aligned}$$

et ainsi, grâce à l'invariance de jauge, on peut réécrire le lagrangien en termes des champs primés :

$$\mathcal{L}_{Higgs} = -\frac{1}{4}F'_{\mu\nu}F'^{\mu\nu} + \frac{1}{2}(\partial_\mu\rho - ieA'_\mu(\rho + v))(\partial^\mu\rho + ieA'^\mu(\rho + v)) - \frac{\mu^2}{2}(\rho + v)^2 - \frac{\lambda}{4}(\rho + v)^4. \quad (1.21)$$

Ainsi, il apparaît consécutivement à la brisure de symétrie un champ scalaire neutre résiduel $\rho(x^\mu)$, appelé *le scalaire de Higgs*, de masse $m = \sqrt{-2\mu^2}$ et un champ vectoriel **massif**

de masse au carré égale à $e^2 v^2$, qui témoigne de la brisure spontanée de l'invariance sous changement de phase de la théorie. Toutefois, cette symétrie reste réalisée de manière *non linéaire* en agissant sur l'ensemble des champs du modèle de Higgs de la manière suivante

$$\rho'(x^\mu) = \rho(x^\mu), \quad \xi'(x^\mu) = \xi(x^\mu) + v\alpha(x^\mu), \quad A'_\mu(x^\nu) = A_\mu(x^\nu) - \frac{1}{e}\partial_\mu\alpha(x^\nu).$$

Ainsi, même si la symétrie est brisée spontanément par l'existence de plusieurs états vides dégénérés (et le choix arbitraire d'un de ceux-ci), la théorie demeure invariante sous changement de phase, à condition d'effectuer les transformations de jauge *ad hoc*. L'invariance de jauge consiste à transformer les uns dans les autres les différents vides de la théorie sans pouvoir les différencier.

Ce processus élégant de brisure spontanée de la symétrie, développé par Higgs, Kibble, Guralnik, Hagen, Brout et Englert (et connu sous le nom de *mécanisme de Higgs*) demeure vrai dans des cas plus généraux que celui de la simple symétrie de phase du champ scalaire, en particulier, une version plus sophistiquée permet d'expliquer le spectre de masse des bosons W^\pm et Z^0 véhiculant l'interaction faible. En effet, la brisure de la symétrie est essentielle pour concilier l'invariance de jauge, qui impose une masse strictement nulle aux bosons intermédiaires, et la portée minuscule (de l'ordre de $10^{-15}m$) de l'interaction faible. En devenant massifs par l'intermédiaire du mécanisme de Higgs, ces bosons deviennent virtuels et l'interaction qui leur est associée est alors peu probable car à très courte portée.

L'intérêt d'introduire ici un tel modèle est qu'il permet en partie de justifier une étude classique de l'interaction faible couplée à la gravitation. En effet, au-dessus de l'échelle énergétique de brisure de symétrie¹⁹, le vrai vide devient l'état $\phi = 0$ qui n'est plus dégénéré sous la symétrie de sorte que celle-ci ne soit plus brisée et que les champs vectoriels qui la médient soient bien sans masse. Ainsi, à en croire le mécanisme de Higgs, on obtiendrait une interaction de jauge non abélienne dérivant du groupe $SU(2)$ à portée infinie en grim pant suffisamment dans les énergies. Dans le cadre du modèle standard du Big Bang, ceci correspond à une époque particulièrement chaude de l'univers primordial, comme nous le verrons par après.

Par ailleurs, nous verrons au chapitre 2 comment les conditions de symétrie sur les champs de Yang-Mills réduisent le lagrangien de ces interactions à un parent proche du modèle de Higgs abélien (1.18) de cette section, mais en deux dimensions.

Enfin, ce modèle de Higgs (1.18) d'un champ scalaire invariant de jauge qui interagit avec

¹⁹On notera toutefois que les coefficients μ et λ qui caractérisent le potentiel de Landau-Ginzburg sont supposés être des fonctions de l'énergie, de sorte que le potentiel soit convexe au-dessus d'une certaine énergie (température) critique.

lui-même de façon quartique est à la base de la **théorie effective de la supraconductivité** développée par Landau et Ginzburg. Le champ scalaire ψ représente la densité locale de paires de Cooper dont l'absence devient un faux vide lorsque la température descend en dessous de sa valeur critique. Le mécanisme de brisure spontanée de la symétrie de phase lors de la formation de paires de Cooper dans un des états dégénérés du vide entraîne alors que le photon acquiert une masse non nulle (inversément proportionnelle à la longueur de pénétration de London), expliquant du même coup l'effet Meissner d'expulsion d'un champ électromagnétique externe.

2.4 Invariance de jauge non abélienne et théorie de Yang-Mills des interactions nucléaires

Dans les deux paragraphes précédents, nous avons étudié l'invariance de jauge de cette symétrie abélienne (commutative) qu'est le changement de phase. Nous allons ici généraliser cette étude à des classes plus générales de transformations internes des champs. Mais auparavant, il convient de donner quelques notions (nullement exhaustives) au sujet des groupes de Lie (cf. [JON98, DEL97] pour une introduction générale).

Considérons un groupe de transformations continues, appelé également *groupe de Lie*. Soit \mathcal{M} , la représentation d'un élément du groupe, continûment connexe à l'identité, agissant sur les éléments d'un espace vectoriel de représentation. Elle peut s'écrire comme l'exponentielle d'une combinaison linéaire de transformations élémentaires génératrices

$$\mathcal{M} = e^{-i\theta^a T_a}, \quad (1.22)$$

où les T_a sont appelés les **générateurs infinitésimaux** du groupe de transformations continues. Ces générateurs infinitésimaux forment eux-mêmes une représentation du groupe, la *représentation adjointe*. L'*algèbre de Lie* \mathfrak{g} associée au groupe \mathcal{G} est un ensemble de générateurs fermé sous la commutation :

$$[T_a, T_b] = if_{ab}^c T_c \quad ; \quad \mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c} = \mathbf{1}, \dots, \mathbf{N} \quad (1.23)$$

où les f_{ab}^c sont appelés les *constantes de structure* du groupe et où N est la dimension de l'algèbre de Lie²⁰. La représentation adjointe se construit dès lors comme suit : choisissons

²⁰A proprement parler, le produit de Lie $[A, B]$ n'est pas nécessairement un commutateur d'opérateurs mais un produit défini dans l'algèbre de Lie vérifiant l'identité de Jacobi

$$[A, [B, C]] + [B, [C, A]] + [C, [A, B]] = 0$$

qui est effectivement satisfaite dans le cas d'un commutateur mais également dans le cas des crochets de Poisson de la mécanique hamiltonienne, par exemple. C'est cette identité qui fait d'une algèbre une algèbre de Lie.

un générateur $T_{\mathbf{a}}$ de l'algèbre de Lie \mathfrak{g} , alors un élément quelconque $T_{\mathbf{b}}$ de l'algèbre est envoyé par l'intermédiaire de son commutateur avec le générateur fixé sur une combinaison linéaire des générateurs, tout en préservant la structure du groupe (et son algèbre de Lie). La représentation \mathcal{A} ainsi obtenue est la représentation adjointe,

$$R_{\mathcal{A}} : T_{\mathbf{a}} \rightarrow R_{\mathcal{A}}(T_{\mathbf{a}}) = [T_{\mathbf{a}}, (\cdot)] : T_{\mathbf{b}} \rightarrow [T_{\mathbf{a}}, T_{\mathbf{b}}] = if_{\mathbf{ab}}^{\mathbf{c}} T_{\mathbf{c}}.$$

dont les éléments matriciels sont précisément les constantes de structure de l'algèbre (multipliées par i) :

$$(R_{\mathcal{A}}(T_{\mathbf{a}}))_{\mathbf{b}}^{\mathbf{c}} = if_{\mathbf{ab}}^{\mathbf{c}}.$$

On notera que jusqu'à présent les constantes de structure $f_{\mathbf{ab}}^{\mathbf{c}}$ sont seulement antisymétriques sur les indices covariants \mathbf{a} et \mathbf{b} . En vue de les rendre complètement antisymétriques et de définir une métrique permettant de lever et descendre les indices du groupe, on introduit la forme de Killing, c'est-à-dire un produit scalaire sur la représentation adjointe de l'algèbre \mathfrak{g} :

$$(A, B) = Tr(R_{\mathcal{A}}(A) \cdot R_{\mathcal{A}}(B)) = Tr_{\mathcal{A}}(A \cdot B), \quad (1.24)$$

c'est-à-dire la trace sur les matrices représentant les éléments A et B du groupe dans la représentation adjointe. Appliquant la forme de Killing aux générateurs eux-mêmes, on obtient la *métrique de Cartan* pour le groupe de Lie

$$g_{\mathbf{ab}} = Tr_{\mathcal{A}}(T_{\mathbf{a}} T_{\mathbf{b}}) = -f_{\mathbf{ac}}^{\mathbf{d}} f_{\mathbf{bd}}^{\mathbf{c}}.$$

On peut dès lors définir les constantes de structure complètement antisymétriques en abaissant l'indice \mathbf{c} à l'aide de la métrique de Cartan

$$f_{\mathbf{abc}} = g_{\mathbf{dc}} f_{\mathbf{ab}}^{\mathbf{d}}.$$

Grâce à ces notions fondamentales, la symétrie de changement de phase vue aux paragraphes précédents est celle du groupe de Lie abélien $U(1)$ dont l'algèbre de Lie triviale se ramène à l'axe des réels ($\mathfrak{u}(\mathbf{1}) \approx \mathbb{R}$). En effet, la transformation de jauge de première espèce $\phi'(x^\mu) = e^{-iQ\alpha(x^\mu)}\phi(x^\mu)$ s'écrit bien comme un opérateur générique de $U(1)$ fourni par exponentiation de son générateur $Q \in \mathbb{R}$. Quant à la transformation de jauge de seconde espèce (1.15), il est clair qu'elle peut se réécrire

$$A'_\mu(x^\nu) = U(x^\nu) A_\mu U^{-1}(x^\nu) - \frac{i}{e} (\partial_\mu U(x^\nu)) U^{-1}(x^\nu), \quad (1.25)$$

avec $U(x^\nu) = \exp(-i\alpha(x^\nu)Q)$ une transformation quelconque dans $U(1)$.

Nous allons à présent généraliser l'invariance de jauge abélienne au cas d'un groupe non abélien de transformations sur les champs. Supposons que les champs $\phi_i(x^\mu)$ qui constituent une certaine théorie physique soient des scalaires sous transformations externes de

l'espace-temps et qu'ils engendrent une représentation R d'un groupe de symétrie \mathcal{G} en se transformant sous R au sein de l'espace interne (de représentation) dans lequel ils prennent leurs valeurs. Notons par \mathfrak{g} l'algèbre de Lie du groupe \mathcal{G} , donnée explicitement par les relations de commutation (1.23). Une transformation quelconque g dans l'espace interne est obtenue par exponentiation des générateurs infinitésimaux dans la représentation engendrée par les $\phi : g(x^\mu) = \exp(-i\theta^{\mathbf{a}}(x^\mu)T_{\mathbf{a}})$, où les $\theta^{\mathbf{a}}$ sont les paramètres de la transformation²¹.

Si l'on effectue la transformation de jauge de première espèce

$$\boxed{\bar{\phi}'(x^\mu) = e^{-i\theta^{\mathbf{a}}(x^\mu)T_{\mathbf{a}}}\bar{\phi}(x^\mu)} \quad (1.26)$$

sur l'ensemble $\bar{\phi}$ des champs matériels, les termes de masse et de potentiel dans le lagrangien qui sont des scalaires sous Lorentz et sous le groupe \mathcal{G} par construction demeurent invariants mais pas les termes cinétiques en $\partial_\mu\phi_i$. Ici encore, nous rechercherons une **dérivée covariante de jauge** telle que $D_\mu\bar{\phi}$ se transforme comme le champ $\bar{\phi}$, selon (1.26). Écrivons, comme au paragraphe 2.2,

$$\boxed{D_\mu = \mathbb{I}\partial_\mu - ig_c A_\mu}, \quad (1.27)$$

où D_μ appartient à la représentation R du groupe, où \mathbb{I} est l'opérateur identité dans l'espace de représentation et où g_c est la constante de couplage de jauge. Pour ce faire, il est impératif que le champ vectoriel correcteur A_μ appartienne à la représentation du groupe. Nous développerons donc le terme correctif le long des générateurs infinitésimaux de la symétrie :

$$A_\mu = A_\mu^{\mathbf{a}}T_{\mathbf{a}}, \quad (1.28)$$

où les $A_\mu^{\mathbf{a}}$ sont les **champs de jauge** (ou **potentiels de jauge**, ou encore **champ de Yang-Mills**). *Il y a donc autant de champs de jauge que de générateurs de la symétrie, et ils se transforment dans la représentation adjointe de celle-ci*, puisque le champ vectoriel A_μ est à valeurs dans l'algèbre de Lie \mathfrak{g} . Ce champ vectoriel doit corriger le terme cinétique violant l'invariance de jauge, c'est-à-dire

$$\partial_\mu\bar{\phi}' = \partial_\mu \left(e^{-i\theta^{\mathbf{a}}T_{\mathbf{a}}}\bar{\phi}(x^\mu) \right) = e^{-i\theta^{\mathbf{a}}T_{\mathbf{a}}} (\partial_\mu - i\partial_\mu\theta^{\mathbf{a}}T_{\mathbf{a}})\bar{\phi}(x^\mu)$$

ce qui montre à nouveau que le champ de jauge, relié aux dérivées des paramètres $\theta^{\mathbf{a}}$ doit se transformer dans la représentation adjointe du groupe de jauge. Si nous imposons la covariance des dérivées, i.e.

$$D'_\mu\bar{\phi}'(x^\mu) = e^{-i\theta^{\mathbf{a}}T_{\mathbf{a}}}D_\mu\bar{\phi}(x^\mu),$$

²¹Dans le cas du groupe des rotations $SO(3)$, les paramètres, au nombre de trois, s'identifient aux angles d'Euler.

on peut montrer que la transformation de jauge de seconde espèce qui affecte le champ de jauge s'écrit

$$\boxed{A'_\mu(x^\nu) = U(\theta^a)A_\mu U^{-1}(\theta^a) - \frac{i}{g_c}(\partial_\mu U(\theta^a))U^{-1}(\theta^a)}. \quad (1.29)$$

Pour une transformation infinitésimale ($\theta^a \ll 1$), on peut obtenir aisément une version linéarisée de (1.29) :

$$A'^a_\mu = A^a_\mu + f^a_{bc}\theta^b A^c_\mu - \frac{1}{g_c}\partial_\mu\theta^a. \quad (1.30)$$

Ainsi, lors d'une transformation locale $U(\theta^a)$ du groupe \mathcal{G} , le champ vectoriel qui propage l'interaction est tourné (premier terme du membre de droite de (1.29)), trahissant le fait qu'il ne se transforme pas de manière triviale sous le groupe, et translaté (second terme du membre de droite de (1.29)). Il apparaît clairement dans l'écriture linéarisée (1.30) que les champs de jauge *ne sont plus invariants sous transformation de jauge* dès lors que les constantes de structure associées sont non identiquement nulles, c'est-à-dire dès lors que *le groupe de jauge est non abélien*. Ceci demeure vrai même dans le cas d'une symétrie globale ($\theta^a = cte$). Le fait que la transformation de jauge de seconde espèce infinitésimale mélange les champs de jauge en faisant intervenir les constantes de structure du groupe montre bien que les champs appartiennent à la représentation adjointe du groupe. Il y aura donc autant de champs vectoriels médiateurs de l'interaction concernée que la dimension de l'algèbre de Lie du groupe de jauge.

L'invariance de jauge locale sous une symétrie non abélienne impose donc l'existence de **plusieurs champs de jauge**, de spin unité, chargés de répandre l'invariance de jauge locale aux quatre coins de l'espace-temps. De plus, comme ils se transforment non trivialement sous le groupe (ils appartiennent à la représentation adjointe), ils posséderont une “charge” sous le groupe (ils ne sont pas neutres vis-à-vis de l'interaction qu'ils transportent).

Cependant, il faut encore ajouter à la théorie le terme cinétique de jauge pure \mathcal{L}_{YM} . Ce terme doit se transformer comme un scalaire, à la fois sous le groupe de Poincaré et sous le groupe \mathcal{G} d'isométries, tout en étant une fonction des dérivées — covariantes — des potentiels de jauge (terme cinétique). En se basant sur le cas abélien du paragraphe 2.2, on construira un tenseur antisymétrique de rang deux $F_{\mu\nu}$ dont la contraction fournira la densité lagrangienne recherchée. Toutes ces propriétés peuvent être rassemblées en construisant l'objet désiré à partir du commutateur des dérivées covariantes de jauge, en posant :

$$ig_c F_{\mu\nu}\psi = -[D_\mu, D_\nu]\psi, \quad (1.31)$$

où ψ est une fonction scalaire test, purement arbitraire mais deux fois continûment différentiable. En développant (1.31), on montre sans difficulté que les composantes du tenseur du

champ de Yang-Mills s'écrivent

$$F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu - ig_c [A_\mu, A_\nu], \quad (1.32)$$

ou encore, en développant le long des générateurs $T_{\mathbf{a}}$ de l'algèbre de Lie :

$$\boxed{F_{\mu\nu}^{\mathbf{a}} = \partial_\mu A_\nu^{\mathbf{a}} - \partial_\nu A_\mu^{\mathbf{a}} + g_c f_{\mathbf{bc}}^{\mathbf{a}} A_\mu^{\mathbf{b}} A_\nu^{\mathbf{c}}.} \quad (1.33)$$

Par construction, le tenseur $F_{\mu\nu}$ du champ de Yang-Mills se transforme de manière covariante sous transformation de jauge,

$$F'_{\mu\nu}(x^\rho) = U^{-1}(\theta^{\mathbf{a}}(x^\rho)) F_{\mu\nu}(x^\rho) U(\theta^{\mathbf{a}}(x^\rho))$$

et, de ce fait, prend également ses valeurs dans la représentation adjointe du groupe.

En examinant (1.33) de plus près, on constate que les champs de Yang-Mills $A_\mu^{\mathbf{a}}$ interagissent entre eux, signe qu'ils ne sont pas neutres sous l'interaction de jauge et qu'ils transportent, tout comme les champs matériels, les charges conservées de la théorie de jauge non abélienne. Cette dernière est donc foncièrement *non linéaire* et, à la différence de sa consœur abélienne qu'est l'électromagnétisme, elle n'a pas besoin des champs de matière pour exister (puisque les bosons ne sont pas neutres sous l'interaction). De même, une autre propriété remarquable de ces théories est l'universalité de l'interaction de jauge, caractérisée par l'unique constante de couplage g_c pour chaque groupe \mathcal{G} de symétries internes des champs matériels. Les propriétés des interactions de jauge se retrouvent entièrement déterminées par la structure algébrique de la symétrie, incarnée par ses constantes de structure.

Le lagrangien regroupant les termes cinétiques du champ de Yang-Mills s'obtient tout simplement en contractant sur tous les indices, à l'instar du cas électromagnétique abélien :

$$\mathcal{L}_{YM} = -\frac{1}{4} F_{\mu\nu}^{\mathbf{a}} F_{\mathbf{a}}^{\mu\nu}. \quad (1.34)$$

Ce lagrangien est à ajouter aux termes matériels, dans lesquels on aura pris soin de remplacer les dérivées usuelles par les nouvelles dérivées covariantes, en vue d'obtenir la théorie finale, regroupant matière et interaction, invariante sous transformations de jauge non abéliennes locales arbitraires.

Ici encore, et comme dans le cas abélien de l'électromagnétisme, la symétrie de jauge protège la masse des champs de Yang-Mills puisqu'un terme de masse en $M_{\mathbf{ab}}^2 A_\mu^{\mathbf{a}} A^{\mu\mathbf{b}}$ violerait manifestement la théorie. Ainsi, on devra recourir à un mécanisme extérieur, par exemple celui de brisure spontanée de la symétrie de jauge, si on veut réconcilier ce fait

avec la courte portée des interactions de jauge, notamment nucléaires²².

Les **théories de jauge non abéliennes** constituent l'un des plus grands succès (si pas le plus grand) de la physique théorique. Historiquement, Yang et Mills [YM54] furent les premiers à proposer une généralisation non abélienne au cas du groupe de jauge $SU(2)$ de la théorie des champs. Leur idée était de “*jauger*” la symétrie sous rotation dans l'espace d'isospin des particules. En effet, Heisenberg avait introduit le spin isotopique en 1932 pour tenter de caractériser les interactions nucléaires dans le noyau. La proximité de la masse du proton ($m_p \approx 938 \text{ MeV}/c^2$) et celle du neutron ($m_n \approx 939 \text{ MeV}/c^2$) laisse à penser qu'ils pourraient constituer les deux états quantiques possibles d'une même particule, le nucléon.

Les interactions nucléaires ne feraient ainsi nullement la distinction entre proton et neutron, et il convenait donc de rechercher une théorie physique qui laisse arbitraire la définition des états protons et neutrons (cette théorie ne tient ainsi pas compte de l'électromagnétisme). Le proton et le neutron se transformant l'un dans l'autre sous l'action des interactions nucléaires, on peut identifier le nucléon au doublet

$$\psi_N = \begin{pmatrix} n \\ p \end{pmatrix} \quad (1.35)$$

c'est-à-dire que le nucléon se transforme comme une représentation irréductible de dimension deux (un spineur) sous le groupe des rotations $SO(3)$ localement isomorphe à $SU(2)$ qui est le groupe de spin associé à \mathbb{R}^3 . Par le théorème de Noether, il existe donc un ensemble de trois valeurs conservées par un changement global de la définition de proton ou de neutron, ces grandeurs forment un vecteur : *le spin isotopique* (ou *isospin*). Le nucléon constitue dès lors une particule d'isospin demi-entier. La conservation du spin isotopique correspond alors à l'exigence d'invariance des interactions nucléaires sous rotation globale de l'isospin de sorte que la distinction entre proton et neutron est une pure question de convention, interactions électromagnétiques mises à part.

Cependant, la différence de masse entre le proton et le neutron ne s'explique pas par leur différence de charge électrique (auquel cas le proton eût été plus lourd que son comparse neutre), mais bien par leurs structures internes différentes. En effet, le neutron est constitué

²²Il est important de faire remarquer que le mécanisme perturbatif de Higgs présenté ici n'est pas le seul mécanisme possible. Il n'intervient d'ailleurs dans le modèle standard des particules élémentaires que pour expliquer la faible portée de l'interaction faible. Le cas de l'interaction forte est plus complexe puisque la courte portée est à relier au mécanisme de confinement de la couleur, une propriété due aux couplages des bosons de l'interaction forte — les *gluons* — entre eux et à l'intensité de la constante de couplage (cf. [PS95]).

par un triplet de quarks (u, d, d) , alors que le proton se compose du triplet (u, u, d) . La différence des masses des quarks up u et down d ($m_d > m_u$), ainsi que la brisure de la symétrie chirale en chromodynamique quantique explique la différence de masse de ces états liés que sont le proton et le neutron. La différence des masses des quarks est elle-même un sujet épineux puisqu'elle est englobée dans le problème général de la hiérarchie des masses dans le modèle standard des particules élémentaires.

Toutefois, cette conservation globale de l'isospin ne s'accommode guère du souhait d'une théorie covariante locale de l'espace-temps, c'est pourquoi Yang et Mills "*jaugèrent*" l'invariance sous rotation du spin isotopique. Il en résulte une théorie de jauge non abélienne dérivant du groupe $SU(2)$, recouvrement universel du groupe des rotations $SO(3)$ (cf. [JON98]). Ce faisant, c'est *l'orientation relative* de l'isospin entre deux points de l'espace-temps qui devenait une grandeur purement arbitraire.

Bien que la théorie de Yang-Mills avec le groupe $SU(2)$ ait évolué avec les découvertes sensationnelles en physique des particules élémentaires qui ont suivi leur article fondateur de 1954, elle demeure toujours la base fondamentale du modèle standard des particules élémentaires. En effet, elle entre dans la construction de la théorie électrofaible²³ de Weinberg, Glashow et Salaam, qui explique les interactions entre doublets (gauches) de leptons et de quarks²⁴. En vertu du succès sans précédent rencontré par cette approche d'invariance de jauge non abélienne, Yang et Mills ont laissé leur nom à la formulation générale pour une symétrie quelconque. Un autre cas très célèbre en physique, avec celui de l'électromagnétisme et de l'interaction faible, est celui de la chromodynamique qui dicte le comportement des quarks sous l'interaction forte, et qui est une théorie de jauge avec le groupe $SU(3)$.

Dans le cadre de ce travail de thèse, nous couplerons la théorie de Yang-Mills avec le groupe $SU(2)$ à la gravitation en vue d'étudier l'instabilité gravitationnelle de ces champs de jauge. Nous présentons au paragraphe 4 une motivation cosmologique de cette étude.

²³Dont le groupe de jauge est le groupe de Lie semi-simple $SU(2) \times U(1)$.

²⁴En regroupant les particules par familles, les doublets sont : l'électron et son neutrino électronique, le muon et son neutrino, le τ et son neutrino, les quarks up et down (u,d), les quarks strange et charmed (s,c) et les quarks top et bottom (b,t).

3 Invariance d'échelle et invariance conforme en théorie classique des champs

Dans ce paragraphe, nous introduisons une notion qui se révélera de première importance dans le processus d'instabilité gravitationnelle des champs : **l'invariance conforme**. Nous renverrons le lecteur à la référence [FEL81] pour une introduction plus approfondie.

Par transformation conforme, on entend toute transformation qui préserve les angles entre deux vecteurs quelconques de l'espace tangent d'une variété différentiable riemannienne. Dans le cas de variétés pseudo-riemanniennes telles que l'espace-temps $\mathbb{R}^{1,3}$, les angles ne sont plus des notions aussi bien définies que dans leurs homologues riemanniennes. Il en résulte qu'ils ne constituent plus une notion adéquate pour définir une transformation conforme. Ainsi, une transformation conforme conservera la structure du **cône de lumière**, c'est-à-dire l'ensemble des vecteurs (non identiquement nuls) de norme nulle. Par exemple, des vecteurs a^μ de genre espace ($a^\mu a_\mu > 0$) sont envoyés par transformation conforme sur d'autres vecteurs de genre espace, des vecteurs a^μ de genre temps ($a^\mu a_\mu < 0$) sur d'autres vecteurs de genre temps et des vecteurs nuls $a^\mu a_\mu = 0$ sont envoyés sur des vecteurs nuls²⁵.

Concrètement, les transformations conformes se traduisent par un **changement d'échelle** de la métrique :

$$g_{\mu\nu} \rightarrow \Omega^2(x^\mu)g_{\mu\nu}, \quad (1.36)$$

avec $\Omega^2(x^\mu)$ une fonction scalaire arbitraire mais positive, appelée le **facteur conforme**.

Ainsi, les isométries, transformations qui préservent la métrique, sont des transformations conformes de facteur conforme égal à l'unité. De manière générale, les transformations conformes forment un groupe, le **groupe conforme** qui inclut les transformations suivantes :

- les dilatations, dont l'effet sur les coordonnées est le suivant

$$y^\mu = \lambda x^\mu,$$

où λ est un paramètre réel quelconque ;

- les inversions

$$y^\mu = \frac{x^\mu}{x^\nu x_\nu};$$

²⁵Le lecteur alerte aura soin de prendre garde à notre convention de signature de métrique $(-, +, +, +)$.

- les transformations du groupe de Poincaré des isométries de l'espace-temps

$$y^\mu = \Lambda^\mu{}_\nu x^\nu + a^\mu$$

avec Λ une transformation de Lorentz ;

- et les **transformations conformes spéciales**,

$$y^\mu = \frac{x^\mu + x^\nu x_\nu a^\mu}{1 + 2a_\nu x^\nu + a_\nu a^\nu x^\rho x_\rho},$$

c'est-à-dire qu'une transformation conforme spéciale C est la composée $C = ITI$ avec I une inversion et T une translation.

Il convient de faire remarquer que les transformations conformes admettent des points singuliers, par exemple les vecteurs appartenant au cône de lumière qui constituent les singularités des inversions et qui sont renvoyés à l'infini par celles-ci. De ce fait, le défaut le plus marquant des transformations conformes dans un espace pseudo-euclidien tel que l'espace-temps est qu'elles n'agissent pas comme des transformations linéaires, au contraire des isométries. Cependant, il est possible de générer les transformations conformes à partir de transformations linéaires dans un espace de dimension plus élevée (cf. [FEL81], § 10.4). Ainsi, le groupe conforme $C(1, 3)$, qui reprend les transformations conformes de l'espace-temps de Minkowski $\mathbb{R}^{1,3}$, est isomorphe au groupe $O(2, 4)$ des transformations orthogonales de la variété pseudo-riemannienne $\mathbb{R}^{2,4}$.

Examinons à présent l'invariance d'échelle des théories du champ scalaire et vectoriel, dans un espace de Minkowski à n dimensions. Une transformation d'échelle, ou dilatation D , agit sur les coordonnées de la manière suivante :

$$D(x^\mu) = \lambda x^\mu$$

($\mu = 0, \dots, n - 1$). Sous cette dilatation, un champ scalaire se transforme comme

$$D\phi(x^\mu) = \phi\left(\frac{x^\mu}{\lambda}\right)$$

et un champ vectoriel comme

$$DA_\mu(x^\nu) = \frac{1}{\lambda} A_\mu\left(\frac{x^\nu}{\lambda}\right),$$

de sorte que la 1-forme dont ce champ constitue les composantes se transforme comme

$$\mathbf{A} = A_\mu\left(\frac{x^\nu}{\lambda}\right) dx^\mu.$$

L'action ainsi transformée sous dilatation s'écrit, pour le champ scalaire (Ω est le domaine d'intégration),

$$\begin{aligned} S_{D(\Omega)}[D\phi] &= \int_{y \in \lambda\Omega} L \left[D\phi(y^\mu); \frac{\partial D\phi(y^\nu)}{\partial y^\mu} \right] d^n y \\ &= \int_{y \in \lambda\Omega} L \left[\phi\left(\frac{y^\mu}{\lambda}\right); \frac{\partial \phi\left(\frac{y^\nu}{\lambda}\right)}{\partial y^\mu} \right] d^n y, \end{aligned}$$

ou encore, en effectuant le changement de variables $y^\mu = \lambda x^\mu$,

$$S_{D(\Omega)}[D\phi] = \int_{\Omega} L \left[\phi(x^\mu); \frac{1}{\lambda} \frac{\partial \phi(x^\nu)}{\partial x^\mu} \right] \lambda^n d^n x.$$

Ainsi, une transformation d'échelle est une symétrie à condition que

$$\lambda^n L \left[\phi(x^\mu); \frac{1}{\lambda} \frac{\partial \phi(x^\nu)}{\partial x^\mu} \right] = L \left[\phi(x^\mu); \frac{\partial \phi(x^\nu)}{\partial x^\mu} \right]. \quad (1.37)$$

Pour le lagrangien de Klein-Gordon (1.9), la théorie n'est invariante d'échelle que pour des espaces de dimension égale à 2, et à condition que le champ soit libre, c'est-à-dire que son potentiel d'interaction soit identiquement nul.

Combinons à présent la transformation d'échelle ci-dessus avec la transformation interne suivante :

$$\phi(x^\mu) \rightarrow \lambda^{-d} \phi(x^\mu),$$

où d est un scalaire réel, appelé **la dimension d'échelle** du champ concerné. L'action ainsi soumise à la dilatation et à la transformation interne ci-dessus s'écrit :

$$S_{D(\Omega)}[\lambda^{-d} D\phi] = \int_{\Omega} L \left[\lambda^{-d} \phi(x^\mu); \lambda^{-d-1} \partial_\mu \phi(x^\nu) \right] \lambda^n d^n x,$$

de sorte que la condition d'invariance de la théorie sous la combinaison d'une dilatation et d'une transformation interne s'écrive à présent :

$$\lambda^n L \left[\lambda^{-d} \phi(x^\mu); \lambda^{-d-1} \partial_\mu \phi(x^\nu) \right] = L \left[\phi(x^\mu); \partial_\mu \phi(x^\nu) \right]. \quad (1.38)$$

Le terme potentiel mis à part, la théorie est donc invariante d'échelle, avec un terme cinétique quadratique, avec la valeur suivante de la dimension d'échelle :

$$d = \frac{n-2}{2}.$$

En ce qui concerne le potentiel, il conviendra de remarquer qu'un terme de masse (quadratique en ϕ) n'est jamais compatible avec l'invariance d'échelle de la théorie, alors qu'un terme quartique est compatible en dimension 4 (cf. [FEL81]).

Nous pouvons procéder au même raisonnement pour le champ vectoriel (abélien ou non) soumis à la fois à une dilatation et à une transformation interne $A_\mu \rightarrow \lambda^{-d} A_\mu$, et déduire la condition suivante d'invariance d'échelle de ce champ :

$$\lambda^n L [\lambda^{-d-1} A_\mu(x^\nu); \lambda^{-d-2} \partial_\mu A_\nu(x^\rho)] = L [A_\mu(x^\nu); \partial_\mu A_\nu(x^\rho)], \quad (1.39)$$

où $L = -\frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu}$. La dimension d'échelle du champ vectoriel vaut alors

$$d = \frac{n-4}{2}.$$

Ici encore, on peut vérifier qu'un terme de masse en $A_\mu A^\mu$ ne permettrait jamais de satisfaire la condition d'invariance d'échelle, tout comme il viole assurément l'invariance de jauge. En général, **une théorie sera invariante d'échelle si elle ne contient aucun terme de masse.**

Nous pouvons à présent généraliser notre propos à un espace quelconque, non nécessairement plat, et aux transformations conformes plus générales que les simples dilatations vues auparavant. Supposons la transformation conforme (1.36) et les transformations internes suivantes des champs scalaires libres et vectoriels

$$\begin{aligned} \phi(x^\mu) &\rightarrow \Omega^{-d}(x^\mu) \phi(x^\mu) \\ A_\mu(x^\nu) &\rightarrow \Omega^{-d-1}(x^\nu) A_\mu(x^\nu). \end{aligned}$$

On peut alors montrer que la condition d'invariance conforme du champ scalaire se ramène aux équations suivantes (cf. [FEL81]) :

$$\frac{1}{\sqrt{-g}} \partial_\mu (\sqrt{-g} g^{\mu\nu} \partial_\nu \ln \Omega) = \frac{2-n}{2} g^{\mu\nu} \partial_\mu \ln \Omega \partial_\nu \ln \Omega. \quad (1.40)$$

Cette condition est loin d'être triviale dans le cas général, mais elle demeure toutefois vérifiée pour toute transformation conforme dans un espace minkowskien plat tel que $\sqrt{-g} = 1$ et $g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu}$ (cf. [FEL81]). Par contre, **les théories scalaires libres ne sont pas conformément invariantes** dans un espace courbe, du moins si on considère le terme cinétique quadratique usuel.

Dans le cas d'un champ vectoriel, le terme cinétique se transforme comme (cf. [FEL81]) :

$$\begin{aligned} -\frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} &\rightarrow -\frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} \\ &\quad -\frac{n-4}{8} \{ 4F^{\mu\nu} A_\mu \partial_\nu \ln \Omega + (n-4) [g^{\alpha\beta} A_\mu A^\mu - A^\alpha A^\beta] \partial_\alpha \ln \Omega \partial_\beta \ln \Omega \}, \end{aligned}$$

c'est-à-dire que **toute théorie vectorielle (abélienne ou non), ou encore toute théorie de jauge, est automatiquement invariante conforme dans un espace-temps à 4 dimensions!**

Dans ce paragraphe, nous avons donc vu comment l'invariance conforme est reliée à l'invariance de jauge sous les transformations internes des champs scalaires et vectoriels. Dans le cas qui nous concerne, c'est-à-dire celui de l'espace-temps courbe à 4 dimensions, le champ scalaire, libre ou non, ne constituera pas une théorie invariante conforme, au contraire du champ vectoriel de Yang-Mills. Cette différence conduira à des mécanismes d'instabilité gravitationnelle sensiblement différents.

Voyons à présent comment nous pouvons situer notre étude dans le contexte de la cosmologie physique.

4 Rudiments de modèle standard du Big Bang

La cosmologie moderne naquit en même temps que la relativité générale, dans l'article fondateur d'Einstein de 1916 [EIN16], où ce dernier applique sa toute nouvelle théorie à l'espace-temps dans son ensemble. Pour ce faire, Einstein dut recourir à une hypothèse simplificatrice particulièrement forte : **le principe cosmologique parfait**²⁶. En effet, les équations du champ gravitationnel sont tellement complexes qu'il est impossible d'en dériver des solutions analytiques sans faire usage de lourdes simplifications, notamment concernant la symétrie de l'espace-temps.

Aussi, le principe cosmologique parfait procède-t-il de deux postulats fondamentaux :

- (a) les propriétés cosmologiques ne dépendent pas de la direction choisie pour en réaliser l'étude de sorte que l'univers, à grande échelle, puisse être considéré en bonne approximation comme **isotrope**.
- (b) les caractéristiques du cosmos sont indépendantes de la position du cosmologiste²⁷ ainsi que de **l'époque** à laquelle il les met en évidence.

La combinaison de ces deux préceptes **d'isotropie et d'universalité** résulte en la propriété d'homogénéité de l'univers : la répartition de la matière dans le cosmos est grossière-

²⁶Toutefois, il ne faut pas confondre le modèle d'univers d'Einstein, qui a résulté de l'adoption de ce principe, et celui des cosmologies stationnaires ("*steady-state models*") de Bondi, Gold et Hoyle.

²⁷Position dans l'espace bien sûr car, malheureusement, l'histoire a montré que les modèles cosmologiques dépendent bien souvent de présupposés philosophiques de leurs auteurs.

ment uniforme. A l'aide de ce principe cosmologique parfait, Einstein réussit à formuler²⁸ un modèle d'univers statique, fini et fermé qui, malheureusement pour lui, ne résista guère longtemps ni aux observations, qui montraient que les galaxies semblaient animées d'un mouvement universel de fuite à l'échelle cosmique, ni aux perturbations de la distribution uniforme de matière, qui trahissaient le caractère instable de l'univers d'Einstein.

C'est pourquoi plusieurs auteurs comme Friedmann, Lemaître, Robertson et Walker (FLRW) relaxèrent le principe cosmologique parfait en retirant l'exigence de similitude temporelle au principe (b) d'universalité. Le **principe cosmologique** qui en découle fonde le modèle standard du Big Bang en statuant que l'univers à grande échelle soit en bonne approximation homogène et isotrope. Il en résulte trois types de géométries pour la section spatiale de l'espace-temps : la géométrie elliptique (3-sphère) qui correspond à un univers fermé ; l'hyperbolique (pseudo-sphère de Lobatchevski) décrivant un cosmos ouvert et l'euclydienne (hyperplan). Les équations d'Einstein du champ gravitationnel se chargent ensuite de décrire **l'histoire** de ces sections spatiales qui ne dépend que du contenu en énergie-matière et de la constante cosmologique de l'univers.

Cette source dans les équations d'Einstein de la relativité générale est habituellement représentée par un fluide caractérisé par sa densité ρ et sa pression p . Le cosmos d'aujourd'hui, par exemple, avec sa distribution uniforme de galaxies correspondrait dans cette vision à un gaz (dont les galaxies seraient les particules constitutives) de pression négligeable (les galaxies sont suffisamment éloignées les unes des autres que pour rendre l'énergie due à leurs collisions négligeable devant leur énergie de masse). Par contre, un gaz de particules relativistes, comme les photons, répondrait à l'équation d'état $p = \rho c^2/3$.

Les figures 1.2 et 1.3 représentent les diverses évolutions d'une distance de référence $R(t)$ (par exemple la taille de l'horizon) en fonction de la géométrie pour des univers de poussières ($p = 0$) et de radiations ($p = \rho c^2/3$) (pour les solutions analytiques, nous renvoyons le lecteur aux chapitres 2 et 4). On constate que ces solutions sans constante cosmologique présentent toutes un instant où la distance relative entre deux points était dégénérée : c'est l'instant du Big Bang, la singularité initiale. En effet, à ce moment, l'espace-temps cesse d'être bien défini, la densité (et la température) devenant théoriquement infini(s). L'équation d'état reliant la pression à la densité du fluide de matière emplissant le cosmos constitue donc une information clé pour la détermination de paramètres cosmologiques tels que le taux d'expansion ou de décélération, l'âge de l'univers, etc.

A partir de l'équation de continuité associée au fluide cosmologique, cette équation d'état peut permettre d'obtenir des intégrales premières. Par exemple, pour un fluide d'équation

²⁸Grâce à l'introduction de la constante cosmologique Λ .

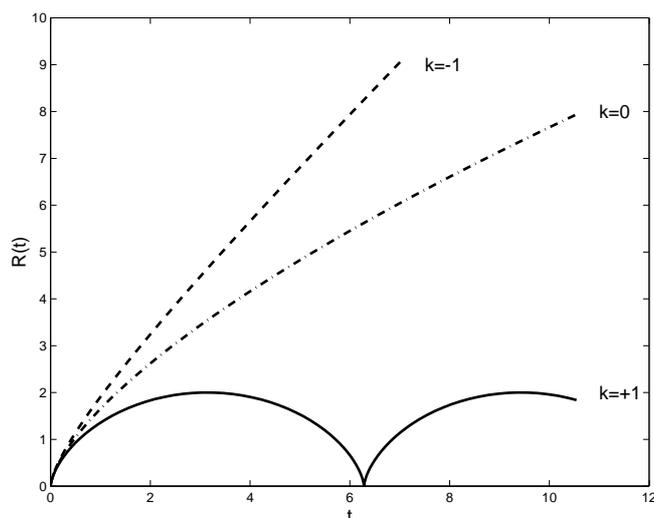


Figure 1.2 – *Cosmologies de Friedmann-Lemaître-Robertson-Walker à constante cosmologique nulle pour un fluide de poussières. Modèle fermé (trait plein) $k = +1$, modèle ouvert (tiret) $k = -1$ et modèle plat (tiret-point) $k = 0$.*

d'état barotropique $p = K\rho c^2$, on trouve que $\rho R^{-3(1+K)}$ est une constante. Cette relation nous permet de relier l'évolution de la température associée au gaz de photons emplissant l'univers (la température de corps noir du cosmos) au facteur d'échelle $a(t) = R(t)/R_0$ (R_0 étant une distance de référence à un moment donné). En utilisant la loi de Stefan ($\rho c^2 = \sigma T^4$), on trouve que l'évolution de la température est inversement proportionnelle à celle du facteur d'échelle ($T(t)a(t) = cte$). Ainsi, dès lors que l'univers est en expansion (ce que suggèrent de nombreuses observations), la température associée au gaz de photons emplissant l'univers se voit décroître au cours du temps. Cette température de corps noir est celle du **rayonnement fossile** et a été mesurée avec précision à une valeur de 2.725 ± 0.001 degrés Kelvin. En remontant le cours du temps, on doit donc s'attendre à ce que l'univers primordial soit à la fois plus dense et plus chaud²⁹, et les phénomènes physiques qui caractérisent l'état de la matière à une époque donnée soient de plus en plus énergétiques.

Sans toutefois prétendre dresser un panorama complet de l'histoire de l'univers, attardons-nous à présent à souligner quelques époques et phénomènes clés du modèle standard du Big Bang. Pour une reconstitution plus complète, on consultera, par exemple, la référence [DEM91].

L'histoire cosmique se subdivise en *ères* dont le nom caractérise la composante dominante

²⁹D'où l'analogie évidente avec la thermodynamique du gaz parfait.

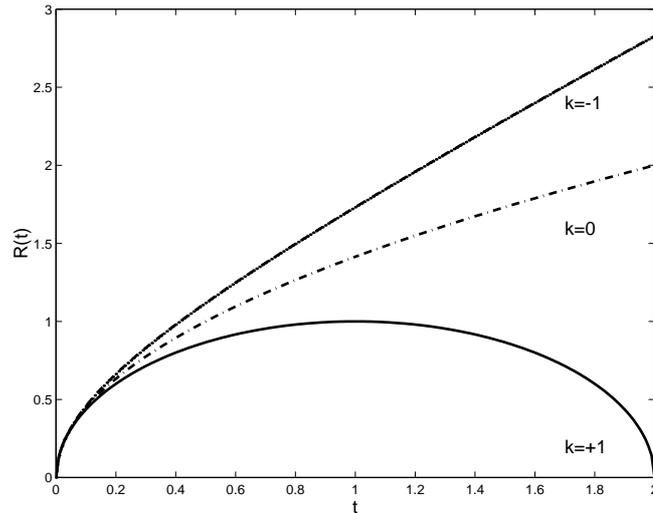


Figure 1.3 – Cosmologies de Friedmann-Lemaître-Robertson-Walker à constante cosmologique nulle pour un fluide de radiations. Modèle fermé (trait plein) $k = +1$, modèle ouvert (tiret) $k = -1$ et modèle plat (tiret-point) $k = 0$.

de la matière à l'époque. Nous allons brièvement reconstituer l'histoire de l'univers en remontant le cours du temps, depuis l'époque présente jusqu'aux temps les plus primordiaux, en inversant le cours des phénomènes cosmologiques. L'ère actuelle est appelée *ère stellaire* puisque l'évolution contemporaine de l'univers est dominée essentiellement par cette matière non relativiste, de pression négligeable que sont les étoiles et les galaxies. Cette ère a vu se former les grandes structures cosmiques que nous observons dans nos télescopes, bien que le détail de cette formation comporte encore de nombreux points obscurs, comme nous le verrons dans un instant. Par ailleurs, les observations récentes de supernovae (cf. [PER99]) tendent à montrer qu'actuellement l'expansion de l'univers s'accélérait, et une explication possible à cet effet pourrait être la prise de pouvoir d'une autre composante matérielle : la **quintessence**. Celle-ci se modélise par un champ scalaire en self-interaction, qui n'interagit pas avec les autres composantes de la matière telles que les baryons, les radiations ou les neutrinos, si ce n'est par l'intermédiaire bien indirect de la modification de l'expansion qu'il provoque. En remontant le cours du temps dans l'ère stellaire³⁰, nous verrions la distribution actuelle extrêmement inhomogène des galaxies s'homogénéiser, les étoiles se diluer, en même temps que la température du cosmos augmenter.

Si nous continuons notre voyage dans le temps jusqu'à ce que la température atteigne ainsi quelques $10^4 K$, soit une énergie³¹ correspondante des radiations emplissant le cos-

³⁰Ce qui correspond à regarder loin.

³¹La correspondance entre la température T du corps noir et l'énergie E qui lui est associée est donnée par la relation $E = kT$, avec k la constante de Boltzmann dont la valeur est de $8.617 \times 10^{-5} eV/K$.

mos de l'ordre de l'électron-volt, les atomes d'hydrogène et d'hélium formant l'essentiel de la matière s'ionisent complètement. Cette ionisation s'accompagne d'une absorption dramatique de radiations puisque le libre parcours moyen des photons dans ce plasma chute brusquement. L'univers devient opaque. Dans le cours normal du temps, cette période correspond à l'émission du **rayonnement fossile**, dont l'étude constitue l'un des tests les plus précis de nos scénarios cosmologiques, et à l'accès à la transparence du cosmos. L'ère précédant cet évènement s'appelle *l'ère radiative*, puisque la pression due aux radiations électromagnétiques l'emporte sur la densité d'énergie de masse de la matière ordinaire à ces températures. Plus loin encore dans le passé, lorsque la température atteint quelques $10^{10} K$ ($E \approx 1 MeV$), ce sont les noyaux atomiques eux-mêmes qui se désagrègent en neutrons et protons et autres particules. L'évènement correspond, dans le modèle standard du Big Bang, à la **nucléosynthèse primordiale**, formation des noyaux atomiques légers jusqu'au lithium.

Au delà de telles températures, nous abordons le domaine de la physique des hautes énergies. Les ères correspondantes se nomment alors *leptonique et hadronique*. En effet, lorsque l'énergie du rayonnement atteint l'énergie de masse au repos de la paire électron-positron (soit $1.022 MeV$), un équilibre thermodynamique s'installe : la création de paires due à l'énergie ambiante est compensée par leur annihilation. L'avènement de cet équilibre s'accompagne d'une création massive d'anti-leptons. Le nombre important de ces particules, ainsi que les interactions qui les lient font alors des leptons (électrons, positrons, neutrinos et leurs cousins muoniques et tauiques) la composante dominante de la matière à l'époque. Lorsque la densité et la température sont même suffisantes, les neutrinos sont absorbés massivement par les leptons et leurs antiparticules et leur libre parcours moyen décroît drastiquement, de sorte que le cosmos devienne opaque à ces particules. Ce phénomène correspond alors à l'émission d'un rayonnement fossile de neutrinos.

Ensuite, l'ère hadronique commence à une température de l'ordre de $10^{12} K$, qui correspond à l'énergie de masse du plus léger des hadrons : le méson π ($m_\pi \approx 140 MeV/c^2$). Les hadrons et leurs antiparticules forment alors un système en équilibre thermodynamique, et leurs masses plus importantes en font une composante dominante de la matière. L'origine de la prédominance de la matière sur l'antimatière dans l'univers contemporain est à situer au cœur de ces ères, comme une conséquence de l'asymétrie de leurs propriétés dans les processus de création-annihilation. Si nous remontons même un peu plus le cours du temps, la température devient telle que les hadrons eux-mêmes se décomposent en un **plasma de quarks-gluons**.

A de telles énergies, l'étude de l'évolution des constantes de couplage des interactions de jauge en fonction de la température (par le biais des équations du groupe de renormalisa-

tion) montre que celles-ci tendent à se rapprocher³². Certaines théories envisagent ainsi qu'à une température de l'ordre de $10^{29}K$, toutes les interactions de jauge, électromagnétisme, interaction forte et faible, sous leur forme primordiale agiraient avec la même intensité et dériveraient du même groupe de jauge, achevant ainsi **la grande unification** des forces de la nature.

Enfin, à une température de l'ordre de $10^{32}K$, nous rencontrons **l'ère quantique** dont on ne sait pas grand chose théoriquement, si ce n'est que la relativité générale et la mécanique quantique qui nous sont si chères n'y sont vraisemblablement plus valables. C'est l'autre secret, à la fois terrible et mystérieux, des sirènes des supercordes, des gorgones *p-branesques* et de l'hydre nommée gravitation quantique³³. Il s'agit également du territoire de chasse gardée des théoriciens les plus hardis, dont nous sommes loin de pouvoir nous réclamer. Ainsi, même si du fond de cet abîme mystérieux nous appellent tant de nouveaux horizons physiques passionnants, nous nous garderons ici de pénétrer davantage dans cette *terra incognita* du commencement des âges.

³²La convergence est même exacte si on ajoute des conditions supersymétriques — symétrie boson-fermion — au modèle standard des particules élémentaires.

³³Qui ne sont toutefois pas des chimères...

5 Ouverture

A présent, nous pouvons situer notre étude dans le contexte du modèle standard du Big Bang. Nous nous intéressons au couplage de la gravitation avec des champs de jauge, plus précisément ceux qui dérivent du groupe $SU(2)$, et avec un champ scalaire, en vue d'étudier l'évolution des fluctuations de densité de ces entités. Cette recherche s'inscrit dans la perspective plus large de la problématique de la formation des structures galactiques qui est encore bien vive en cosmologie.

En effet, le point de départ des simulations numériques de formation des galaxies est constitué par les grumeaux de matière ténus dont nous observons les faibles fluctuations de température au sein du rayonnement fossile. Le contraste de température y atteint seulement une part pour cent mille, de sorte que l'on doit s'attendre à ce que la matière noire³⁴, qui n'interagit pas électromagnétiquement, joue un rôle prépondérant dans le processus de formation des galaxies, ce qui ne va déjà pas sans quelques difficultés.

En outre, l'origine même de ces grumeaux primordiaux est méconnue, et reste encore aujourd'hui confiée, avec les autres grands problèmes cosmologiques que sont ceux de l'horizon et de la platitude cosmique, à la théorie de **l'inflation** (pour une introduction, on consultera les références [DEM91, PEE93]). La phase inflationnaire qu'elle suggère aurait eu lieu à l'époque de la grande unification, ensemençant le cosmos avec les premiers germes de matière. En examinant l'évolution des fluctuations des champs de jauge par instabilité gravitationnelle, nous découvrirons quelques éléments qui expliqueraient en partie l'évolution de ces grumeaux entre la phase inflationnaire et l'émission du rayonnement fossile.

Plus précisément, notre modèle ne tiendra compte que des champs de Yang-Mills dérivant du groupe de jauge $SU(2)$, ce qui constitue un premier pas dans la description classique de l'interaction électrofaible, dont le groupe de jauge est $SU(2)_L \times U(1)_Y$, avant la transition du mécanisme de Higgs qui aurait rendu massifs les quanta de cette interaction. Cette transition aurait eu lieu à une température de l'ordre de $10^{15} K$, puisque la valeur moyenne dans le vide du champ de Higgs a été mesurée indirectement via la masse des bosons W^\pm et Z^0 aux environs de $246 GeV$ (cf. [GOV95]). Par ailleurs, comme le groupe $SU(2)$ est un sous-groupe de $SU(3)$, celui de l'interaction forte, les résultats de notre étude pourraient illustrer quelques-unes des propriétés d'instabilité gravitationnelle du plasma de quarks-gluons. En fait, nos résultats montrent même que c'est la propriété **d'invariance conforme**, propre à tous les champs de Yang-Mills, qui se révèle fondamentale pour l'instabilité gravitationnelle des potentiels de jauge.

³⁴Dont l'existence est suggérée par diverses mesures astrophysiques, notamment de vitesse des amas globulaires autour de la Voie Lactée.

De même, l'étude d'un champ scalaire couplé à la gravitation est un exercice auquel la cosmologie se livre depuis les travaux de Brans-Dicke sur la théorie tenseur-scalaire de la gravitation [BD61] — qui peut se comprendre comme une théorie effective de la gravitation dérivant de celle des cordes — jusqu'à ceux sur l'inflation (cf. [GUT81]) — qui voudrait purger la cosmologie de quelques arbitraires bien dérangeants — et ceux concernant la quintessence (cf. [PR03] pour une revue récente) — qui permettrait de résoudre élégamment le problème de l'accélération cosmique.

Hélas, nous n'aurons guère le loisir d'explorer en profondeur la question de l'instabilité gravitationnelle des cosmologies scalaires au cours de ces pages. Nous nous contenterons dans un premier temps d'entreprendre une étude qualitative pour faire ressortir quelques différences entre les mécanismes d'instabilité gravitationnelle des champs scalaire et de Yang-Mills. Ensuite, nous donnerons quelques résultats préliminaires concernant l'influence des champs de quintessence sur le processus de formation des galaxies. Ces derniers travaux font l'objet de notre collaboration avec le Dr J.-M. Alimi du Laboratoire de l'Univers et de ses Théories de l'Observatoire de Paris-Meudon.

Ce texte sera organisé comme suit : au chapitre suivant, nous examinerons en détail comment inclure les champs de jauge au corpus mathématique de la relativité générale et nous situerons notre approche au sein des recherches récentes sur le sujet. A la fin de ce chapitre, nous présenterons un modèle d'univers homogène et isotrope rempli uniquement de champs de jauge non abéliens dérivant du groupe $SU(2)$. La solution le décrivant, obtenue par Gal'tsov et Volkov en 1991 (cf. [GV91]), nous servira de base pour l'étude de l'instabilité gravitationnelle des champs de Yang-Mills. En effet, grâce à notre approche hamiltonienne du problème, nous étudierons les solutions des équations d'Einstein-Yang-Mills, regroupement des équations d'Einstein de la relativité générale et des équations de Yang-Mills du champ de jauge, au voisinage de leur solution homogène et isotrope, sans aucune linéarisation de celles-ci.

Au chapitre 3, nous reformulerons en effet notre problème en des termes hamiltoniens, afin d'obtenir un formalisme plus propice à l'intégration numérique. Cette démarche exigera de rappeler quelque peu la formulation hamiltonienne de la relativité générale et d'exposer celle, moins connue, du système Einstein-Yang-Mills.

Au chapitre 4, nous rappellerons quelques notions incontournables relatives à la théorie de l'instabilité gravitationnelle en présence de matière ordinaire et nous montrerons comment retrouver ces propriétés par une méthode numérique développée par nos soins sur base de l'approche hamiltonienne vue auparavant.

Au chapitre 5, nous appliquerons toutes les notions et méthodes introduites précédemment à l'étude de l'instabilité gravitationnelle des champs de Yang-Mills.

Au chapitre 6, nous nous pencherons sur la même étude concernant le champ scalaire auto-gravitant, plus simple que le champ de jauge, afin de mieux dégager la nature des différences des mécanismes d'instabilité gravitationnelle de ces deux types de champs.

Enfin, le dernier chapitre sera constitué par une étude moins formelle et certainement plus appliquée qui visera à mettre en évidence l'influence d'un champ scalaire de quintessence sur la formation de grandes structures comme les amas de galaxies.

Nous espérons que le lecteur, au cours de ces pages, pourra se découvrir un intérêt pour ce domaine passionnant et en pleine ébullition qu'est la cosmologie, et, peut-être, parcourir avec enthousiasme les résultats de notre recherche, en prenant autant de plaisir à s'y plonger que nous à les élaborer.

Chapitre 2

Champs de Yang-Mills en relativité générale

“ The growth of the use of transformation theory, as applied first to relativity and later to the quantum theory, is the essence of the new method in theoretical physics. (...) The new theories, if one looks apart from their mathematical setting, are built up from physical concepts which cannot be explained in terms of things previously known to the student, which cannot even be explained adequately in words at all. (...) The newer concepts of physics can be mastered only by long familiarity with their properties and uses.”

P. A. M. Dirac, préface de *“ The Principles of Quantum Mechanics”*, Oxford, 1930.

Sommaire

1	Le système Einstein-Yang-Mills (EYM)	42
2	Conséquence des symétries de l'espace-temps sur les champs de jauge	46
3	Système EYM à symétrie sphérique pour le groupe de jauge $SU(2)$	51
3.1	Paramétrisation de la métrique et des potentiels jauge	51
3.2	Equations des champs EYM	54
4	Solutions statiques à symétrie sphérique	59
4.1	Solutions du type particule	61
4.2	Solutions de type trou noir	63
4.3	Conclusion	65
5	Cosmologies de Yang-Mills	66
5.1	Quelques résultats connus	66
5.2	La solution homogène et isotrope de Gal'tsov-Volkov	67
6	Conclusion	71

1 Le système Einstein-Yang-Mills (EYM)

Le système Einstein-Yang-Mills (EYM) décrit comment le champ de gravitation se couple avec la dynamique relativiste d'un champ de jauge non abélien. Cette description se fait de manière purement classique, au sens où les champs ne sont pas considérés comme étant des opérateurs. Cette théorie généralise de ce fait la théorie d'Einstein-Maxwell décrivant l'électromagnétisme comme source de gravitation.

Mathématiquement, l'espace-temps qui contient un tel champ est représenté par un espace fibré, c'est-à-dire un espace défini par une variété différentiable \mathcal{M} . Pour l'espace-temps proprement dit, il s'agit d'une variété pseudo-riemannienne caractérisée par un tenseur de métrique $g_{\mu\nu}$ en chaque point duquel se "greffe" une fibre. Dans le cas de la théorie de Yang-Mills (YM), cette fibre est constituée par l'espace dans lequel le champ de jauge prend ses valeurs, c'est-à-dire le groupe de jauge \mathcal{G} ou son algèbre de Lie \mathfrak{g} auquel il est localement isomorphe. La donnée d'une 1-forme différentielle de connexion \mathbf{A} à valeurs dans l'algèbre de Lie \mathfrak{g} du groupe de jauge achève de caractériser complètement le fibré associé à la théorie de YM en permettant la définition de dérivées covariantes tant au sein de la base (la variété différentiable \mathcal{M}) qu'entre les fibres fleurissant en ses différents points. La 1-forme de connexion \mathbf{A} définit en effet le transport parallèle de vecteurs entre deux fibres (cf. chapitre 1 et [NS83, EGH80, NAK90]).

Voyons comment cette dynamique jaugeo-gravitationnelle peut être dérivée d'un principe de moindre action. Supposons tout d'abord que la matière admette une symétrie de jauge interne décrite par un groupe de Lie \mathcal{G} . Son algèbre de Lie \mathfrak{g} , qui fournit par exponentiation les divers membres du groupe connexes à l'identité, est caractérisée par les relations de commutation

$$[T_{\mathbf{a}}, T_{\mathbf{b}}] = i f_{\mathbf{ab}}^{\mathbf{c}} T_{\mathbf{c}}, \quad (2.1)$$

où les $f_{\mathbf{abc}} = g_{\mathbf{cd}} f_{\mathbf{ab}}^{\mathbf{d}}$ sont appelées les constantes de structure du groupe de Lie et où les $T_{\mathbf{i}}$ sont les générateurs infinitésimaux des transformations du groupe. Le produit scalaire de deux éléments de l'algèbre \mathfrak{g} est donné par la forme de Killing $\langle A|B \rangle = 2Tr(AB)$ (où 2 est un facteur de normalisation, cf. chapitre 1 pour un rappel sur les algèbres de Lie) et où la métrique de Cartan $g_{\mathbf{ab}} = Tr(T_{\mathbf{a}}T_{\mathbf{b}})$ sert à descendre les indices de jauge. Nous adopterons la convention selon laquelle les indices latins gras seront des indices de jauge ($\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c} = \mathbf{1}, \dots, \mathbf{dim}(\mathcal{G}), \text{etc.}$). La 1-forme de connexion \mathbf{A} peut se développer le long des générateurs infinitésimaux comme

$$\mathbf{A} = A_{\mu}^{\mathbf{a}} T_{\mathbf{a}} dx^{\mu} \quad (2.2)$$

où les $A_{\mu}^{\mathbf{a}}$ sont les (quadri-)potentiels de jauge. Ensuite, les composantes de la 2-forme de courbure \mathbf{F} sur le fibré forment le tenseur du champ de Yang-Mills, généralisation, à valeurs

dans une algèbre de Lie quelconque, du tenseur de Faraday de l'électromagnétisme,

$$F_{\mu\nu}^c = \partial_\mu A_\nu^c - \partial_\nu A_\mu^c + f_{ab}^c A_\mu^a A_\nu^b \quad (2.3)$$

où la constante de couplage de jauge est posée égale à l'unité. Ce tenseur nous permet d'écrire la densité lagrangienne préalable à tout principe variationnel qui se respecte. Ecrivons directement l'action du système Einstein-Yang-Mills¹ :

$$S_{EYM} = \int \sqrt{-g} \left\{ -\frac{1}{2\kappa} R + \frac{1}{4} F_{\mu\nu}^a F_a^{\mu\nu} \right\} d^4x, \quad (2.4)$$

où g est le déterminant de la métrique, κ la constante de couplage gravitationnelle², R est la courbure scalaire de la variété spatio-temporelle (voir plus loin). Cette action demeure du reste bien invariante sous des difféomorphismes quelconques de l'espace-temps³ mais également sous des transformations de jauge $U(x^\mu) = \exp(i\theta^a(x^\mu)T_a) \in \mathcal{G}$ de la 1-forme de connexion \mathbf{A} pour lesquelles les composantes de cette dernière se transforment comme

$$A_\mu \rightarrow U A_\mu U^{-1} - (i\partial_\mu U) U^{-1}, \quad (2.5)$$

trahissant la nature non tensorielle de la connexion A sous le groupe de jauge. Par contre, l'intensité du champ de Yang-Mills se transforme selon

$$F_{\mu\nu} \rightarrow U F_{\mu\nu} U^{-1}, \quad (2.6)$$

la métrique $g_{\mu\nu}$, quant à elle, demeure indifférente aux transformations de jauge qui ne secouent guère que les fibres sans affecter la base de l'espace-temps. Par ailleurs, une autre propriété remarquable, et plus encore pour la cosmologie, des champs de Yang-Mills est leur invariance conforme. En effet, en vertu du caractère vectoriel (sous le groupe de Lorentz) des potentiels de jauge A_μ (spin unité), l'exigence de covariance de la théorie requiert de former une densité lagrangienne scalaire sous les diverses transformations de coordonnées de l'espace-temps, ce qui se réalise de manière quadratique à partir de la seule intensité du champ avec l'action de l'équation (2.4). Or cette action est manifestement invariante sous transformation conforme de la métrique :

$$g_{\mu\nu} \rightarrow f(x^\mu)g_{\mu\nu}, \quad (2.7)$$

sans affectation des potentiels de jauge ($A_\mu \rightarrow A_\mu$)⁴. Cependant, il convient de garder à l'esprit que l'action d'Einstein-Hilbert décrivant la gravitation ne tolère pas cette symétrie.

¹La constante cosmologique est considérée ici comme nulle dans la densité lagrangienne d'Einstein-Hilbert décrivant la gravitation.

²Nous poserons $G = c = 1$ de sorte que $\kappa = 8\pi$ tout au long de ce travail.

³Par exemple, sous des transformations globales ou locales appartenant au groupe de Poincaré, ce qui résulte de l'exigence de covariance de la théorie.

⁴En effet, la densité lagrangienne associée au secteur de jauge s'écrit alors

$$\mathcal{L}_{YM} = -\sqrt{-g} \text{Tr} (F_{\mu\nu} g^{\mu\alpha} g^{\nu\beta} F_{\alpha\beta}) \rightarrow \mathcal{L}_{YM} = -f^2 \sqrt{-g} \text{Tr} (f^{-2} F_{\mu\nu} g^{\mu\alpha} g^{\nu\beta} F_{\alpha\beta}).$$

Avant d'écrire les équations d'Euler-Lagrange résultant de la recherche de stationnarité de l'action (2.4)

$$\delta S_{EYM} = 0,$$

rappelons quelque peu le détail de la dérivation de la courbure scalaire R . L'élément d'intervalle spatio-temporel se définit, en base naturelle,

$$ds^2 = g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu \quad (2.8)$$

où la signature adoptée de la métrique sera ici $(-, +, +, +)$. La connexion définissant la dérivée covariante sur la variété spatio-temporelle est obtenue à partir des dérivées de la métrique via les symboles de Christoffel de seconde espèce⁵ :

$$\Gamma_{\beta\gamma}^\delta = \frac{1}{2} g^{\alpha\delta} (g_{\alpha\beta,\gamma} + g_{\alpha\gamma,\beta} - g_{\beta\gamma,\alpha}), \quad (2.9)$$

où la virgule en indice désigne la dérivée partielle par rapport à la coordonnée concernée⁶. A partir de ces derniers, on calcule successivement le tenseur de Riemann (tenseur de courbure) :

$$R_{\beta\gamma\delta}^\alpha = \Gamma_{\beta\delta,\gamma}^\alpha - \Gamma_{\beta\gamma,\delta}^\alpha + \Gamma_{\beta\delta}^\rho \Gamma_{\rho\gamma}^\alpha - \Gamma_{\beta\gamma}^\rho \Gamma_{\rho\delta}^\alpha \quad (2.10)$$

dont la contraction sur les premier et troisième indices donne celui de Ricci :

$$R_{\mu\nu} = R_{\mu\alpha\nu}^\alpha. \quad (2.11)$$

On obtient finalement la courbure scalaire comme trace de ce dernier tenseur de rang 2 : $R = R_\mu^\mu$.

L'action du système EYM (2.4) est une fonctionnelle à la fois des coefficients de la métrique $g_{\mu\nu}$ et des potentiels de jauge A_μ^a . L'exigence de stationnarité de cette fonctionnelle conduit aux équations du champ. En particulier, la variation de (2.4) par rapport aux $g_{\mu\nu}$ donne les équations d'Einstein de la relativité générale :

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} R g_{\mu\nu} = \kappa T_{\mu\nu}^{YM} \quad (2.12)$$

où $T_{\mu\nu}^{YM}$ est le tenseur énergie-impulsion associé au champ de Yang-Mills :

$$T_{\mu\nu}^{YM} = \frac{2}{\sqrt{-g}} \left(\frac{\partial \mathcal{L}_{YM}}{\partial g^{\mu\nu}} - \partial_\alpha \frac{\partial \mathcal{L}_{YM}}{\partial (\partial_\alpha g^{\mu\nu})} \right) \quad (2.13)$$

⁵Dans la base naturelle que nous avons choisie pour écrire la métrique, les coefficients de structure intervenant dans la relation de commutation entre deux vecteurs de base

$$[X_i, X_j] = C_{ij}^k X_k$$

sont identiquement nuls.

⁶Dans la base naturelle.

soit, explicitement,

$$T_{\mu\nu}^{YM} = 2F_{\mu\alpha}^{\mathbf{a}} F_{\nu}^{\alpha}{}_{\mathbf{a}} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}F_{\alpha\beta}^{\mathbf{a}} F^{\alpha\beta}{}_{\mathbf{a}}. \quad (2.14)$$

La variation de (2.4) par rapport aux potentiels de jauge $A_{\mu}^{\mathbf{a}}$ et son annulation nous conduisent aux équations de Yang-Mills covariantes (cf. annexe A) :

$$\nabla_{\mu} F^{\mu\nu}{}^{\mathbf{c}} + f_{\mathbf{ab}}^{\mathbf{c}} A_{\mu}^{\mathbf{a}} F^{\mu\nu}{}^{\mathbf{b}} = 0, \quad (2.15)$$

où ∇_{μ} désigne la dérivée covariante sur la base du fibré⁷.

De plus, en vertu de l'invariance conforme, le tenseur énergie-impulsion de Yang-Mills, à l'instar de son homologue maxwellien qui dérive d'une théorie de jauge abélienne, est de trace nulle : $T_{\mu}^{\mu} = 0$. De ce fait, calculant la trace de ce tenseur à partir des équations d'Einstein (2.12), on trouve que la courbure scalaire est identiquement nulle pour des solutions des équations d'Einstein-Yang-Mills : $R = 0$. Ainsi, les équations d'Einstein (2.12) se réduisent à

$$R_{\mu\nu} = \kappa T_{\mu\nu}^{YM} \quad (2.16)$$

et les composantes du tenseur énergie-impulsion de Yang-Mills sont directement proportionnelles à celles du tenseur de Ricci.

Le système Einstein-Yang-Mills (2.12-2.15) forme donc un ensemble d'équations non linéaires aux dérivées partielles couplées de $10+4 \times \dim(\mathcal{G})$ inconnues (10 composantes indépendantes du tenseur symétrique $g_{\mu\nu}$ et $4 \times \dim(\mathcal{G})$ potentiels de jauge). Espérer résoudre directement (et analytiquement) ce système sans prescriptions particulières est bien illusoire mais, fort heureusement, la liberté de jauge du système EYM nous offre une possibilité providentielle de simplifier ces équations. Cette liberté de jauge se traduit, dans le secteur gravitationnel, par un choix d'un système de coordonnées confortables et, dans le secteur de Yang-Mills, par l'énoncé d'une condition sur les degrés de liberté internes du système. Ainsi, nous supposerons tout d'abord l'existence de symétrie(s) dans l'espace-temps de manière à réduire une première fois le nombre de degrés de liberté (externes) du système EYM. Une seconde réduction pourra par la suite être obtenue en utilisant l'invariance de jauge des champs de Yang-Mills en vue d'éliminer certains degrés de liberté internes.

⁷Pour rappel, la dérivée covariante d'un tenseur de rang deux à deux indices contravariants comme le tenseur de Faraday s'écrit (en omettant l'indice de jauge par souci de clarté de l'expression) :

$$\nabla_{\mu} F^{\mu\nu} = F^{\mu\nu}{}_{,\mu} + \Gamma_{\rho\mu}^{\mu} F^{\rho\nu} + \Gamma_{\rho\mu}^{\nu} F^{\mu\rho}.$$

2 Conséquence des symétries de l'espace-temps sur les champs de jauge

Avant de présenter comment l'existence de symétries de l'espace-temps réduit le nombre de degrés de liberté des champs de jauge, il nous sera utile de rappeler quelques concepts fondamentaux. Cette section reprend, pour l'essentiel, des développements et des notations de la référence [FM80]. Soit une application différentiable sur la variété riemannienne \mathcal{M} représentant l'espace-temps

$$\phi : \mathcal{M} \rightarrow \mathcal{M} ; x \rightarrow \bar{x}$$

qui correspond, par exemple, à une isométrie. La transformation de coordonnées

$$\phi(x^\mu) = \bar{x}^\mu$$

(où μ est un indice spatio-temporel allant de 0 à $\dim(\mathcal{M}) - 1$), qui résulte de l'action de ϕ , définit un nouvel ensemble \bar{x}^μ de coordonnées définies par les coordonnées du point \bar{x} image de x par ϕ , exprimées dans l'ancien système de coordonnées. Par exemple, dans le cas d'une application infinitésimale :

$$\bar{x}^\mu = x^\mu + \epsilon \xi^\mu(x^\mu).$$

Si nous avons affaire à un groupe d'isométries de l'espace-temps, le vecteur ξ^μ est appelé un *générateur de la transformation* ou encore un *vecteur de Killing* et vérifie les équations de Killing⁸

$$\xi_{\alpha;\beta} + \xi_{\beta;\alpha} = 0.$$

Les générateurs constituent de même l'algèbre de Lie du groupe d'isométries.

Considérons à présent un champ vectoriel covariant $A_\mu(x^\nu)$ et sa transformation $\bar{A}_\mu(x^\nu)$ sous l'action de l'isométrie définie comme

$$\bar{A}_\mu(x^\nu) = A_\mu(\bar{x}^\nu) = A_\mu(\phi(x^\nu)) = A_\mu(x^\nu + \epsilon \xi^\nu)$$

c'est-à-dire que ses composantes dans le nouveau système de coordonnées sont identifiées aux anciennes valeurs du champ au point \bar{x} . Développant cette condition au premier ordre en le paramètre infinitésimal ϵ , nous obtenons pour le champ transformé et exprimé dans l'ancien système de coordonnées

$$\bar{A}_\mu(x^\nu) = \frac{\partial \bar{x}^\rho}{\partial x^\mu} \bar{A}_\rho(x^\nu) = (\delta_\mu^\rho + \epsilon \partial_\mu \xi^\rho) (A_\rho(x^\nu) + \epsilon \xi^\sigma \partial_\sigma A_\rho(x^\nu)). \quad (2.17)$$

⁸Le point virgule ; désigne la dérivée covariante sur l'espace-temps.

Forts de ces définitions, nous pouvons à présent introduire la notion de **dérivée de Lie** le long d'un vecteur ξ :

$$\mathcal{L}_\xi A_\mu = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{1}{\epsilon} (\bar{A}_\mu(x^\nu) - A_\mu(x^\nu)) \quad (2.18)$$

$$= \partial_\mu \xi^\rho A_\rho + \xi^\rho \partial_\rho A_\mu. \quad (2.19)$$

Dès lors, on dit que le champ vectoriel A_μ possède la symétrie générée par le vecteur de Killing ξ si sa dérivée de Lie le long de ce vecteur s'annule

$$\mathcal{L}_\xi A_\mu = 0 \quad (2.20)$$

et donc si les valeurs du champ transformé \bar{A}_μ sont identiques à celles avant la transformation au même point lorsque ces valeurs sont exprimées dans le même système de coordonnées. Pour un tenseur de rang quelconque, la dérivée de Lie s'écrit

$$\mathcal{L}_\xi T_{\mu\nu}^{\rho\sigma\cdots} = \partial_\mu \xi^\lambda T_{\lambda\nu}^{\rho\sigma\cdots} + \partial_\nu \xi^\lambda T_{\mu\lambda}^{\rho\sigma\cdots} + \cdots - \partial_\lambda \xi^\rho T_{\mu\nu}^{\lambda\sigma\cdots} - \partial_\lambda \xi^\sigma T_{\mu\nu}^{\rho\lambda\cdots} - \cdots + \xi^\lambda \partial_\lambda T_{\mu\nu}^{\rho\sigma\cdots}. \quad (2.21)$$

L'espace-temps adoptera dès lors la symétrie du groupe G d'isométries générées par les $\dim(G)$ générateurs ξ_m à condition que la dérivée de Lie de la métrique le long des vecteurs de Killing ξ_m s'annule :

$$\mathcal{L}_{\xi_m} g_{\mu\nu} = 0, \quad (2.22)$$

équation qui se ramène en vertu de la relation (2.21) aux équations de Killing susmentionnées. Lorsque la symétrie et ses générateurs sont connus, (2.22) est à résoudre par rapport aux coefficients de la métrique.

Si la symétrie doit être manifeste pour la métrique, comme l'indique la relation (2.22), il n'en va pas nécessairement de même pour les champs de jauge. En effet, les seules grandeurs qui doivent exhiber la symétrie recherchée sont celles qui sont observables, c'est-à-dire invariante de jauge, comme le sont l'intensité et l'énergie du champ de jauge (tenseur de Faraday et tenseur énergie-impulsion). Ainsi donc, on peut mettre à profit l'invariance de jauge de la théorie Yang-Mills en imposant que l'effet d'une isométrie de l'espace-temps se ramène à une transformation de jauge des composantes de la connexion \mathbf{A} , de sorte qu'au final, les quantités physiques invariante de jauge soient (manifestement) symétriques⁹. Cette richesse héritée du caractère quelque peu caché des champs de jauge relaxe la condition d'invariance du champ vectoriel simple (2.20). Ainsi donc, notant $A_\mu^g(x) = g A_\mu g^{-1} + (\partial_\mu g) g^{-1}$ la transformée de jauge du champ A_μ sous l'élément $g(x)$ du groupe de jauge \mathcal{G} , la condition de symétrie de la théorie de Yang-Mills sera satisfaite si et seulement si

$$\bar{A}_\mu(x) = A_\mu^{g_0}(x) \quad (2.23)$$

⁹Leur dérivée de Lie s'annule identiquement.

pour une certaine transformation de jauge $g_0(x)$. Si nous considérons un mouvement infinitésimal sous le groupe d'isométries de l'espace-temps, la transformation de jauge qui doit affecter les potentiels de jauge en vue d'assurer l'invariance manifeste des grandeurs observables doit prendre la forme infinitésimale suivante :

$$g_0(x) = e^{i\epsilon\theta^{\mathbf{a}}(x)T_{\mathbf{a}}}$$

et pour les potentiels de jauge, au premier ordre en ϵ ,

$$A_{\mu}^{g_0} \simeq A_{\mu} + \epsilon(\partial_{\mu}W - [A_{\mu}, W]) \equiv A_{\mu}(x) + \epsilon D_{\mu}W, \quad (2.24)$$

pour $W = i\theta^{\mathbf{a}}(x)T_{\mathbf{a}}$ appartenant à l'algèbre de Lie du groupe de jauge \mathcal{G} et où $D_{\mu}(\cdot) = \partial_{\mu}(\cdot) - [A_{\mu}, (\cdot)]$ est ici la dérivée covariante de jauge (mais pas covariante sous transformations de l'espace-temps). La condition de symétrie des potentiels de jauge (2.23) entraîne donc que

$$\boxed{\mathcal{L}_{\xi}A_{\mu} = D_{\mu}W.} \quad (2.25)$$

Supposons que W est un scalaire sous transformation de coordonnées de l'espace-temps et qu'il admet la transformation de jauge suivante

$$\begin{aligned} W^g &= gWg^{-1} + \xi^{\rho}(\partial_{\rho}g)g^{-1} \\ &= gWg^{-1} + (\mathcal{L}_{\xi}g)g^{-1} \end{aligned} \quad (2.26)$$

puisque g est un scalaire sous l'isométrie. Dès lors, l'équation de symétrie (2.25) est invariante sous des transformations générales de coordonnées et est invariante de jauge.

Dans le cas d'une isométrie à un seul vecteur de Killing, par exemple une translation dans la direction x^i , si nous nous plaçons dans un système de coordonnées tel que $\xi^{\mu'} = (0, \dots, 1, \dots, 0)$, la transformation de jauge

$$g \approx e^{-\int_0^{x^i} W(x^1, \dots, x^{i-1}, y, x^{i+1}, \dots, x^{\dim(\mathcal{M})}) dy}$$

annule identiquement W de telle manière que, dans ces nouvelles coordonnées et dans cette nouvelle jauge, la condition de symétrie se réduit à l'exigence triviale que le champ A_{μ} ne dépende pas de x^i . Cependant, lorsqu'il y a plusieurs vecteurs de Killing générant le groupe d'isométries (ou plusieurs symétries), on ne peut plus effectuer simultanément ces changements de coordonnées et de jauge sur chaque équation de symétrie de sorte qu'il nous faille maintenant les considérer dans leur ensemble. Dans ce cas, nous avons donc l'équation générale suivante

$$\boxed{\mathcal{L}_{\xi_m}A_{\mu} = D_{\mu}W_m \quad 1 \leq m \leq N} \quad (2.27)$$

pour chacun des N vecteurs de Killing du groupe d'isométries. Nous avons donc affaire à un espace vectoriel de symétries engendré par les générateurs ξ_m puisque si $\xi(x)$ est une combinaison linéaire des générateurs $\xi(x) = \lambda_m \xi_m(x)$ (λ_m étant des constantes), alors

$$\mathcal{L}_\xi A_\mu = D_\mu(\lambda_m W_m). \quad (2.28)$$

On peut supposer que toutes les symétries de A_μ appartiennent à ce sous-espace engendré par les vecteurs de Killing. Comme le système (2.27) est sous-déterminé, il nous faut rechercher des conditions supplémentaires qui permettent de fixer les jauges W_m induites par les isométries de l'espace-temps.

Le commutateur des dérivées de Lie le long de deux générateurs de symétries ξ_m et ξ_n s'écrit

$$(\mathcal{L}_{\xi_m} \mathcal{L}_{\xi_n} - \mathcal{L}_{\xi_n} \mathcal{L}_{\xi_m}) A_\mu = \mathcal{L}_{\xi_m} (D_\mu W_n) - \mathcal{L}_{\xi_n} (D_\mu W_m). \quad (2.29)$$

En introduisant le vecteur η , crochet de Lie des deux vecteurs de Killing ξ_m et ξ_n , donné par les composantes :

$$\eta^\mu = [\xi_m, \xi_n]^\mu = \xi_m^\rho \partial_\rho \xi_n^\mu - \xi_n^\rho \partial_\rho \xi_m^\mu, \quad (2.30)$$

on peut réécrire cette relation

$$\mathcal{L}_\eta A_\mu = D_\mu (\mathcal{L}_{\xi_m} W_n - \mathcal{L}_{\xi_n} W_m - [W_m, W_n]). \quad (2.31)$$

Or le crochet de Lie des deux vecteurs de Killing appartient au sous-espace engendré par les générateurs de la symétrie et peut donc se réécrire à l'aide des constantes de structures de l'algèbre de Lie (propriété de fermeture) :

$$\eta = [\xi_m, \xi_n] = f_{mn}^p \xi_p \quad (2.32)$$

ce qui donne pour la dérivée de Lie le long de ce crochet, en vertu de (2.28),

$$\mathcal{L}_{f_{mn}^p \xi_p} A_\mu = D_\mu (f_{mn}^p W_p). \quad (2.33)$$

Identifiant les équations (2.31) et (2.33), on trouve **les conditions de consistance** qui fixeront les jauges W_i de l'équation de symétrie (2.27) :

$$\boxed{\mathcal{L}_{\xi_m} W_n - \mathcal{L}_{\xi_n} W_m - [W_m, W_n] - f_{mn}^p W_p = 0.} \quad (2.34)$$

Nous pouvons à présent dériver la condition de symétrie du tenseur de Faraday $F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu - [A_\mu, A_\nu] = D_\mu A_\nu - D_\nu A_\mu$ à partir de l'équation de symétrie du champ de jauge (2.25)

$$D_\nu \mathcal{L}_\xi A_\mu - D_\mu \mathcal{L}_\xi A_\nu = (D_\nu D_\mu - D_\mu D_\nu) W \quad (2.35)$$

et en développant

$$\boxed{\mathcal{L}_\xi F_{\nu\mu} = [F_{\mu\nu}, W]} \quad (2.36)$$

où on notera l'ordre des indices de la dernière relation.

Une dernière remarque nous permettra de souligner le lien particulier qui existe entre champs scalaires et champs de Yang-Mills. Projetons les composantes du tenseur de Faraday le long du même vecteur de Killing :

$$\begin{aligned}
\xi_m^\mu F_{\mu\nu} &= \xi_m^\mu (\partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu - [A_\mu, A_\nu]) \\
&= \mathcal{L}_{\xi_m} A_\nu - (\partial_\nu \xi_m^\mu) A_\mu - \xi_m^\mu \partial_\nu A_\mu - [\xi_m^\mu A_\mu, A_\nu] \\
&= D_\nu (W_m - \xi_m^\mu A_\mu)
\end{aligned} \tag{2.37}$$

où on a utilisé les relations (2.19) et (2.27). En introduisant l'ensemble de champs de scalaires $\Phi_m = \xi_m^\mu A_\mu - W_m$, nous pouvons exprimer la projection du tenseur de Faraday en terme d'une dérivée covariante de jauge :

$$\xi_m^\mu F_{\mu\nu} = -D_\nu \Phi_m \tag{2.38}$$

et ce, quelle que soit la jauge considérée. La propriété de symétrie des champs scalaires Φ_m s'écrit

$$\mathcal{L}_{\xi_m} \Phi_m - [W_m, \Phi_m] = f_{mn}^p \Phi_p \tag{2.39}$$

à partir des conditions de symétrie (2.27) et de consistance (2.34). A partir de ces équations de symétrie pour le champ scalaire Φ_m , on peut calculer la contraction suivante

$$\begin{aligned}
\xi_m^\mu \xi_n^\nu F_{\mu\nu} &= -\xi_n^\nu (\partial_\nu \Phi_m - [A_\nu, \Phi_m]) \\
&= -\mathcal{L}_{\xi_m} \Phi_m + [W_n + \Phi_n] \\
&= f_{mn}^p \Phi_p - [\Phi_m, \Phi_n]
\end{aligned} \tag{2.40}$$

où on a utilisé l'équation de symétrie (2.39) des Φ_m , la définition de Φ_m et l'antisymétrie des constantes de structures ($f_{nm}^p = -f_{mn}^p$). Nous voyons donc qu'en présence de symétries de Killing de l'espace-temps, certaines composantes du tenseur du champ de Yang-Mills peuvent se réduire à des termes de dérivées covariantes de champs scalaires et d'autres en des termes algébriques et quadratiques en ces mêmes champs. En fait, on peut montrer dans le cas général (cf. [FM80]) que la présence d'une symétrie de Killing sur l'espace-temps permet de réduire l'action de Yang-Mills à celle d'un modèle de Higgs avec potentiel quartique. Nous verrons au cours de la prochaine section que c'est effectivement le cas lorsque l'espace-temps est spatialement isotrope et habité par des champs de Yang-Mills dérivant du groupe de jauge $SU(2)$.

3 Système EYM à symétrie sphérique pour le groupe de jauge $SU(2)$

3.1 Paramétrisation de la métrique et des potentiels jauge

Dans cette section, nous allons particulariser la théorie vue au paragraphe précédent au cas d'un espace-temps spatialement isotrope et d'une théorie de jauge issue du groupe $SU(2)$. Tout d'abord, le groupe d'isométries correspondant à l'isotropie spatiale est le groupe $SO(3)$ dont les vecteurs de Killing s'écrivent (cf. [CTDL73, CT76, FM80])

$$\begin{aligned}\xi_1 &= \xi_1^\alpha X_\alpha = -\cos \varphi \partial_\theta + \sin \varphi \cot \theta \partial_\varphi \\ \xi_2 &= \xi_2^\alpha X_\alpha = \sin \varphi \partial_\theta + \cos \varphi \cot \theta \partial_\varphi \\ \xi_3 &= \xi_3^\alpha X_\alpha = \partial_\varphi\end{aligned}\tag{2.41}$$

($X_1 = \partial_\theta$, $X_2 = \partial_\varphi$, $\alpha = 1, 2$). Les constantes de structures relatives à ce groupe sont les composantes du tenseur complètement antisymétrique ϵ_{ijk} de rang 3 ($\epsilon_{123} = 1$), et l'algèbre de Lie de $SO(3)$ s'écrit alors :

$$[\xi_i, \xi_j] = \epsilon_{ijk} \xi_k.$$

La solution générale de la condition de symétrie (2.22) sous $SO(3)$ est donnée par la paramétrisation suivante

$$ds^2 = g_{\alpha\beta} dx^\alpha dx^\beta + R^2(\chi, t) (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\varphi^2)\tag{2.42}$$

où les indices α, β désignent les coordonnées radiale et temporelle χ et t , respectivement. Nous utiliserons ici pour métrique la paramétrisation suivante

$$\boxed{ds^2 = (-N^2 + N_\chi N^\chi) dt^2 + 2N_\chi d\chi dt + e^{2\mu} d\chi^2 + e^{2\lambda} d\Omega^2},\tag{2.43}$$

où $d\Omega^2 = d\theta^2 + \sin^2 \theta d\varphi^2$ désigne le carré de l'élément d'angle solide et où les composantes de la métrique N , N_χ , μ et λ sont toutes des fonctions des variables χ et t . On appellera N la fonction *lapse* et N_χ la fonction *shift* pour des raisons explicitées au chapitre suivant. On peut d'ores et déjà noter qu'un choix de jauge confortable consiste à annuler $N_\chi(\chi, t)$, de sorte que toutes les horloges des différents observateurs répartis dans un volume infinitésimal de l'espace soient synchronisées (définition locale de la simultanéité, cf. [LL61]).

En ce qui concerne le secteur de jauge, nous considérons ici que les champs de Yang-Mills le constituant dérivent du groupe $SU(2)$. L'algèbre de Lie $su(2)$ de ce groupe s'écrit

$$[T_{\mathbf{a}}, T_{\mathbf{b}}] = i\epsilon_{\mathbf{ab}\mathbf{c}} T_{\mathbf{c}}\tag{2.44}$$

où les constantes de structure sont les composantes antisymétriques susmentionnées et où les générateurs $T_{\mathbf{i}} = \frac{1}{2}\sigma_{\mathbf{i}}$ sont donnés par les matrices de Pauli :

$$\sigma_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \sigma_2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} \quad \sigma_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \quad (2.45)$$

avec la métrique de Cartan : $Tr(T_{\mathbf{a}}T_{\mathbf{b}}) = \frac{1}{2}\delta_{\mathbf{ab}}$. En vue de trouver une configuration à symétrie sphérique pour les champs de jauge, nous devons résoudre les équations de symétrie (2.27) des potentiels de jauge grâce aux jauges W_m imposées par les équations de consistance (2.34). Ces dernières peuvent se réécrire, en tenant compte du fait que les W_n sont des scalaires sous les transformations de coordonnées à valeurs dans l'algèbre de Lie du groupe de jauge ($W_m = W_m^{\mathbf{a}}T_{\mathbf{a}}$),

$$(\xi_m^\rho \partial_\rho W_n^{\mathbf{a}} - \xi_n^\rho \partial_\rho W_m^{\mathbf{a}} - i \epsilon_{\mathbf{bca}} W_m^{\mathbf{b}} W_n^{\mathbf{c}} - \epsilon_{mnp} W_p^{\mathbf{a}}) T_{\mathbf{a}} = 0 \quad (2.46)$$

ce qui se scinde en deux groupes :

$$\epsilon_{\mathbf{bca}} W_m^{\mathbf{b}} W_n^{\mathbf{c}} = 0 \quad (2.47)$$

$$\xi_m^\rho \partial_\rho W_n^{\mathbf{a}} - \xi_n^\rho \partial_\rho W_m^{\mathbf{a}} - \epsilon_{mnp} W_p^{\mathbf{a}} = 0. \quad (2.48)$$

Au sein de ces groupes, seuls trois couples d'indices (m, n) donnent lieu à des équations indépendantes et non triviales : $(1, 2)$, $(1, 3)$ et $(2, 3)$. Une solution du premier groupe est obtenue en annulant toutes les composantes des W_m le long des premier et deuxième générateurs ($W_m^{\mathbf{a}} = 0, \forall m = 1, 2, 3$ et $\forall \mathbf{a} = \mathbf{1}, \mathbf{2}$). Le second groupe se réduit dès lors aux trois équations suivantes

$$-\cos \varphi \partial_\theta W_2 + \sin \varphi \cot \theta \partial_\varphi W_2 - \sin \varphi \partial_\theta W_1 - \cos \varphi \cot \theta \partial_\varphi W_1 - W_3 = 0 \quad (2.49)$$

$$-\cos \varphi \partial_\theta W_3 + \sin \varphi \cot \theta \partial_\varphi W_3 - \partial_\varphi W_1 + W_2 = 0 \quad (2.50)$$

$$\sin \varphi \partial_\theta W_3 + \cos \varphi \cot \theta \partial_\varphi W_3 - \partial_\varphi W_2 - W_1 = 0, \quad (2.51)$$

où W_i est un raccourci de notation pour les troisièmes composantes $W_i^{\mathbf{3}}$. Une solution possible au système d'équations (2.49) à (2.51) est d'annuler W_3 , pour ensuite pouvoir résoudre l'une des deux relations (2.50) ou (2.51), et enfin substituer dans l'équation (2.49). On trouve finalement la solution au système ci-dessus

$$\begin{aligned} W_1^{\mathbf{a}} &= \left(0, 0, \frac{\sin \varphi}{\sin \theta}\right) \\ W_2^{\mathbf{a}} &= \left(0, 0, \frac{\cos \varphi}{\sin \theta}\right) \\ W_3^{\mathbf{a}} &= (0, 0, 0). \end{aligned} \quad (2.52)$$

A partir des jauges données par ces relations, nous pouvons résoudre la condition de symétrie (2.27) pour les champs de Yang-Mills afin de trouver la forme générale de la connexion spatialement isotrope (cf. [FM80], [GV99], [WIT77]) :

$$\mathbf{A} = aT_3 + \text{Im}(\omega T_+) d\theta - \text{Re}(\omega T_+) \sin\theta d\varphi + T_3 \cos\theta d\varphi, \quad (2.53)$$

où $T_+ = T_1 + iT_2$, a est la 1-forme différentielle suivante

$$a = a_t dt + a_\chi d\chi$$

et ω est un scalaire complexe. Les fonctions a_t , a_χ et ω dépendent uniquement des coordonnées radiale et temporelle. La connexion (2.53) admet une symétrie de jauge abélienne $U(1)$ résiduelle. En effet, sous la transformation de jauge $U = \exp(i\beta(t, \chi)T_3)$, les composantes de la connexion (2.53) se transforment comme¹⁰

$$\begin{aligned} a_\alpha &\rightarrow a_\alpha - \partial_\alpha \beta \\ \omega &\rightarrow e^{i\beta} \omega \end{aligned} \quad (2.54)$$

($\alpha = t, \chi$). Ainsi, voit-on poindre l'ombre d'un modèle de Higgs à deux dimensions puisque les équations (2.54) montrent comment les champs a_α et ω se transforment comme un vecteur abélien à deux dimensions et un champ scalaire complexe. Comme les quatre composantes réelles indépendantes dans (2.53) contiennent un pur degré de liberté de jauge, on peut l'éliminer en toute généralité par une transformation de jauge en choisissant comme variables physiques le module de ω et les composantes $\Omega_\alpha = a_\alpha - \partial_\alpha(\arg(\omega))$.

Réécrivons à présent (2.53) en termes de quatre composantes réelles en introduisant les variables $a = a_t$, $b = a_\chi$, $c = \text{Re}(\omega) \cos(\arg(\omega))$ et $d = \text{Re}(\omega) \sin(\arg(\omega))$:

$$\boxed{\mathbf{A} = a T_3 dt + b T_3 d\chi + (c T_1 + d T_2) d\theta + (c T_2 - d T_1) \sin\theta d\varphi + \cos\theta T_3 d\varphi}, \quad (2.55)$$

que l'on désigne souvent sous le nom d'*Ansatz de Witten* [WIT77]. Il s'agit de la paramétrisation la plus générale¹¹ d'un champ de jauge à valeurs dans $su(2)$ vivant dans

¹⁰On se souviendra que $\exp(i\alpha T_{\mathbf{a}}) = I \cos \frac{\alpha}{2} + i\sigma_{\mathbf{a}} \sin \frac{\alpha}{2}$ où I est la matrice identité de dimension 2.

¹¹En fait, on peut également écrire l'Ansatz de Witten en fonction des générateurs dépendant des coordonnées :

$$\begin{aligned} T_{\mathbf{r}} &= \sin\theta \cos\varphi T_1 + \sin\theta \sin\varphi T_2 + \cos\theta T_3 \\ T_\theta &= \partial_\theta T_{\mathbf{r}} \\ T_\varphi &= \frac{1}{\sin\theta} \partial_\varphi T_{\mathbf{r}} \end{aligned}$$

qui obéissent aux mêmes relations de commutation que les générateurs constants $T_{\mathbf{i}} = \frac{1}{2}\sigma_{\mathbf{i}}$ mais pour $[T_{\mathbf{r}}, T_\theta] = iT_\varphi$. On a

$$\mathbf{A} = a_t T_{\mathbf{r}} dt + a_\chi T_{\mathbf{r}} d\chi + i(1 - \text{Re}(\omega)) [T_{\mathbf{r}}, dT_{\mathbf{r}}] + \text{Im}(\omega) dT_{\mathbf{r}}$$

un espace-temps isotrope (mais pas nécessairement homogène). Ce sera cette écriture des champs de Yang-Mills dérivant du groupe de jauge $SU(2)$ en symétrie sphérique que nous utiliserons dans ce travail.

3.2 Equations des champs EYM

3.2.1 Secteur gravitationnel

Forts des paramétrisations (2.43) et (2.55) de la métrique et des potentiels de jauge, nous pouvons écrire les équations d'Einstein-Yang-Mills à symétrie sphérique pour le groupe de jauge $SU(2)$.

Ecrivons tout d'abord les symboles de Christoffel Γ_{ij}^k de seconde espèce (2.9) (avec $\Gamma_{ij}^k = \Gamma_{ji}^k$) pour la métrique générale (2.43) en base naturelle (et la condition de jauge $N_\chi = 0$) :

$$\begin{aligned}
\Gamma_{00}^0 &= \frac{\dot{N}}{N} & \Gamma_{01}^0 &= \frac{N'}{N} \\
\Gamma_{11}^0 &= \frac{e^{2\mu}\dot{\mu}}{N^2} & \Gamma_{22}^0 &= \frac{e^{2\lambda}\dot{\lambda}}{N^2} \\
\Gamma_{33}^0 &= \Gamma_{22}^0 \sin^2 \theta & \Gamma_{00}^1 &= e^{-2\mu} N' N \\
\Gamma_{01}^1 &= \dot{\mu} & \Gamma_{11}^1 &= \mu' \\
\Gamma_{22}^1 &= -e^{-2\mu+2\lambda}\lambda' & \Gamma_{33}^1 &= \Gamma_{22}^1 \sin^2 \theta \\
\Gamma_{02}^2 &= \Gamma_{03}^3 = \dot{\lambda} & \Gamma_{12}^2 &= \Gamma_{13}^3 = \lambda' \\
\Gamma_{33}^2 &= -\cos \theta \sin \theta & \Gamma_{23}^3 &= \frac{\cos \theta}{\sin \theta}.
\end{aligned} \tag{2.56}$$

Dans l'équation (2.56), les grandeurs pointées et primées représentent respectivement des dérivées par rapport au temps t et à la position radiale χ . A partir de ces grandeurs, on

qui se ramène à (2.53) par la transformation de jauge $U = \exp(i\theta T_2) \exp(i\varphi T_3)$. La symétrie résiduelle est localisée ici dans le sous-groupe abélien le long de $T_{\mathbf{r}}$ (changement de jauge $U = \exp(i\beta(t, \chi)T_{\mathbf{r}})$). On peut noter que sous l'opérateur de parité : $\theta \rightarrow \pi - \theta$ et $\varphi \rightarrow \pi + \varphi$, les générateurs se transforment comme $T_{\mathbf{r}} \rightarrow -T_{\mathbf{r}}$, $T_\theta \rightarrow T_\theta$, $T_\varphi \rightarrow -T_\varphi$ et que les composantes de la connexion se transforment comme $a_\alpha \rightarrow -a_\alpha$ et $\omega \rightarrow \omega^*$. Ainsi donc, parmi les quatre degrés de liberté réels de la connexion, trois sont impairs (les composantes vectorielles abéliennes et la phase de ω) et le dernier est pair (le module de ω) sous l'opérateur de parité.

peut calculer les composantes du tenseur de Ricci grâce à (2.10) :

$$R_{00} = 2e^{-2\mu} \lambda' N' N - 2\ddot{\lambda} - 2\dot{\lambda}^2 + 2\dot{\lambda} \frac{\dot{N}}{N} - \ddot{\mu} - \dot{\mu}^2 + \dot{\mu} \frac{\dot{N}}{N} + e^{-2\mu} N (N'' - \mu' N'), \quad (2.57)$$

$$R_{01} = 2 \left(-\dot{\lambda}' - \lambda' \dot{\lambda} + \lambda' \dot{\mu} + \dot{\lambda} \frac{N'}{N} \right), \quad (2.58)$$

$$R_{11} = -2\lambda'' - 2\lambda'^2 + 2\lambda' \mu' + \mu' \frac{N'}{N} + \frac{e^{2\mu}}{N^2} \left(2\dot{\lambda} \dot{\mu} + \ddot{\mu} + \dot{\mu}^2 - \dot{\mu} \frac{\dot{N}}{N} \right) - \frac{N''}{N}, \quad (2.59)$$

$$R_{22} = \frac{R_{33}}{\sin^2 \theta} = 1 + e^{2\lambda} \left\{ -e^{-2\mu} \left(\lambda'' + 2\lambda'^2 - \lambda' \mu' + \lambda' \frac{N'}{N} \right) + \frac{1}{N^2} \left(\ddot{\lambda} + 2\dot{\lambda}^2 + \dot{\lambda} \dot{\mu} - \dot{\lambda} \frac{\dot{N}}{N} \right) \right\}. \quad (2.60)$$

Enfin, la courbure scalaire s'obtient comme contraction du tenseur de Ricci $R = R^\mu_\mu$, soit

$$R = 2 \left\{ -e^{-2\mu} \left(2\lambda'' + 3\lambda'^2 - 2\lambda' \mu' + (2\lambda' - \mu') \frac{N'}{N} + \frac{N''}{N} \right) + \frac{1}{N^2} \left(2\ddot{\lambda} + 3\dot{\lambda}^2 + 2\dot{\lambda} \dot{\mu} - (\dot{\mu} + 2\dot{\lambda}) \frac{\dot{N}}{N} + \ddot{\mu} + \dot{\mu}^2 \right) + e^{-2\lambda} \right\}. \quad (2.61)$$

Nous convions le lecteur à consulter l'annexe B pour l'écriture complète des équations EYM en symétrie sphérique pour le groupe de jauge $SU(2)$.

Le couplage avec le champ de Yang-Mills est accompli au niveau de la source de la gravitation par l'intermédiaire du tenseur énergie-impulsion correspondant que nous donnerons au paragraphe suivant.

3.2.2 Secteur de jauge

Les composantes du tenseur de Faraday du champ de Yang-Mills à valeurs dans $su(2)$ s'obtiennent grâce aux relations (2.3) et (2.55) ($F_{\mu\nu}^{\mathbf{a}} = -F_{\nu\mu}^{\mathbf{a}}$) :

$$\begin{aligned}
F_{02}^{\mathbf{1}} &= \dot{c} - ad \\
F_{03}^{\mathbf{1}} &= -\sin\theta (\dot{d} + ac) \\
F_{12}^{\mathbf{1}} &= c' - bd \\
F_{13}^{\mathbf{1}} &= -\sin\theta (d' + bc) \\
F_{02}^{\mathbf{2}} &= \dot{d} + ac \\
F_{03}^{\mathbf{2}} &= \sin\theta (\dot{c} - ad) \\
F_{12}^{\mathbf{2}} &= d' + bc \\
F_{13}^{\mathbf{2}} &= \sin\theta (c' - bd) \\
F_{01}^{\mathbf{3}} &= \dot{b} - a' \\
F_{23}^{\mathbf{3}} &= \sin\theta (c^2 + d^2 - 1).
\end{aligned} \tag{2.62}$$

Avec ces composantes, on peut écrire la densité lagrangienne¹² associée au champ de Yang-Mills :

$$\mathcal{L}_{YM} = \sqrt{-g} g^{\mu\alpha} g^{\nu\beta} F_{\mu\nu}^{\mathbf{a}} F_{\alpha\beta\mathbf{a}}$$

de la manière suivante :

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}_{YM} &= -\frac{e^{-\mu+2\lambda}}{N} (\dot{b} - a')^2 - 2\frac{e^\mu}{N} \left\{ (\dot{c} - ad)^2 + (\dot{d} + ac)^2 \right\} \\
&\quad + 2N e^{-\mu} \left\{ (c' - bd)^2 + (d' + bc)^2 \right\} + N e^{\mu-2\lambda} (c^2 + d^2 - 1)^2.
\end{aligned} \tag{2.63}$$

Il est possible de réécrire la densité lagrangienne ci-dessus sous la forme d'un modèle de Higgs abélien à deux dimensions. En effet, définissons \mathcal{A}_α les potentiels électromagnétiques ($\alpha = 0, 1$, $\mathcal{A}_0 = a$ et $\mathcal{A}_1 = b$), dont le tenseur de Maxwell est donné par

$$f_{\alpha\beta} = \partial_\alpha \mathcal{A}_\beta - \partial_\beta \mathcal{A}_\alpha$$

(avec $\alpha, \beta = 0$ ou 1) et prenons comme doublet de Higgs du modèle le spineur réel Ψ

$$\Psi = \begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix}. \tag{2.64}$$

Il est alors aisé de vérifier que le lagrangien (2.63) se réduit à

$$\mathcal{L}_{YM} = \sqrt{-g} \left\{ \frac{1}{2} f_{\alpha\beta} f^{\alpha\beta} + e^{-2\lambda} \left[\|D_\alpha \Psi\| \|D^\alpha \Psi\| + e^{-2\lambda} (\|\Psi\|^2 - 1)^2 \right] \right\} \tag{2.65}$$

¹²A un facteur $\frac{1}{4} \sin\theta$ près qui disparaîtra dans l'action par intégration sur l'élément d'angle solide.

où on a introduit la nouvelle dérivée covariante du modèle de Higgs abélien¹³ :

$$D_\alpha(\cdot) = I\partial_\alpha(\cdot) - i\sigma_2\mathcal{A}_\alpha(\cdot). \quad (2.66)$$

Ceci achève de montrer le lien entre symétrie des champs de jauge et réduction dimensionnelle de ce champ vectoriel accompagnée de l'émergence de un ou plusieurs scalaires de Higgs.

Ecrivons à présent les équations de Yang-Mills (2.15) relatives à la connexion (2.55) :

$$\begin{aligned} & \left\{ -N e^{-\mu} (d' + bc) \right\}' + \left\{ \frac{e^\mu}{N} (\dot{d} + ac) \right\}' - N e^{-\mu} b (c' - bd) \\ & + N e^{\mu-2\lambda} d (c^2 + d^2 - 1) + \frac{e^\mu}{N} a (\dot{c} - ad) = 0 \end{aligned} \quad (2.67)$$

$$\begin{aligned} & \left\{ N e^{-\mu} (c' - bd) \right\}' - \left\{ \frac{e^\mu}{N} (\dot{c} - ad) \right\}' - N e^{-\mu} b (d' + bc) \\ & - N e^{\mu-2\lambda} c (c^2 + d^2 - 1) + \frac{e^\mu}{N} a (\dot{d} + ac) = 0 \end{aligned} \quad (2.68)$$

$$\left\{ \frac{e^{-\mu+2\lambda}}{N} (\dot{b} - a') \right\}' + 2N e^{-\mu} (c(d' + bc) - d(c' - bd)) = 0 \quad (2.69)$$

$$\left\{ \frac{e^{-\mu+2\lambda}}{N} (\dot{b} - a') \right\}' + 2\frac{e^\mu}{N} (c(\dot{d} + ac) - d(\dot{c} - ad)) = 0. \quad (2.70)$$

On remarquera que ces équations sont invariantes sous la permutation $c \rightarrow d$ et $d \rightarrow -c$. Aussi, on pourra se débarrasser de l'une de ces deux composantes du doublet de Higgs par une transformation de jauge adéquate sans pour autant changer le contenu physique des équations.

¹³ I est la matrice identité 2×2 et la norme du spineur $\|\psi\|$ vaut $\sqrt{\psi_1^2 + \psi_2^2}$. Les indices α, β sont relevés par la métrique restreinte à la partie non symétrique de l'espace-temps $g^{\alpha\beta}$.

Enfin, les composantes du tenseur énergie-impulsion de Yang-Mills (2.14) s'écrivent :

$$\begin{aligned} T_{00}^{YM} &= \frac{e^{-2\mu}}{2} (\dot{b} - a')^2 + e^{-2\lambda} \left((\dot{c} - ad)^2 + (\dot{d} + ac)^2 \right) \\ &\quad + N^2 e^{-2\mu-2\lambda} \left((c' - bd)^2 + (d' + bc)^2 \right) \\ &\quad + \frac{N^2}{2} e^{-4\lambda} (c^2 + d^2 - 1)^2, \end{aligned} \quad (2.71)$$

$$\begin{aligned} T_{11}^{YM} &= -\frac{1}{2N^2} (\dot{b} - a')^2 + e^{-2\lambda} \left((c' - bd)^2 + (d' + bc)^2 \right) \\ &\quad + \frac{e^{2\mu-2\lambda}}{N^2} \left((\dot{c} - ad)^2 + (\dot{d} + ac)^2 \right) - \frac{e^{2\mu-4\lambda}}{2} (c^2 + d^2 - 1)^2, \end{aligned} \quad (2.72)$$

$$T_{22}^{YM} = \frac{T_{33}^{YM}}{\sin^2 \theta} = \frac{e^{-2\mu+2\lambda}}{2N^2} (\dot{b} - a')^2 + \frac{e^{-2\lambda}}{2} (c^2 + d^2 - 1)^2, \quad (2.73)$$

$$T_{01}^{YM} = 2e^{-2\lambda} \left\{ (\dot{c} - ad)(c' - bd) + (\dot{d} + ac)(d' + bc) \right\}. \quad (2.74)$$

Ces composantes feront office de source de gravitation dans les équations d'Einstein (2.12). Et cette source gravitationnelle du système EYM de se décliner en plusieurs types :

- des termes purement électromagnétiques en

$$(\dot{b} - a')^2$$

mais n'agissant que dans la section non symétrique de l'espace-temps ;

- des termes purement cinétiques en

$$\dot{c}^2, \dot{d}^2$$

pour le champ de Higgs ;

- des termes de couplage en

$$a^2 c^2, b^2 c^2, \dots$$

(et idem avec d) entre le champ abélien et le champ de Higgs. Ces deux derniers types, ceux purement cinétiques et ceux de couplage, proviennent de la dérivée covariante du champ de Higgs dans (2.65) ;

- des termes de diffusion en

$$c'^2, \dots$$

des composantes scalaires ;

- des termes de dissipation en

$$\dot{c}, \dots$$

des composantes scalaires. On remarquera que ces termes disparaissent si on choisit la jauge particulière où l'une des composantes du doublet s'annule. La présente étude s'est faite exclusivement dans cette jauge pour des raisons de simplicité et il pourrait être intéressant d'étendre nos résultats au cas général (cf. chapitre 5) ;

- des termes de self-interaction en

$$c^2 + d^2 - 1$$

entre les composantes du doublet de Higgs.

4 Solutions statiques à symétrie sphérique

Avant de présenter le modèle d'univers homogène et isotrope habité par ces champs de Yang-Mills à valeurs dans $su(2)$, permettons-nous un survol non exhaustif de l'abondante littérature traitant du système EYM en 4 dimensions en vue de situer la problématique du présent travail au sein de la très prolifique recherche sur ces équations.

L'influence des symétries de l'espace-temps sur les champs de jauge a été étudiée en détails dans de nombreux articles, notamment [FM80, HEN82, BF78]. La paramétrisation des potentiels de jauge sous isotropie de l'espace a été obtenue pour la première fois par Witten [WIT77] et obtenue comme corollaire de la méthode développée par Forgacs et Manton dans [FM80]. Nous nous sommes d'ailleurs inspirés de leur article pour la rédaction du paragraphe 2.2. Pour une introduction générale à la théorie EYM et à ses principaux résultats, le lecteur pourra consulter le papier de revue [GV99] dont les références antérieures à 1999 sont assez complètes.

Les équations d'Einstein pour le champ gravitationnel en symétrie sphérique sont un grand classique et on pourra en trouver des discussions approfondies dans de nombreux ouvrages de référence, notamment [MTW73, LL61, TOL50, WEI72], avec parfois des paramétrisations plus restrictives de la métrique (2.43). Quant aux équations de Yang-Mills du groupe de jauge $SU(2)$ en symétrie sphérique, la référence [KOU95] en donne une dérivation à la fois pédagogique et minutieuse.

En ce qui concerne les résultats connus, des avancées très significatives sur le système EYM (à symétrie sphérique) ont été accomplies durant ces deux dernières décennies. On peut toutefois avancer une répartition des recherches autour de deux grands axes : les modèles asymptotiquement plats, souvent purement statiques, qui possèdent des propriétés très intéressantes pour la théorie des trous noirs et, dans une moindre proportion, les modèles

à caractère cosmologique. D'un point de vue mathématique un peu simpliste, on peut considérer ces axes comme une approche simplifiée du système EYM à symétrie sphérique dans la mesure où ils ne tiennent compte que d'une dépendance strictement spatiale ou temporelle des potentiels de jauge et de métrique.

Dans le cas d'une configuration purement statique des champs EYM¹⁴, la relation (2.69) des équations de Yang-Mills entraîne que la composante purement radiale b de la connexion s'annule¹⁵. De ce fait, et à moins de travailler dans une jauge particulière telle que la composante électrique a de la connexion s'annule également ($a \rightarrow a - \partial_t (\text{Arc tg } \frac{d}{c})$), les champs de Yang-Mills statiques à symétrie sphérique ne contiennent donc que deux degrés de liberté réels d'une variable : $a(\chi)$ et $c(\chi)$ (d étant éliminé par transformation de jauge U(1) le long de T_3).

Il est alors possible de retrouver deux solutions analytiques exactes bien connues du système EYM statique. La première est la solution de Schwarzschild bien connue où la connexion de Yang-Mills est alors purement magnétique ($a = 0$) et décrite par un unique potentiel de jauge c trivial ($c = 1$). La géométrie est alors définie par

$$e^{2\lambda} = \chi^2$$

et

$$N = e^{-2\mu} = 1 - \frac{2m}{\chi}$$

où m est une constante (la masse ponctuelle du système). La seconde est celle de Reissner-Nordström (RN) où les potentiels de jauge prennent la forme

$$a = a(\infty) + Q/\chi$$

et $c = 0$. La géométrie de l'espace-temps est alors caractérisée par les potentiels de métrique

$$e^{2\lambda} = \chi^2$$

et

$$N = e^{-2\mu} = 1 - \frac{2m}{\chi} + \frac{Q^2 + 1}{\chi^2}$$

où m et Q sont des constantes (la masse et la charge électrique, respectivement) et où la charge magnétique est de valeur unité et s'ajoute à sa consœur électrique. Cette dernière solution décrit ce que l'on appelle des *trous noirs colorés*. Elle consiste en une *incrustation abélienne* (cf. [GV99]) dans le sens où la connexion se réduit à une partie abélienne $\mathcal{A} = \text{adt} + \cos \theta d\varphi$ (dyon U(1)) multipliée par la matrice constante T_3 . Ainsi, puisque U(1)

¹⁴Toutes les fonctions ne dépendent que de la coordonnée radiale χ .

¹⁵On prendra soin d'éliminer au préalable la liberté de jauge U(1) résiduelle en annulant identiquement, par exemple, la fonction d .

est un sous-groupe de $SU(2)$, le système EYM doit contenir les solutions de la théorie Einstein-Maxwell. Cependant, à l'opposé de leurs contreparties abéliennes, les solutions de types trous noirs colorés sont instables¹⁶. Ces trous noirs colorés constituent le premier exemple de violation de la conjecture des trous noirs chauves, comme nous le verrons ci-après.

La plupart des autres solutions du système EYM statique sont seulement connues numériquement, des preuves d'existence ayant toutefois pu être démontrées (voir [SW93, SW95b, SWY93, SWYM91, SW95a]). On rencontre notamment les solutions du type *particule* et les solutions du type *trou noir*.

4.1 Solutions du type particule

Ces solutions ont été mises en évidence pour la première fois par Bartnik et McKinnon en 1988 et furent d'autant plus surprenantes qu'aucune des deux théories sous-jacentes (Einstein d'une part et Yang-Mills d'autre part), prises séparément n'exhibent de telles solutions. Celles-ci sont caractérisées par leur platitude asymptotique (pas d'énergie irradiée à l'infini) tout en étant globalement régulières et stationnaires et sont souvent appelées *solitons*, même s'il ne s'agit pas d'ondes, en vertu des propriétés non linéaires des équations qui les engendrent. Nous pouvons comprendre pourquoi en adoptant le raisonnement simple suivant.

Les solutions statiques caractérisent des états d'équilibre, c'est-à-dire des états dans lesquels les pressions totales se compensent. Or les champs de Yang-Mills sont purement répulsifs, dans la mesure où la somme de leur pressions $p_i = T_i^i$ est globalement positive

$$\sum_i p_i = -T_0^0 = \rho \geq 0,$$

en vertu de leur invariance conforme (la trace du tenseur énergie-impulsion s'annule identiquement). De ce fait, ils ne peuvent seuls exhiber de tels états d'équilibre mais ceci n'est plus vrai lorsqu'ils se couplent avec d'autres champs attractifs, tels que le champ gravitationnel (soliton de Bartnik-McKinnon) ou avec un champ de Higgs [BUR84, KB89, YAF90]. Cependant, la présence d'interactions répulsive et attractive ne constitue guère qu'une condition nécessaire mais pas suffisante comme des théorèmes de non-existence le prouvent [HES87, GV99].

¹⁶Ces trous sont dit colorés car leur charge électrique provient d'un sous-groupe abélien d'un groupe de jauge plus général, à la différence des solutions RN construites directement avec le champ électromagnétique.

La solution de Bartnik-McKinnon est caractérisée par une configuration de jauge purement magnétique :

$$a = b = 0,$$

dans la jauge $d = 0$, en vue d'éviter les solutions abéliennes incrustées décrites plus haut. De plus, les fonctions de métrique de cette solution sont partout régulières (y compris en l'origine $\chi = 0$ et sans présence d'horizon). Ces solitons sont caractérisés par trois régions distinctes, en fonction du comportement de la charge effective $Q(\chi)$ dans l'équation $N(\chi) = 1 - \frac{2m}{\chi} + \frac{Q^2(\chi)}{\chi^2}$:

- une région intérieure pour laquelle la charge effective est négligeable $Q(\chi) \approx 0$. Les potentiels de jauge et de métrique y sont approximativement constants ($c(\chi) \approx 1$, métrique plate $N \rightarrow \text{constante}$, $\mu \rightarrow 0$ si $\chi \rightarrow 0$). Le tenseur énergie-impulsion y est isotrope, les pressions radiale T_1^1 et tangentielle $T_2^2 = T_3^3$ y sont égales, ce qui correspond à l'équation d'état d'un gaz de particules relativistes $\rho c^2 = 3p$ avec $\rho \propto \chi^2$. La transition avec la région suivante est caractérisée par une grande valeur de la densité d'énergie, une rapide croissance des fonctions de métrique qui y atteignent quasiment leurs valeurs asymptotiques tandis que la charge effective atteint environ l'unité.
- une région intermédiaire dans laquelle la charge effective vaut 1. Le potentiel de jauge est en bonne approximation celui du monopole magnétique de Dirac $c = 0$ pour lequel $\rho = -p_r = p_t$ ($p_r = T_1^1$ et $p_t = T_2^2 = T_3^3$ sont les pressions radiale et tangentielle, respectivement) avec $\rho \propto \chi^{-4}$. La métrique s'approche de celle de Reissner-Nordström et la seconde zone de transition est caractérisée par une charge effective rapidement décroissante vers zéro.
- une dernière zone pour laquelle les solutions sont approximativement celles de Schwarzschild. L'intensité du champ de jauge y décroît en $1/\chi^3$ alors que les composantes du tenseur énergie-impulsion sont caractérisées par $\rho = -p_r = \frac{3p_t}{2}$ avec $\rho \propto \chi^{-6}$. La décroissance polynômiale des fonctions reflète bien l'aspect sans masse des champs de jauge.

Il existe en fait une famille infinie de solutions de ce type pour lesquelles le champ de jauge c s'annule un nombre entier n de fois entre l'origine des coordonnées et l'infini, où la valeur du champ de jauge est de $(-1)^n$. Il est important de noter que ces solutions sont instables sous perturbation [GV99].

4.2 Solutions de type trou noir

Ces solutions partagent des caractéristiques communes avec les particules de Bartnik et McKinnon. Elles sont obtenues à partir des mêmes équations, en imposant, en plus de la platitude asymptotique, l'existence d'un horizon des événements (un rayon χ_h tel que $N(\chi_h) = e^{-\mu(\chi_h)} = 0$). Cependant, cet horizon n'est guère qu'une singularité de coordonnées dans la mesure où on impose dans le même temps que tous les invariants de courbure, comme par exemple le scalaire de Kretschmann¹⁷, soient finis sur l'horizon $\chi = \chi_h$. La région extérieure à l'horizon est alors caractérisée par un champ de jauge non trivial et une métrique tendant asymptotiquement vers celle de Schwarzschild, semblable à celle des particules de Bartnik-McKinnon.

La solution générale s'obtient numériquement et est caractérisée de la manière suivante. Le champ de jauge c démarre de l'horizon avec une certaine valeur bornée et, après un nombre entier n d'oscillations autour de zéro, atteint sa valeur asymptotique de $(-1)^n$. Pendant ce temps, les composantes de la métrique croissent de manière monotone avec le rayon vecteur depuis une constante jusqu'à une certaine valeur asymptotique où la géométrie est celle de Schwarzschild. La masse apparaît alors comme une fonction de la position de l'horizon et du nombre de nœuds du champ de jauge.

En fait, nous avons affaire à des trous noirs “*chevelus*”. En effet, l'intensité du champ de Yang-Mills décroît encore en $1/\chi^3$ de sorte que l'intégrale du flux de l'intensité du champ de jauge (celle du théorème de Gauss) s'annule à l'infini entraînant que le nombre de nœuds n ne puisse pas être associé à une sorte de “*charge de Yang-Mills*” du trou noir. Ainsi, les trous noirs colorés seraient dégénérés en ce sens que la donnée de leurs masse, moment angulaire et charge électrique (et/ou magnétique) ne suffit pas entièrement à les caractériser, puisque le paramètre du nombre de nœuds du champ ne résulte en aucune charge observable. Or la conjecture “*pas de cheveux*” aurait voulu justement que les trous noirs soient caractérisés univoquement par ces grandeurs. On peut cependant montrer que tous les trous noirs de la théorie EYM, du moins les régions extérieures de ceux-ci, sont instables sous perturbation radiale [GV99].

Quant à la région intérieure ($\chi \leq \chi_h$), on prouve qu'elle ne possède pas d'horizons internes et est habitée de ce fait par une singularité de genre espace, comme le suggère d'ailleurs l'hypothèse de censure cosmique. La région intérieure se décline en trois types distincts de solutions locales, bien qu'aucun ne soit valable pour toute la région : des solutions locales avec singularité de type Schwarzschild (c et m polynômiaux en χ), avec singularité de type RN (c régulier en l'origine et $m \propto \text{constante} + 1/\chi$) et un dernier type correspondant à une métrique RN avec charge imaginaire. Les deux caractéristiques principales des solutions

¹⁷Cette quantité vaut la contraction $R_{\mu\nu\rho\sigma}R^{\mu\nu\rho\sigma}$.

intérieures sont donc qu'elles ne possèdent pas d'horizons internes et qu'elles ne présentent pas de comportement en puissance du rayon au voisinage de l'origine. Avec des méthodes d'intégration numérique, on montre que la région interne voit les fonctions de métrique et le gradient c' du potentiel de jauge osciller avec une amplitude et une fréquence fortement croissantes lorsque le système approche la singularité centrale. Sur une échelle de distance plus grande, le potentiel de jauge demeure quasiment constant. La structure oscillatoire de la région interne semble stable sous perturbation, à l'inverse de la région externe (cf. [GV99]).

Comme le lecteur l'aura sans doute remarqué, ces propriétés originales apparaissent en complet désaccord avec la physique usuelle des trous noirs et les diverses conjectures qui lui sont associées. En effet, l'existence d'un champ de Yang-Mills extérieur au trou noir et non trivialement nul viole la classification habituelle des trous noirs basée sur les théorèmes d'Hawking [HE73] ainsi que les théorèmes d'unicité des solutions de Schwarzschild et de Reissner-Nordström. Tout d'abord, la classification des trous noirs est basée sur le théorème de rigidité d'Hawking selon lequel un trou noir stationnaire est soit statique (sans horizon en rotation) soit axisymétrique. Les théorèmes d'Israel [ISR67] assurent sous des conditions très générales que la staticité implique la symétrie sphérique et partant, que les solutions de Schwarzschild et de RN sont uniques.

De même, une série de théorèmes d'unicité prouve que l'exigence de régularité de l'espace-temps à l'horizon des événements ainsi que le comportement asymptotique spécifié par la masse, la charge de Coulomb (monopoles électrique ou magnétique) et le moment angulaire déterminent complètement la solution. La conjecture selon laquelle *les trous noirs n'ont pas de cheveux* généralise ces théorèmes en prétendant que les seules caractéristiques d'un trou noir sont celles associées à une loi de Gauss, c'est-à-dire justement une masse, un moment angulaire et des charges électrique ou magnétique. Ainsi, un trou noir serait-il uniquement déterminé par ces quatre données qui fixeraient de manière univoque la forme de l'espace-temps¹⁸ et ce, quelle que soit sa composition matérielle ou le type de matière s'y engouffrant. Un trou noir aurait à peu de choses près exactement les mêmes spécifications qu'une particule élémentaire. L'idée sous-jacente à cette conjecture est que seules des symétries physiques exactes, comme les symétries de jauge, peuvent survivre à cet événement catastrophique qu'est l'effondrement gravitationnel.

Or le fait que les trous noirs EYM ne soient pas uniquement spécifiés par leurs masse, charge conservée et moment angulaire constitue une violation manifeste de la conjecture "*pas de cheveux*". En effet, les trous noirs colorés constituent une famille étiquetée par

¹⁸Solution de Schwarzschild pour un trou noir purement massif sans rotation, de Kerr s'il est en rotation, de Reissner-Nordström pour un trou noir massif et chargé sans moment angulaire et de Kerr-Newman pour un trou noir muni des trois propriétés (cf. [HE73]).

des nombres de noeuds différents du champ de jauge. De plus, certains trous noirs EYM statiques avec un horizon non dégénéré ne sont pas à symétrie sphérique [KK97], ce qui montre que les théorèmes d'Israel ne se généralisent pas au cas non abélien. Ces propriétés particulières sont purement dues au fait que les solutions statiques constituent des états liés des deux champs non massifs et non linéaires en interaction que sont la gravitation et le champ de Yang-Mills. En effet, ces solutions solitoniques ou de type trou noir n'existent pas dans la théorie minkowskienne.

Une possibilité de réconciliation entre la conjecture *pas de cheveux* et l'existence de telles solutions réside peut-être dans leur instabilité, en supposant que des trous noirs chevelus ne puissent pas être formés à l'issue d'un processus d'effondrement gravitationnel. Une autre solution pourrait être de supposer que les trous noirs colorés ne puissent pas être formés, puisque cela supposerait une disparition de leur charge topologique durant l'effondrement.

4.3 Conclusion

Ces modifications très importantes apportées à la théorie standard des trous noirs, dont nous n'avons fait qu'entrevoir les grandes lignes, ont constitué la majeure partie de l'intérêt pour l'étude de champs de Yang-Mills gravitants, en présence éventuellement d'autres champs tels que des doublets de Higgs, des dilatons, etc. Une revue récente et très complète se trouve à la référence [GV99]. Un autre pan de la recherche a été celui consacré à l'étude des cosmologies habitées par des champs de Yang-Mills. Ceci fera l'objet du rappel proposé à la section suivante.

5 Cosmologies de Yang-Mills

5.1 Quelques résultats connus

Dans le registre cosmologique, on recense également de nombreux travaux mêlant les champs de Yang-Mills aux modèles cosmologiques. Les modèles d'univers de Friedmann-Lemaître dont le régime d'expansion est dicté par des champs de Yang-Mills à valeurs dans $su(2)$ ont été traités complètement dans [GV91]. Cette solution sera explicitée au prochain paragraphe puisque nous nous attacherons à décrire le mécanisme d'instabilité gravitationnelle dans des univers de Yang-Mills à partir de celle-ci. On en trouvait déjà quelques caractéristiques au sein des références [HEN82, HOS84, CJ78, SD85]. De même, cette solution peut se généraliser à des groupes de jauge plus complexes [MM91, MMS93, BMPV91, RT97]; une approche quantique a été abordée dans [BM91, CdA94, KKLM95]. Plus récemment, Gal'tsov et al. [DGZZ02] ont étudié une généralisation des solutions FLRW avec champs de jauge à valeurs dans $su(2)$ en utilisant l'action de Born-Infeld :

$$S = -\frac{1}{4\pi} \int \left\{ \frac{R}{4G} + \beta^2 \left(\sqrt{1 + \frac{1}{2\beta^2} F_{\mu\nu}^{\mathbf{a}} F_{\mathbf{a}}^{\mu\nu}} - \frac{1}{16\beta^4} (*F_{\mu\nu}^{\mathbf{a}} F_{\mathbf{a}}^{\mu\nu})^2 - 1 \right) \right\} \sqrt{-g} d^4x \quad (2.75)$$

inspirée de la théorie des cordes. Cette action, qui se réduit à l'action EYM (2.4) pour les basses énergies ($\beta \rightarrow \infty$), n'est plus conformément invariante. L'équation d'état des champs dont la dynamique est dictée par l'action (2.75) varie entre celle d'un fluide de radiation $\rho = 3p$ aux basses énergies et celle de la limite inflationnaire $\rho = -3p$ au voisinage de la singularité initiale. L'univers démarre alors son expansion avec une accélération nulle et entre progressivement dans sa phase décélérée en tendant asymptotiquement vers la solution avec le couplage minimal (2.4) lorsque l'énergie est suffisamment diluée que pour rendre les termes non linéaires de (2.75) négligeables. Les champs de jauge, quant à eux, oscillent de la même manière que dans le cas du couplage minimal, à ceci près que leurs oscillations sont amorties près de la singularité.

Quant aux modèles cosmologiques anisotropes, ils exhibent des caractéristiques chaotiques dans le secteur de jauge alors que la partie géométrique s'isotropise au cours du temps grâce aux champs de Yang-Mills (voir les références [BL98, DK96, DK97, SCH99]). Enfin, on signalera également que des solutions exactes du système EYM avec une métrique inhomogène et dépendante du temps ont été obtenues dans [SCK00], au prix d'hypothèses contraignantes sur la métrique et les potentiels de jauge considérés.

Notre approche ici se voudra plus générale en ce sens que notre objectif est de dériver des solutions numériques du système EYM à symétrie sphérique dépendant du temps en se gardant, dans la mesure du possible, de recourir à des hypothèses contraignantes. Cependant, la complexité des équations EYM ne se prête pas aisément à l'intégration numérique

directe. C'est pourquoi nous allons les remettre sous la forme d'un système du premier ordre par rapport au temps grâce à une approche hamiltonienne du formalisme EYM. Ceci fera l'objet du chapitre suivant.

5.2 La solution homogène et isotrope de Gal'tsov-Volkov

Réolvons à présent les équations EYM pour un univers homogène et isotrope de Friedmann-Lemaître, caractérisé par la métrique

$$ds^2 = R^2(t) \{-dt^2 + d\chi^2 + \Sigma^2(\chi)d\Omega^2\}, \quad (2.76)$$

où

$$\Sigma(\chi) = \begin{cases} \sin \chi & (k = +1), \\ \chi & (k = 0), \\ \sinh \chi & (k = -1), \end{cases} \quad (2.77)$$

pour les modèles d'univers fermé ($k = +1$), plat ($k = 0$) et ouvert ($k = -1$), respectivement et où $R(t)$ est appelé le facteur d'expansion. Nous avons choisi ici de travailler dans la jauge conforme $N(\chi, t) = R(t)$ en vue de faire apparaître l'invariance d'échelle des équations de manière manifeste¹⁹. Les potentiels de jauge doivent à présent obéir au précepte d'homogénéité du cosmos, c'est-à-dire que la connexion doit être en définitive invariante sous le groupe G_6 à six paramètres d'isométries spatiales, qui comprend non seulement les rotations mais également les translations.

Partant de la paramétrisation de Witten (2.55), on montre que la jauge suivante amène la plus grande simplification [GV91, DGZZ02]

$$\begin{aligned} a(\chi, t) &= -\frac{\dot{\sigma}(t)\Sigma(\chi)\sqrt{1-k\Sigma^2(\chi)}}{1+\Sigma^2(\chi)(\sigma^2(t)-k)} \\ b(\chi, t) &= \frac{\Sigma^2(\chi)\sigma(t)(\sigma^2(t)-k)}{1+\Sigma^2(\chi)(\sigma^2(t)-k)} \\ c(\chi, t) &= \sqrt{1+\Sigma^2(\chi)(\sigma^2(t)-k)}, \end{aligned} \quad (2.78)$$

la fonction σ dépendant uniquement du temps. Le dernier champ de jauge d peut être annulé par transformation de jauge (symétrie de jauge U(1) résiduelle). On trouvera à l'annexe C les détails de la dérivation de la paramétrisation (2.78) ainsi que quelques commentaires au sujet du choix de jauge $d = 0$ et de son incidence sur la dynamique des champs de Yang-Mills homogènes et isotropes.

¹⁹Plus tard, nous utiliserons pour le champ scalaire la jauge synchrone $N = 1$. Le temps synchrone τ sera donc donné par la relation $d\tau = R(t)dt$.

Dans la jauge (2.78), les équations de Yang-Mills (2.67-2.70) se réduisent à présent à la seule relation

$$\ddot{\sigma} + 2\sigma(\sigma^2 - k) = 0 \quad (2.79)$$

dans laquelle l'invariance conforme est manifeste (elle ne dépend pas du facteur d'expansion $R(t)$). La relation (2.79) admet comme intégrale première (en supposant $\dot{\sigma} \neq 0$) :

$$\dot{\sigma}^2 + (\sigma^2 - k)^2 = \mathcal{E}, \quad (2.80)$$

avec \mathcal{E} une constante positive ou nulle. Les composantes du tenseur énergie-impulsion (2.71-2.74) sont alors

$$\begin{aligned} T_0^0 &= -\frac{3\mathcal{E}}{2R^4} \\ T_1^1 &= \frac{\mathcal{E}}{2R^4} \\ T_2^2 = T_3^3 &= \frac{\mathcal{E}}{2R^4} \\ T_0^1 &= 0 \end{aligned} \quad (2.81)$$

qui correspond bien à l'équation d'état d'un fluide parfait de radiation $\rho = 3p$. En effet, dans la signature de métrique $(-, +, +, +)$, on a que $T_0^0 = -\rho$. De plus, dans le cas homogène, et dans ce cas seulement, les pressions radiale $T_1^1 = p_r$ et tangentielles $T_2^2 = T_3^3 = p_t$ sont égales. L'équation d'état barotrope $\rho = 3p$ qui en résulte, reliquat observable de l'invariance conforme des champs de Yang-Mills, permet de résoudre aisément les équations d'Einstein pour la métrique (2.76) (cf. [LL61, AND70]) :

$$\begin{aligned} R(t) &= \beta t \quad (k = 0) \\ R(t) &= \beta \cos t \quad (k = +1) \\ R(t) &= \beta \sinh t \quad (k = -1), \end{aligned} \quad (2.82)$$

($\beta = \sqrt{\frac{k}{2}\mathcal{E}}$) ou encore, dans la jauge synchrone $N = 1$ ($d\tau = R(t)dt$) :

$$\begin{aligned} R(\tau) &= \sqrt{2\beta\tau} \quad (k = 0) \\ R(\tau) &= \sqrt{\beta^2 - \tau^2} \quad (k = +1) \\ R(\tau) &= \sqrt{\tau^2 - \beta^2} \quad (k = -1). \end{aligned} \quad (2.83)$$

A noter que, dans cette dernière jauge, les équations de Yang-Mills s'écrivent

$$R^2 \frac{d^2\sigma(\tau)}{d\tau^2} + \frac{dR}{d\tau} R \frac{d\sigma(\tau)}{d\tau} + 2\sigma(\sigma^2 - k) = 0 \quad (2.84)$$

dont l'intégrale première vaut à présent

$$R^2 \left(\frac{d\sigma}{d\tau} \right)^2 + (\sigma^2 - k)^2 = \mathcal{E}. \quad (2.85)$$

L'équation (2.79) gouvernant la dynamique de la partie temporelle des champs de jauge σ et son intégrale première (2.80) représentent l'oscillation d'une particule — que nous baptiserons *particule de Gal'tsov-Volkov* dans ce texte — dans le potentiel $V(\sigma) = (\sigma^2 - k)^2$. Bien que l'équation (2.80) admette une solution analytique en termes de fonctions elliptiques, nous nous contenterons de l'illustrer par quelques graphes (Figures 2.1 à 2.8). Il importe de noter que nous prenons par convention l'origine temporelle à un temps postérieur au Big Bang où nous posons le facteur d'expansion R égal à l'unité. Le taux d'expansion initial est alors uniquement caractérisé par la densité homogène au départ que nous dénoterons²⁰ par ρ_0^B .

Les cosmologies homogènes et isotropes d'Einstein-Yang-Mills forment donc une famille caractérisée uniquement par la valeur de la constante \mathcal{E} pour chaque signature de la géométrie ($k = +1, 0, -1$). Cette constante représente *l'énergie totale* de la particule de Gal'tsov-Volkov dans la relation (2.79), énergie conservée en vertu de (2.81) et de l'équation de conservation $\nabla_\mu T_0^\mu = 0$ qui admet comme solution $\rho R^4 = \text{constante}$. Dans le cas d'une cosmologie fermée ($k = +1$), cette constante \mathcal{E} détermine le rayon maximal de l'univers. La particule oscille alors entre deux minima topologiques (cf. Figure 2.1) que sépare un point selle. Pour $\mathcal{E} = 1$ (cf. [HOS84]), ce point constitue une solution statique instable et non triviale des équations de Yang-Mills et correspond en fait à ce que l'on appelle un sphaleron, solution méta-stable des théories de jauge en symétrie sphérique. Ses propriétés topologiques peuvent être utilisées afin d'évaluer le taux de production de fermions par anomalie axiale lors de la transition entre les deux secteurs topologiques $\sigma = \pm 1$ (cf. [VOL94, DIN94, GS94]). Pour la même valeur unité de la constante \mathcal{E} , la particule de Gal'tsov-Volkov demeure dans un état d'équilibre stable également dans une géométrie ouverte ($k = -1$). On notera également que, dans cette géométrie, il faut $\mathcal{E} \geq 1$ obligatoirement en vue d'avoir une solution réelle, de même que $\mathcal{E} \geq 0$ pour les deux autres géométries.

Dans les figures qui suivent, l'évolution de $\sigma(t)$ a été arrêtée au temps du Big Crunch (Figures 2.2 et 2.3) pour les cosmologies fermées. Ces solutions sont données ici en guise d'illustration, nous rechercherons par la suite des solutions inhomogènes et dépendantes du temps autour de l'Ansatz (2.78) à (2.80), en vue de caractériser l'instabilité gravitationnelle des cosmologies de Yang-Mills.

²⁰L'exposant B signifie *background* pour dénoter le fond cosmologique homogène sur lequel nous ferons croître, plus tard, des fluctuations.

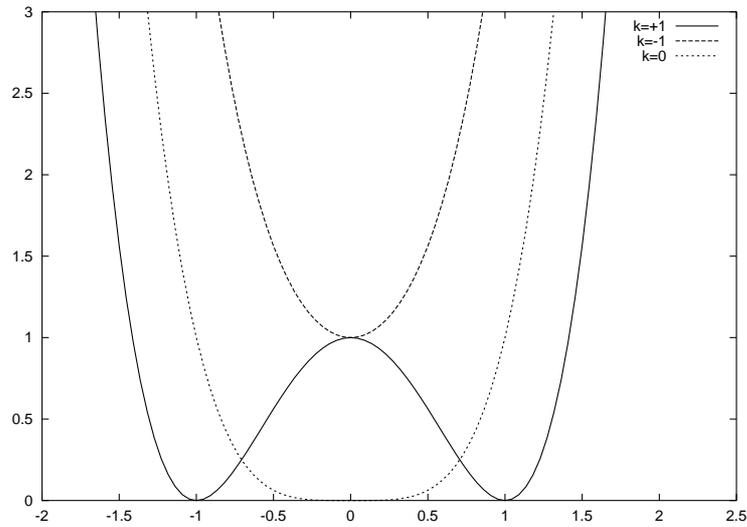


Figure 2.1 – Potentiel d'interaction de la particule de Gal'tsov-Volkov σ en fonction de la signature de la géométrie (cf. (2.79))

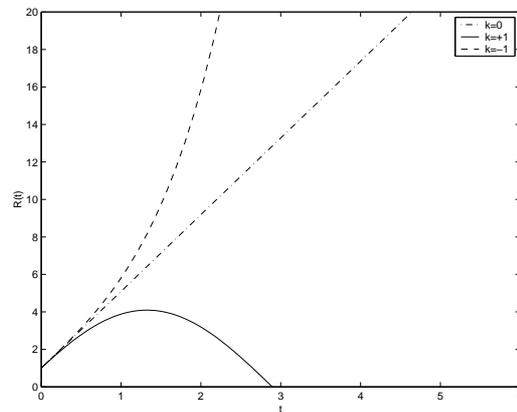


Figure 2.2 – Facteurs d'expansion $R(t)$ pour les différentes géométries ($\rho_B = 2$, $R(0) = 1$, $\kappa = 8\pi$)

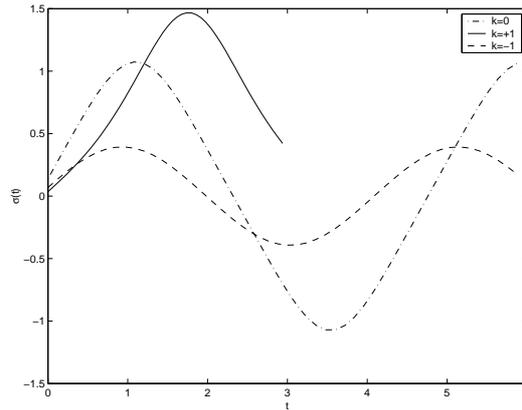


Figure 2.3 – Evolution au cours du temps de l'état de la particule de Gal'tsov-Volkov $\sigma(t)$ correspondant aux facteurs d'expansion de la figure 2.2 ($\sigma(0) = 0$)

6 Conclusion

Après avoir présenté comment les équations d'Einstein-Yang-Mills décrivent la dynamique d'une théorie de jauge dans un espace-temps courbé par la présence de celle-ci, nous avons discuté comment introduire dans ce contexte diverses symétries en vue de simplifier le problème général. Puis, nous avons particularisé toutes ces notions au cas de la symétrie sphérique, puisque nous étudierons des modèles isotropes jusqu'au chapitre 6 (inclu). Dans le paragraphe 4, nous avons repris quelques-uns des résultats principaux de la littérature sur ce sujet et situé notre approche originale parmi ceux-ci.

En effet, notre but est d'étudier l'instabilité gravitationnelle de champs de Yang-Mills à valeurs dans $su(2)$, dans l'approximation d'un univers isotrope. Pour ce faire, il nous faut non seulement connaître les équations EYM à symétrie sphérique mais également la solution qui décrit un univers homogène et isotrope contenant uniquement ces champs. Celle-ci a été décrite dans le détail au paragraphe précédent.

Forts de ces acquis, il nous faut à présent nous attaquer à dériver une solution des équations EYM autour de celle de Gal'tsov-Volkov si nous voulons jamais percer les mystères de l'instabilité gravitationnelle du champ de jauge. Notre démarche originale a été de ne pas intégrer directement les équations EYM présentées dans ce chapitre mais d'utiliser un artifice qui les fera apparaître plus affables, en recourant à la formulation hamiltonienne des équations susmentionnées. De plus, il nous faudra également introduire la théorie usuelle de l'instabilité gravitationnelle avant même de nous plonger dans le mécanisme équivalent pour les champs de jauge. C'est pourquoi nous proposons au lecteur deux détours un peu longs mais nonobstant indispensables, le premier concernant le formalisme hamiltonien de

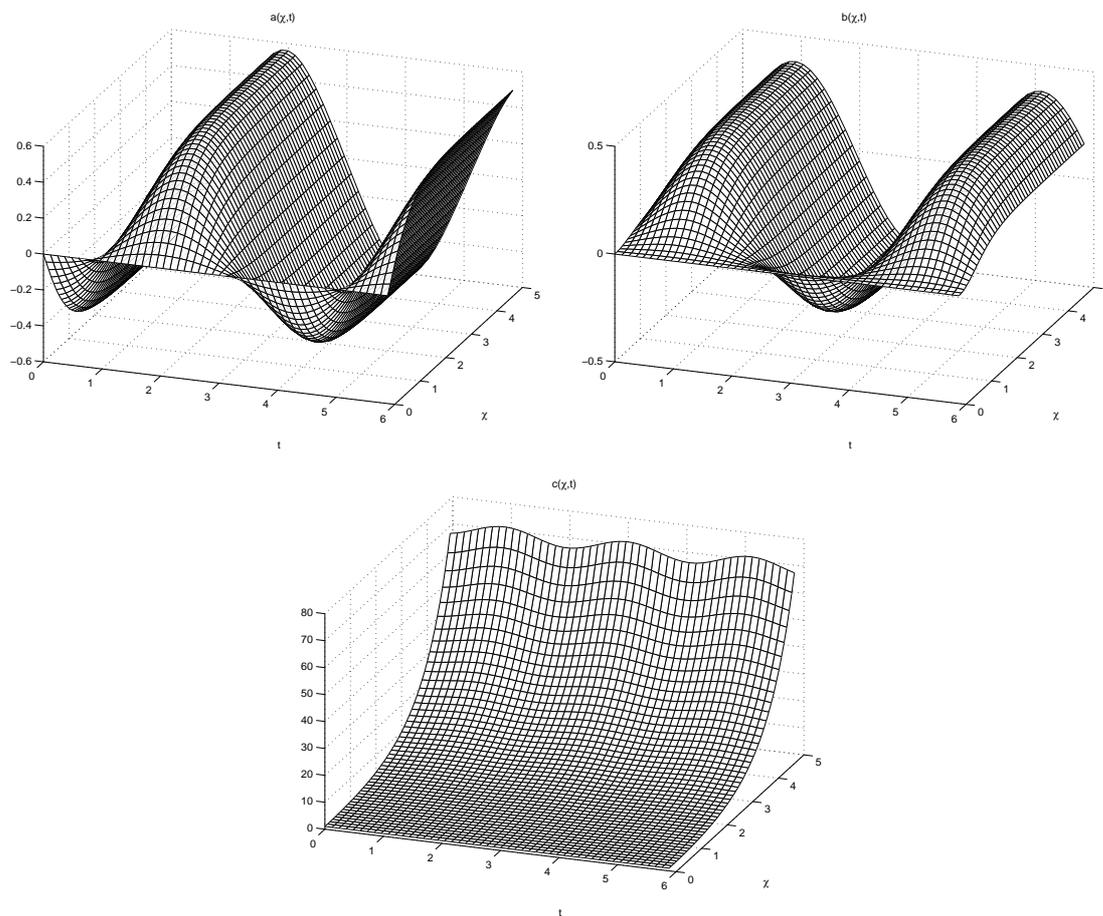


Figure 2.4 – Composantes temporelle, radiale et angulaire a , b , c des champs de jauge pour une géométrie ouverte ($k = -1$) tels que décrits dans la jauge (2.78) (mêmes paramètres qu'aux figures précédentes)

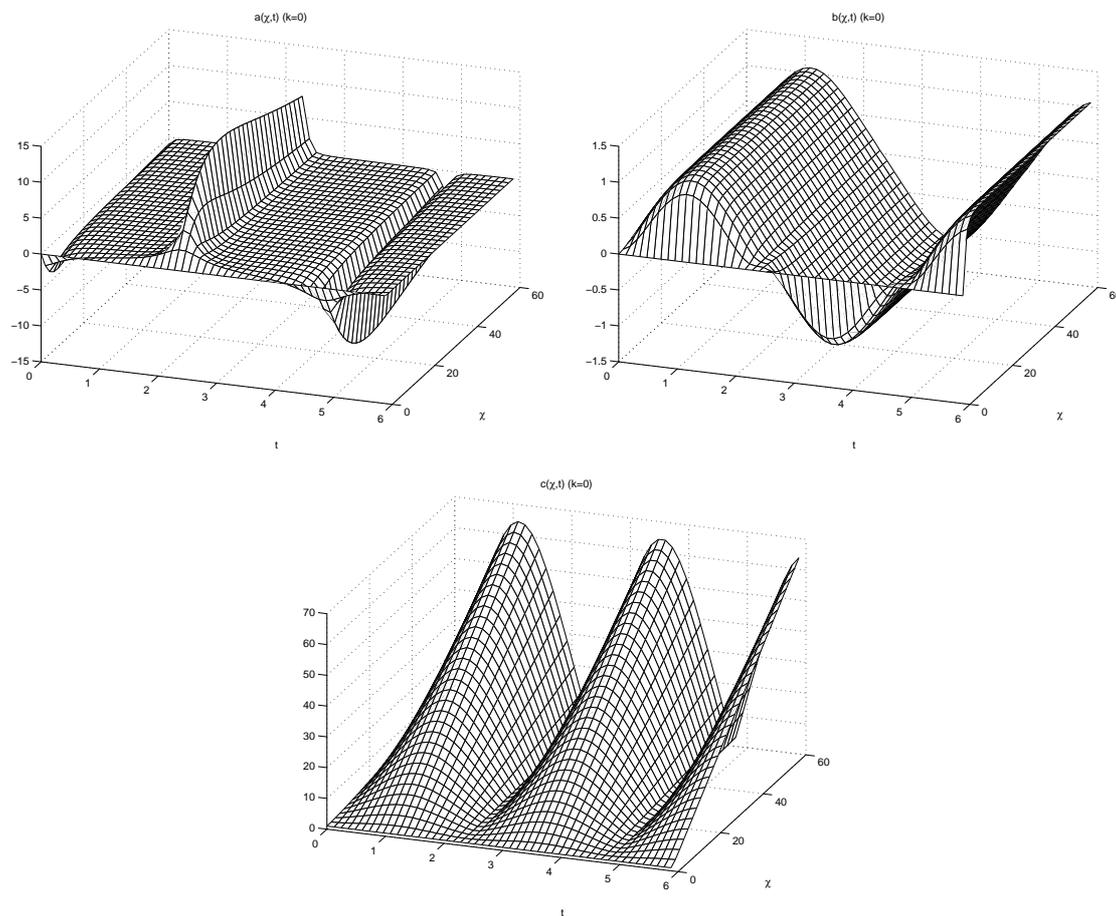


Figure 2.5 – Composantes temporelle, radiale et angulaire a , b , c des champs de jauge pour une géométrie plate ($k = 0$) tels que décrits dans la jauge (2.78) (mêmes paramètres qu’aux figures précédentes)

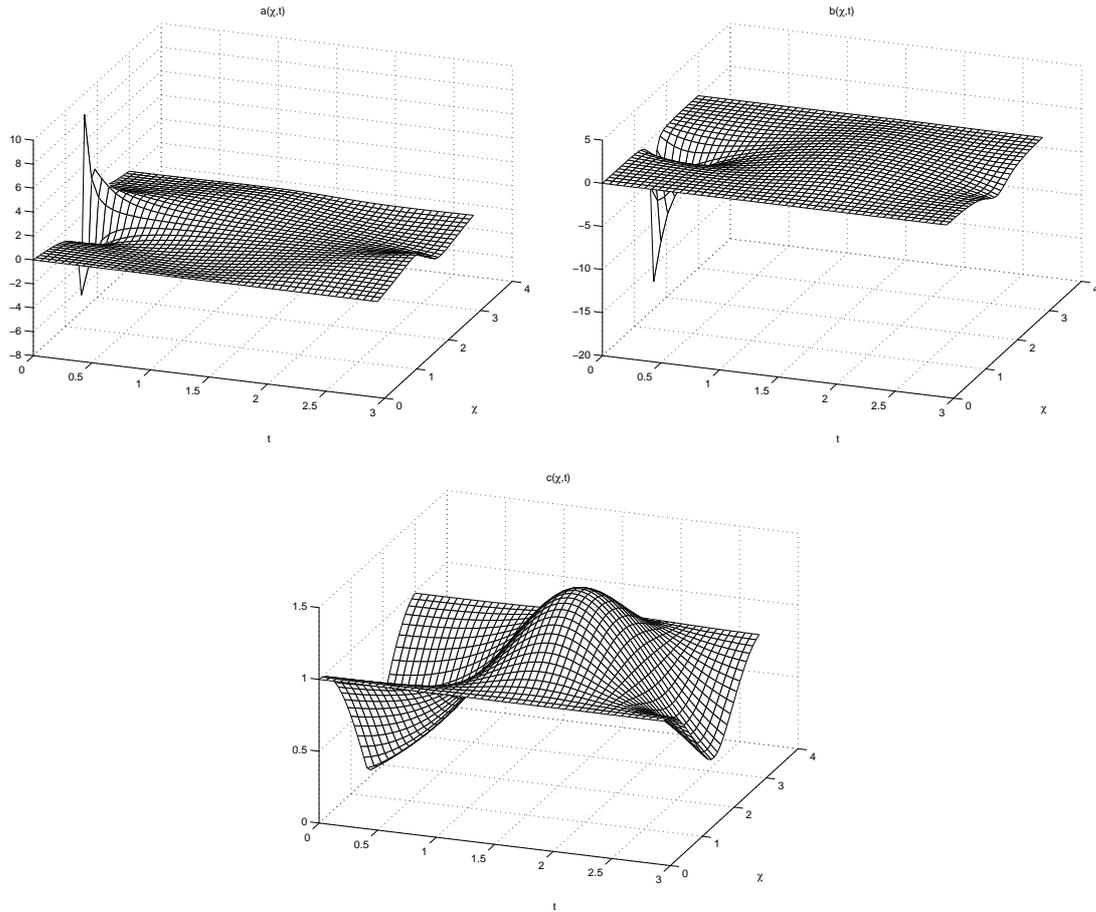


Figure 2.6 – Composantes temporelle, radiale et angulaire a , b , c des champs de jauge pour une géométrie fermée ($k = +1$) tels que décrits dans la jauge (2.78) (mêmes paramètres qu'aux figures précédentes)

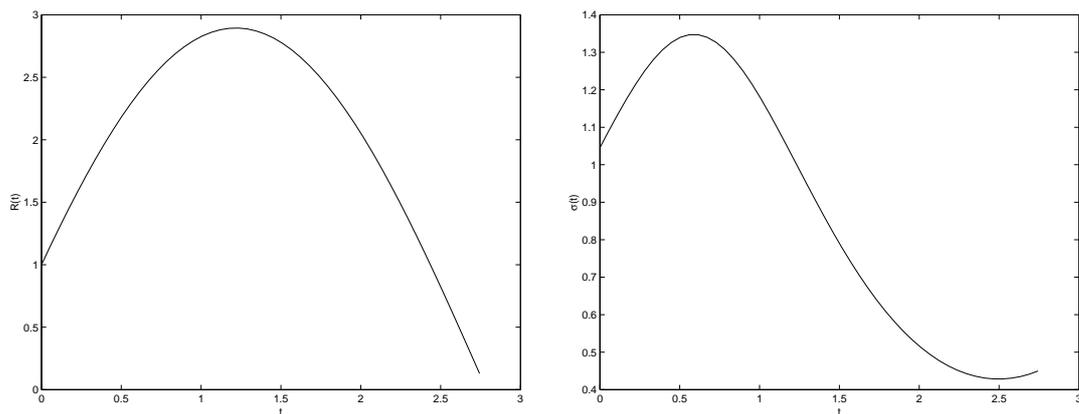


Figure 2.7 – Facteur d'expansion $R(t)$ et évolution de la particule de Gal'tsov-Volkov $\sigma(t)$ coincée autour du minimum topologique $\sigma_{MIN} = +1$ (cf. Figure 2.1, $\rho_B = 1$ $\sigma_0 = 1$)

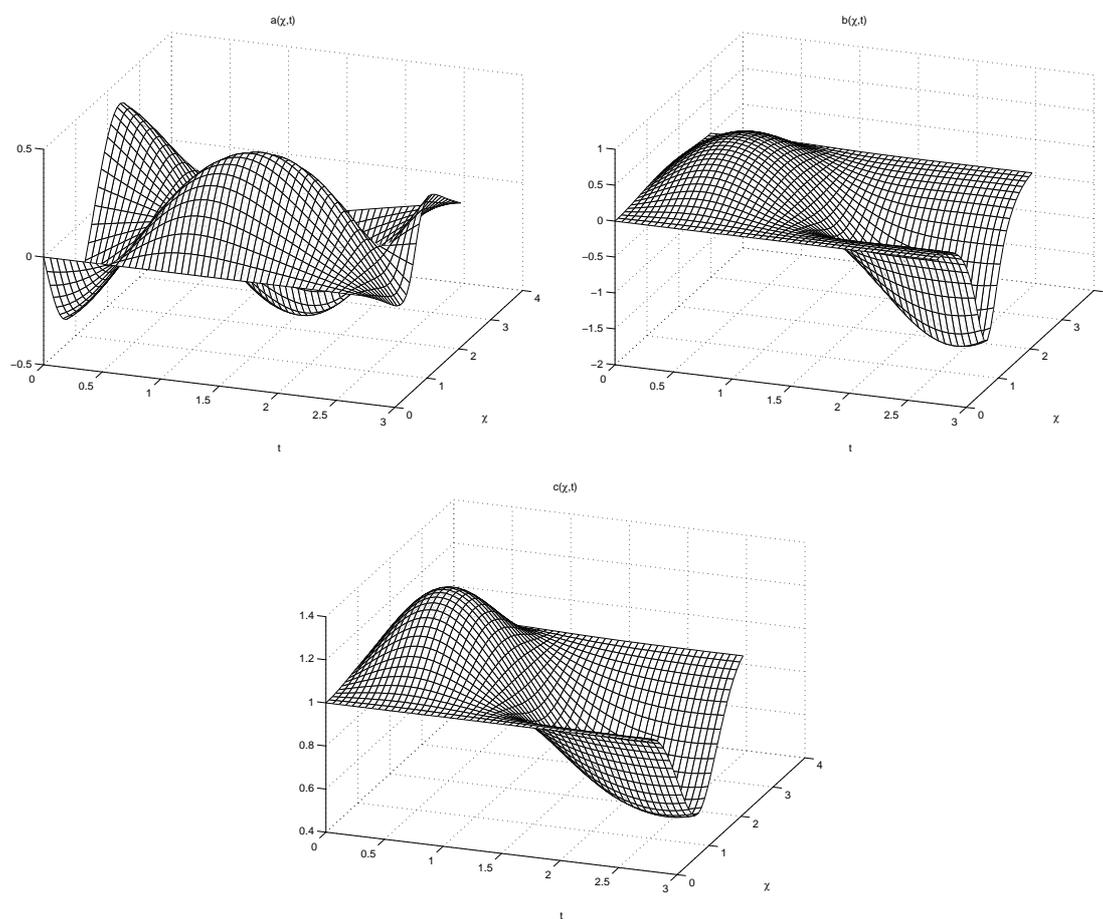


Figure 2.8 – Composantes temporelle, radiale et angulaire a , b , c des champs de jauge pour la particule oscillant dans autour du minimum topologique de la Figure 2.7 (univers fermé)

la théorie vue dans ce chapitre — ce sera notre chapitre 3, et le second, notre chapitre 4, qui introduira le lecteur au mécanisme d'instabilité gravitationnelle en général.

Chapitre 3

Le système Einstein-Yang-Mills (EYM) en formalisme hamiltonien

"To gaze up from the ruins of the oppressive present towards the stars is to recognise the indestructible world of laws, to strengthen faith in reason, to realise the 'harmonia mundi' that transfuses all phenomena, and that never has been, nor will be, disturbed."

H. Weyl, préface de *"Space Time Matter"*, 1919.

Sommaire

1	Approche hamiltonienne de la relativité générale	78
2	Traitement hamiltonien des équations de YM	84
3	Système EYM hamiltonien en symétrie sphérique	88
3.1	Secteur gravitationnel et conditions de jauge	88
3.2	Secteur de jauge	90
4	Conclusion	93

1 Approche hamiltonienne de la relativité générale

Historiquement, une approche hamiltonienne de la théorie de la gravitation d'Einstein avait été tentée dès le début des années 30, dans le but avoué de lui appliquer toute la machinerie de la mécanique quantique. Or ceci n'est pas immédiat en vertu de la covariance de la théorie qui met sur le même pied les variables spatiales et temporelle. En effet, une approche hamiltonienne impliquerait de devoir choisir au préalable un paramètre temporel.

Toutefois, en relativité générale, le temps est une coordonnée qui ne se distingue pas de ses consœurs spatiales. Les équations du champ de gravitation sont parfaitement invariantes sous un mélange quelconque de coordonnées et donc un choix arbitraire d'une direction temporelle briserait en quelque sorte la covariance de la théorie en "*orientant*" les trajectoires dans l'espace-temps. De plus, la topologie résultante d'un découpage $3 + 1$ est celle d'un produit cartésien de la droite réelle avec une variété tridimensionnelle quelconque (cf. [HAW79]), ce qui restreint considérablement les topologies possibles en relativité générale en excluant par exemple les boucles de temps comme celles contenues dans les univers de Gödel¹.

De plus, en attribuant de la sorte au temps le caractère absolu qu'il revêt usuellement en formalisme hamiltonien, en le rendant indépendant de ses comparses spatiaux, on agrandit erronément l'espace de phase du système physique considéré. Il convient alors de compenser l'erreur introduite artificiellement par le choix d'un paramètre temporel absolu en introduisant des contraintes additionnelles reliant les variables à leurs moments conjugués.

Une fois les coordonnées fixées, la relativité générale (RG) se formule alors comme un système hamiltonien sous contraintes. Ces dernières expliquent comment l'espace est courbé, à un moment fixé, par la présence de matière-énergie. Les équations d'Hamilton, quant à elles, dictent l'évolution de la courbure, et donc du champ gravifique lui-même, au cours du temps. La gravitation elle-même peut donc être considérée comme l'histoire de la géométrie d'une hypersurface spatiale dans l'espace-temps. En vue de construire un tel champ gravitationnel, on doit tout d'abord se fixer un choix de coordonnées (liberté de jauge de la RG) avant de résoudre le *problème aux valeurs initiales* — connu également sous le nom de *problème de Cauchy* — et d'entreprendre l'intégration des équations dynamiques le long des trajectoires du système de référence choisi. En présence de matière, on veillera à ajouter le problème aux valeurs initiales (si les champs matériels engendrent une représentation non triviale du groupe de Lorentz) et les équations d'évolution régissant la dynamique relativiste du champ matériel source de gravité.

¹Or cette topologie compacte pour le temps est de grande importance en gravitation quantique pour décrire notamment les diagrammes en boucles de fermions.

La décomposition 3+1 de l'espace-temps (cf. [MTW73, LAF97, YOR78, SUN82]) s'effectue au moyen des équations de Gauss-Codazzi en séparant celui-ci en une famille d'hypersurfaces de genre espace paramétrisées par une variable temporelle. Ces tranches spatiales, nommons-les Σ , définissent ainsi une stratification de l'espace-temps et peuvent être vues localement comme les surfaces de niveau d'une fonction scalaire : le temps propre. La description de l'espace-temps en termes de cette stratification dépend du choix des données initiales sur la 3-surface Σ_0 (problème de Cauchy) et de la construction de la famille d'hypersurfaces $\Sigma(t)$ à partir de la propagation des données initiales d'une tranche à l'autre via les équations du mouvement. Sur la Figure 3.1, on considère deux hypersurfaces infi-

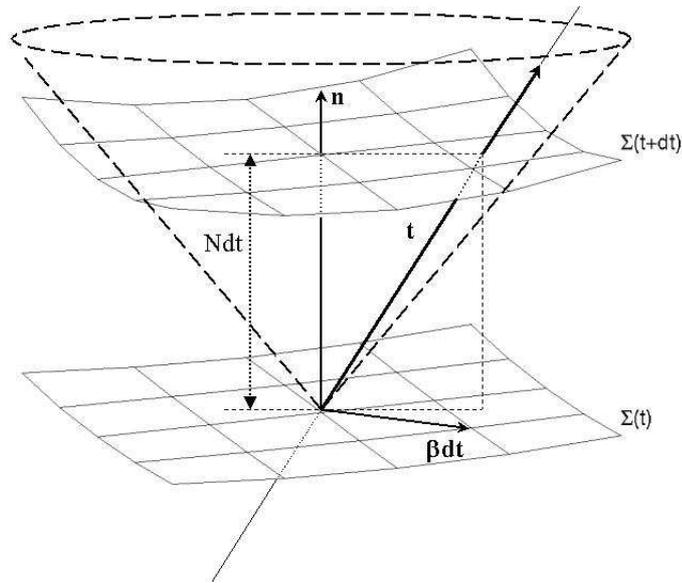


Figure 3.1 – Deux tranches infinitésimalement proches de la décomposition 3 + 1 de l'espace-temps. Le vecteur “temps” est donné comme combinaison linéaire du vecteur normal n et du shift vecteur βdt . Ce dernier est tangent aux hypersurfaces et représente la liberté de choix de coordonnées spatiales qui résulte de la covariance de la théorie sur chacune d'elles. La distance entre chaque hypersurface est l'élément de temps propre $d\tau = N dt$. La figure représente également un cône de lumière centré sur l'observateur dont on a représenté le temps propre. (D'après J. YORK Jr [YOR78].)

nitésimalement proches $\Sigma(t)$ et $\Sigma(t + dt)$, chacune dotée d'une 3-métrie $g_{ij}(t, x^k)$ ². On peut réécrire la métrique de l'espace-temps $ds^2 = g_{\mu\nu}dx^\mu dx^\nu$ sous la forme

$$ds^2 = (-N^2 + N_i N^i) dt^2 + 2N_i dx^i dt + g_{ij} dx^i dx^j, \quad (3.1)$$

²Nous rappelons que les indices latins sont uniquement spatiaux alors que leurs équivalents grecs sont spatio-temporels.

dans laquelle les composantes N et N^i sont appelées les fonctions *lapse* et *shift*, respectivement. La stratification est décrite localement par une fonction scalaire τ telle que la 1-forme $\Omega = d\tau$ de composantes $\Omega_\mu = \tau_{;\mu}$ ait pour norme

$$\|\Omega\|^2 = g^{\alpha\beta}\Omega_\alpha\Omega_\beta = -N^{-2}.$$

Ceci implique que la fonction lapse est strictement positive. Le temps propre τ se définit comme le temps qui s'écoule pour un observateur au repos dans les tranches Σ . Le vecteur unitaire normal aux hypersurfaces est donné par ses coordonnées

$$n^\alpha = -N g^{\alpha\beta}\tau_{;\beta}$$

et pointe donc localement dans la direction des temps propres croissants. Ce vecteur peut également être interprété comme la quadri-vitesse des observateurs comobiles³ dans les hypersurfaces Σ . Un vecteur “*temps*” est alors n'importe quel vecteur défini par $t_\alpha = N n_\alpha + N_{,\alpha}$, puisque $N_{,i}$ est un vecteur de genre espace, tangent aux hypersurfaces et donc $N^\alpha n_\alpha = 0$. Ainsi, le vecteur *shift* décrit comment le système de coordonnées dans l'hypersurface $\Sigma(t + \delta t)$ a été translaté par rapport au système de coordonnées de $\Sigma(t)$ tandis que la fonction *lapse* représente la séparation en temps propre entre les deux hypersurfaces, mesurée dans la direction normale de $\Sigma(t + dt)$.

Nous disposons dès lors en chaque point d'un vecteur spatial purement arbitraire N^i qui représente les degrés de liberté disponibles dans la description de l'espace-temps une fois que la stratification (et le temps propre τ) a été prescrite. Au cours de l'évolution des hypersurfaces, il représente la correction à apporter au système de coordonnées spatiales d'une tranche à l'autre, correction arbitraire, propre à chaque tranche, et qu'il conviendra d'exploiter en vue d'éliminer d'éventuelles et indésirables singularités. La liberté de jauge de la relativité générale s'exprime alors par le choix des fonctions *lapse* et *shift* qui fixent définitivement les coordonnées de la stratification.

Une fois la séparation 3 + 1 introduite, l'approche suggérée par Arnowitt, Deser et Misner (ADM) [ADM59, ADM62] consiste à réécrire l'action d'Einstein-Hilbert ($\Lambda = 0$) :

$$S = \int \mathcal{L}_{EH} d^4x = -\frac{1}{2\kappa} \int \sqrt{-g} R d^4x$$

sous une forme faisant explicitement apparaître les contraintes du formalisme hamiltonien⁴

$$S = \int \iiint (\pi^{ij} \partial_0 g_{ij} - N^\mu \mathcal{H}_\mu) dt d^3x, \quad (3.2)$$

³Que l'on nommera observateurs eulériens.

⁴A la 3-divergence d'une fonction près, que l'on suppose évanescence aux confins des sections spatiales Σ . Pour une discussion des termes de surface sur les bords de l'espace-temps, on consultera [SUN82] et ses références.

où les composantes g_{ij} de la 3-métrique sur les sections spatiales sont les variables canoniques, les π^{ij} , définis par $\pi^{ij} = \frac{\partial \mathcal{L}_{EH}}{\partial_0 g_{ij}}$, sont leurs moments canoniquement conjugués et où $\mathcal{H}_\mu = (\mathcal{H}, \mathcal{H}_i)$ est le vecteur des générateurs infinitésimaux des transformations de coordonnées d'une hypersurface à l'autre (\mathcal{H} est appelé le super-hamiltonien et génère les déformations normales des hypersurfaces spatiales tandis que les \mathcal{H}_i sont les super-moments et génèrent les déformations tangentielles des strates). Les hypersurfaces sont alors déterminées par le tenseur de courbure intrinsèque ${}^{(3)}R_{ij}$ (tenseur de Ricci à 3 dimensions) et par celui de courbure extrinsèque K_{ij} défini à partir des symboles de Christoffel de seconde espèce :

$$K_{ij} = -N\Gamma_{ij}^0. \quad (3.3)$$

Ce tenseur décrit comment les hypersurfaces $\Sigma(t)$ doivent être incrustées au sein de l'espace-temps. Les moments conjugués peuvent s'écrire en termes des composantes de ce tenseur de courbure extrinsèque comme

$$\pi^{ij} = \sqrt{{}^{(3)}g} (g^{ij} K_l^l - K^{ij}). \quad (3.4)$$

L'action (3.2) est celle d'un formalisme hamiltonien sous contraintes où il faut considérer les fonctions lapse N et shift N_i comme les multiplicateurs de Lagrange du problème variationnel. Le super-hamiltonien \mathcal{H} et les super-moments \mathcal{H}^i sont donnés par les expressions suivantes

$$\mathcal{H} = -\sqrt{{}^{(3)}g} \mathcal{R} - \frac{1}{\sqrt{{}^{(3)}g}} \left(\frac{1}{2} (\pi_i^i)^2 - \pi_{ij} \pi^{ij} \right), \quad (3.5)$$

$$\mathcal{H}^i = -2\pi_{|j}^{ij} \quad (3.6)$$

où ${}^{(3)}g$ indique le déterminant de la 3-métrique et où \mathcal{R} désigne la contraction du 3-tenseur de Ricci sur ces mêmes hypersurfaces. A partir de l'action (3.2), on peut obtenir l'équivalent hamiltonien (sous contraintes) des 10 équations d'Einstein de la gravitation (2.12). En effet, la variation de (3.2) par rapport aux multiplicateurs de Lagrange (N, N^i) fournit les quatre contraintes qui, en présence de matière, dicteront comment se courbent les hypersurfaces à un instant donné en fonction de la distribution de matière et d'énergie tandis que la variation par rapport aux variables et à leurs moments conjugués fourniront six autres équations régissant l'évolution de cette géométrie fixée par les contraintes.

En présence de matière, l'action totale se réécrit

$$S_{total} = S_{EH} + S_{mat}$$

avec

$$S_{mat} = \int \mathcal{L}_{mat} \sqrt{-g} d^4x,$$

ce qui induit des termes de sources dans les équations d'Einstein par l'intermédiaire du tenseur énergie-impulsion

$$T_{\mu\nu} = \frac{2}{\sqrt{-g}} \left\{ \frac{\partial(\sqrt{-g}\mathcal{L}_{mat})}{\partial g^{\mu\nu}} - \frac{\partial}{\partial x^\rho} \frac{\partial(\sqrt{-g}\mathcal{L}_{mat})}{\partial g_{,\rho}^{\mu\nu}} \right\}.$$

En outre, dans le cas où la matière qui interagit gravitationnellement admet ses propres contraintes (champ de spin supérieur à 0, qui se transforme non trivialement sous le groupe de Lorentz), les contraintes $\mathcal{H}_\mu \approx 0$ se verront modifiées par l'ajout des contraintes matérielles : $\mathcal{H}_\mu = \mathcal{H}_\mu^G + \mathcal{H}_\mu^M$. L'additivité des contraintes est présente dans la plupart des théories physiques (cf. [SUN82]), comme ce sera le cas des champs de Yang-Mills que nous examinerons au paragraphe suivant.

En définitive, les contraintes purement gravitationnelles s'écrivent (cf. [LAF97]) :

$$\mathcal{H} \equiv -\sqrt{{}^{(3)}g}\mathcal{R} - \frac{1}{\sqrt{{}^{(3)}g}} \left(\frac{1}{2} (\pi_i^i)^2 - \pi_{ij}\pi^{ij} \right) = -2\kappa N^2 \sqrt{{}^{(3)}g} T^{00} \quad (3.7)$$

$$\mathcal{H}^i \equiv -\pi_{|j}^{ij} = \kappa N \sqrt{{}^{(3)}g} (N^i T_{00} + T^{0i}) \quad (3.8)$$

alors que les équations d'Hamilton sont

$$\partial_0 g_{ij} = \frac{2N}{\sqrt{{}^{(3)}g}} \left(\pi_{ij} - \frac{1}{2} \pi_k^k g_{ij} \right) + (N_{i|j} + N_{j|i}) \quad (3.9)$$

$$\begin{aligned} \partial_0 \pi^{ij} &= -N \sqrt{{}^{(3)}g} \left({}^{(3)}R^{ij} - \frac{1}{2} g^{ij} \mathcal{R} \right) + \frac{N}{2\sqrt{{}^{(3)}g}} g^{ij} \left(\pi^{kl} \pi_{kl} - \frac{1}{2} (\pi_k^k)^2 \right) \\ &\quad - \frac{2N}{\sqrt{{}^{(3)}g}} \left(\pi^{ik} \pi_k^j - \frac{1}{2} \pi_k^k \pi^{ij} \right) + \sqrt{{}^{(3)}g} (N^{,ij} - g^{ij} g^{kl} N_{,kl}) + (\pi^{ij} N^k)_{,k} \\ &\quad - N_{,k}^i \pi^{kj} - N_{,k}^j \pi^{ki} + \kappa N \sqrt{{}^{(3)}g} (T^{ij} - N^j N^i T^{00}). \end{aligned} \quad (3.10)$$

Le premier groupe (3.9) d'équations d'Hamilton, qui résulte de la variation de l'action par rapport aux moments conjugués, restitue bien les définitions (3.4) des moments canoniques.

A partir de ces équations, l'étude hamiltonienne du champ de gravitation consiste à résoudre le problème de Cauchy, moyennant la donnée arbitraire de quelques valeurs initiales dans les couples (g_{ij}, π^{ij}) à compléter lors de la résolution des contraintes. En principe, si les contraintes sont vérifiées sur l'hypersurface initiale, alors elles le resteront sur toute hypersurface ultérieure, construites via les équations d'Hamilton. Ces contraintes sont en effet conservées dans le temps en vertu des identités de Bianchi⁵. Aussi, la résolution du

⁵Les contraintes purement gravitationnelles ($T_{\mu\nu} = 0$) : $\mathcal{H}_\mu = 0$ s'identifient aux équations d'Einstein

$$G_\mu^0 = R_\mu^0 + \frac{1}{2} R \delta_\mu^0 = 0$$

problème de Cauchy ne devrait-elle avoir lieu qu'une seule fois en début d'implémentation, les identités de Bianchi assurant leur vérification ultérieure.

Cependant, en vertu des erreurs numériques inéluctables, il est bien connu (cf. [YS01, YS02]) que les contraintes sont de plus en plus violées au cours d'une propagation numérique des équations d'Einstein. Ceci est dû au fait que l'erreur inévitable commise par la résolution du problème de Cauchy se trouve amplifiée au cours du temps à cause des erreurs numériques apparaissant lors de la propagation. Toutefois, différentes formulations hamiltoniennes (notamment la formulation de York [YOR78], non canonique, mais habituellement utilisée en relativité numérique) remédient partiellement à ce problème sans toutefois l'éviter à coup sûr. En fait, la stabilité numérique des algorithmes d'intégration numérique des équations d'Einstein constitue un sujet d'étude brûlant.

Une fois le problème de Cauchy résolu, les fonctions lapse et shift effectuent la conversion des systèmes de coordonnées entre strates spatiales adjacentes. Un choix de jauge doit s'effectuer en fixant la valeur de ces fonctions en vue de déterminer les degrés de liberté physiques du système.

Voyons à présent comment écrire une version hamiltonienne de la dynamique covariante des champs de Yang-Mills .

avec G_{μ}^{ν} le tenseur d'Einstein dont la divergence s'annule identiquement par construction. Ainsi, les contraintes forment bien une intégrale première puisque $G_{\mu}^0{}_{,0} = 0$ (cf. [SUN82]).

2 Traitement hamiltonien des équations de YM

Notre but avoué en faisant usage du traitement hamiltonien du système EYM est, rappelons-le, d'obtenir un système d'équations aux dérivées partielles du premier ordre par rapport au temps. En effet, ce genre de système se prête plus volontiers à un traitement numérique. Cette séparation temps-espace évite le traitement délicat des dérivées croisées et permet d'utiliser de nombreuses méthodes d'intégration numérique qui ont fait leurs preuves dans d'autres domaines, comme par exemple la dynamique des fluides. Nous allons revoir dans cette section le formalisme hamiltonien général pour le système EYM. Celui-ci s'obtient à partir d'une décomposition $3 + 1$ des équations de Yang-Mills covariantes qui ont été présentées au chapitre 2. Le formalisme hamiltonien du système EYM avait déjà fait l'objet de recherches par Teitelboim et ses collaborateurs [CT76, TEI76] (on consultera également [SUN82] pour la formulation hamiltonienne de la théorie covariante de Yang-Mills dans l'espace-temps de Minkowski, i.e. en relativité restreinte). Cependant, les objectifs premiers du formalisme hamiltonien diffèrent des nôtres, puisque le but initialement poursuivi par ces auteurs était d'achever la quantification canonique de la gravité, éventuellement couplée à des théories de jauge, et non la recherche de solutions numériques générales aux équations du champ. De plus, ce formalisme n'est ni souvent repris ni utilisé dans la littérature récente.

Le champ de Yang-Mills est sujet à ses propres contraintes en formalisme hamiltonien et la structure vue au paragraphe précédent doit d'abord être modifiée en conséquence. Les variables canoniques du système EYM complet sont les coefficients spatiaux de la métrique g_{ij} et de la connexion $A_i^{\mathbf{a}}$ ($i = 1, 2, 3$) tandis que les fonctions *lapse* N , *shift* N_i et les potentiels électriques $A_0^{\mathbf{a}}$ joueront le rôle des multiplicateurs de Lagrange du formalisme hamiltonien (sous contraintes) associé. Ces multiplicateurs représenteront la liberté de jauge du système EYM, c'est-à-dire la liberté de faire des changements de coordonnées quelconques dans l'espace-temps de même que celle d'effectuer des transformations de jauge arbitraires durant l'évolution du système.

En définissant les moments purement gravitationnels π^{ij} par (3.4) et ceux purement de jauge par

$$\pi_A^{j\mathbf{a}} = \frac{\sqrt{{}^{(3)}g}}{N} (g^{ij} F_{0i}^{\mathbf{a}} - N^k g^{ij} F_{ki}^{\mathbf{a}}), \quad (3.11)$$

on peut réécrire l'action (2.4) du système EYM sous une forme hamiltonienne contrainte (cf. [CT76, TEI76]) :

$$S = \int \int \{ \pi^{ij} \partial_0 g_{ij} + \pi_A^{i\mathbf{a}} \partial_0 A_{i\mathbf{a}} - N\mathcal{H} - N^i \mathcal{H}_i - A_0^{\mathbf{a}} \mathcal{G}_{\mathbf{a}} \} dt d^3x. \quad (3.12)$$

Les générateurs des déformations normale \mathcal{H} et tangentielles \mathcal{H}_i des hypersurfaces spatiales de l'incrustation, de même que le générateur $\mathcal{G}_{\mathbf{a}}$ des déformations de la fibre (transforma-

tions de jauge), sont à présent désignés par

$$\begin{aligned} \mathcal{H} &= -\sqrt{-g} \left[\mathcal{R} + g^{-1} \left(\frac{1}{2} \pi^2 - \pi^{ij} \pi_{ij} \right) \right] \\ &\quad + \frac{\sqrt{-g}}{2} g_{ij} (\pi_A^j \mathbf{a} \pi_A^i \mathbf{a} + \mathcal{B}^i \mathbf{a} \mathcal{B}_i \mathbf{a}) \approx 0 \end{aligned} \quad (3.13)$$

$$\mathcal{H}_i = -2\pi_i^j |_{|j} + \epsilon_{ijk} \pi_A^j \mathbf{a} \mathcal{B}^k \mathbf{a} \approx 0 \quad (3.14)$$

$$\mathcal{G}_\mathbf{a} = \pi_{A \mathbf{a}, i}^i + f_{\mathbf{ab}c} \pi_{A c}^i A_i^{\mathbf{b}} \approx 0 \quad (3.15)$$

où \mathcal{R} est le scalaire de courbure de la section spatiale, π désigne la trace du tenseur π^{ij} ($\pi = \pi_i^i$) et le vecteur $\mathcal{B}_\mathbf{a}^i$ s'écrit

$$\mathcal{B}_\mathbf{a}^i = \frac{1}{2} \epsilon^{ijk} (A_{k\mathbf{a},j} - A_{j\mathbf{a},k} - f_{\mathbf{cba}} A_j^c A_k^{\mathbf{b}}). \quad (3.16)$$

A partir de la décomposition 3 + 1 (3.12) de l'action (2.4) du système EYM, il est possible d'obtenir les deux groupes d'équations d'Hamilton en effectuant les variations par rapport aux variables $(g_{ij}, A_i^{\mathbf{a}})$ et à leurs moments conjugués $(\pi^{ij}, \pi_A^i \mathbf{a})$, tout en négligeant les termes de bord. Comme la partie gravitationnelle a été écrite au paragraphe précédent, nous nous contenterons d'écrire ici la partie purement de jauge du formalisme hamiltonien EYM complet.

A cette fin, reprenons la densité lagrangienne de Yang-Mills

$$\mathcal{L}_{YM} = -\frac{\sqrt{-g}}{4} g^{\mu\alpha} g^{\nu\beta} F_{\mu\nu}^{\mathbf{a}} F_{\alpha\beta \mathbf{a}}, \quad (3.17)$$

que nous réécrivons de manière à faire apparaître explicitement les parties temporelles et spatiales en décomposition 3 + 1, en utilisant l'antisymétrie du tenseur de Faraday,

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{YM} &= \frac{\sqrt{(3)g}}{2N} g^{ij} F_{0i}^{\mathbf{a}} F_{0j \mathbf{a}} - \frac{\sqrt{(3)g}}{N} F_{ik}^{\mathbf{a}} N^i g^{jk} F_{0j \mathbf{a}} + \frac{\sqrt{(3)g}}{2N} F_{ij}^{\mathbf{a}} g^{ik} N^j N^l F_{kl \mathbf{a}} \\ &\quad - \frac{\sqrt{(3)g}}{4N} F_{ij}^{\mathbf{a}} g^{ik} g^{jl} F_{kl \mathbf{a}}. \end{aligned} \quad (3.18)$$

Le caractère vectoriel du champ de Yang-Mills entraîne l'existence de plusieurs potentiels électriques⁶ $A_0^{\mathbf{a}}$ qui seront autant de multiplicateurs de Lagrange pour le formalisme hamiltonien sous contraintes. Les variables canoniques sont les composantes magnétiques $A_i^{\mathbf{a}}$ de la connexion auxquelles on associe les moments conjugués (3.11). Grâce à cette définition, il est aisé de réécrire (3.18) sous la forme hamiltonienne suivante

$$\mathcal{L}_{YM} = \pi_A^{j\mathbf{a}} F_{0j \mathbf{a}} - \frac{N}{2\sqrt{(3)g}} \pi_A^{i\mathbf{a}} g_{ij} \pi_A^i \mathbf{a} - N^i \pi_A^{j\mathbf{a}} F_{ij \mathbf{a}} - \frac{\sqrt{(3)g}}{4N} F_{ij}^{\mathbf{a}} g^{ik} g^{jl} F_{kl \mathbf{a}}. \quad (3.19)$$

⁶Le nombre de composantes temporelles — ou électriques — est égal à la dimension du groupe de jauge.

En variant l'action construite à partir de cette densité lagrangienne par rapport aux potentiels électriques $A_0^{\mathbf{a}}$, magnétiques $A_i^{\mathbf{a}}$ et à leurs moments conjugués $\pi_A^{i\mathbf{a}}$, on trouve successivement les contraintes, le premier groupe d'équations d'Hamilton équivalant à la définition des moments ci-dessus et le second groupe décrivant l'évolution dans le temps de ces moments. Dans le principe variationnel, on suppose que la variation des champs autour de la solution stationnaire décroît suffisamment vite sur les bords des hypersurfaces spatiales de sorte que l'on puisse négliger ces termes de bord. Les contraintes s'écrivent alors

$$(\pi_A^{i\mathbf{a}})_{,i} + f_{\mathbf{bc}}^{\mathbf{a}} A_i^{\mathbf{b}} \pi_A^{i\mathbf{c}} = 0 \quad (3.20)$$

($\forall \mathbf{a} = 1, \dots, \dim(G)$), conformément à (3.15). Quant aux deux groupes d'équations d'Hamilton, nous obtenons, après un calcul un peu long,

$$\partial_0 A_i^{\mathbf{a}} = \frac{N}{\sqrt{{}^{(3)}g}} g_{ij} \pi_A^{j\mathbf{a}} + A_{0,i}^{\mathbf{a}} - f_{\mathbf{bc}}^{\mathbf{a}} A_0^{\mathbf{b}} A_i^{\mathbf{c}} + N^k g_{ij} g^{lj} F_{kl}^{\mathbf{a}} \quad (3.21)$$

$$\begin{aligned} \partial_0 \pi_A^{i\mathbf{a}} = & -f_{\mathbf{bc}}^{\mathbf{a}} A_0^{\mathbf{b}} \pi_A^{i\mathbf{c}} + \frac{1}{2} \left(N \sqrt{{}^{(3)}g} [g^{jk} g^{il} A_{l,k}^{\mathbf{a}} + g^{ik} g^{jl} A_{k,l}^{\mathbf{a}}] \right)_{,j} \\ & - \frac{N \sqrt{{}^{(3)}g}}{2} (f_{\mathbf{b} \ \mathbf{c}}^{\mathbf{a}} f_{\mathbf{dec}} A_j^{\mathbf{b}} A_k^{\mathbf{d}} A_l^{\mathbf{e}} g^{ik} g^{jl} + f_{\mathbf{b} \ \mathbf{c}}^{\mathbf{a}} f_{\mathbf{dec}} A_j^{\mathbf{b}} A_k^{\mathbf{d}} A_l^{\mathbf{e}} g^{jk} g^{il}) \\ & + \frac{N \sqrt{{}^{(3)}g}}{2} (A_{k,j}^{\mathbf{c}} - A_{j,k}^{\mathbf{c}}) f_{\mathbf{bc}}^{\mathbf{a}} A_l^{\mathbf{b}} g^{ik} g^{jl} \\ & + \frac{N \sqrt{{}^{(3)}g}}{2} (A_{k,j}^{\mathbf{c}} - A_{j,k}^{\mathbf{c}}) f_{\mathbf{b} \ \mathbf{c}}^{\mathbf{a}} A_l^{\mathbf{b}} g^{kl} g^{ij} \\ & - \left(N \sqrt{{}^{(3)}g} [g^{jk} g^{il} A_{k,l}^{\mathbf{a}} + g^{ik} g^{jl} f_{\mathbf{bc}}^{\mathbf{a}} A_k^{\mathbf{b}} A_l^{\mathbf{c}}] \right)_{,j} \\ & + (N^j \pi_A^{i\mathbf{a}} - N^i \pi_A^{j\mathbf{a}})_{,j} - N^j \pi_A^{i\mathbf{c}} f_{\mathbf{b} \ \mathbf{c}}^{\mathbf{a}} A_j^{\mathbf{b}} - N^i \pi_A^{j\mathbf{c}} f_{\mathbf{bc}}^{\mathbf{a}} A_j^{\mathbf{b}} \end{aligned} \quad (3.22)$$

où la virgule désigne encore une fois la dérivée partielle par rapport à la variable concernée ($\forall \mathbf{a} = 1, \dots, \dim(G), \forall i = 1, 2, 3$).

Ces équations quelque peu rustres forment l'équivalent hamiltonien des équations de Yang-Mills covariantes pour n'importe quel groupe de jauge. La démarche pour les résoudre est tout à fait similaire à celle du système ADM pour la relativité générale et se décline en un problème de Cauchy pour la résolution de (3.20) suivi d'une propagation des équations d'Hamilton (3.21-3.22).

En pratique et pour des raisons évidentes de simplicité, il conviendra en premier lieu d'imposer la paramétrisation justifiée par les symétries propres au problème considéré, tant pour la métrique que pour les potentiels de jauge, avant d'écrire les équations hamiltoniennes sous contraintes. Une fois la symétrie imposée et les équations obtenues par principe variationnel, on imposera les conditions de jauge : choix des fonctions lapse N et

shift N^i pour la stratification de l'espace-temps et fixation d'une jauge confortable pour les champs de Yang-Mills, par exemple en fixant les potentiels électriques $A_0^{\mathbf{a}}$.

Toutefois, les équations générales établies ici mettent en évidence la singulière complexité des champs de jauge non abéliens (Yang-Mills) par rapport à leurs homologues abéliens (Maxwell). En effet, pour ces derniers, les constantes de structure du groupe $f_{\mathbf{abc}}$ sont identiquement nulles ce qui implique la contrainte suivante

$$(\pi_A^{i\mathbf{a}})_{,i} = 0. \quad (3.23)$$

Cette dernière constitue en fait le premier groupe des équations de Maxwell, en vertu de la définition des moments (3.11). Les mêmes arguments s'appliquent au second groupe d'équations d'Hamilton (3.22) pour retrouver le second groupe d'équations de Maxwell. En toute généralité, on peut montrer (cf. [SUN82]) que les contraintes associées aux équations de Yang-Mills forment, de manière surprenante, le premier groupe d'équations du champ.

3 Système EYM hamiltonien en symétrie sphérique

3.1 Secteur gravitationnel et conditions de jauge

Les équations ADM pour la métrique (2.43) peuvent être trouvées dans [MDT83, BCMN72]⁷. Nous nous contenterons ici de les rappeler. Les variables canoniques de la géométrie sont les suivantes

$$g_{ij} = \begin{pmatrix} e^{2\mu} & 0 & 0 \\ 0 & e^{2\lambda} & 0 \\ 0 & 0 & e^{2\lambda} \end{pmatrix} \quad (3.24)$$

avec λ et μ des fonctions des coordonnées χ et t . On travaille dans la base de vecteurs $X_t = \partial_t$, $X_\chi = \partial_\chi$, $X_\theta = \partial_\theta$, $X_\varphi = (1/\sin\theta)\partial_\varphi$. Dans cette base, les moments conjugués sont donnés par

$$\pi^{ij} = \begin{pmatrix} e^{-2\mu} \frac{\pi_\mu}{2} & 0 & 0 \\ 0 & e^{-2\lambda} \frac{\pi_\lambda}{4} & 0 \\ 0 & 0 & e^{-2\lambda} \frac{\pi_\lambda}{4} \end{pmatrix}. \quad (3.25)$$

L'action d'Einstein-Hilbert à symétrie sphérique s'écrit, sous forme hamiltonienne,

$$S = 4\pi \int \int \left(\dot{\mu}\pi_\mu + \dot{\lambda}\pi_\lambda - N\mathcal{H} - N_\chi \mathcal{H}^\chi \right) dt d\chi \quad (3.26)$$

avec le super-hamiltonien :

$$\mathcal{H} = \frac{e^{-\mu-2\lambda}}{8} \left[8 e^{4\lambda} \left(-4\mu'\lambda' + 6\lambda'^2 + 4\lambda'' \right) - 16 e^{2\mu+2\lambda} + \pi_\mu^2 - 2\pi_\mu\pi_\lambda \right] \quad (3.27)$$

et le super-moment :

$$\mathcal{H}^\chi = e^{-2\mu} (\mu'\pi_\mu + \lambda'\pi_\lambda - \pi'_\mu).$$

⁷Où les auteurs ne considèrent pas non plus les termes de surface.

Les équations d'Hamilton s'écrivent alors (sans termes de matière)

$$\dot{\mu} = \frac{1}{4}e^{-\mu-2\lambda} \left\{ N(\pi_\mu - \pi_\lambda) + 4e^{\mu+2\lambda}(\mu'N^\chi + N^{\chi'}) \right\} \quad (3.28)$$

$$\dot{\lambda} = \frac{1}{4}e^{-\mu-2\lambda} \left\{ -N\pi_\mu + 4e^{\mu+2\lambda}N^\chi\lambda' \right\} \quad (3.29)$$

$$\begin{aligned} \dot{\pi}_\mu = \frac{1}{8}e^{-\mu-2\lambda} \left\{ 16Ne^{2\lambda}(e^{2\mu} - \lambda'^2e^{2\lambda}) + N\pi_\mu(\pi_\mu - 2\pi_\lambda) - 32e^{4\lambda}\lambda'N' \right. \\ \left. + 8e^{\mu+2\lambda}(N^\chi\pi'_\mu + N^{\chi'}\pi_\mu) \right\} \end{aligned} \quad (3.30)$$

$$\begin{aligned} \dot{\pi}_\lambda = \frac{1}{4}e^{-\mu-2\lambda} \left\{ 16Ne^{4\lambda}(\mu'\lambda' - \lambda'^2 - \lambda'') + N\pi_\mu(\pi_\mu - 2\pi_\lambda) + 16N'e^{4\lambda}(\mu' - \lambda') \right. \\ \left. - 16N''e^{4\lambda} + 4e^{\mu+2\lambda}(N^\chi\pi'_\lambda + N^{\chi'}\pi_\lambda) \right\}, \end{aligned} \quad (3.31)$$

avec $N^\chi = e^{2\mu}N_\chi$.

Avant d'aller plus loin, fixons d'emblée le système de coordonnées dans lequel nous travaillerons. Il existe plusieurs manières de choisir la jauge du champ gravitationnel (ou le type de stratification) en fonction du problème étudié. En voici quelques exemples :

- Le **découpage géodésique** (*geodesic slicing*) est le plus simple. Il consiste à se placer dans un référentiel synchrone (cf. [PEE93, LL61]) : $N = 1$, $N^\chi = 0$. Cependant, ce découpage de l'espace-temps exhibe une forte tendance à produire des singularités de coordonnées [SY78] et s'avère utile uniquement pour les systèmes faiblement gravitants.
- Le **découpage harmonique** (*harmonic slicing*) obéit à la condition

$$\dot{N} = -N^2K,$$

où K est la trace du tenseur de courbure extrinsèque. Ce découpage est en fait un cas particulier d'une classe de conditions de jauge appelées algébriques (*algebraic slicing*, parce que la fonction lapse recherchée est algébrique en le déterminant de la 3-métrie) :

$$(\partial_t - N^i\partial_i)N = -f(N)N^2K$$

où f est une fonction positive arbitraire.

- Le **découpage maximal** (*maximal slicing*) est la condition la plus utilisée en relativité numérique (pour les simulations de coalescence d'étoiles à neutrons ou de trous noirs, entre autres). Il se traduit par la condition

$$K = 0$$

que l'on renforce habituellement par

$$K(t = 0) = \partial_t K = 0$$

ce qui se ramène après manipulation (grâce au second groupe d'équations d'Hamilton et à la contrainte sur l'énergie dans la formulation de York [YOR78]) à une équation de Poisson avec source pour la fonction lapse N^8 .

Pour une introduction générale à cette science en soi qu'est la relativité numérique, on consultera l'article de revue [SS99].

Comme nous sommes intéressés ici par le mécanisme d'instabilité gravitationnelle autour de la solution de Gal'tsov-Volkov, nous avons choisi de modifier la condition de jauge géodésique, efficace en champ faible, de la manière suivante :

$$\begin{aligned} N(\chi, t) &= R(t) \\ N_i(\chi, t) &= 0, \end{aligned} \tag{3.32}$$

où $R(t)$ est le facteur d'expansion, solution de l'équation de Friedmann et qui décrit l'évolution des univers homogènes et isotropes. Nous baptisons cette condition le *découpage conforme* ou tout simplement *jauge conforme*. Elle sera particulièrement adaptée aux champs de Yang-Mills pour les raisons vues au chapitre précédent. Il est important de faire remarquer que ce choix de jauge, s'il influence les valeurs calculées des coefficients de la métrique, ne change en aucune manière les grandeurs observables (tenseur d'Einstein, énergie-impulsion, etc.) et donc les résultats physiques. Comme en électromagnétisme et en mécanique classique, ce choix de coordonnées est une pure question de commodité, fort heureusement.

3.2 Secteur de jauge

Dans la paramétrisation de Witten (2.55) des champs de jauge dérivant du groupe $SU(2)$ à symétrie sphérique, il y a trois variables canoniques : les potentiels magnétiques $A_1^3 = b$, $A_2^1 = A_3^2 / \sin \theta = c$ et $A_2^2 = -A_3^1 / \sin \theta = d$, et un multiplicateur de Lagrange, à savoir le potentiel électrique $A_0^3 = a$. Les moments conjugués à ces trois variables canoniques sont alors donnés par l'équation (3.11), en tenant compte de la jauge conforme (3.32) et des

⁸Cette équation se réduit à l'équation de Newton pour le potentiel gravifique dans la limite non relativiste.

composantes (2.62) du tenseur du champ de Yang-Mills :

$$\begin{aligned}\pi_b &= \frac{e^{-\mu+2\lambda}}{N} (\dot{b} - a') \\ \pi_c &= \frac{e^\mu}{N} (\dot{c} - ad) \\ \pi_d &= \frac{e^\mu}{N} (\dot{d} + ac)\end{aligned}\tag{3.33}$$

(où nous avons implicitement posé que $\pi_b = \pi_A^{13} / \sin \theta$ et des définitions analogues pour π_c and π_d). Remarquons d'emblée que si nous procédons au changement de variables suivant

$$\begin{aligned}a &= \alpha + \dot{\psi} \\ b &= \beta + \dot{\psi}' \\ c &= \gamma \sin \psi \\ d &= \gamma \cos \psi,\end{aligned}$$

avec α, β, γ et ψ des fonctions arbitraires des coordonnées χ et t , les moments conjugués se réécrivent

$$\pi_b = \frac{e^{-\mu+2\lambda}}{N} (\dot{\beta} - \alpha')\tag{3.34}$$

$$\pi_c = \frac{e^\mu}{N} (\dot{\gamma} \sin \psi - \alpha \gamma \cos \psi)\tag{3.35}$$

$$\pi_d = \frac{e^\mu}{N} (\dot{\gamma} \cos \psi + \alpha \gamma \sin \psi).\tag{3.36}$$

Aussi, la variable ψ n'est pas une variable dynamique, puisque ses dérivées n'interviennent pas dans la définition des moments, et représente donc un pur degré de liberté de jauge.

En effectuant la variation de l'action par rapport au multiplicateur a , aux variables canoniques b, c, d et à leurs moments conjugués π_b, π_c et π_d , on trouve respectivement la contrainte, le premier et le second groupes d'équations d'Hamilton. Il nous est loisible, une fois l'annulation des variations imposée, de nous débarrasser du degré de liberté de jauge pure en choisissant $\psi = \frac{\pi}{2}$. Ceci revient à annuler la phase du champ scalaire complexe ω de l'équation (2.53), puisque

$$\arg(\omega) = \frac{\pi}{2} - \psi.$$

Ce faisant, on annulera également la composante d du doublet scalaire tandis que son moment conjugué π_d deviendra

$$\pi_d = \frac{e^\mu}{N} \alpha \gamma.$$

Le pendant hamiltonien des équations de Yang-Mills covariantes (2.67-2.70) s'écrit alors :

$$\mathcal{G}^3 = \pi'_b + 2 \frac{e^\mu}{N} a c^2 = 0,\tag{3.37}$$

pour la contrainte, et pour les équations d'Hamilton

$$\begin{aligned}
\dot{b} &= a' + Ne^{\mu-2\lambda}\pi_b \\
\dot{c} &= Ne^{-\mu}\pi_c \\
\dot{\pi}_b &= -2Ne^{-\mu}bc^2 \\
\dot{\pi}_c &= \frac{e^\mu}{N}a^2c + (Ne^{-\mu}c')' - Ne^{-\mu}b^2c - Ne^{\mu-2\lambda}c(c^2 - 1) \\
\dot{a} &= N^2 e^{-2\mu} \left(b' + 2\frac{bc'}{c} - \mu' b \right) - 2N e^{-\mu} \frac{a\pi_c}{c} - \frac{N}{4} e^{-\mu-2\lambda} (\pi_\mu - \pi_\lambda) a \\
&\quad + \frac{\dot{N}}{N} a.
\end{aligned} \tag{3.38}$$

L'équivalence est d'ailleurs évidente lorsque l'on remplace la définition des moments (3.33) dans les équations de Yang-Mills (2.67-2.70).

En vue de parachever la description complète du champ de jauge en des termes hamiltoniens, il nous reste à réécrire les composantes du tenseur énergie-impulsion (2.71-2.74) en fonction des variables canoniques dans la jauge choisie ($d = 0$). Ce qui nous donne

$$\begin{aligned}
T_0^0 &= -e^{-4\lambda} \frac{\pi_b^2}{2} - e^{-2\lambda-2\mu} \pi_c^2 - \frac{c'^2 N^2 + e^{2\mu} a^2 c^2 + N^2 b^2 c^2}{N^2} e^{-2\lambda-2\mu} \\
&\quad - e^{-4\lambda} \frac{(c^2 - 1)^2}{2}
\end{aligned} \tag{3.39}$$

$$\begin{aligned}
T_1^1 &= -e^{-4\lambda} \frac{\pi_b^2}{2} + e^{-2\lambda-2\mu} \pi_c^2 + \frac{c'^2 N^2 + e^{2\mu} a^2 c^2 + N^2 b^2 c^2}{N^2} e^{-2\lambda-2\mu} \\
&\quad - e^{-4\lambda} \frac{(c^2 - 1)^2}{2}
\end{aligned} \tag{3.40}$$

$$T_2^2 = \frac{e^{-4\lambda}}{2} (\pi_b^2 + (c^2 - 1)^2) \tag{3.41}$$

$$T_1^0 = -2 \frac{e^{-2\lambda}}{N^2} (Ne^{-\mu} \pi_c c' + abc^2) = -N^{-2} e^{2\mu} T_0^1. \tag{3.42}$$

4 Conclusion

Dans ce chapitre, nous avons obtenu l'équivalent hamiltonien de la formulation lagrangienne usuelle du système EYM (qui faisait l'objet du chapitre précédent). Les équations présentées ici sont plus propices à l'intégration numérique dans le cas général inhomogène et dépendant du temps que leurs homologues habituelles.

Aux chapitres 4 et 5, nous nous proposons d'établir un algorithme d'intégration de ces équations propre à étudier l'instabilité gravitationnelle de divers champs matériels. En vue de tester cet algorithme sur un cas d'espèce, nous redécouvrirons au chapitre 4 le mécanisme d'instabilité gravitationnelle d'un univers rempli d'un fluide de matière dont le traitement perturbatif est bien connu.

Ensuite, nous pourrions élargir cette méthode au cours du chapitre 5 en ajoutant les équations du champ de jauge à la dynamique gravitationnelle pour étudier l'instabilité gravitationnelle autour de la solution de Gal'tsov-Volkov. Par cette expression, nous entendons la considération d'une perturbation des distributions initiales des champs sans la moindre linéarisation des équations.

L'étude de l'instabilité gravitationnelle du champ scalaire sera ensuite envisagée avec la même méthode au chapitre 6 en vue de mettre en évidence les différences entre ce mécanisme et celui qui dicte l'instabilité des champs de jauge. Cette comparaison n'est toutefois pas dénuée de fondement puisque, comme nous l'avons vu au chapitre précédent, les champs de Yang-Mills se réduisent à un modèle particulier de champ scalaire interagissant avec un champ électromagnétique à deux dimensions. Cependant, l'invariance conforme des champs de jauge (et du modèle de Higgs abélien qui le constitue en symétrie sphérique) ne sera pas partagée par le champ scalaire que nous considérerons. Les mécanismes d'instabilité gravitationnelle qui en résulteront seront donc régis par des principes différents, même si certaines caractéristiques demeureront communes.

Chapitre 4

Théorie relativiste de l'instabilité gravitationnelle

"From the first developments of modern cosmology people have recognized that an important part of cosmology is the large-scale clustering of matter in galaxies and clusters of galaxies."

P. J. E. Peebles, [PEE80].

Sommaire

1	Rappels	96
1.1	Le modèle cosmologique inhomogène de Lemaître-Tolman	96
1.2	Instabilités gravitationnelles	100
2	L'instabilité gravitationnelle grâce à l'intégration numérique des équations ADM	106
2.1	Principe de la méthode	106
2.2	Problème de Cauchy	106
2.3	Equations d'Hamilton	109
2.4	Résultats	112

1 Rappels

1.1 Le modèle cosmologique inhomogène de Lemaître-Tolman

De nombreuses caractéristiques du mécanisme d'instabilité gravitationnelle peuvent être étudiées de manière relativiste par un modèle simple où les fluctuations de densité arborent une symétrie sphérique. Cette étude peut être consultée aux références [PEE80, PEE93] et se base principalement sur le modèle cosmologique inhomogène de **Lemaître-Tolman** [LEM33, TOL34]. Bien que ce modèle ne nous soit de peu d'utilité par la suite, nous l'avons tout de même repris dans ce chapitre tant pour l'intérêt historique qu'il présente que pour la remarque qu'il nous permet de suggérer au sujet de l'effondrement gravitationnel de sphères sous-tendues par des pressions localement anisotropes. Cette caractéristique est arborée, en effet, tant par les champs de Yang-Mills présentés auparavant que par le champ scalaire du chapitre 6. Le lecteur pressé pourra tout de fois passer sans crainte ce paragraphe au profit du suivant (1.2).

Les équations du modèle et leurs solutions sous forme paramétrique ont été données par Lemaître dès 1933 [LEM33] et reprises par Tolman en 1934 [TOL34]. Nous allons en faire la dérivation complète dans un instant. Pour une revue assez complète de nombreux modèles inhomogènes, on consultera la référence [KRA97].

Le modèle cosmologique inhomogène de Lemaître-Tolman [LEM33, TOL34] décrit comment un champ gravitationnel à symétrie sphérique caractérisé par la métrique (2.43) en coordonnées synchrones ($N = 1$, $N_\chi = 0$) est engendré par un fluide de poussières dont le tenseur énergie-impulsion vaut :

$$T_\mu^\nu = \text{diag}(-\rho, 0, 0, 0). \quad (4.1)$$

Il est possible de trouver une solution analytique aux équations d'Einstein construites à partir des grandeurs données au chapitre 2 en remarquant tout d'abord que la diagonalité du tenseur énergie-impulsion entraîne que

$$G_1^0 = G_0^1 = \kappa T_1^0 = 0$$

(avec G_μ^ν les composantes mixtes du tenseur d'Einstein $G_\mu^\nu = R_\mu^\nu - \frac{1}{2}R\delta_\mu^\nu$) c'est-à-dire

$$-\dot{\lambda}' - 2\lambda'\dot{\lambda} + \lambda'\dot{\mu} = 0. \quad (4.2)$$

L'équation (4.2) se réduit aisément à une intégrale première par rapport au temps en la divisant membre à membre par λ' :

$$-\dot{\mu} + 2\frac{\dot{\lambda}'}{\lambda'} + \dot{\lambda} = 0,$$

que l'on peut trivialement réécrire sous la forme d'une intégrale première :

$$\frac{\partial}{\partial t}[-\mu + \ln(\lambda'^2) + \lambda] = 0,$$

et enfin intégrer par rapport à t et remettre sous une forme intéressante pour la simplification des autres équations du champ :

$$e^\mu = e^\lambda \frac{\lambda'^2}{4(1 + 2E(\chi))}, \quad (4.3)$$

où $E(\chi)$ est une fonction arbitraire de la coordonnée χ répondant à la seule condition que $1 + 2E(\chi) \geq 0 \forall \chi$. Cette fonction E arbitraire a été baptisée **fonction d'énergie totale** pour des raisons qui apparaîtront limpides dans un instant.

Procédons à présent au changement de variables suivant :

$$r(\chi, t) = e^{\mu/2}, \quad (4.4)$$

où r sera maintenant le “*rayon vecteur*” défini de telle sorte que $2\pi r$ soit la longueur de la circonférence dont le centre se situe à l'origine des coordonnées $r = \chi = 0$. Deux évènements simultanés ($dt = 0$) situé à la même coordonnée comobile ($d\chi = 0$) sont sur une sphère de rayon r centrée en l'origine des coordonnées.

Ceci conduit à la métrique de **Lemaître-Tolman** :

$$ds^2 = dt^2 - \frac{r'(\chi, t)}{1 + 2E(\chi)} d\chi^2 + r^2(\chi, t) (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\varphi^2). \quad (4.5)$$

L'équation d'Einstein $G_0^0 = \kappa T_0^0$ se ramène alors à une intégrale première :

$$\dot{r}^2 = \frac{2M(\chi)}{r} + 2E(\chi) + \frac{\Lambda}{3} r^2, \quad (4.6)$$

où $M(\chi)$ est une fonction arbitraire résultant de l'intégration par rapport à t qui est appelée la fonction de masse de *Misner-Sharp* du modèle de Lemaître-Tolman puisqu'elle représente la quantité de matière enfermée dans une sphère de rayon $r(\chi, t)$. En effet, en utilisant l'intégrale première (4.6) comme définition de M , l'équation d'Einstein $G_0^0 = \kappa T_0^0$ devient

$$4\pi\rho = \frac{M'(\chi)}{r^2 r'}, \quad (4.7)$$

ou encore

$$M(\chi) = \int_0^r 4\pi\rho r^2 dr \quad (4.8)$$

où l'on peut reconnaître la définition de la masse en symétrie sphérique.

En fait, l'équation (4.6) porte le nom d'**équation de Friedmann généralisée** en rapport avec la célèbre équation de Friedmann des cosmologies homogènes :

$$\boxed{H^2 = \left(\frac{\dot{R}}{R}\right)^2 = \frac{\kappa\rho}{3} - \frac{k}{R^2} + \frac{\Lambda}{3}}, \quad (4.9)$$

où $R(t)$ est le facteur d'expansion et k la courbure normalisée de l'espace-temps.

Dans le cas d'univers rempli d'un fluide de matière à pression quelconque, la seconde équation d'Einstein $G_1^1 = \kappa T_1^1$ s'écrit, avec la définition de la masse introduite ci-dessus, comme

$$4\pi p = \frac{\dot{M}(\chi, t)}{r^2 \dot{r}}. \quad (4.10)$$

Si nous supposons à présent que la constante cosmologique est nulle ($\Lambda = 0$) et que la pression est négligeable ($p = 0$), nous obtenons les solutions analytiques suivantes de l'équation de Friedmann généralisée (4.6) :

- si $E < 0$ (**région elliptique**) :

$$\begin{aligned} r(\chi, t) &= \frac{M}{2E}(1 - \cos \eta) \\ (t - t_B(\chi)) &= \frac{M}{(-2E)^{\frac{3}{2}}}(\eta - \sin \eta); \end{aligned} \quad (4.11)$$

- si $E = 0$ (**région euclidienne**) :

$$r(\chi, t) = \left\{ \frac{9}{2} M (t - t_B(\chi))^2 \right\}^{1/3}; \quad (4.12)$$

- si $E > 0$ (**région hyperbolique**) :

$$\begin{aligned} r(\chi, t) &= \frac{M}{2E}(\cosh \eta - 1) \\ (t - t_B(\chi)) &= \frac{M}{(2E)^{\frac{3}{2}}}(\sinh \eta - \eta), \end{aligned} \quad (4.13)$$

où η est un paramètre et $t_B(\chi)$ est une fonction arbitraire résultant de l'intégration. Cette dernière fonction s'appelle le "**temps du Bang**" ("*the bang time*"), c'est-à-dire le moment de la singularité initiale.

Ces solutions analytiques sont à comparer avec celles de l'équation de Friedmann (4.9) des modèles homogènes avec $\Lambda = 0$:

- si $k = +1$ (**univers elliptique**) :

$$\begin{aligned} R(t) &= M(1 - \cos \eta) \\ t &= M(\eta - \sin \eta); \end{aligned} \quad (4.14)$$

- si $k = 0$ (**univers euclidien**) :

$$R(t) = \left\{ \frac{9}{2} M t^2 \right\}^{1/3}; \quad (4.15)$$

- si $k = -1$ (**univers hyperbolique**) :

$$\begin{aligned} R(t) &= M(\cosh \eta - 1) \\ t &= M(\sinh \eta - \eta), \end{aligned} \quad (4.16)$$

où η est toujours un paramètre et où le temps du Bang, t_B , a été posé égal à zéro. Dans ce cas, la constante M vaut $\frac{\kappa \rho_0 R_0^3}{6}$.

D'un point de vue historique, il importe de noter que les équations du modèle et leurs solutions sous forme paramétrique ont été données par Lemaître dès 1933 [LEM33] et reprises par Tolman en 1934 [TOL34].

De plus, Lemaître a considéré en 1933 [LEM33] le tenseur énergie-impulsion, le plus général, qui soit compatible avec la symétrie sphérique de la section spatiale de la métrique :

$$T_{\mu}^{\nu} = \text{diag}(-\rho, p_r, p_t, p_t) \quad (4.17)$$

où p_r et p_t désignent respectivement les composantes radiale et tangentielle de la pression. Il en a même proposé quelques solutions analytiques. L'anisotropie locale des pressions du tenseur (4.17) modifie notablement les solutions de la relativité générale pour un fluide de pressions isotropes. Pour une revue, on consultera la référence [HS97]. En l'absence d'une équation d'état $p = p(\rho)$ plus précise, il est impossible de résoudre complètement (même numériquement) les équations d'Einstein dont la source est constituée par un tel "fluide" aux pressions anisotropes. Or cette anisotropie semble essentielle pour caractériser certains

corps très denses comme les étoiles à neutrons dont les couches superficielles ressemblent davantage à un cristal qu'à un fluide. Le système EYM donne lui aussi une légitimité à l'idée de Lemaître en fournissant une équation d'état de pressions localement anisotropes en termes des potentiels de jauge. Et, malgré l'invariance conforme des champs de Yang-Mills relative au caractère radiatif de ces champs, l'anisotropie locale de leurs pressions rend leur mécanisme d'instabilité gravitationnelle plus complexe que dans le simple cas d'un gaz de photons (champ de YM abélien) à l'équilibre thermodynamique.

Il est toutefois utile de noter que, malgré son âge, le modèle de Lemaître-Tolman motive encore des recherches scientifiques, que cela soit dans le cadre de ses singularités [KRA97, HL85], dans le contexte de l'effondrement gravitationnel à symétrie sphérique et ses variantes avec un fluide de pressions localement anisotropes [GAI01, HS97, FGL02] ou encore plus récemment dans son application à la formation de structures cosmiques [KH02, KH03b, KH03a, CDDJ01]. Krasinski et Hellaby ont récemment montré qu'un modèle de Lemaître-Tolman pouvait toujours interpoler n'importe quelles distributions initiale et finale de densité séparées par un temps quelconque. Ceci pourrait offrir un intérêt certain dans la reconsidération du problème de formation des grandes structures, telles que les superamas de galaxies, au moyen d'un modèle purement relativiste traitant de la distribution à très grande échelle de la matière, alors que la plupart des modèles actuels traitent surtout des petites échelles avec des méthodes semi-relativistes.

1.2 Instabilités gravitationnelles

Si un traitement exact de l'instabilité gravitationnelle nécessiterait l'utilisation de modèles cosmologiques inhomogènes, le fait que l'univers observable soit, fort heureusement, assez proche d'un univers homogène et isotrope évite de se confronter directement à la grande complexité des équations d'Einstein. Aussi, un traitement perturbatif suffit pour décrire de manière satisfaisante ce mécanisme dans le cas d'un fluide matériel.

Dans le reste de ce chapitre, nous nous emploierons à étudier la croissance des fluctuations de densité dans un univers empli de matière ordinaire. Le traitement perturbatif qui fait l'objet du reste de ce paragraphe permet de dégager l'essentiel du mécanisme d'instabilité gravitationnelle. On en trouvera une démonstration minutieuse dans les grands classiques [PEE93, PEE80]. Nous verrons ensuite comment retrouver ces résultats numériquement à partir d'une intégration des équations du formalisme ADM du champ de gravitation.

Mais tout d'abord, passons en revue la théorie usuelle de l'instabilité gravitationnelle. On considèrera des fluctuations de densité de la taille des galaxies ou même des amas de galaxies, c'est-à-dire une échelle bien inférieure à la longueur de Hubble $L_H = \frac{c}{H}$. Ainsi, on pourra négliger les termes de constante cosmologique Λ et de courbure dans

l'équation de Friedmann. Il en sera de même pour les gradients de pression que l'on supposera négligeables sur de semblables échelles où l'univers peut être considéré en assez bonne approximation comme homogène et isotrope.

La matière qui emplit l'univers et qui cause la décélération de son expansion est habituellement modélisée en relativité générale par un fluide dont le tenseur énergie-impulsion s'écrit¹ :

$$T^{\mu\nu} = (\rho c^2 + p) u^\mu u^\nu + p g^{\mu\nu} \quad (4.18)$$

où u_μ sont les composantes de la quadri-vitesse du fluide $u^\mu = \frac{dx^\mu}{ds}$. On supposera de plus, par souci de simplicité, que le fluide obéit à une équation d'état barotrope, c'est-à-dire

$$p = K \rho c^2, \quad (4.19)$$

avec $K = 0$ pour des poussières (matière non-relativiste dont la pression p est négligeable devant la densité d'énergie ρc^2) et $K = 1/3$ pour un gaz de particules relativistes libres (par exemple, radiations électromagnétiques à l'équilibre thermodynamique).

Considérons à présent un modèle approximatif de l'instabilité gravitationnelle grâce à un traitement purement relativiste. On négligera tout d'abord les mouvements relatifs des particules du fluide (les galaxies) pour ne considérer que leur mouvement d'ensemble, du fait de l'expansion de l'univers. Dans un système de coordonnées comobiles avec l'expansion, le fluide est alors au repos et sa quadri-vitesse s'écrit $u^i = \delta_0^i$ ($c = 1$). Le tenseur énergie-impulsion (4.18) s'écrira alors

$$T_\mu^\nu = \text{diag}(-\rho, p, p, p). \quad (4.20)$$

Ecrivons la densité d'énergie sous la forme :

$$T_0^0 = -\rho^B (1 + \delta), \quad (4.21)$$

qui fait apparaître le contraste de densité matérielle δ , ρ^B étant la densité moyenne du fond homogène dans lequel se développent les fluctuations. La métrique correspondant alors à un tel espace-temps, peut s'écrire, en symétrie sphérique,

$$ds^2 = -dt^2 + R^2(t) \{ (1 - h_\mu) d\chi^2 + (1 - h_\lambda) d\Omega^2 \} \quad (4.22)$$

où on s'est placé de fait dans un référentiel synchrone $N = 1$, $N_\chi = 0$ et où les h_i sont donc les perturbations spatiales de la métrique. En développant au premier ordre en δ et en les perturbations de la métrique h_i la première composante de l'équation de conservation du tenseur énergie-impulsion du fluide $T_0^\nu{}_{|\nu} = 0$, on trouve (cf. [PEE93]) :

$$\delta = (1 + K) \frac{\dot{h}}{2}, \quad (4.23)$$

¹Attention à notre convention de signature de la métrique $(-, +, +, +)$.

où $h = h_\mu + 2h_\lambda$ est la trace de la perturbation de la métrique $\left(\sqrt{-g} = R^3 \left[1 - \frac{h}{2}\right]\right)$.

Ensuite, utilisons la composante purement temporelle des équations d'Einstein sans trace²

$$R_{\mu\nu} = \kappa \left(T_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} T^\sigma_\sigma \right)$$

pour trouver, au premier ordre,

$$\ddot{h} + 2\frac{\dot{R}}{R}\dot{h} = \kappa\rho^B (1 + 3K) \delta. \quad (4.24)$$

En multipliant l'équation précédente par $(1 + K)/2$ et en utilisant (4.23), on obtient

$$\ddot{\delta} + 2\frac{\dot{R}}{R}\dot{\delta} = \frac{\kappa\rho^B}{2} (1 + 3K) (1 + K)\delta. \quad (4.25)$$

On sait, en vertu de l'équation de conservation $T^\nu_{\nu} = 0$ non perturbée

$$\dot{\rho}^B = -3\frac{R}{R}(1 + K)\rho^B,$$

que la densité du fond homogène varie avec le facteur d'expansion comme

$$\rho^B \propto R^{-3(1+K)}.$$

Ce résultat, inséré dans l'équation de Friedmann, donne que

$$R \propto t^{2/(3+3K)}.$$

Avec ces solutions pour le fond homogène, nous obtenons pour la relation (4.25)

$$\ddot{\delta} + \frac{4}{3(1+K)t} \dot{\delta} = \frac{2}{3} \left(\frac{1+3K}{1+K} \right) \frac{\delta}{t^2} \quad (4.26)$$

qui est homogène en le temps cosmique t de sorte que les solutions se comporteront en puissance de ce paramètre. L'équation (4.26) est une équation d'Euler dont la solution générale s'écrit comme une combinaison linéaire d'un mode décroissant en $1/t$ et d'un mode croissant en puissance du temps cosmique (cf. [MOU96]) :

$$\delta(t) = \frac{C_1}{t} + \frac{C_2}{n} t^n \quad (4.27)$$

²Version relativiste de l'équation de Poisson

$$\Delta\phi = 4\pi G\rho$$

où ϕ est le potentiel newtonien et ρ la densité de masse (cf. [LL61], § 11-6).

avec

$$n = \frac{2(3K + 1)}{3(K + 1)}. \quad (4.28)$$

Ainsi, pour la matière non-relativiste ($K = 0$), le contraste de densité croît comme le facteur d'expansion, en $t^{2/3}$, tandis que pour le gaz de particules relativistes ($K = 1/3$), le contraste de densité croît linéairement avec le temps cosmique t .

Il est possible toutefois de réaliser l'étude de l'instabilité gravitationnelle aux petites échelles (par rapport à la longueur de Hubble) dans la limite newtonienne de la relativité générale. Ceci prend tout son sens si on considère des structures de taille très inférieure à la longueur de l'horizon de sorte que leurs vitesses d'expansion sont non relativistes. Qui plus est, si le contraste de densité est très inférieur à l'unité, le potentiel gravifique est également non relativiste. Cette limite newtonienne impose toutefois la définition d'un repère inertiel par rapport auquel définir le champ de vitesse, ce qui brise la covariance de la relativité générale. Cependant, cette approche demeure plus simple que le traitement relativiste complet. Ce modèle newtonien est traité dans le détail aux références [PEE93, PEE80] et conduit aux mêmes résultats que précédemment pour l'évolution du contraste de densité. Mais il permet cette fois de déduire le champ de déplacement des particules du fluide de matière (via le champ de vitesse) ainsi que d'obtenir des informations sur la taille (et donc la masse) des fluctuations qui sont effectivement formées. Par exemple, on dérive dans ce cadre le fameux critère de Jeans qui donne une borne inférieure, la longueur de Jeans λ_J , à la taille des fluctuations lorsque le fluide de matière est habité par une pression non négligeable :

$$\lambda_J = \left(\frac{\pi c_S^2}{G\rho^B} \right)^{\frac{1}{2}} \quad (4.29)$$

où $c_S^2 = dp/d\rho$ est la vitesse du son dans le fluide. A cette longueur critique, la force de gravitation et le gradient de pression s'équilibrent exactement. Pour des fluctuations plus grandes que la longueur de Jeans, le gradient de pression est négligeable et le temps de réponse de l'onde acoustique est beaucoup plus long que le temps de croissance de la fluctuation. Il en résulte une croissance de la perturbation au taux donné par l'équation (4.27). Pour des grumeaux plus petits que la longueur de Jeans, tenaillés entre la force de rappel de la gravitation et la répulsion due au gradient de pression, le contraste de densité oscille comme une onde acoustique.

Ce modèle newtonien constitue le fondement des simulations numériques de formation des galaxies. Il présuppose que les vitesses propres de celles-ci sont petites par rapport à leur vitesse due à l'expansion, que le potentiel gravifique est non relativiste (le contraste de densité est petit devant l'unité) et que l'espace-temps n'est pas fortement inhomogène

ou que ses inhomogénéités n'ont pas d'effet significatif tout au moins³.

Ainsi, notre approche purement relativiste se distingue-t-elle de sa consœur newtonienne en ne considérant pas ces termes non relativistes que sont les vitesses propres des particules du fluide (qui se traduisent par des termes non diagonaux dans le tenseur énergie-impulsion) et leur potentiel newtonien (représenté par un terme ϕ dans la métrique : $N = 1 + \frac{\phi(\chi, t)}{c^2}$). En ne considérant aucun de ses termes, actifs aux petites échelles, les résultats de notre étude ne donneront les taux de croissance des fluctuations que pour des échelles très grandes, où les gradients de pression sont faibles et les vitesses relatives très inférieures à c . Et, à moins de considérer explicitement des termes non diagonaux dans le tenseur énergie-impulsion, aucune information ne pourra être obtenue sur les vitesses relatives des particules du fluide, qui sont au repos dans le référentiel comobile, et, partant, sur le critère de Jeans.

Nonobstant, nous pouvons avancer, à l'instar de Peebles [PEE80], trois motivations physiques pour l'étude des fluctuations de densité de taille supérieure à celle de l'horizon cosmologique ($\lambda \geq c/H_0$). Ces motivations concernent l'état du cosmos primitif, où nos champs de Yang-Mills sont justement supposés avoir sévi. Tout d'abord, la taille de l'horizon décroît très fortement lorsque l'on remonte le temps jusqu'au Big Bang. En effet, une fluctuation de taille comobile χ a pour longueur physique $\lambda = R(t)\chi$, alors que la taille de l'horizon est dictée par

$$\lambda_H = c \frac{R}{\dot{R}},$$

qui décroît plus fortement que la taille des fluctuations lorsque l'on s'approche de la singularité. Ainsi, les fluctuations d'aujourd'hui étaient d'une taille non négligeable devant celle de l'horizon dans l'univers primordial, si pas d'une taille nettement supérieure. Ceci justifie une approche relativiste de l'instabilité gravitationnelle des champs de Yang-Mills, dont le rôle cosmologique se jouait dans les tout premiers actes de l'histoire de l'Univers. De même, la forte pression régnant dans la soupe primordiale ne permet plus de négliger celle-ci face à la densité d'énergie due à la masse. Dans le cas du système EYM, les pressions, qui forment les composantes spatiales du tenseur énergie-impulsion sont composées des mêmes termes que la densité d'énergie (partie purement temporelle de ce même tenseur) et ne peuvent donc être négligées. Enfin, lorsque la densité moyenne est importante, comme dans le cas de l'univers primitif, n'importe quelle fluctuation, fût-elle d'un modeste rapport $\delta\rho^B/\rho^B$ à la densité du fond, peut avoir un effet non négligeable sur la courbure de l'espace-temps. Toutes ces raisons rendent incontournable le recours à la théorie de la gravitation d'Einstein pour la description de la croissance des fluctuations des champs de Yang-Mills.

Voyons à présent comment appliquer le formalisme hamiltonien du chapitre précédent en

³Et notamment, que l'on se trouve loin des centres galactiques et des trous noirs.

vue de retrouver les résultats bien connus du traitement purement relativiste d'un fluide de matière.

2 L'instabilité gravitationnelle grâce à l'intégration numérique des équations ADM

2.1 Principe de la méthode

Pour intégrer numériquement les formalismes hamiltoniens sous contraintes vus au chapitre précédent, nous procéderons avec la méthode dite d'*évolution libre* (ou "*free evolution*" cf. [SS99]). Celle-ci consiste à résoudre tout d'abord le problème aux valeurs initiales (ou problème de Cauchy), c'est-à-dire à trouver un ensemble de conditions initiales qui vérifient les contraintes, pour ensuite propager ces conditions initiales avec les équations d'Hamilton. Enfin, en vue de tester la cohérence de la solution numérique, on contrôle le niveau de violation des contraintes au cours de la propagation, sa stabilisation éventuelle et la précision totale atteinte.

Toutefois, il aurait été possible de procéder autrement pour la résolution des équations hamiltoniennes présentées dans ce travail. Nous aurions pu utiliser les contraintes pour modifier l'aspect des équations d'Hamilton à propager, par exemple en résolvant la contrainte du super-hamiltonien par rapport aux termes quadratiques dans les moments et en injectant le résultat dans les équations d'Hamilton⁴. Cette manipulation pourrait permettre de régler certains problèmes d'instabilité numérique. Cependant, nous ne rentrerons pas ici dans un long et fastidieux comparatif de méthodes numériques et des diverses avatars des équations, adéquats ou non, dans la mesure où nous nous intéressons de manière qualitative au mécanisme d'instabilité gravitationnelle, du moins en ce qui concerne les travaux exposés aux chapitres 4, 5 et 6.

2.2 Problème de Cauchy

Plaçons-nous tout d'abord dans la jauge synchrone $N(\chi, t) = 1$, $N_\chi(\chi, t) = 0$, adéquate aux faibles champs gravitationnels, et réécrivons les équations d'Hamilton (3.28-3.31) du champ gravitationnel dans cette jauge, avec les termes de matière cette fois :

$$\dot{\mu} = \frac{1}{4}e^{-\mu-2\lambda}(\pi_\mu - \pi_\lambda) \quad (4.30)$$

$$\dot{\lambda} = -\frac{1}{4}e^{-\mu-2\lambda}\pi_\mu \quad (4.31)$$

$$\dot{\pi}_\mu = 2e^{-\mu} \left(e^{2\mu} - \lambda'^2 e^{2\lambda} \right) + \frac{\pi_\mu}{8}e^{-\mu-2\lambda}(\pi_\mu - 2\pi_\lambda) + 16\pi e^{\mu+2\lambda}T_1^1 \quad (4.32)$$

$$\dot{\pi}_\lambda = 4e^{-\mu+2\lambda} \left(\mu'\lambda' - \lambda'^2 - \lambda'' \right) + \frac{\pi_\mu}{4}e^{-\mu-2\lambda}(\pi_\mu - 2\pi_\lambda) + 32\pi e^{\mu+2\lambda}T_2^2 \quad (4.33)$$

⁴D'après l'idée originale de A. Moussiaux, communication personnelle.

où $T_1^1 = T_2^2 = K\rho$ ($c = 1$) et $\rho = -T_0^0$ est la densité. Les contraintes sont alors données par

$$\begin{aligned} \mathcal{H} = 0 \quad \equiv \quad & e^{-\mu+2\lambda} \left(-4\mu'\lambda' + 6\lambda'^2 + 4\lambda'' \right) - 2e^\mu + \frac{\pi_\mu}{8} (\pi_\mu - 2\pi_\lambda) e^{-\mu-2\lambda} \\ & + 16\pi e^{\mu+2\lambda} \rho = 0 \end{aligned} \quad (4.34)$$

$$\mathcal{H}_1 = 0 \quad \equiv \quad \mu'\pi_\mu + \lambda'\pi_\lambda - \pi'_\mu = 0. \quad (4.35)$$

Il est aisé de vérifier que les équations (4.30-4.35) redonnent bien les équations des cosmologies de Friedmann-Lemaître (avec $\Lambda = 0$, $\kappa = 8\pi$, $G = c = 1$) :

$$\left(\frac{\dot{R}}{R} \right)^2 = \frac{\kappa}{3} \rho + \frac{k}{R^2} \quad (4.36)$$

$$2\frac{\ddot{R}}{R} + \left(\frac{\dot{R}}{R} \right)^2 = -\kappa p - \frac{k}{R^2} \quad (4.37)$$

pour les valeurs homogènes des champs canoniques :

$$\begin{aligned} \mu^B &= \log R \\ \lambda^B &= \log R + \log \Sigma \\ \pi_\mu^B &= -4\dot{R}R^2\Sigma^2 \\ \pi_\lambda^B &= -8\dot{R}R^2\Sigma^2 \end{aligned} \quad (4.38)$$

avec $\Sigma(\chi)$ et $R(t)$ les fonctions de la métrique de Friedmann-Lemaître vues au chapitre 2, § 5.2. Nous utiliserons souvent l'exposant B pour désigner les grandeurs se rapportant au fond homogène (*background*) sur lequel germent les fluctuations.

Nous voici donc confrontés à l'ardu problème de résoudre un système contraint de quatre équations d'Hamilton à cinq inconnues (les deux couples de variables canoniques (μ, π_μ) et (λ, π_λ) et la densité ρ) avec deux contraintes pour seuls garde-fous. Fort heureusement, en vertu de l'équation de continuité $T_0^\nu{}_{|\nu} = 0$, ce problème n'est qu'à quatre degrés de liberté puisque l'on peut relier univoquement la densité à la géométrie par l'intermédiaire de la relation

$$\dot{\rho} = -(1 + K) (\dot{\mu} + 2\dot{\lambda}) \rho \quad (4.39)$$

dans le repère comobile où le fluide est considéré comme au repos. L'équation précédente s'intègre directement :

$$\rho(\chi, t) = F(\chi) e^{-(1+K)(\mu+2\lambda)} \quad (4.40)$$

où $F(\chi)$ est une fonction arbitraire strictement positive. Si, au temps initial $t = 0$, nous avons la valeur suivante de la densité

$$\rho(\chi, 0) = \rho_0(\chi) \quad (4.41)$$

et des définitions analogues pour les autres variables, alors nous pouvons écrire

$$F(\chi) = \rho_0(\chi)e^{-(1+K)(\mu_0+2\lambda_0)}. \quad (4.42)$$

Venons-en au **problème de Cauchy**, c'est-à-dire le **problème aux valeurs initiales** (“*Initial Value Problem*”, IVP) qui consiste à résoudre les contraintes du super-hamiltonien (4.34) et du super-moment (4.35), moyennant la donnée des distributions initiales de certains champs. Nous avons adopté les hypothèses suivantes :

- Plaçons-nous quelques temps après le Big Bang en vue d'éviter les affres de la singularité primordiale : $R(0) = R_0 = 1$. Le lecteur attentif aura tôt fait de remarquer qu'il convient de translater adéquatement les solutions (4.14-4.16) décrivant les univers de Friedmann-Lemaître avec constante cosmologique nulle et rempli d'un fluide de matière non-relativiste ($K = 0$ et $M = \frac{\kappa}{6} \rho_0 R_0^3$ dans (4.14-4.16)). Dans le cas d'un univers dominé par la radiation ($K = 1/3$), l'équation de Friedmann (4.9) admet pour solutions, dans la jauge synchrone $N = 1$, les relations (2.83) qui doivent également être translaturées de sorte que $R_0 = 1$.
- Posons $\lambda_0 = \ln \Sigma(\chi)$. Ainsi, la coordonnée comobile χ s'identifie aux distances circonférentielles mesurées au temps initial $t = 0$.
- Finalement, perturbons les champs suivants autour de leurs solutions homogènes

$$\dot{\lambda}_0 = \sqrt{\frac{\kappa}{3}\rho_0^B - k} + \epsilon_h(\chi) \quad (4.43)$$

$$\rho_0 = \rho_0^B (1 + \delta_0(\chi)) \quad (4.44)$$

$$\pi_{\mu,0} = -4\dot{\lambda}_0 e^{\mu_0} \Sigma^2(\chi) \quad (4.45)$$

où ρ_0^B est la densité initiale du fond, définie comme un paramètre et où μ_0 sera déterminé ultérieurement⁵.

La relation (4.43) correspond donc à une perturbation de la vitesse radiale de la fluctuation alors que la suivante (4.45) définit le contraste de densité initial de la perturbation. Les fonctions ϵ_h et δ_0 définissent la forme initiale de la perturbation. En pratique, celle-ci sera choisie en fonction des exigences sur les conditions de bord. Nous y reviendrons.

Posons à présent le problème de Cauchy à partir des conditions initiales (4.43-4.45) : résolvons d'abord la contrainte du super-moment (4.35) par rapport à $\pi_{\lambda,0}$ que nous réinjectons dans le super-hamiltonien (4.34) pour obtenir l'équation suivante

$$y' = -\frac{y}{\chi} + \frac{1}{\chi} + 8\pi\rho_0^B \chi (2\epsilon_h + \epsilon_h^2 - \delta_0) + \frac{16\pi}{3}\rho_0^B \epsilon_h' (1 + \epsilon_h) \chi^2 \quad (4.46)$$

⁵Les indices 0 indique la valeur du champ correspondant prise en $t = 0$: $f(\chi, 0) = f_0(\chi)$.

où nous avons supposé un univers plat ($\Sigma(\chi) = \chi$ et $k = 0$), pour lequel $H_0^2 = \dot{\lambda}_0^2 = \frac{8\pi}{3}\rho_0^B$ et où nous avons posé

$$y = e^{-2\mu_0}.$$

La relation (4.46) est une équation différentielle linéaire du premier ordre à coefficients non constants et s'intègre trivialement en fonction des quadratures des fonctions ϵ_h et δ_0 . L'évaluation numérique des quadratures sera effectuée sur base de la méthode de Bode (avec une précision en $\mathcal{O}(h^7 f^{(6)})$, avec h le pas d'intégration et $f^{(i)}$ la dérivée d'ordre i de la fonction à intégrer, cf. [PTVF92]) à laquelle nous avons ajouté un raffinement de la discrétisation.

2.3 Equations d'Hamilton

La forme des équations d'Hamilton (4.30-4.33) ne se prête pas de manière optimale à la simulation d'instabilités gravitationnelles. En effet, la solution numérique doit d'abord retrouver les solutions homogènes avant de s'attaquer aux instabilités elles-mêmes, ce qui résulte en une petite perte de précision et de vitesse de calcul, ainsi qu'à des difficultés concernant les conditions de bord. Après avoir expérimenté ces désagréments, il nous est paru plus intéressant de réécrire le système (4.30-4.33) en vue d'obtenir une forme plus adaptée à l'étude de l'évolution des fluctuations et, dans la foulée, de simplifier les conditions de bord. Le changement de variables que nous allons expliciter dans un instant rend la méthode plus rapide et plus précise.

Supposons tout d'abord que nous nous plaçons dans un univers plat ($\Sigma(\chi) = \chi$, $k = 0$ dans 2.76). Ceci se justifie si on considère que la taille des fluctuations que nous examinons est très inférieure au rayon de courbure de l'univers⁶ et si la constante cosmologique est identiquement nulle. Cette approximation se justifiera encore plus dans le cadre de notre étude des champs de Yang-Mills, puisque ceux-ci ne sont censés avoir eu une importance cosmologique que dans les tout premiers temps de l'univers, lorsque la courbure était négligeable devant la densité dans l'équation de Friedmann (4.9).

Procédons à présent au changement de variables suivant :

$$\begin{aligned} e^\mu &= m(\chi, t) R(t) \\ e^{2\lambda} &= l(\chi, t) R^2(t) \chi^2 \\ \pi_\mu &= -4 R^2(t) \chi^2 \pi_m(\chi, t) \\ \pi_\lambda &= -8 R^2(t) \chi^2 \pi_l(\chi, t) \end{aligned} \tag{4.47}$$

de sorte que les solutions homogènes (m^B , l^B , π_m^B , π_l^B) correspondent maintenant à l'ensemble de constantes par rapport à χ : $(1, 1, \dot{R}, \dot{R})$. Dans ces nouvelles variables, les

⁶Qui, selon les observations récentes, pourrait bien être infini.

contraintes (4.34-4.35) deviennent

$$\begin{aligned}\mathcal{H}_1 = 0 &\equiv \frac{m'}{m}\pi_m\chi + \frac{l'\chi + 2l}{l}\pi_l - 2\pi_m - \chi\pi'_m = 0 \\ \mathcal{H} = 0 &\equiv -\frac{m'(l'\chi + 2l)}{m^2\chi} - \frac{(l'\chi + 2l)^2}{4ml\chi^2} + \frac{(l''\chi^2 + 4\chi l' + 2l)}{m\chi^2} - \frac{m}{\chi^2} \\ &+ \frac{\pi_m}{ml}(\pi_m - 4\pi_l) + 8\pi R^2 m l \rho = 0.\end{aligned}\quad (4.48)$$

Quant aux équations d'Hamilton (4.30-4.33), elles s'écrivent

$$\begin{aligned}\dot{m} &= -\frac{\dot{R}}{R}m - \frac{\pi_m - 2\pi_l}{Rl} \\ \dot{l} &= -2\frac{\dot{R}}{R}l + 2\frac{\pi_m}{mR} \\ \dot{\pi}_m &= -2\frac{\dot{R}}{R}\pi_m - \frac{m}{2R\chi^2} + \frac{(l'\chi + 2l)^2}{8mlR\chi^2} - \frac{\pi_m}{2mlR}(\pi_m - 4\pi_l) \\ &\quad - 4\pi R m l K \rho \\ \dot{\pi}_l &= -2\frac{\dot{R}}{R}\pi_l - \frac{m'(l'\chi + 2l)}{4m^2R\chi} + \frac{1}{4mR\chi^2}\left(2l'\chi + l''\chi^2 + \frac{l'^2\chi^2}{2l}\right) \\ &\quad - \frac{\pi_m}{2mlR}(\pi_m - 4\pi_l) - 4\pi R m l K \rho.\end{aligned}\quad (4.49)$$

Il est temps d'expliquer brièvement la méthode d'intégration utilisée en vue d'intégrer les relations (4.48-4.49). La même idée sera réutilisée pour l'étude de l'instabilité gravitationnelle des champs de YM au chapitre suivant.

Une fois le problème de Cauchy résolu, nous disposons de tous les champs au temps initial, donnés sous leur forme discrétisée. Définissons en effet la discrétisation uniforme de l'intervalle de coordonnées comobiles $[\chi_{MIN}, \chi_{MAX}]$ par

$$\chi_i = \chi_{MIN} + \Delta\chi(i - 1) \quad (4.50)$$

avec $i = 1, \dots, N_\chi + 1$ et $\Delta\chi = (\chi_{MAX} - \chi_{MIN})/N_\chi$. Les champs discrétisés s'écrivent alors, au temps t ,

$$f(\chi, t) \equiv f(\chi, t_n) = f_i^n \quad (4.51)$$

où t_n désigne la $n^{\text{ème}}$ étape temporelle ($t_n = n\Delta t$).

Le système (4.49) s'écrit donc, en toute généralité,

$$\dot{\vec{F}} = \vec{G}(F_j, F'_j, F''_j, \chi, t). \quad (4.52)$$

Afin de résoudre celui-ci, nous utiliserons un schéma numérique de différences finies explicite et du second ordre à la fois en temps et en espace, analogue au schéma *leapfrog* pour les équations de diffusion (cf. [PTVF92]). Les dérivées spatiales du premier et du second ordre dans (4.52) s'écriront alors (à l'étape $t \equiv t_n$)

$$\begin{aligned} f'(\chi, t) &\approx \frac{f_{i+1}^n - f_{i-1}^n}{2\Delta\chi} \\ f''(\chi, t) &\approx \frac{f_{i+1}^n - 2f_i^n + f_{i-1}^n}{\Delta\chi^2} \end{aligned} \quad (4.53)$$

et les dérivées temporelles adopteront des formes semblables. Le système (4.52) se réécrit alors

$$\begin{aligned} \vec{F}^{n+1} = \vec{F}^{n-1} \dots \\ \dots + 2\Delta t \vec{G} \left(F_j^n, \frac{(F_j)_{i+1}^n - (F_j)_{i-1}^n}{2\Delta\chi}, \frac{(F_j)_{i+1}^n + (F_j)_{i-1}^n - 2(F_j)_i^n}{\Delta\chi^2}, \chi_i, t_n \right) \end{aligned} \quad (4.54)$$

où Δt est le pas d'intégration en temps, séparant l'étape n de la suivante $n + 1$. Comme tout schéma explicite du second ordre, celui-ci ne démarre pas seul, puisque la résolution du problème de Cauchy nous fournit \vec{F}^0 et non \vec{F}^{-1} . La solution est de faire un premier pas d'intégration rétrograde ($\Delta t \rightarrow -\Delta t$), avec un schéma du premier ordre en temps (schéma *forward time centered space* ou *FTCS*, cf. [PTVF92]) :

$$\vec{F}^{-1} = \vec{F}^0 - \Delta t \vec{G} \left(F_j^0, \frac{(F_j)_{i+1}^0 - (F_j)_{i-1}^0}{2\Delta\chi}, \frac{(F_j)_{i+1}^0 + (F_j)_{i-1}^0 - 2(F_j)_i^0}{\Delta\chi^2}, \chi_i, 0 \right). \quad (4.55)$$

Il reste encore à spécifier des **conditions de bord** sur l'intervalle de discrétisation spatiale. Une condition commode, mais nullement exhaustive, est d'étudier l'instabilité gravitationnelle de *coquilles* centrées au milieu de l'intervalle de coordonnées comobiles $[\chi_{MIN}, \chi_{MAX}]$ et dont le profil s'évanouit assez rapidement sur les bords dudit intervalle. Ainsi, les conditions de bord consisteront naturellement à imposer que les champs prennent sur les bords leurs valeurs homogènes, i.e.

$$\begin{aligned} f_{1,j} &= f_{1,j}^B \\ f_{N_\chi+1,j} &= f_{N_\chi+1,j}^B \end{aligned} \quad (4.56)$$

où l'exposant B désigne les solutions du fond homogène (4.38). Ces conditions seront bien vérifiées au bord de la grille, à la condition que les perturbations du fond s'évanouissent sur les bords de l'intervalle, c'est pourquoi nous choisirons comme fonctions ϵ_h et δ_0 , perturbatrices des conditions initiales dans (4.43-4.44), des (dérivées de) gaussiennes en vue d'assurer cette décroissance rapide.

Les équations (4.52-4.55) sont, à quelques accommodements d'usage près, les équations à implémenter. Ce schéma explicite extrêmement simple, s'il présente l'avantage d'être facile à programmer — même pour des équations aussi complexes que celles du système EYM — ne s'en révèle pas moins instable à l'usage. Aussi devons-nous adopter une condition de Courant⁷ très forte en vue d'obtenir un résultat significatif. Mais comme nous sommes intéressés par l'aspect qualitatif de l'étude de l'instabilité gravitationnelle, il suffira amplement à la tâche. Des études ultérieures devraient améliorer cette méthode en vue de tirer des prédictions plus quantitatives. Quelques commentaires à ce sujet seront exposés au chapitre suivant.

2.4 Résultats

Nous proposons aux figures 4.1 à 4.8 une illustration des résultats de la méthode exposée ci-avant. La figure 4.1 représente les erreurs relatives commises sur les différents champs au cours de la simulation, dans le cas d'un univers de poussières ($K = 0$). Si l'erreur sur des grandeurs comme les moments π_m et π_l ou le contraste de densité δ saturent au cours du temps, ce n'est guère le cas de celles sur les coefficients de la métrique qui vont croissantes. Ceci s'explique naturellement par le caractère exclusivement explicite du schéma de différences finies utilisé ici.

On notera par ailleurs les effets de bord de grille qui se traduisent par des gradients importants à ces endroits. Ces effets sont même dominants dans la violation des contraintes (cf. Figure 4.2), et une analyse plus complète montre que la divergence du schéma, consécutive à son instabilité intrinsèque, apparaît en premier lieu en bord de grille. En effet, on voit que la valeur des contraintes en milieu de grille est relativement stable au cours du temps pour la condition de Courant utilisée ($\Delta\chi = 9 \times 10^{-2}$, $\Delta t = 10^{-5}$), alors qu'elle diverge sur les bords (cf. figure 4.2 (b)). Ainsi, l'instabilité du schéma est à mettre sur le compte de l'approche explicite choisie ainsi que sur la violation des conditions de bord. Toutefois, pour l'étude qualitative de l'instabilité gravitationnelle des champs de YM que nous désirons mener, nous pouvons nous contenter de réduire ces effets en réduisant le pas d'intégration temporel par rapport au spatial, de même qu'en prenant des fluctuations plus rapidement décroissantes sur les bords de l'intervalle.

Les figures 4.3 et 4.4 représentent respectivement les conditions initiales sur le contraste de densité et sa vitesse ainsi que les perturbations de la métrique qu'elles engendrent en vue

⁷Cette condition illustre le lien entre les pas de discrétisations spatiale et temporelle d'un schéma de différences finies que l'on doit adopter en vue de rendre ce dernier stable. Par exemple, dans le cas de l'équation d'onde, le schéma sera dit stable au sens de Courant si les points utilisés pour la propagation du schéma se situent à l'extérieur du cône de lumière associé au point que l'on désire calculer, c'est-à-dire si $\Delta x \geq c\Delta t$ (cf. [PTVF92]).

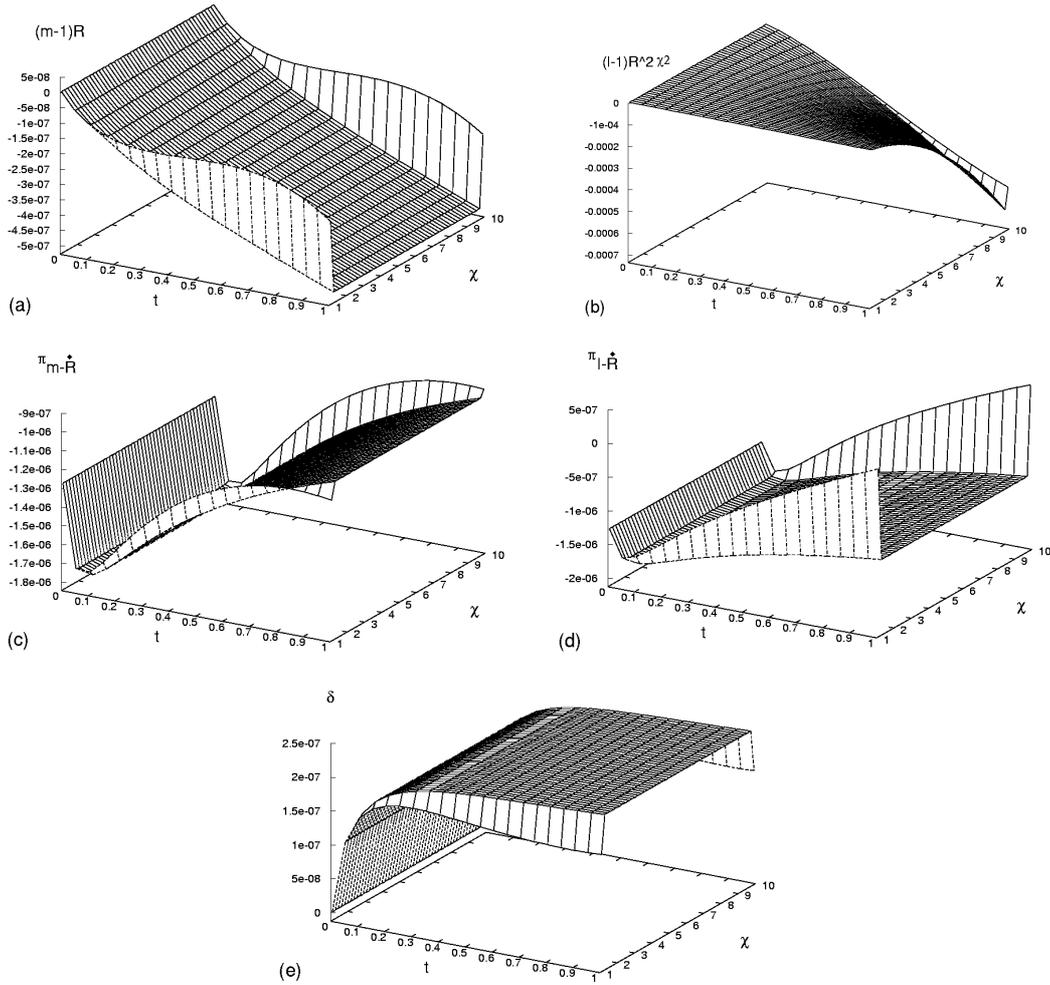


Figure 4.1 – Erreurs relatives sur les champs homogènes ($h_\epsilon = \delta_0 = 0$) pour un univers de poussières ($K = 0$). (a) $(m - 1) R(t)$ (b) $(l - 1) R(t)\chi^2$ (c) $\pi_m - \dot{R}$ (d) $\pi_l - \dot{R}$ (e) $\frac{\rho}{\rho_B} - 1$ ($\rho_0^B = 15$, $\Delta\chi = 9 \times 10^{-2}$, $\Delta t = 10^{-5}$)

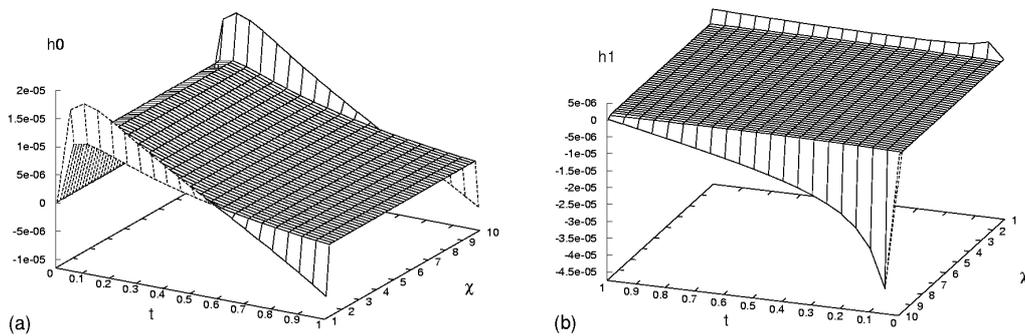


Figure 4.2 – Valeurs des contraintes pour la solution homogène de la Figure 4.1 (a) \mathcal{H} (b) \mathcal{H}_1 (mêmes paramètres que ci-dessus)

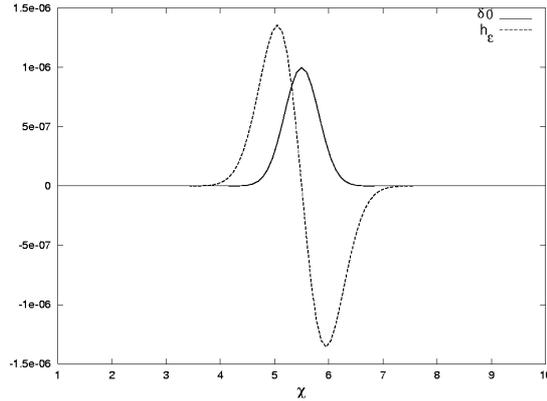


Figure 4.3 – Perturbations initiales de la densité δ_0 (trait plein) et de la vitesse radiale h_e (pointillés) pour les simulations des figures suivantes

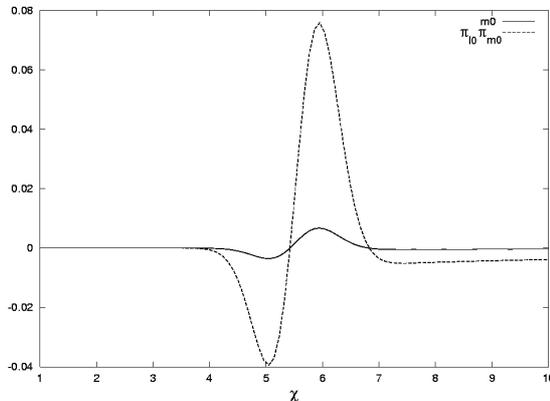


Figure 4.4 – Résultats du problème aux valeurs initiales avec les données de la figure précédente : m_0 (trait plein), $\pi_{m,0}$ (pointillés), $\pi_{l,0}$ étant indiscernable de $\pi_{m,0}$

de satisfaire les contraintes au temps initial (par l'intermédiaire du problème de Cauchy)⁸.

Les figures 4.5 à 4.8 représentent l'évolution des perturbations des champs et la violation résultante des contraintes pour un univers de poussières ($K = 0$, figures 4.5 et 4.6) et de radiations ($K = 1/3$, figures 4.7 et 4.8). Les perturbations des moments π_l et π_m sont difficilement discernables à l'œil nu, aussi nous avons choisi de n'en présenter qu'une. On notera l'évolution croissante des perturbations de la métrique, comme le prévoit la théorie de perturbation (cf. [PEE93] et [LL61]) et la décroissance des perturbations de leurs moments associés, dissipées par l'expansion. Les contrastes de densité, quant à eux, répondent manifestement bien au comportement prédit par le traitement perturbatif, c'est-à-dire un comportement en $t^{2/3}$ pour les poussières et linéaire pour les radiations. Enfin, les figures

⁸Les perturbations des moments π_l et π_m sont pratiquement confondues.

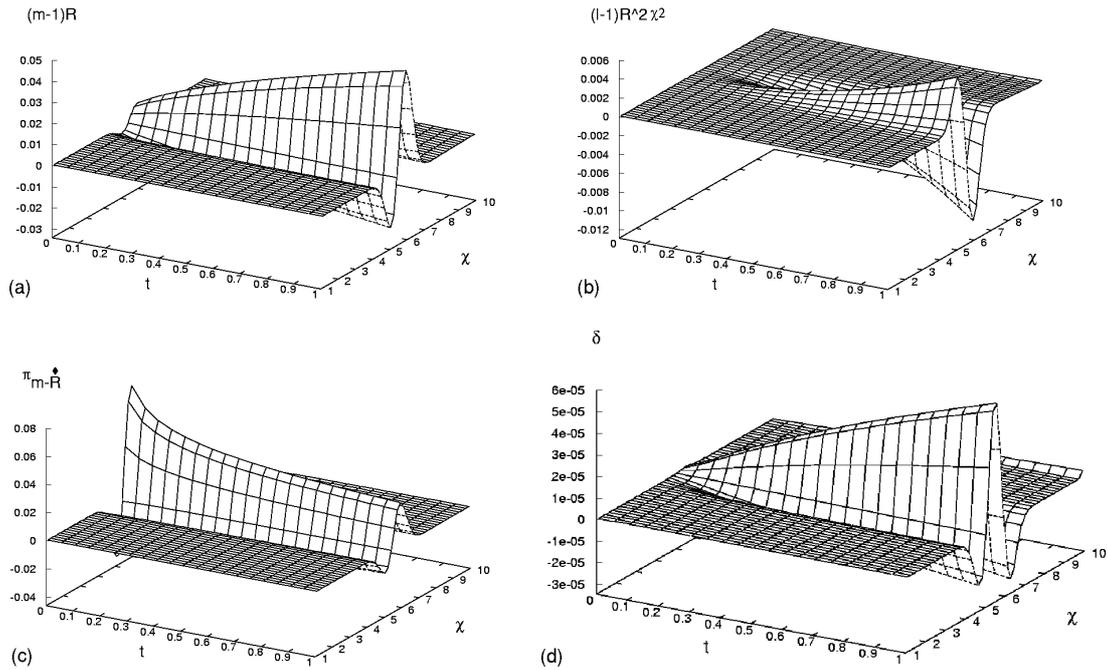


Figure 4.5 – Perturbations des champs pour un univers de poussières ($K = 0$) avec les données issues du problème de Cauchy (figures 4.3 et 4.4). (a) $(m - 1)R(t)$ (b) $(l - 1)R(t)\chi^2$ (c) $\pi_m - \dot{R}$ (d) $\frac{\rho}{\rho^B} - 1$ ($\rho_0^B = 15$, $\Delta\chi = 9 \times 10^{-2}$, $\Delta t = 10^{-5}$)

4.6 et 4.8 représentent la violation des contraintes au cours du temps. La violation des contraintes en milieu de grille est purement due aux erreurs de troncature dans l'évaluation des contraintes et peut être diminuée en augmentant le nombre de points de discrétisation spatiale. L'information intéressante est le comportement général des contraintes au cours du temps : la violation est relativement stable pour l'univers de poussières (figure 4.6) ainsi que pour la contrainte hamiltonienne de l'univers de radiations (figure 4.8 (a)) mais elle est linéairement croissante pour la contrainte du super-moment radial (figure 4.8 (b)). L'ordre de grandeur des contraintes reste toutefois quelques ordres de grandeur en-dessous de la valeur de perturbation des champs.

En guise de conclusion, nous pouvons donc dire que cette méthode s'avère satisfaisante pour l'étude numérique qualitative de l'instabilité gravitationnelle et peut donc être adaptée au cas (nettement) plus complexe des champs de Yang-Mills. Ceci fera l'objet du chapitre suivant.

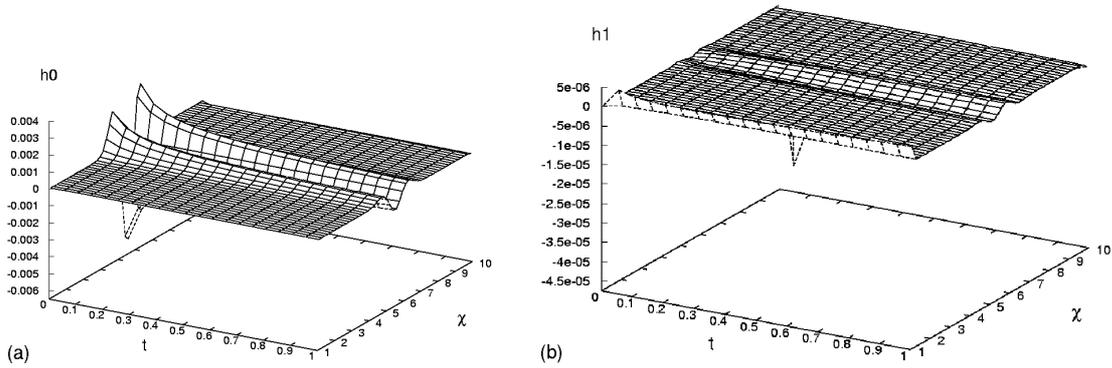


Figure 4.6 – Valeurs des contraintes pour la solution de la figure 4.5 (a) \mathcal{H} (b) \mathcal{H}_1 (mêmes paramètres que ci-dessus)

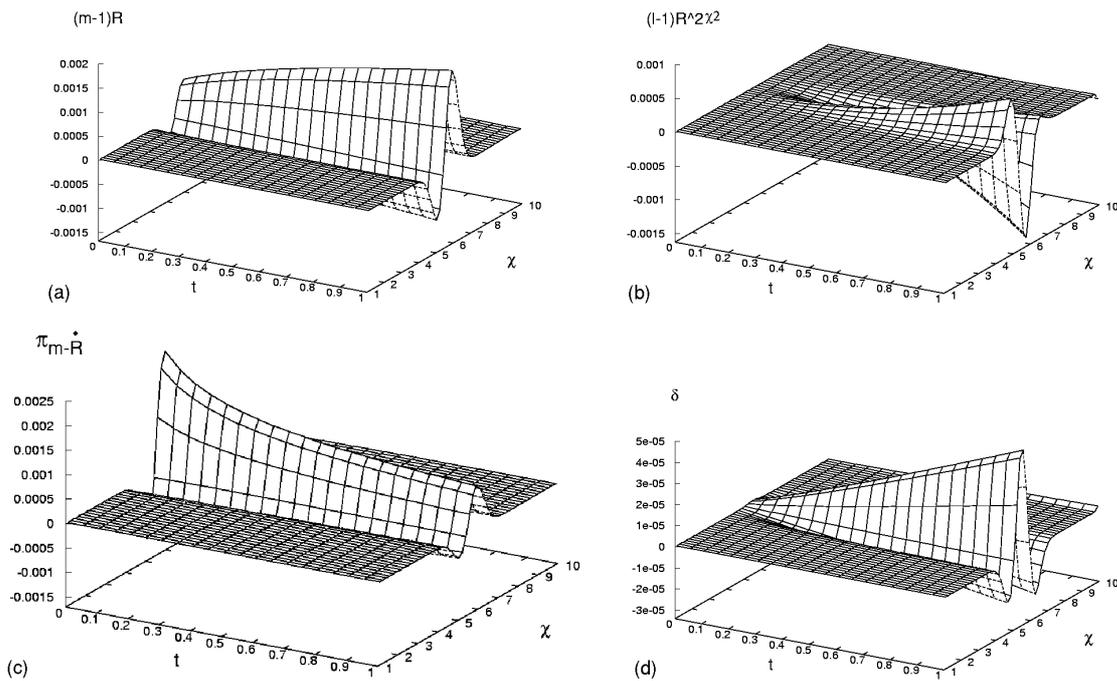


Figure 4.7 – Perturbations des champs pour un univers de radiations ($K = 1/3$) avec les données issues du problème de Cauchy (figures 4.3 et 4.4). (a) $(m-1)R(t)$ (b) $(l-1)R(t)\chi^2$ (c) $\pi_m - \dot{R}$ (d) $\frac{\rho}{\rho^B} - 1$ ($\rho_0^B = 1.5$, $\Delta\chi = 9 \times 10^{-2}$, $\Delta t = 10^{-5}$)

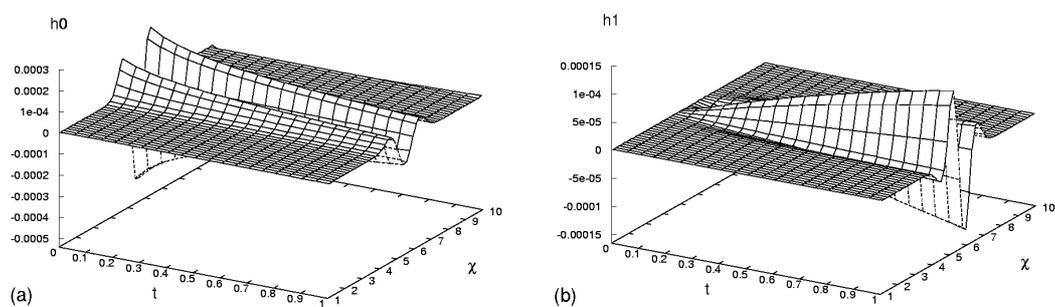


Figure 4.8 – Valeurs des contraintes pour la solution de la figure 4.7 (a) \mathcal{H} (b) \mathcal{H}_1

Chapitre 5

Instabilité gravitationnelle des champs de Yang-Mills

*” Joie, discrète, humble et fidèle
Qui murmure dans les eaux,
Dans le froissement des ailes
Et les hymnes des oiseaux.”*

F. Schiller, *” Hymne à la joie”*.

Sommaire

1	Intégration numérique des équations EYM	120
1.1	Problème de Cauchy	122
1.2	Propagation par les équations d’Hamilton	124
2	Résultats	128

1 Intégration numérique des équations EYM

Avant d'aller plus loin, prenons tout d'abord la peine de rappeler par le détail les équations du système EYM à intégrer. Celles-ci s'écrivent (cf. chapitre 3) :

$$\mathcal{H}_1 = 0 \equiv -\mu' \pi_\mu - \lambda' \pi_\lambda + \pi'_\mu + 16\pi N e^{2\lambda+\mu} T_1^0 = 0 \quad (5.1)$$

$$\begin{aligned} \mathcal{H} = 0 \equiv & \frac{1}{8} e^{-\mu-2\lambda} \left\{ 8e^{4\lambda} (-4\mu' \lambda' + 6\lambda'^2 + 4\lambda'') - 16e^{2\mu+2\lambda} + \pi_\mu^2 - 2\pi_\mu \pi_\lambda \right\} \\ & - 16\pi e^{2\lambda+\mu} T_0^0 = 0, \end{aligned} \quad (5.2)$$

pour les contraintes du super-hamiltonien et du super-moment et

$$\begin{aligned} \dot{\mu} &= \frac{1}{4} e^{-\mu-2\lambda} N (\pi_\mu - \pi_\lambda) \\ \dot{\lambda} &= -\frac{1}{4} e^{-\mu-2\lambda} N \pi_\mu \\ \dot{\pi}_\mu &= \frac{1}{8} e^{-\mu-2\lambda} N \left\{ 16e^{2\lambda} (e^{2\mu} - \lambda'^2 e^{2\lambda}) + N \pi_\mu (\pi_\mu - 2\pi_\lambda) \right\} \\ & \quad + 16\pi N e^{2\lambda+\mu} T_1^1 \\ \dot{\pi}_\lambda &= \frac{1}{4} e^{-\mu-2\lambda} N \left\{ 16e^{4\lambda} (\mu' \lambda' - \lambda'^2 - \lambda'') + \pi_\mu (\pi_\mu - 2\pi_\lambda) \right\} \\ & \quad + 32\pi N e^{2\lambda+\mu} T_2^2 \end{aligned} \quad (5.3)$$

pour les équations d'Einstein. Les composantes du tenseur du champ de YM sont

$$\begin{aligned} T_0^0 &= -e^{-4\lambda} \frac{\pi_b^2}{2} - e^{-2\lambda-2\mu} \pi_c^2 - \frac{c'^2 N^2 + e^{2\mu} a^2 c^2 + N^2 b^2 c^2}{N^2} e^{-2\lambda-2\mu} \\ & \quad - e^{-4\lambda} \frac{(c^2 - 1)^2}{2} \end{aligned} \quad (5.4)$$

$$\begin{aligned} T_1^1 &= -e^{-4\lambda} \frac{\pi_b^2}{2} + e^{-2\lambda-2\mu} \pi_c^2 + \frac{c'^2 N^2 + e^{2\mu} a^2 c^2 + N^2 b^2 c^2}{N^2} e^{-2\lambda-2\mu} \\ & \quad - e^{-4\lambda} \frac{(c^2 - 1)^2}{2} \end{aligned} \quad (5.5)$$

$$T_2^2 = \frac{e^{-4\lambda}}{2} (\pi_b^2 + (c^2 - 1)^2) \quad (5.6)$$

$$T_1^0 = -2 \frac{e^{-2\lambda}}{N^2} (N e^{-\mu} \pi_c c' + abc^2) = -N^{-2} e^{2\mu} T_0^1, \quad (5.7)$$

Quant aux équations de Yang-Mills elles-mêmes, nous avons vu qu'elles prenaient la forme d'une contrainte :

$$\mathcal{G}^3 = 0 \equiv \pi'_b + 2 \frac{e^\mu}{N} ac^2 = 0, \quad (5.8)$$

à laquelle s'ajoutent les équations d'Hamilton suivantes

$$\begin{aligned}
\dot{b} &= a' + Ne^{\mu-2\lambda}\pi_b \\
\dot{c} &= Ne^{-\mu}\pi_c \\
\dot{\pi}_b &= -2Ne^{-\mu}bc^2 \\
\dot{\pi}_c &= \frac{e^\mu}{N}a^2c + (Ne^{-\mu}c')' - Ne^{-\mu}b^2c - Ne^{\mu-2\lambda}c(c^2 - 1) \\
\dot{a} &= N^2 e^{-2\mu} \left(b' + 2\frac{bc'}{c} - \mu' b \right) - 2N e^{-\mu} \frac{a\pi_c}{c} - \frac{N}{4} e^{-\mu-2\lambda}(\pi_\mu - \pi_\lambda)a \\
&\quad + \frac{\dot{N}}{N}a.
\end{aligned} \tag{5.9}$$

Pour rappel, la solution homogène de Gal'tsov-Volkov s'obtient à partir de ce formalisme hamiltonien en posant, dans la jauge conforme $N = R(t)$ et $N_\chi = 0$,

$$\begin{aligned}
\mu^B &= \log R \\
\lambda^B &= \log R + \log \Sigma \\
\pi_\mu^B &= -4\dot{R}R\Sigma^2 \\
\pi_\lambda^B &= -8\dot{R}R\Sigma^2 \\
c^B(\chi, t) &= \sqrt{1 + \Sigma^2(\sigma^2 - k)} \\
a^B(\chi, t) &= -\dot{\sigma}\Sigma \frac{\sqrt{1 - k\Sigma^2}}{1 + \Sigma^2(\sigma^2 - k)} \\
b^B(\chi, t) &= \sigma\Sigma^2 \frac{(\sigma^2 - k)}{1 + \Sigma^2(\sigma^2 - k)} \\
\pi_b^B(\chi, t) &= \dot{\sigma}\Sigma^2 \\
\pi_c^B(\chi, t) &= \frac{\dot{\sigma}\sigma\Sigma^2}{\sqrt{1 + \Sigma^2(\sigma^2 - k)}}.
\end{aligned} \tag{5.10}$$

Pour l'étude de l'instabilité gravitationnelle, nous aurons encore une fois recours à la méthode de “*free evolution*” en résolvant le problème de Cauchy, puis en propageant les distributions initiales des champs au cours du temps grâce aux équations d'Hamilton. Mais avant d'entrer plus encore dans le détail de la méthode, donnons quelques commentaires sur les choix de jauge effectués.

D'une part, nous choisirons la jauge conforme pour le champ gravitationnel :

$$N(\chi, t) = R(t)$$

$$N_\chi(\chi, t) = 0$$

puisque nous nous intéressons aux faibles champs gravitationnels produits par les fluctuations de densité. De plus, dans cette jauge conforme, la période d'oscillation de la particule

de Gal'tsov-Volkov (qui décrit la solution homogène du champ de jauge) est une constante, alors qu'elle s'allonge avec le temps synchrone (cf. chapitre 2). Aussi, l'utilisation de la jauge synchrone ($N = 1$) aurait étiré le temps d'évolution caractéristique des fluctuations. Or, comme nous utiliserons pour les champs de YM un schéma purement explicite, il sera essentiel de diminuer ce temps, en vue de conserver la précision de l'intégration numérique, ainsi que d'éviter les divergences.

D'autre part, notre choix de supprimer l'une des composantes du doublet de Higgs en fixant la phase de ce dernier ($\psi = \pi/2$ et donc $d = 0$) a été préféré au formalisme complet, invariant de jauge, pour deux raisons. La première est que ce choix supprime un degré de liberté non physique du système (la phase) et réduit, de ce fait, les erreurs numériques associées au couple d'inconnues (d, π_d), en plus de simplifier de manière non négligeable les autres équations du champ. La seconde raison est la simplicité de l'algorithme de résolution numérique. En effet, en travaillant avec le formalisme complet, invariant de jauge, la composante électrique de la connexion a , qui représente la liberté de faire des transformations de jauge arbitraires pendant l'évolution du système est à déterminer précisément par un choix de jauge. Son rôle est alors tout à fait analogue au quadri-vecteur N_μ du formalisme hamiltonien du champ gravitationnel. Or, en fixant la jauge, l'équation d'Hamilton sur π_d nous fournit ici une équation déterministe pour le potentiel électrique a . Des travaux ultérieurs se devraient de vérifier les résultats obtenus ici, via l'utilisation d'une autre jauge. Un choix judicieux de cette dernière pourrait permettre, par exemple, de traiter les équations de YM avec un schéma implicite.

1.1 Problème de Cauchy

Comme au chapitre 4, nous allons procéder à la résolution des trois contraintes du système EYM (deux pour le champ gravitationnel et une pour le champ de YM) moyennant la donnée de la distribution initiale de certains champs. A l'issue de cette première étape, nous aurons la distribution initiale des neuf champs suivants :

$$(\mu_0, \lambda_0, \pi_{\mu,0}, \pi_{\lambda,0}, a_0, b_0, c_0, \pi_{b,0}, \pi_{c,0})$$

qui vérifient les trois contraintes (5.1), (5.2) et (5.8). Nous nous placerons encore une fois dans un espace euclidien, mais les formules que nous dériverons ici se généralisent aisément aux cas des univers ouvert et fermé.

Parmi les neuf champs inconnus, nous en fixons six de la manière suivante :

- Pour la géométrie, nous adoptons les mêmes conventions que celles du chapitre précédent, à savoir

$$R(0) = 1$$

et

$$\lambda_0 = \ln \chi.$$

Les formules donnant le facteur d'expansion R sont celles vues au chapitre 2 pour un univers de radiation dans la jauge conforme (2.82).

- On perturbe les champs suivants autour de leur valeur homogène (celles données par la paramétrisation de Gal'tsov-Volkov (2.78) vue au chapitre 2, rappelée dans ce chapitre en (5.10)) :

$$\begin{aligned} \dot{\lambda}_0 &= \sqrt{\frac{\kappa}{3}\rho_0^B} + \epsilon_h(\chi) \\ a_0 &= a_0^B + \epsilon_a(\chi) \\ b_0 &= b_0^B + \epsilon_b(\chi) \\ c_0 &= c_0^B + \epsilon_c(\chi) \\ \dot{c}_0 &= \pi_{c,0}^B + \epsilon_{\dot{c}}(\chi), \end{aligned} \tag{5.11}$$

où ρ_0^B est la densité initiale du fond homogène définie comme un paramètre.

Les fonctions de perturbations $\epsilon_i(\chi)$ sont également fournies par l'utilisateur, qui prendra soin d'implémenter les conditions de bord de grille adéquates. Par exemple, dans le cas de l'instabilité gravitationnelle de coquilles, des fonctions rapidement décroissantes en bord de grille doivent être utilisées. Nous nous concentrerons exclusivement sur cette géométrie des fluctuations, en supposant qu'elle n'a pas grande influence sur les principales caractéristiques du mécanisme.

Résolvons à présent la contrainte du super-moment (5.1) par rapport à $\pi_{\lambda,0}$ et la contrainte de YM (5.8) par rapport à μ_0 et substituons les résultats dans la contrainte hamiltonienne (5.2) afin d'obtenir l'équation différentielle suivante pour $\pi_{b,0}$:

$$A\phi'' + B\phi' + C\phi'^3 - 4\pi\phi^2\phi'^3 = 0 \tag{5.12}$$

où nous avons posé $\phi = \pi_{b,0}(\chi) = \pi_b(\chi, 0)$. Les coefficients de l'équation (5.12) s'écrivent

$$\begin{aligned} A &= 8a_0^2 c_0^4 \chi^3 \\ B &= -4\chi^2 \left(2a_0' a_0 c_0^4 \chi + 8\pi c_0'^2 a_0^2 c_0^4 + 4c_0' a_0^2 c_0^3 \chi + 8\pi a_0^2 b_0^2 c_0^6 + a_0^2 c_0^4 \right) \\ C &= 2\dot{\lambda}_0 \dot{\lambda}_0 \chi^5 - 8\pi a_0^2 c_0^2 \chi^2 + 16\pi \chi^3 a_0 b_0 c_0^2 \dot{\lambda}_0 - 4\pi c_0^4 + 8\pi c_0^2 + 3\dot{\lambda}_0^2 \chi^4 - 4\pi \\ &\quad + \chi^2 + 16\pi \chi^3 c_0' \dot{\lambda}_0 \dot{c}_0 - 8\pi \chi^2 \dot{c}_0^2. \end{aligned} \tag{5.13}$$

Dans l'expression ci-dessus, les champs avec un indice 0 sont ceux donnés par l'utilisateur au point (5.11). A partir de la solution $\phi = \pi_{b,0}$ de (5.12), on peut achever de compléter

l'ensemble des neuf champs inconnus à l'aide des relations suivantes

$$\begin{aligned}
\mu_0 &= \ln\left(-\frac{\phi'}{2a_0^2 c_0^2}\right) \\
\pi_{\mu,0} &= -4\dot{\lambda}_0 e^{\mu_0} \chi^2 \\
\pi_{\lambda,0} &= -32\pi e^{\mu_0} c_0' \dot{c}_0 \chi - 4e^{\mu_0} \chi^3 \epsilon_h' - 32\pi e^{\mu_0} a_0 b_0 c_0^2 \chi + 2\pi_{\mu,0} \\
\pi_{c,0} &= e^{\mu_0} \dot{c}_0.
\end{aligned} \tag{5.14}$$

Nous avons utilisé une méthode de relaxation (cf. [PTVF92]) afin d'intégrer (5.12). En effet, utilisant la même discrétisation spatiale pour les champs qu'au chapitre précédent, l'équation (5.12) devient un système de $N_\chi - 2$ équations algébriques non linéaires¹ pour les $N_\chi + 1$ inconnues ϕ_i :

$$\begin{aligned}
A_i \frac{\phi_{i+1} - 2\phi_i + \phi_{i-1}}{\Delta\chi^2} + B_i \frac{\phi_{i+1} - \phi_{i-1}}{2\Delta\chi} + C_i \left(\frac{\phi_{i+1} - \phi_{i-1}}{2\Delta\chi}\right)^3 \\
- 4\pi\phi_i^2 \left(\frac{\phi_{i+1} - \phi_{i-1}}{2\Delta\chi}\right)^3 = 0.
\end{aligned} \tag{5.15}$$

A ces équations, on doit encore ajouter les conditions de bord

$$\begin{aligned}
\phi_1 &= \pi_{b,0}^B(\chi_1) = \dot{\sigma}_0 \chi_{MIN}^2 \\
\phi_{N_\chi+1} &= \pi_{b,0}^B(\chi_{N_\chi+1}) = \dot{\sigma}_0 \chi_{MAX}^2,
\end{aligned} \tag{5.16}$$

où $\dot{\sigma}_0 = \sqrt{\frac{2}{3}\rho_0^B - \sigma_0^4}$ ($R_0 = 1$, $k = 0$ dans (2.80)). La position initiale σ_0 de la particule de Gal'tsov-Volkov dans son potentiel d'interaction $V = \sigma^4$ devient dès lors un autre paramètre de la simulation. Nous avons choisi une méthode de Newton-Raphson multidimensionnelle (cf. [PTVF92]) en vue de résoudre le système (5.15). Le point de départ de la relaxation est constitué par la solution homogène $\phi_i = \pi_{b,0}^B(\chi_i) = \dot{\sigma}_0 \chi_i^2$, nous arrêtons celle-ci lorsque l'erreur sur l'équation (5.12) est saturée.

1.2 Propagation par les équations d'Hamilton

Ici encore, l'intégration directe du système EYM (5.3) à (5.9) nous a montré combien il pouvait être judicieux d'adopter un changement de variables construites sur la base de la solution homogène et isotrope. La liste des nouvelles variables est analogue à celle que nous avons donnée au chapitre 3 (cf. équations (4.47)), mais cette fois dans la jauge conforme

¹Où $N_\chi + 1$ est le nombre de points de discrétisation de l'intervalle $[\chi_{min}, \chi_{max}]$.

$N = R(t)$. Elle s'écrit

$$\begin{aligned}
 e^\mu &= m(\chi, t) R(t) \\
 e^{2\lambda} &= l(\chi, t) R^2(t) \chi^2 \\
 \pi_\mu &= -4 R(t) \chi^2 \pi_m(\chi, t) \\
 \pi_\lambda &= -8 R(t) \chi^2 \pi_l(\chi, t) \\
 a(\chi, t) &= -\frac{\alpha(\chi, t) \chi}{1 + \chi^2 \gamma(\chi, t)} \\
 b(\chi, t) &= \frac{\beta(\chi, t) \chi^2}{1 + \chi^2 \gamma(\chi, t)} \\
 c(\chi, t) &= \sqrt{1 + \chi^2 \gamma(\chi, t)} \\
 \pi_b(\chi, t) &= \pi_\beta(\chi, t) \chi^2 \\
 \pi_c(\chi, t) &= \frac{\pi_\gamma \chi^2}{\sqrt{1 + \chi^2 \gamma(\chi, t)}}
 \end{aligned} \tag{5.17}$$

de sorte que les solutions homogènes (5.10) sont données par l'ensemble de constantes par rapport à χ :

$$(m^B, l^B, \pi_m^B, \pi_l^B, \alpha^B, \beta^B, \gamma^B, \pi_\beta^B, \pi_\gamma^B) = (1, 1, \dot{R}, \dot{R}, \dot{\sigma}, \sigma^3, \sigma^2, \dot{\sigma}, \sigma \dot{\sigma}).$$

Dans ce nouveau jeu de variables, la formulation hamiltonienne du système EYM (5.2) à (5.9) s'écrit, pour les contraintes,

$$\begin{aligned}
 \mathcal{H}_1 = 0 &\equiv \frac{m'}{m} \pi_m \chi + \frac{l' \chi + 2l}{l} \pi_l - 2\pi_m - \chi \pi'_m + 4\pi R^3 m l \chi T_1^0 = 0 \\
 \mathcal{H} = 0 &\equiv -\frac{m' R (l' \chi + 2l)}{m^2 \chi} - \frac{R (l' \chi + 2l)^2}{4ml \chi^2} + \frac{R (l'' \chi^2 + 4\chi l' + 2l)}{m \chi^2} - \frac{mR}{\chi^2} \\
 &\quad + \frac{\pi_m}{mlR} (\pi_m - 4\pi_l) - 8\pi R^3 m l T_0^0 = 0 \\
 \mathcal{G}^3 = 0 &\equiv \pi'_\beta \chi + 2\pi_\beta - 2m\alpha = 0
 \end{aligned} \tag{5.18}$$

et, pour toutes les équations d'Hamilton,

$$\begin{aligned}
\dot{m} &= -\frac{\dot{R}}{R}m - \frac{\pi_m - 2\pi_l}{Rl} \\
\dot{l} &= -2\frac{\dot{R}}{R}l + 2\frac{\pi_m}{mR} \\
\dot{\pi}_m &= -\frac{\dot{R}}{R}\pi_m - \frac{mR}{2\chi^2} + \frac{(l'\chi + 2l)^2 R}{8ml\chi^2} - \frac{\pi_m}{2mlR}(\pi_m - 4\pi_l) \\
&\quad - 4\pi \frac{R^3}{m} l T_1^1 \\
\dot{\pi}_l &= -\frac{\dot{R}}{R}\pi_l - \frac{m'R(l'\chi + 2l)}{4m^2\chi} + \frac{R}{4m\chi^2} \left(2l'\chi + l''\chi^2 + \frac{l'^2\chi^2}{2l} \right) \\
&\quad - \frac{\pi_m}{2mlR}(\pi_m - 4\pi_l) - 4\pi \frac{R^3}{m} l T_2^2 \\
\dot{\beta} &= \frac{2\beta\pi_\gamma\chi^2}{m(1+\chi^2\gamma)} - \frac{\alpha'}{\chi} - \frac{\alpha}{\chi^2} + \frac{m\pi_\beta}{l\chi^2} + \frac{\alpha(2\gamma + \chi\gamma')}{(1+\chi^2\gamma)} + \frac{m}{l}\pi_\beta\gamma \\
\dot{\gamma} &= 2\frac{\pi_\gamma}{m} \\
\dot{\pi}_\beta &= -2\frac{\beta}{m} \\
\dot{\pi}_\gamma &= \frac{(\pi_\gamma^2 - \beta^2)\chi^2}{m(1+\chi^2\gamma)} + \frac{m\alpha^2}{(1+\chi^2\gamma)} - \frac{m'(2\gamma + \chi\gamma')}{2m^2\chi} + \frac{2\gamma + 4\chi\gamma' + \gamma''\chi^2}{2m\chi^2} \\
&\quad - \frac{(2\gamma + \chi\gamma')^2}{4m(1+\chi^2\gamma)} - \frac{m}{l\chi^2}\gamma - \frac{m}{l}\gamma^2 \\
\dot{\alpha} &= -\frac{2\beta + \beta'\chi}{m^2} + \frac{m'}{m^3}\beta\chi + \alpha \left(\frac{\pi_m - 2\pi_l}{mlR} + \frac{\dot{R}}{R} \right).
\end{aligned} \tag{5.19}$$

Quant aux composantes du tenseur énergie-impulsion, elles se réécrivent

$$\begin{aligned}
T_0^0 &= -\frac{1}{2l^2 R^4} (\pi_\beta^2 + \gamma^2) - \frac{(\pi_\gamma^2\chi^2 - (\gamma + \frac{\chi}{2}\gamma')^2 - \beta^2\chi^2)}{m^2 l R^4 (1 + \chi^2\gamma)} \\
&\quad - \frac{\alpha^2}{l R^4 (1 + \chi^2\gamma)} \\
T_2^2 &= \frac{1}{2l^2 R^4} (\pi_\beta^2 + \gamma^2) \\
T_1^0 &= -\frac{2\chi}{l R^4 \chi^2 (1 + \chi^2\gamma)} \left(\frac{\pi_\gamma}{m} \left(\gamma + \frac{\chi}{2}\gamma' \right) - \alpha\beta \right)
\end{aligned} \tag{5.20}$$

T_1^1 est la même expression que T_0^0 , à l'exception du signe des deux derniers termes. Le système (5.19) sera intégré par la même méthode explicite du second ordre que celle utilisée au chapitre précédent. Malgré son caractère instable, elle nous permettra néanmoins d'étudier facilement l'instabilité gravitationnelle des champs de jauge durant quelques oscillations de la particule de Gal'tsov-Volkov. Examinons sans plus attendre les résultats numériques.

2 Résultats

Les tests sur la solution homogène sont concluants et soulignent la grande sensibilité de l'algorithme aux effets de bord, comme au chapitre précédent. Le caractère explicite du schéma se traduit également par une divergence de certains champs avec le temps. Quant aux contraintes, elles demeurent un ordre de grandeur au moins en dessous des erreurs relatives sur les champs, à condition de se trouver loin des bords de l'intervalle spatial, bien sûr. Nous ne développerons pas plus ce thème, dans la mesure où notre changement de variables comprend la solution homogène comme cas trivial et donc qu'il ne s'agit guère d'un grand exploit que de retrouver celle-ci avec précision.

Comme l'instabilité gravitationnelle des champs de YM se révèle à l'analyse bien plus complexe que celle d'un univers rempli de poussières ou d'un gaz de particules relativistes, nous nous efforcerons, dans ce qui va suivre, de faire ressortir les caractéristiques remarquables du mécanisme. Les figures (5.2) à (5.10) représentent l'évolution typique d'une fluctuation des champs de YM au cours des premières oscillations de la particule de Gal'tsov-Volkov². Les figures qui les suivent illustreront, quant à elles, certaines caractéristiques particulières de cette évolution typique. On trouvera également à l'annexe D les graphes complets des simulations numériques utilisées pour illustrer ce chapitre.

Pour les figures (5.2) à (5.10), le problème aux valeurs initiales a été résolu à partir de fonctions perturbatrices en dérivée de gaussienne :

$$\epsilon_i(\chi) = \epsilon \left\{ -\frac{\chi - \chi_F}{w} e^{-\frac{(\chi - \chi_F)^2}{2w}} \right\} \quad (5.21)$$

où ϵ , χ_F et w sont des paramètres indiquant respectivement l'amplitude, la position et la taille de la perturbation dans (5.11). Ce dernier paramètre, w , est relié à **la longueur de cohérence** λ_P de la fluctuation, c'est-à-dire la longueur sur laquelle la perturbation change de manière significative. Par souci de simplicité, nous avons choisi de représenter le mécanisme d'instabilité gravitationnelle pour la perturbation d'un seul champ à la fois parmi l'ensemble

$$(a_0, b_0, c_0, \dot{c}_0, \dot{\lambda}_0).$$

En effet, perturber plusieurs champs à la fois changera l'amplitude des contrastes de densité et de pressions sur l'hypersurface de genre espace initiale déterminée par le problème aux valeurs initiales et affectera, de ce fait, le développement des instabilités sans toutefois

²Le lecteur aura soin de remarquer que dans ces figures, seules quelques dizaines d'itérations ont été sauvegardées, avec quelques points de discrétisation représentés parmi l'ensemble qui entre en compte dans le calcul numérique. Ceci explique l'aspect quelque peu "brisé" de certains graphes.

changer les caractéristiques générales de l'évolution qui seront présentées ici.

La figure (5.1) illustre le résultat du problème aux valeurs initiales pour une perturbation de la forme (5.21) avec $\epsilon_c = 10^{-4}$ ($\epsilon_i = 0$ dans (5.11) pour $i = a, b, \dot{c}, h$), $w = 0.5$ et $\chi_F = 8$. Les champs non représentés ont une perturbation identiquement nulle. L'erreur relative obtenue lors de la résolution du système algébrique (5.15) est de l'ordre de 10^{-3} en moyenne sur tous les points de discrétisation. Ces distributions serviront de conditions initiales à la propagation des équations d'Hamilton dont le résultat est illustré aux figures (5.2) à (5.10). La figure 5.2 suivante illustre le comportement de la solution homogène pour l'évolution typique considérée.

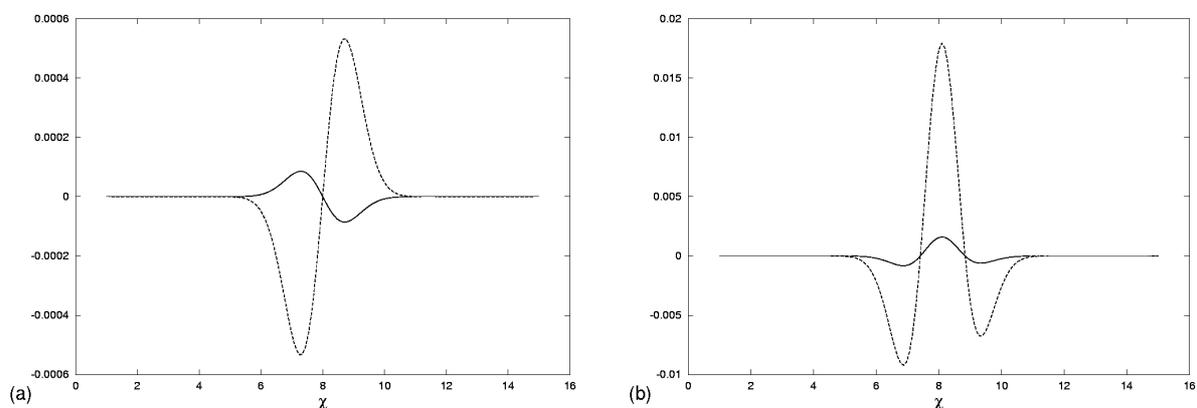


Figure 5.1 – Résultat du problème aux valeurs initiales : (a) perturbation de c (trait plein), perturbation de π_b (pointillé), solution de (5.15), (b) perturbation de m (trait plein) et de son “moment” π_m (pointillé), tels que donnés par l'équation (5.14) ($\rho_0^B = 15$, $\sigma_0 = 0$, $\dot{\sigma}_0 = \sqrt{\frac{2}{3}\rho_0^B - \sigma_0^4} \approx 3.162$, $\Delta\chi = 9.3 \times 10^{-2}$, $\Delta t = 10^{-7}$)

En ce qui concerne le secteur gravitationnel du système EYM, les perturbations des composantes spatiales de la métrique croissent comme une puissance du temps conforme (croissance linéaire pour la composante radiale et quadratique pour la composante angulaire, cf. figure 5.3).

Ce comportement est typique d'un univers dominé par la radiation et a été étudié depuis longtemps par des auteurs aussi fameux que Lemaître, Tolman, Lifshitz ou encore Bonnor (cf. chapitre 4 ou la référence [PEE93] pour une revue). En fait, l'évolution différente des composantes de la métrique est à la source même du mécanisme d'instabilité gravitationnelle des champs de YM.

En effet, en vertu de l'invariance conforme de ceux-ci, on devrait s'attendre à ce que l'expansion dilue leurs fluctuations d'énergie, puisque leur comportement dynamique n'est nul-

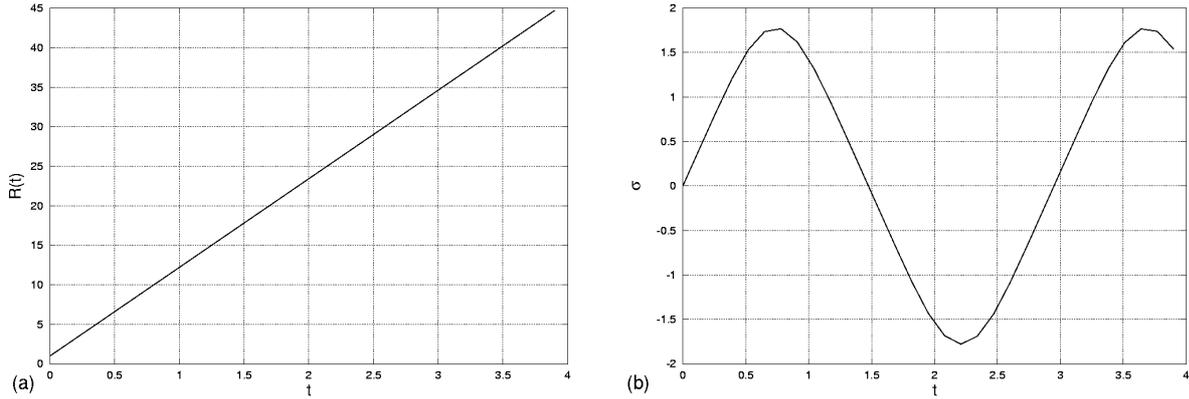


Figure 5.2 – Solutions homogènes pour les figures (5.3) à (5.10) : (a) facteur d’expansion $R(t)$, (b) état de la particule de Gal’tsov-Volkov $\sigma(t)$

lement affecté par celle-ci. Cependant, lorsque les composantes de la métrique deviennent fortement inhomogènes, l’expansion ne se résume plus à la simple transformation conforme :

$$g_{\mu\nu} \rightarrow R^2(t) \eta_{\mu\nu}$$

où $\eta_{\mu\nu}$ est la métrique pseudo-euclidienne de Minkowski. De même, elle ne s’écrit pas non plus sous la forme générale

$$g_{\mu\nu} \rightarrow f(t, \chi) \eta_{\mu\nu}$$

puisque les perturbations des diverses composantes de la métrique sont très différentes (et puisque $N(\chi, t)$ a été posé égal à R).

Ainsi, le mécanisme d’instabilité gravitationnelle connaîtra une évolution en deux temps : un régime **précoce, quasi-conforme**, et un autre **mature, fortement inhomogène**. Tout d’abord, lorsque l’inhomogénéité est faible, l’expansion mime une transformation conforme de la métrique, ce qui a pour effet de diluer la densité d’énergie des champs de YM ; ensuite, lorsque l’inhomogénéité n’est plus négligeable, les champs de YM deviennent gravitationnellement instables et entrent dans un régime complexe d’interactions non linéaires accompagnées par de la diffusion. Nous allons tenter, dans la suite, de caractériser quelque peu ce schéma générique.

Quant aux “moments” π_l et π_m associés à ces variables, ils se comportent quasiment comme des constantes au cours du temps. De plus, ils apparaissent fortement semblables, comme dans le cas des radiations examiné au chapitre précédent. Cette caractéristique a toujours été observée, à une exception près, dans le cas d’une perturbation de \dot{c}_0 après un certain temps d’évolution (cf. Annexe D, figure 4.2). La différence est alors à mettre sur le compte d’une anisotropie locale des pressions³ importante dans ce cas (cf. figure 5.9,

³La composante radiale de la pression diffère de son homologue tangentielle $T_1^1 \neq T_2^2$.

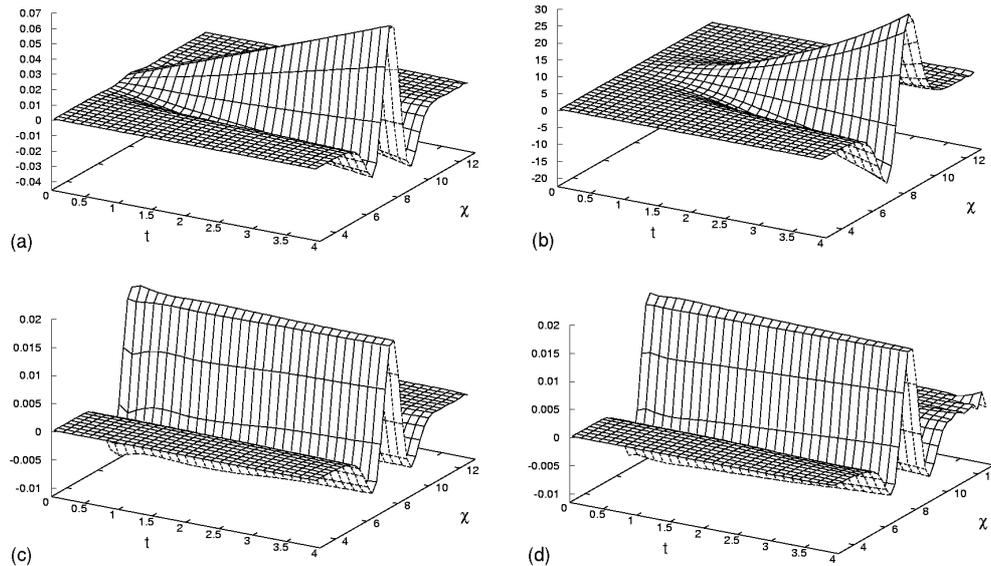


Figure 5.3 – Perturbations de la géométrie : (a) $e^\mu - R(t) = (m - 1) R(t)$ (b) $e^{2\lambda} - R^2(t)\chi^2 = (l - 1) R^2(t)\chi^2$ (c) $\pi_l - \dot{R}$ (d) $\pi_m - \dot{R}$ (mêmes paramètres qu'à la figure 5.1, $\epsilon_c = 10^{-4}$, $w = 0.5$)

graphes (e) et (f) où la distribution des contrastes de pressions, de même que l'amplitude de ceux-ci sont sensiblement différentes). Dans le cas de cette simulation, on peut relier cette anisotropie à une importance dominante des termes cinétiques du champ de Higgs par rapport aux termes électromagnétiques ou de self-interaction. Il convient d'insister sur le fait que ce comportement n'est nullement dû à la nature de la perturbation mais bien à l'amplitude des pressions et des mécanismes sous-jacents, comme nous le verrons par après.

Avant de nous concentrer sur ces grandeurs observables que sont les contrastes de densité et de pressions, examinons plus en détail l'évolution des perturbations des potentiels de jauge. La figure 5.4 représente, à titre indicatif, l'évolution des perturbations des nouvelles variables de jauge α , β et γ que nous avons introduites en début de chapitre, tandis que la figure 5.5 qui la suit représente l'évolution des perturbations des potentiels de jauge dans la paramétrisation de Witten (2.55) avec la condition de jauge $d = 0$.

On y constate clairement une réminiscence de la solution homogène oscillante de Gal'tsov-Volkov, réminiscence qui s'estompe au cours du temps. En effet, les potentiels de jauge continuent manifestement à osciller dans le potentiel d'interaction quartique $V = \sigma^4$, bien que celui-ci apparaisse évidemment distordu par les inhomogénéités de tout bord : la composante électrique a , reliée à la vitesse d'oscillation de la particule σ de Gal'tsov-Volkov dans la paramétrisation (2.78), atteint son maximum lorsque la solution homogène passe par le point d'équilibre $\sigma = 0$ (en $t \approx 1.5$ et $t \approx 3$); les perturbations des potentiels magnétiques b et c oscillent et atteignent leurs maxima plus ou moins aux alentours de

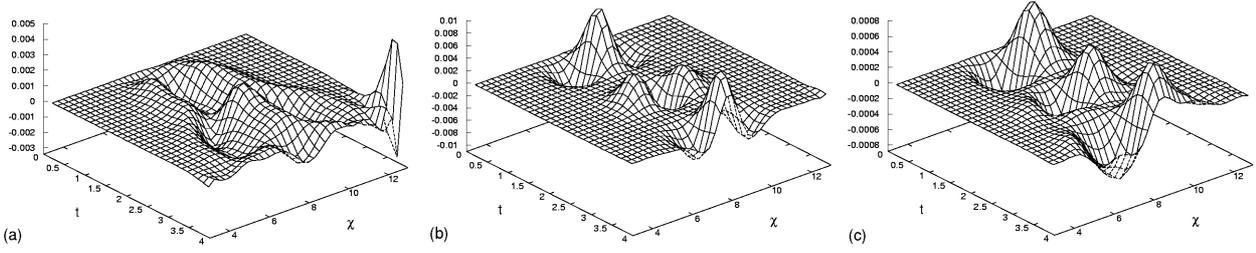


Figure 5.4 – Perturbations des nouvelles variables de jauge : (a) $\alpha - \dot{\sigma}$ (b) $\beta - \sigma^3$ (c) $\gamma - \sigma^2$ (mêmes paramètres qu'aux figures (5.1) et (5.2))

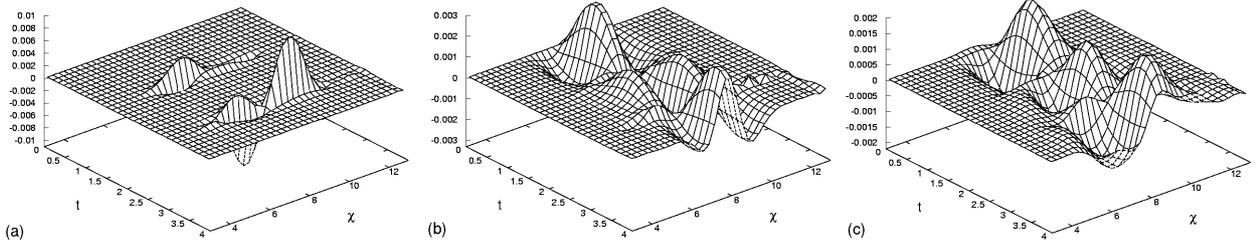


Figure 5.5 – Perturbations des potentiels de jauge : (a) composante électrique ($a - a^B$) (b) composante magnétique radiale ($b - b^B$) (c) composante magnétique angulaire ($c - c^B$) (mêmes paramètres qu'aux figures (5.1) et (5.2))

ceux de la solution homogène σ ($t \approx 0.7$ et $t \approx 3.7$).

Nous allons tenter de donner une intuition plus précise de la perturbation du potentiel. Reprenons la relation (5.4) exprimant la densité d'énergie dans laquelle nous allons délibérément omettre les termes purement cinétiques en π_γ^2 , π_β^2 et α^2 afin de ne garder que ceux d'interaction. En termes des nouvelles variables (5.17), et en reprenant la nouvelle expression (5.20), on peut écrire le potentiel sous la forme suivante

$$V = \frac{2}{3} \left(\frac{\gamma^2}{2l^2} + \frac{(\gamma + \chi \frac{\gamma'}{2})^2 + \beta^2 \chi^2}{m^2 l (1 + \chi^2 \gamma)} \right). \quad (5.22)$$

A la figure 5.6, nous avons représenté le potentiel V associé à la simulation des figures 5.2 à 5.10 comme une fonction de la position σ de la particule de Gal'tsov-Volkov au cours du temps et de la coordonnée comobile χ . L'oscillation a été dépliée le long de l'axe σ qui court donc sur presque trois demi-périodes. De plus, la distortion du potentiel a été accentuée dans le souci d'une plus grande visibilité (la fonction représentée est en fait $\sigma^4 + 6 \times 10^3 (V - \sigma^4)$, tous les autres paramètres étant ceux de la figure 5.2). Ainsi représenté, le potentiel d'interaction des champs de YM inhomogènes voisins de la solution de Gal'tsov-Volkov apparaît clairement comme une fonction dépendant explicitement du

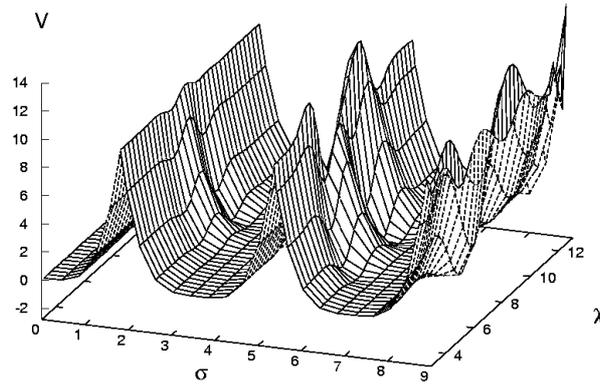


Figure 5.6 – *Potentiel d'interaction des champs de jauge, en fonction de la position de la particule de Gal'tsov-Volkov au cours du temps et de la coordonnée comobile χ (voir commentaires dans le texte, mêmes paramètres qu'aux figures (5.1) et (5.2))*

temps (via σ dans le graphe) et de la coordonnée comobile χ .

Une analogie simpliste — mais néanmoins confortable — des résultats consiste à voir l'évolution des potentiels de jauge comme celle d'un chapelet de billes, étiré le long de l'axe χ , dévalant les pentes du potentiel de la figure 5.6 avec des vitesses différentes. Le champ de vitesse de ces billes serait relié à la composante électrique a tandis que les positions de ces billes seraient dictées par les champs magnétiques b et c . On notera cependant que la forme du potentiel (5.22) est fonction à la fois de la géométrie et de nos nouvelles variables de jauge. Cette analogie se prête particulièrement bien à l'interprétation des résultats dans le régime quasi-conforme, ou faiblement inhomogène. Toutefois, dans le régime mature des fluctuations, plus fortement inhomogène et également à plus long terme, cette analogie devient plus inappropriée dans la mesure où la solution s'éloigne de plus en plus de la solution de Gal'tsov-Volkov par instabilité gravitationnelle.

Examinons à présent le comportement de ces quantités observables que sont les composantes du tenseur énergie-impulsion de YM. Plus précisément, nous avons représenté à la figure 5.7 les contrastes de densité et de pressions radiale et tangentielle, respectivement désignés par

$$\begin{aligned}\delta_\rho &= -\frac{T_0^0}{\rho^B} - 1 \\ \delta_{p_r} &= 3\frac{T_1^1}{\rho^B} - 1 \\ \delta_{p_t} &= 3\frac{T_2^2}{\rho^B} - 1,\end{aligned}$$

ainsi que la composante non diagonale du tenseur énergie-impulsion. Le lecteur aura soin

également de remarquer que ces quantités sont proportionnelles aux perturbations de la géométrie en vertu de l'invariance conforme des champs de YM et des équations d'Einstein $R_{\mu}^{\nu} = \kappa T_{\mu}^{\nu}$. De ce fait, nous avons donc un accès direct aux inhomogénéités de l'espace-temps lui-même.

Après examen de la figure 5.7, nous pouvons nous livrer aux commentaires suivants.

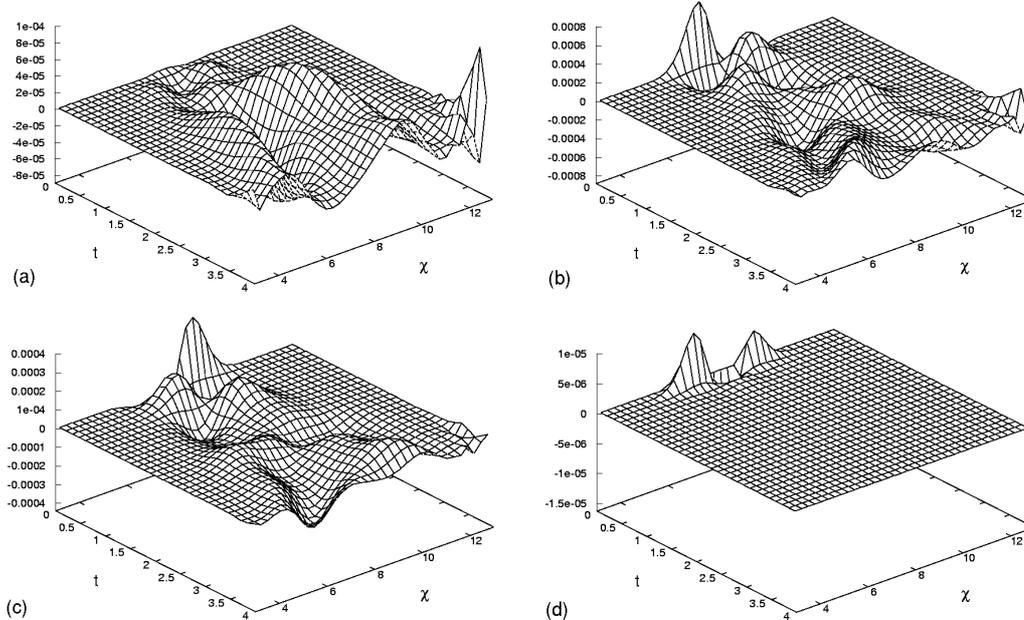


Figure 5.7 – Contrastes de densité et de pressions, ainsi que la composante non diagonale du tenseur énergie-impulsion : (a) $\frac{-T_0^0}{\rho^B} - 1$ (b) $\frac{3T_1^1}{\rho^B} - 1$ (c) $\frac{3T_2^2}{\rho^B} - 1$ (d) $-T_0^1$ (mêmes paramètres qu'aux figures (5.1) et (5.2))

Le comportement générique des contrastes est oscillant, à l'image des potentiels de jauge qui leur donnent naissance, même si l'oscillation est amortie dans les premiers temps de l'évolution pour ensuite croître après quelques temps. Le régime pour les pressions diffère en général de celui de la densité, comme en témoigne la figure 5.7 où le contraste de densité finit par croître tandis que les pressions effectuent des oscillations amorties. Pour reprendre ce que nous écrivions un peu plus haut, l'instabilité gravitationnelle des champs de YM est un mécanisme en deux temps : tout d'abord, la faible inhomogénéité des champs résulte en un régime quasi-conforme, proche de la solution homogène, où les fluctuations d'énergie et des pressions tendent à disparaître, diluées par l'expansion ; ensuite, la croissance ininterrompue des perturbations de la géométrie, qui rend l'espace-temps de plus en plus inhomogène, amène les champs à quitter ce régime quasi-conforme et à entretenir des interactions non linéaires. Ces dernières résultent en des croissances des contrastes de grandeurs observables.

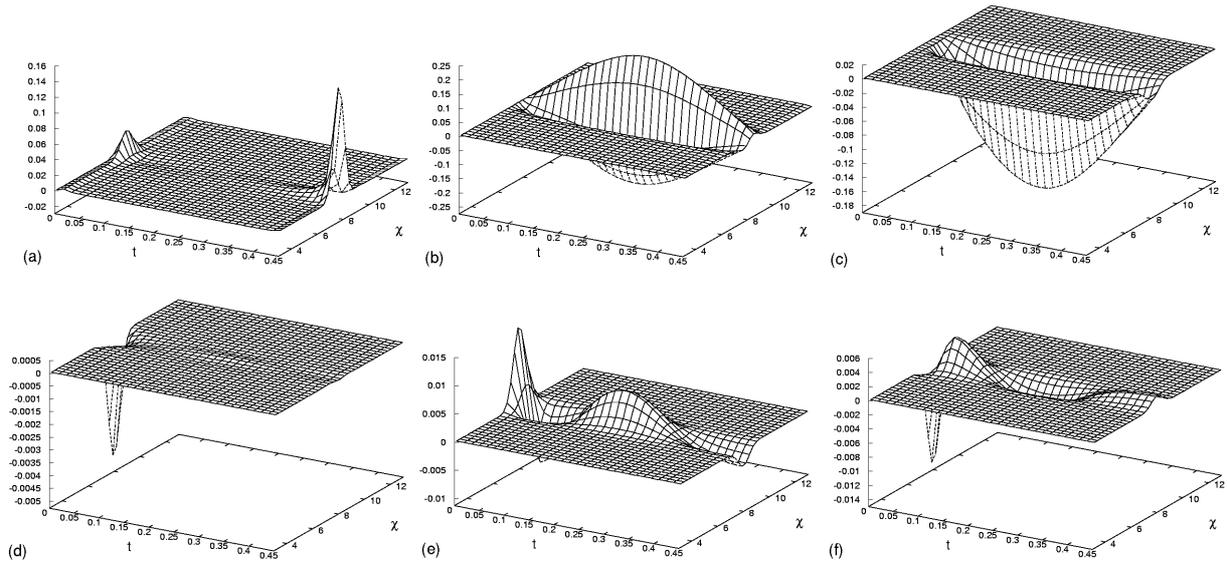


Figure 5.8 – Exemple de modes décroissants (évolution précoce des fluctuations). (a) $(a - a^B)$ (b) $(b - b^B)$ (c) $(c - c^B)$ (d) $\left(-\frac{T_0^0}{\rho^B} - 1\right)$ (e) $\left(\frac{3T_1^1}{\rho^B} - 1\right)$ (f) $\left(\frac{3T_2^2}{\rho^B} - 1\right)$ ($\rho_0^B = 1.5 \times 10^3$, $L_H^0 \approx 0.009$, $\epsilon_b = 10^{-3}$, $w = 0.4$, $\sigma_0 = 0$, $\Delta\chi = 9.3 \times 10^{-2}$, $\Delta t = 10^{-6}$)

Un exemple du régime précoce ou quasi-conforme des fluctuations est illustré à la figure 5.8. Il s'agit en fait d'une bonne approximation de l'univers primordial : le taux d'expansion⁴ est bien supérieur à celui de croissance des perturbations de la géométrie, de sorte que ces dernières sont négligeables et l'expansion peut être considérée comme grossièrement homogène. De ce fait, elle se comporte comme une transformation conforme de la métrique qui n'affecte pas la dynamique des champs de jauge. Dans la figure 5.8, les potentiels de jauge oscillent dans un potentiel d'interaction voisin de celui de la solution homogène (leurs perturbations oscillent à une fréquence voisine de la particule de Gal'tsov-Volkov), sans grande sensibilité à cette expansion trop proche d'une transformation conforme, tandis que les contrastes de densité effectuent des oscillations amorties.

Ceci implique que les cosmologies de Yang-Mills peuvent être plus inhomogènes qu'il n'y paraît au niveau des quantités observables puisque leurs consœurs non observables, comme les coefficients de la métrique et les potentiels de jauge, ne disparaissent pas avec le temps, bien au contraire.

Ainsi, bien que les champs de YM soient de nature radiative, on ne retrouve pas le comportement simple tiré de l'approche perturbative décrite au chapitre précédent. En effet, nous avons vu qu'il existait des modes croissant linéairement avec le temps synchrone, pour les grandes longueurs d'onde de fluctuations, et d'autres décroissant en l'inverse de ce même

⁴Ce taux est spécifié par le paramètre ρ_0^B qui est fixé à une grande valeur à la figure 5.8.

temps, ces derniers correspondant aux petites longueurs d'onde, inférieures à la longueur de Jeans, où le contraste de densité oscille comme une onde acoustique. La complexité des champs de YM entraîne que ces modes sont présents même aux plus grandes échelles, le mode décroissant laissant la place au mode croissant au cours du temps. Toutefois, cette croissance ne se fait pas simplement suivant le carré du temps conforme en vertu des interactions non linéaires existant au niveau des potentiels de jauge.

En ce qui concerne ces modes croissants, précisément, les détails de ce régime mature (il n'apparaît que lorsque l'inhomogénéité est importante) semblent assez complexes et peuvent se caractériser en fonction des interactions du modèle de Higgs abélien à deux dimensions vu au chapitre 2. Nous y reviendrons. Un exemple de mode croissant est donné à la figure 5.9.

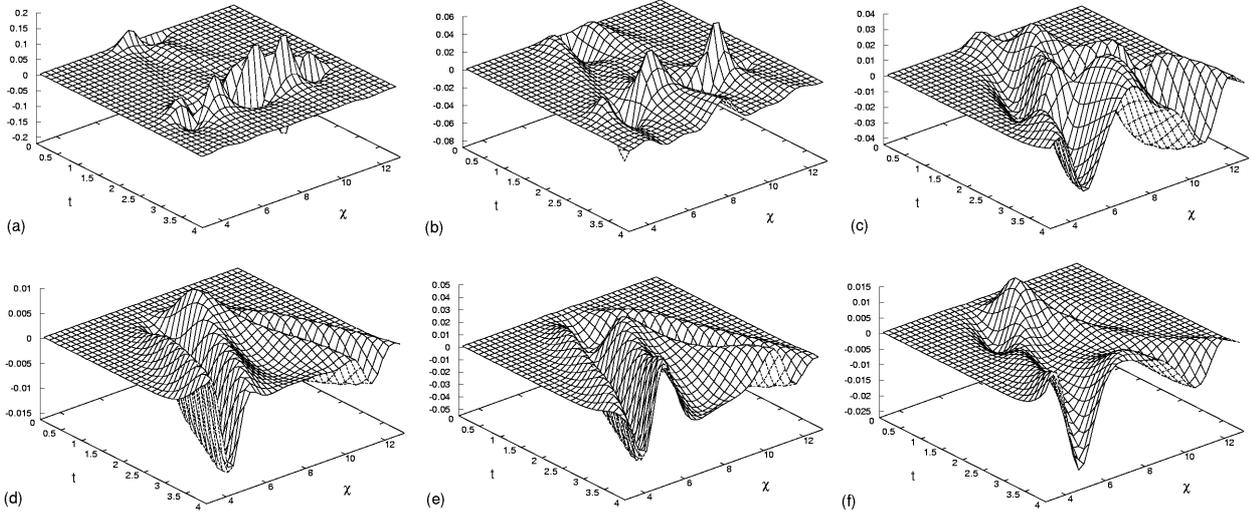


Figure 5.9 – Exemple de modes croissants (évolution à long terme). (a) $(a - a^B)$ (b) $(b - b^B)$ (c) $(c - c^B)$ (d) $\frac{-T_0^0}{\rho^B} - 1$ (e) $\frac{3T_1^1}{\rho^B} - 1$ (f) $\frac{3T_2^2}{\rho^B} - 1$ ($\rho_0^B = 1.5$, $\epsilon_c = 10^{-1}$, $\sigma_0 = 0$, $\dot{\sigma}_0 = \sqrt{\frac{2}{3}\rho_0^B - \sigma_0^4} = 1$, $w = 0.3$, $\Delta\chi = 7 \times 10^{-2}$, $\Delta t = 10^{-7}$)

Quant à la composante non diagonale du tenseur énergie-impulsion (figure 5.7 (d)), celle-ci s'homogénéise au cours du temps, en règle générale⁵. En effet, on voit à l'équation (5.20) que cette composante évolue comme une perturbation sur R^4 alors que les composantes diagonales évoluent comme une constante (\mathcal{E} dans (2.80)) accompagnée d'une perturbation, le tout sur R^4 .

Avant d'aborder brièvement l'évolution relative des petites et grandes échelles, terminons

⁵Voir également le détail graphique complet des simulations à l'annexe D.

le survol de notre simulation type avec l'examen de la violation des contraintes au cours du calcul. Ceci est illustré par la figure suivante. Encore une fois, nous constatons que

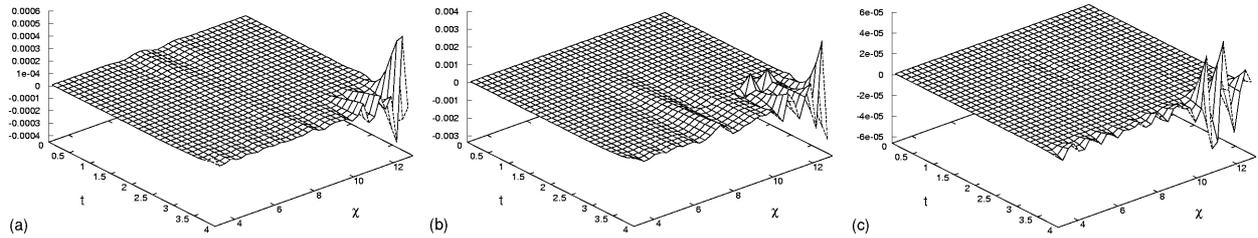


Figure 5.10 – Evolution des contraintes. (a) \mathcal{H} (b) \mathcal{H}_1 (c) \mathcal{G}^3 (mêmes paramètres qu'aux figures (5.1) et (5.2))

les conditions de bord constituent sans conteste le point faible de la méthode, ce qui est d'ailleurs un problème récurrent en relativité numérique⁶. L'erreur au centre de la grille est principalement constituée par les erreurs de troncature qui peuvent être diminuées par une amélioration de la discrétisation. On constate que la violation des contraintes augmente linéairement avec le temps, bien moins vite que l'erreur due aux effets de bords d'ailleurs. De manière générale, l'erreur sur les contraintes issues du secteur gravitationnel est bien supérieure à celle issue de celui de jauge. Cette instabilité numérique est caractéristique des équations *ADM* canoniques (cf. [YS01, YS02, SS99] et de nombreuses autres références en relativité numérique) et peut être améliorée en recourant à d'autres formulations des équations d'Einstein (par exemple, l'approche standard de York [YOR78] ou les approches hyperboliques [BM92] ou [REU98] pour une revue). Toutefois, les valeurs des contraintes demeurent plusieurs ordres de grandeur en dessous des valeurs atteintes par les perturbations des champs, ce qui nous assure d'une consistance certaine de nos résultats.

Attardons-nous quelque peu sur l'influence de la taille des fluctuations dans le mécanisme d'instabilité gravitationnelle des champs de jauge. Pour ce faire, examinons la figure 5.11 qui représente l'évolution des perturbations des potentiels de jauge pour trois valeurs différentes du taux d'expansion initial (désigné par le paramètre ρ_0^B).

Nous constatons que les potentiels de jauge diffusent le long de l'axe radial d'autant plus que le taux d'expansion est petit (figure 5.11 (a) et (b)). Cette diffusion est due à l'importance croissante des gradients spatiaux et de l'inhomogénéité de la métrique dans les équations de YM. Elle était déjà présente aux figures précédentes, essentiellement dans le régime mature des fluctuations. Le constat que la diffusion est plus importante avec les faibles taux d'expansion peut se traduire également en comparant la taille des fluctuations, donnée par la longueur de cohérence λ_P introduite précédemment, avec la longueur

⁶S. Bonazzola, J. Novak, Laboratoire de l'Univers et de ses THéories, Observatoire de Paris-Meudon, communication personnelle.

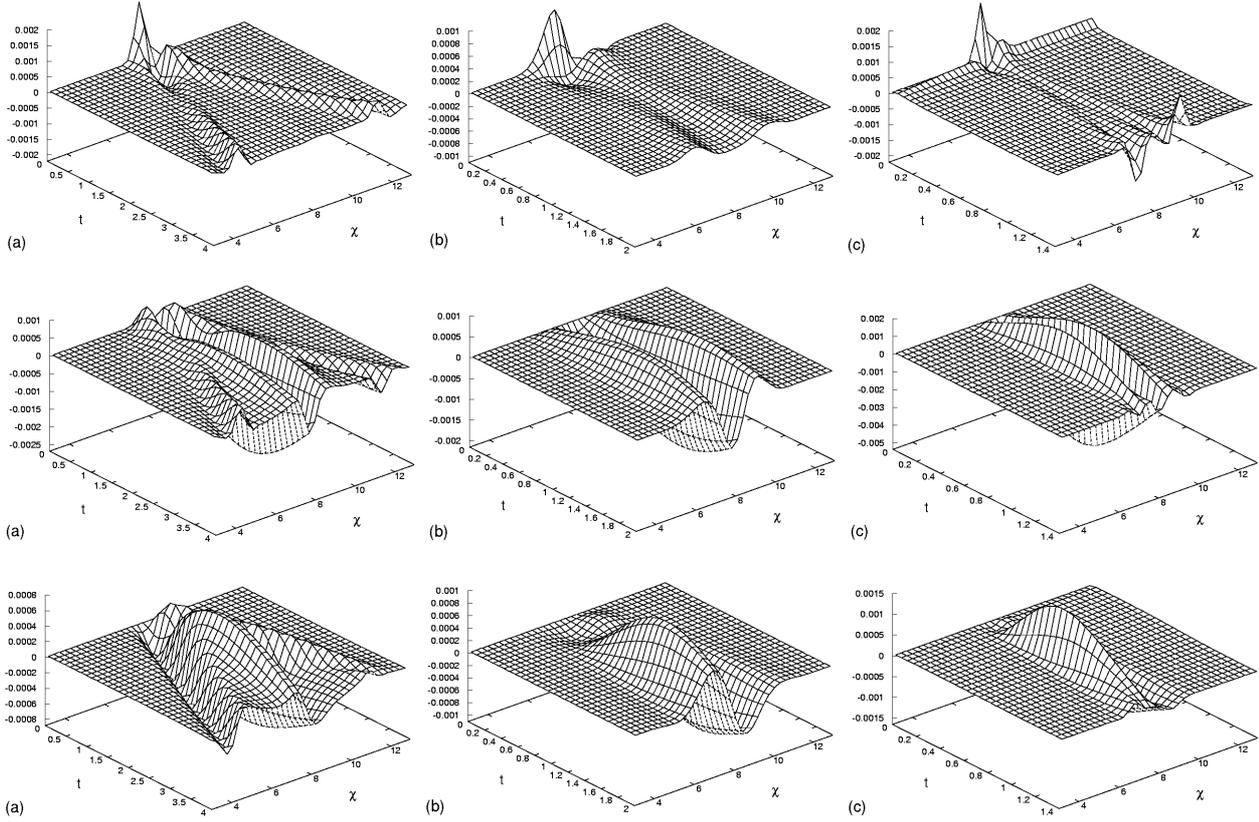


Figure 5.11 – Perturbations des composantes électriques *a* (au-dessus) et magnétiques *b* (milieu) et *c* (au-dessous) des potentiels de jauge pour différentes valeurs du taux d'expansion initial paramétrisé par ρ_0^B . (a) gauche : $\rho_0^B = 0.15$ ($L_H^0 \approx 0.9$) (b) centre : $\rho_0^B = 1.5$ ($L_H^0 \approx 0.3$) (c) droite : $\rho_0^B = 15$ ($L_H^0 \approx 0.09$) ($\epsilon_a = 10^{-3}$, $w = 0.5$, $\sigma_0 = 0$)

de Hubble $L_H = c/H \equiv 1/H = t + \sqrt{\frac{3}{\kappa C}}$ ($c = 1$). Au temps initial, cette dernière est donnée par

$$L_H^0 = \frac{R_0}{\dot{R}_0} = \sqrt{\frac{3}{\kappa \rho_0^B}}.$$

Ainsi, en variant uniquement la densité initiale ρ_0^B du fond homogène et en gardant la même longueur de cohérence à travers un paramètre w identique, nous modifions juste le rapport entre la longueur de cohérence et celle de Hubble. La longueur de Hubble initiale est donnée dans la légende de la figure 5.11 pour une longueur de cohérence de l'ordre de l'unité. La diffusion est donc importante pour les courtes longueurs d'onde $\lambda_P \approx L_H$ et, pour les longueurs d'onde plus grandes que celle de Hubble, elle n'apparaît que lorsque l'in-homogénéité spatiale est suffisante, comme aux figures 5.7 et 5.9. Une autre interprétation de cet effet est la suivante. La longueur de Hubble représente grossièrement le rayon de la sphère de causalité en un temps donné. Ainsi, lorsque la taille des fluctuations approche la

longueur de l'horizon, les interactions non linéaires entre le fond homogène et la fluctuation peuvent se propager de proche en proche sur ce dernier, à la vitesse de la lumière. De même, pour des fluctuations de tailles supérieures à celle de l'horizon, la diffusion n'apparaît que lorsque l'inhomogénéité aux échelles comprises à l'intérieur de l'horizon devient importante, c'est-à-dire lorsque les gradients des champs deviennent suffisamment grands.

Avant de parfaire cette analyse avec des considérations relatives à un modèle de Higgs abélien à deux dimensions, donnons quelques précisions quant à la manière dont les différents paramètres affectent les résultats des simulations. Celles-ci sont caractérisées par les paramètres suivants : ρ_0^B , la densité initiale du fond homogène ; w , paramètre relié à la longueur de cohérence λ_P des fluctuations ; ϵ , l'amplitude relative de la perturbation ; σ_0 , la position initiale de la particule de Gal'tsov-Volkov dans le potentiel d'interaction quartique ; et finalement la nature de la perturbation (quel(s) champ(s) a (ont) été perturbé(s) initialement parmi les équations (5.11)). Les deux premiers paramètres définissent le rapport entre la longueur de cohérence et celle de Hubble : $\frac{\lambda_P}{L_H}$. Nous nous sommes principalement intéressés ici à des perturbations plus grandes que la longueur de Hubble, pour les raisons avancées au chapitre précédent. En effet, une analyse complète des petites échelles requerrait un traitement post-newtonien de l'instabilité gravitationnelle. Cependant, le traitement des échelles de la taille de l'horizon se justifie amplement par le fait que le mécanisme d'instabilité gravitationnelle des champs de YM s'est déroulé à une époque très précoce de l'histoire de l'univers.

On peut toutefois avancer que les grandes fluctuations évoluent plus lentement que les petites, tous les autres paramètres restant égaux. Une manière de voir ceci est d'examiner les figures 5.7, 5.8 et 5.9 où on a les couples (λ_P, L_H) suivants : figure 5.7, $\lambda_P \gg L_H$ ($\lambda_P \approx 3, L_H^0 \approx 0.09$) ; figure 5.8, $\lambda_P \gg \gg L_H$ ($\lambda_P \approx 2, L_H^0 \approx 0.009$) et finalement figure 5.9, $\lambda_P > L_H$ ($\lambda_P \approx 2, L_H^0 \approx 0.3$). En prenant une demi-période d'oscillation de σ^B comme temps caractéristique d'évolution, on constate que le contraste de densité a crû durant ce temps dans le premier cas alors qu'il n'y a aucune instabilité visible dans le second et que les contrastes ont accusé une croissance importante pour le même temps dans le dernier cas. Une manière plus claire de voir ceci est d'examiner la figure 5.12 suivante où les évolutions ont été représentées pour deux longueurs de cohérence différentes, tous les autres paramètres étant égaux.

L'évolution des contrastes y est qualitativement la même mais elle est manifestement plus lente pour la grande fluctuation figure 5.12 (figures (a), (b), (c) au-dessus) (le contraste de densité, par exemple, croît plus tard). Ainsi, les détails de l'évolution, tels que le temps après lequel les fluctuations croissent, ou la période d'oscillation et l'amplitude des contrastes dépendent à la fois du rapport de la longueur de cohérence à celle de Hubble,

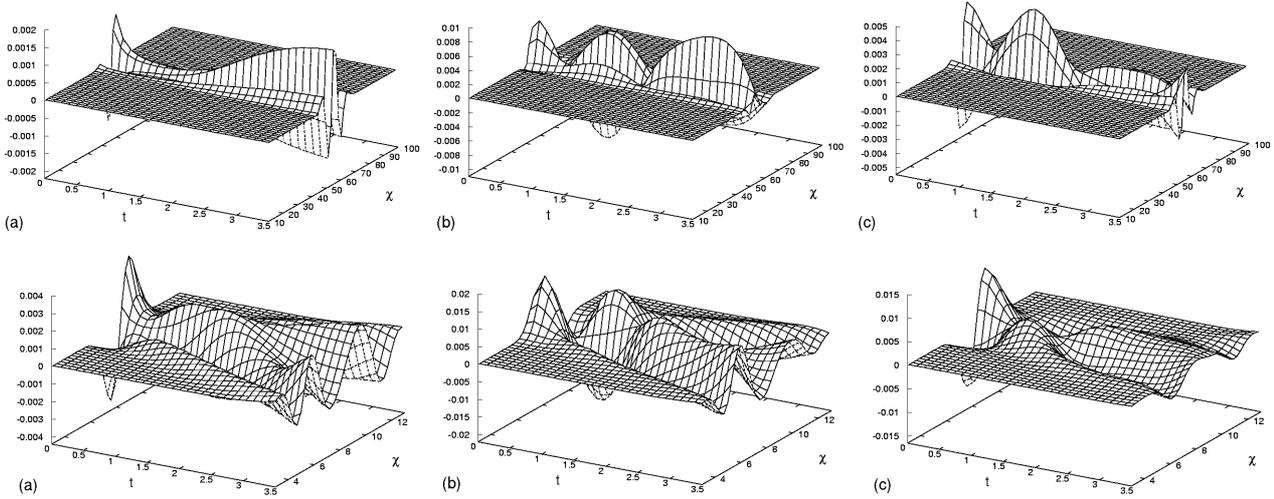


Figure 5.12 – Evolution de fluctuations de tailles différentes (au-dessus $\lambda_P \approx 30$, $w = 7.5$; en dessous $\lambda_P \approx 10$, $w = 0.5$). (a) $\frac{-T_0^0}{\rho^B} - 1$ (b) $\frac{3T_1^1}{\rho^B} - 1$ (c) $\frac{3T_2^2}{\rho^B} - 1$ ($\rho_0^B = 1.5$, $\epsilon_b = 10^{-3}$, $\epsilon_h = 10^{-3}$, $\sigma_0 = 0.1$, $\dot{\sigma}_0 = \sqrt{\frac{2}{3}\rho_0^B - \sigma_0^4} = 1$, $\Delta t = 10^{-6}$)

de l'intensité absolue des perturbations⁷ qui est fixée par les valeurs de ϵ et σ_0 , ainsi que de la nature de la perturbation. Cependant, le schéma typique décomposé en un régime précoce quasi-conforme et un autre mature inhomogène semble tout à fait général.

Quant à un analogue du critère de Jeans pour les champs de YM, il faudrait une étude quasi-newtonienne, c'est-à-dire en travaillant dans une jauge $N \neq 1$, pour l'établir. Nous pouvons cependant gager qu'en vertu de l'anisotropie locale de leurs pressions, les champs de YM seront soumis à un critère de Jeans différent, s'il subsiste.

Avant de conclure, examinons les coulisses de ce mécanisme d'instabilité gravitationnelle en termes du modèle de Higgs abélien à deux dimensions vu au chapitre 2. Les composantes diagonales du tenseur énergie-impulsion, c'est-à-dire la densité et les pressions radiale et tangentielle peuvent se réécrire sous la forme d'une somme de trois contributions, par exemple :

$$T_0^0 = \underbrace{-e^{-4\lambda} \frac{\pi_b^2}{2}}_{|E|^2} \underbrace{-e^{-2\lambda-2\mu} \pi_c^2 - \frac{c'^2 N^2 + e^{2\mu} a^2 c^2 + N^2 b^2 c^2}{N^2}}_{H_K} e^{-2\lambda-2\mu} - \underbrace{e^{-4\lambda} \frac{(c^2 - 1)^2}{2}}_{H_P}$$

⁷L'intensité absolue des perturbations est définie par $\frac{f_0 - f_0^B}{f_0^B}$ pour un champ quelconque f .

où $|E|^2$ désigne l'intensité (au carré) du champ électrique à deux dimensions dérivant du 2-potential $(A_0, A_\chi) = (a, b)$, où H_K désigne l'ensemble des termes cinétiques du champ de Higgs provenant de la dérivée covariante dans (2.65), c'est-à-dire les termes cinétiques purs en $\dot{c}^2 + c'^2$ ainsi que les termes non linéaires de couplage du champ de Higgs au champ électrique en $a^2 c^2$ et en $b^2 c^2$, et où H_P désigne le terme de self-interaction du doublet de Higgs polarisé à sa seule composante c .

Forts de ces définitions, nous pouvons réécrire la définition des contrastes de densité et de pressions sous la forme

$$\begin{aligned}\delta_\rho &= -\frac{T_0^0}{\rho^B} - 1 = -(\delta_{|E|^2} + \delta_{H_K} + \delta_{H_P}) \\ \delta_{p_r} &= 3\frac{T_1^1}{\rho^B} - 1 = 3(\delta_{|E|^2} - \delta_{H_K} + \delta_{H_P}) \\ \delta_{p_t} &= 3\frac{T_2^2}{\rho^B} - 1 = 3(\delta_{|E|^2} + \delta_{H_P})\end{aligned}\quad (5.23)$$

où on a posé $\delta_{|E|^2} = \frac{|E|^2 - |E^B|^2}{\rho^B}$ (E^B est la valeur du champ "électrique" pour le fond homogène) et des définitions analogues pour δ_{H_K} et δ_{H_P} . En termes de nos variables (5.17), les contrastes partiels $\delta_{|E|^2}$, δ_{H_K} et δ_{H_P} se réécrivent :

$$\begin{aligned}\delta_{|E|^2} &= \left(\frac{\pi_\beta^2}{2l^2} - \frac{\dot{\sigma}^2}{2} \right) / \rho_0^B \\ \delta_{H_K} &= \left(\frac{\left(\pi_\gamma^2 \chi^2 + (\gamma^2 + \gamma' \chi)^2 + \beta^2 \chi^2 \right)}{m^2 l (1 + \chi^2 \gamma)} + \frac{\alpha^2}{l (1 + \chi^2 \gamma)} - \dot{\sigma}^2 - \sigma^4 \right) / \rho_0^B \\ \delta_{H_P} &= \left(\frac{\gamma^2}{2l^2} - \frac{\sigma^4}{2} \right) / \rho_0^B.\end{aligned}\quad (5.24)$$

Nous proposons à présent d'analyser les différentes caractéristiques de l'instabilité gravitationnelle vues précédemment à l'aide de ces définitions. La figure 5.13 illustre l'évolution

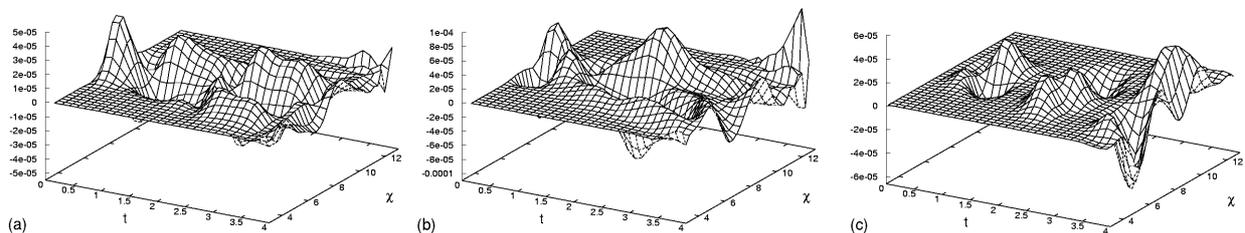


Figure 5.13 – Contrastes du modèle de Higgs abélien pour les figures 5.1 à 5.7 (a) terme électrique $\delta_{|E|^2}$ (b) terme cinétique de Higgs δ_{H_K} (c) terme de self-interaction du Higgs δ_{H_P}

des contrastes du modèle de Higgs abélien donnée par les équations (5.24) pour l'évolution typique des figures 5.1 à 5.7. On y observe la similitude entre les termes électromagnétiques $\delta_{|E|^2}$ et cinétiques du Higgs δ_{H_K} , ainsi que la corrélation entre le terme de self-interaction δ_{H_P} et l'oscillation de la solution homogène (le premier atteignant son maximum plus ou moins en même temps que la solution homogène σ). La distribution de l'énergie entre ces différents termes aux derniers temps de la simulation apparaît plus ou moins égale, avec cependant une légère préférence pour δ_{H_K} . Cependant, cette distribution est différente dans les premiers temps de l'évolution comme le montre la figure 5.14 suivante, relative au régime quasi-conforme de la figure 5.8.

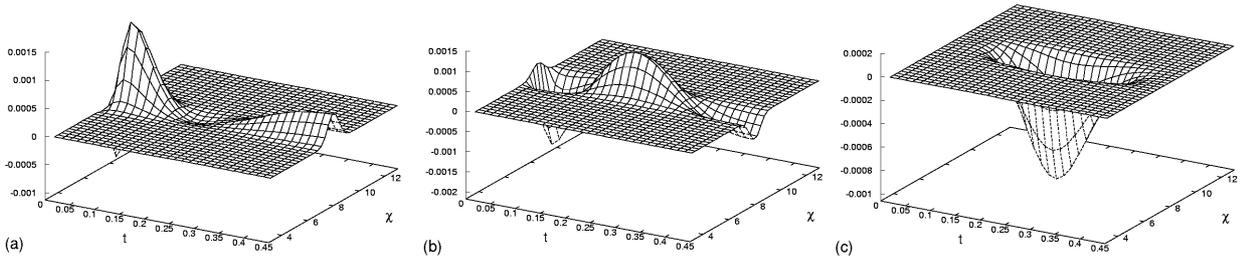


Figure 5.14 – Contrastes du modèle de Higgs abélien pour la figure 5.8 (a) terme électrique $\delta_{|E|^2}$ (b) terme cinétique de Higgs δ_{H_K} (c) terme de self-interaction du Higgs δ_{H_P}

Pour le régime quasi-conforme (évolution précoce des fluctuations), on constate de manière générale que les termes dominants sont les termes électrique $\delta_{|E|^2}$ et cinétique du Higgs δ_{H_K} , le terme de self-interaction étant négligeable. De plus, une superposition des deux distributions montre que ces contributions se compensent dans la densité, ce qui explique l'évolution observée à la figure 5.8 (d). Comme celles-ci s'additionnent dans la pression radiale et que la pression tangentielle est essentiellement électrique en vertu de la faiblesse du terme de potentiel δ_{H_P} (relation (5.23)), ces distributions justifient bien *a posteriori* les oscillations amorties des contrastes de pressions dans la figure 5.8. Une analyse en détail des termes qui constituent δ_{H_K} montre que ses contributions principales sont le terme purement cinétique en π_γ et le couplage avec le champ b . Quant au caractère négligeable du terme de self-interaction δ_{H_P} , il s'explique par le fait que le potentiel d'interaction est encore fort proche de la solution homogène dans ce régime précoce.

La figure 5.15 suivante reprend les contrastes du modèle de Higgs pour l'évolution mature de la figure 5.9. On y observe la légère domination du terme cinétique de Higgs sur les deux autres même s'ils demeurent tous du même ordre de grandeur⁸. L'expérience a montré que les termes cinétiques du Higgs rassemblés dans δ_{H_K} dominent de plus en plus

⁸On peut également tracer la contribution partielle de tous les termes constituant δ_{H_K} , terme cinétique pur en π_γ^2 , terme diffusif en γ' et terme de couplage avec le potentiel électrique a et b , et constater qu'ils interviennent plus ou moins de la même façon dans ce cas.

avec l'accroissement de l'inhomogénéité. Comme la pression tangentielle ne comprend pas ce terme cinétique du Higgs, ceci explique pourquoi l'anisotropie des pressions est particulièrement importante dans les régimes très inhomogènes.

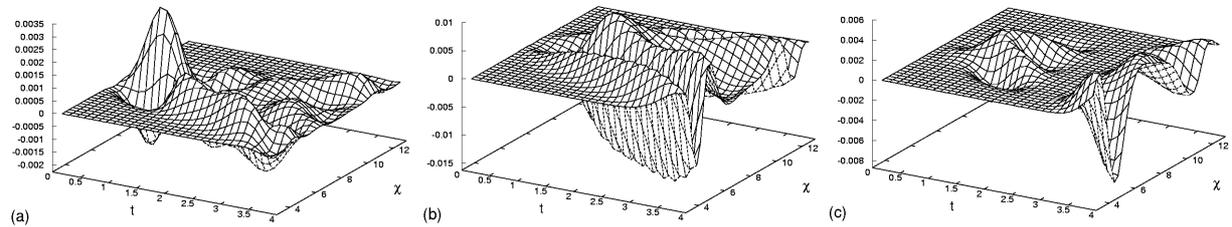


Figure 5.15 – Contrastes du modèle de Higgs abélien pour la figure 5.9 (a) terme électrique $\delta_{|E|^2}$ (b) terme cinétique de Higgs δ_{H_K} (c) terme de self-interaction du Higgs δ_{H_P}

Enfin, examinons l'effet de diffusion en termes des contrastes du modèle de Higgs en traçant ceux-ci pour les potentiels de jauge de la figure 5.11 (a). Les termes dominants sont encore une fois électrique et cinétique, et les contrastes de densité et de pression radiale résultants (cf. annexe D) décroissent au cours du temps de sorte que la fluctuation soit principalement constituée de pression tangentielle. En règle générale, on peut dire que la diffusion se reflète dans chaque composante du modèle de Higgs, comme on aurait pu s'y attendre, malgré une préférence marquée pour le terme cinétique⁹.

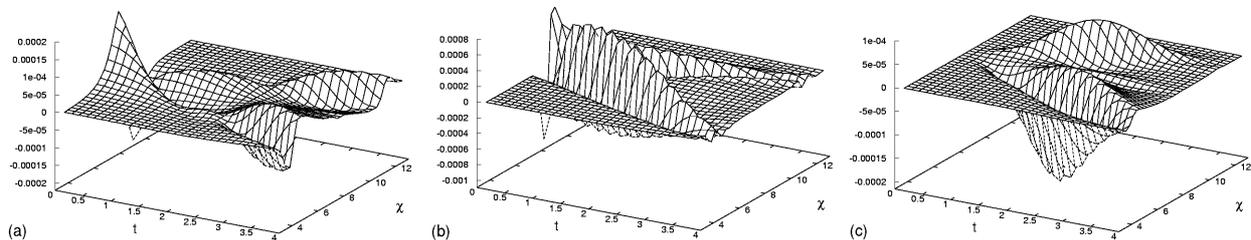


Figure 5.16 – Contrastes du modèle de Higgs abélien pour la figure 5.11 (a) terme électrique $\delta_{|E|^2}$ (b) terme cinétique de Higgs δ_{H_K} (c) terme de self-interaction du Higgs δ_{H_P}

Il convient de retenir de cette analyse en composantes du modèle de Higgs que les termes prépondérants dans les régimes précoces sont de nature électromagnétique et cinétique, et que le terme de self-interaction ne devient important pour les fluctuations que dans le régime mature, lorsque l'inhomogénéité des champs a suffisamment déformé le potentiel de self-interaction du champ de Higgs c . De plus, les termes cinétiques du Higgs (dont les couplages au champ électromagnétique) sont les plus sensibles à l'inhomogénéité.

⁹Cette préférence est peut-être tout simplement due au fait que δ_{H_K} comprend plus de termes que ses deux autres collègues.

Chapitre 6

Instabilité gravitationnelle du champ scalaire

*” Et un astronome demanda : ” Qu’en est-il du Temps ?”
– (...) Ce qui en vous est étranger au temps sait que la vie échappe au temps,
Et il sait que ce qui chante et contemple en vous vit toujours à l’intérieur des frontières
de ce premier instant qui éparpilla les étoiles dans le firmament.”*

K. Gibran, *” Le Prophète”*, 1923.

Sommaire

1	Equations du champ scalaire en formalisme hamiltonien . . .	146
2	Problème de Cauchy	148
3	Equations d’Hamilton	149
4	Inflaton dans un potentiel quartique	150
5	Remarque : influence du potentiel sur le mécanisme	157

1 Equations du champ scalaire en formalisme hamiltonien

Dans ce chapitre, nous allons examiner la dynamique des fluctuations de densité associée à un champ scalaire électriquement neutre (réel), appelé quelquefois *inflaton*, se couplant minimalement à la gravitation. Nous ne rentrerons pas ici dans les détails de la physique associée à cette théorie tenseur-scalaire de la gravitation ; l'étude entreprise ici a pour but de comparer le mécanisme d'instabilité gravitationnelle de champs conformément invariants tels que les champs de jauge vus précédemment à ce champ non conformément invariant qu'est le champ scalaire.

En effet, la densité lagrangienne associée à l'inflaton s'écrit (cf. chapitre 1, section 2.2)

$$\mathcal{L}_Q = \frac{1}{2}g^{\mu\nu}\partial_\mu Q\partial_\nu Q + V(Q) \quad (6.1)$$

où $V(Q)$ est le potentiel de self-interaction du champ scalaire¹ (attention à la signature de la métrique). Lorsque l'espace-temps adopte la symétrie sphérique, l'inflaton devient une simple fonction des coordonnées radiale et temporelle $Q = Q(\chi, t)$.

La formulation hamiltonienne de la densité lagrangienne (6.1) en symétrie sphérique a été étudiée dans [BCMN72], avec, toutefois, une attention focalisée sur le cas purement statique. En choisissant le champ comme variable canonique, son moment conjugué s'obtient au moyen de la relation habituelle $\pi_Q = \partial(\sqrt{-g}\mathcal{L}_Q)/\partial\dot{Q}$, c'est-à-dire

$$\pi_Q = -e^{\mu+2\lambda}\dot{Q}, \quad (6.2)$$

où μ et λ sont les potentiels de la métrique à symétrie sphérique (2.43) et où nous avons choisi la jauge synchrone ($N = 1$, $N_\chi = 0$) pour le champ gravitationnel. L'autre équation d'Hamilton s'obtient par variation de la densité lagrangienne par rapport à la variable canonique, et s'écrit

$$\dot{\pi}_Q = -\left(e^{-\mu+2\lambda}Q'\right)' + e^{\mu+2\lambda}\frac{dV(Q)}{dQ}. \quad (6.3)$$

En vertu du spin nul du champ scalaire, cette dynamique du champ seul ne doit pas être corrigée de contraintes supplémentaires. Le couplage au champ gravitationnel dans la jauge synchrone s'obtient dès lors à travers les équations d'Einstein en formalisme hamiltonien, données au chapitre 4 (relations (4.30) à (4.35)), au sein desquelles on prendra soin de remplacer la densité $\rho = -T_0^0$ et la pression $p = K\rho = T_i^i$ ($i = 1, 2, 3$) du fluide cosmologique

¹Pour un terme de masse $V(Q) = \frac{m}{2}Q^2$, où m est la masse du champ scalaire.

par les composantes suivantes

$$T_0^0 = - \left(\frac{\dot{Q}^2}{2} + e^{-2\mu} \frac{Q'^2}{2} + V \right) \equiv -\rho_Q \quad (6.4)$$

$$T_0^1 = e^{-2\mu} \dot{Q} Q' = -e^{-2\mu} T_1^0 \quad (6.5)$$

$$T_1^1 = \frac{\dot{Q}^2}{2} + e^{-2\mu} \frac{Q'^2}{2} - V \quad (6.6)$$

$$T_2^2 = \frac{\dot{Q}^2}{2} - e^{-2\mu} \frac{Q'^2}{2} - V \quad (6.7)$$

puisque le tenseur énergie-impulsion associé à la densité lagrangienne s'écrit

$$T_{\mu\nu} = -g_{\mu\nu} \mathcal{L}_Q + \partial_\mu Q \partial_\nu Q.$$

La composante non diagonale T_0^1 du tenseur énergie-impulsion corrige le générateur \mathcal{H}_1 de transformation de coordonnées au sein de chacune des strates spatiales (super-moment radial) :

$$\mathcal{H}_1 = 0 \equiv \mu' \pi_\mu + \lambda' \pi_\lambda - \pi'_\mu - 16\pi e^{\mu+2\lambda} T_1^0 = 0, \quad (6.8)$$

de même que la composante purement temporelle corrige le super-hamiltonien \mathcal{H} qui devient

$$e^{-\mu+2\lambda} \left(-4\mu' \lambda' + 6\lambda'^2 + 4\lambda'' \right) - 2e^\mu + \frac{\pi_\mu}{8} (\pi_\mu - 2\pi_\lambda) e^{-\mu-2\lambda} - 16\pi e^{\mu+2\lambda} T_0^0 = 0. \quad (6.9)$$

Par souci de complétude, écrivons explicitement les équations d'Hamilton décrivant la dynamique gravito-scalaire en symétrie sphérique

$$\dot{\mu} = \frac{1}{4} e^{-\mu-2\lambda} (\pi_\mu - \pi_\lambda) \quad (6.10)$$

$$\dot{\lambda} = -\frac{1}{4} e^{-\mu-2\lambda} \pi_\mu \quad (6.11)$$

$$\dot{\pi}_\mu = 2e^{-\mu} \left(e^{2\mu} - \lambda'^2 e^{2\lambda} \right) + \frac{\pi_\mu}{8} e^{-\mu-2\lambda} (\pi_\mu - 2\pi_\lambda) + 16\pi e^{\mu+2\lambda} T_1^1 \quad (6.12)$$

$$\dot{\pi}_\lambda = 4 e^{-\mu+2\lambda} \left(\mu' \lambda' - \lambda'^2 - \lambda'' \right) + \frac{\pi_\mu}{4} e^{-\mu-2\lambda} (\pi_\mu - 2\pi_\lambda) + 32\pi e^{\mu+2\lambda} T_2^2 \quad (6.13)$$

auxquelles il convient d'ajouter les relations (6.2) et (6.3) pour la dynamique pure de l'inflaton.

2 Problème de Cauchy

La résolution des contraintes nous est désormais familière, forts de notre expérience avec un fluide de matière et avec les champs de Yang-Mills des deux chapitres précédents.

On procède tout d'abord aux hypothèses suivantes :

- On se place quelque temps après le Big Bang : $R(0) = R_0 = 1$.
- On pose $\lambda_0 = \ln \Sigma(\chi)$.
- On perturbe les champs suivants autour de leurs solutions homogènes

$$\dot{\lambda}_0 = \sqrt{\frac{\kappa}{3}\rho_0^B} + \epsilon_h(\chi) \quad (6.14)$$

$$Q_0 = Q_0^B + \epsilon_Q(\chi) \quad (6.15)$$

$$\dot{Q}_0 = \dot{Q}_0^B + \epsilon_{\dot{Q}}(\chi) \quad (6.16)$$

$$\pi_{\mu,0} = -4\dot{\lambda}_0 e^{\mu_0} \chi^2 \quad (6.17)$$

où ρ_0^B est la densité initiale du fond, définie comme un paramètre, à l'instar de la position initiale du champ scalaire Q_0^B , la vitesse initiale vérifiant, quant à elle,

$$\dot{Q}_0^B = \sqrt{2\rho_0^B - 2V(Q_0^B)};$$

où les fonctions $\epsilon_i(\chi)$ sont des perturbations arbitraires, permettant toutefois d'utiliser des conditions de bords intéressantes, et où $\mu_0(\chi)$ est l'une des inconnues du problème de Cauchy ($\kappa = 8\pi$).

Ensuite, il suffit de résoudre la contrainte (6.8) du super-moment radial par rapport à π_λ , et de réinjecter la valeur ainsi obtenue dans le super-hamiltonien (6.9) pour obtenir finalement l'équation différentielle ordinaire suivante

$$y' = -\frac{y}{\chi} - 8\pi\chi \left(\frac{\dot{Q}_0^2}{2} + \frac{Q_0'^2}{2}y + V(Q_0) + \dot{\lambda}_0 Q_0' \dot{Q}_0 \chi \right) + 3\dot{\lambda}_0^2 \chi + 2\dot{\lambda}_0' \dot{\lambda}_0 \chi^2 + \frac{1}{\chi}, \quad (6.18)$$

où $y = e^{-2\mu_0(\chi)}$. Les valeurs numériques discrétisées y_i sont obtenues via la solution analytique de (6.18) où les quadratures sont évaluées par une méthode de Bode avec raffinement de la discrétisation, exactement comme au chapitre 4.

3 Equations d'Hamilton

Nous ferons ici encore l'usage du changement de variables (4.47) introduit au chapitre 4, auquel nous ajoutons une variante du moment conjugué au champ scalaire

$$\pi_Q = R^3 \chi^2 \Pi_Q, \quad (6.19)$$

de sorte que $\Pi_Q^B = -\dot{Q}^B$ pour la solution du fond homogène. Dans ces nouvelles variables, les équations hamiltoniennes du secteur gravitationnel sont celles du chapitre 4, au remplacement des composantes du tenseur énergie-impulsion près :

$$\begin{aligned} T_0^0 &= - \left(\frac{\Pi_Q^2}{2m^2 l^2} + \frac{Q'^2}{2m^2 R^2} + V \right) \\ T_1^0 &= - \frac{\Pi_Q}{ml} Q' \\ T_1^1 &= \frac{\Pi_Q^2}{2m^2 l^2} + \frac{Q'^2}{2m^2 R^2} - V \\ T_2^2 &= \frac{\Pi_Q^2}{2m^2 l^2} - \frac{Q'^2}{2m^2 R^2} - V. \end{aligned} \quad (6.20)$$

L'équivalent en termes des nouvelles variables des équations d'Hamilton relatives au champ scalaire seul (6.2 et 6.3) peut s'écrire :

$$\dot{Q} = - \frac{\Pi_Q}{ml} \quad (6.21)$$

$$\dot{\Pi}_Q = -3 \frac{\dot{R}}{R} \Pi_Q - \frac{Q''l}{mR^2} - \frac{2Q'l}{R^2 m \chi} - \frac{l'Q'}{mR^2} + \frac{m'Q'l}{R^2 m^2} + ml \frac{dV(Q)}{dQ}. \quad (6.22)$$

Nous utiliserons pour l'intégration numérique de ces équations la même méthode qu'au chapitre 4. Les conditions de bord seront une fois de plus d'imposer aux champs leur valeur homogène au bord de l'intervalle de discrétisation. Toutefois, la solution homogène n'est plus analytique dans le cas du champ scalaire couplé à la gravitation. Celle-ci sera donc prodiguée par un intégrateur numérique qui résoudra simultanément l'équation de Friedmann pour la géométrie²

$$\boxed{H^2 = \frac{\dot{R}^2}{R^2} = \frac{\kappa}{3} (-T_0^0)} \quad (6.23)$$

couplée à l'équation de Klein-Gordon

$$\boxed{\ddot{Q} + 3 \frac{\dot{R}}{R} \dot{Q} = - \frac{dV}{dQ}} \quad (6.24)$$

²Nous travaillons toujours dans un univers plat et la constante de couplage gravitationnel κ a été posée égale à 8π .

dictant la dynamique du champ scalaire. Il est aisé de vérifier que ces équations sont les solutions particulières des équations (6.2), (6.3), et (6.8) à (6.13) pour les valeurs homogènes des champs.

4 Inflaton dans un potentiel quartique

Dans ce paragraphe, nous nous intéressons à l'instabilité gravitationnelle de l'inflaton plongé dans le potentiel de self-interaction quartique :

$$V = \frac{1}{4} (Q^2 - 1)^2 \quad (6.25)$$

à l'image du potentiel de Higgs dans (1.18) au chapitre 1 et du potentiel d'interaction dans (2.65) de la sous-composante scalaire du champ de jauge (cf. chapitre 2). Toutefois, le comportement gravitationnel sera fort différent de celui du champ de jauge, puisque le champ scalaire n'est pas conformément invariant. Il n'en demeure pas moins que le mécanisme d'instabilité gravitationnelle sera tout de même plus aisé à comprendre.

En effet, la physique du champ scalaire auto-gravitant, homogène et isotrope, telle que décrite par les équations (6.23) et (6.24), présente une analogie mécanique évidente : l'équation de Klein-Gordon (6.24) dictant la dynamique de l'inflaton peut se voir comme une équation de Newton pour un oscillateur à la position $Q(t)$ dans le potentiel V , amorti par l'expansion cosmique (au travers du terme proportionnel au paramètre de Hubble $H = \frac{\dot{R}}{R}$). En retour, le couplage de ce champ à la gravitation, au travers de l'équation de Friedmann (6.23) est lui-même source d'expansion, et donc de frottement pour l'oscillateur.

Cette dynamique particulière est de première importance en cosmologie puisqu'elle se trouve à la base des théories **inflationnaires** (on consultera les travaux pionniers [GUT81, LIN84] et [PEE93] pour une introduction) et des scénarios de **quintessence** en vue de justifier l'accélération observée de l'expansion cosmique (cf. [PR03] pour une première revue).

Une des conditions essentielles de ces mécanismes est l'état de "*slow-roll*" du champ, dans lequel son énergie cinétique devient négligeable devant son énergie potentielle

$$\dot{Q}^2 \ll V$$

de sorte que l'inflaton mime alors une constante cosmologique de valeur $\Lambda = \kappa V$. La solution de l'équation de Friedmann est alors analogue à celle d'un univers de de Sitter (cf. [AND70, PEE93]) :

$$R(t) = R_0 \exp \left(\sqrt{\frac{\kappa V}{3}} t \right).$$

Ainsi, le champ scalaire permet-il de rendre compte d'une myriade de modèles cosmologiques différents, grâce à la marge de manœuvre qu'il apporte dans la spécification de son potentiel de self-interaction et des conditions initiales du champ. Nous pouvons apprécier ce confort cosmologique qu'offre l'inflaton en nous le représentant à la manière d'un fluide d'équation d'état

$$p_Q = \omega_Q \rho_Q \quad (6.26)$$

avec, par définition,

$$\omega_Q = \frac{\frac{\dot{Q}^2}{2} - V}{\frac{\dot{Q}^2}{2} + V}.$$

Le paramètre de l'équation d'état ω_Q peut donc varier continûment dans l'intervalle $[-1, 1]$ suivant les aléas de la trajectoire du champ scalaire Q , en reproduisant des comportements aussi variés que le fluide de poussières ($\omega_Q = 0$), de radiations ($\omega_Q = 1/3$) et une constante cosmologique négative ou positive ($\omega_Q = \pm 1$).

Illustrons ces propos par l'examen d'une trajectoire de notre inflaton Q dans le potentiel quartique (6.25) dont le détail pourra être trouvé à la figure 6.1. Lâché au voisinage du point de répulsion $Q = 0$ avec une vitesse positive, le champ est repoussé vers le minimum $Q = 1$ où il finira par s'établir puisque, pendant ce temps, la vitesse du champ a été drastiquement freinée par l'expansion que la dynamique scalaire a produite. Le facteur d'expansion $R(t)$ exhibe, quant à lui, une phase d'accélération prolongée correspondant au transit du champ vers le bassin d'attraction suivie d'une autre de décélération lorsque le champ tombe dans le bassin.

La figure 6.2 représente l'évolution du paramètre ω_Q de l'équation d'état. La phase d'accélération de l'expansion correspond à certaines valeurs négatives que ce paramètre atteint au début de son évolution, lorsque l'énergie potentielle du champ en arrive à dominer sa contrepartie cinétique. La phase de décélération suivante correspond à la chute dans le bassin d'attraction, où l'énergie potentielle devient en moyenne inférieure à son équivalente cinétique³. Toutefois, le paramètre ω_Q oscille à l'image du champ lui-même, ce qui provoque de faibles oscillations du facteur d'expansion durant sa décélération.

Examinons à présent le mécanisme d'instabilité gravitationnelle le long de cette trajectoire type. Les conclusions que nous en tirerons ne dépendront toutefois pas de cette trajectoire particulière mais bien de la physique du champ scalaire auto-gravitant lui-même.

³On trouve en effet, en dérivant (6.23), que l'équation d'accélération est donnée par

$$\frac{\ddot{R}}{R} = \frac{\kappa}{3} (V - \dot{Q}^2).$$

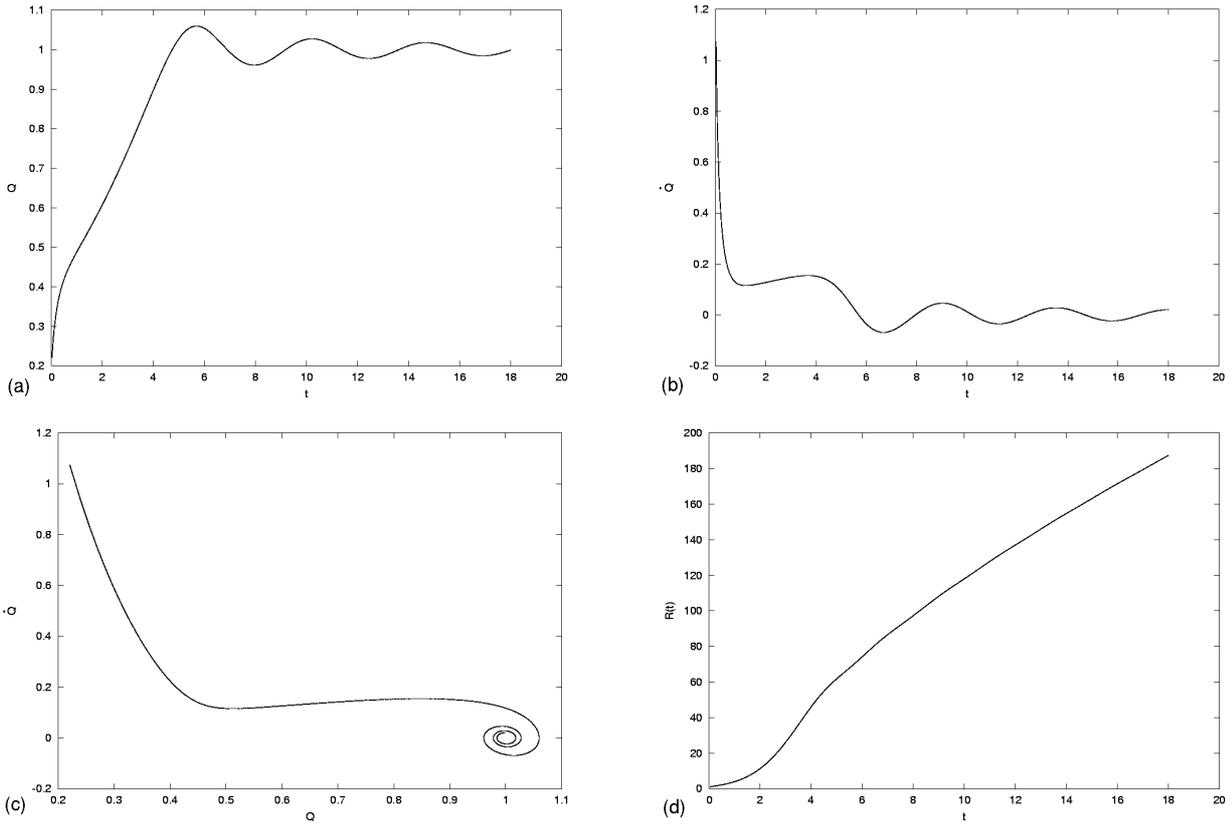


Figure 6.1 – Evolution du système gravité - champ scalaire homogène au cours du temps. (a) $Q(t)$ (b) \dot{Q} (c) orbite dans le plan de phase $\dot{Q}(Q)$ (d) Facteur d'expansion $R(t)$ ($\rho_0^B = 1$, $Q_0 = 0.2$, $\dot{Q}_0 = \sqrt{2(\rho_0^B - V(Q_0))}$)

La figure 6.3 illustre l'évolution des perturbations de la métrique au cours du temps. Le comportement croissant de celles-ci nous est désormais familier et nous ne nous y attarderons guère davantage. Toutefois, ce comportement va jouer ici encore un rôle crucial dans le mécanisme d'instabilité gravitationnelle du champ scalaire. La figure 6.4 illustre l'évolution des perturbations du secteur scalaire, c'est-à-dire celles du champ lui-même et de son moment conjugué. L'analogie mécanique introduite ci-dessus va nous permettre d'analyser facilement le comportement gravitationnel instable de ces quantités.

En effet, il suffit ici encore de se représenter le champ scalaire inhomogène comme une collection continue d'oscillateurs, distribués le long de l'axe radial et couplés élastiquement, en oscillation dans le potentiel de self-interaction $V(\chi, t)$. Les perturbations initiales (6.15) et (6.16) consistent alors à modifier respectivement la position et la vitesse initiales des oscillateurs dans le potentiel. Lors de leur évolution, les perturbations du champ oscillent en suivant de près la trajectoire homogène, et les divers oscillateurs atteignent des valeurs

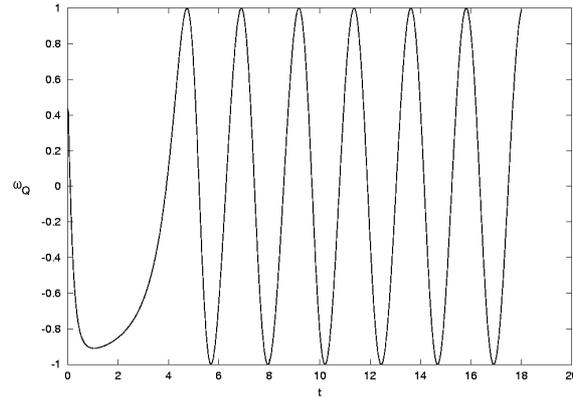


Figure 6.2 – Paramètre ω_Q de l'équation d'état en fonction du temps. (mêmes paramètres qu'à la figure 6.1)

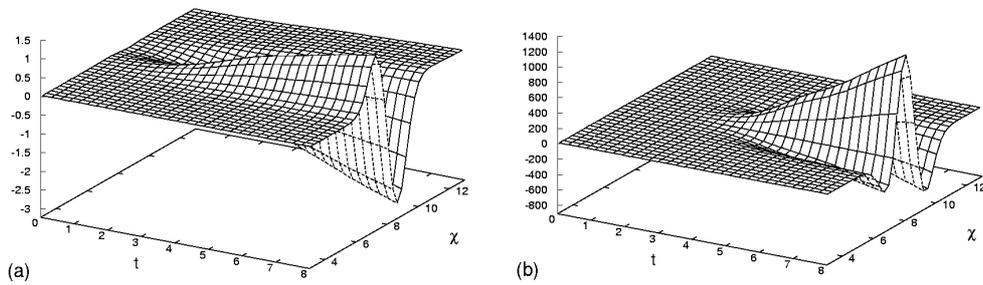


Figure 6.3 – Perturbations de la géométrie : (a) $e^\mu - R(t) = (m - 1) R(t)$ (b) $e^{2\lambda} - R^2(t)\chi^2 = (l - 1) R^2(t)\chi^2$ ($\rho_0^B = 1$, $\epsilon_Q = 10^{-4}$, $\epsilon_{\dot{Q}} = 10^{-5}$, $\epsilon_h = 10^{-5}$, $w = 0.5$)

d'énergie potentielle et cinétique plus ou moins élevées, associées à des positions différentes dans l'espace de phase, suivant les possibilités dont ils ont été gratifiés initialement. En examinant la figure 6.4, on remarque également que le champ et son moment conjugué suivent des évolutions en opposition de phase, ce qui est bien compatible avec notre analogie mécanique.

En vue d'expliquer le comportement des perturbations du champ et de sa vitesse, il est nécessaire de se rappeler celui de la solution homogène que nous avons étudiée précédemment. La phase de transit entre le bassin de répulsion et celui d'attraction s'accompagne d'une formidable expansion (*slow-roll*) qui fait également croître très fortement les perturbations de la géométrie (voir figure 6.3 (a) et (c) où ces perturbations varient sur plusieurs ordres de grandeurs dans les premiers temps de l'évolution). Il en résulte que les perturbations initiales du champ Q sont fortement amplifiées durant cette période (puisque elles obéissent à la relation 6.21), comme on peut le constater à la figure 6.4 (a). Pendant ce temps, les fluctuations de la vitesse sont amorties, à l'image de la vitesse elle-même, en vertu de la

puissante expansion (figure 6.4 (b)).

Ensuite, lorsque le champ homogène chute dans le bassin d'attraction aux alentours de l'équilibre $Q = +1$ et entame sa descente amortie vers celui-ci, les différents oscillateurs se déplacent au sein de ce bassin, avec des positions et des vitesses différentes, ce qui explique les variations des perturbations du champ et de son moment durant cette période. Toutefois, l'expansion ininterrompue amortit le mouvement global de ces oscillateurs de sorte qu'à très long terme toutes les perturbations soient *gelées* aux alentours du minimum. Nous reviendrons sur l'instabilité gravitationnelle dans le bassin d'attraction.

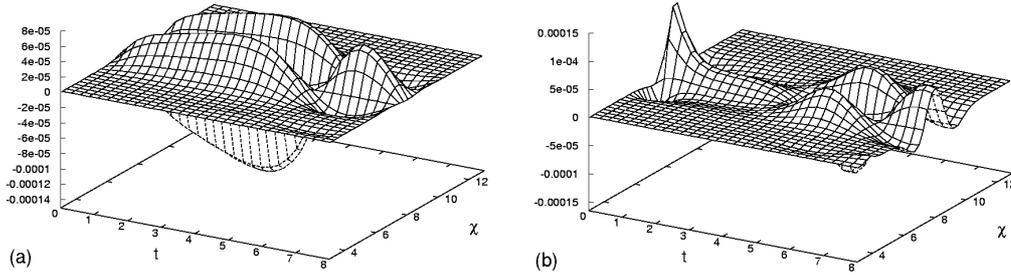


Figure 6.4 – Perturbations du champ scalaire et de son moment conjugué : (a) $Q - Q^B$ (b) $\Pi_Q - \Pi_Q^B$ (mêmes paramètres qu'à la figure 6.3)

La figure 6.5 représente, quant à elle, les perturbations associées au tenseur énergie-impulsion, plus précisément sous la forme des habituels contrastes de densité et de pressions :

$$\delta_i = \frac{T_i^i}{(T_i^i)^B} - 1$$

ainsi que la composante non diagonale T_1^0 de ce tenseur. L'interprétation de ces évolutions est facilitée lorsque l'on décompose les contrastes de densité et de pressions en une somme de trois contributions : cinétique, diffusive et potentielle des oscillateurs. Par exemple, le contraste de densité peut se réécrire

$$\begin{aligned} \delta_\rho &= \frac{\frac{\Pi_Q^2}{2m^2 l^2} - \frac{(\dot{Q}^B)^2}{2}}{\frac{(\dot{Q}^B)^2}{2} + V(Q^B)} + \frac{\frac{Q'^2}{2m^2 R^2} - \frac{(\dot{Q}^B)^2}{2}}{\frac{(\dot{Q}^B)^2}{2} + V(Q^B)} + \frac{V(Q) - V(Q^B)}{\frac{(\dot{Q}^B)^2}{2} + V(Q^B)} \\ &= \delta_K + \delta_{dif} + \delta_V, \end{aligned} \quad (6.27)$$

où δ_K , δ_{dif} et δ_V sont les contributions cinétique, diffusive et potentielle au contraste de densité et de pressions. En effet, en vertu de (6.20), les contrastes de pressions radiale et

tangentielles s'écrivent

$$\begin{aligned}\delta_{p_r} &= \delta_{T_1^1} = \delta_K + \delta_{dif} - \delta_V \\ \delta_{p_t} &= \delta_{T_2^2} = \delta_K - \delta_{dif} - \delta_V.\end{aligned}$$

Ainsi, l'examen des graphes (b) (δ_{p_r}) et (c) (δ_{p_t}) de la figure 6.5 nous enseigne que la contribution de la diffusion est ici négligeable (voir également la figure 6.6 (c)), ce qui justifie *a posteriori* que ces contrastes soient si semblables et ainsi que les pressions soient localement isotropes⁴. Les contributions aux contrastes de densité et de pression sont donc essentiellement cinétiques et potentielles. Avec cette observation, il est alors aisé d'interpréter

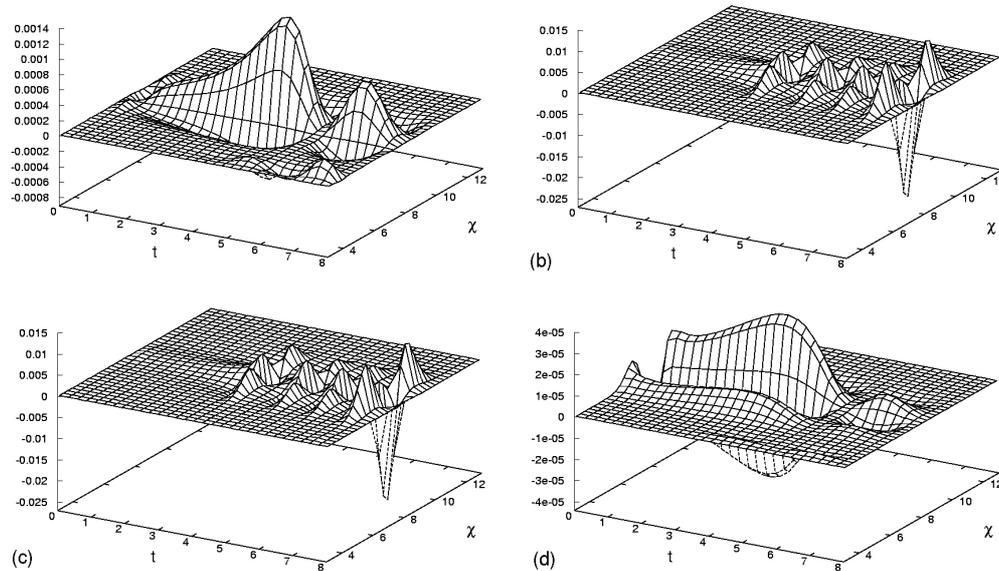


Figure 6.5 – Contrastes de densité et de pressions, composante non diagonale du tenseur énergie-impulsion : (a) $\frac{-T_0^0}{\rho^B} - 1$ (b) $\frac{T_1^1}{(T_1^1)^B} - 1$ (c) $\frac{T_2^2}{(T_2^2)^B} - 1$ (d) T_1^0 (mêmes paramètres qu'à la figure (6.3))

l'évolution des contrastes de densité et de pressions, en se souvenant du comportement des perturbations du champ et de son moment associé que nous avons examinés précédemment.

Dans un premier temps, la croissance des perturbations du champ, due à l'expansion puissante, entraîne que le contraste d'énergie cinétique est négligeable devant celui d'énergie potentielle (figure 6.6 (a) et (b)). La contribution principale aux contrastes de densité et de pressions est donc potentielle, ce qui se voit particulièrement en comparant les graphes 6.5 (a) et 6.6 (b). Ensuite, lorsque le champ oscille dans le bassin d'attraction, la contribution

⁴Nous n'avons pas encore étudié les conséquences de la diffusion sur le mécanisme d'instabilité gravitationnelle du champ scalaire, nous devons donc laisser ce sujet pour des travaux ultérieurs.

due à l'énergie cinétique peut seulement augmenter. La forme particulière de l'évolution des contrastes de pressions est due au fait qu'ils valent pratiquement⁵ la différence des contributions cinétique et potentielle. Ils sont donc extrémaux lorsque l'une ou l'autre s'annule, c'est-à-dire au passage par le minimum du potentiel $Q(\chi, t) = 1$ et à l'arrêt des oscillateurs $\dot{Q}(\chi, t) = 0$. Enfin, on remarquera l'évidente opposition de phase entre les perturbations de l'énergie cinétique et potentielle du champ à la figure 6.6.

Par ailleurs, l'évolution de la composante non diagonale du tenseur énergie-impulsion (figure 6.5 (d)), proportionnelle au produit du gradient du champ par sa vitesse (relation (6.5)), nous confirme bien que les perturbations du champ croissent fortement aux premiers temps de l'évolution. Cette composante subit ensuite un régime d'oscillations amorties lorsque le champ homogène bascule dans le bassin d'attraction (voir plus loin pour l'examen de ce régime).

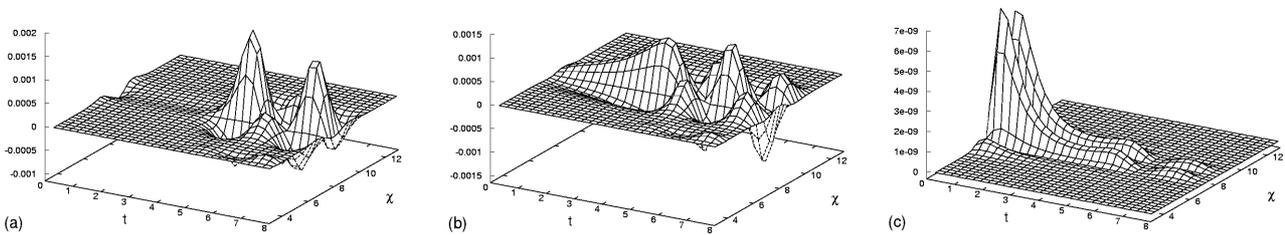


Figure 6.6 – Composantes cinétique (a), potentielle (b) et diffusive (c) des contrastes de densité et de pressions. (mêmes paramètres qu'à la figure (6.3))

Nous proposons à présent au lecteur d'analyser le comportement à long terme des fluctuations lorsque le champ gravite Q autour de son minimum et, à cette fin, choisissons une solution homogène comme celle illustrée à la figure 6.7. Les perturbations du champ scalaire et de son moment autour de cette trajectoire sont indiquées à la figure 6.8. Celles-ci oscillent dans le bassin d'attraction, pendant que l'expansion inhomogène produit un frottement qui continue à différencier les vitesses et les positions du champ d'oscillateurs en mouvement dans le potentiel $V(\chi, t)$. Il en résulte que le contraste de densité de la figure 6.9 croît de manière monotone. En effet, ce contraste est une superposition des contributions potentielle δ_V et cinétique δ_K de la figure 6.10 (a) et (b) qui sont à l'image des distributions de positions et de vitesses relatives dans la collection d'oscillateurs. Ces distributions sont sans cesse alimentées par l'expansion inhomogène. Les contrastes de pressions évoluent de manière similaire à ce que nous avons vu précédemment, c'est pourquoi nous ne les avons pas représentés ici. La composante non diagonale du tenseur énergie-impulsion subit des oscillations amorties, comme nous l'annoncions auparavant, du fait de la dissipation due à

⁵Au terme diffusif négligeable près.

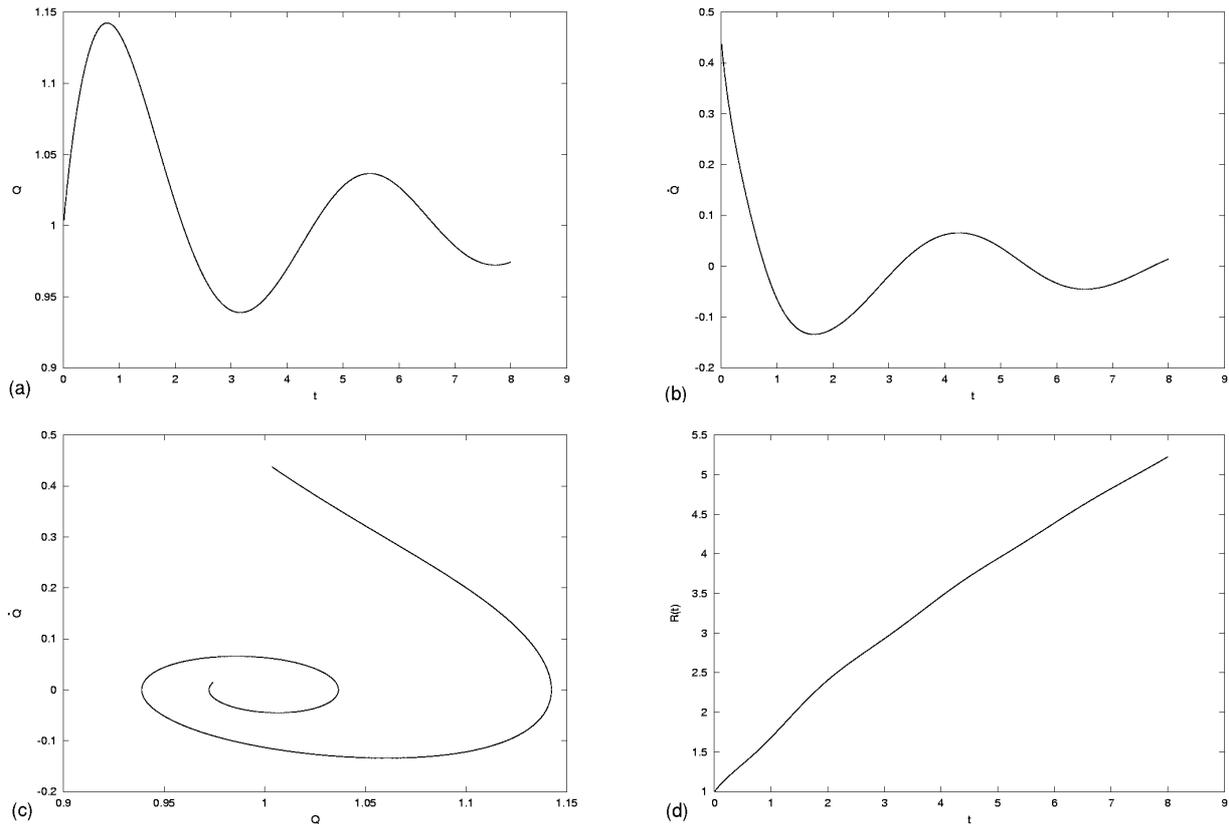


Figure 6.7 – Evolution du système gravité - champ scalaire homogène au cours du temps dans le bassin d'attraction autour du minimum $Q = +1$. (a) $Q(t)$ (b) \dot{Q} (c) orbite dans le plan de phase $\dot{Q}(Q)$ (d) Facteur d'expansion $R(t)$ ($\rho_0^B = 0.1$, $Q_0 = 1$, $\dot{Q}_0 = \sqrt{2(\rho_0^B - V(Q_0))}$)

l'expansion (cette composante est le produit de la vitesse du champ par son gradient, voir (6.5)).

5 Remarque : influence du potentiel sur le mécanisme

Jusqu'à présent, nous n'avons pas encore examiné le rôle important que joue le potentiel de self-interaction dans le mécanisme d'instabilité gravitationnelle de l'inflaton. Bien que nous n'ayons pas approfondi la question, nous proposons d'examiner deux exemples qui montrent que la forme du potentiel est également une composante essentielle de ce mécanisme. Pour

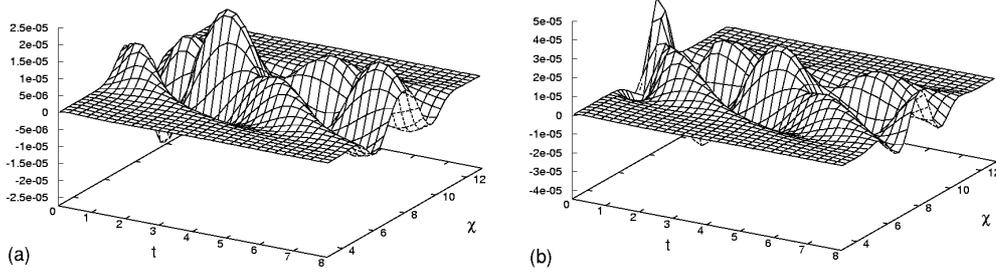


Figure 6.8 – Perturbations du champ scalaire et de son moment conjugué : (a) $Q - Q^B$ (b) $\Pi_Q - \Pi_Q^B$ ($\rho_0^B = 0.1$, $\epsilon_Q = 10^{-5}$, $\epsilon_{\dot{Q}} = 10^{-5}$, $\epsilon_h = 10^{-5}$, $w = 0.5$, $\Delta\chi = 0.14$, $\Delta t = 10^{-6}$)

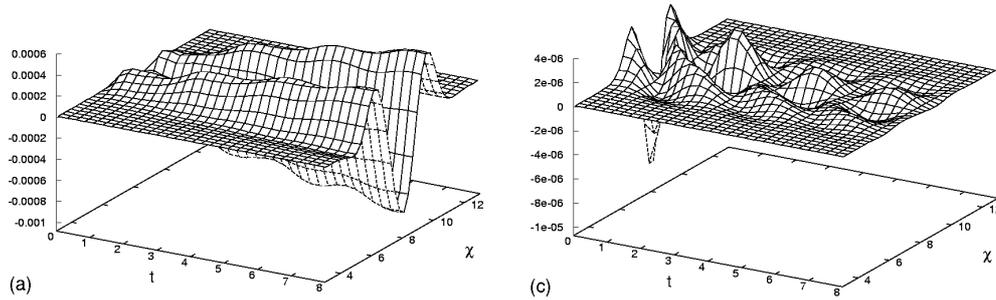


Figure 6.9 – Contrastes de densité et de pression, composante non diagonale du tenseur énergie-impulsion : (a) $\frac{-T_0^0}{\rho^B} - 1$ (b) T_1^0 (mêmes paramètres qu'à la figure (6.8))

ce faire, utilisons le potentiel étudié par Peebles et Vilenkin dans [PV99] :

$$\begin{aligned} V(Q) &= \lambda (Q^4 + M^4) \quad \text{si } Q < 0 \\ &= \frac{\lambda M^8}{Q^4 + M^4} \quad \text{si } Q \geq 0 \end{aligned} \quad (6.28)$$

qui est un potentiel d'inflation “chaotique” pour $Q \ll -M$ (cf. [LIN84]) et de quintessence pour $Q \gg M$, M et λ étant des paramètres arbitraires à déterminer par des considérations empiriques. Ce potentiel est représenté à la figure 6.11.

Examinons tout d'abord un contre-exemple du résultat du paragraphe précédent sur la croissance du contraste de densité durant la phase accélérée de l'expansion. La figure 6.13 reprend la perturbation d'une trajectoire inflationnaire⁶ de l'inflaton, donnée à la figure 6.12. La décroissance du contraste de densité y est due au fait que les perturbations du champ sont éparpillées par l'expansion inhomogène dans un potentiel quasiment plat, ne permettant donc pas de générer de grandes différences de potentiel au cours de l'inflation,

⁶On remarquera toutefois que la condition pour avoir une phase inflationnaire est $\omega_Q \leq -1/3$ (cf. [PEE93]).

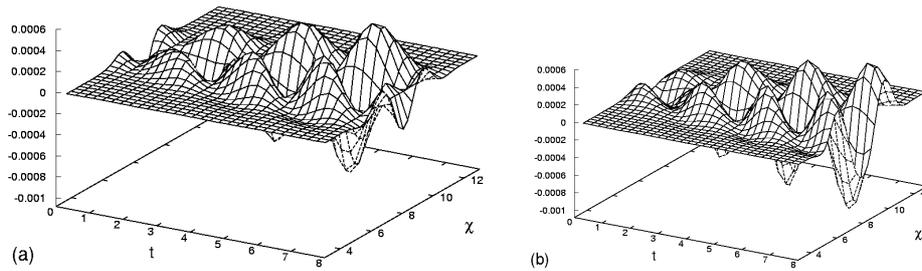


Figure 6.10 – Composantes cinétique (a) et potentielle (b) des contrastes de densité et de pressions. (mêmes paramètres qu'à la figure (6.8))

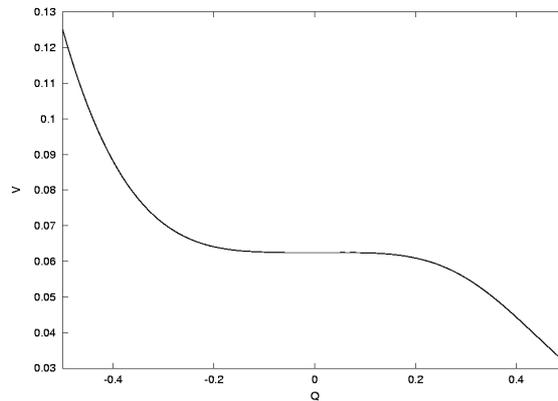


Figure 6.11 – Potentiel de Peebles-Vilenkin (6.28) ($\lambda = 1$, $M = 0.5$)

au contraire de ce que nous avons vu avec le potentiel quartique. Une phase d'inflation n'est donc pas nécessairement synonyme de croissance des fluctuations d'énergie du champ scalaire.

Ensuite, étudions l'évolution des fluctuations dans la partie de quintessence ($Q \geq M$) du potentiel (6.28). La trajectoire homogène dont la perturbation se trouve illustrée à la figure 6.15 est représentée à la figure 6.14. La solution homogène se décompose comme suit : d'abord une phase d'expansion décélérée qui correspond au démarrage du champ Q sur la pente descendante du potentiel de quintessence, suivie d'une phase accélérée lorsque le champ effectue un "slow-roll" le long du potentiel. Dans le cas inhomogène, le contraste de densité subit l'évolution indiquée par la figure 6.15 (a), dominé d'abord par le terme cinétique δ_K (cf. figure 6.15 (b)) lorsque l'expansion n'a pas encore trop fortement amorti le champ, et ensuite par le terme potentiel δ_V (cf. figure 6.15 (c)), lorsque les valeurs du champ sont suffisamment éparpillées dans la pente du potentiel. A long terme, on constate que le contraste de densité décroît et, comme il est alors essentiellement constitué de termes potentiels, cela signifie que les perturbations du champ Q lui-même s'amenuisent.

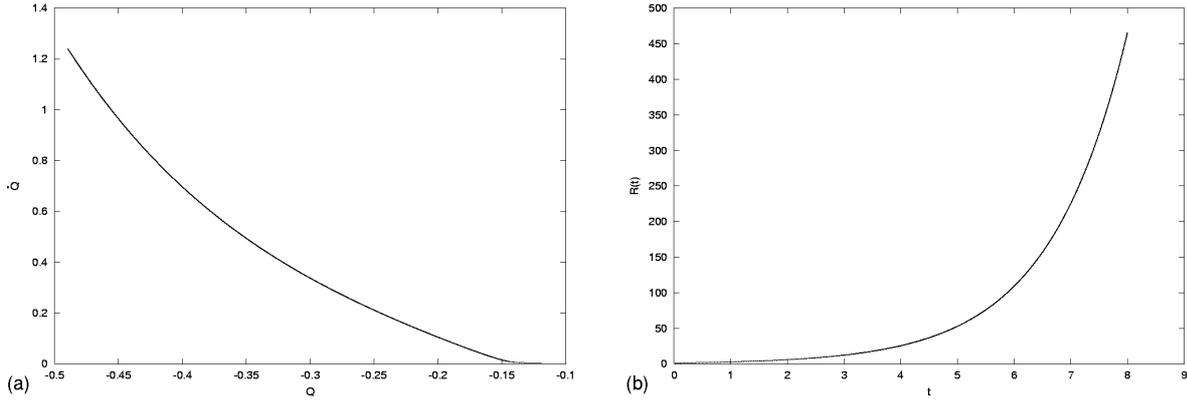


Figure 6.12 – *Orbite dans le plan de phase $Q(\dot{Q})$ et facteur d'expansion résultant pour une trajectoire "inflationnaire". (même potentiel que celui de la figure (6.11), $\rho_0^B = 1$, $Q_0 = -0.5$)*

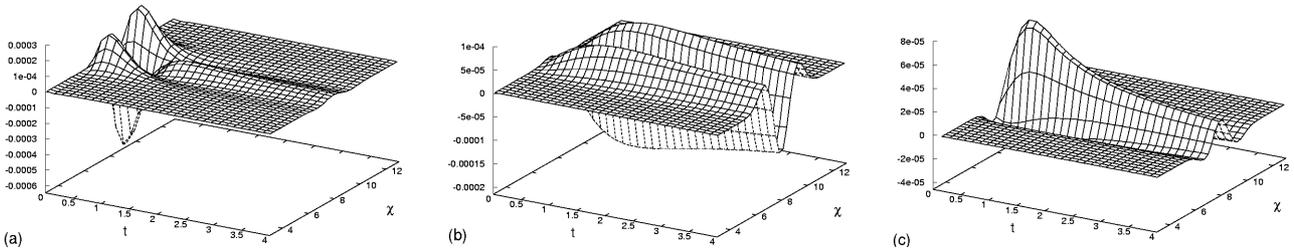


Figure 6.13 – *Contraste de densité, perturbations du champ et différence d'énergie potentielle résultante pour la trajectoire homogène de la figure 6.12. (a) $\frac{-T_0^0}{\rho^B} - 1$ (b) $Q - Q^B$ (c) δ_V ($\epsilon_Q = 10^{-5}$, $\epsilon_{\dot{Q}} = 10^{-5}$, $w = 0.4$, $\Delta\chi = 0.14$, $\Delta t = 10^{-6}$)*

Ce résultat n'est pas surprenant dans la mesure où les potentiels de quintessence en puissance inverse du champ présentent souvent l'existence d'un attracteur qui entraîne la solution homogène vers un même état pour un large ensemble de conditions initiales du champ. C'est d'ailleurs pourquoi la quintessence présente un tel intérêt cosmologique (cf. [PR03] pour une introduction).

En effet, l'observation de l'accélération de l'expansion cosmique suggère l'existence d'une quantité précise "*d'énergie négative*" (correspondant à des valeurs négatives du paramètre ω_Q dans l'équation d'état (6.26)) qui doit se justifier par une valeur extrêmement précise de la constante cosmologique Λ ou par un autre moyen, la quintessence sous forme d'un champ scalaire par exemple. En ce qui concerne la constante cosmologique, ce problème s'ajoute à celui déjà connu qui consiste à évaluer sa valeur à partir de considérations is-

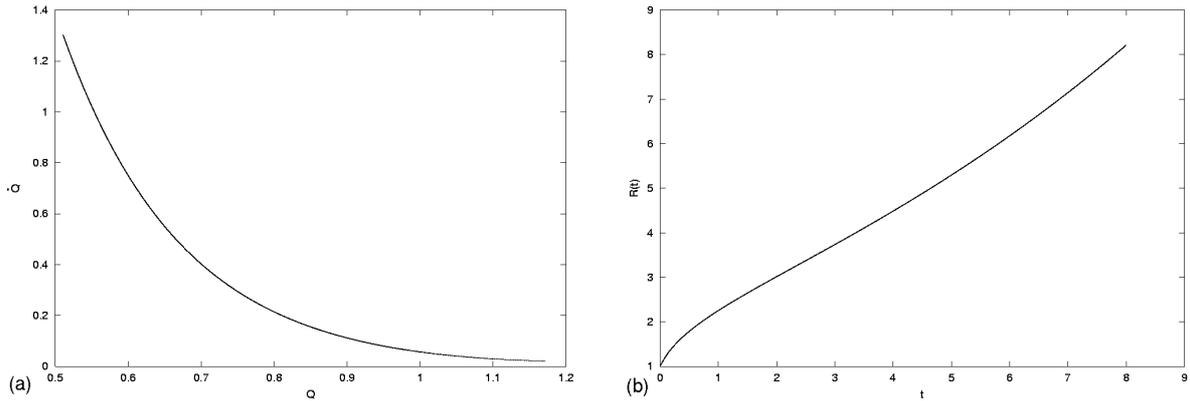


Figure 6.14 – *Orbite dans le plan de phase $Q(\dot{Q})$ et facteur d'expansion résultant pour une trajectoire de quintessence. (même potentiel que celui de la figure (6.11), $\rho_0^B = 1$, $Q_0 = 0.5$)*

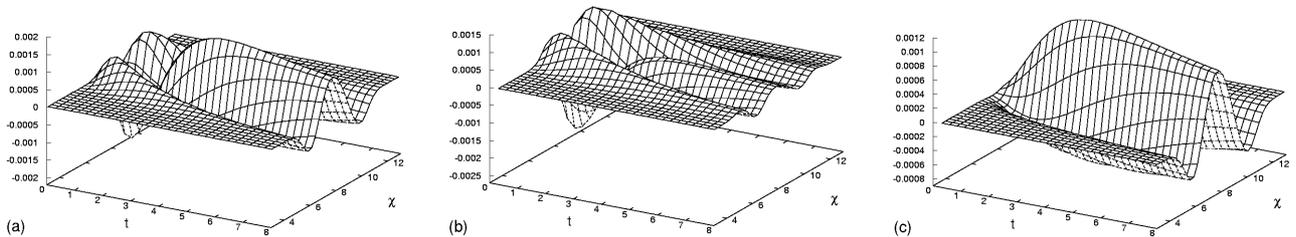


Figure 6.15 – *Contraste de densité et contributions cinétique et potentielle constitutives pour la trajectoire homogène de la figure 6.14. (a) $\frac{-T_0^0}{\rho^B} - 1$ (b) δ_K (c) δ_V ($\epsilon_Q = 10^{-5}$, $\epsilon_{\dot{Q}} = 10^{-5}$, $w = 0.4$, $\Delta\chi = 0.14$, $\Delta t = 10^{-6}$)*

sues de la physique quantique⁷. Or, cette estimation théorique donne une valeur supérieure de plusieurs dizaines d'ordres de grandeurs à l'ordre de grandeur de sa valeur observée, très proche de zéro. Les théoriciens peuvent envisager certaines considérations symétriques qui entraîneraient une valeur strictement nulle de la constante cosmologique mais il est plus difficile d'en expliquer une valeur faible, non identiquement nulle, comme celle que suggèrent les observations d'accélération de l'expansion. L'explication en terme de quintessence offre donc l'avantage de remplacer cette constante cosmologique dérangeante et de reporter le problème de l'ajustement précis de sa valeur par un mécanisme inconnu à celui du choix d'un potentiel entraînant l'existence d'un attracteur vers lequel le champ convergerait inmanquablement. Le potentiel de quintessence envisagé ici présente une telle caractéristique et notre étude numérique montre que les perturbations du champ de quintessence disparaissent au fur et à mesure que la solution converge vers l'attracteur. Les

⁷La constante cosmologique correspondrait à l'énergie du vide qui se calcule à partir de l'énergie de point zéro de tous les champs matériels.

solutions inhomogènes perturbées présentent donc le même attracteur que la solution homogène et l'insensibilité aux conditions initiales est préservée au niveau de la perturbation. Ce résultat a été démontré par Brax, Martin et Riazuelo dans [BMR00].

En guise de conclusion, nous pouvons dire que l'instabilité gravitationnelle de l'inflaton s'explique intuitivement bien par le biais d'une analogie mécanique, celle d'une collection infinie d'oscillateurs roulant le long du potentiel d'interaction, dont la forme ne se modifie guère au cours du temps, à l'inverse des champs de jauge. L'absence d'invariance conforme du champ scalaire, qui résulte en une dissipation de l'énergie du champ lors de l'expansion, apparaît comme un acteur important de son mécanisme d'instabilité gravitationnelle. En effet, l'expansion inhomogène se traduit par un frottement et une distribution de vitesses inhomogènes. Ainsi, ceci entraîne l'apparition de différences d'énergies cinétique et potentielle entre les régions de l'espace où le champ se trouve dans des états différents. Au cours de l'expansion, ces écarts peuvent se creuser ou s'amenuiser suivant la forme du potentiel d'interaction et la position du champ homogène dans l'espace de phase.

Notre étude n'avait ici pour seul but que de mettre en évidence les principes régissant le mécanisme d'instabilité gravitationnelle du champ scalaire couplé à la gravitation sans pour autant en donner une étude quantitative. Des travaux ultérieurs pourraient utiliser notre méthode pour étudier les fluctuations du champ scalaire dans un modèle cosmologique plus précis.

Chapitre 7

Influence de la quintessence sur la formation des grandes structures

*” Le ciel est triste et beau comme un grand reposoir ;
Le violon frémit comme un cœur qu'on afflige,
Un cœur tendre, qui hait le néant vaste et noir,
Du passé lumineux recueille tout vestige !*

C. Baudelaire, ” *Harmonie du soir*”, in ” *Les fleurs du mal*”, n° XLVII.

Sommaire

1	Cosmologies homogènes avec champ de quintessence	164
2	Modèles d’univers pour la formation des structures	168
3	Evolution des fluctuations de densité	173
3.1	Régime linéaire	173
3.2	Régime non linéaire	175
4	Formation des halos de matière noire	182

1 Cosmologies homogènes avec champ de quintessence

Il existe une autre manière de concevoir l'influence d'un champ scalaire sur l'instabilité gravitationnelle que d'étudier directement les fluctuations de celui-ci. Ce dernier aspect faisait l'objet du chapitre précédent et nous proposons ici au lecteur une petite ouverture sur une recherche que nous menons en collaboration avec J.-M. Alimi du Laboratoire de l'Univers et de ses THéories (Observatoire de Paris-Meudon). Cette recherche consiste à examiner l'influence sur la formation des grandes structures de la modification de l'expansion par la quintessence. En effet, la quintessence se conçoit comme un champ scalaire qui n'interagit pas directement avec la matière ordinaire mais dont l'influence discrète se fait ressentir par l'intermédiaire de la gravitation, par exemple au niveau de l'expansion cosmique. Avant d'expliquer brièvement comment se réalise l'étude numérique de la formation des grandes structures, nous allons nous attarder à montrer la modification induite par la quintessence sur l'expansion universelle.

Reprenons tout d'abord la dynamique gravitationnelle du système gravité-champ scalaire. Celle-ci est dictée par les deux équations d'Einstein suivantes (en unités physiques usuelles, $G \neq c \neq 1$, cf. [MTW73]) :

$$\left(\frac{\dot{R}}{R}\right)^2 = \frac{8\pi G}{3}\rho - \frac{kc^2}{R^2} + \frac{\Lambda c^2}{3} \quad (7.1)$$

$$2\frac{\ddot{R}}{R} = \Lambda c^2 - \frac{8\pi G}{c^2}p - \frac{kc^2}{R^2} - \left(\frac{\dot{R}}{R}\right)^2 \quad (7.2)$$

où $R(t)$ a les dimensions d'une longueur et où $\rho = \rho_m + \rho_{rad} + \rho_Q$, les indices m , rad et Q se rapportent à la matière ordinaire, aux radiations et à la quintessence, respectivement. La composante matérielle ρ_m se décompose habituellement en une composante baryonique ρ_b formant la matière ordinaire (composée de protons et de neutrons, non relativiste, d'équation d'état $p = 0$), une composante due aux neutrinos ρ_ν (matière sombre chaude, relativiste) et une autre due à de la matière sombre froide ρ_{CDM} dont l'existence est suggérée par de nombreuses observations astrophysiques. Ainsi, l'univers est-il constitué de cinq "fluides" différents : les baryons, la matière sombre froide, les neutrinos, les radiations électromagnétiques et la quintessence.

Si nous posons à présent $R(t) = a(t)R_0$ avec $a(t)$ le facteur d'échelle (sans dimension) et R_0 une longueur caractéristique (par exemple la taille de l'horizon cosmologique), nous

obtenons pour les deux équations d'Einstein

$$\left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2 = \frac{8\pi G}{3}\rho - \frac{kc^2}{a^2 R_0^2} + \frac{\Lambda c^2}{3} \quad (7.3)$$

$$2\frac{\ddot{a}}{a} = \Lambda c^2 - \frac{8\pi G}{c^2}p - \frac{kc^2}{a^2 R_0^2} - \left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2. \quad (7.4)$$

Définissant par $H = \frac{\dot{a}}{a}$ le paramètre de Hubble désignant le taux d'expansion, il existe une densité critique pour laquelle l'univers sans constante cosmologique ($\Lambda = 0$) est plat. Cette densité critique vaut

$$\rho_c = \frac{3H^2}{8\pi G}.$$

Grâce à cette quantité, on peut désigner par $\Omega_i = \frac{\rho_i}{\rho_c}$ les divers paramètres de densité associés aux différents ingrédients matériels qui composent l'Univers. On peut également introduire des définitions analogues pour les termes de courbure

$$\Omega_K = \frac{kc^2}{a^2 R_0^2 H^2}$$

et de constante cosmologique

$$\Omega_\Lambda = \frac{\Lambda c^2}{3H^2}.$$

Forts de ces conventions, nous pouvons à présent récrire l'équation de Friedmann (7.3) sous la forme algébrique suivante :

$$\Omega_m + \Omega_{rad} + \Omega_Q + \Omega_\Lambda - \Omega_K = 1. \quad (7.5)$$

Grâce aux équations de continuité $T^{0\mu}_{|\mu} = 0$, il est possible d'écrire les lois d'évolution des paramètres de densité matériels

$$\Omega_m = \frac{\Omega_{m,0} a_0^3 H_0^2}{a^3 H^2} \quad (7.6)$$

$$\Omega_{rad} = \frac{\Omega_{rad,0} a_0^4 H_0^2}{a^4 H^2}, \quad (7.7)$$

où l'indice 0 désigne les valeurs d'aujourd'hui des paramètres cosmologiques. Si nous définissons par K le terme de courbure avec

$$K = \frac{kc^2}{R_0^2},$$

on a que $\Omega_K = \frac{K}{H^2 a^2}$ et l'équation de Friedmann (7.3) se réécrit

$$\boxed{H^2 = H_0^2 \left(\Omega_{m,0} \frac{a_0^3}{a^3} + \Omega_{rad,0} \frac{a_0^4}{a^4} - \Omega_{K,0} \frac{a_0^2}{a^2} + \Omega_{\Lambda,0} \right) + \frac{8\pi G}{3} \rho_Q,} \quad (7.8)$$

avec $\Omega_{K,0} = \frac{K}{H_0^2 a_0^2}$, $\Omega_{\Lambda,0} = \frac{\Lambda c^2}{3H_0^2}$ et la densité d'énergie du champ de quintessence $\rho_Q c^2 = \frac{1}{2}\dot{Q}^2 + V(Q)$, comme au chapitre précédent. L'équation (7.8) dicte l'évolution du facteur d'échelle dans un univers composé des cinq fluides décrits plus haut et doté d'une courbure et d'une constante cosmologique quelconques¹.

Pour rappel la dynamique du champ scalaire homogène et isotrope en self-interaction est celle de Klein-Gordon vue précédemment :

$$\boxed{\ddot{Q} + 3\frac{\dot{a}}{a}\dot{Q} + \frac{dV(Q)}{dQ} = 0.} \quad (7.10)$$

Nous nous concentrerons ici plus particulièrement sur deux types de potentiel rencontrés dans la littérature, à savoir **le modèle de Ratra-Peebles** [RP88]

$$\boxed{V_{RP} = \frac{\Lambda^{4+\alpha}}{Q^\alpha}} \quad (7.11)$$

et ce même potentiel avec un terme correctif dû à la supergravité (cf. [BMR00, BM00, BM99]), auquel nous référerons sous le vocable de **modèle Sugra**,

$$\boxed{V_{Sugra} = \frac{\Lambda^{4+\alpha}}{Q^\alpha} e^{\frac{4\pi G}{c^2} Q^2}} \quad (7.12)$$

où Λ est l'échelle d'énergie du potentiel (à ne pas confondre avec la constante cosmologique) et α est un exposant arbitraire. A l'instar de Brax et Martin [BM00], nous travaillerons dans le système d'unités géométrisées tel que

$$\hbar = c = 1$$

et de ce fait, la constante de Newton G se trouve reliée à l'énergie de Planck par la relation

$$G = m_{Pl}^{-2}$$

où la masse de Planck vaut

$$m_{Pl} = \sqrt{\frac{\hbar c}{G}} = 2.1768 \times 10^{-8} kg \equiv 1.2211 \times 10^{19} GeV.$$

¹La seconde équation d'Einstein (7.4), quant à elle, se ramène à

$$2\frac{\ddot{a}}{a} = -H_0^2 \left(2\Omega_{rad,0} \frac{a_0^4}{a^4} + \Omega_{m,0} \frac{a_0^3}{a^3} - 2\Omega_{\Lambda,0} \right) - \frac{8\pi G}{3} \rho_Q (1 + 3\omega_Q), \quad (7.9)$$

avec $\omega_Q = \frac{p_Q}{\rho_Q} = \frac{\frac{1}{2}\dot{Q}^2 - V(Q)}{\frac{1}{2}\dot{Q}^2 + V(Q)}$.

On trouvera des tables de conversion entre le système d'unités internationales et le système géométrisé, ainsi que les valeurs de constantes fondamentales dans ces deux systèmes à la référence [KT90]. Dans ces unités géométrisées, on exprimera le champ scalaire de quintessence en unités de la masse de Planck au moyen du changement de variable suivant : $Q(t) = m_{Pl} \phi(t)$. L'équation de Klein-Gordon devient dès lors

$$\boxed{\ddot{\phi} + 3\frac{\dot{a}}{a}\dot{\phi} + \frac{1}{m_{Pl}^2} \frac{dV(\phi)}{d\phi} = 0.} \quad (7.13)$$

De même, les potentiels de quintessence (7.11) et (7.12) ci-dessus deviennent

$$V_{RP}(\phi) = \frac{\lambda^{4+\alpha}}{\phi^\alpha} \quad (7.14)$$

$$V_{Sugra}(\phi) = \frac{\lambda^{4+\alpha}}{\phi^\alpha} e^{4\pi\phi^2}, \quad (7.15)$$

où

$$\lambda = \Lambda m_{Pl}^{-\alpha/(4+\alpha)}.$$

Dans la littérature récente [MCBW99, BBFO01, LBH03], la question de l'influence de la quintessence sur la formation des structures ne semble avoir été examinée, assez curieusement, uniquement par le biais d'un artifice commode, la **quintessence effective**. Il s'agit en fait d'un modèle fortement simplifié de quintessence, dans lequel le rapport $\omega_Q = p_Q/\rho_Q$ de la pression sur la densité du champ de quintessence est une **constante** au cours du temps. Il présente l'avantage certain de ne plus devoir considérer un potentiel précis d'interaction et de pouvoir se passer de l'intégration de l'équation de Klein-Gordon dictant la dynamique du champ scalaire. En effet, dès lors que la quintessence obéit à l'équation d'état simpliste $\omega_Q = cte$, il existe une solution analytique pour l'évolution temporelle de la densité d'énergie du champ de quintessence, obtenue via l'intégration de l'équation de continuité de ce fluide :

$$\rho_Q = \rho_{Q,0} \left(\frac{a_0}{a}\right)^{3(1+\omega_Q)}$$

ou, en terme du paramètre de densité du champ de quintessence,

$$\Omega_Q = \frac{H_0^2}{H^2} \left(\frac{a_0}{a}\right)^{3(1+\omega_Q)} \Omega_{Q,0}. \quad (7.16)$$

Cette relation est tout-à-fait analogue à celle que nous avons obtenue pour la densité de matière et de radiations (7.6) et (7.7) et permet un traitement direct de l'équation de Friedmann en présence de quintessence effective.

Cependant, nous verrons que cette hypothèse de quintessence effective est beaucoup trop réductrice et ne représente pas adéquatement un modèle cosmologique "réaliste" de quintessence tels que ceux de Ratra-Peebles ou Sugra, même dans les périodes les plus récentes de leur évolution. Cet effet se répercutera sur la formation des structures et donnera un schéma de formation foncièrement différent entre les modèles à quintessence effective et les réalistes.

2 Modèles d'univers pour la formation des structures

Une première étape de notre étude de l'influence de la quintessence sur la formation des grandes structures consiste à développer une méthode qui permette de dériver une solution des équations (7.8) et (7.13) qui concorde au mieux avec les paramètres cosmologiques observés. Diverses observations fournissent les valeurs suivantes des paramètres cosmologiques aujourd'hui (indicées par 0), en unités internationales et en unités géométrisées $\hbar = c = 1$:

$$\begin{aligned}
H_0 &= 100 h \text{ km/s/Mpc} \\
&= 2.1332 h \times 10^{-42} \text{ GeV} \quad [\text{KT90}] \\
\rho_{c,0} = \frac{3H_0^2}{8\pi G} &= 1.879 h^2 \times 10^{-29} \text{ g/cm}^3 \\
&= 8.0992 h^2 \times 10^{-47} \text{ GeV}^4 \quad [\text{KT90}] \\
h &= 0.71 \pm 0.07 \quad [\text{HAG02}] \\
0.15 \leq \Omega_{m,0} &\leq 0.45 \quad [\text{HAG02}] \\
0.0095 \leq \Omega_{b,0} h^2 &\leq 0.023 \quad [\text{HAG02}] \\
\Omega_{rel,0} &= \Omega_{rad,0} + \Omega_{\nu,0} \approx 4.153 \times 10^{-5} \quad [\text{HAG02}] \\
0.6 \leq \Omega_{acc,0} &\leq 0.7 \quad [\text{PTW99}] \\
\Omega_{tot} &\approx 1 \\
\omega_Q &< -0.6 \quad [\text{PTW99}],
\end{aligned}$$

où Ω_{rel} représente la composante de matière relativiste du cosmos (photons et neutrinos) et où Ω_{acc} désigne la composante accélératrice de l'expansion d'une valeur d'environ 70% et qui doit être considérée comme étant due soit à une constante cosmologique $\Omega_{acc} = \Omega_{\Lambda}$, dont l'équation d'état vaut toujours $p_{\Lambda} = -\rho_{\Lambda} c^2$; soit à la quintessence $\Omega_{acc} = \Omega_Q$, dont l'équation d'état aujourd'hui donne lieu à une répulsion plus modérée ($\omega_Q = p_Q/\rho_Q < -0.6$).

A partir des paramètres cosmologiques spécifiés à une époque donnée par un facteur d'expansion a_e , on peut obtenir des conditions initiales pour l'intégration des équations (7.8) et (7.13) jusqu'à l'époque désirée. Pour la partie géométrique, il nous suffit de connaître

le facteur d'échelle initial a_e , le taux d'expansion H_e , la valeur des divers paramètres de densité et celle de la densité du champ de quintessence $\rho_{Q,e} = \rho_{c,e}\Omega_{Q,e}$ à cette époque. A partir de cette dernière donnée, on peut également dériver le point de départ dans l'espace de phase du champ scalaire, puisque l'on sait que

$$\rho_Q c^2 = \frac{1}{2} \dot{Q}^2 + V(Q) \quad (7.17)$$

$$p_Q = \frac{1}{2} \dot{Q}^2 - V(Q). \quad (7.18)$$

Après manipulation, on trouve

$$V(Q_e) = \rho_{Q,e} c^2 \frac{1 - \omega_{Q,e}}{2} \quad (7.19)$$

$$\dot{Q}_e = \pm \sqrt{\rho_{Q,e} c^2 (1 + \omega_{Q,e})} \quad (7.20)$$

avec $V(Q_e)$ à inverser pour trouver Q_e .

Toutefois, la tâche est en réalité un peu plus ardue qu'il pourrait y paraître au premier abord. En effet, on pourrait croire qu'il suffirait d'introduire les valeurs des paramètres cosmologiques aujourd'hui dans les conditions initiales pour intégrer à rebours dans le temps jusqu'à une époque désirée et ainsi connaître l'histoire de l'univers depuis cette époque.

Certes, mais ce serait sans compter sur la propriété de "traceur" ("tracking fields") des potentiels de quintessence. Cette propriété implique l'existence d'un attracteur qui détermine finalement les propriétés cosmologiques d'aujourd'hui. Cet attracteur est fonction, notamment, de l'échelle d'énergie Λ du potentiel de quintessence et de l'exposant α choisi. Un choix imprécis de ces paramètres vis-à-vis des valeurs des autres paramètres cosmologiques aujourd'hui entraînera que la trajectoire ne suivra pas du tout l'attracteur jusqu'aux temps primordiaux et donnera de ce fait une représentation fautive de l'évolution cosmique.

Aussi, nous avons choisi de procéder de la manière suivante : donnons une estimation des paramètres cosmologiques à une époque extrêmement reculée – la sortie de l'ère inflationnaire, située à un redshift z de l'ordre de 10^{28} – et procédons à la recherche de l'échelle d'énergie λ du potentiel qui amène la meilleure concordance avec les paramètres cosmologiques d'aujourd'hui, à un redshift nul². On avancera, à raison, que nous ne connaissons pas exactement la valeur des paramètres cosmologiques de l'univers primordial, et c'est

²Le redshift z donne le décalage vers le rouge des longueurs d'onde due à l'expansion cosmique et constitue une unité fréquemment utilisée en cosmologie. Une source émettant un rayonnement à un temps t_e exhibe un redshift donné par la relation

$$1 + z = \frac{\lambda_e}{\lambda_0} = \frac{a_0}{a_e},$$

précisément là que les propriétés remarquables de la quintessence nous viennent en aide.

En effet, on a pu montrer que le potentiel de Ratra-Peebles (et celui de Brax-Martin) admettait une variation d'une centaine d'ordres de grandeurs dans les conditions initiales pour arriver toujours sur le même attracteur. Par exemple, les valeurs permises pour la densité d'énergie de quintessence à la fin de l'inflation $\rho_{Q,i}$ peuvent être comprises entre $10^{-37} GeV^4$ (ce qui correspond à la valeur de l'énergie associée au rayonnement cosmologique de fond lors de son émission, aux alentours de $z \approx 10^4$) et $10^{61} GeV^4$ (qui est la valeur estimée de cette même énergie à la sortie de l'ère inflationnaire). Si le champ scalaire démarre alors au repos, sa valeur peut être comprise entre $10^{-8} \times m_{Pl}$ et $10^{-2} \times m_{Pl}$ (cf. [BM00]). Pour les composantes de matière et de radiation, on sait que la seconde était largement majoritaire à la fin de l'ère inflationnaire et donc que Ω_{rad} était de l'ordre de l'unité, ce qui implique que le paramètre de Hubble à cette époque valait approximativement

$$H_i \approx H_0 \sqrt{\frac{\Omega_{rad,0} a_0^4}{a_i^4}}$$

avec $a_0 = 1$; $\Omega_{Q,i}$ et $\Omega_{m,i}$ étant négligeables devant $\Omega_{rad,i}$. La valeur de $\Omega_{m,i}$ s'obtient à partir de la relation

$$\Omega_{m,e} = \frac{H_0^2 a_0^3}{H_e^2 a^3} \Omega_{m,0}$$

que l'on trouve aux alentours de 10^{-24} . La donnée d'une valeur de $\Omega_{Q,i}$ et $\omega_{Q,i}$ à la sortie de l'ère inflationnaire permet alors de spécifier les conditions initiales pour le champ via les relations (7.19) et (7.20). On choisira, à l'instar de Brax et Martin, une valeur de $\omega_{Q,i}$ égale à -1 de sorte que le champ démarre au repos.

Notre problème de trouver une solution compatible avec les données cosmologiques se réduit à présent à un problème de tir : partant d'une estimation des paramètres primordiaux, intégrons les équations (7.8) et (7.13) afin d'évaluer l'erreur sur les paramètres cosmologiques aujourd'hui et modifions en conséquence les conditions initiales en vue de nous rapprocher de la solution désirée après plusieurs itérations de toute la procédure. En pratique, nous rechercherons par une méthode de Newton-Raphson la valeur du paramètre λ qui permet de retrouver la bonne composition de la soupe universelle d'aujourd'hui en termes des paramètres de densité Ω .

L'estimation initiale de λ , véritable point d'orgue de toute méthode Newton-Raphson, est déterminée de la manière suivante : on suppose que le champ de quintessence a atteint

où λ_0 est la longueur d'onde au repos captée aujourd'hui (l'indice e indique l'époque de l'émission). Le redshift représente ainsi l'époque à laquelle le facteur d'échelle a valait une fraction $1/(1+z)$ de sa valeur actuelle, prise par référence égale à l'unité.

aujourd'hui une valeur extrêmement élevée, de l'ordre de la masse de Planck, avec une vitesse quasiment nulle, épuisé qu'il se trouve après tant de millénaires de dissipation par l'expansion cosmique. Ainsi, en résolvant la relation (7.19) par rapport à λ , avec Q_0 de l'ordre de la masse de Planck, on trouve l'estimation initiale souhaitée.

Nous proposons au lecteur d'illustrer notre étude préliminaire au travers de sept modèles cosmologiques différents : les deux modèles avec champ de quintessence "réaliste" **Ratra-Peebles** et **Sugra**, qui ne contiennent pas de constante cosmologique ; le modèle d'Einstein - de Sitter (indiqué par **EdS**) qui contient exclusivement de la matière et de la radiation, sans aucune composante accélératrice de l'expansion ; un modèle avec constante cosmologique (indiqué par Λ) et sans quintessence ; et enfin trois modèles avec **quintessence effective**, dont les valeurs du paramètre ω_Q de l'équation sont des constantes et valent respectivement $-1/3$, $-1/2$ et $-0,8$. De plus, tous ces modèles sont à géométrie plane ($\Omega_{tot} = 1$). Les valeurs du paramètre de Hubble et de celui de densité de matière à la fin de l'ère inflationnaire ont été estimés comme nous l'avons vu ci-dessus et elles ont été ajustées quelque peu pour mieux coller avec l'ensemble de valeurs fixées aujourd'hui des paramètres cosmologiques. Celles-ci sont indiquées (avec indice 0) à la table 7.1. Dans la densité de matière, on a chaque fois considéré une proportion fixe de 4% de baryons. La constante de Hubble H_0 a été normalisée à une valeur de 100 km/s/Mpc. On y a ajouté l'âge de l'univers (temps pour lequel $a_0 = 1$), exprimé en dizaines de milliards d'années. Les échelles d'énergie λ du potentiel de quintessence sont respectivement de $9.14 \times 10^{-4} GeV^{4/(4+\alpha)}$ pour le modèle Ratra-Peebles et de $3.99 \times 10^{-4} GeV^{4/(4+\alpha)}$ pour le modèle Sugra. La valeur de l'exposant α dans les deux modèles de quintessence réaliste a été prise égale à 11.

Les figures 7.1, 7.2 et 7.4 représentent respectivement les évolutions du facteur d'échelle a , du redshift $1+z$, du champ de quintessence en fonction du temps tandis que la figure 7.3 représente l'évolution du taux d'expansion en fonction du redshift cosmologique z . De même, la figure 7.5 représente quant à elle l'évolution du paramètre ω de l'équation d'état de la quintessence en fonction du redshift cosmologique z . Le zoom de droite sur cette figure illustre bien que les modèles de quintessence effective à ω_Q constant ne sont pas une bonne approximation des modèles de quintessence rigoureux comme ceux de Ratra-Peebles et Sugra. La différence aux redshifts récents (inférieurs à 100) entre ces modèles s'explique principalement par le terme en exponentielle du champ dans le potentiel Sugra, qui domine lorsque le champ atteint des valeurs proches de la masse de Planck. Les figures 7.7 à 7.9 illustrent l'évolution de la densité des divers fluides cosmologiques : matière, radiations, constante cosmologique et/ou quintessence suivant les modèles, en fonction du redshift. On peut déduire de ces graphes l'époque de **la coïncidence cosmique**, c'est-à-dire le temps (ou, ce qui est plus physique, le redshift) pour lequel la densité d'énergie due à la matière ordinaire devient supérieure à celle de la quintessence. Avant cette coïncidence, l'évolution de l'univers était dominée par la matière et ce temps annonce la fin de ce joug

Modèle	h_0	$\Omega_{m,0}$	$\Omega_{rad,0}$	$\Omega_{Q(\Lambda),0}$	ω_0	t_0 ($\times 10^9$ ans)
EdS	0.7005	0.99997	3×10^{-5}	0	0	9.30
Λ	0.6998	0.29978	2×10^{-5}	0.7002	-1	13.47
Ratra-Peebles	0.7004	0.3086	8.8×10^{-6}	0.6914	-0.286	10.83
Sugra	0.6982	0.3042	8.7×10^{-6}	0.6958	-0.819	12.58
$\omega = -1/3$	0.6999	0.29998	2×10^{-5}	0.7	-1/3	11.30
$\omega = -1/2$	0.6999	0.29998	2×10^{-5}	0.7	-1/2	12.03
$\omega = -0.8$	0.6999	0.29998	2×10^{-5}	0.7	-0.8	13.01

Tableau 7.1 – Valeurs des paramètres cosmologiques aujourd’hui pour les différents modèles étudiés

et une transition vers la domination de la quintessence (ou de la constante cosmologique). Le moment où l’expansion de l’univers a commencé à s’accélérer est donc postérieur à cette époque. La table 7.2 suivante donne, par ordre chronologique, les redshifts de coïncidence z_c pour les différents modèles à composante accélératrice (quintessence ou constante cosmologique) envisagés. On remarquera l’exacte corrélation entre les redshifts de coïncidence et l’âge de l’univers : au plus la première se produit tôt, au plus l’univers sera jeune, puisque l’accélération de l’expansion amène plus vite le cosmos à maturité.

Modèle	z_c
Ratra-Peebles	1.946
$\omega = -1/3$	1.333
$\omega = -1/2$	0.759
Sugra	0.452
$\omega = -0.8$	0.423
$\omega = -1$ (Λ)	0.326

Tableau 7.2 – Redshifts de coïncidence pour les différents modèles étudiés

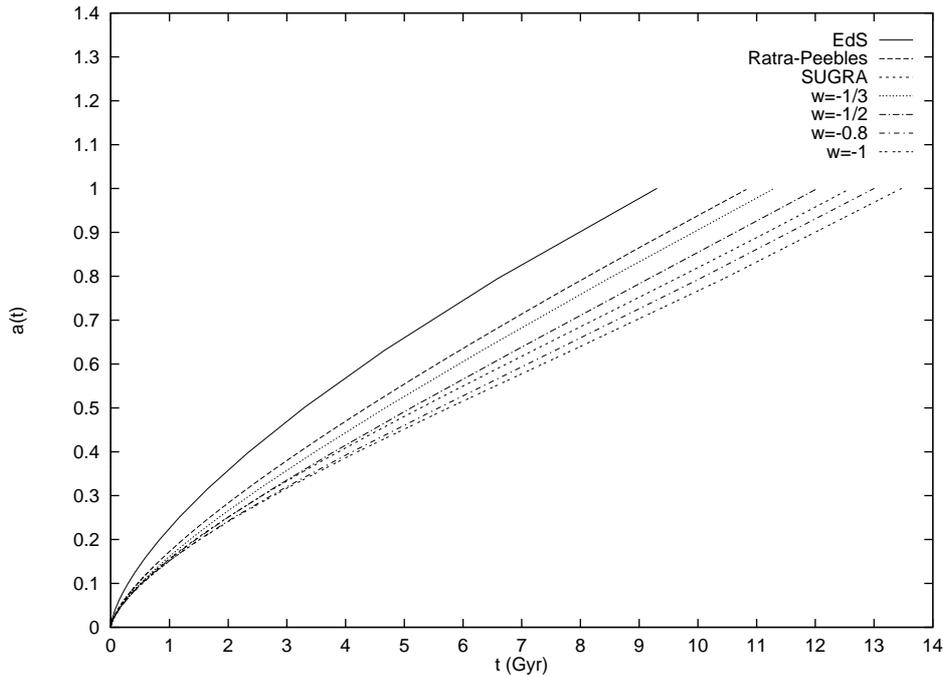


Figure 7.1 – Evolution du facteur d'échelle en fonction du temps (en milliards d'années) (dans la légende $w = -1$ correspond au modèle avec constante cosmologique)

3 Evolution des fluctuations de densité

3.1 Régime linéaire

La théorie des perturbations au premier ordre des équations du champ gravifique couplées aux équations d'Euler et de continuité décrivant la dynamique d'un ensemble de N particules conduit à l'équation différentielle du second ordre suivante pour l'évolution du contraste de densité (cf. [PEE80] et notre chapitre 4) :

$$\ddot{\delta} + 2\frac{\dot{a}}{a}\dot{\delta} - 4\pi G\rho_B\delta = 0, \quad (7.21)$$

où $\delta = \frac{\rho}{\rho_B} - 1$ est le contraste de densité de matière, ρ_B est la densité moyenne des particules de matière, G étant la constante de Newton. Nous avons pu montrer que cette équation est toujours valable dans un univers rempli de quintessence, effective ou non, à condition que celle-ci soit répartie de manière homogène. Par contre, nous avons également montré que les solutions intégrales données par Heath en 1977 (cf. [PEE80]) ne sont plus valables, même pour les modèles simples que sont ceux à quintessence effective.

La solution de l'équation (7.21) donne un avant-goût de la formation des structures dans nos modèles et servira à la calibration du calcul complet des simulations à N particules que

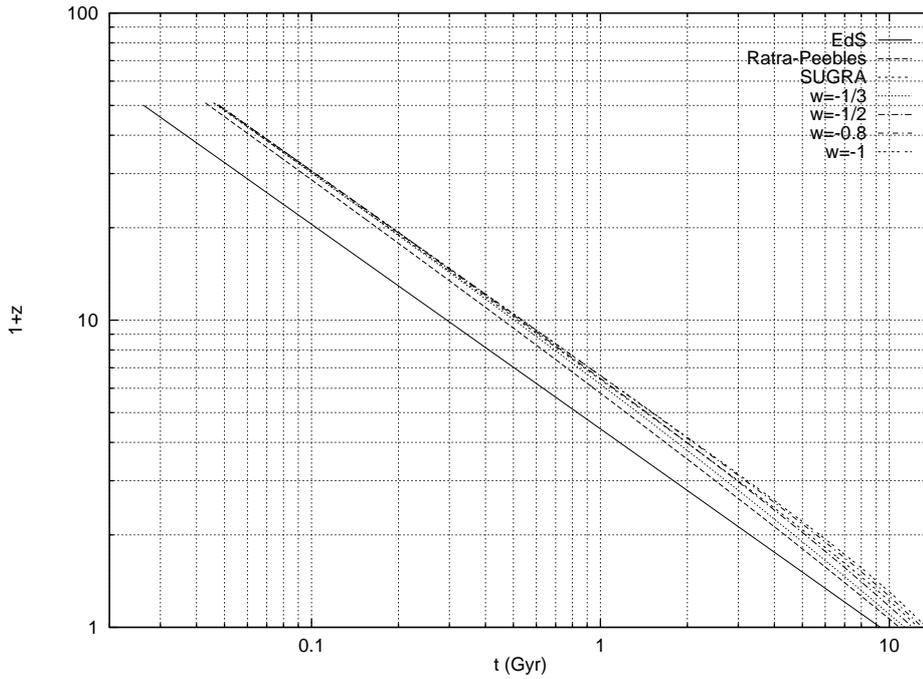


Figure 7.2 – Evolution du redshift en fonction de l'âge de l'univers (en milliards d'années)

nous verrons au paragraphe suivant. La figure 7.10 représente l'évolution du contraste de densité de matière dans les différents modèles envisagés, ainsi que le taux d'accroissement de la vitesse des particules au premier ordre, donné par

$$f = \frac{a}{\delta} \frac{d\delta}{da}. \quad (7.22)$$

En guise de condition initiale pour l'intégration de (7.21), nous avons supposé que le contraste de densité suivait une loi linéaire à des redshifts supérieurs à 1000. En effet, cette évolution linéaire du contraste de densité en fonction du facteur d'échelle est caractéristique du modèle d'Einstein - de Sitter (cf. [PEE80, PEE93] et notre chapitre 4), c'est-à-dire d'un univers dominé par la matière. Hors, à de tels redshifts, les modèles avec quintessence ou constante cosmologique se trouvent également dans ce cas de figure, puisque nous nous trouvons alors bien avant leur époque de coïncidence (cf. table 7.2 où les premières coïncidences se produisent à un redshift de l'ordre de 2).

A l'examen de la figure 7.10, on constate donc que les modèles avec quintessence ou constante cosmologique connaissent une croissance du contraste de densité plus faible que dans le modèle Einstein - de Sitter, exclusivement composé de matière. Les modèles avec quintessence effective ont des évolutions du contraste de densité fort semblables à celle d'une constante cosmologique, mais avec une croissance moins forte. Par contre, les modèles réalistes de quintessence (Sugra et Ratra-Peebles) ont des évolutions différentes

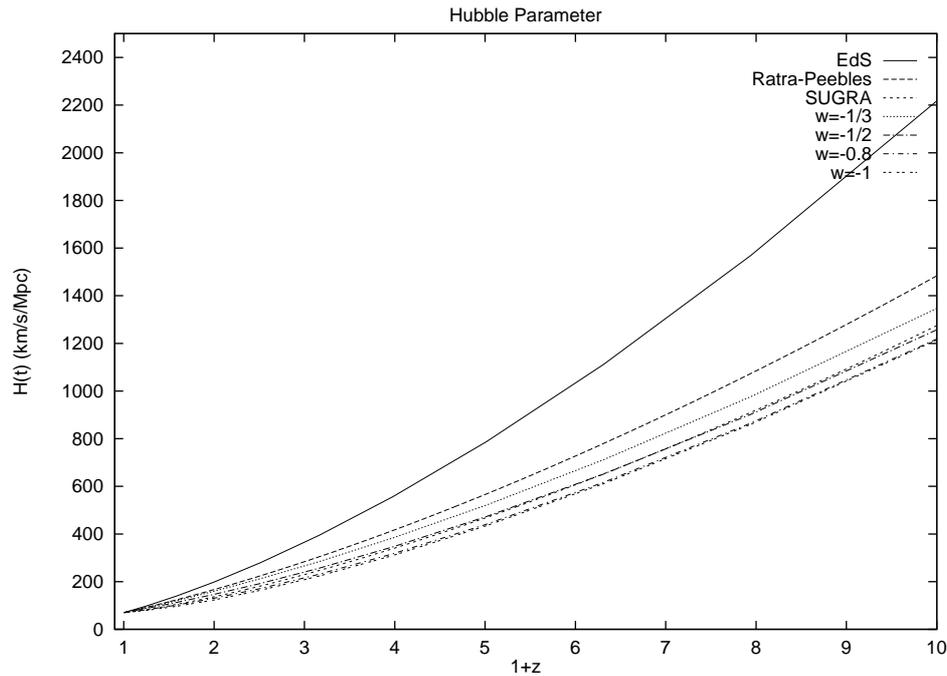


Figure 7.3 – Evolution du taux d’expansion (paramètre de Hubble, en km/s/Mpc) en fonction du redshift cosmologique z

de ces modèles à équation d’état constante. Cette conclusion est valable également pour le taux d’accroissement f de la vitesse des particules. On observe de plus que les modèles réalistes de quintessence ont des taux d’accroissement de la vitesse plus élevé que les autres modèles à équation d’état constante.

3.2 Régime non linéaire

Dans ce paragraphe, nous allons donner quelques résultats préliminaires concernant l’influence de la quintessence sur la formation des structures. Ces résultats se basent principalement sur une première modification d’un code simulant la dynamique gravitationnelle d’un grand nombre de corps, développé par Alimi et Scholl [AS93] (méthode particule-grille, ou PM pour *Particle Mesh*). Par souci de concision, nous nous contenterons d’expliquer brièvement le principe de la méthode, et nous renvoyons le lecteur à la référence [COU02] pour une introduction plus détaillée.

L’étude de la formation des structures passe par la simulation de l’évolution dynamique de perturbations de densité au cours de l’expansion de l’Univers. Elle nécessite non seulement de connaître avec précision l’évolution récente de l’Univers (postérieure à la recombinaison

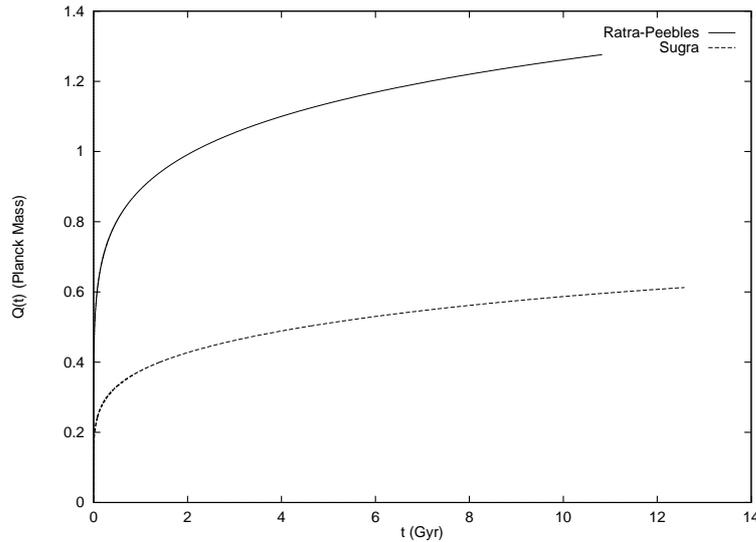


Figure 7.4 – Evolution du champ de quintessence ϕ (en unité de la masse de Planck) en fonction du temps (en milliards d’années), trait plein : modèle de Ratra-Peebles; tirets longs : Sugra

son³), ce qui a fait l’objet du paragraphe 7.2, mais également la distribution initiale des fluctuations de densité à partir de laquelle on puisse démarrer la simulation. Cette distribution se représente sous la forme d’un spectre de puissance, donnant l’intensité des fluctuations de densité en fonction de leur taille. L’origine des fluctuations primordiales de densité est habituellement située dans l’ère inflationnaire, alors que la formation des structures ne démarre véritablement qu’après la période de recombinaison, lorsque la pression due aux radiations est devenue assez faible que pour laisser l’instabilité gravitationnelle jouer son rôle. Il est donc nécessaire de recourir à un modèle qui permet de suivre la modification du spectre de puissance prédit par la théorie de l’inflation jusqu’à l’époque de la recombinaison. Cette évolution est donnée par une fonction de transfert dont le produit de convolution (dans l’espace réel) avec le spectre primordial donne le spectre de puissance à l’époque de la recombinaison.

En ce qui concerne les modèles avec les potentiels de quintessence envisagés ici, ce spectre a été calculé numériquement par Brax, Martin et Riazuelo dans [BMR00]. Malheureusement, nous ne possédons pas encore cette fonction de transfert numérique au moment de la rédaction de ces lignes de sorte que les simulations qui seront présentées ici ont été calculées avec un spectre initial dont on connaît la forme analytique de la fonction de transfert.

³Ce terme signifie que les atomes se forment par **combinaison** des noyaux nucléaires ionisés et des électrons libres au sein du plasma primordial. Dans une optique puriste, l’usage du préfixe “re” apparaît toutefois malheureux, puisque les atomes ne sont pas censés avoir existé auparavant. C’est à la fin de cette époque qu’a été émis le rayonnement fossile.

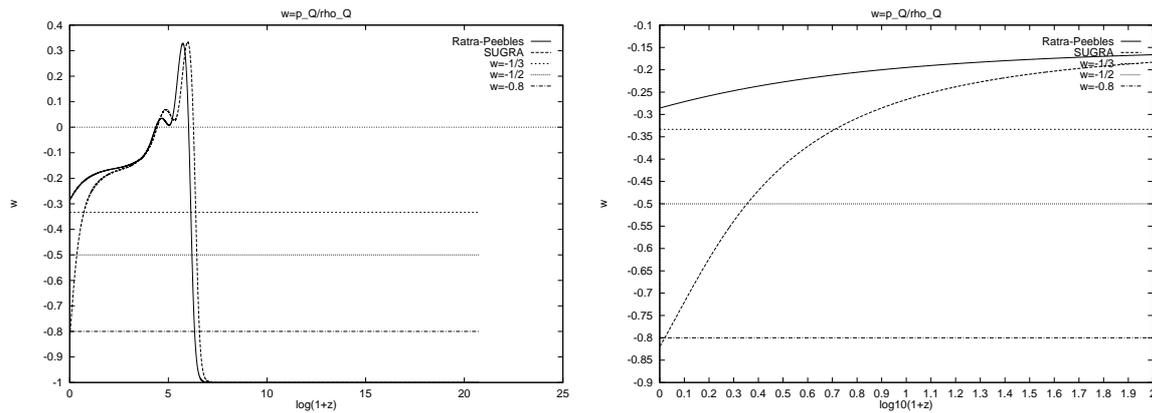


Figure 7.5 – Evolution du rapport ω entre la pression et la densité des fluides de quintessence en fonction du redshift

Toutefois, la forme du spectre obtenue par Brax, Martin et Riazuelo pour les champs de quintessence ne diffère pas grandement de celle du spectre d'un modèle à constante cosmologique. De plus, certains auteurs ont pu montrer que les modèles à quintessence effective connaissent un spectre quasiment identique à celui d'un modèle avec constante cosmologique sur une échelle de l'ordre d'une centaine de mégaparsecs (cf. [MCBW99]). Nous avons donc utilisé le même spectre pour tous les modèles de quintessence et de constante cosmologique. Ainsi, nous pourrions examiner les différences de structuration de la matière, sur une échelle de $128 Mpc$ environ, qui sont uniquement dues aux diverses évolutions cosmologiques et non pas au spectre initial.

De plus, la fonction de transfert fixe uniquement la forme du spectre et non son amplitude, laquelle est laissée au choix d'une normalisation, basée par exemple sur l'observation du nombre d'amas aujourd'hui ou sur les anisotropies du rayonnement fossile. Cette normalisation se fixe en recherchant le facteur d'expansion initial de telle manière que la valeur aujourd'hui d'un certain indicateur statistique des fluctuations de densité à une échelle de 8 Mpc soit égale à celle calculée sur les anisotropies du rayonnement fossile ou à la valeur observée par les dénombrements de galaxies. En pratique, on étudie l'évolution du spectre de puissance par l'approximation linéaire (7.21) du mécanisme d'instabilité gravitationnelle, qui conserve la forme du spectre, jusqu'à obtenir la valeur souhaitée pour aujourd'hui dudit indicateur statistique. La table 7.3 suivante donne les valeurs du facteur d'échelle de départ a_s pour les différents modèles envisagés.

Une fois le spectre déterminé, on génère une distribution de particules dans un volume d'espace donné, dont le champ de densité associé suit le spectre choisi. Ces particules représentent en fait la matière noire dont l'Univers semble être composé en majeure partie. Ensuite, la technique N corps étudie l'évolution de ces particules au cours du temps sur

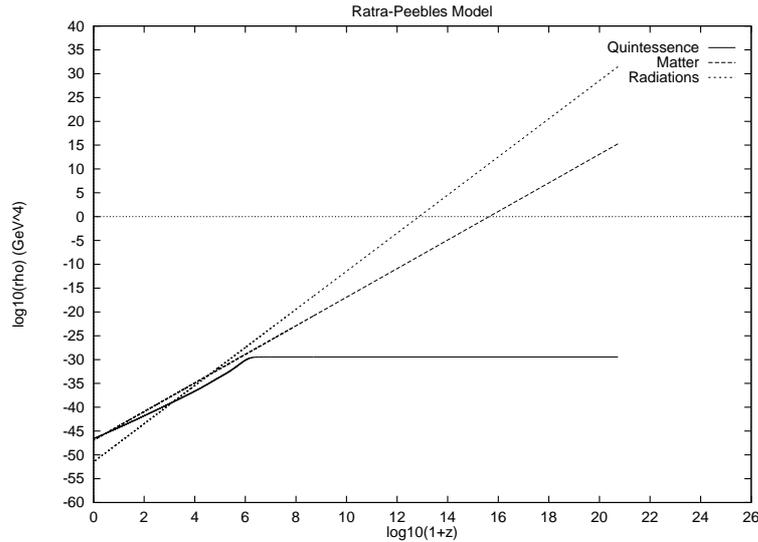


Figure 7.6 – Evolution des densités (en GeV^4) des fluides cosmologiques en fonction du redshift (diagramme log-log) pour le modèle de **Ratra-Peebles**

base d'un mouvement newtonien de ces particules. En effet, lorsque l'on étudie des fluctuations comprises à l'intérieur de l'horizon cosmologique⁴, leur évolution peut être ramenée à un traitement newtonien, c'est-à-dire à une limite non relativiste de la relativité générale (potentiels gravifiques faibles s'exerçant sur de “*petites*” distances). Le mouvement de ces particules est dicté à la fois par leur attraction réciproque et le frottement qu'exerce sur elles l'expansion cosmique⁵. La limite newtonienne de l'interaction gravitationnelle s'obtient alors en résolvant par transformée de Fourier l'équation de Poisson

$$\Delta\Phi = 4\pi G\rho\delta$$

où Φ est le potentiel gravifique newtonien, ρ est la densité du fond sur lequel les fluctuations s'inscrivent et δ est le contraste de densité.

Puis, le mouvement des particules est déterminé par la seconde loi de Newton, limite non relativiste des équations des géodésiques décrivant le mouvement correct des particules en relativité générale. L'équation du mouvement comprend alors des termes gravitationnels d'entraînement et des termes de dissipation dus à l'expansion cosmique. C'est ici qu'interviennent les modèles cosmologiques que nous nous sommes employés à obtenir au cours du paragraphe 7.2.

⁴De taille inférieure à la longueur de Hubble $L_{H_0} = c/H_0$.

⁵L'étude se fait en coordonnées comobiles, on ne considère que les mouvements non cosmologiques des particules (cf. [PEE93, PEE80])

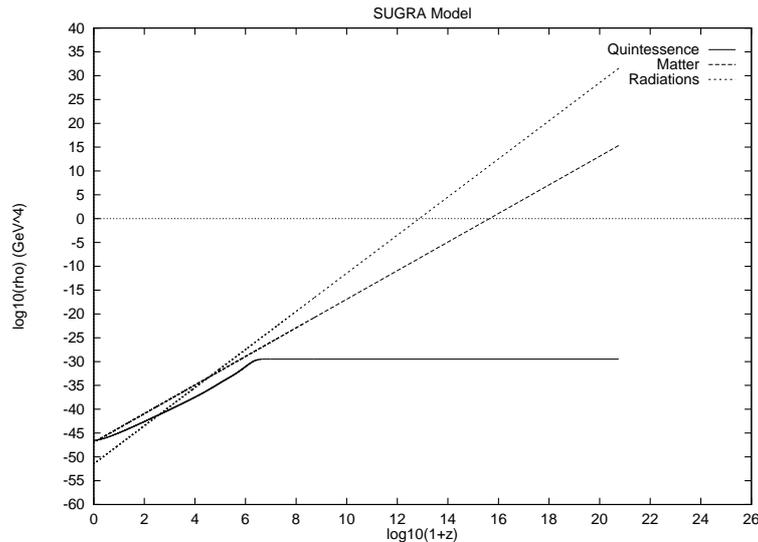


Figure 7.7 – Evolution des densités (en GeV^4) des fluides cosmologiques en fonction du redshift (diagramme log-log) pour le modèle **Sugra**

Les figures 7.11 à 7.17 représentent la distribution des fluctuations de densité à différents redshifts, pour les modèles de la table 7.1. Plus précisément, nous avons simulé à l’aide du code *PM* l’interaction gravitationnelle de 128^3 particules dans un cube de longueur comobile d’arête égale à $128h^{-1}\text{Mpc}^6$, les distances ayant été normalisées à cette valeur dans les graphes. Le champ de densité associée à cette distribution de particules a été projeté dans le plan (x, y) et la couleur dans ces figures est à l’image de l’intensité du champ de densité (les régions surdenses étant les plus claires). En ce qui concerne le contenu matériel de ces modèles, on s’est fixé une quantité de baryons égale à 4% et aucune contribution de matière sombre chaude (pas de neutrinos : $\Omega_{\nu,0} = 0$). Les modèles présentés ici sont des modèles à matière sombre exclusivement froide, dont le paramètre de densité associé vaut

$$\Omega_{CDM,0} = \Omega_{m,0} - \Omega_{b,0} - \Omega_{\nu,0}$$

où l’indice *CDM* signifie “*Cold Dark Matter*”.

La forme de la distribution des particules de matière sombre, telle qu’observée aux figures 7.11 à 7.17 est caractéristique des modèles à matière noire froide. Ceux-ci sont essentiellement hiérarchiques, c’est-à-dire que les petites structures se forment en premier, puis fusionnent en se déplaçant le long de filaments et de feuillets. La trame filamentaire provient quant à elle de l’effondrement gravitationnel asymétrique sur de très grandes échelles. Ainsi, les concentrations de matière noire les plus importantes, susceptibles d’amorcer la

⁶Une multiplication d’un facteur h sur la constante de Hubble se traduit par une multiplication d’un facteur h^{-1} sur les distances physiques.

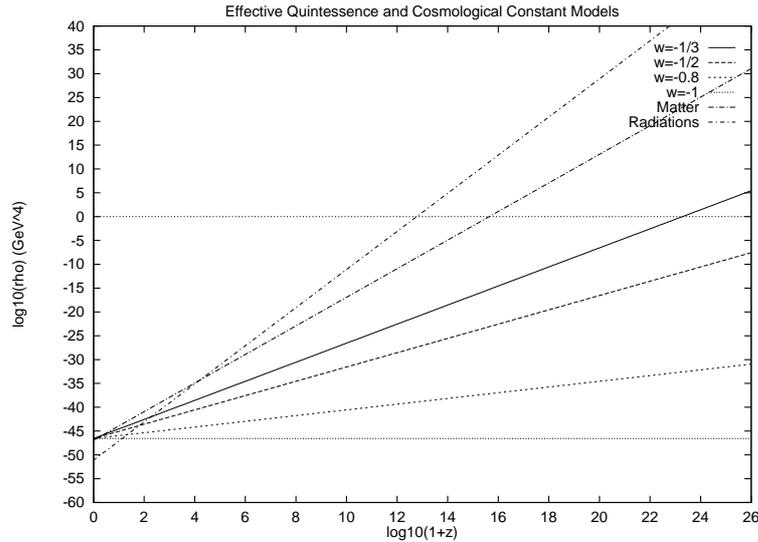


Figure 7.8 – Evolution des densités (en GeV^4) des fluides cosmologiques en fonction du redshift (diagramme log-log) pour le modèle à **constante cosmologique Λ** et les trois modèles à **quintessence effective**

germination des galaxies, se trouvent aux nœuds du réseau de filaments de matière sombre.

Il convient d'être prudents si nous voulons comparer ces différentes évolutions, dans la mesure où les normalisations des spectres de puissance ne sont pas exactes. En effet, l'aspect final de la distribution de matière sombre dépend non seulement de l'expansion cosmique mais également de la puissance du spectre. De même, il convient de garder à l'esprit que le redshift dans les différents modèles ne correspond pas au même temps physique, comme on peut le constater en examinant la figure 7.2.

Le modèle d'Einstein - de Sitter produit les structures les plus denses et les plus nombreuses de toutes les simulations, alors qu'il est également celui qui dispose du moins de temps à allouer au mécanisme d'instabilité gravitationnelle (cf. table 7.1 et figure 7.1). L'aspect plus structuré par rapport aux autres modèles avec quintessence ou constante cosmologique provient alors de la puissance du spectre initial et de l'évolution décélérée de son expansion.

A présent, nous pouvons comparer qualitativement les modèles à quintessence – réaliste ou effective – et à constante cosmologique des figures 7.12 à 7.17. A $z = 0$, les modèles à quintessence effective et le modèle à constante cosmologique sont les plus structurés, devant les modèles Sugra et Ratra-Peebles. Ce dernier est d'ailleurs le moins structuré de tous. De plus, les modèles à quintessence effective exhibent une évolution fort semblable

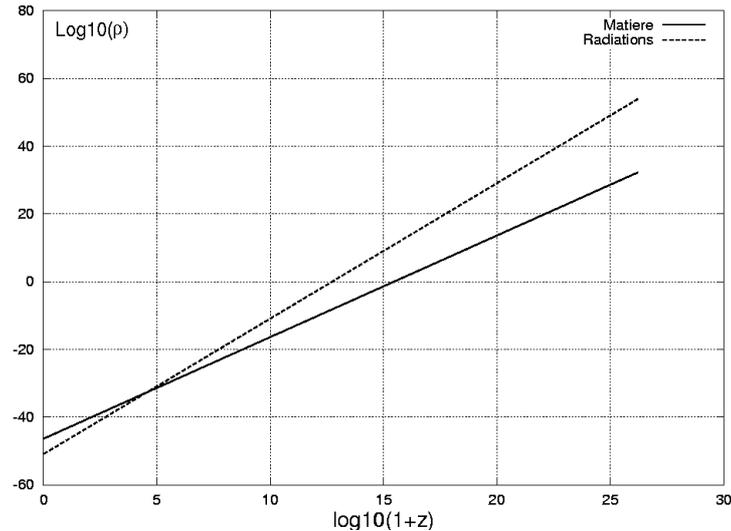


Figure 7.9 – Evolution des densités (en GeV^4) des fluides cosmologiques en fonction du redshift (diagramme log-log) pour le modèle **d’Einstein de Sitter**

au modèle avec constante cosmologique et il est d’ailleurs difficile de tirer des conclusions à l’oeil nu en comparant leurs différents champs de densité. L’analyse quantitative en terme de halos du paragraphe suivant nous permettra de vérifier cette conjecture. Par contre, les différences entre les modèles de quintessence de Ratra-Peebles, Sugra et celui à constante cosmologique sont flagrantes. En effet, on constate que les évolutions de ces modèles de quintessence sont assez tardives, puisque l’essentiel de la structuration se passe à des redshifts inférieurs à 1. De plus, on observe bien l’influence récente du terme de correction supergravifique dans le modèle Sugra qui amène assez rapidement ce dernier à une structuration de même niveau que le modèle à constante cosmologique, alors que le modèle de Ratra-Peebles connaît une structuration beaucoup plus lente. Ainsi, la formation des structures permettrait non seulement de distinguer des modèles à quintessence de celui à constante cosmologique mais également de mettre en évidence des corrections de la physique des très hautes énergies.

A présent, nous allons vérifier ces premières observations qualitatives en examinant la formation des halos de matière sombre. Ceci fera l’objet de notre dernier paragraphe.

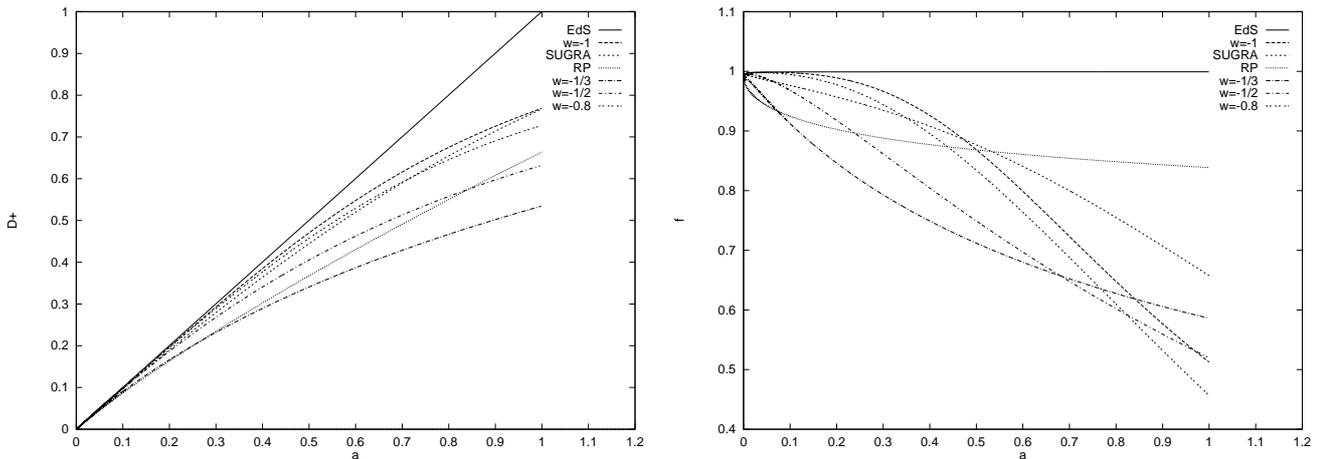


Figure 7.10 – Evolution du contraste de densité D et du taux d'accroissement f de la vitesse des particules en fonction du facteur d'échelle a , à partir du traitement perturbatif du premier ordre (7.21)

4 Formation des halos de matière noire

Dans ce paragraphe, nous livrons les résultats d'une analyse préliminaire qui consiste à identifier des **amas de matière noire** parmi la distribution des particules. Cette tâche sera effectuée au moyen de l'algorithme *Friend-Of-Friend* qui associe à un même objet — le halo — toutes les particules séparées d'une distance inférieure à une distance dite *de percolation*, exprimée en fraction de la distance interparticulaire moyenne qui vaut la longueur de la boîte divisée par la racine cubique du nombre de particules. On considérera ici des structures regroupant au moins 100 particules de matière noire et une distance de percolation de 0.2. La masse d'une particule est fonction du paramètre de densité de matière aujourd'hui et vaut quelques $1.36 \times 10^{11} M_{\odot}$ pour le modèle Einstein - de Sitter et quelques $4.01 \times 10^{10} M_{\odot}$ pour tous les autres modèles.

Les figures 7.18 et 7.19 représentent une superposition à $z = 0$ du champ de densité et de la distribution des halos, où ces derniers sont représentés par des cercles centrés sur les centres de masse de chaque amas et dont le rayon est proportionnel à leur masse. Le rayon maximum est proportionnel à la masse du plus grand halo formé de toutes les simulations (dans le modèle EdS) de sorte que les différentes figures puissent être comparées. L'examen de ces figures nous enseigne que les amas se forment bien à l'intersection des filaments cosmiques par fusion de structures plus petites qui ont transités le long de ces derniers. Ceci illustre bien le caractère hiérarchique des scénarios à matière noire froide, comme nous l'avons vu plus haut. De plus, on peut déjà voir plus aisément le caractère plus structuré des modèles à constante cosmologique et à quintessence effective $\omega_Q = cte$

Modèle	$a_s (\times 10^{-2})$
EdS	1.55
Ratra-Peebles	3.39
$\omega = -1/3$	2.61
$\omega = -1/2$	3.02
Sugra	3.66
$\omega = -0.8$	3.47
$\omega = -1 (\Lambda)$	3.66

Tableau 7.3 – Facteur d'échelle de départ a_s pour les différents modèles

par rapport aux modèles de Ratra-Peebles et Sugra.

De même, nous pouvons donner une idée de l'évolution de la structuration de la matière au cours du temps en traçant le nombre d'amas formés à un redshift donné ainsi que la masse maximale de ces amas pour nos différents modèles. Ceci est représenté à la figure 7.20. On constate que le modèle Einstein - de Sitter est effectivement le plus structuré, tant par le nombre d'amas formés que par la masse de ceux-ci⁷. Ensuite viennent les modèles à constante cosmologique et à quintessence effective, qui subissent d'ailleurs des évolutions du nombre d'amas formés à une époque donnée assez semblables. Ces modèles sont suivis de près par le modèle Sugra qui rattrape son retard de structuration dans les périodes très récentes $z \leq 1$. Enfin, le modèle de Ratra-Peebles est le moins structuré et doit précisément ce retard vis-à-vis de son parent supergravifique à la correction exponentielle que celui-ci possède et qui prend de plus en plus d'importance avec le temps. On remarquera également que le nombre de structures formées est quasiment gelé entre $z = 1$ et $z = 0$ dans le modèle Ratra-Peebles ce qui semble être un effet de la domination prolongée de la quintessence sur la matière dans ce modèle.

Enfin, nous pouvons appuyer ces arguments par l'examen de la figure 7.21 où nous avons représenté la distribution du nombre de halos formés par tranche de masse, ainsi que la proportion de halos formés dans chacune des catégories massiques envisagées. En terme de nombre de halos formés, le modèle de Ratra-Peebles est bien celui qui forme le moins de structures. Il est suivi du modèle Sugra alors que les modèles à quintessence effective sont

⁷La décroissance du nombre d'amas formés dans ce modèle entre $z = 1$ et $z = 0$ s'explique par le fait que les amas de plus de 100 particules fusionnent beaucoup plus durant cette période.

assez proches du modèle à constante cosmologique dans chaque catégorie. Le modèle d'Einstein - de Sitter est évidemment le plus structuré. En terme de proportion, la préférence du modèle de Ratra-Peebles pour les structures légères est manifeste : plus de 85% des amas qu'il forme ont une masse comprise entre 3×10^{12} et $3 \times 10^{13} M_{\odot}$. Pour le modèle Sugra et les autres modèles avec quintessence effective et avec constante cosmologique, ce sont quelques 75% des structures formées qui se rangent dans cet intervalle. Ainsi, le terme supergravifique qui corrige le potentiel de Ratra-Peebles permet-il véritablement de se rapprocher d'un modèle à constante cosmologique du point de vue de la proportion des structures formées de masse donnée.

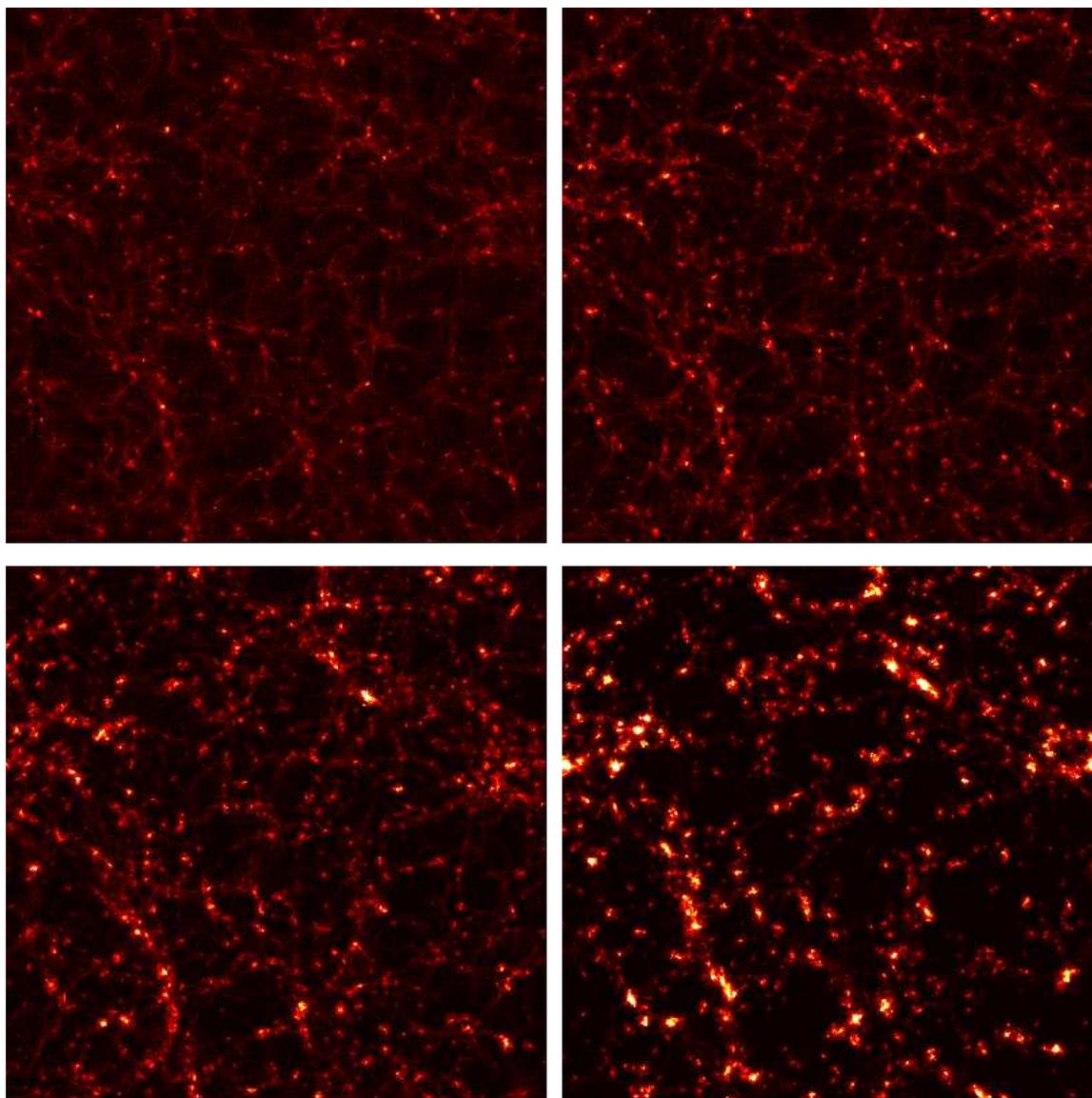


Figure 7.11 – Champs de densité des 128^3 particules dans un cube de longueur d'arête valant $128h^{-1}Mpc$, projetées dans le plan (x, y) , à différents redshifts z pour le modèle **Einstein - de Sitter** (de gauche à droite et de haut en bas : $z = 3$, $z = 2$, $z = 1$, $z = 0$)

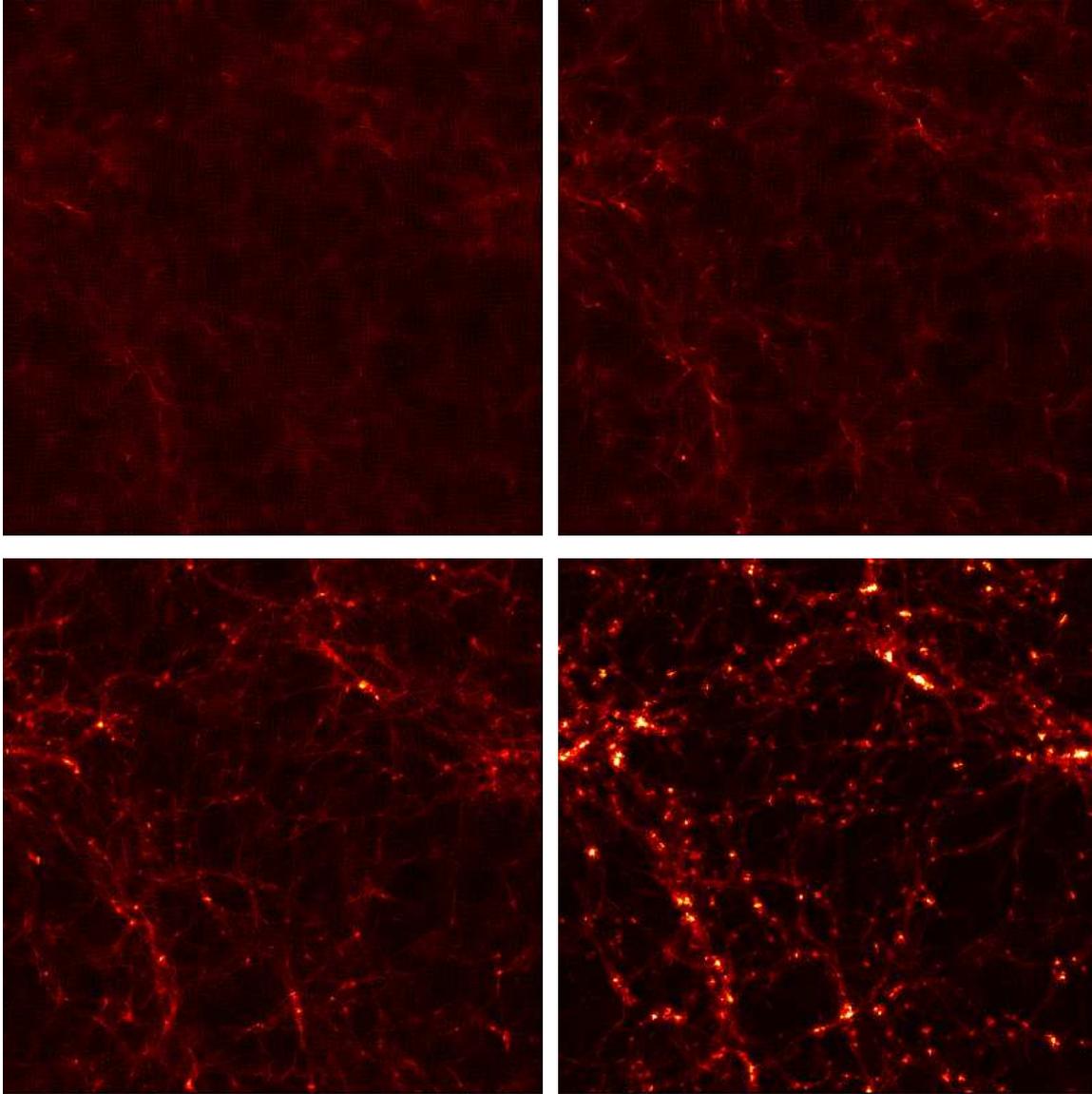


Figure 7.12 – Champs de densité des 128^3 particules dans un cube de longueur d'arête valant $128h^{-1}Mpc$, projetées dans le plan (x, y) , à différents redshifts z pour le modèle à **constante cosmologique** (de gauche à droite et de haut en bas : $z = 3$, $z = 2$, $z = 1$, $z = 0$)

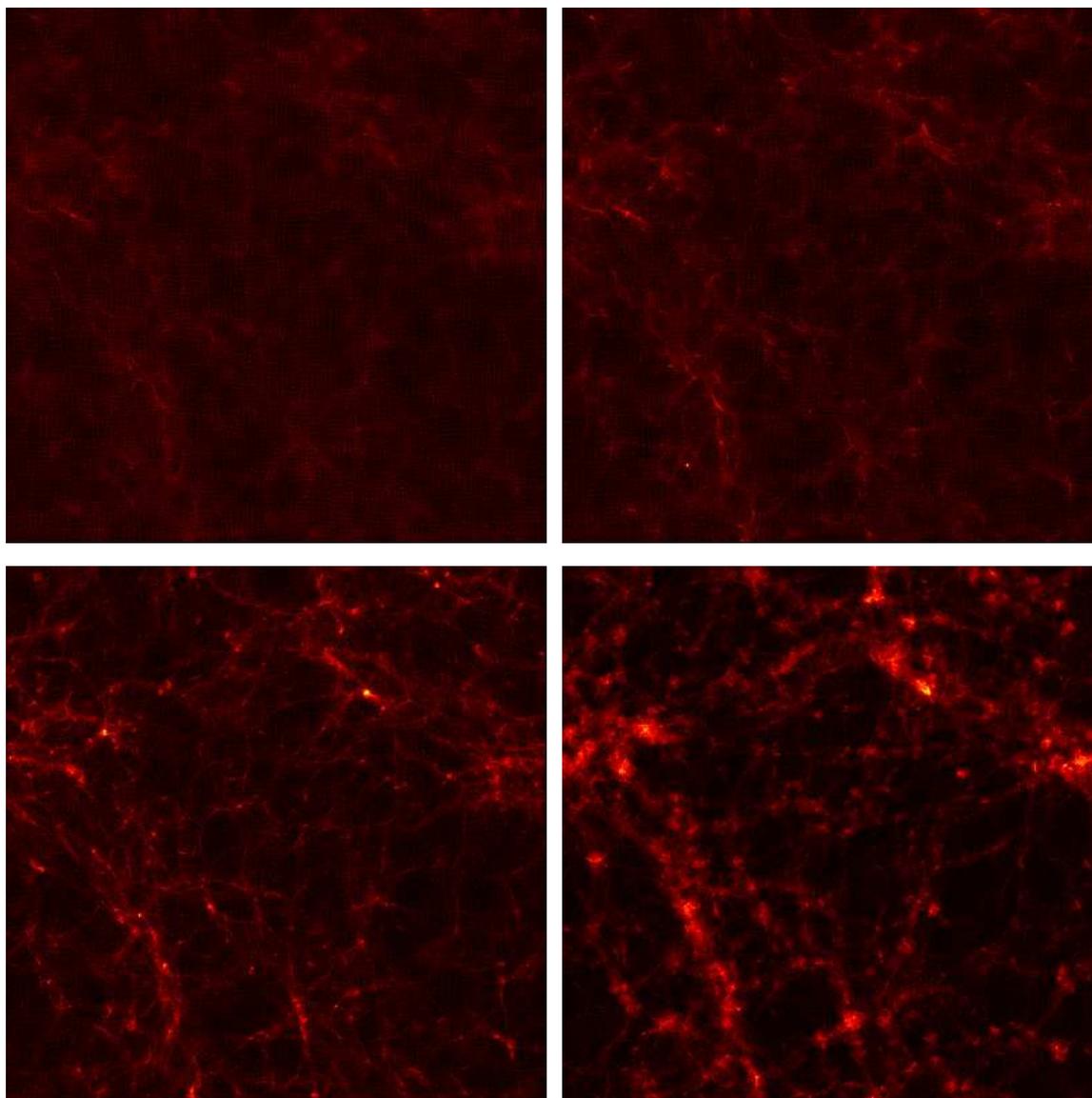


Figure 7.13 – Champs de densité des 128^3 particules dans un cube de longueur d'arête valant $128h^{-1}Mpc$, projetées dans le plan (x, y) , à différents redshifts z pour le modèle **Ratra-Peebles** (de gauche à droite et de haut en bas : $z = 3$, $z = 2$, $z = 1$, $z = 0$)

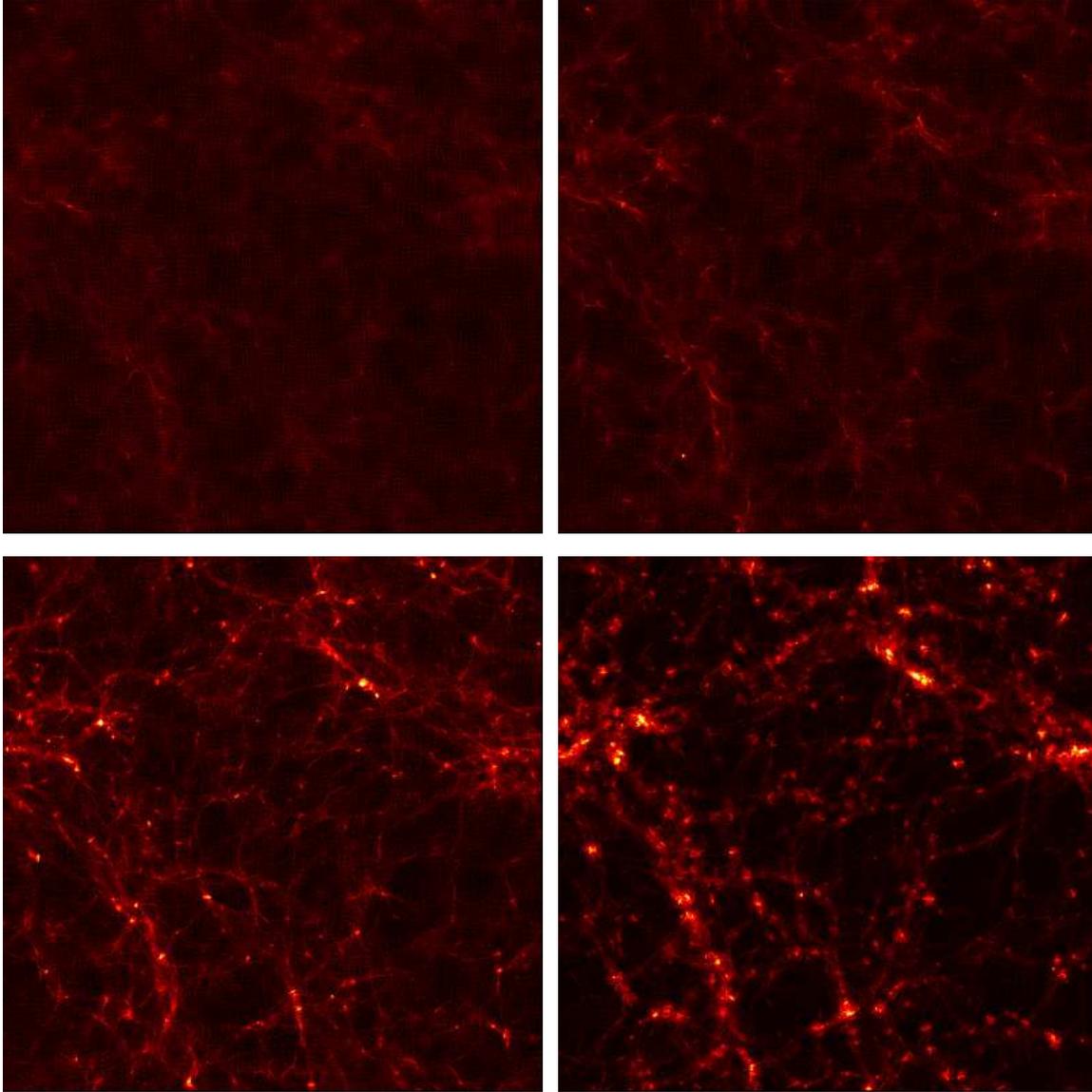


Figure 7.14 – Champs de densité des 128^3 particules dans un cube de longueur d'arête valant $128h^{-1}Mpc$, projetées dans le plan (x, y) , à différents redshifts z pour le modèle **Sugra** (de gauche à droite et de haut en bas : $z = 3$, $z = 2$, $z = 1$, $z = 0$)

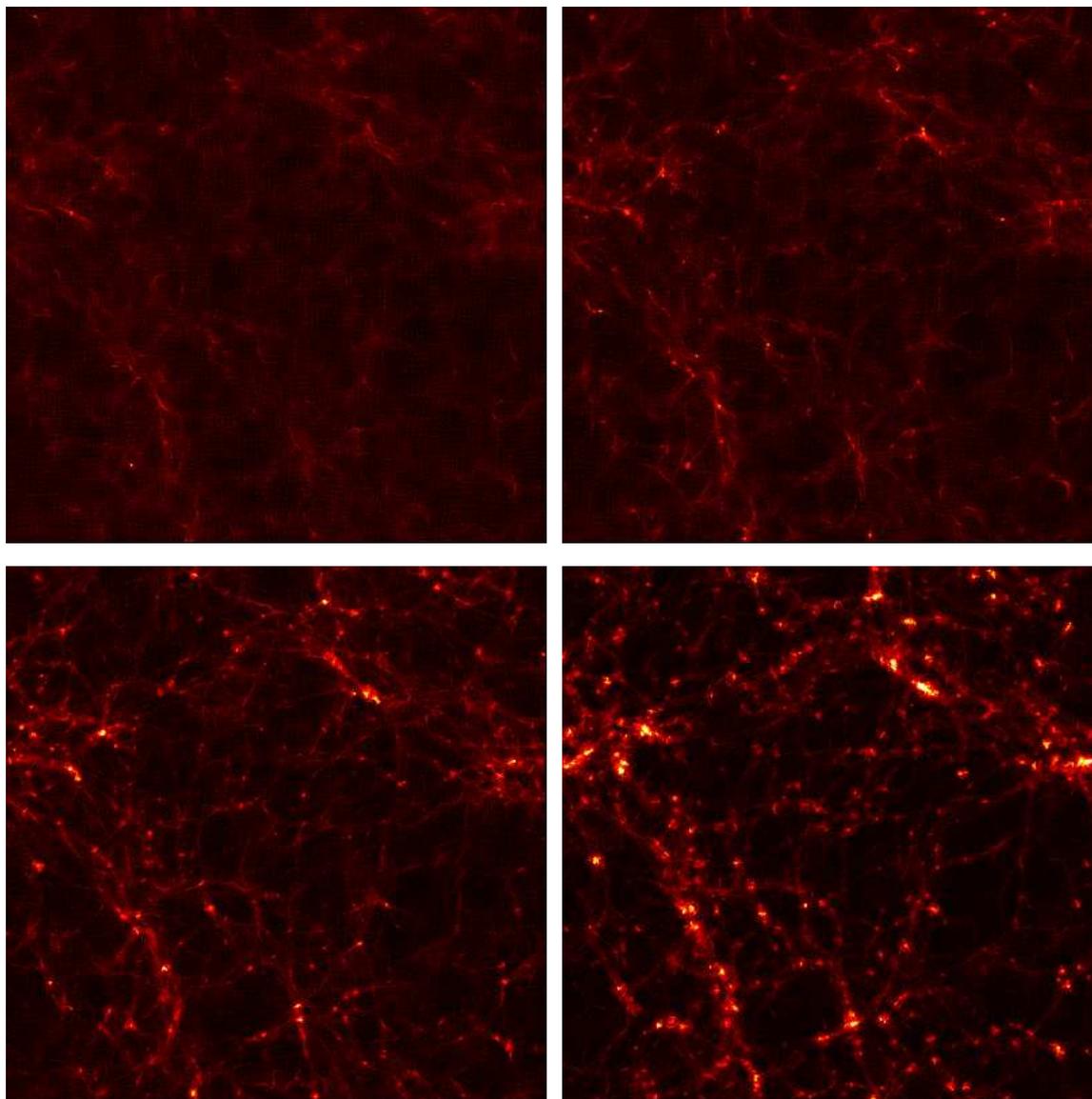


Figure 7.15 – Champs de densité des 128^3 particules dans un cube de longueur d'arête valant $128h^{-1}Mpc$, projetées dans le plan (x, y) , à différents redshifts z pour le modèle à **quintessence effective** $\omega_Q = -1/3$ (de gauche à droite et de haut en bas : $z = 3$, $z = 2$, $z = 1$, $z = 0$)

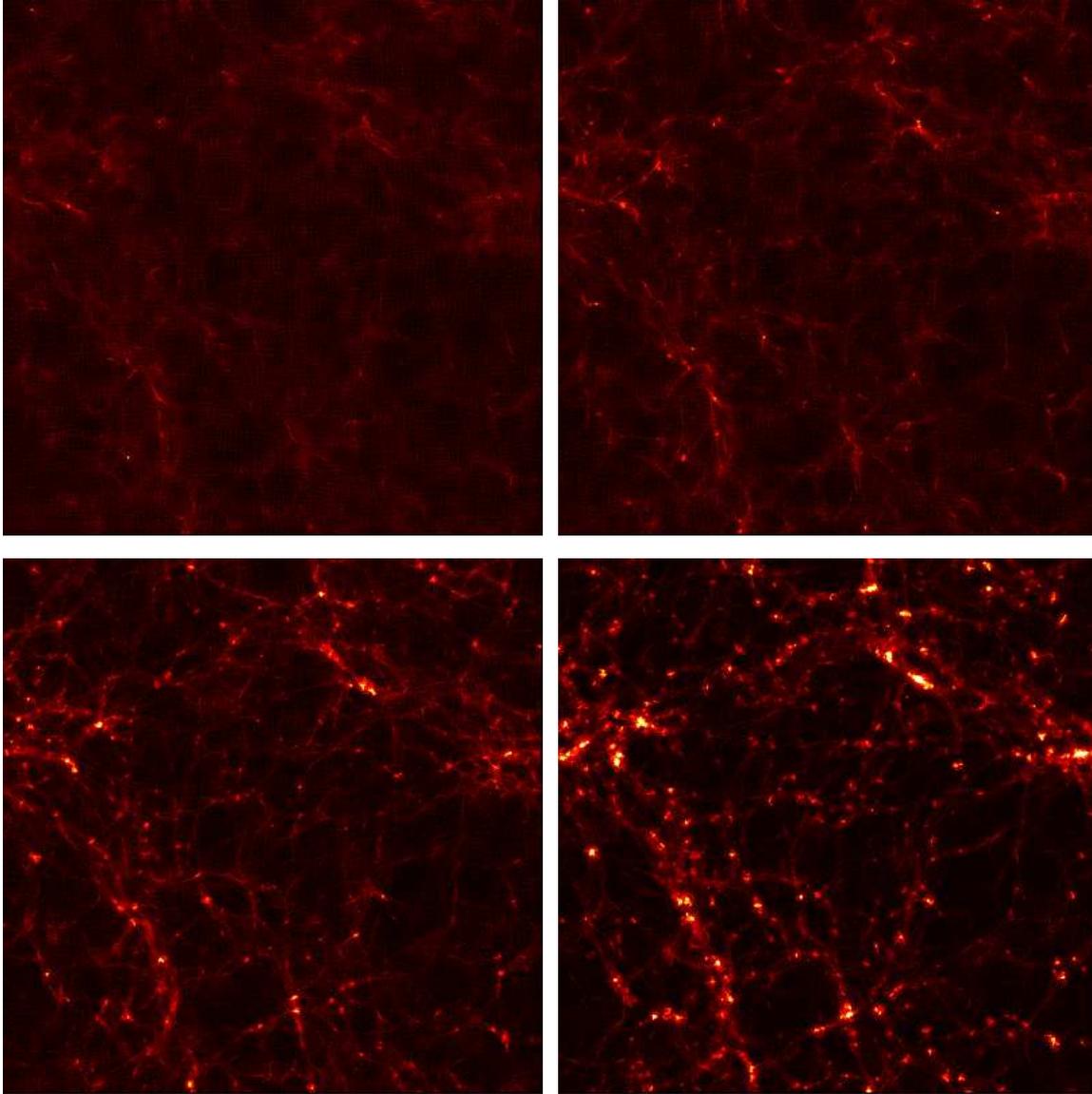


Figure 7.16 – Champs de densité des 128^3 particules dans un cube de longueur d'arête valant $128h^{-1}Mpc$, projetées dans le plan (x, y) , à différents redshifts z pour le modèle à **quintessence effective** $\omega_Q = -1/2$ (de gauche à droite et de haut en bas : $z = 3$, $z = 2$, $z = 1$, $z = 0$)

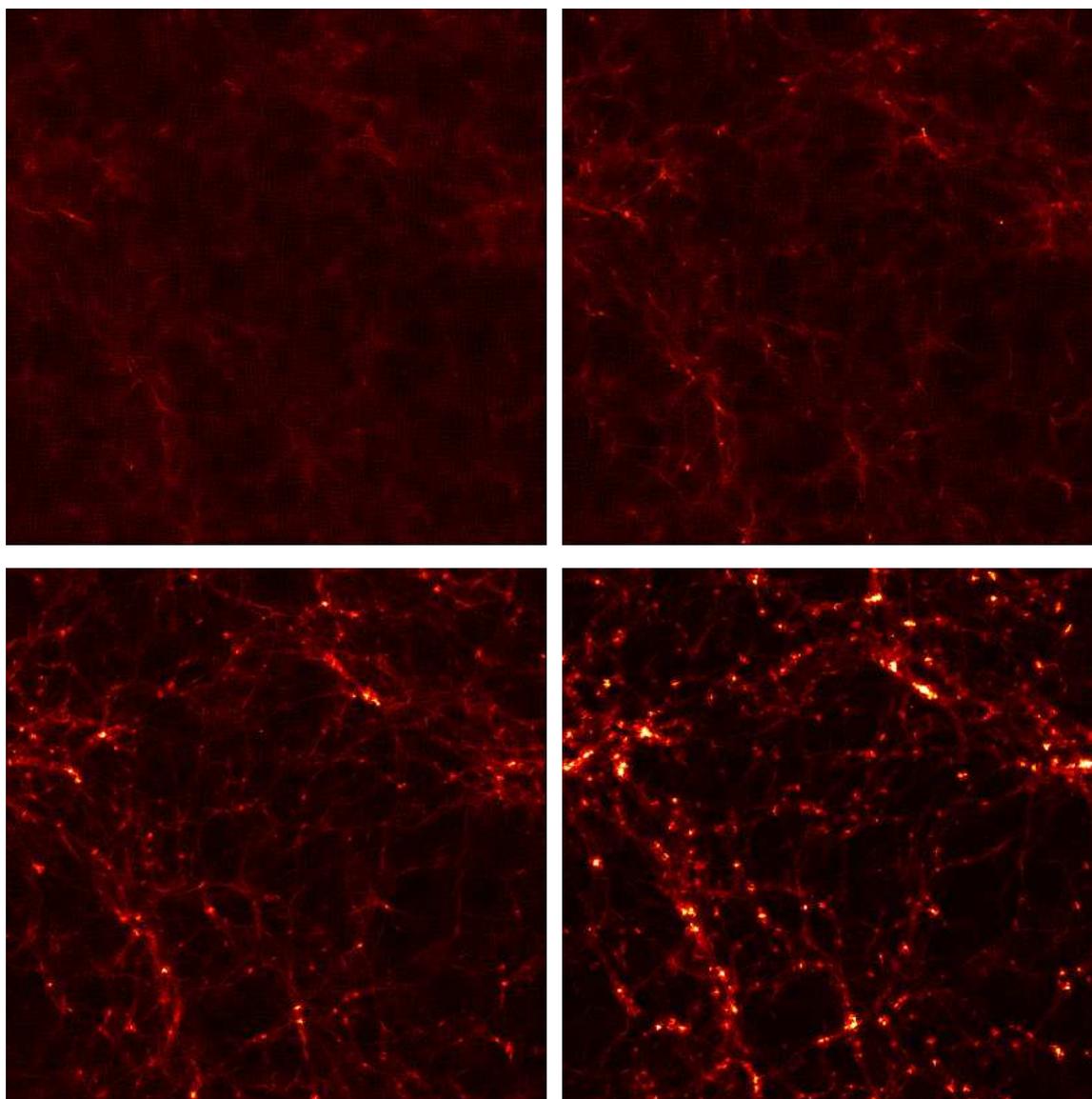


Figure 7.17 – Champs de densité des 128^3 particules dans un cube de longueur d'arête valant $128h^{-1}Mpc$, projetées dans le plan (x, y) , à différents redshifts z pour le modèle à **quintessence effective** $\omega_Q = -0.8$ (de gauche à droite et de haut en bas : $z = 3$, $z = 2$, $z = 1$, $z = 0$)

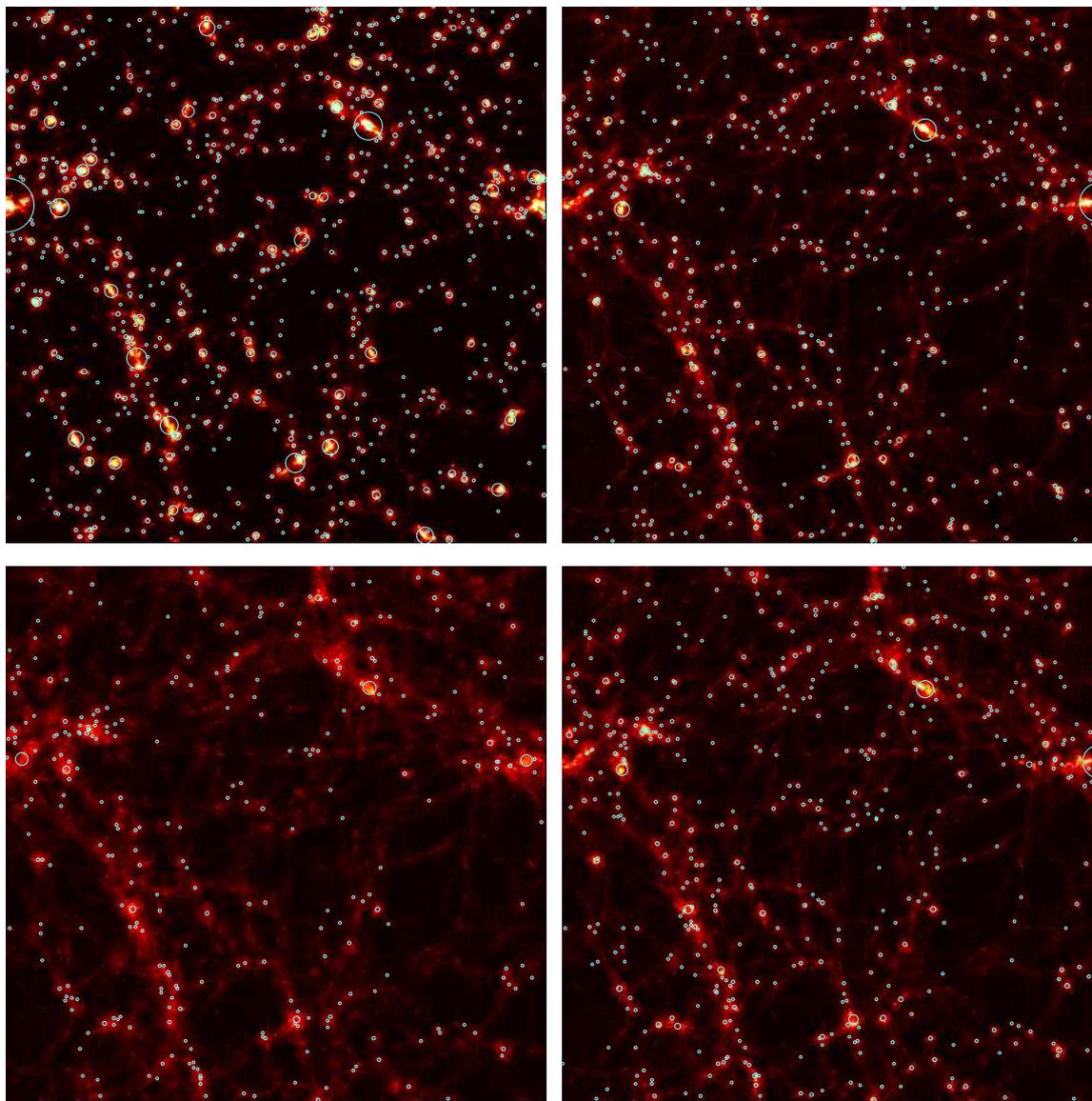


Figure 7.18 – *Superposition du champ de densité des particules et de la distribution des amas à $z = 0$ (de gauche à droite et de haut en bas : modèle EdS , Λ , Ratra-Peebles et SUGRA)*

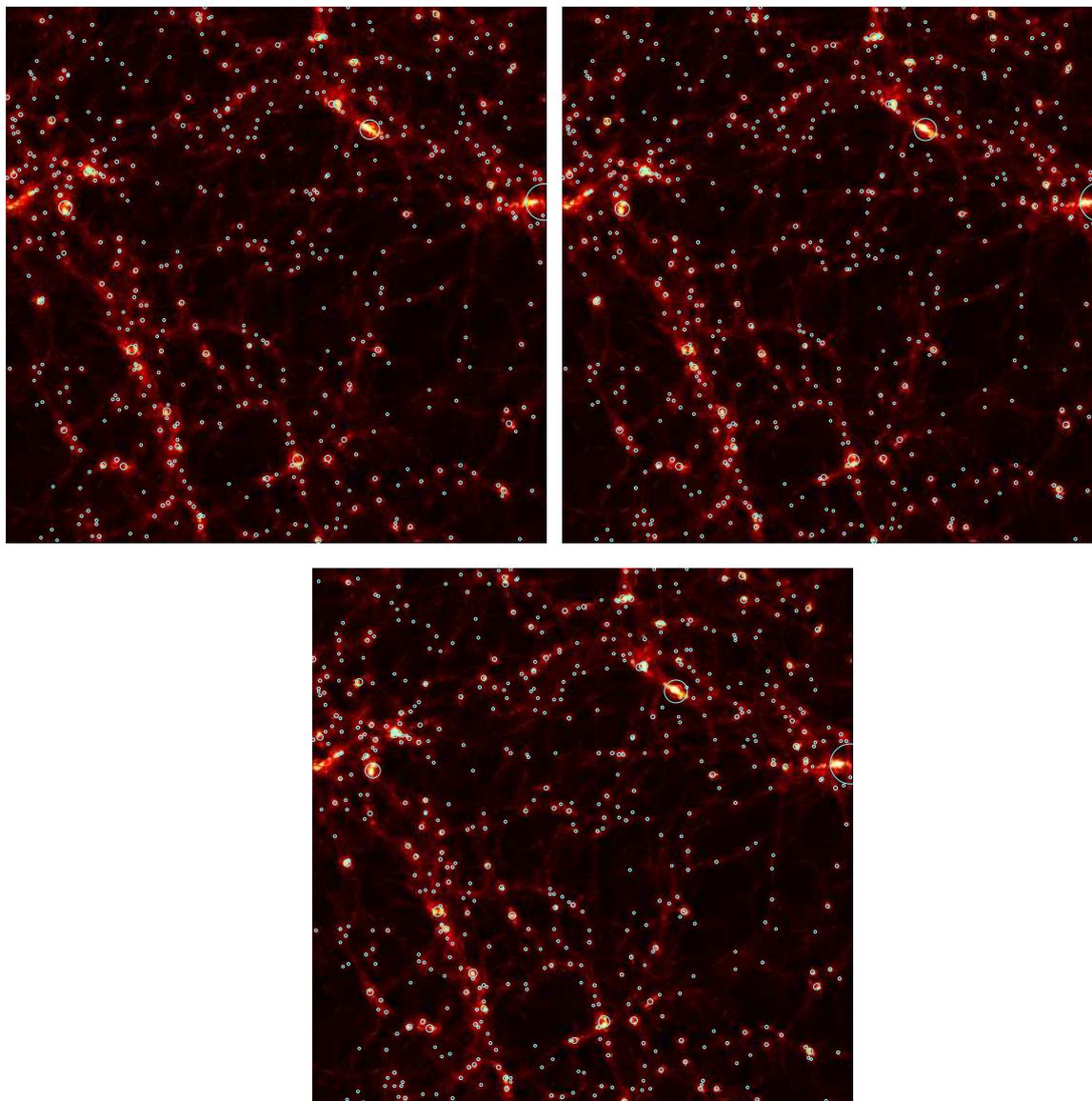


Figure 7.19 – Superposition du champ de densité des particules et de la distribution des amas à $z = 0$ pour les modèles à quintessence effective (de gauche à droite et de haut en bas : $\omega_Q = -1/3$, $\omega_Q = -1/2$ et $\omega_Q = -0.8$)

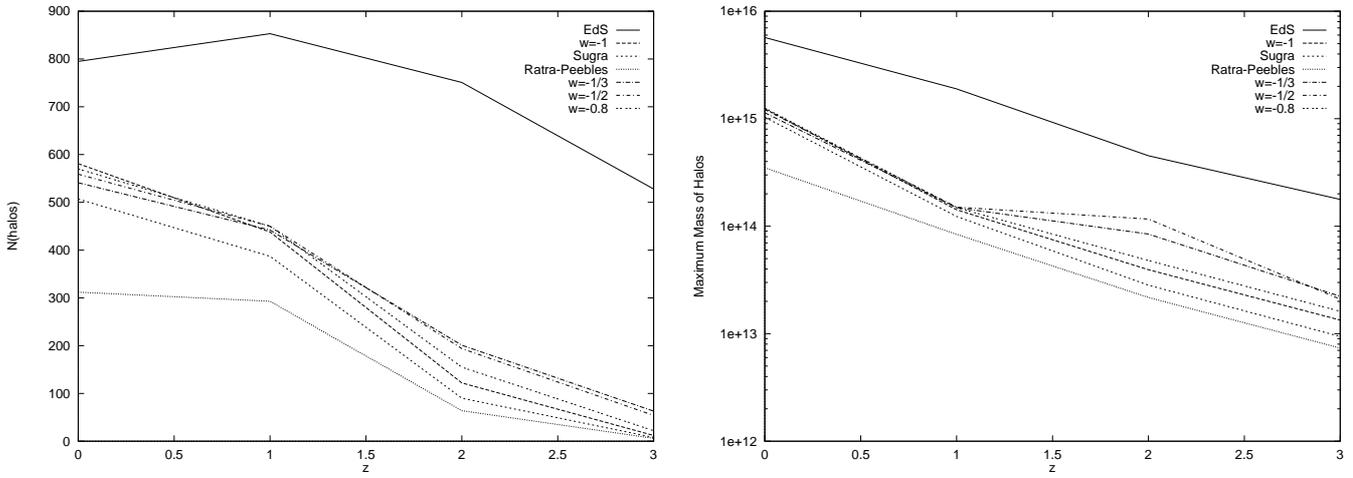


Figure 7.20 – Nombre de halos et masse du plus gros amas formé (en masses solaires M_{\odot}) en fonction du redshift pour les différents modèles

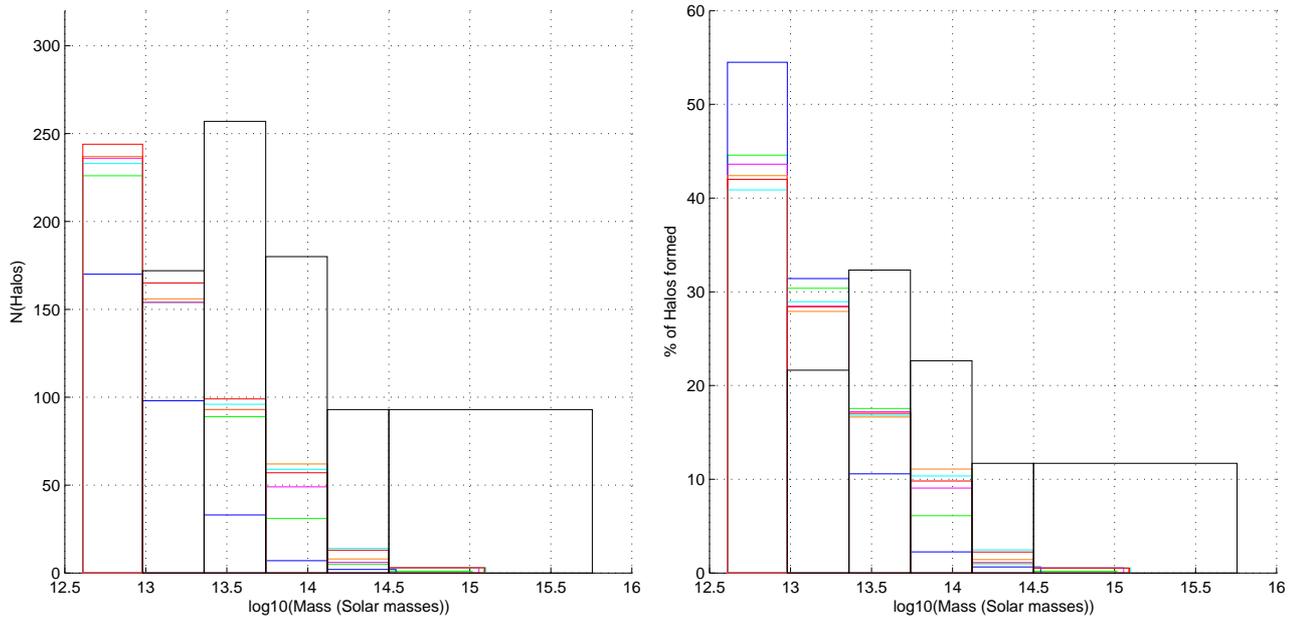


Figure 7.21 – Nombre de halos formés par catégorie de masse (en masses solaires, diagramme semi-logarithmique) et pourcentage de halos formés par catégorie de masse (noir : EdS, rouge : Λ , vert : Sugra, bleu : Ratra-Peebles, mauve : $\omega_Q = -1/3$, turquoise : $\omega_Q = -0.8$ et orange : $\omega_Q = -1/2$)

Chapitre 8

Conclusions et perspectives

“Le monde est une belle histoire, que chaque génération s’efforce d’améliorer.”

G. Lemaître, *“L’hypothèse de l’atome primitif”*.

Sommaire

1	Instabilités gravitationnelles des champs scalaires et de Yang-Mills	196
2	Quintessence et formation des structures	201

1 Instabilités gravitationnelles des champs scalaires et de Yang-Mills

A la lumière de ce qui a été exposé au chapitre 5, résumons tout d'abord quelques caractéristiques remarquables de l'instabilité gravitationnelle des champs de YM dérivant du groupe de jauge $SU(2)$.

Le mécanisme d'instabilité gravitationnelle de ces champs, aux échelles de la taille de l'horizon, arbore une évolution en deux temps. Rappelons-en les caractéristiques principales.

- L'évolution **précoce** des fluctuations correspond à un **régime quasi-conforme** : l'expansion pratiquement homogène résulte en une transformation conforme de la métrique qui laisse insensible la dynamique des champs de jauge. Celle-ci se traduit par une oscillation des potentiels de jauge dans un potentiel proche du potentiel quartique de la solution homogène de Gal'tsov-Volkov vue au chapitre 2. Toutefois, ce dernier se trouve légèrement distordu par l'inhomogénéité des champs, tant gravitationnels que de jauge. Il en résulte que les contrastes de densité et de pressions effectuent des oscillations amorties, sous-tendues principalement par les termes électromagnétiques, purement cinétiques et de couplage avec le champ perturbé initialement, du modèle de Higgs abélien à deux dimensions. Les autres termes de ce modèle demeurent négligeables tant que l'inhomogénéité reste faible.
- L'évolution **mature** des fluctuations correspond à un **régime inhomogène** : l'expansion s'éloigne sensiblement d'une transformation conforme de la métrique de sorte que la dynamique des champs de jauge en soit affectée. Celle-ci se marque par des interactions non linéaires entre les composantes de jauge, accompagnées par la diffusion de celles-ci sur le fond homogène. Pour que cette diffusion s'accomplisse, il faut que l'inhomogénéité devienne sensible à l'intérieur de la sphère de causalité (mesurée par la longueur de Hubble) afin que les interactions entre champs inhomogènes puissent se propager de proche en proche sur le fond. Ce critère n'apparaît donc que lorsque l'inhomogénéité est suffisamment importante, ce qui dépend de la taille initiale des perturbations : les plus grandes devront attendre plus longtemps pour voir les gradients de leurs champs devenir significatifs à l'échelle de la longueur de Hubble. Ceci explique pourquoi les grandes fluctuations évoluent plus lentement que les petites. Toutefois, la diffusion n'est pas à elle seule synonyme de croissance des fluctuations de densité et de pressions (cf. annexe D, figures 4.11 à 4.15 et 4.16 à 4.20). En effet, comme nous l'avons vu pour la diffusion de fluctuations de la taille de la longueur de Hubble, elle doit s'accompagner d'une non-conformalité de l'expansion. Néanmoins, on remarquera que l'avènement de ce régime

est inéluctable dès lors que les perturbations de la métrique croissent de manière monotone au cours du temps. Ce régime apparaît par suite de l'inhomogénéité importante des interactions entre les champs de jauge, comme nous l'a montré l'analyse en composantes du modèle de Higgs abélien.

Nous pouvons nous livrer à une autre interprétation de ce mécanisme d'instabilité gravitationnelle en deux temps des champs de YM. Comme nous l'avons vu au chapitre 2, les champs de jauge sont purement répulsifs et forment avec la gravitation, purement attractive, un système capable de s'équilibrer. Le régime conforme correspond alors à une situation où la force de Yang-Mills l'emporte sur la gravitation, entraînant ainsi l'homogénéisation précoce des grandeurs observables. Ensuite, lorsque l'expansion a créé suffisamment de disparité au sein du champ gravitationnel et des champs de jauge, le système EYM peut alors entrer dans une phase oscillante où la force de YM et la gravitation se disputent sans cesse le contrôle du mécanisme d'instabilité gravitationnelle.

Par ailleurs, nous avons eu le loisir d'effectuer quelques simulations numériques sur des modèles cosmologiques ouvert ($k = -1$) et fermé ($k = +1$). Celles-ci ont produit des résultats qualitatifs analogues à ceux présentés ici dans le cas euclidien, en tenant compte de l'influence de la géométrie homogène et de son évolution dans nos conclusions précédentes.

Ensuite, notre démarche nous a conduit à examiner par les mêmes méthodes le mécanisme d'instabilité gravitationnelle du champ scalaire. Ce faisant, nous espérons quelque peu comprendre la complexité de ce mécanisme pour les champs de jauge. Plus précisément, nous avons choisi un potentiel de self-interaction quartique pour le champ scalaire, qui rappelle celui de la solution homogène et isotrope de Gal'tsov-Volkov des champs de YM dérivant du groupe $SU(2)$. En fait, c'est grâce à la symétrie extrêmement forte que requiert le principe cosmologique que la dynamique de ces champs de jauge se réduit finalement à celle d'une particule scalaire un peu spéciale dans un potentiel quartique. En effet, la dynamique pseudo-scalaire dans laquelle les champs de YM dégénèrent sous l'exigence de la symétrie est invariante conforme, au contraire d'un champ scalaire usuel dans un espace-temps courbe à quatre dimensions (voir chapitre 1, § 3). Il existe donc une similitude toute relative entre les deux champs, au niveau de leur dynamique cosmologique homogène et isotrope. Cette dernière peut se concevoir aisément comme l'oscillation d'une particule à un degré de liberté dans un potentiel de self-interaction, dont l'énergie totale va dicter le comportement du facteur d'expansion de l'espace-temps qui les héberge. Dans le cas de l'inflaton (champ scalaire usuel, cf. chapitre 6), l'absence d'invariance conforme du champ résulte en un transfert de l'énergie totale du secteur scalaire au secteur gravitationnel : l'expansion dissipe l'énergie cinétique du champ et gèle l'inflaton dans les positions d'équilibre tandis que l'énergie même du champ conduit l'expansion cosmique. Dans le cas du champ de jauge, l'invariance conforme implique la conservation de l'énergie dans chacun des sec-

teurs — gravitationnels et de jauge — séparément. Il en résulte que le cosmos se comporte comme s'il était rempli d'un gaz de radiations et la particule scalaire invariante conforme qui constitue le reliquat du champ de jauge subit des oscillations non amorties dans un potentiel quartique.

Lorsque l'on passe à l'étude de l'instabilité gravitationnelle, on brise explicitement la symétrie constituée par l'homogénéité du cosmos. La mécanique de l'inflaton peut alors se concevoir comme celle d'un chapelet continu d'oscillateurs lâchés dans un potentiel d'interaction fixe. Les fluctuations de densité sont alors les variations d'énergies cinétique et potentielle que subissent les oscillateurs autour de la solution homogène. Pour les champs de jauge par contre, l'inhomogénéité de l'espace révèle le véritable caractère vectoriel non abélien qui ne peut plus être dégénéré par homogénéité et isotropie en celui d'une particule scalaire invariante conforme. Ainsi, lorsque les perturbations des champs gravitationnels et de jauge sont faibles, la solution reste proche de l'état homogène et l'instabilité gravitationnelle est caractérisée tout d'abord par son régime quasi-conforme. Ensuite, l'inhomogénéité gagnant en puissance, la solution s'écarte de plus en plus de l'état homogène : le potentiel d'interaction de la particule scalaire se déforme sensiblement, et les variations d'énergie cinétique et potentielle que subissent les champs de jauge donnent naissance à des fluctuations de densité croissantes. Au fur et à mesure du mécanisme d'instabilité gravitationnelle, le caractère vectoriel non abélien, quelque peu dissimulé par la symétrie requise par le principe cosmologique, reprend peu à peu ses droits.

Grâce à une méthode numérique originale basée sur l'approche hamiltonienne du système EYM, nous avons pu montrer que les fluctuations primordiales des champs de jauge ont vraisemblablement été diluées par la formidable expansion de l'univers d'alors en vertu de leur invariance conforme, à moins que le degré d'inhomogénéité de celui-ci n'ait été significativement important, ce qui n'aurait certes pas manqué de laisser des conséquences observables. De plus, on peut avancer que les transitions de phase qui ont rendu les champs de jauge dérivant du groupe $SU(2)$ à courte portée se sont probablement produites bien avant que les fluctuations n'atteignent un degré d'inhomogénéité suffisant. Aussi, de tels champs ne pourraient-ils avoir qu'une importance mineure pour la cosmologie.

Il convient toutefois de modérer cette conclusion par les objections suivantes. Tout d'abord, le lagrangien de Born-Infeld pour les champs de jauge (cf. [DGZZ02]), issu de considérations relatives à la théorie des cordes et donc susceptible d'applications près de la singularité du Big Bang, n'est pas invariant conforme, ce qui modifiera considérablement le mécanisme d'instabilité gravitationnelle présenté ici. Des études ultérieures pourraient faire l'objet de cette question. Ensuite, un modèle physique plus complet, incluant par exemple des considérations relatives à la taille et à l'amplitude précises des fluctuations primordiales, qui comprendrait d'autres champs matériels que les seuls champs de jauge et qui utiliserait

une jauge quasi-newtonienne pour la gravitation, devrait être étudié avant de conclure. De même, des considérations quantiques sur la désintégration des quanta des champs de YM après la transition de phase qui les rend massifs, seraient également intéressantes à prendre en compte mais la difficulté inhérente à la quantification risque fort de rendre cette tâche des plus ardues.

Enfin, si le mécanisme d'instabilité gravitationnelle des champs de YM dans l'univers primordial a dû certainement relever davantage du régime quasi-conforme que de son homologue mature, alors l'homogénéisation de la matière n'a eu lieu qu'au niveau de ces grandeurs observables que sont les composantes du tenseur énergie-impulsion. En effet, l'invariance conforme aurait caché l'inhomogénéité des champs : les composantes non observables, comme les coefficients de la métrique et les potentiels de jauge, ne s'homogénéisent pas dans ce régime, bien au contraire¹. On peut dès lors se demander ce qu'il adviendra de cette inhomogénéité discrète lorsque les champs de jauge non abéliens passeront dans un régime quantique à l'issue d'une transition de phase, comme la brisure spontanée de la symétrie par un mécanisme de Higgs par exemple. En effet, les autres champs matériels, non conformément invariants, dans lesquels ils se désintègreront ressentiront différemment cette inhomogénéité secrètement cultivée durant l'ère où les champs de jauge non abéliens ont dominé. Cette perspective rejoint les questions auxquelles se devrait de répondre le modèle physique esquissé ci-avant.

Par ailleurs, si l'existence des modes croissants est donc due ici au fait que l'expansion finit par ne plus suivre de régime conforme, on peut se demander ce qu'il adviendrait de nos résultats dans une jauge gravitationnelle $N \neq R(t)$ plus souple. Par exemple, le choix d'une jauge quasi-newtonienne $N = 1 + \phi(\chi)$ ($c = 1$), avec une condition du type “*maximal slicing*” (cf. chapitre 3), permettrait l'étude du critère de Jeans pour un fluide de radiations non abéliennes.

De même, l'étude du cas général $N = N(\chi, t)$, avec une condition de jauge additionnelle pour cette composante, devrait être prise en compte pour modéliser des champs gravitationnels forts. Nous avons vu en effet que les perturbations de la métrique prenaient ici des valeurs souvent très éloignées de l'unité, ce qui implique que l'application de notre condition de jauge conforme $N = R(t)$ n'est certainement plus tellement justifiée au voisinage de telles inhomogénéités. Cependant, une telle étude relève plus du domaine de l'effondrement gravitationnel que de la simple instabilité, avec toutes les difficultés que cela comporte en termes d'émergence de singularités et de choix de coordonnées salvatrices (quand elles existent).

¹Les perturbations de la métrique croissent de manière monotone tandis que les potentiels de jauge oscillent sans amortissement.

De même, une amélioration de l'étude numérique menée dans ces pages pourrait passer par le choix d'une jauge intelligente, qui permettrait un traitement implicite des équations de YM. Si on veut toujours utiliser la solution homogène de Gal'tsov-Volkov comme base des perturbations, cette condition se ramènerait au choix ingénieux d'une phase pour le doublet de Higgs. Notre choix d'une phase fixe se ramène à étudier l'instabilité gravitationnelle en fonction des trois degrés de liberté physiques du système EYM à symétrie sphérique : deux composantes électromagnétiques et le module du champ scalaire. La recherche d'une phase non constante intéressante pourrait s'effectuer en requérant notamment l'apparition d'opérateurs différentiels commodes dans les équations de YM résultantes, comme par exemple des d'Alembertiens, ou encore la disparition des dérivées croisées².

Notre étude pourrait également inspirer des travaux plus complexes, visant par exemple à simuler numériquement l'effondrement gravitationnel de trous noirs colorés. La physique de ces solutions est en effet fort différente de celle de l'instabilité gravitationnelle. Tentons d'en dégager quelques points sensibles. Tout d'abord, les solutions recherchées devront être asymptotiquement plates, ce qui implique la définition d'un critère de platitude (quelle est la décroissance asymptotique ? En $1/r^n$ ou plus contraignante ?). Alors que nous n'avons considéré que des régions locales dans un univers en expansion, cette étude devrait couvrir un large domaine spatial, pour examiner le comportement radiatif des champs de Yang-Mills, y compris à l'infini. Ensuite, nous n'avons considéré ici que des perturbations d'une métrique homogène et isotrope, alors que modéliser un corps du type trou noir implique de grands contrastes de densité, ainsi que le risque de trouver des singularités. Ceci entraîne des choix de jauges non triviales tant pour la gravitation que pour les champs de Yang-Mills. De plus, on ne possède pas de solutions analytiques générales comme la paramétrisation de Gal'tsov et Volkov pour le cas homogène et isotrope que l'on pourrait perturber dans le cas des trous noirs colorés, ce qui renforce encore un peu la difficulté.

Enfin, on pourrait encore améliorer la méthode en effectuant une compactification du domaine spatial, en vue de résoudre le problème constitué par les effets de bord. Le choix d'autres méthodes que les différences finies, comme par exemple les méthodes spectrales³, pourrait également apporter une amélioration sensible des performances de la méthode,

²En effet, on connaît de nombreuses méthodes d'intégration numérique d'opérateurs hyperboliques comme les d'Alembertiens ainsi que leurs conditions de stabilité. Les champs scalaires c et d couplant au champ de Maxwell à deux dimensions connaissent déjà ce genre de termes dans leurs équations du mouvement (cf. chapitre 2, équations (2.63) et (2.65), ainsi que l'annexe C), et un choix de jauge commode pourrait donc être celui d'une jauge radiative qui permettrait de reformuler la partie de Maxwell sur la dynamique des potentiels a et b en des termes d'équations d'ondes. Par ailleurs, les termes en dérivées croisées sont souvent sources d'instabilité numérique.

³Les éléments finis ne présentent pas beaucoup d'intérêt dans notre cas, en raison de la simplicité du domaine et de la dimension très peu élevée.

compatible avec les objectifs du modèle physique présenté plus haut, ou avec ceux d'une simulation de l'effondrement gravitationnel de trous noirs colorés.

2 Quintessence et formation des structures

Après l'approche plus formelle et qualitative de l'instabilité gravitationnelle des champs scalaires et des champs de jauge, nous avons pu nous pencher sur le problème plus concret de l'influence d'un champ scalaire de quintessence sur la formation de grandes structures telles que les amas de matière noire. Une première partie de notre travail a consisté à retrouver les résultats de la littérature récente concernant les modèles cosmologiques en présence de champs de quintessence avec un potentiel de type Ratra-Peebles — qui est un modèle simple possédant la propriété d'attracteur — et, éventuellement, une correction supergravifique. Ces résultats avaient pour vocation principale d'illustrer et de démontrer certaines propriétés d'insensibilité aux conditions initiales de tels champs de quintessence, mais pas d'obtenir en définitive des modèles cosmologiques précis.

En vue d'obtenir de semblables modèles, nous avons donc dû, dans un premier temps, établir une méthode de tir qui optimise les paramètres cosmologiques à la fin de l'ère inflationnaire (obtenus par le biais d'une estimation grossière) en vue d'obtenir un ensemble précis et cohérent des valeurs des paramètres cosmologiques aujourd'hui.

Ensuite, notre contribution principale à ce problème a été de modifier un code utilisé à l'Observatoire de Paris-Meudon en vue d'étudier la formation des structures. La nouvelle version permet d'effectuer la simulation numérique pour n'importe quel modèle cosmologique calculé à l'avance. Nous avons appliqué ce code modifié à sept modèles cosmologiques distincts dont deux nouveaux qui tiennent compte d'un champ de quintessence réaliste, les autres pouvant être retrouvés parmi la littérature. Nos résultats indiquent qu'un champ de quintessence réaliste a pour effet d'inhiber la formation des structures plus encore que les modèles à quintessence effective⁴ étudiés jusqu'alors. Plus précisément, nous avons pu montrer par une méthode de groupement des particules que les amas de matière noire de masse donnée qui sont formés dans le modèle de Ratra-Peebles sont moins nombreux que dans les autres modèles. De plus, ce modèle favorise la formation de structures plus petites, de la masse de quelque $10^{12}M_{\odot}$. Une explication possible de cette observation pourrait résider dans la domination plus précoce de ce champ de quintessence sur la matière ordinaire au cours de l'histoire de l'univers. Par ailleurs, en examinant la formation des

⁴Ces modèles correspondent à une équation d'état barotropique constante

$$p_Q = \omega_Q \rho_Q,$$

avec $\omega_Q = cte$ (cf. chapitre 7).

structures pour un modèle semblable de quintessence mais avec correction supergravifique (modèle SUGRA), nous avons pu montrer que l'effet d'une telle correction est de retarder la domination de la quintessence et, partant, de diminuer l'inhibition conséquente de la formation des structures. Le modèle de quintessence à correction supergravifique arbore ainsi un spectre de masse des amas formés nettement plus semblable à un modèle avec constante cosmologique, quoique les structures obtenues soient moins nombreuses.

En guise de conclusion, nous pouvons affirmer que la formation des structures pourrait bien constituer un champ d'expérimentation inattendu mais précieux pour valider ou non les théories cosmologiques avec quintessence. Et si, comme nos résultats le laissent entendre, la trace de la physique des hautes énergies — telles que les corrections supergravifiques — s'imprime bien sur la distribution de la matière aux grandes échelles, le ciel et les catalogues de galaxies que nous en tirons pourraient jouer le rôle d'un nouveau laboratoire pour la physique des hautes énergies.

Annexe A

Les équations de Yang-Mills en géométrie différentielle

Pour rappel, les équations de Maxwell peuvent se diviser en deux groupes (en unités géométriques $c = \epsilon_0 = \mu_0 = 1$) :

$$\begin{aligned}\vec{\nabla} \wedge \vec{E} + \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} &= 0 \\ \vec{\nabla} \bullet \vec{B} &= 0\end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}\vec{\nabla} \wedge \vec{B} - \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} &= \vec{j} \\ \vec{\nabla} \bullet \vec{E} &= \rho,\end{aligned}$$

avec \vec{E} , \vec{B} , \vec{j} et ρ les champs électrique, d'induction magnétique, le vecteur densité de courant et la densité de charge électrique, respectivement. En posant, $F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu$ de telle sorte que $\vec{E}_i = F_{0i}$, $F_{ij} = \epsilon_{ijk} \vec{B}_k$ ($i, j, k = 1, 2, 3$) et $J^\mu = (-\rho, \vec{j})$ la quadri-densité de courant, on obtient pour les équations de Maxwell (cf. [MOU98]) :

$$\begin{aligned}F_{\alpha\beta|\gamma} + F_{\beta\gamma|\alpha} + F_{\gamma\alpha|\beta} &= 0 \\ F^{\mu\nu}{}_{|\mu} &= \frac{1}{\sqrt{-g}} \partial_\mu (\sqrt{-g} F^{\mu\nu}) = J^\nu\end{aligned}\tag{1.1}$$

qui correspondent respectivement au premier et second groupe d'équations de Maxwell. En termes des opérateurs du calcul extérieur, nous avons

$$\begin{aligned}d\mathcal{F} &= 0 \\ d * \mathcal{F} &= - * J\end{aligned}\tag{1.2}$$

où $\mathcal{F} = d\mathcal{A}$ est la 2-forme différentielle dont les composantes forment le tenseur de Faraday $F_{\mu\nu}$. La connexion abélienne \mathcal{A} se transforme alors comme

$$\mathcal{A} \rightarrow \mathcal{A} + d\alpha(x^\mu),$$

transformation de jauge qui laisse bien invariante les deux groupes d'équations de Maxwell, puisque le tenseur de Faraday est lui-même invariant de jauge.

La théorie de Yang-Mills se conçoit comme une généralisation de celle de Maxwell à un groupe de jauge non abélien, le groupe de jauge de Maxwell étant le groupe $U(1)$ (cf. chapitre 1). A partir de la connexion \mathcal{A} à valeurs dans l'algèbre de Lie du groupe de jauge, on définit la 2-forme différentielle qui donne l'intensité du champ de Yang-Mills :

$$\mathcal{F} = d\mathcal{A} - \frac{i}{2}[\mathcal{A}, \mathcal{A}] = d\mathcal{A} - i\mathcal{A} \wedge \mathcal{A}$$

(cf. [NS83, EGH80, KOU95]). Cette définition entraîne l'équivalent du premier groupe de Maxwell :

$$d\mathcal{F} = 0.$$

La dérivée covariante de jauge D est donnée par :

$$D(\cdot) = d(\cdot) + i[\mathcal{A}, *(\cdot)],$$

où $*$ est l'opérateur dual de Hodge. La transformation de jauge des composantes de la connexion s'écrit alors :

$$A_\mu \rightarrow U^{-1}A_\mu U - i(\partial_\mu U)U^{-1}$$

pour $U(x^\mu) \in \mathcal{G}$. En termes de composantes, on a que $\mathcal{A} = A_\mu dx^\mu$ et $\mathcal{F} = \frac{1}{2}F_{\mu\nu}dx^\mu \wedge dx^\nu$ avec

$$F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu - i[A_\mu, A_\nu].$$

La seconde équation de Yang-Mills est alors

$$D * \mathcal{F} = d * \mathcal{F} - i[\mathcal{A}, \mathcal{F}] = 0$$

($**\mathcal{F} = -\mathcal{F}$) ou, en termes de composantes

$$D_\mu F^{\mu\nu} = \nabla_\mu F^{\mu\nu} - i[A_\mu, F^{\mu\nu}] = 0$$

qui correspond bien avec l'équation (2.15) si on développe le long des générateurs $T_{\mathbf{i}}$. Cette équation correspond au deuxième groupe d'équations de Maxwell sans source puisque l'on n'a pas considéré de couplage matériel (leptons, quarks, etc.) dans la densité lagrangienne (2.4).

Annexe B

Écriture complète du système EYM considéré

A partir des éléments donnés au chapitre 2 (section 3.2), écrivons explicitement les équations EYM en symétrie sphérique pour des potentiels de jauge dérivant du groupe $SU(2)$. En vertu de l'invariance conforme des champs de Yang-Mills, on peut écrire les équations EYM sans avoir à calculer les composantes du tenseur d'Einstein $G_{\mu\nu} = R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}R g_{\mu\nu}$ (cf. (2.16)). Toutefois, celles-ci peuvent être "assemblées" dans le cas général à partir des éléments du chapitre 2, section 3.2, et on peut en trouver une écriture complète et correcte dans la référence [LL61], paragraphe 11-7, exercice 4. De même, on trouvera une dérivation complète des équations de Yang-Mills dans [KOU95].

Ainsi, les équations d'Einstein sont

$$R_{\mu\nu} = \kappa T_{\mu\nu}^{YM} \quad (2.1)$$

$$R = 0 \quad (2.2)$$

c'est-à-dire

$$\begin{aligned} R_{00} &= \kappa T_{00} \equiv 2e^{-2\mu} \lambda' N' N - 2\ddot{\lambda} - 2\dot{\lambda}^2 + 2\dot{\lambda} \frac{\dot{N}}{N} - \ddot{\mu} - \dot{\mu}^2 + \dot{\mu} \frac{\dot{N}}{N} + e^{-2\mu} N (N'' - \mu' N') = \\ &= \frac{\kappa}{2} \left\{ e^{-2\mu} (\dot{b} - a')^2 + 2e^{-2\lambda} \left((\dot{c} - ad)^2 + (\dot{d} + ac)^2 \right) \right. \\ &\quad \left. + 2N^2 e^{-2\mu-2\lambda} \left((c' - bd)^2 + (d' + bc)^2 \right) + N^2 e^{-4\lambda} (c^2 + d^2 - 1)^2 \right\} \end{aligned} \quad (2.3)$$

$$\begin{aligned} R_{01} &= \kappa T_{01} \equiv -\dot{\lambda}' - \lambda' \dot{\lambda} + \lambda' \dot{\mu} + \dot{\lambda} \frac{N'}{N} = \\ &= \kappa e^{-2\lambda} \left\{ (\dot{c} - ad) (c' - bd) + (\dot{d} + ac) (d' + bc) \right\} \end{aligned} \quad (2.4)$$

$$\begin{aligned}
R_{11} &= \kappa T_{11} \equiv -2\lambda'' - 2\lambda'^2 + 2\lambda'\mu' + \mu' \frac{N'}{N} + \frac{e^{2\mu}}{N^2} \left(2\dot{\lambda}\dot{\mu} + \ddot{\mu} + \dot{\mu}^2 - \dot{\mu} \frac{\dot{N}}{N} \right) - \frac{N''}{N} = \\
&\frac{\kappa}{2} \left\{ -\frac{1}{N^2} (\dot{b} - a')^2 + 2e^{-2\lambda} \left((c' - bd)^2 + (d' + bc)^2 \right) \right. \\
&\left. + 2\frac{e^{2\mu-2\lambda}}{N^2} \left((\dot{c} - ad)^2 + (\dot{d} + ac)^2 \right) - e^{2\mu-4\lambda} (c^2 + d^2 - 1)^2 \right\} \quad (2.5)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
R_{22} &= \kappa T_{22} \equiv 1 + e^{2\lambda} \left\{ -e^{-2\mu} \left(\lambda'' + 2\lambda'^2 - \lambda'\mu' + \lambda' \frac{N'}{N} \right) + \frac{1}{N^2} \left(\ddot{\lambda} + 2\dot{\lambda}^2 + \dot{\lambda}\dot{\mu} - \dot{\lambda} \frac{\dot{N}}{N} \right) \right\} = \\
&\frac{\kappa}{2} \left\{ \frac{e^{-2\mu+2\lambda}}{N^2} (\dot{b} - a')^2 + e^{-2\lambda} (c^2 + d^2 - 1)^2 \right\} \quad (2.6)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
R &= 0 \equiv -e^{-2\mu} \left(2\lambda'' + 3\lambda'^2 - 2\lambda'\mu' + (2\lambda' - \mu') \frac{N'}{N} + \frac{N''}{N} \right) \\
&+ \frac{1}{N^2} \left(2\ddot{\lambda} + 3\dot{\lambda}^2 + 2\dot{\lambda}\dot{\mu} - (\dot{\mu} + 2\dot{\lambda}) \frac{\dot{N}}{N} + \ddot{\mu} + \dot{\mu}^2 \right) + e^{-2\lambda} = 0. \quad (2.7)
\end{aligned}$$

Enfin, les équations de Yang-Mills s'écrivent comme au chapitre 2, rappelons-les par souci de complétude :

$$\begin{aligned}
&\left\{ -N e^{-\mu} (d' + bc) \right\}' + \left\{ \frac{e^\mu}{N} (\dot{d} + ac) \right\}' - N e^{-\mu} b (c' - bd) \\
&+ N e^{\mu-2\lambda} d (c^2 + d^2 - 1) + \frac{e^\mu}{N} a (\dot{c} - ad) = 0 \quad (2.8)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\left\{ N e^{-\mu} (c' - bd) \right\}' - \left\{ \frac{e^\mu}{N} (\dot{c} - ad) \right\}' - N e^{-\mu} b (d' + bc) \\
&- N e^{\mu-2\lambda} c (c^2 + d^2 - 1) + \frac{e^\mu}{N} a (\dot{d} + ac) = 0 \quad (2.9)
\end{aligned}$$

$$\left\{ \frac{e^{-\mu+2\lambda}}{N} (\dot{b} - a') \right\}' + 2N e^{-\mu} (c(d' + bc) - d(c' - bd)) = 0 \quad (2.10)$$

$$\left\{ \frac{e^{-\mu+2\lambda}}{N} (\dot{b} - a') \right\}' + 2\frac{e^\mu}{N} (c(\dot{d} + ac) - d(\dot{c} - ad)) = 0. \quad (2.11)$$

Annexe C

Paramétrisation homogène et isotrope de la connexion

On trouve la jauge homogène et isotrope la plus générale en recherchant la paramétrisation pour laquelle des contractions du tenseur de Faraday de la forme (cf. [GV91, DGZZ02])

$$\mathcal{T}_\mu{}^\nu = F_{\alpha\mu}^{\mathbf{a}} F_{\mathbf{a}}^{\alpha\nu}$$

qui entrent notamment dans la composition des grandeurs observables (tenseur énergie-impulsion) aient une partie spatiale dépendante uniquement du temps

$$\mathcal{T}_i{}^j = \mathcal{T}(t) \delta_i^j.$$

De même, il est possible de procéder également en recherchant une simplification maximale des équations de Yang-Mills (2.67-2.70). Plaçons-nous tout d'abord dans la métrique homogène et isotrope de Friedmann-Lemaître (2.76) en posant

$$\begin{aligned} N &= R(t) \\ \mu &= \ln R(t) \\ \lambda &= \ln R(t) + \ln \Sigma(\chi). \end{aligned}$$

Les équations de Yang-Mills (2.67-2.70) s'écrivent alors

$$-(d' + bc)' + (\dot{d} + ac) - b(c' - bd) + \Sigma^{-2}d(c^2 + d^2 - 1) + a(\dot{c} - ad) = 0 \quad (3.1)$$

$$(c' - bd)' - (\dot{c} - ad) - b(d' + bc) - \Sigma^{-2}c(c^2 + d^2 - 1) + a(\dot{d} + ac) = 0 \quad (3.2)$$

$$\Sigma^2 \left\{ (\dot{b} - a') \right\}' + 2(c(d' + bc) - d(c' - bd)) = 0 \quad (3.3)$$

$$\left\{ \Sigma^2 (\dot{b} - a') \right\}' + 2\left(c(\dot{d} + ac) - d(\dot{c} - ad) \right) = 0. \quad (3.4)$$

On peut d'ores et déjà noter l'invariance conforme manifeste dans ces équations de Yang-Mills dans la mesure où elles sont indépendantes du facteur d'expansion $R(t)$. Posons à présent

$$\begin{aligned} a &= \alpha + \dot{\psi} \\ b &= \beta + \psi' \\ c &= \gamma \sin \psi \\ d &= \gamma \cos \psi, \end{aligned} \tag{3.5}$$

où α , β , γ et ψ sont toutes des fonctions des coordonnées χ et t . Ce changement de variables a l'effet suivant sur les équations de Yang-Mills

$$\begin{aligned} &\cos \psi \left\{ \underbrace{\ddot{\gamma} - \gamma'' + \gamma (\beta^2 - \alpha^2) + \Sigma^{-2} \gamma (\gamma^2 - 1)}_{(1)} \right\} \\ &+ \sin \psi \left\{ \underbrace{-\gamma (\beta' - \alpha') + 2\alpha\dot{\gamma} - 2\beta\gamma'}_{(2)} \right\} = 0 \end{aligned} \tag{3.6}$$

$$-\cos \psi (2) + \sin \psi (1) = 0 \tag{3.7}$$

$$\left\{ \Sigma^2 (\dot{\beta} - \alpha') \right\}' = -2\alpha\gamma^2 \tag{3.8}$$

$$\Sigma^2 (\dot{\beta} - \alpha') = -2\beta\gamma^2. \tag{3.9}$$

Écrit sous cette forme, il est limpide de constater que la physique qui sous-tend les potentiels de jauge dérivant du groupe $SU(2)$ en symétrie sphérique est celle d'un modèle de Higgs abélien à deux dimensions : un champ scalaire (de module γ) affublé d'un potentiel de self-interaction quartique interagit avec un champ vectoriel abélien à deux dimensions de composantes $(A_0, A_1) = (\alpha, \beta)$. La partie de l'équation (3.6) indiquée par (1) est en effet l'équation décrivant la dynamique du champ scalaire (équation d'onde dont les termes de sources proviennent manifestement du couplage électromagnétique et de la self-interaction de ce champ), alors que les équations (3.8) et (3.9) sont des équations de Maxwell dont la source est un couplage non linéaire entre le champ scalaire et les potentiels électromagnétiques (cf. chapitre 1 et annexe A pour les équations de Maxwell dans le vide). Enfin, la partie de l'équation (3.6) indiquée par (2) nous fournit une contrainte physique supplémentaire qui entraîne que le choix de jauge du champ électromagnétique ne doit pas être anodin mais doit au contraire satisfaire ladite équation.

A l'examen des relations (3.6-3.9), on constate que la phase ψ du champ scalaire n'apparaît pas de manière dynamique, de sorte qu'elle constitue un pur degré de liberté de

jauges. Il est dès lors possible de procéder à deux choix de jauges pour cette phase qui simplifieront les équations sans pour autant en modifier la physique :

1. soit nous recherchons l'expression la plus générale de la phase qui simplifie de manière optimale les équations ;
2. soit nous fixons la phase à une valeur arbitraire, ce qui revient à polariser le champ scalaire.

Dans l'optique du point 1 ci-dessus, les auteurs de [GV91, DGZZ02] proposent la paramétrisation suivante des potentiels de jauge en vue d'obtenir une seule équation dynamique à partir des équations de Yang-Mills :

$$\begin{aligned}
 \alpha(\chi, t) &= -\frac{\dot{\sigma}\Sigma\sqrt{1-k\Sigma^2}}{1+\Sigma^2(\sigma^2-k)} \\
 \beta(\chi, t) &= \frac{\Sigma^2\sigma(\sigma^2-k)}{1+\Sigma^2(\sigma^2-k)} \\
 \gamma(\chi, t) &= \sqrt{1+\Sigma^2(\sigma^2-k)}, \\
 \psi(\chi, t) &= \text{Arc tg}\left(\frac{\Sigma\sigma}{\sqrt{1-k\Sigma^2}}\right)
 \end{aligned} \tag{3.10}$$

la fonction σ dépendant uniquement du temps. Les équations de Yang-Mills (3.1-3.4) deviennent alors

$$\begin{aligned}
 \Sigma^3(\ddot{\sigma} + 2\sigma(\sigma^2 - 1)) &= 0 \\
 0 &= 0 \\
 0 &= 0 \\
 \Sigma^2(\ddot{\sigma} + 2\sigma(\sigma^2 - 1)) &= 0
 \end{aligned} \tag{3.11}$$

où l'on peut reconnaître l'équation présentée au chapitre 2.

A présent, choisissons de fixer la phase du champ scalaire à une valeur de $\pi/2$ de telle sorte que $d = 0$ dans (3.5) et, comme plus haut, posons

$$\begin{aligned}
 \alpha(\chi, t) &= -\frac{\dot{\sigma}\Sigma\sqrt{1-k\Sigma^2}}{1+\Sigma^2(\sigma^2-k)} \\
 \beta(\chi, t) &= \frac{\Sigma^2\sigma(\sigma^2-k)}{1+\Sigma^2(\sigma^2-k)} \\
 \gamma(\chi, t) &= \sqrt{1+\Sigma^2(\sigma^2-k)}
 \end{aligned} \tag{3.12}$$

mais avec cette fois $\psi(\chi, t) = \frac{\pi}{2}$. Forts de ces hypothèses, les équations de Yang-Mills deviennent :

$$\begin{aligned} \frac{\Sigma^3}{\sqrt{1 + \Sigma^2(\sigma^2 - 1)}} (\ddot{\sigma} + 2\sigma(\sigma^2 - 1)) &= 0 \\ \frac{\Sigma^4\sigma}{\sqrt{1 + \Sigma^2(\sigma^2 - 1)}} (\ddot{\sigma} + 2\sigma(\sigma^2 - 1)) &= 0 = 0 \\ 0 &= 0 \\ \Sigma^2 (\ddot{\sigma} + 2\sigma(\sigma^2 - 1)) &= 0. \end{aligned} \tag{3.13}$$

Ainsi, nous vérifions bien que les choix de jauge 1 et 2 n'ont absolument aucune incidence sur la physique qui en découle et demeurent une pure question d'élégance ou de commodité. Dans le texte principal, nous avons choisi cette dernière option de fixer la jauge à une valeur constante. Nous y avons également rebaptisé α par a , β par b et γ par c .

Dans notre étude du système EYM inhomogène, nous avons choisi de fixer la phase à une valeur de $\pi/2$ afin de nous débarrasser de la composante d . Pour des raisons de simplicité, nous avons préféré choisir un formalisme non invariant de jauge (la jauge est fixée $d(\chi, t) = 0$) plutôt que le formalisme général ($d(\chi, t) \neq 0$, et dont (3.10) est la formulation homogène et isotrope). En effet, comme on l'a vu au chapitre 5, il est possible de transformer l'équation d'Hamilton sur le moment canonique π_d associé à d en une équation d'évolution pour la variable a . Dans le cas d'un formalisme invariant de jauge $d \neq 0$, il nous faudrait spécifier une condition de jauge supplémentaire, ou utiliser la contrainte de Yang-Mills (cf. chapitre 5), si nous voulons résoudre les équations aux dérivées partielles décrivant le secteur de jauge.

Annexe D

Détails des simulations du chapitre 5

Les figures 4.1 à 4.5, 4.6 à 4.10, 4.11 à 4.15 et 4.16 à 4.20 constituent le détail des simulations présentées au chapitre 5 dans les figures 5.9, 5.8 et 5.11 (a) et (b), respectivement. Le détail de la figure 5.11 (c) a été délibérément omis car il est fort semblable au cas typique (figures 5.1 et suivantes reliées à la même simulation) examiné au chapitre 5.

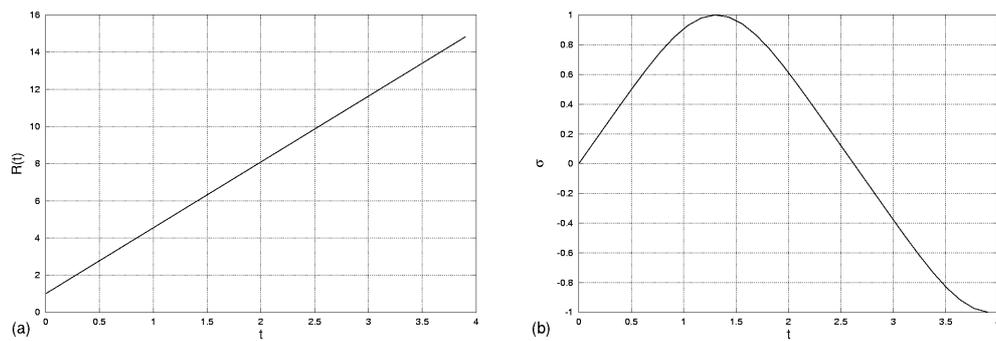


Figure 4.1 – Solutions homogènes pour les figures (4.2) à (4.5) : (a) facteur d'expansion $R(t)$, (b) état de la particule de Gal'tsov-Volkov $\sigma(t)$ ($\rho_0^B = 1.5$, $\epsilon_c = 10^{-1}$, $\sigma_0 = 0$, $\dot{\sigma}_0 = \sqrt{\frac{2}{3}\rho_0^B - \sigma_0^4} = 1$, $w = 0.3$, $\Delta\chi = 7 \times 10^{-2}$, $\Delta t = 10^{-7}$)

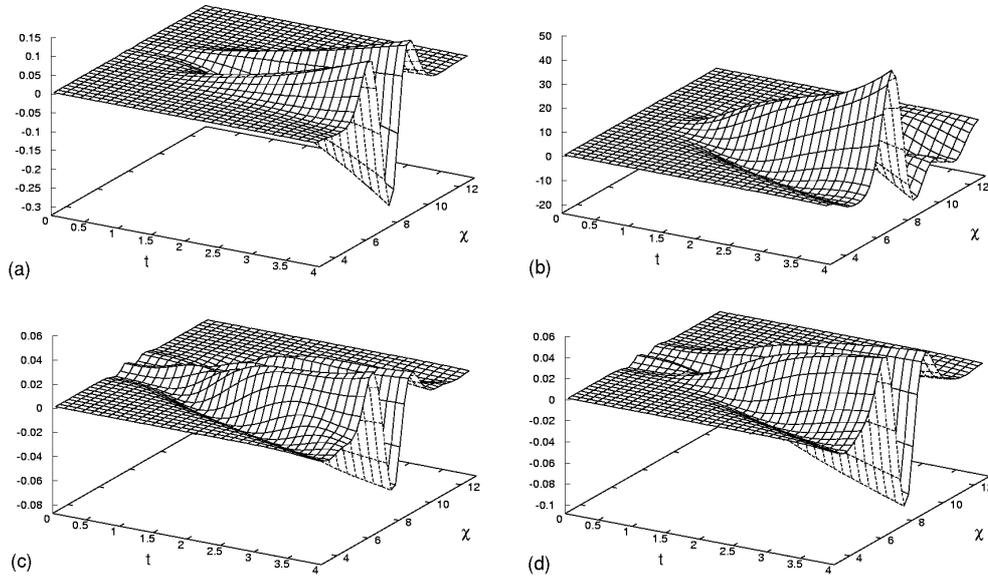


Figure 4.2 – Perturbations de la géométrie : (a) $e^\mu - R(t) = (m - 1) R(t)$ (b) $e^{2\lambda} - R^2(t)\chi^2 = (l - 1) R^2(t)\chi^2$ (c) $\pi_m - \dot{R}$ (d) $\pi_l - \dot{R}$ (mêmes paramètres qu'à la figure 4.1)

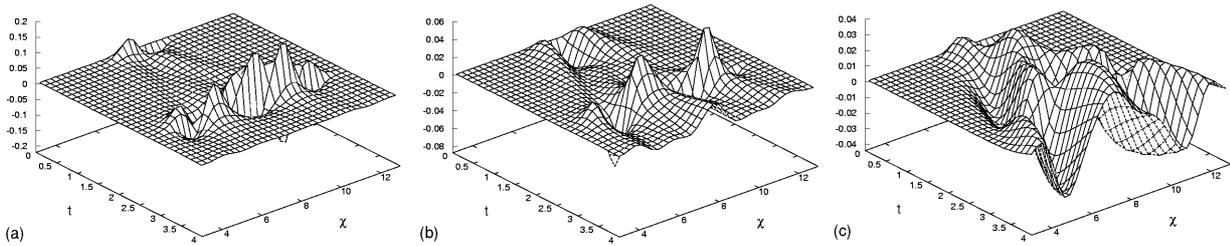


Figure 4.3 – Perturbations des potentiels de jauge : (a) composante électrique ($a - a^B$) (b) composante magnétique radiale ($b - b^B$) (c) composante magnétique angulaire ($c - c^B$) (mêmes paramètres qu'à la figure 4.1)

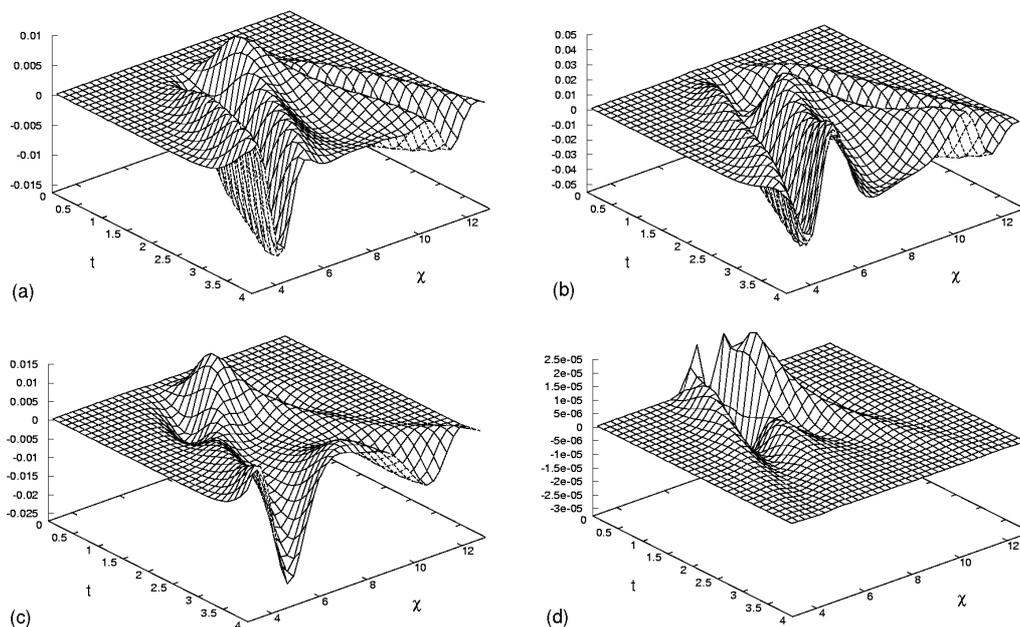


Figure 4.4 – Contrastes de densité et de pressions, ainsi que la composante non diagonale du tenseur énergie-impulsion : (a) $\frac{-T_0^0}{\rho^B} - 1$ (b) $\frac{3T_1^1}{\rho^B} - 1$ (c) $\frac{3T_2^2}{\rho^B} - 1$ (d) $-T_0^1$ (mêmes paramètres qu'à la figure 4.1)

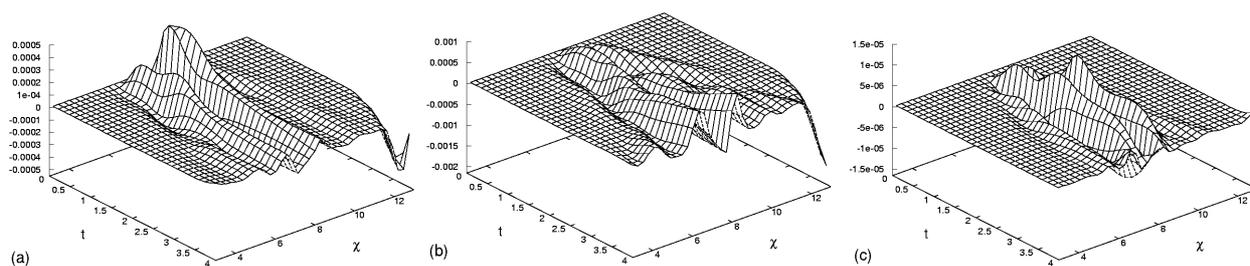


Figure 4.5 – Evolution des contraintes. (a) \mathcal{H} (b) \mathcal{H}_1 (c) \mathcal{G}^3 (mêmes paramètres qu'à la figure 4.1)

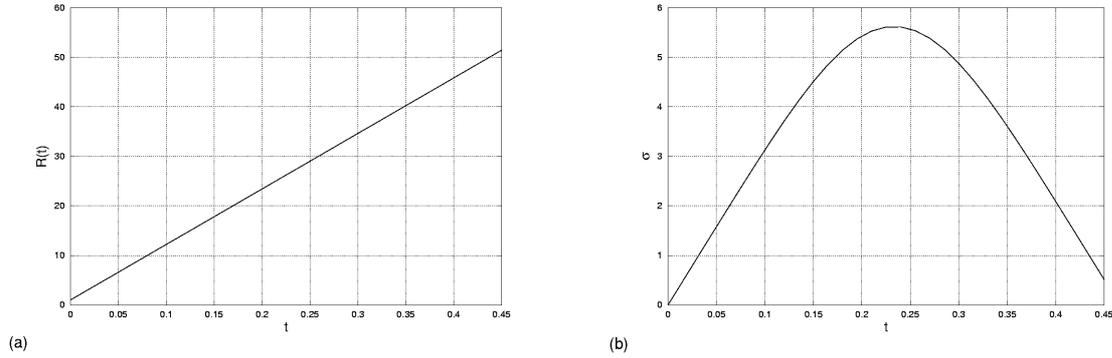


Figure 4.6 – Solutions homogènes pour les figures (4.7) à (4.10) : (a) facteur d'expansion $R(t)$, (b) état de la particule de Gal'tsov-Volkov $\sigma(t)$ ($\rho_0^B = 1.5 \times 10^3$, $\epsilon_b = 10^{-3}$, $\sigma_0 = 0$, $\dot{\sigma}_0 = \sqrt{\frac{2}{3}\rho_0^B - \sigma_0^4} \approx 31.6$, $w = 0.4$, $\Delta\chi = 9.3 \times 10^{-2}$, $\Delta t = 10^{-6}$)

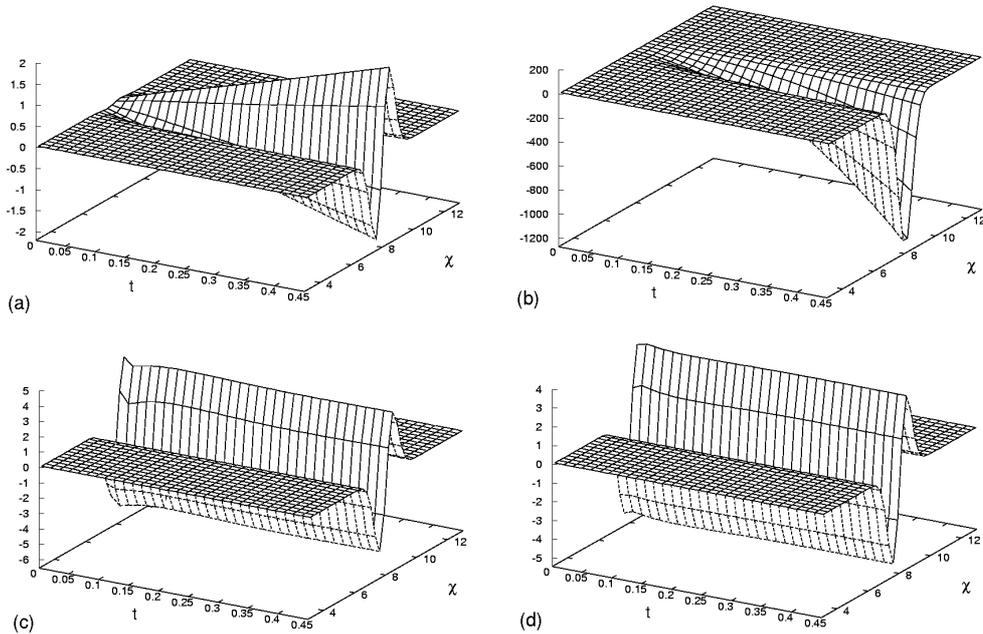


Figure 4.7 – Perturbations de la géométrie : (a) $e^\mu - R(t) = (m - 1) R(t)$ (b) $e^{2\lambda} - R^2(t)\chi^2 = (l - 1) R^2(t)\chi^2$ (c) $\pi_m - \dot{R}$ (d) $\pi_l - \dot{R}$ (mêmes paramètres qu'à la figure 4.6)

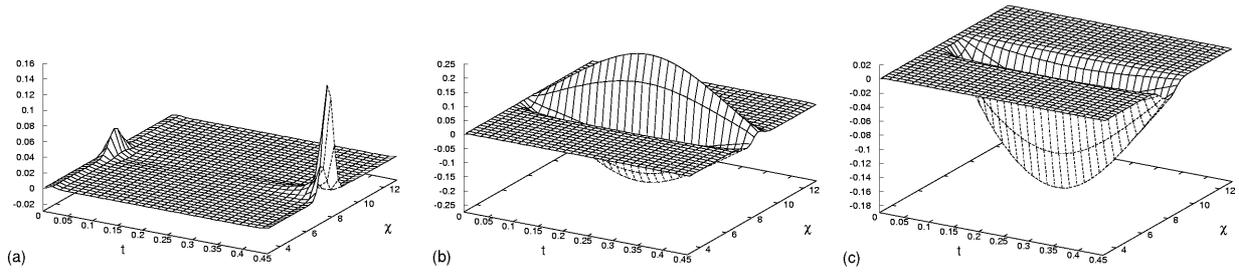


Figure 4.8 – Perturbations des potentiels de jauge : (a) composante électrique ($a - a^B$) (b) composante magnétique radiale ($b - b^B$) (c) composante magnétique angulaire ($c - c^B$) (mêmes paramètres qu'à la figure 4.6)

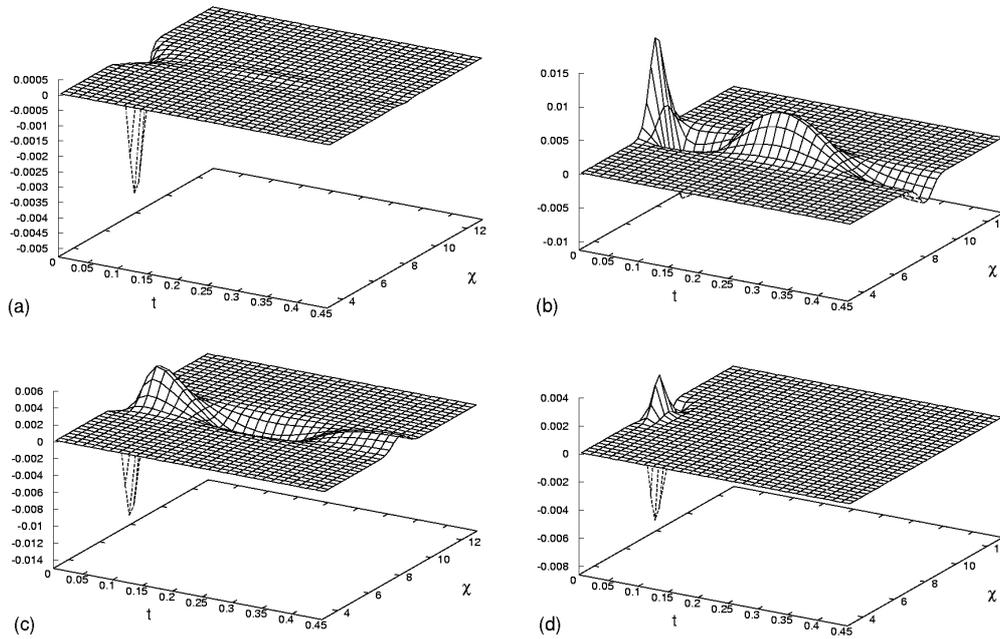


Figure 4.9 – Contrastes de densité et de pressions, ainsi que la composante non diagonale du tenseur énergie-impulsion : (a) $\frac{-T_0^0}{\rho^B} - 1$ (b) $\frac{3T_1^1}{\rho^B} - 1$ (c) $\frac{3T_2^2}{\rho^B} - 1$ (d) $-T_0^1$ (mêmes paramètres qu'à la figure 4.6)

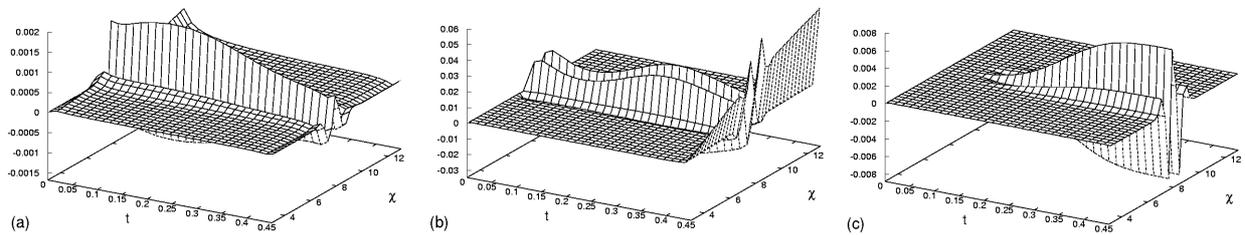


Figure 4.10 – Evolution des contraintes. (a) \mathcal{H} (b) \mathcal{H}_1 (c) \mathcal{G}^3 (mêmes paramètres qu'à la figure 4.6)

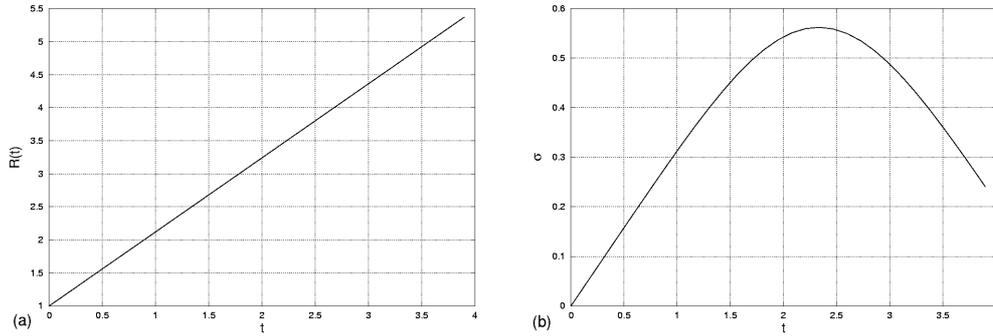


Figure 4.11 – Solutions homogènes pour les figures (4.12) à (4.15) : (a) facteur d'expansion $R(t)$, (b) état de la particule de Gal'tsov-Volkov $\sigma(t)$ ($\rho_0^B = 1.5 \times 10^{-1}$, $\epsilon_a = 10^{-3}$, $\sigma_0 = 0$, $\dot{\sigma}_0 = \sqrt{\frac{2}{3}\rho_0^B - \sigma_0^4} \approx 0.316$, $w = 0.1$, $\Delta\chi = 9.3 \times 10^{-2}$, $\Delta t = 10^{-7}$)

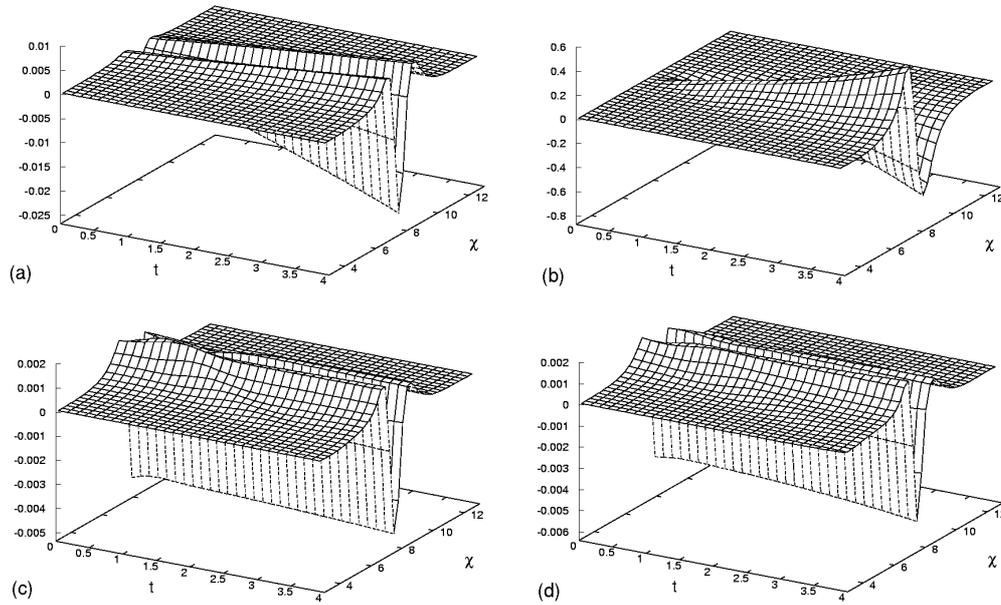


Figure 4.12 – Perturbations de la géométrie : (a) $e^\mu - R(t) = (m - 1) R(t)$ (b) $e^{2\lambda} - R^2(t)\chi^2 = (l - 1) R^2(t)\chi^2$ (c) $\pi_m - \dot{R}$ (d) $\pi_l - \dot{R}$ (mêmes paramètres qu'à la figure 4.11)

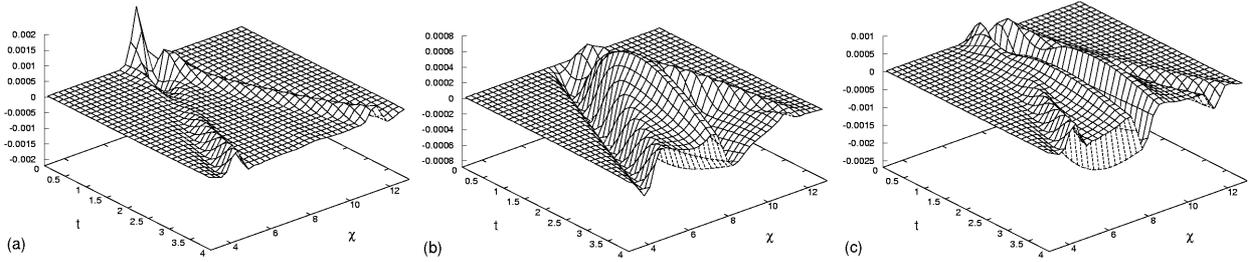


Figure 4.13 – Perturbations des potentiels de jauge : (a) composante électrique ($a - a^B$) (b) composante magnétique radiale ($b - b^B$) (c) composante magnétique angulaire ($c - c^B$) (mêmes paramètres qu'à la figure 4.11)

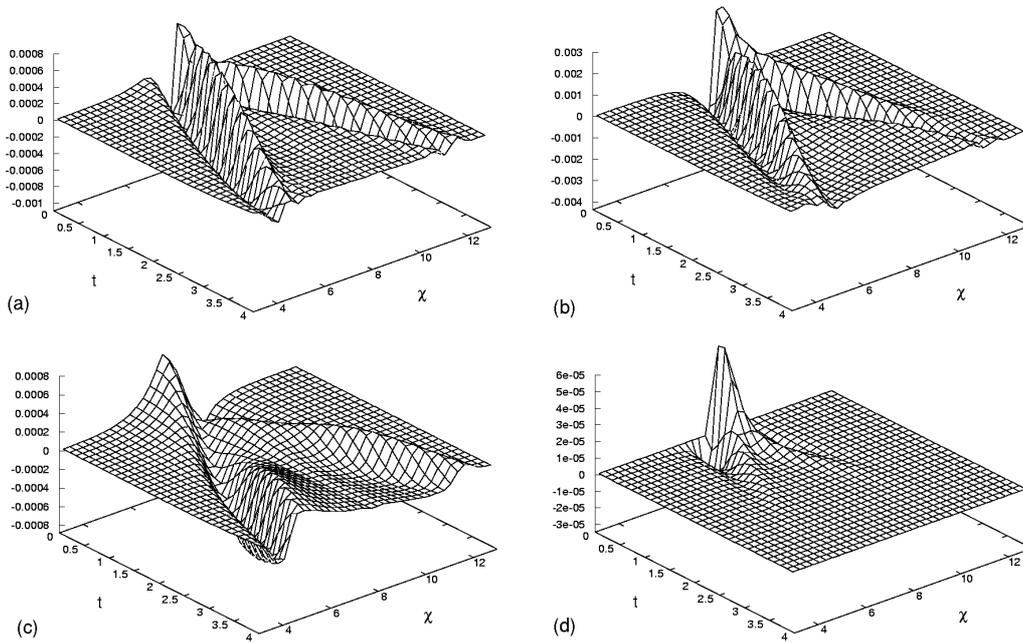


Figure 4.14 – Contrastes de densité et de pressions, ainsi que la composante non diagonale du tenseur énergie-impulsion : (a) $\frac{-T_0^0}{\rho^B} - 1$ (b) $\frac{3T_1^1}{\rho^B} - 1$ (c) $\frac{3T_2^2}{\rho^B} - 1$ (d) $-T_0^1$ (mêmes paramètres qu'à la figure 4.11)

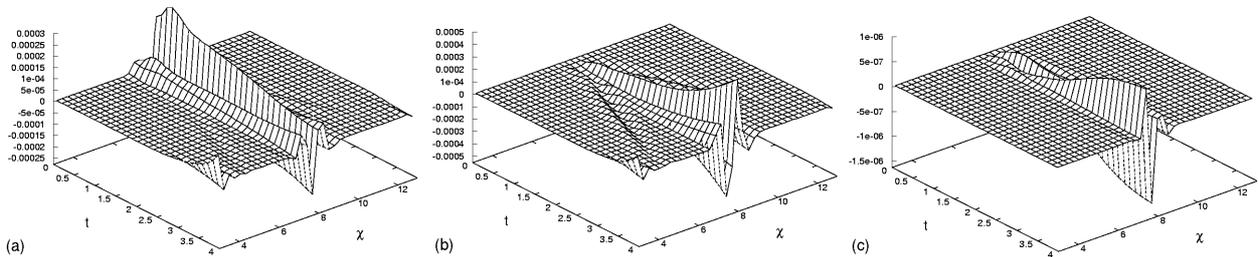


Figure 4.15 – Evolution des contraintes. (a) \mathcal{H} (b) \mathcal{H}_1 (c) \mathcal{G}^3 (mêmes paramètres qu'à la figure 4.11)

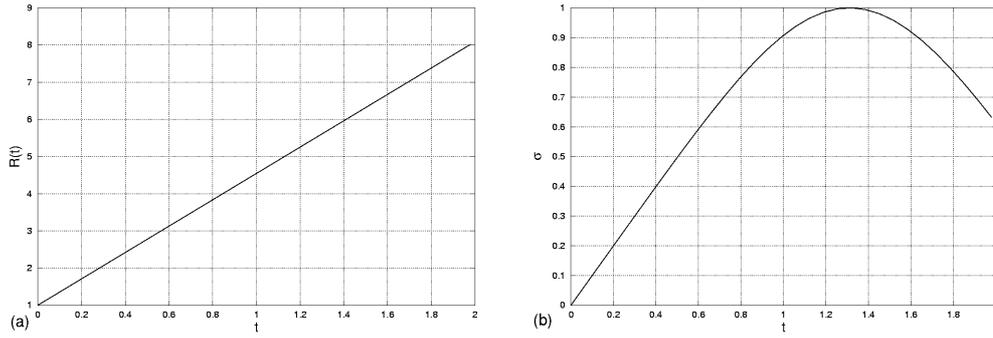


Figure 4.16 – Solutions homogènes pour les figures (4.17) à (4.20) : (a) facteur d'expansion $R(t)$, (b) état de la particule de Gal'tsov-Volkov $\sigma(t)$ ($\rho_0^B = 1.5$, $\epsilon_a = 10^{-3}$, $\sigma_0 = 0$, $\dot{\sigma}_0 = \sqrt{\frac{2}{3}\rho_0^B - \sigma_0^4} = 1$, $w = 0.5$, $\Delta\chi = 9.3 \times 10^{-2}$, $\Delta t = 10^{-7}$)

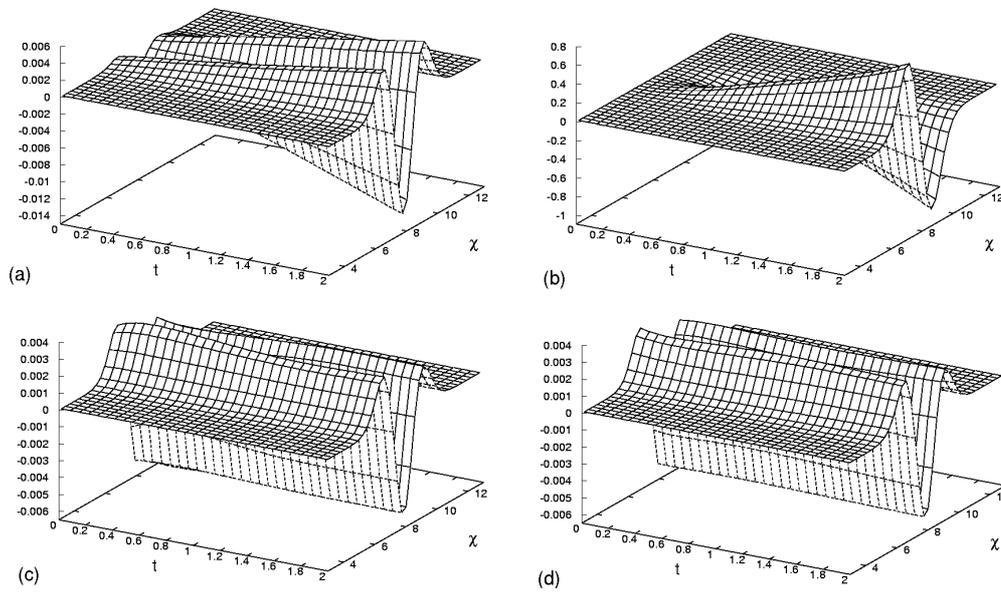


Figure 4.17 – Perturbations de la géométrie : (a) $e^\mu - R(t) = (m - 1) R(t)$ (b) $e^{2\lambda} - R^2(t)\chi^2 = (l - 1) R^2(t)\chi^2$ (c) $\pi_m - \dot{R}$ (d) $\pi_l - \dot{R}$ (mêmes paramètres qu'à la figure 4.16)

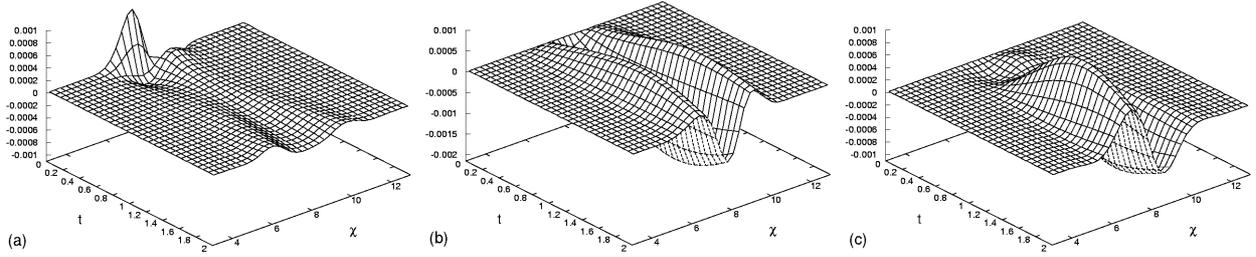


Figure 4.18 – Perturbations des potentiels de jauge : (a) composante électrique ($a - a^B$) (b) composante magnétique radiale ($b - b^B$) (c) composante magnétique angulaire ($c - c^B$) (mêmes paramètres qu'à la figure 4.16)

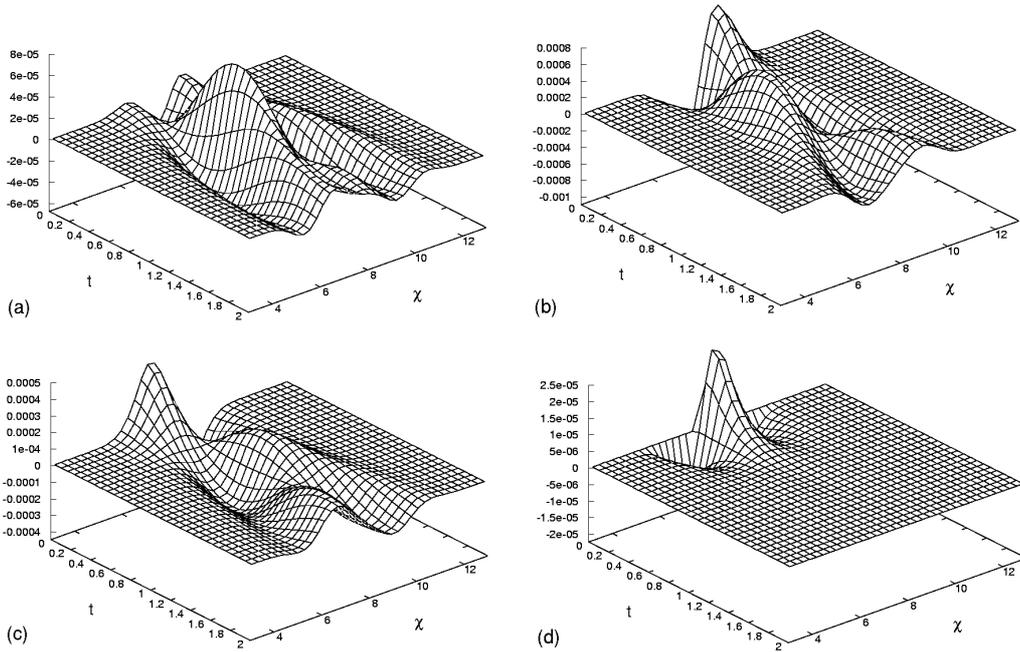


Figure 4.19 – Contrastes de densité et de pressions, ainsi que la composante non diagonale du tenseur énergie-impulsion : (a) $\frac{\rho^B - 1}{\rho^B}$ (b) $\frac{3T_1^1}{\rho^B} - 1$ (c) $\frac{3T_2^2}{\rho^B} - 1$ (d) $-T_0^1$ (mêmes paramètres qu'à la figure 4.16)

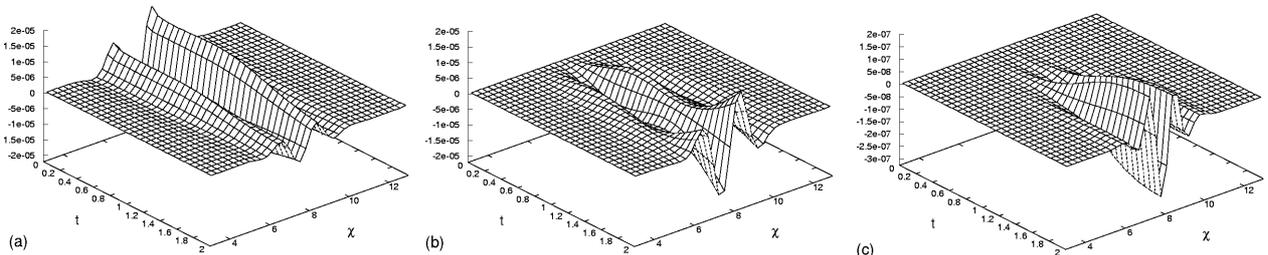


Figure 4.20 – Evolution des contraintes. (a) \mathcal{H} (b) \mathcal{H}_1 (c) \mathcal{G}^3 (mêmes paramètres qu'à la figure 4.16)

Annexe E

Liste des publications

- A. FÜZFA, R. JACOBSSON, ” *About the Use of a Neural Network in the Analysis of $e^+e^- \rightarrow Z^0 Z^0 \rightarrow q\bar{q}\nu\bar{\nu}$* ”, Rapport interne du CERN : DELPHI 2000-026 PHYS851.
- A. MOUSSIAUX, A. FÜZFA, D. LAMBERT, ” *A Toy Model for a Cosmologically Active Body*”, Revue des Questions scientifiques, **172**, 2001, pp. 393-407.
- A. FÜZFA, J.-M. GERARD et D. LAMBERT, ” *The Lemaître-Schwarzschild Problem Revisited*”, General Relativity and Gravitation, **34** (9), 2002, pp. 1411–1422, gr-qc/0109097.
- A. KANFON, A. FÜZFA, D. LAMBERT, ” *Some Examples of Exponentially Harmonic Maps*”, Journal of Physics A, **35**, pp. 7629–7639.
- A. FÜZFA, D. LAMBERT, ” *Evolution of Density Fluctuations in a Universe Dominated by $su(2)$ -valued Yang-Mills Fields*, in ”Astronomy, Cosmology and Fundamental Physics, Proceedings of the ESO/CERN/ESA Symposium Held in Garching, Germany, 4-7 March 2002”, éditeurs : P.A. SHAVER, L. DiLELLA et A. GIMÉNEZ, Springer, Heidelberg, 2003, pp. 446–448.
- A. FÜZFA, ” *Gravitational Instability of Yang-Mills Cosmologies*”, Classical and Quantum Gravity, **20** (22), 2003, pp. 4753–4774, gr-qc/0310032.

Bibliographie

- [ADM59] R. ARNOWITT, A.S. DESER, et C.W. MISNER. *Dynamical Structure and Definition of Energy in General Relativity*. *Physical Review*, 116(5) :1322–1330, 1959.
- [ADM62] R. ARNOWITT, A.S. DESER, et C.W. MISNER. *The Dynamics of General Relativity*. In L. WITTEN, éditeur, *Gravitation : An Introduction to Current Research*, pages 227–265, New York, 1962. Wiley.
- [AND70] H. ANDRILLAT. *Introduction à l’Etude des Cosmologies*. Armand Colin, Paris, 1970.
- [AS93] J.M. ALIMI et H. SCHOLL. *Formation of large-scale structures of the Universe on Connection-machine 2*. *International Journal of Modern Physics C*, 4 :197, 1993.
- [BBFO01] P. BODE, N.A. BAHCALL, E.B. FORD, et J.P. OSTRICKER. *Evolution of the Cluster Mass Function : Gpc³ Dark Matter Simulations*. *Astrophysical Journal*, 551 :15, 2001. astro-ph/0011376.
- [BCMN72] B. K. BERGER, D. M. CHITRE, V.E. MONCRIEF, et Y. NUTKU. *Hamiltonian Formulation of Spherically Symmetric Gravitational Fields*. *Physical Review D*, 5(10) :2467–2470, 1972.
- [BD61] C. BRANS et R.H. DICKE. *Mach’s Principle and a Relativistic Theory of Gravitation*. *Physical Review*, 124 :925, 1961.
- [BF78] P.G. BERGMANN et E.J. FLAHERTY. *Symmetry in Gauge Theories*. *Journal of Mathematical Physics*, 19(1) :212–214, 1978.
- [BJCC79] H. BOUTALEB-JOUTEI, A. CHAKRABARTI, et A. COMTET. *Gauge Field Configurations in Curved Spacetime I*. *Physical Review D*, 20 :1884–1897, 1979.
- [BL98] J. D. BARROW et J. LEVIN. *Chaos in the Einstein-Yang-Mills Equations*. *Physical Review Letters*, 80 :656–659, 1998.
- [BM88] R. BARTNIK et J. MCKINNON. *Particlelike Solutions of the Einstein-Yang-Mills Equations*. *Physical Review Letters*, 61 :141–144, 1988.

- [BM91] O. BERTOLAMI et J.M. MOURAO. *The Ground State Wavefunction of a Radiation-Dominated Universe*. *Classical and Quantum Gravity*, 8 :1271–1282, 1991.
- [BM92] C. BONA et J. MASSÓ. *Hyperbolic Evolution System for Numerical Relativity*. *Physical Review Letters*, 68(8) :1097–1099, 1992.
- [BM99] P. BRAX et J. MARTIN. *Quintessence and Supergravity*. *Physics Letters B*, 468 :40–45, 1999. astro-ph/9905040.
- [BM00] P. BRAX et J. MARTIN. *The Robustness of Quintessence*. *Physical Review D*, 61 :103502, 2000. astro-ph/9912046.
- [BMPV91] O. BERTOLAMI, J.M. MOURAO, R.F. PICKEN, et I.B. VOLOBUJEV. *Dynamics of Euclidenized Einstein-Yang-Mills Systems with Arbitrary Gauge Groups*. *International Journal of Modern Physics*, 6 :4149–4180, 1991.
- [BMR00] P. BRAX, J. MARTIN, et A. RIAZUELO. *Exhaustive Study of Cosmic Microwave Background Anisotropies in Quintessential Scenarios*. *Physical Review D*, 62 :103505, 2000. astro-ph/0005428.
- [BUR84] J. BURZLAFF. *A Classical Lump in $SU(2)$ Gauge Theory with a Higgs Doublet*. *Nuclear Physics B*, 233 :262–268, 1984.
- [CdA94] M. CAVAGLIA et V. de ALFARO. *On a Quantum Miniuniverse filled with Yang-Mills Radiation*. *Modern Physics Letters A*, 9 :569–577, 1994.
- [CDDJ01] A. CHAMORRO, S.S. DESHINGKAR, I.H. DWIVEDI, et P.S. JOSHI. *A Tolman-Bondi-Lemaitre Cell-Model for the Universe and Gravitational Collapse*. *Physical Review D*, 63 :084018, 2001.
- [CJ78] J. CERVERO et L. JACOBS. *Classical Yang-Mills Fields in a Robertson-Walker Universe*. *Physics Letters B*, 78 :427–429, 1978.
- [COU02] S. COURTY. *Structuration et propriétés thermodynamiques de la matière baryonique dans l'Univers : de l'origine physique du biais cosmologique*. Thèse de Doctorat, Université de Paris 11, Laboratoire de l'Univers et de ses Théories, Observatoire de Paris-Meudon, Paris, Octobre 2002.
- [CT76] P. CORDERO et C. TEITELBOIM. *Hamiltonian Treatment of the Spherically Symmetric Einstein-Yang-Mills System*. *Annals of Physics*, 100 :607–631, 1976.
- [CTDL73] C. COHEN-TANNOUJJI, B. DIU, et F. LALOE. *Mécanique Quantique*. Hermann, Paris, 1973. chapitre VI, § D.
- [DEL97] B. DELAMOTTE. *Un soupçon de théorie des groupes : groupe des rotations et groupe de Poincaré*. Paris, 1997. Notes de cours du D.E.A.

- 'Champs, Particules, Matières' (1995-1996), Université Paris 7- Denis Diderot, Université Paris 6 - Pierre et Marie Curie.
- [DEM91] J. DEMARET. *Univers. Les théories de la cosmologie contemporaine*. Le Mail, 1991.
- [DGZZ02] V.V. DYADICHEV, D.V. GAL'TSOV, A. G. ZORIN, et M. YU. ZOTOV. *Non-Abelian Born-Infeld Cosmology*. *Physical Review D*, 65 :084007, 2002.
- [DIN94] S.X. DING. *Cosmological Sphaleron from Real Tunneling and its Fate*. *Physical Review D*, 50 :3755–3759, 1994.
- [DK96] B.K. DARIAN et H.P. KUNZLE. *Axially-symmetric Bianchi I Yang-Mills Cosmology as a Dynamical System*. *Classical and Quantum Gravity*, 13 :2651–2662, 1996.
- [DK97] B.K. DARIAN et H.P. KUNZLE. *Cosmological Einstein-Yang-Mills Equations*. *Journal of Mathematical Physics*, 38 :4696–4713, 1997.
- [EGH80] T. EGUCHI, P.B. GILKEY, et A.J. HANSON. *Gravitation, Gauge Theories and Differential Geometry*. *Physics Reports*, 66(6) :213–393, 1980.
- [EIN16] A. EINSTEIN. *Die Grundlage der allgemeinen Relativitätstheorie*. *Annalen der Physik*, 49, 1916.
- [ELWM52] A. EINSTEIN, H.A. LORENTZ, H. WEYL, et H. MINKOWSKI. *The Principle of Relativity*. Dover, 1952.
- [FEL81] B. FELSAGER. *Geometry, Particles and Fields*. Odense University Press, Odense, 1981.
- [FGL02] A. FUZFA, J.-M. GERARD, et D. LAMBERT. *The Lemaître-Schwarzschild Problem Revisited*. *General Relativity and Gravitation*, 34(9) :1411–1422, 2002.
- [FL03] A. FUZFA et D. LAMBERT. *Evolution of Density Fluctuations in a Universe Dominated by $su(2)$ -valued Yang-Mills Fields*. In P.A. SHAVER, L. DiLELLA, et A. GIMÉNEZ, éditeurs, *Astronomy, Cosmology and Fundamental Physics, Proceedings of the ESO/CERN/ESA Symposium Held in Garching, Germany, 4-7 March 2002*, pages 446–448, Heidelberg, 2003. Springer.
- [FLS89] R. FEYNMAN, R. LEIGHTON, et M. SANDS. *The Feynman lectures on physics*. Addison Wesley, 1989.
- [FM80] P. FORGACS et N.S. MANTON. *Space-Time Symmetries in Gauge Theories*. *Communications in Mathematical Physics*, 72 :15–35, 1980.
- [FUZ03] A. FUZFA. *Gravitational Instability of Yang-Mills Cosmologies*. *Classical and Quantum Gravity*, 20(22) :4753–4774, 2003.

- [GAI01] J. R. GAIR. *Spherical Universes with Anisotropic Pressure*. *Classical and Quantum Gravity*, 18 :4897–4920, 2001.
- [GOV95] J. GOVAERTS. *L'interaction électrofaible : une fenêtre sur la physique au-delà du Modèle Standard*. In *Proceedings of the "Ecole internationale Joliot-Curie de Physique Nucléaire" Noyaux en Collisions*, Maubuisson (France), 1995. Publication de l'Université Catholique de Louvain : UCL-IPN-95-P02.
- [GS94] G.W. GIBBONS et A.R. STEIF. *Yang-Mills Cosmologies and Collapsing Gravitational Sphalerons*. *Physics Letters B*, 320 :245–252, 1994.
- [GUT81] A.H. GUTH. *Inflationary universe : A possible solution to the horizon and flatness problems*. *Physical Review D*, 23(2) :347–356, 1981.
- [GV91] D.V. GAL'TSOV et M.S. VOLKOV. *Yang-Mills Cosmology. Cold matter for a Hot Universe*. *Physics Letters B*, 256(1) :17–21, 1991.
- [GV99] D.V. GAL'TSOV et M.S. VOLKOV. *Gravitating Non-Abelian Solitons and Black Holes with Yang-Mills Fields*. *Physics Reports*, 319 :1–83, 1999.
- [HAG02] K. HAGIWARA et al. *The Review of Particle Physics. §17. Experimental tests of gravitational theory*. *Physical Review D*, 66 :010001–1, 2002. Disponible en ligne à l'adresse : <http://pdg.lbl.gov>.
- [HAW79] S. HAWKING. *The path-integral approach to quantum gravity*. In S. HAWKING et W. ISRAEL, éditeurs, *General Relativity*, Cambridge, 1979. Cambridge University Press.
- [HE73] S.W. HAWKING et G.F.R. ELLIS. *The Large Scale Structure of Space-Time*. Cambridge University Press, London, 1973.
- [HEN82] M. HENNEAUX. *Remarks on Spacetime Symmetries and Non-Abelian Gauge Fields*. *Journal of Mathematical Physics*, 23(5) :830–833, 1982.
- [HES87] H. HESHENG. *Non Existence Theorems for Yang-Mills Fields and Harmonic Maps in the Schwarzschild Spacetime*. *Letters in Mathematical Physics*, 14 :253–262, 1987.
- [HL85] C. HELLABY et K. LAKE. *Shell Crossings and the Tolman Model I*. *The Astrophysical Journal*, 290 :381–387, 1985.
- [HOS84] Y. HOSOTANI. *Exact Solution of Einstein-Yang-Mills Equations*. *Physics Letters B*, 147 :44–46, 1984.
- [HS97] L. HERRERA et N.O. SANTOS. *Local Anisotropy in Self-gravitating Systems*. *Physics Reports*, 286 :53–130, 1997.

- [ISR67] W. ISRAEL. *Event Horizons in Static Vacuum Space-Times*. *Physical Review*, 164 :1776–1779, 1967.
- [JON98] H.F. JONES. *Groups, Representations and Physics*. Institute of Physics publishing, Bristol, 1998. Seconde édition.
- [KB89] J. KUNZ et Y. BRIHAYE. *New Sphalerons in the Weinberg-Salam Theory*. *Physics Letters B*, 216 :353–359, 1989.
- [KH02] A. KRASINSKI et C. HELLABY. *Structure Formation in the Lemaître-Tolman model I*. *Physical Review D*, 65 :023501, 2002.
- [KH03a] A. KRASINSKI et C. HELLABY. *Formation of a galaxy with a central black hole in the Lemaitre-Tolman model*. 2003. gr-qc/0309119.
- [KH03b] A. KRASINSKI et C. HELLABY. *More examples of structure formation in the Lemaître-Tolman model*. 2003. gr-qc/0303016.
- [KK97] B. KLEIHAUS et J. KUNZ. *Static Black Holes with Axial Symmetry*. *Physical Review Letters*, 79 :1595–1598, 1997.
- [KKLM95] D. KAPETANAKIS, G. KOUTSOUMBAS, A. LUKAS, et P. MAYR. *Quantum Cosmology with Yang-Mills Fields*. *Nuclear Physics B*, 433 :435–466, 1995.
- [KOU95] Y.B. KOUAGOU. *Sur le système Einstein-Yang-Mills*. Mémoire de Maîtrise (D.E.A.), Institut de Mathématiques et de Sciences Physiques en collaboration avec l'Université Catholique de Louvain, Porto-Novo (Bénin), 1995. Non publié.
- [KRA97] A. KRASINSKI. *Inhomogeneous Cosmological Models*. Cambridge University Press, Cambridge, 1997.
- [KT90] E.W. KOLB et M.S. TURNER. *The Early Universe*. Addison Wesley, 1990.
- [LAF97] C. LAFORGE. *Etude des Systèmes avec Contraintes : Algorithme de Dirac-Bergmann pour les Théories Classiques et Extension au formalisme A.D.M. pour la Relativité Générale*. Juin 1997. Mémoire de Licence en Sciences Physiques, non publié.
- [LAM99] D. LAMBERT. *Symétries formelles, mathématiques profondes et réalité*. In G. COHEN-TANNOUDJI, éditeur, *Actes de la 4ème rencontre "Physique et interrogations fondamentales"*, Paris, 1999. EDP Sciences.
- [LBH03] E.L. LOKAS, P. BODE, et Y. HOFFMAN. *Cluster mass functions in the quintessential Universe*. 2003. astro-ph/0309485.
- [LEM33] G. LEMAÎTRE. *L'Univers en Expansion*. *Annales de la Société Scientifique de Bruxelles*, A 53 :51–85, 1933. Réimprimé en 1997 dans *General Relativity and Gravitation* 29 p. 641.

- [LIN84] A.D. LINDE. *The inflationary universe*. *Reports on Progress in Physics*, 47 :925–986, 1984.
- [LL61] L.D. LANDAU et E.M. LIFSHITZ. *The Classical Theory of Fields*. Pergamon Press, 1961.
- [MCBW99] C.-P. MA, R.R. CALDWELL, P. BODE, et L. WANG. *The Mass Power Spectrum in Quintessence Cosmological Models*. *Astrophysical Journal*, 521 :L1, 1999. astro-ph/9906174.
- [MDT83] A. MOUSSIAUX, J. DEMARET, et P. TOMBAL. *Algebraic Programming of Hamiltonian Formalism in General Relativity : Application to Inhomogeneous Space-Times*. *General Relativity and Gravitation*, 15(3) :209–226, 1983.
- [MM91] P.V. MONIZ et J.M. MOURAO. *Homogeneous and Isotropic Closed Cosmologies with a Gauge Sector*. *Classical and Quantum Gravity*, 8 :1815–1831, 1991.
- [MMS93] P.V. MONIZ, J.M. MOURAO, et P.M. SA. *The Dynamics of a flat Friedmann-Robertson-Walker Inflationary Model in the Presence of Gauge Fields*. *Classical and Quantum Gravity*, 10 :517–534, 1993.
- [MOU96] A. MOUSSIAUX. *Convode : un programme REDUCE pour la résolution des équations différentielles*. Didier Hatier, Bruxelles, 1996. <http://www.physique.fundp.ac.be/administration/convode.html>.
- [MOU98] A. MOUSSIAUX. *Calcul Extérieur et Electromagnétisme*. Namur, 1998. Notes de cours de Diplôme d’Etudes Approfondies, non publiées.
- [MTW73] C.W. MISNER, K.S. THORNE, et J.A. WHEELER. *Gravitation*. W. H. FREEMAN and co., New York, 1973.
- [NAK90] M. NAKAHARA. *Geometry, Topology and Physics*. Institute of Physics publishing, Bristol, 1990.
- [NS83] C. NASH et S. SEN. *Topology and Geometry for Physicists*. Academic Press, Bristol, 1983.
- [PEE80] P.J.E. PEEBLES. *The Large-Scale Structure of the Universe*. Princeton University Press, Princeton, 1980.
- [PEE93] P. J. E. PEEBLES. *Principles of Physical Cosmology*. Princeton University Press, Princeton, 1993.
- [PER99] S. PERLMUTTER et al. *Measurements of Ω and Λ from 42 high-redshift supernovae*. *The Astrophysical Journal*, 517 :565, 1999.
- [PR03] P.J.E. PEEBLES et B. RATRA. *The Cosmological Constant and Dark Energy*. *Review of Modern Physics*, 75 :559–606, 2003.

- [PS95] M.E. PESKIN et D.V. SCHROEDER. *An introduction to Quantum Field Theory*. Perseus Books, 1995.
- [PTVF92] W.H. PRESS, S.A. TEUKOLSKY, W.T. VETTERLING, et B.P. FLANERY. *Numerical Recipes in Fortran. The Art of Scientific Computing*. Cambridge University Press, Cambridge, second edition, 1992.
- [PTW99] S. PERLMUTTER, M.S. TURNER, et M. WHITE. *Constraining dark energy with SNe Ia and large-scale structure*. *Physical Review Letters*, 83 :670–673, 1999.
- [PV99] P.J.E. PEEBLES et A. VILENKIN. *Quintessential Inflation*. *Physical Review D*, 59 :063505, 1999. astro-ph/9810509.
- [REU98] O. REULA. *Hyperbolic Methods for Einstein's Equations*. *Living Reviews in Relativity*, 1, 1998.
- [ROL94] W.B. ROLNICK. *The Fundamental Particles and their Interactions*. Addison Wesley, 1994.
- [RP88] B. RATRA et P.J.E. PEEBLES. *Cosmological consequences of a rolling homogeneous scalar field*. *Physical Review D*, 37(12) :3406–3427, 1988.
- [RT97] G. RUDOLPH et T. TOK. *A Certain Class of Einstein-Yang-Mills Systems*. *Reports in Mathematical Physics*, 39 :433–446, 1997.
- [SCH99] C. SCHEEN. *Structure Analytique des Solutions Chaotiques de Modèles Cosmologiques Relativistes Homogènes*. Thèse de Doctorat, Université de Liège, Institut d'Astrophysique et de Géophysique, Liège, Mars 1999.
- [SCK00] V.K. SHCHIGOLEV, S. V. CHERVON, et O.V. KUDASOVA. *Exact Inhomogeneous Cosmological Models with Yang-Mills Fields*. *General Relativity and Gravitation*, 32(1) :41–51, 2000.
- [SD85] S. SINZINKAO et J. DEMARET. *On Solutions of Einstein-Yang-Mills Equations with (maximal) Conformal subsymmetries*. *General Relativity and Gravitation*, 17 :187–201, 1985.
- [SS99] E. SEIDEL et W. SUEN. *Numerical Relativity as a Tool for Computational Astrophysics*. *Journal of Computational and Applied Mathematics*, 109 :493–525, 1999.
- [SUN82] K. SUNDERMEYER. *Constrained Dynamics, with applications to Yang-Mills theory, general relativity, classical spin, dual string model*. Springer-Verlag, Heidelberg, 1982.
- [SW93] J.A. SMOLLER et A.G. WASSERMAN. *Existence of Infinitely Many Smooth, Static, Global Solutions of the Einstein-Yang-Mills Equations*. *Communications in Mathematical Physics*, 151 :303–325, 1993.

- [SW95a] J.A. SMOLLER et A.G. WASSERMAN. *Regular Solutions of the Einstein-Yang-Mills Equations*. *Journal of Mathematical Physics*, 36(8) :4301–4323, 1995.
- [SW95b] J.A. SMOLLER et A.G. WASSERMAN. *Uniqueness of the Extremal Reissner-Nordström Solution in $SU(2)$ Einstein-Yang-Mills Theory for Spherically Symmetric Space-time*. *Physical Review D*, 52 :5812–5815, 1995.
- [SWY93] J.A. SMOLLER, A.G. WASSERMAN, et S.T. YAU. *Existence of Black Hole Solutions for the Einstein-Yang-Mills Equations*. *Communications in Mathematical Physics*, 154 :377–401, 1993.
- [SWYM91] J.A. SMOLLER, A.G. WASSERMAN, S.T. YAU, et J.B. McLEOD. *Smooth Static Solutions of the Einstein-Yang-Mills Equations*. *Communications in Mathematical Physics*, 143 :115–147, 1991.
- [SY78] L. SMARR et J.W. YORK Jr. *Kinematical Conditions in the Construction of Spacetime*. *Physical Review D*, 17 :2529–2551, 1978.
- [TEI76] C. TEITELBOIM. *Lectures on Generalized Hamiltonian Dynamics*. Printemps 1976. Notes d'un cours donné à l'Université de Princeton, non publié.
- [TOL34] R.C. TOLMAN. *Effect of Inhomogeneity on Cosmological Models*. *Proceedings of the National Academy of Sciences of the USA*, 20 :169–176, 1934.
- [TOL50] R.C. TOLMAN. *Relativity, Thermodynamics and Cosmology*. Oxford University Press, Oxford, 1950.
- [VOL94] M.S. VOLKOV. *Einstein-Yang-Mills Sphalerons and Fermion Number Non-conservation*. *Physics Letters B*, 328 :89–97, 1994.
- [WEI72] S. WEINBERG. *Gravitation and Cosmology : Principles and Applications of the General Theory of Relativity*. John Wiley and sons, Inc., New York, 1972.
- [WEY52] H. WEYL. *Space Time Matter*. Dover, 1952.
- [WIT77] E. WITTEN. *Some Exact Multipseudoparticle Solutions of Classical Yang-Mills Theory*. *Physical Review Letters*, 38 :121–124, 1977.
- [YAF90] L. G. YAFFE. *Static Solutions of $SU(2)$ -Higgs Theory*. *Physical Review D*, 40 :3463–3473, 1990.
- [YM54] C.N. YANG et R.L. MILLS. *Conservation of Isotopic Spin and Isotopic Gauge Invariance*. *Physical Review*, 96(1) :191–195, 1954.
- [YOR78] J.W. YORK Jr. *Kinematics and Dynamics of General Relativity*. In L.L. SMARR, éditeur, *Sources of Gravitational Radiation*, Cambridge, 1978. Cambridge University Press.

- [YS01] G. YONEDA et H. SHINKAI. *Constraint Propagation in the Family of ADM Systems*. *Physical Review D*, 63 :124019, 2001.
- [YS02] G. YONEDA et H. SHINKAI. *Advantages of Modified ADM Formulation : Constraint Propagation Analysis of Baumgarte-Shapiro-Shibata-Nakamura System*. *Physical Review D*, 66 :024047, 2002.