

THESIS / THÈSE

MASTER EN SCIENCES MATHÉMATIQUES

Etude du problème des trois corps avec application aux systèmes binaires

AUQUIER, Florence

Award date:
2011

[Link to publication](#)

General rights

Copyright and moral rights for the publications made accessible in the public portal are retained by the authors and/or other copyright owners and it is a condition of accessing publications that users recognise and abide by the legal requirements associated with these rights.

- Users may download and print one copy of any publication from the public portal for the purpose of private study or research.
- You may not further distribute the material or use it for any profit-making activity or commercial gain
- You may freely distribute the URL identifying the publication in the public portal ?

Take down policy

If you believe that this document breaches copyright please contact us providing details, and we will remove access to the work immediately and investigate your claim.



**FACULTES UNIVERSITAIRES NOTRE-DAME DE LA PAIX
NAMUR**

Faculté des Sciences

**ETUDE DU PROBLEME DES TROIS CORPS AVEC APPLICATION AUX
SYSTEMES BINAIRES**

Mémoire présenté pour l'obtention
du grade académique de master en Sciences Mathématiques
Florence AUQUIER
Janvier 2011



**FACULTES UNIVERSITAIRES NOTRE-DAME DE LA PAIX
NAMUR**

Faculté des Sciences

**ETUDE DU PROBLEME DES TROIS CORPS AVEC APPLICATION AUX
SYSTEMES BINAIRES**

Mémoire présenté pour l'obtention
du grade académique de master en Sciences Mathématiques
Promoteur : Anne Lemaître
Directeur : Anne-Sophie Libert
Florence AUQUIER
Janvier 2011

Remerciements

Pour commencer, je remercie ma directrice de mémoire, Madame Anne-Sophie Libert, qui, en collaboration avec ma promotrice, Madame Anne Lemaître, m'a permis d'étudier ce sujet de mécanique céleste, une matière qui m'intéresse spécialement depuis le début de mes études. Ses conseils éclairés et sa disponibilité sans faille m'ont permis d'avancer dans la direction que j'espère la meilleure possible. Je la remercie encore pour avoir bien voulu répondre patiemment et aimablement à mes nombreuses questions.

Mes remerciements vont aussi à Monsieur Nicolas Delsate pour sa précieuse aide informatique ainsi qu'au Professeur Timoteo Carletti pour son cours de Géométrie Symplectique. Je n'aurais pas pu progresser dans ce travail sans les enseignements dispensés par Benoît Noyelles portant sur la Dynamique céleste et Résonances.

Je tiens également à remercier Madame Anne Lemaître et Messieurs Timoteo Carletti et Jean-Charles Delvenne, lecteurs de ce mémoire.

Enfin, je voudrais remercier tout particulièrement ma famille et mes amis pour leur soutien tout au long de la rédaction de ce mémoire.

Abstract

Les systèmes binaires sont des systèmes stellaires dont les étoiles sont liées gravitationnellement et qui représentent une grande partie de la population totale des étoiles. Lorsque ces systèmes possèdent un compagnon planétaire ou stellaire, ils deviennent un domaine d'application important du problème des trois corps. L'approche développée par Eric Ford et ses collaborateurs (Ap. J., 535, 2000), dénommée théorie octupole, peut s'avérer un outil très utile dans l'étude de tels systèmes. L'objectif de ce mémoire est de montrer qu'elle décrit avec précision la dynamique des systèmes triples, quelles que soient les masses des différentes étoiles. Cette approche analytique simplifiée se révèle également efficace dans l'étude des systèmes triples récemment observés : PSR B1620-26 et HD 109648. En conclusion, il résulte de cette étude que la théorie octupole est un excellent outil pour modéliser l'évolution séculaire des systèmes binaires hébergeant un compagnon stellaire ou planétaire.

Mots clés : systèmes binaires - problème des trois corps - Hamiltonien - théorie octupole

Binary systems are star systems in which stars are connected gravitationally and they represent a big part of the total population of stars. When these systems possess a planetary or stellar companion, they become an important area of application of the three-body problem. The theory developed by Eric Ford and his colleagues (Ap. J., 535, 2000), called octupole theory, supplies a very useful tool in the study of such systems. The purpose of this Master's thesis is to show that this theory accurately describes the dynamics of triple systems, whatever the masses of the individual stars are. This simplified analytical approach is also effective in the study of triple systems recently observed : PSR B1620-26 and HD 109648. In conclusion, this study show that the octupole theory turns out to be an excellent tool for modelizing the secular evolution of binary systems hosting a stellar or planetary companion.

Key words : binary systems - three-body problem - Hamiltonian - octupole theory

Table des matières

Introduction	4
1 Systèmes binaires	6
1.1 Introduction	6
1.2 Classification	8
1.3 Systèmes binaires hébergeant une planète	11
2 Problème des trois corps	13
2.1 Equations du mouvement dans un repère quelconque	13
2.2 Réduction du centre de masse	14
2.3 Invariance du moment angulaire total	17
2.4 Formulation hamiltonienne	19
3 Développement du problème hiérarchique	24
3.1 Développement octupole	24
3.2 Equations de la dynamique	27
4 Evolution dynamique des systèmes binaires	31
4.1 Introduction	31
4.2 Problème des trois corps restreint	33
4.2.1 Cas quadrupole	34
4.2.2 Cas octupole	37
4.3 Problème général des trois corps	41
4.3.1 Introduction	41
4.3.2 Faibles inclinaisons mutuelles	42
4.3.3 Inclinaisons mutuelles élevées	46
4.3.4 Approche octupole erronée et discussion sur l'erratum	50
4.4 Etude paramétrique	56
4.5 Conclusion	58
5 Applications aux systèmes binaires récemment observés	59
5.1 Le système PSR B1620-26	59
5.2 Le système HD 109648	65

Conclusion	70
Bibliographie	72
Annexe	73

Introduction

Les systèmes binaires, couples d'étoiles liées gravitationnellement, sont importants. En effet, rares sont les étoiles qui se forment seules. A ce jour, on estime que plus de la moitié d'entre elles font partie de systèmes binaires ou multiples. Depuis la découverte ces dernières années de compagnons planétaires ou même stellaires à ces systèmes, ils sont devenus une application importante du problème des trois corps.

Le but de ce mémoire est d'étudier plus en détails les systèmes binaires ayant un compagnon quelconque (planétaire ou stellaire). Pour ce faire, nous nous basons sur l'article d'Eric Ford¹, Boris Kozinsky et Frederic Rasio (cfr. [1]). Celui-ci présente un développement analytique de la perturbation gravitationnelle entre les trois corps, appelé développement octupole. Ce dernier nous permettra d'analyser la dynamique de divers cas de systèmes binaires accompagnés d'une planète ou d'une étoile.

Le premier chapitre de ce mémoire introduit le concept de système binaire dans le but d'établir les bases du problème étudié tout au long de ce travail. Comme déjà mentionné, la plupart des étoiles font partie de systèmes binaires ou multiples. Il est très rare de rencontrer des étoiles "solitaires". En effet, la grande majorité des étoiles se forment en groupe à partir de la contraction gravitationnelle d'un nuage de gaz, de poussière ou encore d'une nébuleuse (phénomène appelé *accrétion*). Les systèmes binaires sont classés en quatre catégories selon le mode d'observation utilisé pour les détecter : *visuelle*, *spectroscopique*, *astrométrique* et *photométrique*. Depuis quelques années, les techniques de détection nous ont permis de constater que certains systèmes binaires hébergent également un compagnon planétaire.

Dans le chapitre 2, nous établirons les équations du mouvement régissant un problème de trois corps en nous basant sur le cours de *Dynamique Céleste et Résonance* (cfr. [11]). Ces équations sont indispensables à la bonne compréhension des développements que nous ferons dans le chapitre suivant. En effet, elles permettent l'obtention d'une première formulation de l'Hamiltonien décrivant le mouvement d'un système triple. Cet

1. Eric Ford est professeur et chercheur en astronomie à l'université de Floride. Ses domaines de prédilection sont la formation des planètes, l'évolution dynamique des systèmes planétaires et les planètes extrasolaires. Il participe activement aux programmes de recherche de planètes tels que la mission Kepler de la NASA conçue pour trouver des exoplanètes similaires à la Terre. Cette mission fut lancée le 7 mars 2009.

Hamiltonien est obtenu après plusieurs simplifications (réduction du centre de masse et invariance du moment angulaire) dans le but de réduire le nombre de degrés de liberté du problème.

Au cours du chapitre 3, nous introduirons et développerons la théorie octupole en prenant principalement appui sur l'article d'Eric Ford et al. (cfr. [1]). Nous détaillerons les simplifications effectuées sur l'Hamiltonien (obtenu au chapitre 2) pour obtenir le développement octupole. Les équations décrivant la dynamique du problème des trois corps découlant de l'Hamiltonien octupole s'avèrent erronées dans l'article [1] où a été commise une erreur de signe dans un coefficient (C_3). Cette erreur fait d'ailleurs l'objet d'un erratum publié en 2004 (cfr. [5]). Les conséquences de ce changement de signe seront étudiées en détail au chapitre suivant.

Le chapitre 4 a pour but de confronter les observations faites par Ford et son équipe (cfr. [1]) à partir d'intégrations numériques du problème des trois corps complet (courtes périodes incluses) et celles que nous obtenons à partir des intégrations des équations du mouvement (corrigées) de notre approximation analytique. Nous vérifierons l'exactitude de cette approche tant sur un problème des trois corps restreint (où une des masses est considérée comme négligeable) que sur un problème possédant trois corps pour lesquels les masses sont semblables (planétaires ou stellaires). De même nous analyserons l'influence de l'inclinaison mutuelle entre les orbites sur la dynamique du problème.

Pour terminer, dans le chapitre 5, nous étudierons deux systèmes triples récemment observés. Le premier système est PSR B1620-26. Les informations rassemblées concernant ce système proviennent principalement de l'article [1]. Le système PSR B1620-26 est constitué d'une étoile à neutrons tournant très vite sur elle-même (ou pulsar milliseconde) et d'une naine blanche autour desquelles orbite un troisième corps. La nature de ce troisième corps n'est pas encore bien établie. Il s'agirait soit d'une planète géante (telle que Jupiter) ou d'une naine brune. Le second système étudié est le système HD 109648 spectroscopique. Nous avons utilisé à la fois l'article de Ford et al. (cfr. [1]) et l'article de Jha et al. (cfr. [8]) afin de rassembler des informations sur le système HD 109648. Il possède l'une des plus petites périodes orbitales de la binaire proche, ce qui a permis d'obtenir, au cours des années, des mesures précises de ses éléments orbitaux. Ces deux systèmes binaires constituent deux applications intéressantes de notre théorie octupole. Nous montrerons que cette dernière fournit une très bonne approche de la dynamique de tels systèmes et nous permettra de conclure que la théorie octupole est un excellent outil pour modéliser l'évolution séculaire de systèmes triples, quelles que soient les masses de ses différentes étoiles.

Chapitre 1

Systèmes binaires

Dans ce premier chapitre, nous introduisons et expliquons quelque peu la notion de systèmes binaires. La première section retrace la découverte de ceux-ci dans les grandes lignes et souligne la différence qui existe entre *étoiles doubles* et *systèmes binaires*.

Ensuite nous nous intéressons à la classification des étoiles binaires selon les moyens d'observation de celles-ci. En effet, il existe 4 catégories d'étoiles binaires : *visuelles*, *spectroscopiques*, *astrométriques* et *photométriques*. Ces notions seront illustrées au moyen d'exemples appartenant à chaque catégorie.

Enfin nous clôturerons le chapitre par l'étude et la recherche de planètes hébergée par des systèmes binaires. De tels systèmes (étoiles binaires hébergeant une planète) sont un cas particulier du problème des trois corps que nous traiterons analytiquement au chapitre suivant et font l'objet d'études d'une branche à part entière de la science des exoplanètes¹.

1.1 Introduction

Comme leur nom l'indique, les systèmes binaires sont formés d'un couple d'étoiles liées par la gravitation. Ces deux étoiles orbitent autour de leur centre de masse, soit l'endroit où la concentration de masse est la plus élevée (voir figure 1.1). La majorité des étoiles se trouvent dans un système binaire ou multiple (plus de trois étoiles reliées entre elles par la gravitation), d'où le grand intérêt scientifique qu'elles suscitent depuis le XVII^e siècle, et en particulier depuis la découverte des mondes extrasolaires.

1. La majorité des informations rassemblées dans ce chapitre sont issues du livre [6].

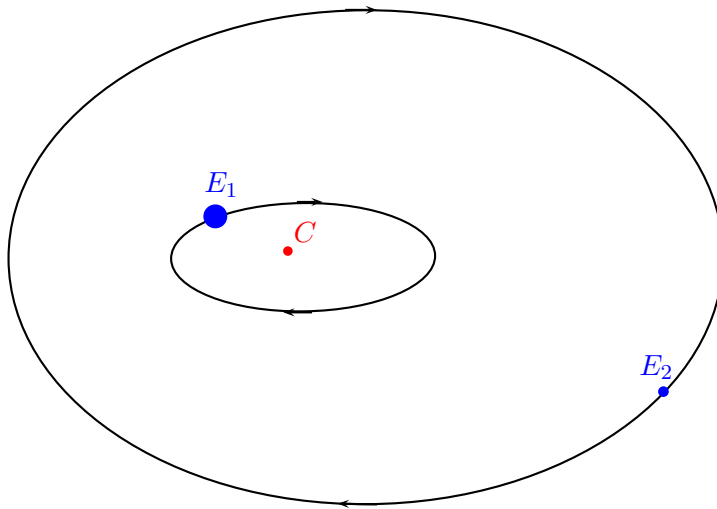


FIGURE 1.1 – Schéma d’un système binaire, composé des étoiles E_1 et E_2 , orbitant autour de son centre de masse C .

L’observation d’*étoiles binaires*, étoiles liées gravitationnellement, se fait depuis très longtemps. Parmi les découvertes les plus anciennes, nous pouvons citer les binaires Mizar et Acrux. Mizar est située dans la constellation de la Grande Ourse et fut découverte en tant que binaire en 1650 par Giovanni Battista Riccioli (et sans doute plus tôt par Benedetto Castelli et Galileo). Acrux (Alpha Crucis), quant à elle, est l’étoile la plus brillante de la constellation de la Croix du Sud et fut découverte par le père Fontenay en 1685.

Le premier à suggérer que les *étoiles doubles*² pourraient être liées physiquement fut John Michell en 1767. William Herschel commença à observer des étoiles doubles et les rassembla dans un catalogue (près de 700 étoiles doubles y étaient reprises). Il les observa sur une période de 25 ans, prouvant ainsi qu’elles devaient faire partie de systèmes binaires. Ce n’est qu’en 1827 que la première orbite d’une binaire (Xi dans la Grande Ourse) a été calculée avec précision par Félix Savary. Depuis ces découvertes, beaucoup d’étoiles doubles ont été répertoriées et mesurées. Par exemple, le Catalogue des étoiles doubles de Washington rassemble plus de 100 000 étoiles doubles (compre- nant des binaires mais aussi des étoiles doubles sans lien physique), seules les orbites d’environ quelques milliers d’entre elles sont connues. Le plus gros souci que posent les étoiles doubles est le temps d’observation nécessaire pour déterminer leur comportement

2. La dénomination *étoile double* est utilisée non seulement pour désigner un système binaire (c’est-à-dire des étoiles liées gravitationnellement) mais aussi pour désigner deux étoiles qui semblent proches vues de la Terre alors qu’elles ne sont pas reliées physiquement.

et pouvoir ainsi infirmer ou confirmer le lien gravitationnel entre les deux étoiles.

La recherche de systèmes binaires est très utile en astrophysique dans le cadre de la détermination des masses des étoiles constituant le système. Ces masses permettent ensuite d'estimer des paramètres stellaires ainsi que de déterminer la masse d'étoiles simples en faisant la comparaison entre masse et luminosité des étoiles du système binaire et masse et luminosité de l'étoile simple via la relation masse-luminosité (MLR).

1.2 Classification

Les étoiles binaires sont divisées en quatre catégories suivant la façon dont leur existence est découverte. En effet, il y a les étoiles qu'il est possible d'observer via télescope (ou toute autre lunette astronomique) : elles sont appelées *binaires visuelles*. Les étoiles présentant des dédoublements de raies spectrales sont appelées *binaires spectroscopiques*. D'autres étoiles apparemment simples ont un mouvement périodique causé par un compagnon "invisible". Celles-ci sont appelées *binaires astrométriques*. Enfin, certaines étoiles sont éclipsées (partiellement ou totalement) par leur compagnon, il s'agit des *binaires photométriques* (ou "binaires à éclipse").

– Binaires visuelles

Les binaires visuelles sont des systèmes observés par des méthodes directes. Elles sont donc visibles via télescope. La plupart d'entre elles ont une période orbitale longue, de l'ordre de plusieurs centaines d'années (voire du millénaire). Ceci implique une très grande incertitude au niveau de la trajectoire des étoiles composant la binaire. Néanmoins, parmi ces binaires visuelles, nous pouvons citer Castor dans la constellation des Gémeaux et Alpha du Centaure (voir figure 1.2 et 1.3).

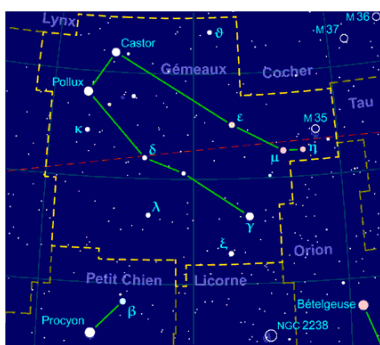


FIGURE 1.2 – La constellation des Gémeaux dans laquelle se trouve Castor. Source : Wikipédia.



FIGURE 1.3 – La constellation du Centaure dans laquelle se trouve Alpha Centauri (ou α Centauri). Source : Wikipédia.

– **Binaires spectroscopiques**

Une binaire spectroscopique est un système qui paraît simple de prime abord mais en observant le spectre de la lumière émise, nous remarquons un dédoublement de raie. Une des étoiles composant la binaire montre une vitesse radiale changeant continuellement avec une période fixée. Ces variations de vitesse se répètent exactement de cycle en cycle et le mouvement observé peut être interprété comme le mouvement orbital d'une binaire proche. Parmi les binaires spectroscopiques, nous pouvons citer Algol dans la constellation de Persée (voir figure 1.4) et Mizar dans la constellation de la Grande Ourse (voir figure 1.5). Dans le cas où les deux étoiles ont approximativement la même luminosité (exemple : Mizar), nous observons une superposition de 2 spectres. Chacun des spectres montrent la variation de vitesse de l'étoile qui lui correspond et est interprété comme un mouvement orbital.

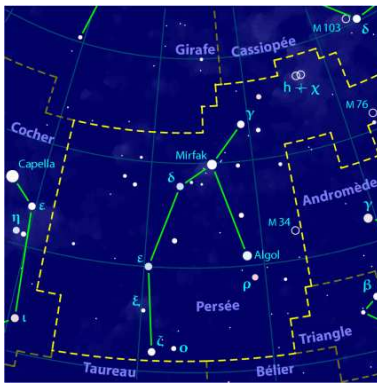


FIGURE 1.4 – La constellation de Persée dans laquelle se trouve Algol. Source : Wikipédia.

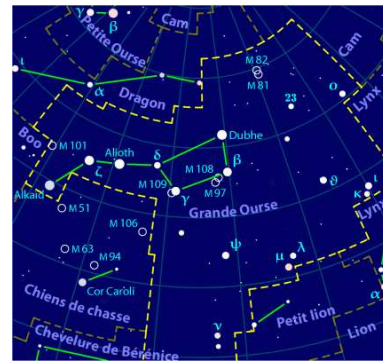


FIGURE 1.5 – La constellation de la Grande Ourse dans laquelle se trouve Mizar. Source : Wikipédia.

– **Binaires astrométriques**

Les binaires astrométriques sont découvertes grâce au mouvement de l'étoile principale (la plus lumineuse). En effet, comme montré à la figure 1.6, nous pouvons constater que Sirius effectue un mouvement sinusoïdale dû à la présence d'un compagnon "obscur". Un autre exemple connu est Procyon dans la constellation du Petit Chien (voir figure 1.7).

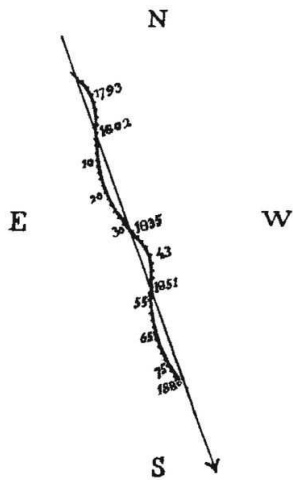


FIGURE 1.6 – Le mouvement de Sirius dans le ciel. Source : Wikipédia.

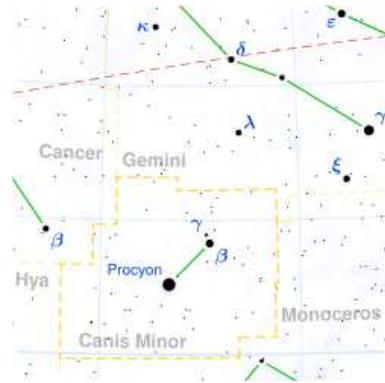


FIGURE 1.7 – Procyon dans la constellation du Petit Chien. Source : Wikipédia.

– Binaires photométriques

Les binaires photométriques, ou "binaires à éclipse" sont des binaires qui, observées depuis la Terre, ont des orbites formant une ligne horizontale. Cet alignement implique donc que chacune des deux étoiles s'éclipsent à tour de rôle engendrant des variations de luminosité qui nous permettent de les repérer. Comme binaires photométriques, nous pouvons citer Algol (qui est à la fois une binaire spectroscopique et photométrique) et Sheliak dans la constellation de la Lyre (voir figure 1.8).



FIGURE 1.8 – Sheliak (β Lyrae) dans la constellation de la Lyre. Source : Wikipédia.

1.3 Systèmes binaires hébergeant une planète

En 1988, l'équipe canadienne composée de Campbell, Walker et Yang a observé un phénomène intéressant à propos de l'étoile binaire Gamma Cephei (voir figure 1.9). Ils ont remarqué que la vitesse radiale de Gamma Cephei suggérait l'existence d'une planète semblable à Jupiter. Cette hypothèse suscitait l'intérêt et le questionnement. En effet, elle constituait la première détection d'une planète en-dehors de notre système solaire et s'avéraot aussi surprenante car la séparation entre les deux étoiles est inférieure à 19 unités astronomiques³.



FIGURE 1.9 – Constellation de Céphée dans laquelle se trouve la binaire Gamma Cephei. Source : Wikipédia.

Toutefois, cette observation met en doute le caractère double de Gamma Cephei et un article est rédigé en 1992 par Walker et ses collègues suggérant que la binaire Gamma Cephei n'est pas réelle et que les variations observées seraient dues à des activités chromosphériques (c'est-à-dire dans la basse atmosphère de l'étoile).

Malgré la publication de cet article, la recherche d'étoiles binaires hébergeant des planètes ne s'est pas arrêtée là. En effet, Gamma Cephei a continué à faire l'objet d'observations plus poussées. En 2003, ces observations ont porté leur fruit et dans un article de l'*Astrophysical Journal*, Hatzes et ses collègues ont confirmé l'existence d'une planète similaire à Jupiter autour de l'étoile primaire de Gamma Cephei. Cette année-là a aussi été marquée par la découverte de planètes géantes dans trois autres étoiles binaires (GL 86, HD 41004 et HD 196885). Ces découvertes lancèrent le début d'une nouvelle ère dans le domaine des recherches théoriques et observationnelles de planètes dans des systèmes à deux étoiles.

3. Une unité astronomique est la distance moyenne séparant la Terre du Soleil et correspond à 149598000 kilomètres

Depuis 2003, beaucoup de recherches ont été effectuées sur ce sujet, ceci rendant l'évolution dynamique des planètes dans des systèmes binaires une branche très étudiée de la science des exoplanètes.

Les binaires hébergeant une planète sont divisées en deux types suivant l'orbite suivie par la planète. Les planètes orbitant seulement autour d'une seule des deux étoiles du système binaire suivent une orbite "S-type". Tandis que les planètes qui orbitent autour des deux étoiles composant la binaire possèdent une orbite dite "P-type" (ou circumbinaire).

De nos jours, ces planètes hébergées dans des binaires font l'objet d'études quant à leur habitabilité. De même, un grand intérêt est porté actuellement à l'étude de la stabilité de potentiels compagnons planétaires de ces étoiles binaires. Plus de renseignements concernant ces différentes études peuvent être trouvés dans [6].

Chapitre 2

Problème des trois corps

Le problème des trois corps consiste à étudier les interactions entre trois corps dont les déplacements sont liés par la gravitation. Il s'agit de regarder comment les orbites elliptiques fixes que décrivent deux corps en interaction gravitationnelle (cfr. première loi de Kepler¹) sont modifiées par la présence d'un corps supplémentaire. Soulignons que nous travaillerons sur un problème des trois corps non-restreint, c'est-à-dire que nous tiendrons compte de toutes les masses du système (contrairement à un problème des trois corps restreint où une masse est considérée comme négligeable) car celles-ci peuvent être du même ordre.

Dans ce chapitre, nous décrivons les équations du mouvement du problème des trois corps dans un repère quelconque. Ensuite nous nous intéressons à différents types de coordonnées qui permettent d'effectuer une première simplification du problème, appelée réduction du centre de masse. Une fois cette simplification faite, nous expliquons comment diminuer à nouveau les degrés de liberté du problème en utilisant cette fois le fait que le moment angulaire total du système est constant en norme et en direction. Enfin, nous introduisons une première formulation de l'Hamiltonien décrivant ce problème.

2.1 Equations du mouvement dans un repère quelconque

Dans cette section, nous allons introduire les équations du mouvement du problème des trois corps. Pour ce faire, nous étudions trois corps M_0, M_1 et M_2 de masses m_0, m_1 et m_2 respectivement. Nous prenons pour origine un point quelconque de l'espace.

Nous écrivons ensuite les équations du mouvement qui régissent l'interaction gravitationnelle entre ces corps. En vertu de la deuxième loi de Newton, nous savons que $\sum \vec{F}_i = m \vec{a}$, où $\vec{F}_i$ sont les forces extérieures appliquées sur le corps considéré, m est la masse du corps et $\vec{a}$ est l'accélération qu'aura le corps. Nous obtenons donc trois équations (une pour chaque corps). Dans notre cas, la force qui intervient est l'attraction gravitationnelle entre les différents corps et elle s'énonce, pour des corps de masses m et

1. Les planètes évoluent sur des trajectoires elliptiques dont le soleil est un des foyers (Kepler, [4]).

m' , comme suit :

$$\vec{F} = -\mathcal{G} \frac{mm'}{\|\vec{r}\|^3} \vec{r},$$

où $\vec{r}$ est la distance entre les deux corps considérés,
et $\mathcal{G} \approx 6,67 \cdot 10^{-11} \text{ m}^3 \text{ kg}^{-1} \text{ s}^{-2}$ est la constante de gravitation.²

Ecrivons les équations du mouvement de chacun des corps :

$$m_0 \frac{d^2 \overrightarrow{OM_0}}{dt^2} = -\mathcal{G} \frac{m_0 m_1}{\|\overrightarrow{M_0 M_1}\|^3} \overrightarrow{M_0 M_1} - \mathcal{G} \frac{m_0 m_2}{\|\overrightarrow{M_0 M_2}\|^3} \overrightarrow{M_0 M_2}, \quad (2.1)$$

$$m_1 \frac{d^2 \overrightarrow{OM_1}}{dt^2} = -\mathcal{G} \frac{m_1 m_0}{\|\overrightarrow{M_1 M_0}\|^3} \overrightarrow{M_1 M_0} - \mathcal{G} \frac{m_1 m_2}{\|\overrightarrow{M_1 M_2}\|^3} \overrightarrow{M_1 M_2}, \quad (2.2)$$

$$m_2 \frac{d^2 \overrightarrow{OM_2}}{dt^2} = -\mathcal{G} \frac{m_2 m_0}{\|\overrightarrow{M_2 M_0}\|^3} \overrightarrow{M_2 M_0} - \mathcal{G} \frac{m_2 m_1}{\|\overrightarrow{M_2 M_1}\|^3} \overrightarrow{M_2 M_1}. \quad (2.3)$$

Il s'agit donc d'un problème à 18 composantes. En effet, il y a 3 composantes pour la vitesse (via les termes en $\frac{d^2 \overrightarrow{OM_i}}{dt^2}$, où $i = 0, 1$ ou 2) et 3 composantes pour la position de chacun des corps, ce qui équivaut à un total de $6 \times 3 = 18$ composantes. On dit également que le problème possède 9 degrés de liberté (c'est-à-dire 9 paires (position, vitesse)).

2.2 Réduction du centre de masse

Nous allons chercher à réduire le nombre de degrés de liberté du problème des trois corps. Notons K le barycentre du système. Pour rappel, le barycentre d'un système correspond au centre de masse de ce dernier.

Pour réduire le problème de 3 degrés de liberté, nous allons utiliser le fait que le barycentre est en translation uniforme. En effet, dans tout repère galiléen (c'est-à-dire un repère dans lequel tout corps reste dans l'état de repos ou de mouvement uniforme en ligne droite dans lequel il se trouve, à moins qu'une force ne le perturbe et ne le contraigne à changer d'état), le mouvement du barycentre est rectiligne et uniforme. Posons $m_{tot} = \sum m_i$. Nous pouvons écrire³, par la définition du barycentre,

$$m_{tot} \overrightarrow{OK} = \sum_{i=0}^2 m_i \overrightarrow{OM_i}.$$

En dérivant deux fois par rapport au temps, nous obtenons ce qui suit :

2. Par la suite, nous utiliserons la masse solaire comme mesure de masse, l'unité astronomique comme mesure des distances et l'année comme unité de temps. Dans ces unités, $\mathcal{G}$ vaut $4\pi^2$.

3. Les développements suivants sont issus du cours de *Mécanique du point et du solide* donné par Anne Lemaître durant l'année académique 2007-2008.

$$\begin{aligned}
m_{tot} \frac{d^2 \overrightarrow{OK}}{dt^2} &= \sum_{i=0}^2 m_i \frac{d^2 \overrightarrow{OM_i}}{dt^2} \\
&= \sum_{i=0}^2 \sum_{j \neq i; j=0}^2 -\mathcal{G} \frac{\overrightarrow{M_i M_j}}{\|\overrightarrow{M_i M_j}\|^3} m_i m_j \\
&= \mathcal{G} \sum_{i=0}^2 \sum_{j \neq i; j=0}^2 \frac{\overrightarrow{M_j M_i}}{\|\overrightarrow{M_i M_j}\|^3} m_i m_j \\
&= \mathcal{G} \sum_{i=0}^2 \sum_{0 \leq j < i} \frac{\overrightarrow{M_i M_j} + \overrightarrow{M_j M_i}}{\|\overrightarrow{M_i M_j}\|^3} m_i m_j \\
&= \overrightarrow{0}.
\end{aligned}$$

Puisque la masse totale du système est non nulle, nous obtenons que

$$\frac{d^2 \overrightarrow{OK}}{dt^2} = \overrightarrow{0}, \quad (2.4)$$

c'est-à-dire que le barycentre K du système est en translation uniforme.

Nous constatons donc que le problème reste le même après avoir subi une translation car le mouvement du barycentre est rectiligne et uniforme. Le problème que nous souhaitons traiter peut de ce fait être simplifié.

En effet, six relations additionnelles découlent de l'invariance du centre de masse du système. Pour les mettre en évidence, prenons comme origine le barycentre K du système au lieu d'un point quelconque de l'espace (cfr. figure 2.1 pour la représentation du repère barycentrique).

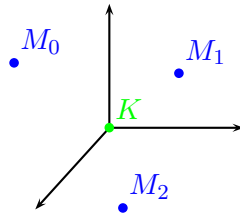


FIGURE 2.1 – Illustration du repère barycentrique.

Ce choix implique que (par la définition du centre de masse) :

$$\frac{\sum_{i=0}^2 m_i \overrightarrow{KM_i}}{\sum_{i=0}^2 m_i} = \vec{0}. \quad (2.5)$$

En dérivant cette expression par rapport au temps, nous obtenons que :

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\sum_{i=0}^2 m_i \overrightarrow{KM_i}}{\sum_{i=0}^2 m_i} \right) = \vec{0}, \quad (2.6)$$

$$\frac{\sum_{i=0}^2 m_i \frac{d}{dt} (\overrightarrow{KM_i})}{\sum_{i=0}^2 m_i} = \vec{0}. \quad (2.7)$$

Grâce aux relations 2.5 et 2.7, le corps M_0 peut être repéré par rapport aux deux autres et le système peut ainsi être diminué de trois degrés de liberté. Ceci nous amène à un problème à 6 degrés de liberté.

La simplification peut s'effectuer via plusieurs changements de coordonnées qui utilisent la propriété de l'invariance par translation. Citons deux changements de coordonnées qui permettent d'effectuer la réduction du centre de masse :

- passage aux coordonnées héliocentriques (un des corps est le centre du repère) et
- passage aux coordonnées de Jacobi. Ces dernières coordonnées sont introduites dans la section suivante.

Coordonnées de Jacobi

Les coordonnées de Jacobi permettent d'effectuer la réduction du centre de masse. Il s'agit de repérer un corps M_i par rapport au centre de masse K_i des i corps précédents : $M_0, M_1, \dots, M_{i-1}$. La figure 2.2 illustre un tel repère dans le cas de trois corps :

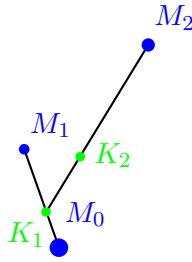


FIGURE 2.2 – Illustration d'un repère de Jacobi.

En introduisant ce système de coordonnées, nous parvenons à diminuer le nombre de degrés de liberté du système à six. De plus, comme nous le verrons à la section 2.4,

l'Hamiltonien exprimé dans ces coordonnées peut être vu comme une somme de deux mouvements. Le premier terme de la somme représente le problème des deux corps entre m_0 et m_1 et celui entre m_2 et $(m_0 + m_1)$. Le second est une série infinie décrivant le couplage de ces orbites képlériennes. La formulation hamiltonienne du problème sera explicitée plus en détail à la section 2.4.

2.3 Invariance du moment angulaire total

En plus de la réduction du centre de masse, il est possible de réduire le nombre de degrés de liberté du problème des trois corps en utilisant l'invariance du moment angulaire (ou cinétique) total. En effet, le moment angulaire d'un système est constant en norme et en direction si les forces en présence sont centrales. Une force centrale exercée par un corps sur un autre est une force qui est dirigée le long de la droite qui les relie (cfr. figure 2.3). Cette invariance permet de diminuer de deux degrés de liberté le problème des trois corps. Dans notre cas, les centres de force sont les corps puisque les forces en présence sont les forces gravitationnelles interagissant entre les différents corps.



FIGURE 2.3 – Illustration des forces centrales entrant en jeu dans un problème képlérien (ou des deux corps). $F_{0 \rightarrow 1}$ est une force exercée sur M_0 par M_1 et $F_{1 \rightarrow 0}$ est une force exercée sur M_1 par M_0 .

Dans un premier temps, nous allons considérer un corps de masse m , de position $\vec{r}$, soumis à une force $\vec{f}$, de vitesse $\vec{v}$ et d'accélération $\vec{a}$. Le moment angulaire (ou cinétique) de ce corps est défini comme le vecteur $\vec{r} \times m \vec{v}$. Nous pouvons écrire, par la deuxième loi de Newton

$$m \vec{a} = \vec{f} \quad (2.8)$$

$$m \frac{d}{dt} \vec{v} = \vec{f} \quad (2.9)$$

$$\frac{d}{dt} m \vec{v} = \vec{f} \quad (2.10)$$

En effectuant le produit vectoriel de chacun des membres de l'équation 2.10, nous pouvons ensuite écrire

$$\vec{r} \times \frac{d}{dt} m \vec{v} = \vec{r} \times \vec{f}. \quad (2.11)$$

D'autre part, nous calculons

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}(\vec{r} \times m\vec{v}) &= \left(\frac{d\vec{r}}{dt} \times m\vec{v}\right) + \left(\vec{r} \times \frac{d}{dt}m\vec{v}\right) \\ &= \vec{0} + \vec{r} \times \frac{d}{dt}m\vec{v},\end{aligned}$$

car $\frac{d\vec{r}}{dt} = \vec{v}$ est évidemment parallèle à $m\vec{v}$. Nous pouvons donc écrire 2.11 de la façon suivante

$$\frac{d}{dt}(\vec{r} \times m\vec{v}) = \vec{r} \times \vec{f}. \quad (2.12)$$

Passons maintenant au cas d'un système à n corps de masse m_i , de position $\vec{r}_i$, soumis à des forces $\vec{f}_i$ et de vitesse $\vec{v}_i$ ($i = 1, \dots, n$). Nous pouvons généraliser l'équation 2.12 de la manière qui suit

$$\frac{d}{dt} \sum_{i=1}^n (\vec{r}_i \times m_i \vec{v}_i) = \sum_{i=1}^n \vec{r}_i \times \vec{f}_i. \quad (2.13)$$

Dans le cas particulier du problème des trois corps, les forces sont du type action-réaction, c'est-à-dire que la force agissant sur le $i^{\text{ème}}$ corps ($i = 1, 2, 3$) est donnée par

$$\vec{f}_i = \sum_{j=1}^3 \vec{f}_{ij} \quad \text{où} \quad \begin{cases} \vec{f}_{ij} = -\vec{f}_{ji}, \\ \vec{f}_{ij} // \text{à } (\vec{r}_i - \vec{r}_j). \end{cases}$$

Reprenons l'équation 2.13

$$\frac{d}{dt} \sum_{i=1}^3 (\vec{r}_i \times m_i \vec{v}_i) = \sum_{i=1}^3 \vec{r}_i \times \vec{f}_i \quad (2.14)$$

$$= \sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^3 \vec{r}_i \times \vec{f}_{ij} \quad (2.15)$$

$$= \sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^i [(\vec{r}_i \times \vec{f}_{ij}) + (\vec{r}_j \times \vec{f}_{ji})]. \quad (2.16)$$

Notons que de cette façon, les éléments de la diagonale principale sont comptés deux fois, cela n'est pas grave car $\vec{f}_{ii} = \vec{0}$. En utilisant le fait que $\vec{f}_{ij} = -\vec{f}_{ji}$, nous obtenons

$$\sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^i [(\vec{r}_i \times \vec{f}_{ij}) + (\vec{r}_j \times \vec{f}_{ji})] = \sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^i [(\vec{r}_i \times \vec{f}_{ij}) + (\vec{r}_j \times -\vec{f}_{ij})] \quad (2.17)$$

$$= \sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^i [(\vec{r}_i - \vec{r}_j) \times \vec{f}_{ij}], \quad (2.18)$$

En conclusion, comme $\vec{f}_{ij}$ est parallèle à $(\vec{r}_i - \vec{r}_j)$, nous obtenons

$$\frac{d}{dt} \sum_{i=1}^3 (\vec{r}_i \times m_i \vec{v}_i) = \sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^i [(\vec{r}_i - \vec{r}_j) \times (\vec{f}_{ij})] \quad (2.19)$$

$$= \vec{0}. \quad (2.20)$$

Et donc le moment angulaire total, noté $\vec{l}$ dans la suite.

$$\vec{l} = \sum_{i=1}^3 (\vec{r}_i \times m_i \vec{v}_i) = \vec{C}$$

est conservé⁴ ($\vec{C}$ est un vecteur constant).

La direction constante de ce vecteur permet de définir un plan tel que celui-ci en soit la normale (cfr. figure 2.4). Ce plan est invariant puisque nous avons prouvé que la direction du vecteur $\vec{l}$ du moment angulaire total est elle-même constante.

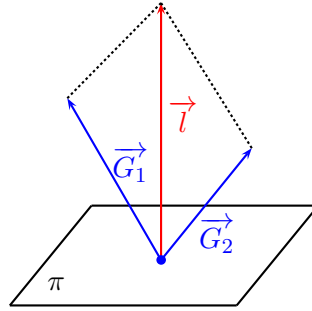


FIGURE 2.4 – Illustration du plan invariant engendré par le moment angulaire total.

Dans la figure 2.4, nous avons appelé π le plan invariant (aussi appelé plan de Laplace). Les vecteurs G_1 et G_2 sont les moments angulaires respectivement du corps m_1 et du corps m_2 . Pour diminuer de deux degrés de liberté le problème des trois corps que nous étudions, il suffit de prendre le plan π comme plan de référence. Cette simplification du problème est connue, dans le cas particulier du problème des trois corps, sous le nom d'élimination des nœuds ou réduction de Jacobi (cfr. [3]).

2.4 Formulation hamiltonienne

Dans l'article [1] que nous étudions, le problème des trois corps est dit “hiérarchique”, c'est-à-dire que le système est constitué d'une binaire proche (dite interne) et d'un troisième corps (étoile ou planète) qui orbite autour de la binaire interne à une distance

4. Ces développements sont issus du cours de Mécanique du Point et du Solide [10].

beaucoup plus grande.

Nous allons repérer les corps en utilisant les coordonnées de Jacobi (introduites à la section 2.2). Le vecteur $\vec{r}_1$ représente la position du corps M_1 par rapport au corps M_0 et le vecteur $\vec{r}_2$ est la position du corps M_2 par rapport au barycentre de la binaire interne (les masses m_0 et m_1). Ces vecteurs sont représentés à la figure 2.5.

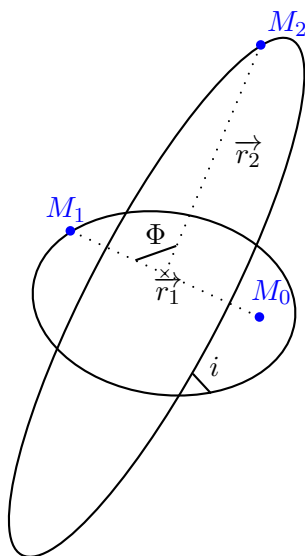


FIGURE 2.5 – Illustration du problème des trois corps étudié.

Nous étudions un problème de trois corps hiérarchique tel que le rapport des demi-grands axes ($\alpha = \frac{a_1}{a_2}$) est un paramètre très petit. Une formulation hamiltonienne bien connue du problème consiste en un développement en série de $\frac{a_1}{a_2}$ (e.g. [2]). Comme expliqué précédemment, les coordonnées de Jacobi permettent d'écrire l'Hamiltonien en scindant le mouvement en une somme de problèmes képlériens (ou problèmes des deux corps) et en une série infinie représentant les perturbations de ces orbites képlériennes :

$$\mathcal{H} = \frac{\mathcal{G}m_0m_1}{2a_1} + \frac{\mathcal{G}(m_0 + m_1)m_2}{2a_2} + \frac{\mathcal{G}}{a_2} \sum_{j=2}^{\infty} \alpha^j \mathcal{M}_j \left(\frac{r_1}{a_1} \right)^j \left(\frac{a_2}{r_2} \right)^{j+1} P_j(\cos \Phi), \quad (2.21)$$

où $\mathcal{G}$ est la constante gravitationnelle ,

P_j sont les polynômes de Legendre ,

Φ est l'angle entre les vecteurs r_1 et r_2 ,

a_1 est le demi-grand axe de l'orbite de m_1 autour de m_0 ,

a_2 est le demi-grand axe de l'orbite de m_2 autour du barycentre de (m_0, m_1) ,

et $\mathcal{M}_j = m_0m_1m_2 \frac{m_0^{j-1} - (-m_1)^{j-1}}{(m_0+m_1)^j}$.

Pour rappel, énonçons la première loi de Kepler : "*Les planètes décrivent des orbites elliptiques dont le Soleil est un des foyers.*". Cette loi peut être généralisée de la façon suivante : "*Les astres décrivent des orbites elliptiques caractérisées par un demi-grand axe a et une excentricité e .*".

Avant de définir un nouvel ensemble de variables, rappelons quelques notions de mécanique céleste.

Définition 1 Le *périastre* (noté P à la figure 2.6) est le point de l'orbite elliptique le plus proche du foyer.

Définition 2 L'*apoastre* est le point de l'orbite du corps le plus éloigné du foyer.

Définition 3 Le *nœud ascendant* est le point de l'orbite tel que le corps coupe le plan équatorial de sud en nord (en phase "montante").

Définition 4 Le *nœud descendant* est le point de l'orbite tel que le corps coupe le plan équatorial de nord en sud (en phase "descendante").

Définition 5 L'*argument du périastre* (noté ω à la figure 2.6) décrit l'angle entre la direction du nœud ascendant et celle du périastre de cette orbite.

Définition 6 L'*inclinaison* i est, en général, l'angle entre le plan de l'écliptique et le plan orbital du corps céleste. Dans le cas de notre problème des trois corps, nous désignerons i l'inclinaison mutuelle entre les plans des deux orbites des corps m_1 et m_2 .

Définition 7 Le *point vernal* (noté Υ à la figure 2.6) est le croisement de l'écliptique et de l'équateur céleste (projection de l'équateur sur la sphère céleste).

Définition 8 La *longitude du nœud ascendant* (notée Ω à la figure 2.6) est l'angle entre le point vernal et la direction du nœud ascendant.

Définition 9 L'*anomalie vraie* est l'angle entre la direction du périastre et la droite de la position du corps céleste sur son orbite par rapport à son foyer.

Définition 10 L'*anomalie moyenne* est un paramètre qui définit la position d'un corps se déplaçant sur une orbite képlérienne. Il s'agit du temps écoulé depuis le dernier passage au périastre multiplié par $\frac{2\pi}{T}$, où T est la période orbitale.

La figure⁵ 2.6 représente la majorité des éléments elliptiques.

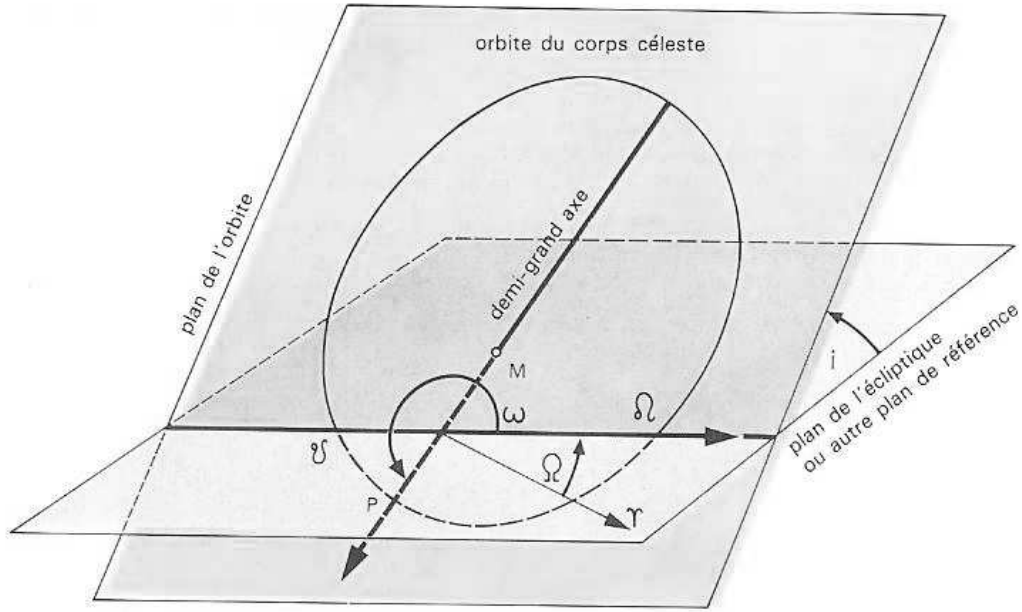


FIGURE 2.6 – Schéma illustrant les éléments elliptiques.

A la place des éléments elliptiques, nous pouvons maintenant définir un ensemble de variables canoniques, connues sous le nom d'éléments de Delaunay, qui permet d'avoir une bonne description dynamique du problème des trois corps. Les variables de type angle sont

$$l_1, l_2 = \text{les anomalies moyennes,} \quad (2.22)$$

$$g_1, g_2 = \text{les arguments du périastre (aussi notés } \omega_1, \omega_2 \text{) et} \quad (2.23)$$

$$h_1, h_2 = \text{les longitudes des nœuds ascendants (aussi notés } \Omega_1, \Omega_2 \text{) ,} \quad (2.24)$$

5. Cette figure est issue de l'Atlas d'Astronomie [13].

et les moments conjugués sont

$$L_1 = \frac{m_0 m_1}{m_0 + m_1} \sqrt{k^2 (m_0 + m_1) a_1}, \quad (2.25)$$

$$L_2 = \frac{m_2 (m_0 + m_1)}{m_0 + m_1 + m_2} \sqrt{k^2 (m_0 + m_1 + m_2) a_2}, \quad (2.26)$$

$$G_1 = L_1 \sqrt{1 - e_1^2}, \quad (2.27)$$

$$G_2 = L_2 \sqrt{1 - e_2^2}, \quad (2.28)$$

$$H_1 = G_1 \cos i_1, \quad (2.29)$$

$$H_2 = G_2 \cos i_2, \quad (2.30)$$

où e_1, e_2 sont les excentricités orbitales et i_1, i_2 sont les inclinaisons orbitales.

Nous pouvons ensuite écrire les équations d'Hamilton décrivant le mouvement du système des trois corps

$$\frac{dL_j}{dt} = -\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial l_j}, \quad \frac{dl_j}{dt} = \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial L_j}, \quad (2.31)$$

$$\frac{dG_j}{dt} = -\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial g_j}, \quad \frac{dg_j}{dt} = \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial G_j}, \quad (2.32)$$

$$\frac{dH_j}{dt} = -\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial h_j}, \quad \frac{dh_j}{dt} = \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial H_j}, \quad (2.33)$$

où $j = 1, 2$.

Cette formulation est à six degrés de liberté grâce à l'utilisation des coordonnées de Jacobi qui ont permis de réaliser la réduction du centre de masse. Comme nous l'avons vu précédemment, le problème peut encore être simplifié via l'invariance du moment angulaire total. L'application technique de cette réduction est traitée dans le chapitre qui suit.

Chapitre 3

Développement du problème hiérarchique

Dans ce chapitre, nous allons travailler sur la formulation *octupole* de l'Hamiltonien, c'est-à-dire le développement de l'Hamiltonien (2.21) limité aux termes d'indice 3 en $\alpha = \frac{a_1}{a_2}$. Comme nous le verrons, cette approche est un bon compromis entre précision et simplification de la formulation hamiltonienne.

Une moyennisation sur les courtes périodes du problème (i.e. les variables dépendant des anomalies moyennes) nous permettra de réduire le nombre de degrés de liberté du problème.

De même, nous allons appliquer l'invariance du moment angulaire total à notre problème pour obtenir une formulation comportant finalement uniquement deux degrés de liberté.

3.1 Développement octupole

Nous allons maintenant écrire l'Hamiltonien sous sa forme *octupole*. La dénomination "octupole" signifie que le développement de l'Hamiltonien est arrêté à l'ordre 3 en $\alpha = \frac{a_1}{a_2}$. En général, les études sur cet Hamiltonien sont limitées à l'ordre 2 en $\alpha = \frac{a_1}{a_2}$ (nous parlons alors d'Hamiltonien sous sa forme *quadrupole*). Ce travail a donc pour but une généralisation de l'approche quadrupole généralement utilisée. Dans notre cas, l'Hamiltonien s'écrit comme suit

$$\mathcal{H}_{oct} = \mathcal{H}_0 + \mathcal{H}_1 + \mathcal{H}_2 + \mathcal{H}_3 ,$$

$$\begin{aligned}
\mathcal{H}_{oct} = & \frac{\beta_0}{2L_1^2} + \frac{\beta_1}{2L_2^2} + 8\beta_2 \left(\frac{L_1^4}{L_2^6} \right) \left(\frac{r_1}{a_1} \right)^2 \left(\frac{a_2}{r_2} \right)^3 (3\cos\Phi^2 - 1) \\
& + 2\beta_3 \left(\frac{L_1^6}{L_2^8} \right) \left(\frac{r_1}{a_1} \right)^3 \left(\frac{a_2}{r_2} \right)^4 (5\cos\Phi^3 - 3\cos\Phi), \tag{3.1}
\end{aligned}$$

où les paramètres de masse $(\beta_i, i = 0, \dots, 3)$ sont

$$\beta_0 = \mathcal{G}^2 \frac{(m_0 m_1)^3}{m_0 + m_1}, \tag{3.2}$$

$$\beta_1 = \mathcal{G}^2 \frac{(m_0 + m_1)^3 m_2^2}{m_0 + m_1 + m_2}, \tag{3.3}$$

$$\beta_2 = \frac{\mathcal{G}^2}{16} \frac{(m_0 + m_1)^7}{(m_0 + m_1 + m_2)^3} \cdot \frac{m_2^7}{(m_0 m_1)^3}, \tag{3.4}$$

$$\beta_3 = \frac{\mathcal{G}^2}{4} \frac{(m_0 + m_1)^9}{(m_0 + m_1 + m_2)^4} \cdot \frac{m_2^9 (m_0 - m_1)}{(m_0 m_1)^5}. \tag{3.5}$$

Les deux premiers termes de l'Hamiltonien octupole $\mathcal{H}_{oct}$ décrivent les mouvements d'une part de m_1 par rapport à m_0 ($\mathcal{H}_0$), soit la binaire interne, et d'autre part de m_2 par rapport à m_0 ($\mathcal{H}_1$). Les termes de plus haut degré en $\alpha = \frac{a_1}{a_2}$ (qui suivent $\mathcal{H}_0$ et $\mathcal{H}_1$) représentent les interactions entre m_1 et m_2 . Insistons sur le fait que l'Hamiltonien octupole est une approximation de l'Hamiltonien d'origine (équation 2.21) comprenant une série infinie. Dans la suite, nous montrerons qu'il s'agit d'une bonne approximation de la dynamique de notre problème.

A ce stade, la formulation 3.1 contient des informations sur les perturbations de courtes périodes (anomalies moyennes) que nous pouvons éliminer car nous nous intéressons seulement à la dynamique séculaire (i.e. sur le long terme) de l'Hamiltonien.

Nous remarquons que l'angle Φ entre les vecteurs positions des deux corps (voir figure 2.5) dépend des anomalies moyennes. Pour simplifier le problème, nous pouvons moyenner sur ces variables de sorte à obtenir une formulation équivalente de $\mathcal{H}$ qui n'en dépendra plus¹ :

$$\bar{\mathcal{H}}_{oct} = \frac{1}{(2\pi)^2} \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} \mathcal{H}_{oct} dl_1 dl_2 \tag{3.6}$$

Appliquée à notre système, cette transformation nous permet de nous débarrasser de l_1 et l_2 et donc, par les relations 2.31, de conclure que L_1 et L_2 sont à présent constants.

Finalement, il nous reste à appliquer à notre problème hiérarchique le théorème de l'élimination des nœuds (qui est l'équivalent de l'invariance du moment angulaire total).

1. L'auteur parle de transformation de von Zeipel qui est équivalente au premier ordre des masses.

En effet, les équations 2.32 et 2.33 décrivent un problème à quatre degrés de liberté (après élimination sur les courtes périodes) que nous allons réduire à deux grâce à l'invariance du moment angulaire total.

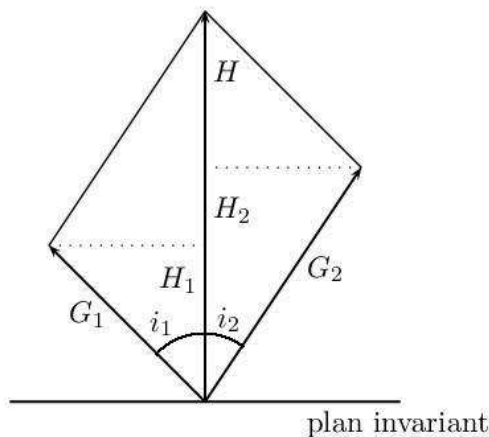


FIGURE 3.1 – Schéma représentant les relations entre les variables canoniques et les moments angulaires.

Sur la figure 3.1, nous remarquons que H_i ($i = 1, 2$) est la projection du moment angulaire $\vec{G}_i$ sur le moment angulaire total du système $\vec{H}$. Rappelons que l'élimination du moment angulaire total consiste à adopter comme plan de référence le plan invariant de Laplace dont le moment angulaire total est la normale et ainsi, l'axe z correspond à la direction du moment angulaire total.

Comme le moment angulaire total H est constant en norme (cfr. section 2.3), $H = H_1 + H_2$, c'est-à-dire que dans le plan invariant de Laplace

$$H = G_1 \cos i_1 + G_2 \cos i_2 \quad (3.7)$$

et

$$0 = G_1 \sin i_1 - G_2 \sin i_2. \quad (3.8)$$

Les variables H_1 et H_2 peuvent être éliminées de l'Hamiltonien en utilisant les relations suivantes :

$$\begin{aligned} H_1 &= \frac{H^2 + G_1^2 - G_2^2}{2H}, \\ H_2 &= \frac{H^2 + G_2^2 - G_1^2}{2H}, \end{aligned}$$

découlant des relations 3.7 et 3.8. Notons que nous avons bien $H_1 + H_2 = H$, puisque

$$\frac{H^2 + G_1^2 - G_2^2 + H^2 + G_2^2 - G_1^2}{2H} = \frac{2H^2}{2H} = H.$$

De même, l'invariance en direction de $\vec{H}$ a pour conséquence que les variables h_1 et h_2 n'apparaissent dans l'Hamiltonien que sous la forme de la combinaison $h_1 - h_2$. Or, cette angle vaut π par définition du plan invariant de Laplace.

Enfin, nous obtenons ainsi une expression concise de l'Hamiltonien à 2 degrés de liberté $\mathcal{H}_{oct}(g_1, g_2, G_1, G_2)$ en posant

$$\theta = \cos i = \frac{H^2 - G_1^2 - G_2^2}{2G_1G_2}, \quad (3.9)$$

où $i = i_1 + i_2$ représente l'inclinaison mutuelle entre les plans orbitaux de m_1 et m_2 , et notons φ l'angle entre les directions des périastres donné par

$$\cos \varphi = -\cos g_1 \cos g_2 - \theta \sin g_1 \sin g_2. \quad (3.10)$$

3.2 Equations de la dynamique

Le nouvel Hamiltonien moyenné et exprimé par rapport au plan de référence invariant de Laplace possède donc deux degrés de liberté (g_1, g_2, G_1 et G_2) :

$$\begin{aligned} \bar{\mathcal{H}}_{oct} = & C_2 \left[(2 + 3e_1^2)(3\theta^2 - 1) + 15e_1^2(1 - \theta^2) \cos 2g_1 \right] \\ & + C_3 e_1 e_2 \left[A \cos \varphi + 10\theta(1 - \theta^2)(1 - e_1^2) \sin g_1 \sin g_2 \right], \end{aligned} \quad (3.11)$$

où

$$C_2 = \frac{\mathcal{G}^2}{16} \frac{(m_0 + m_1)^7}{(m_0 + m_1 + m_2)^3} \frac{m_2^7}{(m_0 m_1)^3} \frac{L_1^4}{L_2^3 G_2^3}, \quad (3.12)$$

$$C_3 = -\frac{15}{16} \frac{\mathcal{G}^2}{4} \frac{(m_0 + m_1)^9}{(m_0 + m_1 + m_2)^4} \frac{m_2^9(m_0 - m_1)}{(m_0 m_1)^5} \frac{L_1^6}{L_2^3 G_2^5}, \quad (3.13)$$

$$A = 4 + 3e_1^2 - \frac{5}{2}(1 - \theta^2)B, \quad (3.14)$$

$$B = 2 + 5e_1^2 - 7e_1^2 \cos 2g_1. \quad (3.15)$$

Pour rappel, L_1 et L_2 sont des constantes dans cette formulation moyennée sur les courtes périodes. Cela implique que les demi-grand axes a_1 et a_2 sont également constantes. De plus, les nouvelles variables de $\bar{\mathcal{H}}_{oct}$ sont désormais des approximations des variables 2.23, 2.27 et 2.28.

Nous avons connaissance d'un erratum (cfr. [5]) paru quatre ans après la publication de l'article d'Eric Ford et al. dont nous faisons l'étude (cfr. [1]) et qui indique que le signe de C_3 dans l'équation 3.13 devrait être négatif. Dans le chapitre suivant, nous étudierons en quoi ce changement de signe affecte les résultats obtenus dans l'article d'origine.

Notre Hamiltonien est de la forme $\bar{\mathcal{H}}_{oct}(G_1, G_2, g_1, g_2)$. Les équations du mouvement qui en découlent seront donc de la forme²

$$\frac{dg_i}{dt} = \frac{\partial \bar{\mathcal{H}}_{oct}}{\partial G_i}, \quad (3.16)$$

$$\frac{dG_i}{dt} = -\frac{\partial \bar{\mathcal{H}}_{oct}}{\partial g_i}. \quad (3.17)$$

Or, les éléments dont il est intéressant d'analyser l'évolution sont les excentricités et les arguments des périastres. Nous avons déjà écrit l'Hamiltonien $\bar{\mathcal{H}}_{oct}$ en fonction de ceux-ci à l'équation 3.11. En utilisant les relations :

$$\frac{de_i}{dt} = -\frac{\partial e_i}{\partial G_i} \frac{\partial \bar{\mathcal{H}}_{oct}}{\partial t}, \quad (3.18)$$

$$\frac{dg_i}{dt} = \frac{\partial \bar{\mathcal{H}}_{oct}}{\partial G_i}, \quad (3.19)$$

nous obtenons les nouvelles équations d'Hamilton :

$$\frac{de_i}{dt} = -\frac{\partial e_i}{\partial G_i} \frac{\partial \bar{\mathcal{H}}_{oct}}{\partial g_i} \quad (3.20)$$

et

$$\frac{dg_i}{dt} = \frac{\partial \bar{\mathcal{H}}_{oct}}{\partial e_i} \frac{\partial e_i}{\partial G_i}. \quad (3.21)$$

En conservant la formulation concise de Ford et a., nous obtenons :

$$\begin{aligned} \frac{de_1}{dt} = & C_2 \frac{1-e_1^2}{G_1} \left[30e_1(1-\theta^2) \sin 2g_1 \right] \\ & + C_3 e_2 \frac{1-e_1^2}{G_1} [35 \cos \varphi (1-\theta^2) e_1^2 \sin 2g_1 \\ & - 10 \theta (1-e_1^2)(1-\theta^2) \cos g_1 \sin g_2 \\ & - A (\sin g_1 \cos g_2 - \theta \cos g_1 \sin g_2)], \end{aligned} \quad (3.22)$$

$$\begin{aligned} \frac{de_2}{dt} = & -C_3 e_1 \frac{1-e_2^2}{G_2} [10 \theta (1-\theta^2)(1-e_1^2) \sin g_1 \cos g_2 \\ & + A (\cos g_1 \sin g_2 - \theta \sin g_1 \cos g_2)] , \end{aligned} \quad (3.23)$$

2. Nous avons préféré garder les conventions adoptées au cours de Géométrie Symplectique (cfr. [11]) quant au choix du signe précédant chaque équation de la dynamique.

$$\begin{aligned}
\frac{dg_1}{dt} = & C_2 6 \left\{ \frac{1}{G_1} [4\theta^2 + (5 \cos 2g_1 - 1)(1 - e_1^2 - \theta^2)] \right. \\
& + \frac{\theta}{G_2} [2 + e_1^2(3 - 5 \cos 2g_1)] \} \\
& - C_3 e_2 \left\{ e_1 \left(\frac{1}{G_2} + \frac{\theta}{G_1} \right) [\sin g_1 \sin g_2 [A + 10(3\theta^2 - 1)(1 - e_1^2)] \right. \\
& - 5\theta B \cos \varphi] - \frac{1 - e_1^2}{e_1 G_1} [\sin g_1 \sin g_2 10\theta(1 - \theta^2)(1 - 3e_1^2) \\
& \left. \left. + \cos \varphi (3A - 10\theta^2 + 2)] \right\} \tag{3.24}
\end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}
\frac{dg_2}{dt} = & 3 C_2 \left(\frac{2\theta}{G_1} [2 + e_1^2(3 - 5 \cos 2g_1)] \right. \\
& + \frac{1}{G_2} \{ 4 + 6e_1^2 + (5\theta^2 - 3)[2 + e_1^2(3 - 5 \cos 2g_1)] \} \Big) \\
& + C_3 e_1 \left(\sin g_1 \sin g_2 \left\{ \frac{4e_2^2 + 1}{e_2 G_2} 10\theta(1 - \theta^2)(1 - e_1^2) \right. \right. \\
& \left. \left. - e_2 \left(\frac{1}{G_1} + \frac{\theta}{G_2} \right) [A + 10(3\theta^2 - 1)(1 - e_1^2)] \right\} \right. \\
& \left. + \cos \varphi \left[5 B \theta e_2 \left(\frac{1}{G_1} + \frac{\theta}{G_2} \right) + \frac{4e_2^2 + 1}{e_2 G_2} A \right] \right). \tag{3.25}
\end{aligned}$$

Nous pouvons constater que ces équations peuvent facilement être intégrées numériquement afin de déterminer l'évolution du système hiérarchique triple.

Nous avons implémenté en FORTRAN 90 les équations 3.22-3.25 décrivant le mouvement séculaire d'un problème des trois corps. Ce programme comporte deux modules et un programme racine. Un des modules intègre les équations du mouvement en utilisant la méthode itérative de Runge-Kutta 4 (méthode expliquée dans le chapitre qui suit). Le second module contient les équations du mouvement telles qu'énoncées ci-dessus (cfr. 3.22-3.25). Enfin, le programme principal contient les informations sur les conditions initiales (qui diffèrent suivant les tests que nous effectuerons) et fait appel aux deux modules.

Nous avons déjà fait allusion dans l'introduction, à l'erratum que Ford et ses collègues ont publié concernant une faute de signe dans le coefficient C_3 (cfr. relation 3.13 où

l'erreur de signe a été corrigée). En effet, une erreur de signe s'est glissée dans le coefficient C_3 de [1] mais d'après l'erratum [5] par quatre ans après, cette erreur n'engendrerait que peu de modifications dans la dynamique des systèmes triples étudiés. Nous vérifierons dans le chapitre suivant l'ampleur des modifications entraînées par cette erreur de signe.

Chapitre 4

Evolution dynamique des systèmes binaires

Dans ce chapitre, nous cherchons à savoir si la théorie octupole modélise avec précision la dynamique du problème des trois corps.

Dans un premier temps, nous nous attarderons sur les différences que nous pouvons observer entre l'approximation quadrupole et l'approximation octupole dans les évolutions des éléments e_1 , e_2 , g_1 et g_2 dans le cas du problème des trois corps restreint.

Ensuite, nous étudierons le cas du problème des trois corps général, où aucune restriction ne sera opérée sur les différentes masses. Nous nous intéresserons à la dynamique de ce problème tant pour des inclinaisons mutuelles faibles que très élevées. Une comparaison des résultats sera envisagée entre les approches analytiques octupole erronée (faute du signe de C_3) et corrigée et l'intégration numérique des équations newtoniennes, ce qui nous permettra d'affirmer que l'approche octupole constitue une très bonne approximation de la dynamique.

4.1 Introduction

Pour commencer, il est important d'identifier les différents paramètres à initialiser dans notre étude :

- les masses de chacun des trois corps (m_0 , m_1 et m_2) et
- les demi-grands axes des orbites de m_1 et m_2 (soient a_1 et a_2 respectivement).

Ces quantités, étant constantes au cours du temps, l'évolution de la dynamique sera donc décrite au moyen des variables suivantes :

- les excentricités des orbites de m_1 et m_2 (e_1 et e_2 respectivement),
- les arguments des périastres de chacune des deux orbites (g_1 et g_2) et
- l'inclinaison mutuelle initiale i entre les deux plans orbitaux. Remarquons que cette dernière n'est pas une variable à proprement parlée puisqu'elle dépend des

excentricités e_1 et e_2 via la relation

$$i(e_1, e_2) = \arccos \left(\frac{H^2 - L_1^2(1 - e_1^2) - L_2^2(1 - e_2^2)}{2 L_1 \sqrt{1 - e_1^2} L_2 \sqrt{1 - e_2^2}} \right).$$

Le but de ce chapitre est de choisir différentes valeurs pour ces différents éléments afin d'observer comment le système se comporte et si l'approche octupole est une bonne approximation analytique de la dynamique réelle des systèmes.

Nous utilisons un programme rédigé en FORTRAN 90 (voir Annexe) qui emploie la méthode itérative de quatrième ordre de Runge-Kutta. Cette méthode consiste à approximer les solutions d'équations différentielles ordinaires.

Soient les équations différentielles décrivant le mouvement du problème des trois corps (cfr. équations 3.22-3.25) de la forme

$$y' = f(t, y) \quad (4.1)$$

où le vecteur contenant nos variables est $y = (e_1, e_2, g_1, g_2)$, munies des conditions initiales

$$y(t=0) = y_0. \quad (4.2)$$

Dans la méthode de Runge-Kutta 4, nous posons

$$\begin{cases} y_{n+1} &= y_n + 1/6 h (k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4) \\ t_{n+1} &= t_n + h \end{cases}$$

où le pas d'intégration est noté h et les termes k_i ($i = 1, \dots, 4$) sont des pentes prises en différents points et moment de la fonction f . Ils sont obtenus grâce aux relations

$$\begin{aligned} k_1 &= f(t_n, y_n), \\ k_2 &= f\left(t_n + \frac{1}{2}h, y_n + \frac{1}{2}k_1\right), \\ k_3 &= f\left(t_n + \frac{1}{2}h, y_n + \frac{1}{2}k_2\right) \text{ et} \\ k_4 &= f(t_n + h, y_n + k_3). \end{aligned}$$

Cette méthode est implémentée dans le premier module (**Module1.f90**) de notre programme FORTRAN 90.

Pour débiter, nous allons souligner une différence existant entre les équations obtenues en 3.22-3.25 et celles que nous aurions obtenues en utilisant l'Hamiltonien quadrupole $\mathcal{H}_{quad} = \mathcal{H}(e_1, g_1)$. Ce dernier est simplement obtenu en laissant tomber le terme en C_3 . En effet, dans l'approche quadrupole, C_3 est nul et l'Hamiltonien vaut :

$$\mathcal{H}_{quad} = C_2 \left[(2 + 3e_1^2)(3\theta^2 - 1) + 15e_1^2(1 - \theta^2) \cos 2g_1 \right]. \quad (4.3)$$

L'Hamiltonien quadrupole ne possède qu'un degré de liberté puisque nous voyons clairement que $\mathcal{H}_{quad}$ est indépendant de g_2 . Cela implique donc que le moment associé G_2 est une constante du mouvement et qu'il en est de même pour e_2 car $\frac{de_2}{dt}$ est obtenu via l'équivalent de l'équation 3.20 pour le cas quadrupole :

$$\frac{de_2}{dt} = -\frac{\partial e_2}{\partial G_2} \frac{\partial \mathcal{H}_{quad}}{\partial g_2}. \quad (4.4)$$

Or, le second terme de 4.4 est nul car l'Hamiltonien quadrupole est indépendant de g_2 .

Les équations du mouvement de l'Hamiltonien quadrupole sont obtenues via les équations suivantes :

$$\begin{aligned} \frac{de_1}{dt} &= -\frac{\partial e_1}{\partial G_1} \frac{\partial \mathcal{H}_{quad}}{\partial g_1}, \\ \frac{dg_1}{dt} &= \frac{\partial \mathcal{H}_{quad}}{\partial G_1}, \end{aligned}$$

et valent donc

$$\frac{de_1}{dt} = C_2 \frac{1 - e_1^2}{G_1} [30e_1(1 - \theta^2) \sin 2g_1] \quad (4.5)$$

$$\frac{dg_1}{dt} = C_2 6 \left\{ \frac{1}{G_1} [4\theta^2 + (5 \cos 2g_1 - 1)(1 - e_1^2 - \theta^2)] + \frac{\theta}{G_2} [2 + e_1^2(3 - 5 \cos 2g_1)] \right\} \quad (4.6)$$

La théorie octupole, quant à elle, a deux degrés de liberté et prend donc en compte l'influence due à l'argument du péricentre g_2 sur la dynamique. Les seules quantités conservées sont le moment angulaire total et l'énergie totale. Dans cette théorie, l'excentricité e_2 ne sera plus constante mais variera au cours du temps.

4.2 Problème des trois corps restreint

Pour commencer, nous allons regarder plus en détail la dynamique du problème des trois corps restreint, c'est-à-dire que les masses choisies sont telles qu'une masse est négligeable par rapport aux autres. Comme exemples concrets, nous pouvons citer le système Soleil-astéroïde-Jupiter ($m_1 \ll m_2 \ll m_0$) ou plus généralement un système du type : 1 planète et 2 étoiles. Le cas Soleil-astéroïde-Jupiter illustre bien le problème des trois corps restreint car la masse de l'astéroïde, de l'ordre de $\approx 10^{-10}$ masse solaire, est clairement négligeable vis-à-vis du Soleil et Jupiter (environ un millièème de la masse solaire). Pour reproduire de tels cas, nous avons choisi les valeurs des paramètres suivantes : Nous respectons bien les conditions pour avoir un système restreint, c'est-à-dire un système dans lequel nous pouvons négliger un des trois corps (beaucoup plus léger que les deux autres). Dans notre cas, il s'agit de m_1 .

Paramètre	Valeur
m_0	$1 M_\odot$
m_1	$9,5492.10^{-8} M_\odot$
m_2	$9,5492.10^{-4} M_\odot$
a_1	$0,05 \text{ UA}$
a_2	1 UA

TABLE 4.1 – Tableau reprenant les valeurs employées dans le cas restreint ¹.

Ensuite, nous choisissons les valeurs initiales des quatre variables dont nous allons observer l'évolution, à savoir les excentricités de chacune des orbites ainsi que les arguments des périastres de chacune d'elles :

- $e_1 = 10^{-6}$;
- $e_2 = 0,3$;
- $g_1 = 0^\circ$;
- $g_2 = 0^\circ$.

Nous supposons que la masse m_1 est sur une orbite presque circulaire ($e_1 = 10^{-6}$) autour de m_0 tandis que l'orbite effectuée par m_2 autour de m_0 est assez elliptique. De même, nous fixons la valeur du moment angulaire total H à

$$H = \sqrt{2G_1G_2 \cos i + G_1^2 + G_2^2} \approx 5,72 \times 10^{-3} \quad M_\odot \times (\text{UA})^2 \times (\text{années})^{-1}$$

de sorte à considérer une inclinaison mutuelle initiale de 15° .

Dans la suite, nous allons différencier deux cas : le cas quadrupole et le cas octupole, afin de voir quelle(s) précision(s) apporte le cas octupole.

4.2.1 Cas quadrupole

A la figure 4.1 sont représentées les évolutions temporelles de l'excentricité e_1 et de l'argument du périastre g_1 de l'approche quadrupole. Le fait le plus marquant du graphique de la figure 4.2 représentant l'évolution de l'excentricité du corps perturbateur m_2 au cours du temps est que e_2 reste constante, comme expliqué dans l'introduction.

Nous constatons que les graphes de e_1 et g_1 montrent un mouvement périodique dont la période diffère d'un graphe à l'autre. En effet, pour ce qui est de l'excentricité de m_1 (e_1), nous constatons que la période est de l'ordre de 30 000 ans et elle oscille entre un maximum de $1,1 \times 10^{-6}$ et un minimum de 1×10^{-6} . Ces oscillations sont très petites (de l'ordre de $0,1 \times 10^{-6}$), ce qui signifie que m_1 orbite autour de m_0 avec une excentricité presque constante et très proche de zéro (orbite circulaire).

Pour ce qui est de l'argument du périastre g_1 (deuxième colonne de la figure 4.1), nous remarquons qu'il circule entre 0° et 360° avec une période de l'ordre de 60 000 ans.

1. Le symbole $M_\odot$ signifie masse solaire et cet unité vaut $1,9891 \times 10^{30} \text{ kg}$.

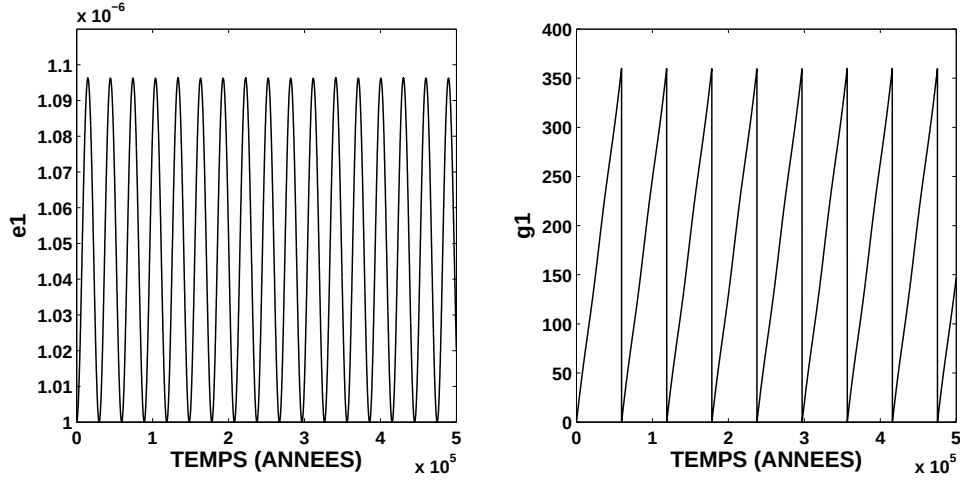


FIGURE 4.1 – Graphique de l'évolution temporelle de e_1 (à gauche), g_1 (à droite) pour le cas restreint quadrupole.

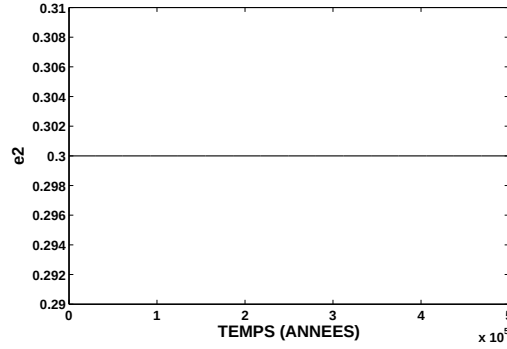


FIGURE 4.2 – Graphique de l'évolution temporelle de e_2 pour le cas restreint quadrupole.

En ce qui concerne l'argument du périastre g_2 (relatif à l'orbite de m_2 autour de m_0), nous n'avons pas pris la peine de tracer son évolution au cours du temps étant donné que nous sommes dans le cas quadrupole et que les seules variables sont e_1 et g_1 .

En regardant bien la figure 4.1, nous remarquons que la période de e_1 (que nous allons noter T_{e_1}) vaut la moitié de la celle de g_1 (T_{g_1}). Comme nous travaillons avec l'Hamiltonien quadrupole qui ne possède qu'un degré de liberté, il est logique de n'observer qu'une seule fréquence principale. Et le lien entre T_{e_1} et T_{g_1} se justifie par l'équation 4.5 dans laquelle la dérivée temporelle de e_1 dépend explicitement de $2g_1$ et implique donc que

$$T_{g_1} = 2T_{e_1}.$$

Pour illustrer ce lien, nous avons tracé le graphe de $2g_1$ à la figure 4.3.

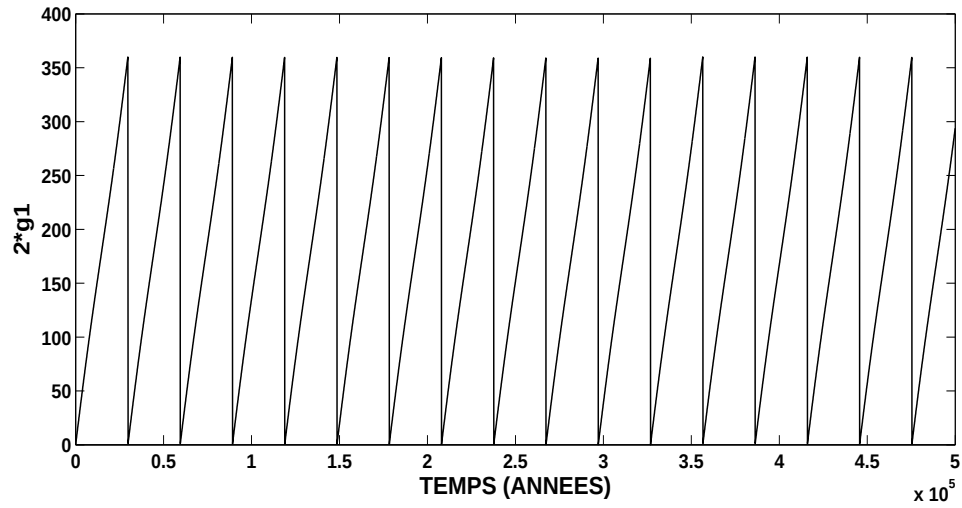


FIGURE 4.3 – Graphique de l'évolution temporelle de $2g_1$ pour le cas restreint quadrupole.

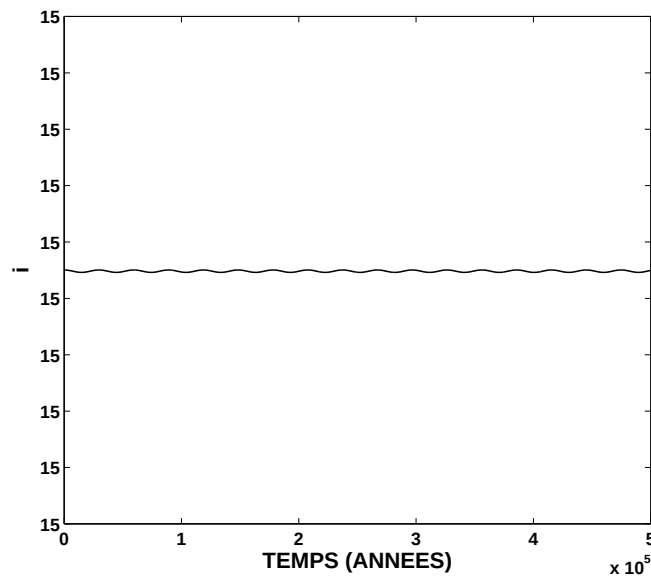


FIGURE 4.4 – Graphique de l'évolution temporelle de i pour le cas restreint quadrupole.

De plus, si nous traçons i au cours du temps (cfr. figure 4.4) en utilisant une version

modifiée de la relation 3.9

$$i(e_1, e_2) = \arccos \left(\frac{H^2 - L_1^2(1 - e_1^2) - L_2^2(1 - e_2^2)}{2 L_1 \sqrt{1 - e_1^2} L_2 \sqrt{1 - e_2^2}} \right), \quad (4.7)$$

nous pouvons deviner cette même période. Les oscillations de i sont très faibles car, au vu de l'équation 4.7, seule l'influence de e_1 compte et ne génèrera que de très petites variations pour i car cette excentricité est de l'ordre de 10^{-6}

En conclusion, dans le problème des trois corps étudié via l'Hamiltonien quadrupole, les variations de l'excentricité du corps négligeable sont très petites voir nulles. Comme nous le montrerons dans la section suivante, ceci souligne une faiblesse du modèle quadrupole qui ne décrit pas correctement la variation en excentricité de m_1 . Quant à l'argument du périastre g_1 , sa période de circulation met en évidence le lien existant avec e_1 , à savoir que la période de g_1 est le double de celle de e_1 à cause de l'équation 4.5. Cette période souligne l'existence d'une seule fréquence principale lorsque le problème des trois corps est étudié via la théorie quadrupole.

4.2.2 Cas octupole

Nous allons maintenant nous attaquer au cas restreint étudié via l'Hamiltonien octupole. Pour ce faire, nous allons analyser les graphes à la figure 4.5.

Nous voyons d'ores et déjà que le cas octupole fait ressortir une variation, si minime soit elle, de l'excentricité e_2 . En effet, la variation de e_2 se voit aux alentours de la septième décimale. C'est pourquoi la graduation de l'axe horizontal du graphe de e_2 reste à la valeur initiale 0,3. La variation est certes faible mais néanmoins notable.

Concernant l'excentricité de l'orbite de m_1 autour de m_0 (e_1), l'octupole fait ressortir l'existence de deux fréquences principales dues au deux degrés de liberté de l'Hamiltonien octupole. Le mouvement décrit par e_1 n'est plus sinusoïdale mais montre tout de même l'existence des oscillations ayant une période d'environ 125 000 ans. Les oscillations sont caractérisées par un "double maximum". En effet, les sommets d'oscillations ne sont pas parfaitement courbés mais présentent deux pics (plus visibles à la première et dernière oscillation du graphe de e_1 à la figure 4.5). De plus, les variations de e_1 dans le cas octupole sont beaucoup plus grandes que celles observées pour le cas quadrupole : leur amplitude est à présent de 0,04 et ne sont plus de 1×10^{-7} . Cette différence est due au fait que C_3 intervient dans l'octupole et pas dans le quadrupole.

Passons à l'argument du périastre de m_1 , g_1 qui est l'argument du périastre relatif à l'orbite de la binaire que forme m_1 avec m_0 . Le graphe présentant son évolution (cfr. figure 4.5) montre que cet angle circule avec une période difficile à estimer à l'œil nu. Ces irrégularités sont le résultat d'une combinaison des deux périodes principales que nous avons observées sur le graphe de l'excentricité e_1 .

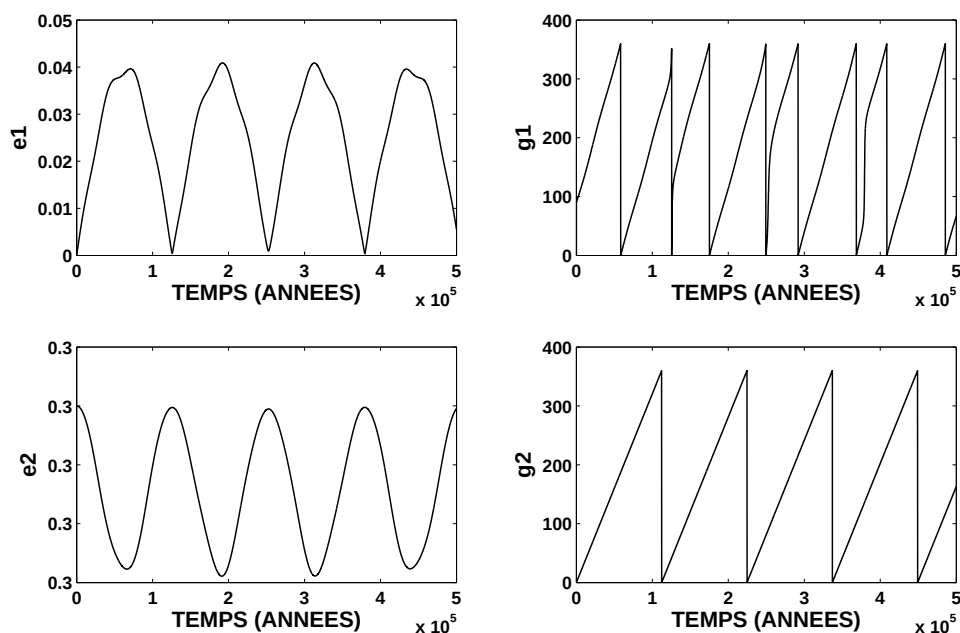


FIGURE 4.5 – Graphique de l'évolution temporelle de e_1 (en haut à gauche), g_1 (en haut à droite), e_2 (en bas à gauche) et g_2 (en bas à droite) pour le cas restreint octupole.

Ces deux périodes principales sont plus évidentes à identifier sur les graphes des figure 4.6, 4.7 et 4.8. La première période principale est celle de $g_1 - g_2$ (cfr. figure 4.6) et la seconde est celle de $2g_1$ (cfr. figure 4.8).

La période principale observable sur le graphe de $g_1 - g_2$ (cfr. figure 4.6) est la même que celle des excentricités e_1 et e_2 et vaut environ $1,25 \times 10^5$ ans.

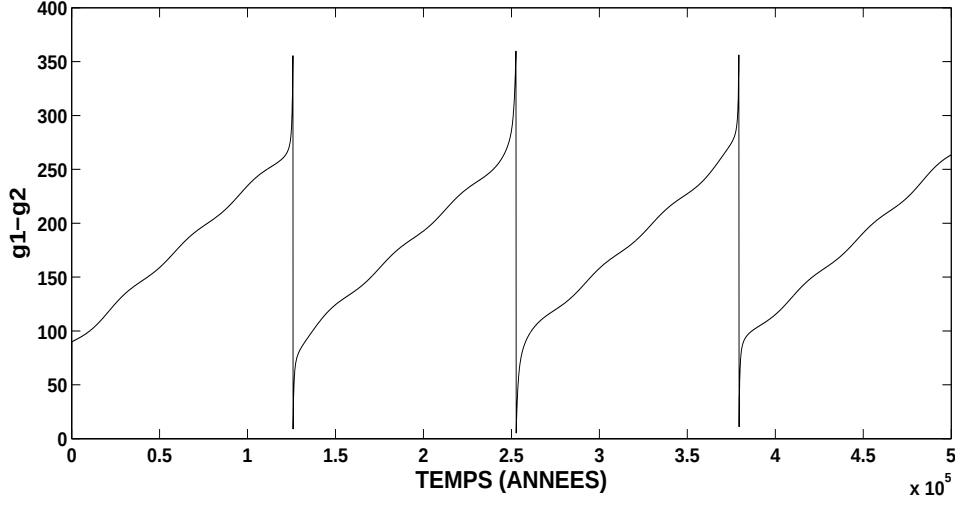


FIGURE 4.6 – Graphique de l'évolution temporelle de la différence $g_1 - g_2$ pour le cas restreint octupole.

Nous avons également tracé les évolutions de l'inclinaison i et l'angle $2g_1$ (cfr. figures 4.7 et 4.8). La période de ces deux éléments est étroitement liée et constitue la seconde période principale. En effet, nous remarquons que lorsque i atteint un maximum, $2g_1$ vaut 0° et lorsque i est minimum, $2g_1$ vaut 180° .

Après ces observations, il nous semble évident que l'apport de la partie Hamiltonienne octupole sur la dynamique est réellement significatif. En effet, cela se traduit notamment par des variations de e_2 qui sont visibles grâce à l'octupole et non le quadrupole. D'autre part, nous constatons que l'amplitude des oscillations de e_1 change d'une théorie à l'autre, à savoir que dans le cas quadrupole, elle ne bougeait que très peu (de l'ordre de 10^{-7}), par contre dans le cas octupole, elle atteint un maximum à la valeur 0,04. Enfin, une autre observation importante est celle des périodes principales. Dans le cas quadrupole, il n'y en a qu'une ($T_{g_1} = 2T_{e_1}$) car le problème ne possède qu'un degré de liberté, alors que dans le cas octupole, nous discernons deux périodes principales. Ces périodes sont très visibles sur les graphes de e_1 et g_1 mais le sont moins sur ceux de e_2 et g_2 . En effet, m_2 étant beaucoup plus massive que m_1 son influence sur m_1 sera d'autant plus visible (cfr. graphes de e_1 et g_1 à la figure 4.5). Au contraire, l'action qu'aura m_1 sur m_2 , bien qu'existante, ne ressortira pas énormément sur les graphes de e_2 et g_2 (cfr. figure 4.5). Les graphes des angles $g_1 - g_2$, i et $2g_1$ (cfr. figures 4.6, 4.7 et 4.8 respectivement) soulignent l'existence de ces deux périodes. Ainsi les évolutions de tous les éléments orbitaux dépendent uniquement de ces deux périodes principales.

Pour conclure, l'octupole modifie beaucoup le mouvement et est une meilleure approximation de la dynamique que le quadrupole qui ne peut pas être utilisé pour des

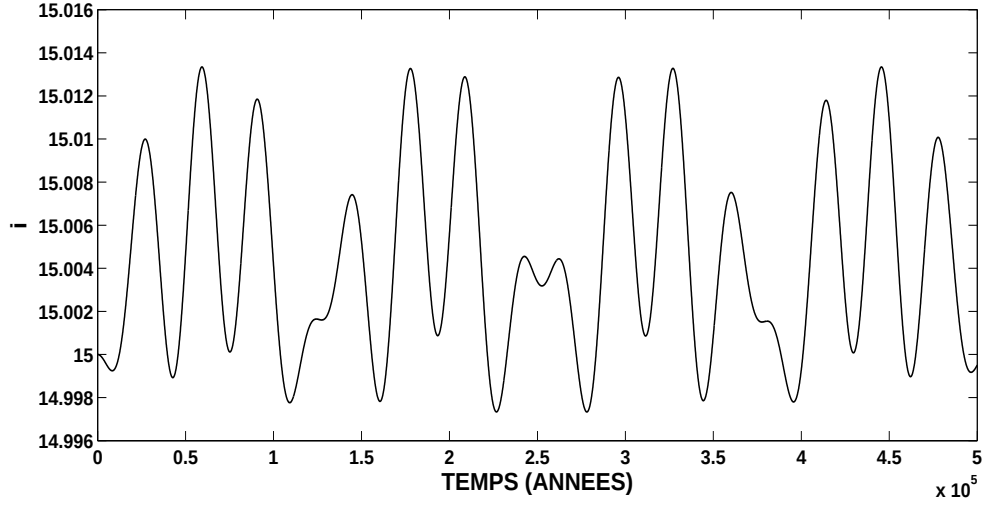


FIGURE 4.7 – Graphique de l'évolution temporelle de l'inclinaison i pour le cas restreint octupole.

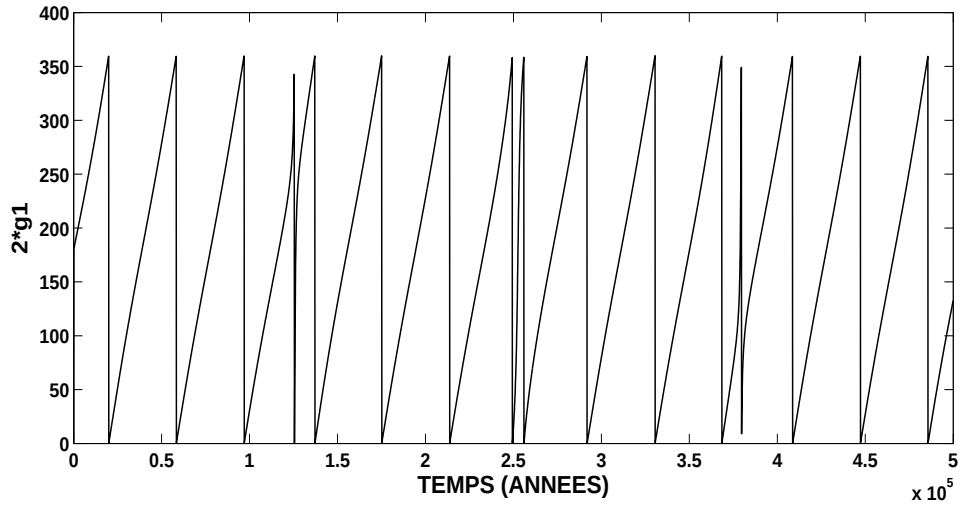


FIGURE 4.8 – Graphique de l'évolution temporelle de l'angle $2g_1$ pour le cas restreint octupole.

excentricités e_2 trop grandes. En effet, e_2 étant grande, l'orbite de m_2 décrit une ellipse et passera plus près de m_1 qui en subira d'autant plus l'influence.

4.3 Problème général des trois corps

4.3.1 Introduction

Dans cette section, nous allons confronter nos résultats à ceux obtenus par Ford et ses collègues dans l'article sur lequel est basée notre étude (cfr. article [1]). Dans cet article, ils développent théoriquement l'Hamiltonien dans le but d'obtenir la formulation octupole. Une fois les équations du mouvement obtenues, ils s'intéressent au comportement des éléments orbitaux en effectuant l'intégration du problème des trois corps complet, c'est-à-dire le problème des trois corps incluant les courtes périodes (cfr. équations 2.2-2.3) au moyen d'un logiciel numérique (MVS Integrator). Ils concluent que l'approche octupole est une bonne approximation de la dynamique, sans même comparer les évolutions analytiques et numériques d'un même système sur un même graphe. Afin de vérifier leur affirmation, nous allons tracer l'évolution de quelques systèmes hiérarchiques triples à partir de la formulation octupole et vérifier qu'elle décrit correctement le système. Nous allons donc tenter de confirmer que l'approximation octupole concorde bien avec les tests et observations effectuées par Ford et ses collègues. Nous traçons nos graphes à partir des paramètres repris dans la table 4.2.

Paramètre	Valeur
m_0	$1 M_\odot$
m_1	$10^{-3} M_\odot$
m_2	$10^{-2} M_\odot$
a_1	0,05 UA
a_2	5 UA

TABLE 4.2 – Tableau reprenant les valeurs employées pour recréer le cas étudié à la figure 7. de l'article [1].

Quant aux valeurs initiales des excentricités et des arguments des périastres, elles valent

- $e_1 = 10^{-5}$;
- $e_2 = 0,05$;
- $g_1 = 0^\circ$;
- $g_2 = 180^\circ$.

Nous avons choisi des valeurs de demi-grands axes a_1 et a_2 de sorte à ce que la condition $\alpha^{-1} = 100$ soit respectée². Etant donné qu'il n'était pas précisé les valeurs à prendre pour ces demi-grands axes, nous avons effectué des tests sur plusieurs valeurs possibles de a_1 et a_2 . Nous avons donc décidé de prendre ces valeurs égales à $a_1 = 0,05$ UA et $a_2 = 5$ UA car elles semblaient être le plus en accord avec les graphes de l'article [1].

Nous allons différencier deux cas selon l'inclinaison mutuelle des plans orbitaux : faibles inclinaisons mutuelles et inclinaisons mutuelles élevées. En effet cette division

2. Cette condition est posée par Ford et ses collègues dans la légende de la figure 4.14.

est faite car pour de faibles inclinaisons, le terme octupole prime alors que pour des inclinaisons élevées, celui-ci se dissipe. Nous allons donc vérifier ces faits et tenter de comprendre mieux l'influence qu'a l'octupole.

4.3.2 Faibles inclinaisons mutuelles

Nous allons d'abord travailler avec une inclinaison mutuelle faible. En effet, nous prendrons la même valeur pour i que celle employée par Ford et ses collègues pour réaliser les graphes de la figure 4.9 (figure issue de l'article [1]), c'est-à-dire $i = 15^\circ$.

D'après les graphes effectués par Ford et son équipe (cfr. 4.9), l'influence octupole est très visible. En effet, nous constatons que l'excentricité e_1 présente des "doubles maxima" dus aux deux fréquences principales de la théorie octupole. Ces "doubles maxima" sont propres à la théorie octupole car ils soulignent le nombre de degrés de liberté qu'a la théorie octupole, à savoir deux. De plus, nous observons que l'excentricité e_1 est sujette à des oscillations très faibles ayant une amplitude d'environ 0,001. L'argument du périastre de la binaire proche (constituée de m_0 et m_1), g_1 , semble circuler de façon régulière.

Quant aux éléments orbitaux relatifs à l'orbite décrite par m_2 autour de la binaire, leurs mouvements sont plus difficiles à visualiser. Nous pouvons néanmoins dire que les variations de l'excentricité e_2 sont relativement élevées. En effet, e_2 possède une amplitude d'environ 0,03. Concernant l'argument du périastre de l'orbite du troisième corps par rapport à la binaire, g_2 , il varie avec une amplitude d'environ 40° .

Nous allons maintenant confronter le graphe obtenu par Ford et ses collègues (cfr. [1]) à ceux que nous avons tracés à partir des paramètres et conditions initiales donnés dans la section 4.3.1. Cette confrontation nous permettra de voir si la théorie octupole est une bonne approximation pour les éléments orbitaux du problème des trois corps à faibles inclinaisons mutuelles.

A la figure 4.10, nous avons réalisé les graphes des variables étudiées : e_1 , e_2 , g_1 et g_2 . Nous pouvons clairement voir que l'excentricité e_1 a une courbe très similaire à celle observée dans l'article de Ford et al. (cfr figure 4.9 issue de l'article [1]). Dans les deux cas, elle présente les "doubles maxima" caractéristiques à l'influence octupole. L'évolution de g_1 à la figure 4.10 montre la circulation typique dans le cas où l'influence de l'octupole prime sur celle du quadrupole. Cette circulation est aussi visible à la figure de l'article [1] (cfr. figure 4.9).

Quant aux éléments de l'orbite du troisième corps autour de la binaire proche, ils ne présentent pas visiblement les deux fréquences principales. Les oscillations très régulières de e_2 proviennent de variations au niveau de la sixième décimale. Nous pouvons remarquer un lien entre e_1 et e_2 , à savoir que lorsque e_1 atteint un maximum, e_2 atteint un minimum. Ces deux éléments orbitaux ont d'ailleurs même période : $\sim 1,75 \times 10^6$

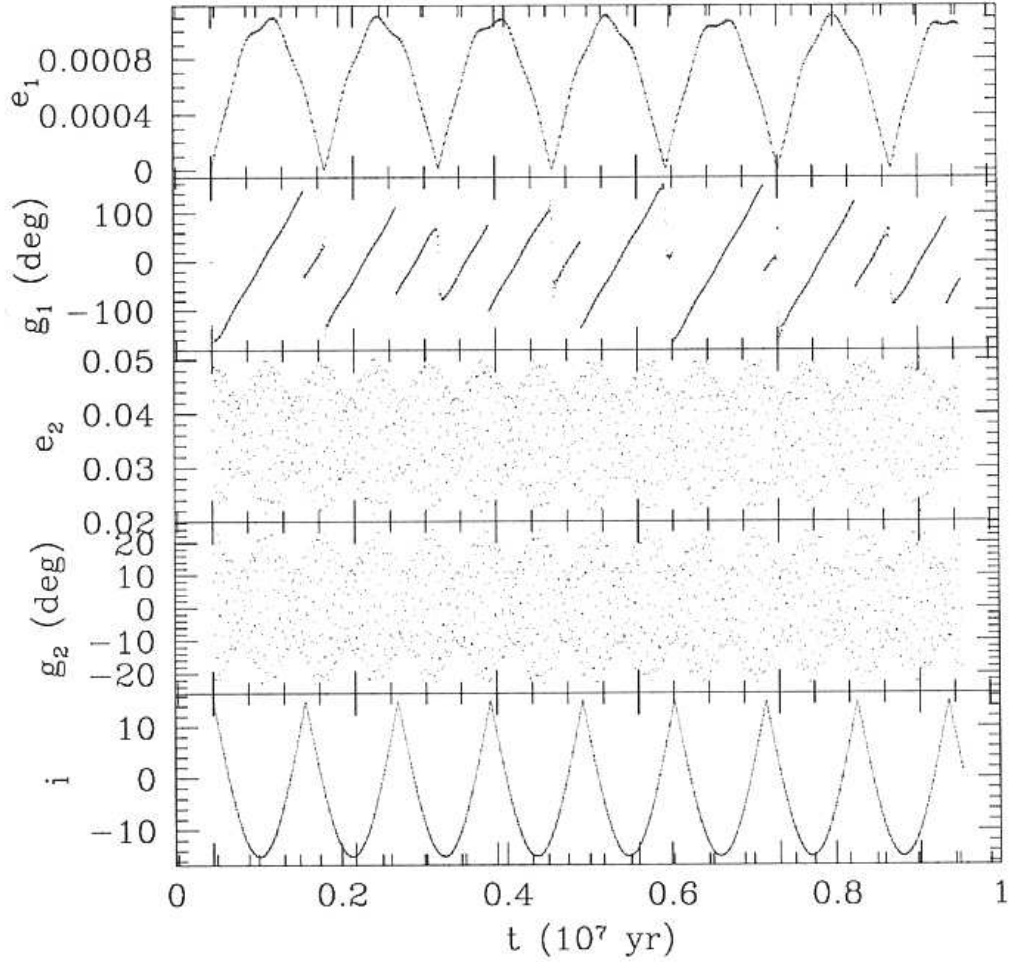


FIG. 8.—Typical evolution of a system in the low-inclination regime. All parameters are as in Fig. 7, except that the initial inclination $i = 15^\circ$. These results were obtained using numerical MVS integrations.

FIGURE 4.9 – Graphiques obtenus par Ford et ses collègues via intégrations numériques du problème des trois corps complet à partir de $i = 15^\circ$.

années. Quant à g_2 , l'angle décrivant l'argument du périastre de l'orbite de m_2 , il décrit une circulation régulière avec une période d'environ $1,5 \times 10^6$ années. Il est difficile de comparer les graphes que nous avons obtenus (cfr. figure 4.10) avec ceux de Ford et ses collaborateurs (cfr. figure 4.9). En effet, dans le cas de la figure 4.9, l'évolution de e_2 et g_2 est tracée à l'aide de points qui n'ont pas l'air de se joindre pour former une courbe alors

que dans la figure 4.10 que nous avons réalisée, nous pouvons visualiser des oscillations pour ces deux variables. Ceci s'explique par le fait que les évolutions de la figure 4.9 ont été réalisées à partir d'une intégration numérique prenant en compte les courtes périodes du mouvement, contrairement à l'approche simplifiée analytique que nous utilisons.

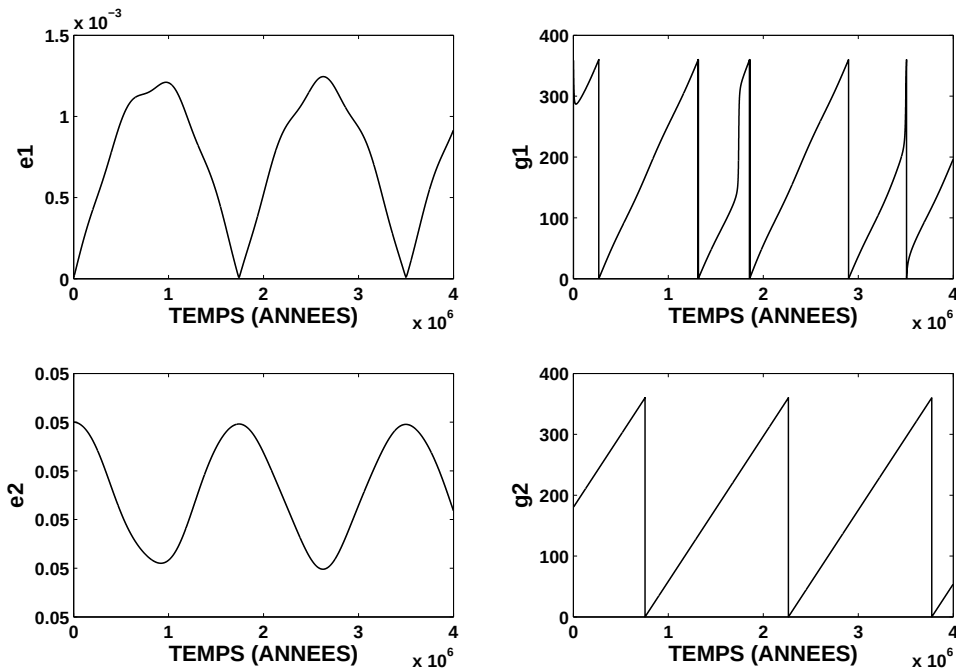


FIGURE 4.10 – Graphique de l'évolution temporelle de e_1 (en haut à gauche), g_1 (en haut à droite), e_2 (en bas à gauche) et g_2 (en bas à droite) pour le problème des trois corps étudié dans l'article [1] avec une inclinaison mutuelle i de 15° .

De plus, nous pouvons constater, en traçant le graphe de $g_1 - g_2$ (cfr. figure 4.11), que cet angle oscille à la même fréquence principale que les excentricités e_1 et e_2 . Nous avons déjà remarqué ce couplage dans l'étude octupole du problème des trois corps restreint. Il est donc normal de l'observer à nouveau dans le problème des trois corps à inclinaison faible. Cette période correspond à la fréquence principale de l'octupole.

Nous observons également que les angles i et $2g_1$ sont liés. En effet, à la figure 4.12, l'inclinaison i reproduit des oscillations (très faibles, discernables à partir de la septième décimale) similaires à celles que nous avons observées à la figure 4.7 pour le problème des trois corps restreint. Il s'agit d'oscillations en parties régulières. Les parties régulières correspondent aux intervalles où l'angle $2g_1$ (cfr. figure 4.13) circule à vitesse constante. Les parties irrégulières de i sont celles comportant des "doubles maxima" et correspondent aux moments où $2g_1$ présente des circulations accélérées.

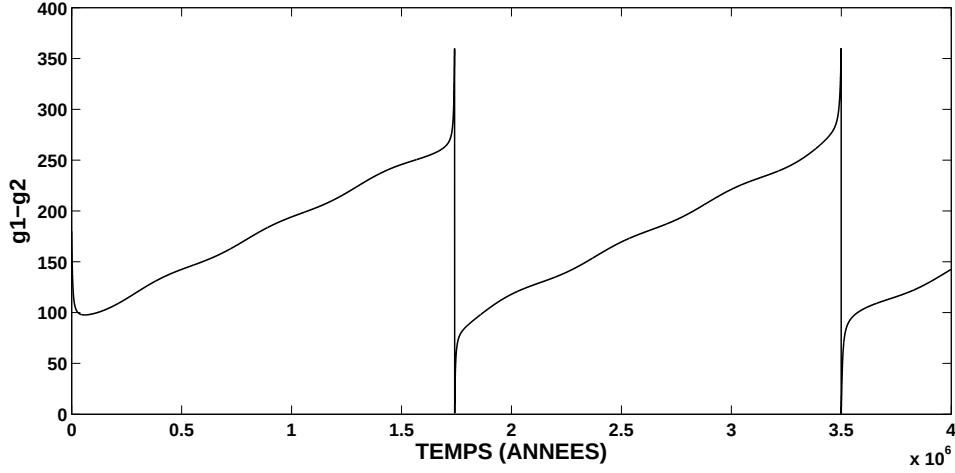


FIGURE 4.11 – Graphique de l'évolution temporelle de la différence $g_1 - g_2$ pour le problème des trois corps étudié dans l'article [1] avec une inclinaison mutuelle i de 15° .

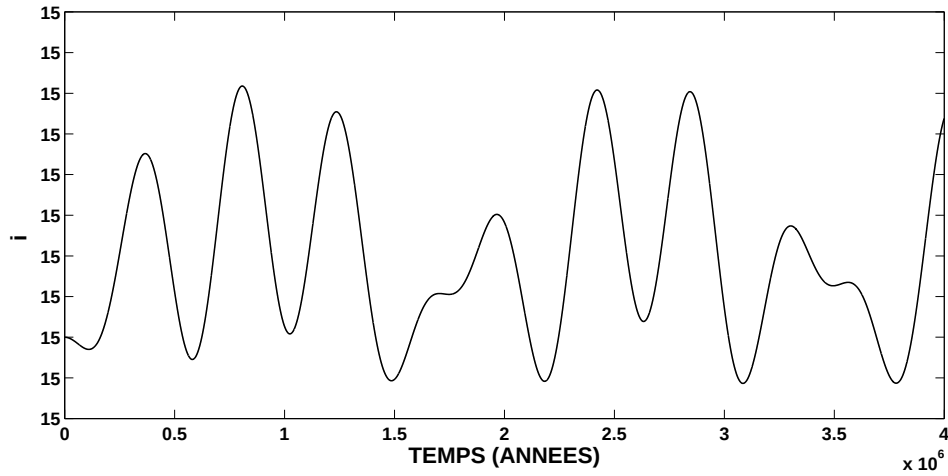


FIGURE 4.12 – Graphique de l'évolution temporelle de l'inclinaison i pour le problème des trois corps étudié dans l'article [1] avec une inclinaison mutuelle i de 15° .

Nous pouvons conclure que dans l'étude octupole du problème des trois corps à partir d'inclinaisons mutuelle faibles ($i \leq 40^\circ$), l'influence octupole est mise en évidence. En effet, les graphes de e_1 , e_2 et $g_1 - g_2$ (voir figures 4.10 et 4.11) mettent en avant l'une des deux fréquences principales de l'octupole et les graphes de i et $2g_1$ (voir figures 4.12 et 4.13) font ressortir la seconde fréquence principale. Nous pouvons aussi souligner que e_1 présente les deux fréquences liées aux deux degrés de liberté que possède l'octupole.

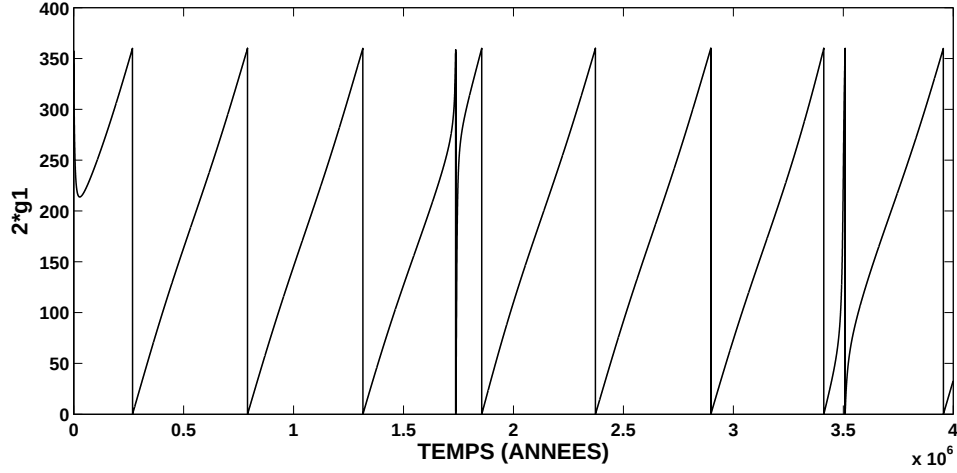


FIGURE 4.13 – Graphique de l'évolution temporelle de l'angle $2g_1$ pour le problème des trois corps étudié dans l'article [1] avec une inclinaison mutuelle i de 15° .

Ces couplages ne seront pas observables pour des inclinaisons plus élevées ($i \geq 40^\circ$) car dans ces cas-là, l'influence de l'octupole se dissipe et celle du quadrupole prend une plus grande ampleur.

4.3.3 Inclinaisons mutuelles élevées

Nous allons maintenant étudier l'évolution des éléments orbitaux à partir d'inclinaisons mutuelles élevées. D'après l'article [1], lorsque l'inclinaison est plus élevée qu'un seuil de 40° , les effets de l'octupole se dissipent pour laisser place à ceux du quadrupole.

Nous pouvons d'ores et déjà le constater à la figure 4.14 (issue de l'article [1]) car notamment l'amplitude des oscillations de e_1 est beaucoup plus grande que dans le cas étudié à la section 4.3.2. Nous allons voir si les graphes que nous obtenons avec l'intégration des équations du mouvement 3.22-3.25 correspondent à ceux que les auteurs de l'article [1] obtiennent à partir de l'intégration du problème des trois corps complet.

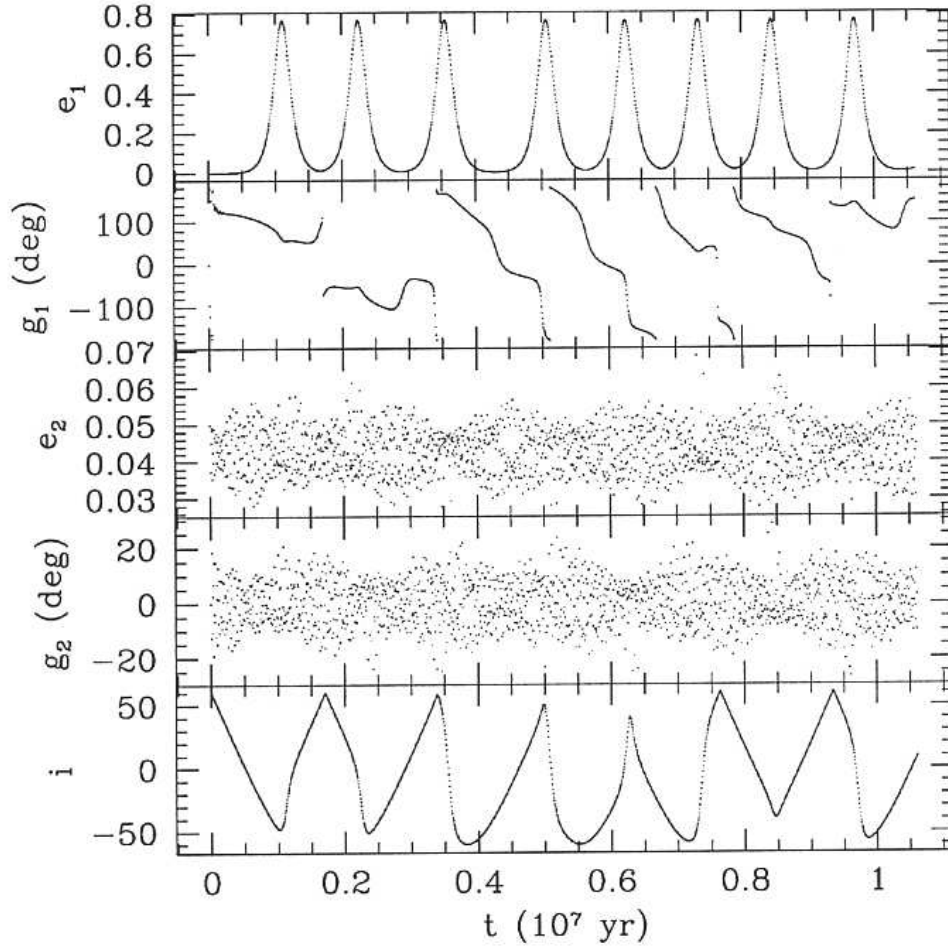


FIG. 7.—Typical evolution of the eccentricities, longitudes of periastron, and relative inclination for a system in the high-inclination regime. Here $m_1/m_0 = 10^{-3}$, $m_2/m_0 = 0.01$, $\alpha^{-1} = 100$, the initial inclination $i = 60^\circ$, and the initial eccentricities $e_1 = 10^{-5}$ and $e_2 = 0.05$. Time is given in years assuming $a_1 = 1$ AU and $m_0 = 1 M_\odot$. These results were obtained using numerical MVS integrations.

FIGURE 4.14 – Graphiques issu de l'article [1] ($i = 60^\circ$).

Nous pouvons voir que le graphe de e_1 (cfr. figure 4.15) ressemble fortement à celui qu'obtiennent Ford et ses collaborateurs (cfr. figure 4.14). En effet, la période d'oscillation est, dans les deux graphes, situées aux alentours de 2 millions d'années. De plus, la

valeur maximale de e_1 dans le graphe que nous avons tracé semble concorder avec celle qu'atteint e_1 dans le graphe de Ford et ses collègues (proche de 0.8). L'excentricité e_1 semble avoir un mouvement sinusoïdale et a exactement la même période que $2g_1$ (voir figure 4.15), ce qui est normal car si nous reprenons l'équation 3.22, nous constatons que la dérivée temporelle de e_1 dépend du facteur $\sin 2g_1$. Enfin, nous pouvons observer un lien évident entre e_1 , e_2 et i (cfr. figure 4.15). En effet, ils atteignent leurs extrema au même temps $t \approx 1,3 \times 10^6$ ans.

Quant à g_1 , son évolution n'est plus celle connue dans le cas restreint, elle montre une augmentation par paliers et est, de ce fait, beaucoup plus dure à analyser. Il semble que cet angle passe près de 2×10^6 ans proche de la valeur 270° , avant de brusquement rejoindre une valeur proche de 90° . Ce comportement est à mettre en relation avec la résonance de Kozai (cfr. [14]). En effet, le problème des trois corps est caractérisé par l'existence d'un équilibre stable en $e_1 = e_2 = 0$ lorsque nous considérons de faibles inclinaisons mutuelles entre les deux orbites. Pour des valeurs supérieures à environ 40° , cet équilibre devient instable et donne naissance à deux nouveaux équilibres stables appelés "équilibres de Lidov-Kozai" et caractérisés par $g_1 = 90^\circ$ et $g_1 = 270^\circ$.

Ainsi le système hiérarchique triple considéré à la section 4.3.2 consiste en une circulation autour de l'équilibre correspondant aux orbites circulaires de faible inclinaison mutuelle. Ceci explique les faibles variations en excentricités observées à la figure 4.10. Au contraire, les grandes variations en e_1 observées lorsque nous considérons une inclinaison mutuelle de 60° (cfr. figure 4.15) s'expliquent par le fait que le système reste proche de la séparatrice émanant de l'équilibre instable et englobant les deux équilibres de Kozai. Cela explique également les signes d'instabilités visibles dans les évolutions temporelles de la figure 4.15, notamment la périodicité non-régulière des extrema de e_1 .

En conclusion, l'inclinaison élevée i implique des changements remarquables aux niveaux du comportement général du système (évolutions des éléments orbitaux). Le changement majeur se situe au niveau de l'évolution de l'excentricité e_1 . En effet, pour de petites inclinaisons, les oscillations atteignaient un maximum tournant autour de 0,001. Pour des inclinaisons élevées, l'excentricité e_1 monte jusqu'à des valeurs proches de 0,8. De plus, nous observons aussi une différence d'oscillation au niveau de l'inclinaison. Elle ne bougeait que très peu dans le cas où sa valeur initiale valait 15° alors que ses variations sont beaucoup plus grandes en démarrant de la valeur 60° . Cependant, les variations de e_2 restent dans les deux cas relativement faibles.

Nous avons souligné, dans les sections 4.3.2 et 4.2.2, les liens qu'entretenaient les éléments orbitaux entre eux. D'une part, nous observions que les périodes principales de e_1 , e_2 et $g_1 - g_2$ étaient les mêmes. D'autre part, le comportement général de i et $2g_1$ était étroitement lié (ces deux variables étaient régulières sur les mêmes intervalles). Dans le cas que nous avons étudié au cours de cette section, ces couplages ne sont plus observables. En effet, e_1 et e_2 (cfr. figure 4.15) ne possèdent pas la même période que

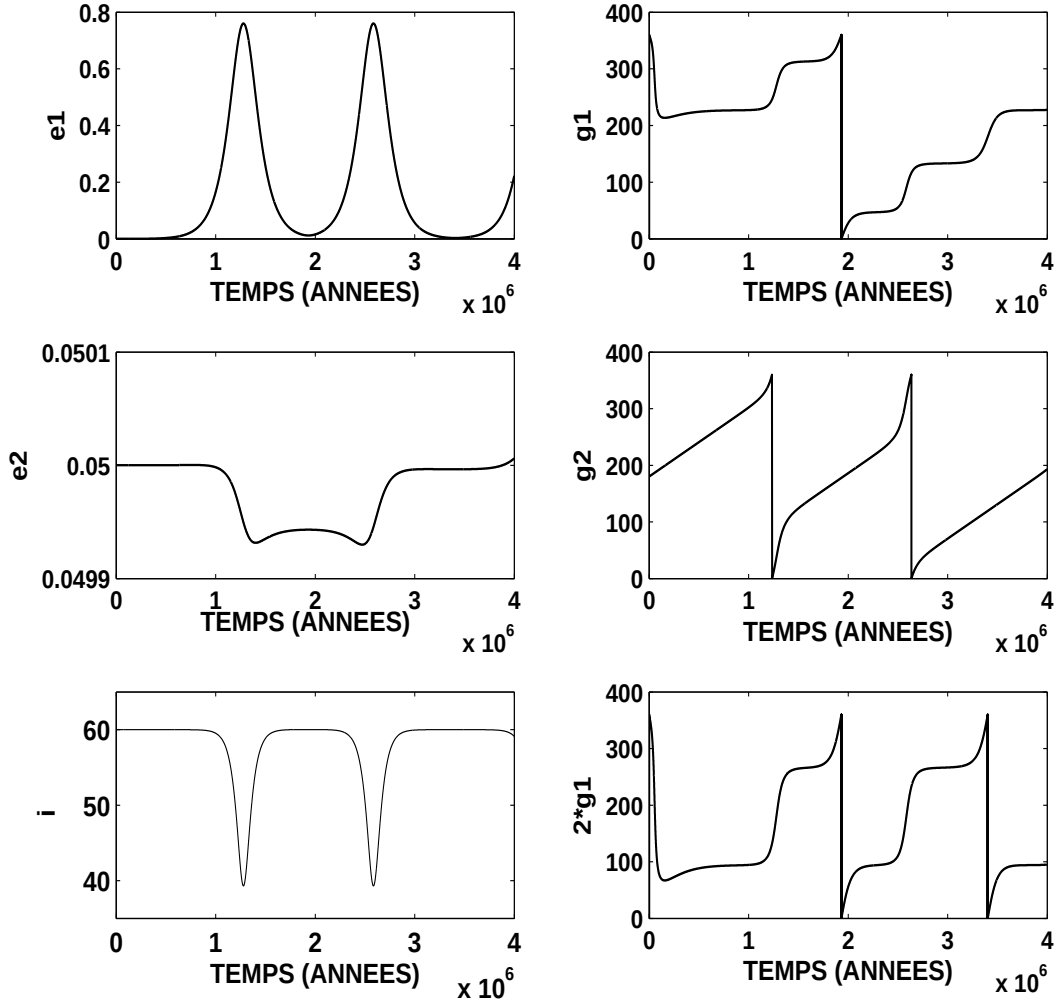


FIGURE 4.15 – Graphique de l'évolution temporelle de e_1 (en haut à gauche), g_1 (en haut à droite), e_2 (au milieu à gauche), g_2 (au milieu à droite), i (en bas à gauche) et $2g_1$ (en bas à droite) pour le problème des trois corps étudié dans l'article [1] avec une inclinaison mutuelle i de 60° .

$g_1 - g_2$ (cfr. figure 4.16). Il n'y a plus de lien visible entre l'inclinaison i et l'angle $2g_1$. Néanmoins, de nouveaux liens se créent, notamment nous pouvons remarquer que e_1 et $2g_1$ possèdent la même période.

Soulignons aussi le comportement très différents de l'excentricité e_1 entre le cas où l'inclinaison mutuelle vaut 15° et celui dont nous nous occupons actuellement ($i = 60^\circ$).

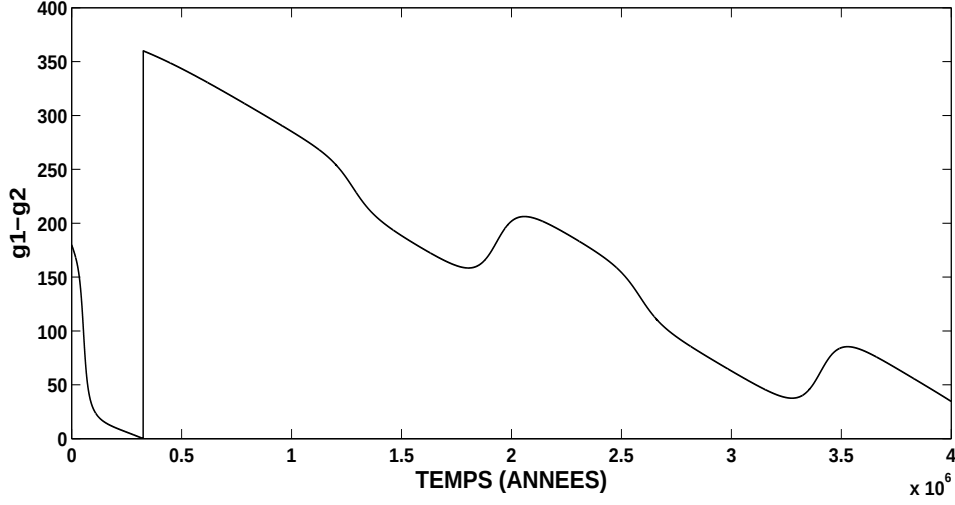


FIGURE 4.16 – Graphique de l'évolution temporelle de $g_1 - g_2$ pour le problème des trois corps étudié dans l'article [1] avec une inclinaison mutuelle i de 60° .

Effectivement, deux valeurs extrémales de e_1 ne sont plus séparées par le même intervalle de temps. Les extrema dans le cas $i = 15^\circ$ arrivent après le même laps de temps (tous les $1,75 \times 10^6$ ans). Alors que dans le cas $i = 60^\circ$, ce temps n'est pas constant. En effet, avant la première oscillation, il vaut à environ $0,5 \times 10^6$ ans. Le temps pour atteindre l'oscillation suivante est plus petit : $0,1 \times 10^6$. Cette différence souligne une instabilité dans la dynamique.

4.3.4 Approche octupole erronée et discussion sur l'erratum

Ford et ses collègues ont fait paraître un erratum signalant une erreur commise dans le signe de C_3 (au lieu d'être C_3 , il devait s'agir de $-C_3$). Nous avons fait les graphes des sections qui précèdent à partir du C_3 corrigé. Dans cette section, nous allons travailler sur l'approche octupole erronée, c'est-à-dire que le coefficient C_3 est positif :

$$C_3 = \frac{15}{16} \frac{\mathcal{G}^2}{4} \frac{(m_0 + m_1)^9}{(m_0 + m_1 + m_2)^4} \frac{m_2^9(m_0 - m_1)}{(m_0 m_1)^5} \frac{L_1^6}{L_2^3 G_2^5}. \quad (4.8)$$

D'après l'erratum de Ford et al. (cfr. [5]), le changement de signe de C_3 n'affecte que l'équation de l'Hamiltonien octupole et les équations du mouvement qui en découlent directement. De plus, cela n'affecterait ni la période de l'inclinaison, ni les oscillations des excentricités. Nous avons tracé ces graphes pour les deux valeurs différentes de i afin de nous en convaincre.

Faibles inclinaisons mutuelles

Dans un premier temps, nous allons voir si pour des inclinaisons plus faibles, les différences entre l'approche octupole erronée et corrigée sont grandes. Nous avons tracé les graphes des excentricités et arguments des périastres à la figure 4.17 pour une inclinaison mutuelle $i = 15^\circ$.

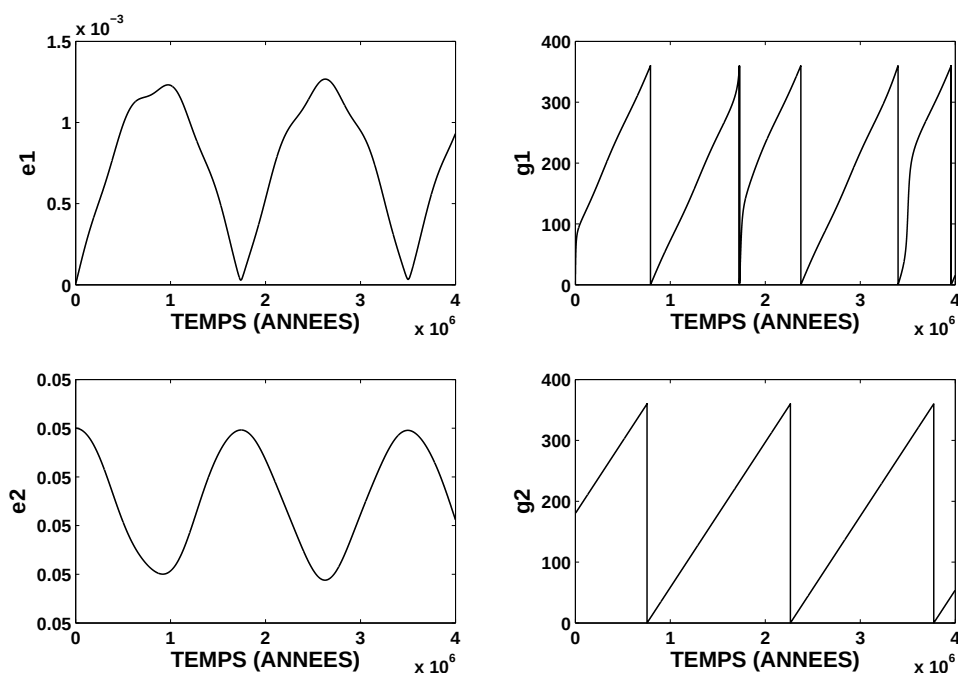


FIGURE 4.17 – Graphique de l'évolution temporelle de e_1 (en haut à gauche), g_1 (en haut à droite), e_2 (en bas à gauche) et g_2 (en bas à droite) pour le problème des trois corps étudié dans l'article [1] avec l'erreur dans le coefficient C_3 et une inclinaison $i = 15^\circ$.

Dans l'erratum (cfr. [5]), Ford et ses collègues nous signalent que pour des inclinaisons plus faibles, la différence de valeur maximale pour e_1 est plus grande que pour des inclinaisons supérieures à 40° . Nous ne remarquons pas de grande différence entre les graphes des excentricités e_1 et e_2 pour l'octupole correct (cfr. 4.10) et erroné (cfr. 4.17). Néanmoins nous pouvons remarquer un décalage entre ces deux séries de données (cfr. Table 4.3).

Nous constatons grâce à la table 4.3 que l'excentricité e_1 a une évolution plus rapide dans le cas où le coefficient C_3 comporte une erreur. Cette différence ne peut se voir qu'à la cinquième décimale, c'est pourquoi elle est très difficile à déceler sur les graphes que nous avons effectués (cfr. 4.17).

Temps (années)	e_1 Octupole correct	e_1 Octupole erroné
0	0.1000000000000000E-04	0.1000000000000000E-04
100	0.1000285490095086E-04	0.1000301545939334E-04
200	0.1001141471632413E-04	0.1001205638530508E-04
300	0.1002566482539858E-04	0.1002710647007570E-04
400	0.1004558099853388E-04	0.1004813869706097E-04
500	0.1007112960164417E-04	0.1007511558124779E-04
600	0.1010226787682729E-04	0.1010798949912050E-04
700	0.1013894429375494E-04	0.1014670310109323E-04
800	0.1018109896521019E-04	0.1019118979833833E-04
900	0.1022866411916390E-04	0.1024137431464136E-04
1000	0.1028156461902577E-04	0.1029717329302714E-04
⋮	⋮	⋮
3 999 400	0.9157678391207020E-03	0.9312962464748307E-03
3 999 500	0.9159108357141797E-03	0.9314407918125063E-03
3 999 600	0.9160538599656391E-03	0.9315853667411433E-03
3 999 700	0.9161969118621809E-03	0.9317299712488772E-03
3 999 800	0.9163399913908013E-03	0.9318746053237219E-03
3 999 900	0.9164830985383785E-03	0.9320192689535712E-03

TABLE 4.3 – Tableau comparatif de l'évolution de e_1 entre l'octupole correct et erroné.

Nous avons reproduit les évolutions temporelles de i , $2g_1$ et $g_1 - g_2$ (voir figures 4.18, 4.19 et 4.20 respectivement). Une différence que nous pouvons voir à l'œil nu se situe dans l'évolution de l'argument du périastre g_1 . Et donc l'évolution de $2g_1$ (cfr. 4.19) est elle aussi différente de celle observée dans le cas où nous utilisons la formulation correcte de l'octupole. De plus, l'évolution de $g_1 - g_2$ n'est plus la même que lorsque le coefficient C_3 est corrigé. Quant à l'inclinaison mutuelle, elle semble présenter les mêmes variations. Néanmoins, étant donné que e_1 n'est pas la même d'un cas à l'autre, il est raisonnable de penser que i n'est pas exactement la même que lorsque le C_3 est corrigé mais cette différence ne se voit pas sur les graphes car elle se situe au niveau des décimales.

Nous pouvons donc conclure que cette erreur dans le C_3 ne modifiait que très faiblement les éléments orbitaux pour des inclinaisons faibles. Nous allons maintenant nous intéresser aux inclinaisons mutuelles élevées.

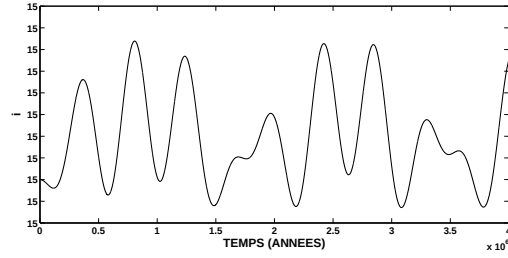


FIGURE 4.18 – Graphique de l'évolution temporelle de i pour le problème des trois corps étudié dans l'article [1] avec l'erreur dans le coefficient C_3 et une inclinaison $i = 15^\circ$.

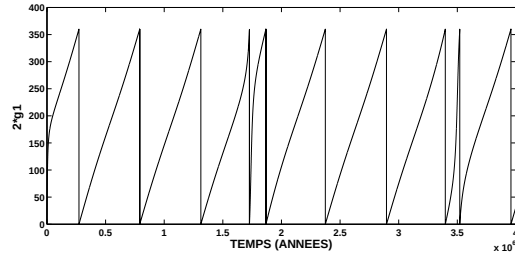


FIGURE 4.19 – Graphique de l'évolution temporelle de $2g_1$ pour le problème des trois corps étudié dans l'article [1] avec l'erreur dans le coefficient C_3 et une inclinaison $i = 15^\circ$.

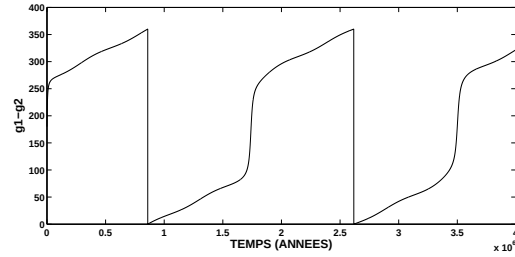


FIGURE 4.20 – Graphique de l'évolution temporelle de $g_1 - g_2$ pour le problème des trois corps étudié dans l'article [1] avec l'erreur dans le coefficient C_3 et une inclinaison $i = 15^\circ$.

Inclinaisons mutuelles élevées

Les périodes d'oscillation des excentricités (cfr. figure 4.21) ne semblent en effet que légèrement changées : nous pouvons remarquer que l'évolution de ces deux quantités est un peu plus rapide que dans le cas où nous avons corrigé C_3 (cfr. figure 4.15).

De même, l'évolution temporelle de g_2 ne paraît que peu modifiée. Il ne semble pas en être de même pour l'évolution temporelle de g_1 . Celle-ci semble reproduite avec un décalage important. Cependant, lorsque nous regardons l'évolution temporelle de l'angle

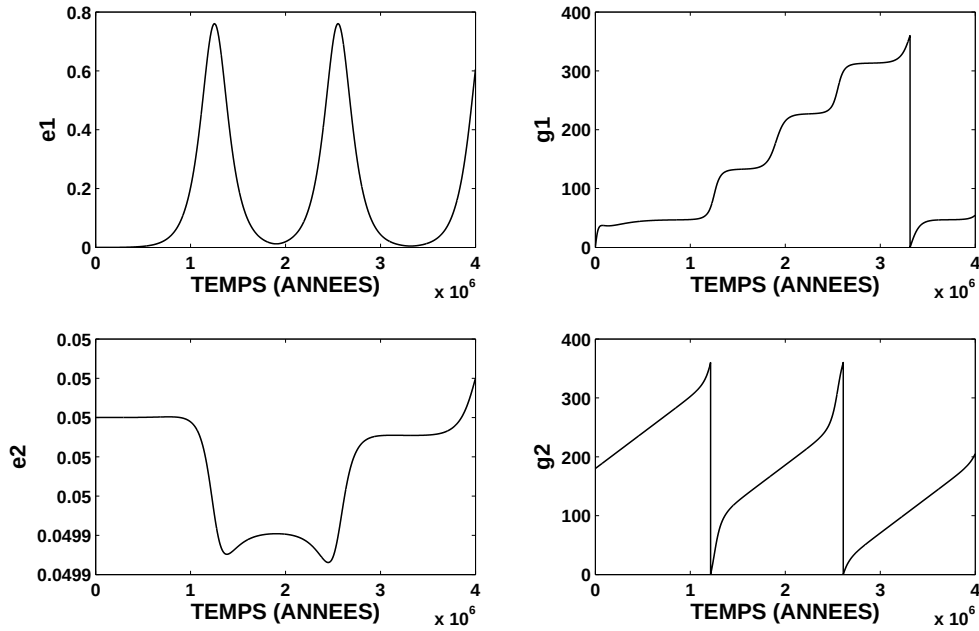


FIGURE 4.21 – Graphique de l'évolution temporelle de e_1 (en haut à gauche), g_1 (en haut à droite), e_2 (en bas à gauche) et g_2 (en bas à droite) pour le problème des trois corps étudié dans l'article [1] avec l'erreur dans le coefficient C_3 et une inclinaison $i = 60^\circ$.

$2g_1$, nos doutes se dissipent devant la similitude évidente de ces deux graphes (cfr. figures 4.16 et 4.24).

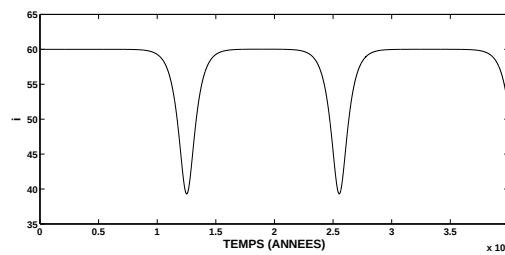


FIGURE 4.22 – Graphique de l'évolution temporelle de i pour le problème des trois corps étudié dans l'article [1] avec l'erreur dans le coefficient C_3 et une inclinaison $i = 60^\circ$.

Le graphe de la différence entre g_1 et g_2 de la figure 4.24 ne semble pas s'apparenter à celui reproduit à la figure 4.16 à première vue. Néanmoins, il s'agit en fait de la même courbe décalée.

Comme nous l'avons déjà souligné, il semblerait effectivement que la correction du

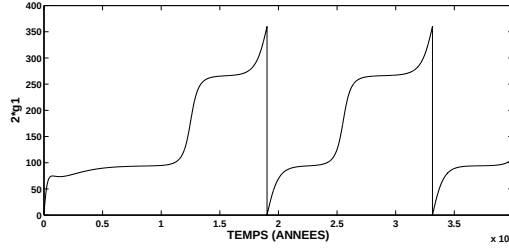


FIGURE 4.23 – Graphique de l'évolution temporelle de $2g_1$ pour le problème des trois corps étudié dans l'article [1] avec l'erreur dans le coefficient C_3 et une inclinaison $i = 60^\circ$.

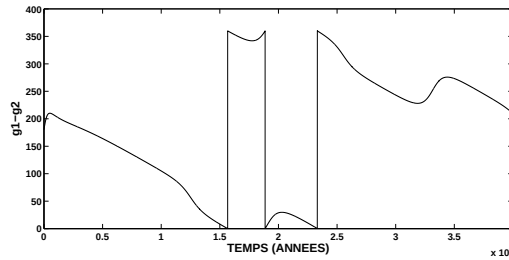


FIGURE 4.24 – Graphique de l'évolution temporelle de $g_1 - g_2$ pour le problème des trois corps étudié dans l'article [1] avec l'erreur dans le coefficient C_3 et une inclinaison $i = 60^\circ$.

signe de C_3 ne modifie que très peu les évolutions de e_1 et e_2 . En effet, les courbes sont exactement les mêmes excepté qu'elles sont décalées d'environ 100 000 années (ce qui équivaut à moins de 10% de la période d'oscillation des excentricités qui est de l'ordre du million d'années). Ces observations nous laissent croire que le terme octupole (en C_3) n'a que très peu d'influence sur ces variables pour des inclinaisons initiales plus élevées que 40° .

Il semble également que ces observations sont valables lorsque l'inclinaison mutuelle est plus faible ($i \leq 40^\circ$). Nous pouvons donc conclure que l'erreur commise par Ford et ses collègues ne change que très faiblement les évolutions des éléments orbitaux.

Enfin, dans son erratum (cfr. [5]), Ford et ses collaborateurs affirment qu'utiliser $-C_3$ au lieu de $+C_3$ équivaut à prendre l'argument du périastre $g_1 = 180^\circ$ au lieu de 0° . Nous allons vérifier leurs dires en utilisant la théorie octupole corrigée (avec $+C_3$) en prenant les mêmes conditions initiales que dans la section 4.3 en changeant juste la valeur de départ de g_1 à 180° . Nous choisissons de tester cette affirmation avec $i = 60^\circ$.

Nous constatons que les évolutions des excentricités e_1 et e_2 reproduites à la figure 4.25 concordent bien avec celles de la figure 4.21 dans le cas de l'erreur dans le signe de C_3 .

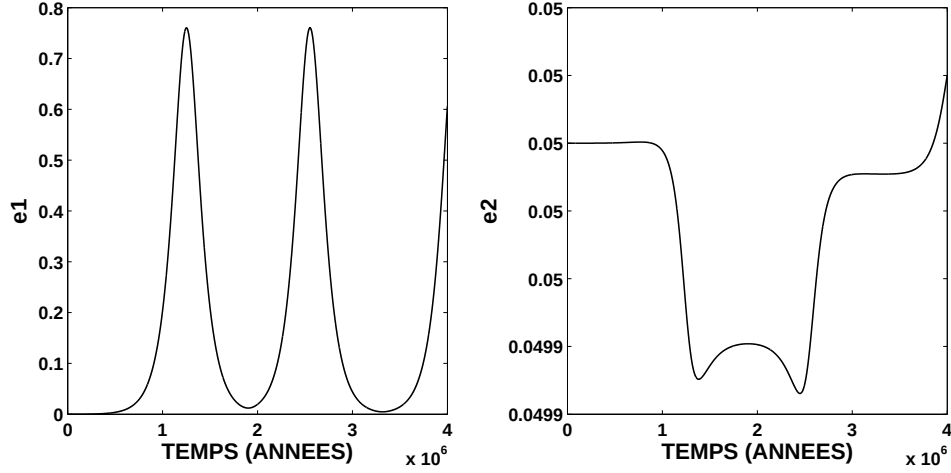


FIGURE 4.25 – Graphique de l'évolution temporelle de e_1 (à gauche) et e_2 (à droite) pour le problème des trois corps étudié dans l'article [1] avec la correction sur C_3 et $g_1(0) = 180^\circ$ et $i = 60^\circ$.

En conclusion, l'erreur de signe commise dans C_3 n'affecte donc pas significativement la différence entre les équations issues de la théorie octupole et les méthodes numériques directes comme le soutiennent les auteurs de l'erratum [5].

4.4 Etude paramétrique

Dans son article (cfr. [1]), Ford et ses associés considèrent différentes valeurs possibles pour les différents paramètres (m_0 , m_1 , m_2 , a_1 et a_2) et variables initiales des éléments orbitaux (e_1 , e_2 , g_1 , g_2 et i).

Un cas particulier a retenu notre attention. Parmi les valeurs particulières analysées par Ford et ses collègues dans l'article (cfr. [1]), nous avons choisi de nous intéresser à un cas rendant les excentricités e_1 et e_2 constantes. En effet, Ford et ses associés nous expliquent que les équations octupoles prédisent des excentricités constantes dans le cas où $m_0 = m_1$ et $i = 0^\circ$ (voir figure 4.26). Pourtant rien ne laisse croire que les excentricités devraient être constantes dans ce cas. Au contraire, l'étude d'un système ayant ses deux masses centrales de même ordre représente un cas intéressant dans le cadre de l'étude des systèmes binaires (m_0, m_1) accompagnés de corps de masses plus faibles (m_2).

La constance des excentricités provient d'une part de l'égalité des masses m_0 et m_1 car elles apparaissent sous la forme $m_0 - m_1$ dans le coefficient octupole et de ce fait annule le terme octupole, rendant ainsi e_2 constante. En effet, rappelons l'expression de

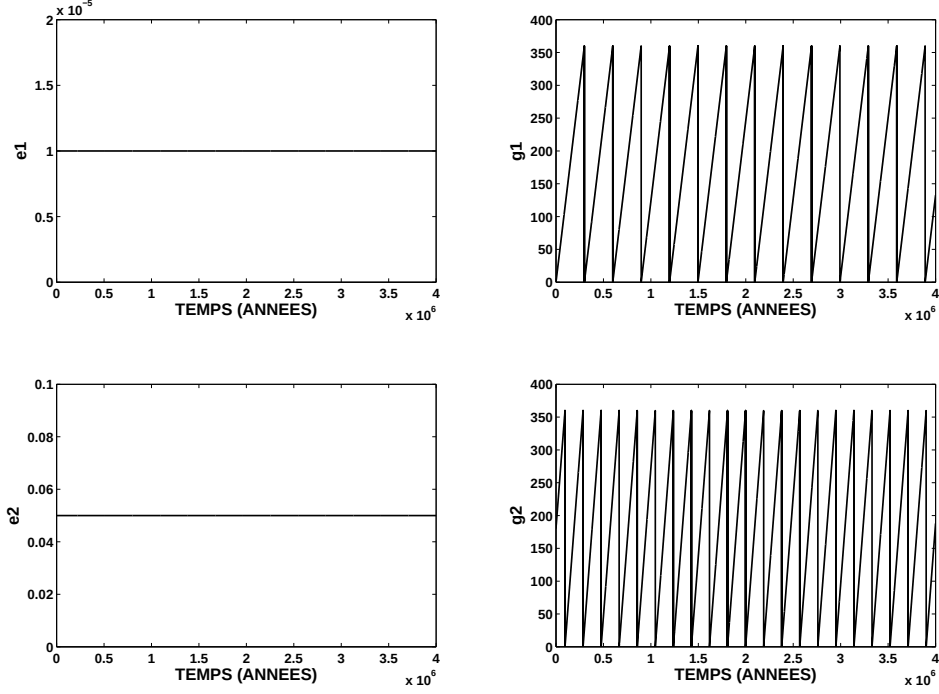


FIGURE 4.26 – Graphique de l'évolution temporelle de e_1 (en haut à gauche), g_1 (en haut à droite), e_2 (en bas à gauche) et g_2 (en bas à droite) dans le cas où l'inclinaison mutuelle vaut 0° et les masses m_0 et m_1 sont identiques.

C_3

$$C_3 = -\frac{15}{16} \frac{\mathcal{G}^2}{4} \frac{(m_0 + m_1)^9}{(m_0 + m_1 + m_2)^4} \frac{m_2^9 (m_0 - m_1)}{(m_0 m_1)^5} \frac{L_1^6}{L_2^3 G_2^5}.$$

Cependant, cela ne suffit pas à rendre e_1 constante. En ajoutant à ces masses égales, une inclinaison relative i nulle, le terme quadrupole s'annule dans l'équation du mouvement $\frac{de_1}{dt}$. En effet, l'équation du mouvement de e_1 quadrupole est

$$\frac{de_1}{dt} = C_2 \frac{1 - e_1^2}{G_1} \left[30e_1(1 - \theta^2) \sin 2g_1 \right],$$

où, lorsque $i = 0^\circ$, le terme $(1 - \theta^2)$ est nul puisque $\theta = \cos i$.

Même si les excentricités restent constantes tout au long du mouvement, les arguments des périastres g_1 et g_2 ne sont pas constants car si nous simplifions les termes qui s'annulent à cause des masses et de l'inclinaison, nous obtenons tout de même des variations $\frac{dg_1}{dt}$ et $\frac{dg_2}{dt}$ non nulles. En effet, les équations du mouvement de ces quantités sont simplement réduites à leur forme quadrupole.

Une intégration numérique des mêmes conditions initiales a permis à Ford et ses collègues de conclure que la situation décrite par la théorie octupole est fidèle à la réalité (variation de e_1 inférieure à 10^{-12}).

4.5 Conclusion

Dans ce chapitre, nous avons étudié le problème des trois corps restreint via la théorie quadrupole et octupole. Il en est ressorti que la théorie octupole est une meilleure approximation que la théorie quadrupole car elle permet notamment de visualiser l'évolution de e_2 au cours du temps. Soulignons aussi que cette première étude nous a permis de remarquer l'existence de deux fréquences principales de la théorie octupole correspondant aux deux degrés de liberté de cette théorie.

Ensuite, nous avons amorcé l'étude du problème général des trois corps où aucune hypothèse sur les masses n'était envisagée. Dans cette étude, nous avons confronté la théorie octupole avec sa formulation erronée (erreur dans le signe de C_3 , comme dans l'article de Ford et al. [1]) afin de confirmer que l'erreur ne générerait que peu de dommages (cfr. erratum de Ford et al. [5]). Il s'est avéré que cette erreur de signe n'engendrait que des modifications minimales dans l'évolution des éléments orbitaux, à savoir des variations plus rapides dans le cas erroné de l'ordre de 100 000 ans dans le cas où l'inclinaison mutuelle considérée est élevée. Pour des inclinaisons faibles, nous constatons que l'erreur dans le coefficient C_3 ne modifie que très peu les évolutions des éléments orbitaux (cfr. Table 4.3). Nous pouvons donc dire que l'erreur dans C_3 n'a pas très grande influence, mise à part celle d'accélérer l'évolution des éléments orbitaux.

De plus, nous avons comparé les résultats obtenus par Ford et ses collègues via intégration numérique de l'Hamiltonien total (c'est-à-dire incluant les perturbations de courtes périodes) avec ceux que nous avons acquis par le biais des équations du mouvement octupole (cfr. équations 3.22-3.25). De cette comparaison est ressorti que les évolutions orbitales étaient en accord, ce qui nous permet de considérer l'approche octupole comme une très bonne approximation analytique de la dynamique.

Par la suite, nous avons travaillé plus en détail sur l'erratum de Ford et al. (cfr. [5]) qui signalait l'équivalence entre le modèle octupole erroné et le modèle octupole corrigé pris en $g_1(0) = 180^\circ$ (au lieu de 0°). Nous avons effectivement confirmé cette hypothèse.

Enfin, nous avons observé un cas particulier cité dans l'article de Ford et ses collègues (cfr. [1]) où, grâce à un choix judicieux des conditions initiales, les variations en excentricité sont nulles. Même dans ce cas particulier, l'approche octupole décrit très fidèlement la dynamique des systèmes.

Chapitre 5

Applications aux systèmes binaires récemment observés

Dans ce chapitre, nous allons utiliser la théorie octupole afin de caractériser la dynamique de deux systèmes hiérarchiques triples discutés brièvement dans l'article de Ford et al. (cfr. [1]).

Le premier est le système PSR B1620-26. Il s'agit d'un système binaire constitué d'un pulsar (étoile à neutrons) et d'une naine blanche qui seraient associés à un compagnon plus éloigné, soit une planète géante, soit une naine brune. Nous avons effectué une étude des éléments elliptiques de ce système afin de comprendre comment ce système pourrait s'être formé.

Le second est le système HD 109648. Il s'agit d'un système triple spectroscopique. Nous nous sommes basés sur l'article publié en 2000 par Saurabh Jha et ses collègues (cfr. [8]) afin d'effectuer une étude des modulations de l'excentricité e_1 de la binaire proche sur les années à venir. Nous avons pu confronter les simulations faites par Jha et ses collaborateurs à partir de la théorie de Newton et celles que nous avons réalisées à partir de la théorie octupole.

5.1 Le système PSR B1620-26

PSR B1620-16 est un pulsar milliseconde situé non loin de l'amas globulaire M4 (voir figure 5.1). Cet amas globulaire, situé dans la constellation du Scorpion, fut découvert par Philippe Loys de Chéseaux en 1746 et catalogué par Charles Messier en 1764. C'est d'ailleurs de ce dernier que l'amas globulaire tire son nom : Messier 4 (M4). Il est distant de la Terre de $7,2 \times 10^3$ années lumières¹. L'âge estimé de M4 est de $12,2 \times 10^9$ ans.

Le système triple PSR B1620-16 est constitué d'une étoile à neutrons ($m_0 \approx 1,4 M_\odot$) centrale et de deux compagnons. Le premier est une naine blanche ($m_1 \approx 0,3 M_\odot$) for-

1. Pour rappel, une année lumière, notée al, correspond à $9,460 \times 10^{15}$ mètres.



FIGURE 5.1 – L’amas globulaire M4 dans la constellation du Scorpion.

mant une orbite de 191 jours autour de l’étoile à neutrons avec une excentricité d’environ $e_1 \approx 0,025$. Bien qu’apparemment faible, l’excentricité de la binaire interne est, en réalité, plus grande de plusieurs ordres de magnitude que celle attendue pour un pulsar milliseconde de ce type. Cette valeur élevée pourrait trouver son origine dans des perturbations séculaires avec le troisième corps.

Concernant le demi-grand axe de son orbite, nous avons connaissance d’une relation (cfr. 5.1) entre la période orbitale (soit 191 jours dans le cas que nous étudions), le demi-grand axe (dont nous ignorons la valeur) et les masses des étoiles formant la binaire

$$T^2 = \frac{4\pi^2}{\mathcal{G}(m_0 + m_1)} a_1^3. \quad (5.1)$$

Rappelons que nous travaillons en masse solaire ($M_\odot$), en année et en unité astronomique (AU) : dans ces unités, $\mathcal{G}$ vaut $4\pi^2$. En faisant passer a_1 dans le terme de gauche de la relation 5.1, nous obtenons la relation suivante

$$a_1^3 = \frac{T^2 \mathcal{G}(m_0 + m_1)}{4\pi^2}, \quad (5.2)$$

$$\Leftrightarrow a_1^3 = \frac{T^2 4\pi^2 (m_0 + m_1)}{4\pi^2}, \quad (5.3)$$

$$\Leftrightarrow a_1 = \sqrt[3]{T^2 (m_0 + m_1)}. \quad (5.4)$$

Nous allons obtenir une valeur approchée pour le demi-grand axe a_1 :

$$\begin{aligned} a_1 &= \sqrt[3]{\left(\frac{191}{365,25}\right)^2 (1,4 + 0,3)} \\ &\approx 0,775 \text{ AU}. \end{aligned}$$

En ce qui concerne le second compagnon, son existence fut suggérée en 1993 par Backer afin de justifier le décalage observé dans l'effet Doppler (fréquences de pulsation résiduelles inhabituellement élevées après retrait des observations faites à partir d'un modèle standard képlérien pour l'étude de ce pulsar binaire). Néanmoins, les observations effectuées durant plus de onze ans ne suffisent pas encore à approximer sa masse et ses éléments orbitaux car ce laps de temps ne représente qu'une faible portion de sa présumée période orbitale effectuée autour de m_0 . Cependant, via la modélisation de la fréquence de pulsation ainsi que via les perturbations orbitales de court terme, il s'est avéré possible de donner une première estimation de la masse et les éléments orbitaux de ce troisième corps. Ce dernier aurait une masse de $m_2 \approx 0,01 M_\odot$ et décrirait une orbite dont le demi-grand axe vaudrait $a_2 \approx 50$ AU. La période orbitale approchée vaudrait ainsi 300 ans et l'excentricité de l'orbite faite autour de m_0 serait d'environ $e_2 \approx 0,45$, ce qui se révèle être une orbite particulièrement excentrique. Une telle masse suggère que ce troisième corps est soit une planète géante, soit une naine brune.

En supposant que le troisième corps (m_2) soit une planète, le scénario suivant pourrait avoir eu lieu². Une planète jovienne³ ($m_2 \approx 0,01 M_\odot$) se serait formée, il y a 13 milliards d'années, autour d'une étoile similaire au Soleil dans la périphérie du futur amas globulaire M4. Après la formation de M4, ce "mini-système" planétaire aurait migré vers le noyau de M4. Une étoile à neutrons et son compagnon auraient capturé l'étoile semblable au Soleil et la planète jovienne entraînant l'éjection du compagnon d'origine de l'étoile à neutrons. Au fil du temps, l'étoile solaire aurait gonflé pour devenir une géante rouge et serait entrée en collision avec l'étoile à neutrons transformant celle-ci en pulsar milliseconde. La géante rouge, quant à elle, aurait donné naissance à une naine blanche. Durant tous ces changements stellaires, la planète jovienne serait restée observatrice passive et aurait continué à orbiter autour du nouveau système binaire, ne subissant que très peu de perturbations.

Les observations effectuées sur ce système triple ne permettent pas de déterminer l'inclinaison relative entre les deux orbites des corps m_1 et m_2 . Néanmoins, Ford et ses collègues affirment qu'il est raisonnable de penser que cette inclinaison est grande car, comme nous l'avons expliqué dans le scénario ci-dessus, la position du système triple (aux alentours de l'amas globulaire M4) suggère qu'il a été formé via interaction dynamique entre binaires. De plus, comme nous l'avons vu au chapitre précédent, il semble être toujours possible d'engendrer une large excentricité (e_1) dans la binaire (m_0, m_1) à partir d'une inclinaison relative suffisamment élevée, ce qui fournirait une explication pour cette si grande valeur de e_1 . Cependant, pour que cette explication soit possible, il faut tenir compte de deux autres conditions :

- la durée de vie du système triple et

2. Nous nous sommes basés sur un schéma datant du 10 juin 2003 provenant du site de Hubble : <http://hubblesite.org/newscenter/archive/releases/2003/19/image/e/>.

3. L'adjectif jovien désigne des objets relatifs à la planète Jupiter. Dans ce cas, il s'agit d'une planète semblable à Jupiter, c'est-à-dire géante.

- la relativité générale (précession du périastre).

Premièrement, la durée de vie du système triple devrait être suffisamment grande pour permettre à la binaire (m_0, m_1) d'atteindre une valeur de e_1 suffisamment élevée. Dans le cas de PSR B1620-26, le temps de vie du système est déterminé par les éventuelles rencontres avec d'autres étoiles engendrant la perte d'un corps du système. Ce genre de phénomènes est très probable car le système PSR B1620-26 est situé aux alentours de l'amas globulaire et le lien entre la binaire et son compagnon est très faible car m_2 est très éloigné de la binaire proche. Néanmoins, Ford et ses collaborateurs pensent que ce scénario est très improbable étant donné les paramètres de PSR B1620-26 dans le cas où l'inclinaison est élevée (formation par interaction dynamique (cfr. [9])).

La théorie octupole développée dans de ce mémoire ne tient pas compte de ce facteur (durée de vie). En effet, cette formulation suppose que les masses restent constantes alors qu'il est bien connu que les étoiles ont des masses qui déterminent leur durée de vie et que ces masses évoluent au cours de leur vie.

En effet, si nous prenons comme exemple le Soleil, à l'heure actuelle, il s'agit d'une naine jaune. Une fois qu'il aura épuisé ses réserves d'hydrogène, sa structure se modifiera, sa taille augmentera pour se transformer en géante rouge qui fera de la Terre une fournaise. Une fois que la géante rouge aura épuisé tout son combustible nucléaire, elle éjectera ses couches externes formant une nébuleuse planétaire. Le noyau résiduel du Soleil s'effondrera pour former une naine blanche. Cet exemple montre que l'évolution de naines jaunes se marque par des changements de types d'étoiles et donc des changements de masses. En effet, les naines jaunes ont une masse comprise entre $0,8 M_\odot$ et $1,2 M_\odot$ alors que les géantes rouges ont une masse avoisinant les $2,5 M_\odot$. Le schéma de la figure 5.2 récapitule l'évolution du Soleil.

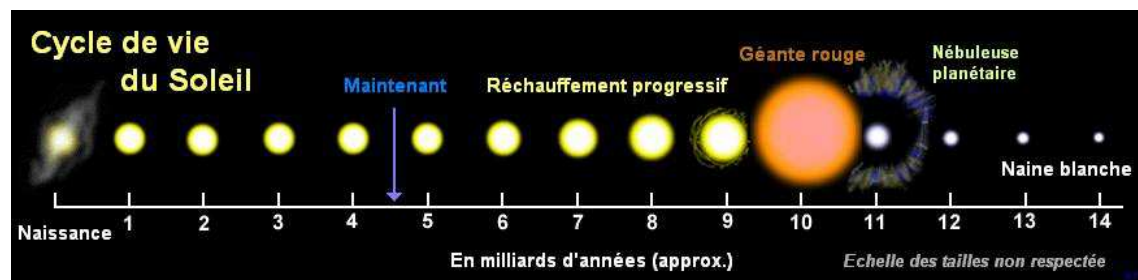


FIGURE 5.2 – Schéma des étapes de la vie du Soleil ⁴.

Deuxièmement, la perturbation orbitale dominante de la binaire du système PSR B1620-26 devrait être celle générée par son lointain compagnon. Pourtant, d'autres perturbations pourraient intervenir dans l'évolution de l'excentricité e_1 . Les auteurs de

4. Ce schéma est issu du site internet http://en.wikipedia.org/wiki/Image:Sun_Life.png.

l'article [1] nous confient que dans le cas d'une binaire pulsar, la relativité générale apporte une contribution non négligeable dans les perturbations orbitales : une précession additionnelle du périastre.

Pour rappel, la précession du périastre est le phénomène selon lequel l'ellipse décrite par m_1 autour de m_0 tourne lentement sur le plan orbital comme le montre la figure 5.3. Dans le cas de PSR B1620-26, la précession du périastre peut être causée par la présence du troisième corps orbitant autour de la binaire (m_0, m_1). Mais comme nous le signalent Ford et ses collègues, elle pourrait aussi résulter de la relativité générale.

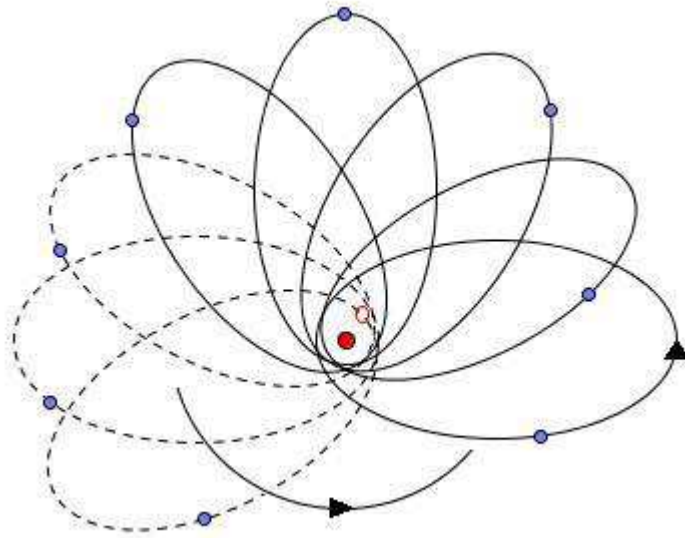


FIGURE 5.3 – Schéma représentant la précession de l'orbite d'une masse représentée par le point bleu autour de la masse centrale représentée par le point O.

En effet, si la précession du périastre additionnelle causée par la relativité générale est plus rapide que celle induite par les perturbations séculaires newtoniennes (c'est-à-dire les perturbations générées par le troisième corps sur la binaire (m_0, m_1)), l'excentricité e_1 pourrait ne pas atteindre des valeurs si élevées. De plus, si les fréquences de ces précessions sont comparables, un certain type de résonance pourrait se produire s'ajoutant aux perturbations d'origine de l'excentricité.

La formulation octupole de l'Hamiltonien ne décrit pas ces perturbations engendrées par la relativité générale.

Néanmoins, nous allons faire abstraction de ces deux facteurs afin de voir comment évolue le système PSR B1620-26 sous le seul effet des perturbations newtoniennes et de voir si le compagnon binaire peut être responsable d'une telle croissance de l'excentricité

de m_1 . Pour ce faire, les paramètres du système étudié sont repris dans la table 5.1. Quant aux variables du système, nous choisissons de considérer les valeurs suivantes

- $e_1 = 0,025$;
- $e_2 = 0,45$;
- $g_1 = 0^\circ$;
- $g_2 = 180^\circ$.

Paramètre	Valeur
m_0	$1,4 M_\odot$
m_1	$0,3 M_\odot$
m_2	$0,01 M_\odot$
a_1	$0,775 \text{ UA}$
a_2	50 UA

TABLE 5.1 – Tableau reprenant les valeurs que nous employons pour étudier le système PSR B1620-26.

Plusieurs inclinaisons mutuelles sont considérées afin d'étudier leur incidence sur la valeur maximale atteinte par e_1 : $i = 0,01^\circ, 15^\circ, 30^\circ, 45^\circ, 60^\circ$ et 75° (voir figures 5.4 et 5.5). Nous avons décidé d'effectuer nos tests sur une très longue période : 20 millions d'années.

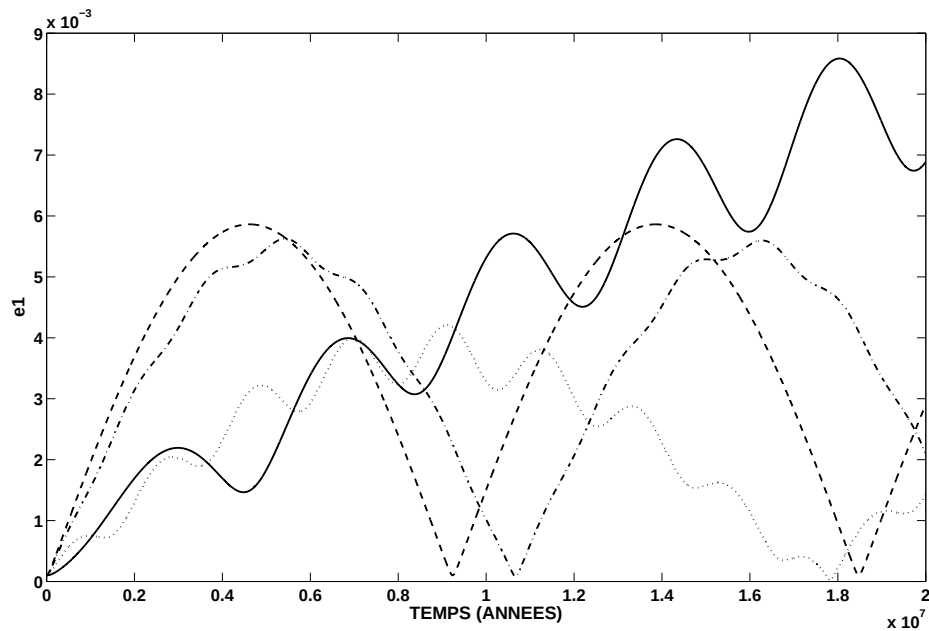


FIGURE 5.4 – Graphe retraçant les modulations de e_1 selon différentes valeurs initiales de i : $i = 0,01^\circ$ en '- -', $i = 15^\circ$ en '-.-', $i = 30^\circ$ en pointillé et $i = 45^\circ$ en traits pleins.

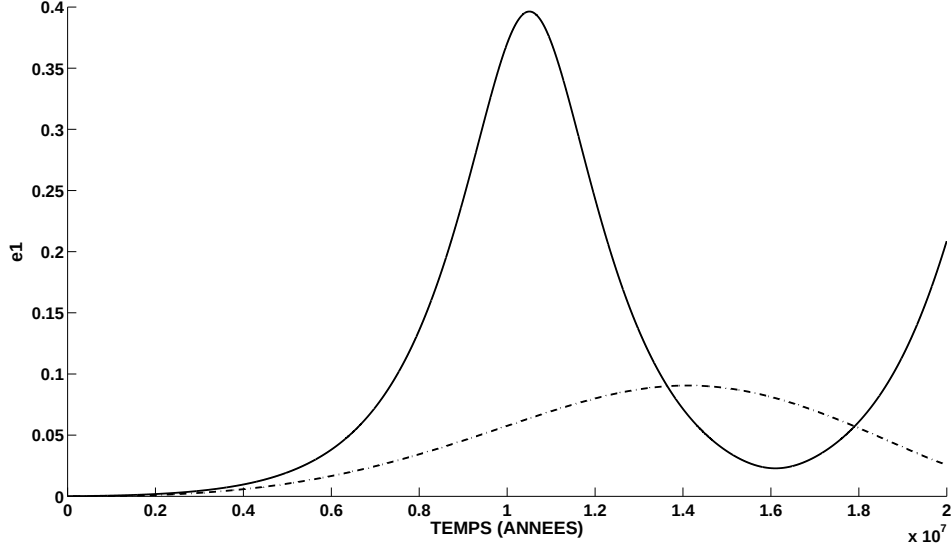


FIGURE 5.5 – Graphe retraçant les modulations de e_1 selon différentes valeurs initiales de i : $i = 60^\circ$ en '.-.' et $i = 75^\circ$ en traits pleins.

Nous constatons que les perturbations newtoniennes causées par le troisième corps lointain peuvent être responsables de l'excentricité élevée de la binaire m_1 , à condition que le corps planétaire m_2 ait une inclinaison mutuelle entre 45° et 75° (cfr. figures 5.4 et 5.5). En effet, à la figure 5.4, nous constatons que les valeurs initiales de l'inclinaison ne sont pas suffisamment élevées pour atteindre une valeur de l'excentricité e_1 égale à 0,025. En observant la figure suivante (cfr. 5.5), nous voyons qu'augmenter i permet d'augmenter les modulations de e_1 et nous pouvons voir qu'une inclinaison de 60° pourrait convenir pour le système PSR B1620-26. A nouveau, rappelons que les effets relativistes n'ont pas été pris en compte dans cette étude et que ces effets peuvent modifier l'intervalle d'inclinaisons relatives mis en évidence par notre étude (cfr. intégrations numériques de [1] où l'effet relativiste a été pris en compte).

Nous pouvons conclure que l'inclinaison mutuelle i doit être relativement élevée pour permettre à l'orbite de la binaire proche d'atteindre une excentricité $e_1 = 0,025$ (valeur observée actuellement). L'analyse octupole des différentes valeurs possibles pour i nous amène à penser que l'inclinaison mutuelle pour engendrer une telle excentricité devrait être comprise entre 45° et 75° .

5.2 Le système HD 109648

Le système hiérarchique triple HD 109648 se situe dans ce qui reste de l'amas stellaire ouvert Upgren One. Cet amas doit son nom à Upgren qui l'identifia à l'aide de Rubin

en 1968. Il est composé de sept étoiles brillantes principales de type F ⁵.

Le système hiérarchique triple HD 109648 est de type spectroscopique et serait composé de trois étoiles de masse $\approx 1 M_{\odot}$ (cfr. article [8] de Jha et ses collègues). Il est observé depuis 1990. Il s'agit d'un système très "serré" car le paramètre $\alpha = 0,1$ (pour rappel : $\alpha = a_1/a_2$). L'orbite formée par la binaire proche (correspondant à nos masses m_0 et m_1) a une période de 5,5 jours. Avec une si petite période, les effets de dissipation de marée sont non-négligeables. L'excentricité de la binaire proche vaut $e_1 = 0,0119 \pm 0,0014$. Cette excentricité est certes réduite mais elle n'en reste pas moins significative et est attribuée à la perturbation produite par le troisième corps d'après les dires de Jha et ses collègues (cfr. article [8]). Dans ce même article, ce dernier et son équipe suggèrent même que les variations supplémentaires subies par le système pourraient être causées par un quatrième objet.

Quant au compagnon externe à la binaire proche, il orbite avec une période de 120,5 jours et une excentricité de $e_2 \approx 0,2362 \pm 0,0033$.

Ces éléments orbitaux ont pu être établis avec autant de précision car le système HD 109648 possède de faibles périodes de révolution tant pour sa binaire proche que pour son compagnon.

Dans les articles de Ford et ses collègues (cfr. [1]) et Jha et al. (cfr. [8]), les valeurs exactes des demi-grands axes a_1 et a_2 ne sont pas données mais il est juste signalé que $\alpha = 0,1$. Nous allons donc déterminer approximativement ces valeurs via l'équation 5.4

$$\begin{aligned} a_1 &= \sqrt[3]{T^2(m_0 + m_1)} \\ &= \sqrt[3]{\left(\frac{5,5}{365,25}\right)^2 (1 + 1)} \end{aligned}$$

Cela nous amène à une valeur du demi-grand axe de la binaire proche $a_1 \approx 0,077$ UA. Nous pouvons ainsi approximer a_2 grâce à $\alpha = 0,1$: $a_2 \approx 10 \times a_1$. Nous considérons donc dans la suite une valeur d'environ $a_2 \approx 0,77$ UA pour le demi-grand axe de l'orbite du troisième corps autour de (m_0, m_1) . Avec un tel α , le temps de modulation de l'excentricité est court (de l'ordre de 15 ans). En effet, à la figure 5.6 issue de l'article de Jha et ses collègues (cfr. figure 7 de l'article [8]) que nous avons reproduite ci-dessous, nous remarquons que les oscillations de l'excentricité ont une période de l'ordre de la décennie. Ces graphiques ont été effectués grâce à des simulations numériques (intégration des équations de Newton pour trois masses ponctuelles).

5. Les étoiles sont classées en catégories selon leur luminosité (et donc température). Les lettres les plus connues pour ce classement sont O, B, A, F, G, K, et M, où les étoiles de type O sont les plus chaudes et les lettres qui suivent font décroître la chaleur pour arriver aux étoiles de type M qui sont les plus froides.

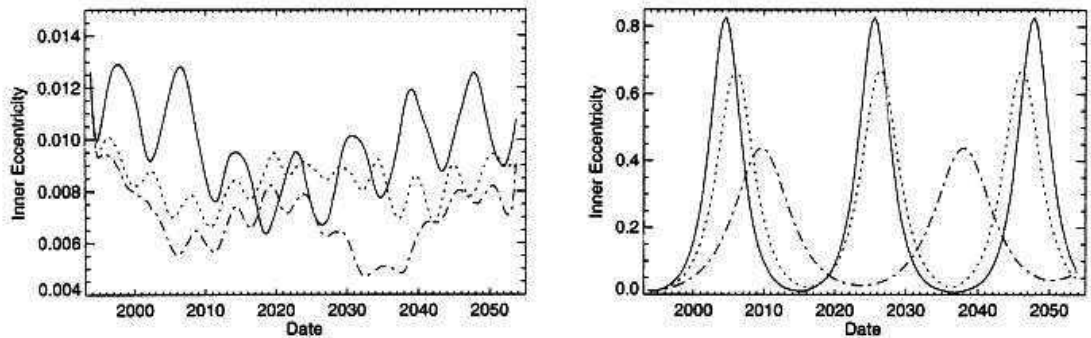


Figure 7. Typical simulation results for the inner eccentricity modulation. The left-hand panel shows the modulation for low relative inclination (dash-dotted: $\phi = 6^\circ$, dotted: $\phi = 15^\circ$, solid: $\phi = 30^\circ$). The modulation shown in the right-hand panel is for high relative inclination (dash-dotted: $\phi = 50^\circ$, dotted: $\phi = 60^\circ$, solid: $\phi = 70^\circ$).

FIGURE 5.6 – Graphiques de l'évolution de l'excentricité e_1 du système HD 109648 aux cours des années à venir à partir de différentes valeurs d'inclinaison. Le graphe de gauche montre la modulation pour des inclinaisons mutuelles faibles ($i = 6^\circ$ en '-.-.', $i = 15^\circ$ en pointillés et $i = 30^\circ$ en traits pleins). La modulation montrée dans le graphe de droite est pour des inclinaisons mutuelles élevées ($i = 50^\circ$ en '-.-.', $i = 60^\circ$ en pointillés et $i = 70^\circ$ en traits pleins). (Figure issue de l'article [8])

Jha et ses collaborateurs constatent que l'excentricité e_1 est dépendante de l'inclinaison entre les plans orbitaux. En effet, à l'approche d'une valeur de i d'environ 40° , les modulations de l'amplitude de e_1 grandissent avec l'éventualité d'atteindre la valeur $e_1 = 1$. Mais ils signalent aussi que les arguments des périastres g_1 et g_2 jouent un rôle non négligeable dans la modulation de l'excentricité e_1 , surtout à faibles inclinaisons mutuelles. En effectuant plus de simulations, Jha et al. (cfr [8]) ont pu estimer une valeur critique de l'inclinaison, à savoir $i = 54^\circ$, valeur au-dessus de laquelle l'excentricité e_1 ne peut être maintenue suffisamment petite. Les évolutions de e_1 tracées à la figure 5.6 sont obtenues par la théorie newtonienne de gravité entre trois masses ponctuelles. Cette théorie ne tient donc pas compte d'autres perturbations qui pourraient influencer sur l'excentricité e_1 comme

- les effets de marée,
- les perturbations générées par la relativité générale.

Nous avons pensé qu'il serait intéressant de vérifier si la théorie octupole modélisait correctement le système HD 109648 ou du moins les modulations attendues de e_1 et apportait éventuellement des précisions supplémentaires quant aux simulations effectuées par Jha et al. (cfr. figure 5.6). Pour ce faire, nous avons pris les valeurs reprises dans la table 5.2 pour nos paramètres.

Paramètre	Valeur
m_0	$1 M_\odot$
m_1	$1 M_\odot$
m_2	$1 M_\odot$
a_1	0,077 UA
a_2	0,77 UA

TABLE 5.2 – Tableau reprenant les valeurs que nous utilisons pour modéliser le système hiérarchique triple HD 109648.

Nous allons nous baser sur les valeurs observées par Jha et son équipe (cfr. [8]) pour les valeurs des excentricités et arguments de périastre

- $e_1 = 0,0119$;
- $e_2 = 0,2362$;
- $g_1 = 37,2^\circ$;
- $g_2 = 331,79^\circ$.

Nous allons considérer différentes valeurs initiales pour l'inclinaison i dans le but de réaliser des graphiques semblables à ceux de l'article de Jha et al. (cfr. [8]) : $i = 6^\circ, 15^\circ, 30^\circ, 50^\circ, 60^\circ$ et 70° .

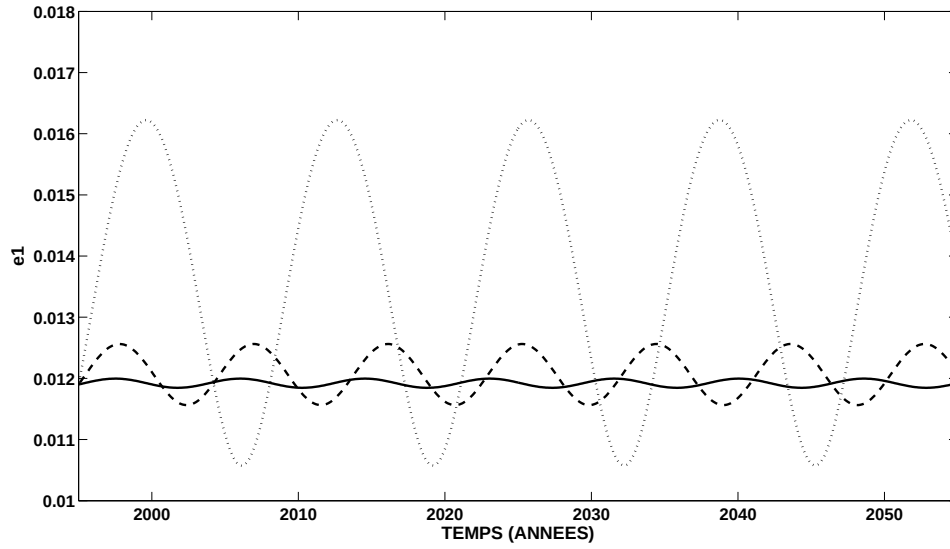


FIGURE 5.7 – Graphiques retraçant les modulations subies par l'excentricité e_1 du système HD 109648 pour des inclinaisons mutuelles faibles : $i = 6^\circ$ en traits pleins, $i = 15^\circ$ en '-' et $i = 30^\circ$ en pointillés.

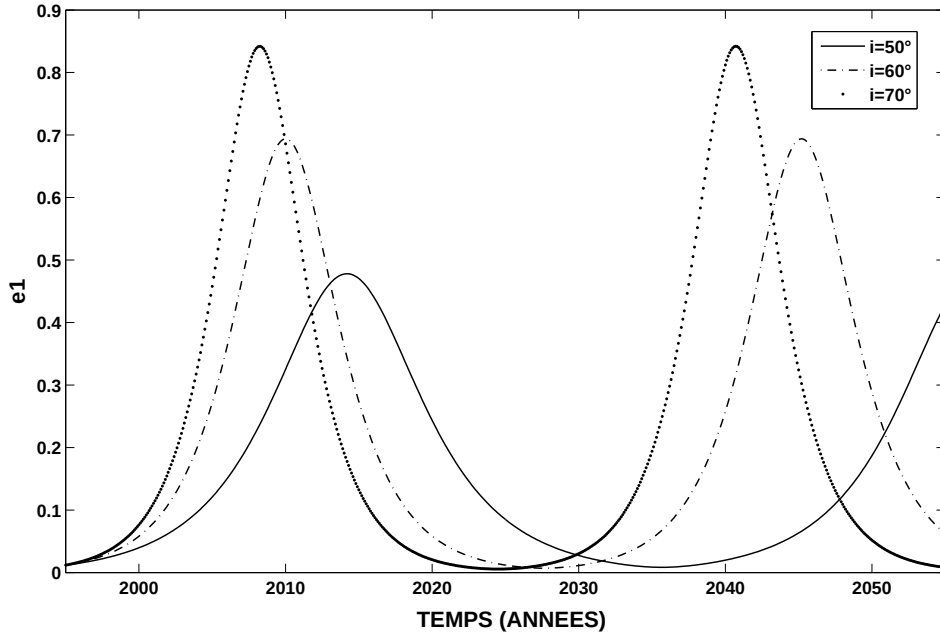


FIGURE 5.8 – Graphiques retraçant les modulations subies par l'excentricité e_1 du système HD 109648 pour des inclinaisons mutuelles faibles : $i = 50^\circ$ en traits pleins, $i = 60^\circ$ en '- -' et $i = 70^\circ$ en pointillés.

Dans le cas de faibles inclinaisons mutuelles, nous constatons que les modulations de l'excentricité e_1 représentées aux figures 5.7 et 5.8 au moyen de l'approche octupole sont plus régulières que celles issues de l'article de Jha et ses collègues (cfr. figure 5.6). Cela s'explique par le fait que l'intégration numérique qu'ils ont effectuée tient compte des courtes périodes du mouvement, périodes qui pour les systèmes "serrés" comme HD 109648 sont très proches de celles du mouvement séculaire. Néanmoins, nous constatons que les amplitudes de ces modulations semblent concorder avec celles qu'obtient l'équipe de Jha via l'intégration numérique de ce système triple.

Dans le cas de grandes inclinaisons mutuelles entre les orbites de m_1 et m_2 , le mouvement séculaire est réellement bien reproduit par notre approche analytique. Seul un léger décalage dans la période d'oscillation est visible.

En conclusion, la théorie octupole approxime très bien le comportement séculaire des systèmes triples, même dans le cas particulier de systèmes très "serrés".

Conclusion

Au terme de ce mémoire, l'importance de l'étude des systèmes binaires dans le cadre du problème des trois corps, et plus précisément les binaires possédant un compagnon planétaire ou stellaire, ne fait plus de doute. Une approche analytique simple permettant de caractériser la dynamique de tels systèmes est donc plus que bienvenue à l'heure actuelle.

Sur base de l'article (cfr. [1]), nous développons une théorie analytique décrivant les mouvements séculaires des éléments orbitaux d'un problème des trois corps : la théorie octupole. Nous comparons cette approche analytique avec l'étude numérique du problème des trois corps incluant les courtes périodes (équations newtoniennes) et en concluons que la théorie octupole est une bonne approximation du problème des trois corps et un excellent outil pour modéliser l'évolution séculaire des systèmes hiérarchiques triples.

Ce résultat est en accord avec les conclusions de Ford et al (cfr. [1]) malgré la faute de signe dans le coefficient C_3 qu'ils avaient commises et qui avait été signalée dans l'erratum (cfr. [5]) par la suite. Au moyen de divers tests, que nous présentons dans ce travail, nous avons vérifié l'exactitude des affirmations de l'erratum.

Un objectif de ce travail était également d'appliquer la théorie octupole à des systèmes triples existants : PSR B1620-26 et HD 109648. Le premier, PSR B1620-26, est constitué d'un pulsar milliseconde et d'une naine blanche autour desquels orbite un troisième astre (planète géante ou naine brune). Le second, HD 109648, est composé de trois étoiles spectroscopiques de masses semblables à celle du Soleil. Les tests que nous avons réalisés illustrent que la théorie octupole modélise correctement l'évolution séculaire de ces systèmes.

En pratique, les observations réelles montrent que d'autres perturbations entre en jeu, parmi lesquelles nous pouvons citer les effets relativistes ou les effets de marée. Notre travail constitue une première étape dans l'étude de la dynamique des systèmes binaires et il est évident que cette étude donne naissance à de nombreuses perspectives. Outre l'ajout des effets repris ci-dessus, la question de la stabilité des systèmes binaires hébergeant un compagnon planétaire ou stellaire se révèle particulièrement intéressante dans l'optique future de détection de montres habitables. De même, l'augmentation importante de l'ex-

centricité du corps intérieur d'un système triple est souvent évoquée quant à la possible explication de l'existence de Jupiter chauds dans les systèmes extrasolaires. Toutes ces perspectives pourraient être réalisées comme extension de la théorie octupole présentée dans ce travail.

Bibliographie

- [1] Eric B. Ford, Boris Kozinsky et Frederic A. Rasio, *Secular Evolution of Hierarchical Triple Star Systems*, The Astrophysical Journal, 535, 385-401, 20 Mai 2000.
- [2] Kaula, *Development of the lunar and solar disturbing function for a close satellite*, The Astronomical Journal, 67, 300-303, 1962.
- [3] Jacobi C.G.J., *Sur l'élimination des nœuds dans le problème des trois corps*, Astronomische Nachrichten, 20, 81-102, 1842.
- [4] Kepler J., *Harmonices Mundi Libri V* (Linz), 1619.
- [5] Eric B. Ford, Boris Kozinsky et Frederic A. Rasio, *ERRATUM : "Secular Evolution of Hierarchical Triple Star Systems"*, The Astrophysical Journal, 605, 966, 2004.
- [6] Nader Haghighipour, *Planets in Binary Star Systems*, Astrophysics and Space Library.
- [7] « STARS », *Encyclopaedia Britannica*, The University of Chicago, 1966, Volume 21.
- [8] Saurabh Jha, Guillermo Torres, Robert P. Stefanik, David W. Latham et Tsevi Mazeh, *Studies of multiple stellar systems - III. Modulation of orbital elements in the triple-lined system HD 109648*, Monthly Notices of the Royal Astronomical Society, Volume 317, Issue 2, pp. 375-384.
- [9] Eric B. Ford, Kriten J. Joshi, Frederic A. Rasio et Boris Zbarsky, *Theoretical Implications of the PSR B1620-26 Triple System and its Planet*, The Astrophysical Journal, 528, 336-350, 1er Janvier 2000.
- [10] Anne Lemaître, *Mécanique du Point et du Solide*, FUNDP, 2007-2008.
- [11] Anne Lemaître, *Dynamique céleste et Résonances*, FUNDP, 2009-2010, dispensé par Benoît Noyelles.
- [12] Timoteo Carletti, *Géométrie Symplectique*, FUNDP, 2008-2009.
- [13] *Atlas d'Astronomie*, éditions Stock, page 60, 1976.
- [14] Kozai Y., *Secular perturbations of asteroids with high inclination and eccentricities*, Astron. J., 67, 591.

Annexe

Cette annexe reprend le programme FORTRAN 90 qui nous a servi, tout au long de ce mémoire, à effectuer notre étude du problème des trois corps. Dans ce programme sont reprises les équations 3.22-3.25 du mouvement de la théorie octupole. Ce dernier comprend deux modules. L'un contient les équations du mouvement 3.22-3.25 et l'autre permet l'intégration de ces équations via la méthode itérative Runge-Kutta 4 (méthode expliquée au chapitre 3). Voici le programme principal contenant les conditions initiales et faisant appel aux deux modules :

```
! ----- memoire.f90 ----- !
program memoire

USE Module1
USE Module2

IMPLICIT NONE

real(KIND(1.0D0)), dimension(4) :: dout,xtemp
real(KIND(1.0D0)) :: t,tinit,tfin,hh,tt
! vecteur initial
real(KIND(1.0D0)), dimension(:), allocatable :: x
! vecteur contenant les parametres du probleme
real(KIND(1.0D0)), dimension(:), allocatable :: parametres
real(KIND(1.0d0))::k
real(KIND(1.0d0))::m_0,m_1,m_2
real(KIND(1.0d0))::a_1,a_2
real(KIND(1.0d0))::L_1,L_2,GG_1,GG_2
real(KIND(1.0d0))::i, var_i
real(KIND(1.0d0))::H
real(KIND(1.0d0)):: pi
integer :: j, n, NbrMod
! Valeur de pi
pi = 3.141592653589793238d0
```

```

! ALLOCATION DES VECTEURS :
allocate(parametres(10))
allocate(x(4))

! OUVERTURE DU FICHIER SORTIE TXT
open(unit=10,file='sortie.txt',action='write')

write(*,*) 'Entrez le temps initial : '
read(*,*) tinit

write(*,*) 'Entrez le temps final : '
read(*,*) tfin

write(*,*) 'Entrez le vecteur initial (e1,e2 et g1,g2) : '
read(*,*) x(1),x(2),x(3),x(4)

! parametres :
k=sqrt(4.D0*pi**2.D0)
m_0=1.d0
m_1=1.d-3
m_2=1.d-2
a_1=0.05D0
a_2=5.D0

L_1=((m_0*m_1)/(m_0+m_1))*sqrt((k**2)*(m_0+m_1)*a_1)
L_2=((m_2*(m_0+m_1))/(m_0+m_1+m_2))*sqrt((k**2)*(m_0+m_1+m_2)*a_2)
i=60.D0*pi/180.d0
GG_1=L_1*sqrt(1.D0-x(1)**2)
GG_2=L_2*sqrt(1.D0-x(2)**2)
H=sqrt(2.D0*GG_1*GG_2*cos(i)+GG_1**2+GG_2**2)

! REMPLISSAGE DU VECTEUR PARAMETRES
parametres(1)=k
parametres(2)=m_0
parametres(3)=m_1
parametres(4)=m_2
parametres(5)=a_1
parametres(6)=a_2
parametres(7)=L_1
parametres(8)=L_2
parametres(9)=i
parametres(10)=H

```

```

write(*,*) 'Entrez le pas d''integration : '
read(*,*) hh, NbrMod

write(*,*) 'Calcul en cours...'

n=tfm/hh

write(10,'(6e25.16)') tinit,x(1),x(2),MODULO(x(3),2.D0*pi)*180.D0/pi,&
MODULO(x(4),2.D0*pi)*180.D0/pi,&
MODULO(acos(i),2.D0*pi)*180.D0/pi

do j=0,n-1

t=tinit+j*hh

call PRrk4(x,t,parametres,hh,xtemp)
x=xtemp

var_i=(parametres(10)**2-(parametres(7)*sqrt(1-x(1)**2))**2&
-(parametres(8)*sqrt(1-x(2)**2))**2)/(2*parametres(7)*sqrt(1-x(1)**2)&
*parametres(8)*sqrt(1-x(2)**2))

if (MODULO(j+1,NbrMod)==0) write(10,'(6e25.16)') t+hh,x(1),x(2),&
MODULO(x(3),2.D0*pi)*180.D0/pi,MODULO(x(4),2.D0*pi)*180.D0/pi,&
MODULO(acos(var_i),2.D0*pi)*180.D0/pi

end do

! DESALLOCATION DES DIFFERENTS VECTEURS
deallocate(parametres)
deallocate(x)

! FERMETURE DES FICHIERS TXT

close(10)

end program memoire
! ----- memoire.f90 ----- !

```

Dans ce programme, nous faisons appel à la sous-routine "PRrk4". Cette sous-routine a pour rôle d'intégrer les équations du mouvement (contenues dans le second module). L'intégration est effectuée en utilisant la méthode itérative de Runge-Kutta 4. Voici le contenu de ce premier module :

```

! ----- Module1.f90 ----- !
MODULE Module1

USE Module2

CONTAINS

SUBROUTINE PRrk4(x,tinit,parametres,hh,xplush)

IMPLICIT NONE

real(KIND(1.0D0)), DIMENSION(:), INTENT(IN) :: x
real(KIND(1.0D0)), DIMENSION(:), INTENT(INOUT) :: parametres
real(KIND(1.0D0)), INTENT(IN) :: hh,tinit
real(KIND(1.0D0)), DIMENSION(0:SIZE(x)-1), INTENT(OUT) :: xplush
real(KIND(1.0D0)), DIMENSION(0:SIZE(x)-1) :: k1,k2,k3,k4,transit

CALL eqmvmvmt(x,tinit,parametres,k1)
transit=x+hh*0.5d0*k1

CALL eqmvmvmt(transit,tinit+hh*0.5d0,parametres,k2)
transit=x+hh*0.5d0*k2

CALL eqmvmvmt(transit,tinit+hh*0.5d0,parametres,k3)
transit=x+hh*1.0d0*k3

CALL eqmvmvmt(transit,tinit+hh,parametres,k4)
xplush=x+hh*(1.0d0/6.0d0)*( k1+2.0d0*k2+2.0d0*k3+k4)

END SUBROUTINE PRrk4

END MODULE Module1
! ----- Module1.f90 ----- !

```

Ce second module contient les équations octupoles décrivant le mouvement du problème des trois corps (équations 3.22-3.25 dans le chapitre 3). Voici son contenu :

```

! ----- Module2.f90 ----- !
MODULE Module2

CONTAINS

subroutine eqmvmvmt(x,tinit,parametres,xout)

```

```

real(KIND(1.0D0)), dimension(4), INTENT(IN) :: x
real(KIND(1.0d0)), INTENT(IN) :: tinit
real(KIND(1.0d0)), dimension(10), INTENT(IN) :: parametres
real(KIND(1.0d0)), dimension(4), INTENT(OUT) :: xout
real(KIND(1.0d0))::e_1,e_2,g_1,g_2
real(KIND(1.0d0))::G1,G2,par(10)
real(KIND(1.0d0))::theta, cosphi
real(KIND(1.0d0))::C_2,C_3,A,B,C_2_AS,C_3_AS
real(KIND(1.0d0))::de_1,de_2,dg_1,dg_2
real(KIND(1.0d0))::k,m0,m1,m2,a1,a2,L1,L2,iangle,H

! Utilisation des arguments
e_1=x(1)
e_2=x(2)
g_1=x(3)
g_2=x(4)

! Recuperation des param?tres
k=parametres(1)
m0=parametres(2)
m1=parametres(3)
m2=parametres(4)
a1=parametres(5)
a2=parametres(6)
L1=parametres(7)
L2=parametres(8)
iangle=parametres(9)
H=parametres(10)

G1=L1*sqrt(1.D0-(e_1**2))
G2=L2*sqrt(1.D0-(e_2**2))
theta=((H**2)-(G1**2)-(G2**2))/(2.D0*G1*G2)
cosphi=-cos(g_1)*cos(g_2)-theta*sin(g_1)*sin(g_2)

C_2=((k**4)/16.D0)*(((m0+m1)**7)/((m0+m1+m2)**3))&
      *((m2**7)/((m0*m1)**3))*(((L1)**4)/((L2**3)*(G2**3)))

C_3=-(15.D0/16.D0)*((k**4)/4.D0)&
      *(((m0+m1)**9)/(m0+m1+m2)**4)&
      *(((m0-m1)*(m2**9))/((m0*m1)**5))&
      *((L1**6)/((G2**5)*(L2**3)))

B=2.D0+5.D0*(e_1**2)- 7.D0*(e_1**2)*cos(2.D0*g_1)

```

```

A=4.D0+3.D0*(e_1**2)-(5.D0/2.D0)*(1-(theta**2))*B

! Calcul des eq du mvmt
! -----e1-----
de_1 = C_2*((1.D0-(e_1**2))/(G1))*(30.D0*e_1*(1.D0-(theta**2))&
      *sin(2.D0*g_1))+C_3*e_2*((1.D0-(e_1**2))/(G1))&
      *(35.D0*cosphi*(1.D0-(theta**2))*(e_1**2)*sin(2.D0*g_1)&
      -10.D0*theta*(1-(e_1**2))*(1.D0-(theta**2))*cos(g_1)*sin(g_2)&
      -A*(sin(g_1)*cos(g_2)-theta*cos(g_1)*sin(g_2)))

! -----e2-----

de_2 = -C_3*e_1*((1.D0-(e_2**2))/(G2))&
      *(10.D0*theta*(1.D0-(theta**2))*(1.D0-(e_1**2))&
      *sin(g_1)*cos(g_2)+ A*(cos(g_1)*sin(g_2)&
      -theta*sin(g_1)*cos(g_2)))

! -----g1-----

dg_1 = C_2*6*((1.D0/G1)*(4.D0*(theta**2)&
      +(5.D0*cos(2.D0*g_1)-1.D0)&
      *(1.D0-(e_1**2)-(theta**2)))&
      + (theta/G2)*(2.D0+(e_1**2)*(3.D0-5.D0*cos(2.D0*g_1))))&
      -C_3*e_2*(e_1*((1.D0/G2)+(theta/G1))&
      *(sin(g_1)*sin(g_2)*(A+10.D0*(3.D0*(theta**2)-1.D0)&
      *(1.D0-(e_1**2)))- 5.D0*theta*B*cosphi)&
      -((1.D0-(e_1**2))/(e_1*G1))*(sin(g_1)*sin(g_2)*10.D0&
      *theta*(1.D0-(theta**2))*(1.D0-3.D0*(e_1**2))&
      + cosphi*(3.D0*A-10.D0*(theta**2)+2.D0)))

! -----g2-----

dg_2 = C_2*3*(((2.D0*theta)/(G1))*(2.D0+(e_1**2)&
      *(3.D0-5.D0*cos(2.D0*g_1)))+(1.D0/G2)* ( 4.D0+6.D0*(e_1**2)&
      +(5*(theta**2)-3.D0)*( 2.D0+(e_1**2)&
      *(3.D0-5.D0*cos(2.D0*g_1)))))+C_3*e_1*( sin(g_1)*sin(g_2)&
      *( ((4.D0*(e_2**2)+1.D0)/(e_2*G2))*10.D0*theta*(1.D0-(theta**2))&
      *(1.D0-(e_1**2))- e_2*((1.D0/G1)+(theta/G2))&
      *(A+10.D0*(3*(theta**2)-1.D0)*(1.D0-(e_1**2)) ) )&
      +cosphi*( 5*B*theta*e_2*((1.D0/G1)+(theta/G2))&
      +((4.D0*(e_2**2)+1.D0)/(e_2*G2))*A ))

! -----vecteur final-----

```

```
xout(1)=de_1
xout(2)=de_2
xout(3)=dg_1
xout(4)=dg_2

end subroutine eqmvm

END MODULE Module2
! ----- Module2.f90 ----- !
```