

THESIS / THÈSE

MASTER EN SCIENCES MATHÉMATIQUES

Etude de différents formalismes mathématiques en géométrie symplectique et conception d'un enseignement

Mal, Elodie

Award date:
2016

Awarding institution:
Université de Namur

[Link to publication](#)

General rights

Copyright and moral rights for the publications made accessible in the public portal are retained by the authors and/or other copyright owners and it is a condition of accessing publications that users recognise and abide by the legal requirements associated with these rights.

- Users may download and print one copy of any publication from the public portal for the purpose of private study or research.
- You may not further distribute the material or use it for any profit-making activity or commercial gain
- You may freely distribute the URL identifying the publication in the public portal ?

Take down policy

If you believe that this document breaches copyright please contact us providing details, and we will remove access to the work immediately and investigate your claim.



UNIVERSITE DE NAMUR

Faculté des Sciences

**ÉTUDE DE DIFFÉRENTS FORMALISMES MATHÉMATIQUES
EN GÉOMÉTRIE SYMPLECTIQUE ET CONCEPTION D'UN ENSEIGNEMENT**

**Mémoire présenté pour l'obtention
du grade académique de master en sciences mathématiques à finalité didactique**

Élodie MAL

Juin 2016



UNIVERSITE DE NAMUR

Faculté des Sciences

**ÉTUDE DE DIFFÉRENTS FORMALISMES MATHÉMATIQUES
EN GÉOMÉTRIE SYMPLECTIQUE ET CONCEPTION D'UN ENSEIGNEMENT**

Promoteur :

Anne-Sophie LIBERT

**Mémoire présenté pour l'obtention
du grade académique de master en sciences mathématiques à finalité didactique**

Élodie MAL

Juin 2016

Remerciements

Merci à Eric Darteville de m'avoir passionnée, à mon tour, pour cet univers mathématique si riche et de m'avoir appris que les mathématiciens étaient fainéants.

Merci à ma promotrice, Anne-Sophie Libert, pour sa disponibilité, ses bons conseils, ses paroles rassurantes et motivantes ainsi qu'aux lecteurs de ce mémoire, Timoteo Carletti, Valérie Henry et Joseph Winkin, de prendre le temps d'évaluer ce travail final.

Merci à mes parents pour leur amour et leur soutien indestructible ainsi qu'aux deux O. de m'avoir appris, à leur façon, un peu du sens des responsabilités et de m'avoir permis tous ces moments de détente pendant ces années d'étude.

Merci à celui qui se reconnaîtra pour sa patience infinie et pour sa présence dans tous ces moments de stress et de joie.

Merci finalement à mes proches pour leurs encouragements et à toutes les personnes que j'ai rencontrées pendant ces études, autant professeurs qu'étudiants, d'avoir rendu cette aventure belle et unique.

Abstract

La géométrie symplectique est une discipline mathématique étudiant les variétés différentiables munies d'une 2-forme fermée et non-dégénérée. Elle s'applique parfaitement à l'étude des espaces des phases des systèmes conservatifs et peut s'étudier selon trois formalismes mathématiques : les systèmes dynamiques, l'algèbre et la géométrie différentielle. Le cours de Géométrie symplectique SMATB307 enseigné en bachelier en sciences mathématiques à l'Université de Namur est orienté systèmes dynamiques. La question de la pertinence de proposer un enseignement plus axé géométrie différentielle se pose naturellement et est l'objet de ce travail. D'une part, ce mémoire présente une étude théorique de la géométrie symplectique dans les différents formalismes. Les concepts équivalents dans les formalismes dynamique, algébrique et différentiel sont mis en évidence afin de découvrir l'entrelacement des différents axes. D'autre part, un enseignement basé sur le formalisme différentiel est conçu. Cet enseignement a été proposé aux étudiants en sciences mathématiques durant l'année académique 2015-2016 et l'avis de ces derniers sur le contenu de la séance a été analysé via un questionnaire. Ce mémoire a été rédigé avec un souci pédagogique constant.

Mots clés : variété symplectique - transformation canonique - Liouville - crochets de Poisson - symplectomorphisme - fibré cotangent - champ de vecteurs hamiltonien

Symplectic geometry is a mathematical discipline that studies differentiable manifolds with a closed and nondegenerate 2-form. It describes perfectly the phase spaces of conservative systems and can be studied through three mathematical formalisms : dynamical systems, algebra and differential geometry. The course of Symplectic geometry SMATB307 for bachelors in mathematics of the University of Namur is dynamical systems oriented. The question of the relevance to propose a teaching more based on differential geometry naturally comes up and is the purpose of the present work. On one hand, the master thesis presents a theoretical study of symplectic geometry in the different formalisms. Equivalent concepts in dynamical, algebraic and differential formalisms are highlighted to uncover the limits between the different approaches. On the other hand, a teaching based on the differential formalism is designed. This teaching has been proposed to students in mathematics during the academic year 2015-2016 and their opinion on the content of the course has been analyzed through a survey. This work has been written in a educational way.

Key words : symplectic manifold - canonical transformation - Liouville - Poisson brackets - symplectomorphism - cotangent bundle - hamiltonian vector field

Table des matières

Introduction	1
1 Géométrie symplectique	3
1.1 Géométries	3
1.1.1 Géométrie classique	3
1.1.2 Géométrie analytique	4
1.1.3 Géométrie algébrique	4
1.1.4 Géométrie différentielle	4
1.2 Origine de la géométrie symplectique	5
1.2.1 Problème des deux corps	6
1.2.2 Méthode de la variation des constantes	8
1.2.3 Crochets et parenthèses de Lagrange	9
1.2.4 Apports de Lagrange et Poisson	12
1.2.5 Géométrie symplectique et mécanique analytique	13
2 Formalisme dynamique	15
2.1 Rappels de mécanique lagrangienne	16
2.1.1 Méthodes variationnelles en mécanique lagrangienne	17
2.1.2 Principe d'Hamilton	17
2.2 Introduction à la mécanique hamiltonienne	18
2.2.1 Transformation de Legendre	18
2.2.2 Fonction d'Hamilton	18
2.2.3 Equations hamiltoniennes	19
2.2.4 Théorème de Liouville	19
2.2.5 Méthodes variationnelles en mécanique hamiltonienne	20
2.3 Formalisme canonique	20
2.3.1 Structure symplectique de l'espace des phases	20
2.3.2 Transformations canoniques	21
2.3.3 Condition de Lie	23
2.3.4 Fonctions génératrices	24
2.3.5 Parenthèses de Poisson	24
3 Formalisme algébrique	27
3.1 Rappels d'algèbre linéaire	27
3.1.1 Espaces vectoriels	27
3.1.2 Applications et formes linéaires	31
3.1.3 Multilinéarité	33
3.1.4 Valeurs propres et vecteurs propres	35
3.2 Espaces vectoriels symplectiques	35
3.2.1 Formes bilinéaires antisymétriques	36
3.2.2 Formes bilinéaires antisymétriques non-dégénérées	38

3.3	Morphismes symplectiques et groupes symplectiques	40
3.3.1	Morphismes symplectiques	40
3.3.2	Groupes symplectiques	42
3.3.3	Exemple standard $\mathbb{R}^{2n}$	44
3.4	Sous-espaces d'espaces vectoriels symplectiques	46
3.4.1	Orthogonal symplectique	46
3.4.2	Sous-espaces vectoriels	46
3.5	Algèbre de Lie du groupe symplectique	47
3.6	Structures complexes sur des espaces symplectiques réels	49
3.7	Identification des concepts équivalents	50
4	Formalisme différentiel	53
4.1	Rappels de géométrie différentielle	53
4.1.1	Variétés différentiables	53
4.1.2	Calculus sur variétés différentiables	54
4.1.3	Flots et dérivées de Lie	61
4.2	Variétés symplectiques	64
4.2.1	Forme volume de Liouville	64
4.2.2	Sous-variétés d'une variété symplectique	65
4.3	Exemples de variétés symplectiques	65
4.3.1	Espace $\mathbb{R}^{2n}$	65
4.3.2	Fibré cotangent	66
4.4	Champs de vecteurs hamiltoniens	70
4.5	Crochets de Poisson	73
4.6	Symplectomorphismes et transformations canoniques	76
4.7	Champs de vecteurs symplectiques	77
4.7.1	Liens avec les champs hamiltoniens	78
4.7.2	Théorème de Liouville différentiel	79
4.8	Variétés presque complexes	79
4.9	Identification des concepts équivalents	80
5	Développement d'un enseignement	83
5.1	Stratégie	83
5.2	Proposition d'enseignement	85
5.3	Expérimentation en classe	92
5.4	Avis des étudiants	93
5.4.1	Géométrie	96
5.4.2	Cours actuel SMATB307	97
5.4.3	Séance de cours proposée	98
5.4.4	Stratégie pour l'an prochain	100
5.4.5	Conclusions générales	101
	Conclusion	103
	Bibliographie	105
A	Sous-espaces d'espaces vectoriels symplectiques	107
A.1	Orthogonal symplectique	107
A.2	Sous-espaces vectoriels	110

B	Orbite coadjointe et action symplectique	113
B.1	Rappels d'algèbre supérieure	113
B.1.1	Sous-groupes	113
B.1.2	Action d'un groupe sur un ensemble	114
B.2	Orbite coadjointe	114
B.3	Action symplectique	120

Introduction

La géométrie symplectique est une branche mathématique, issue de la géométrie différentielle. Elle étudie les variétés symplectiques, variétés différentiables munies d'une 2-forme fermée et non-dégénérée. Cette géométrie fut développée à l'origine comme outil géométrique dans l'étude d'un fameux problème de mécanique analytique : le problème à n -corps. En effet, l'espace des phases d'un système mécanique conservatif est une variété symplectique. Depuis, la géométrie symplectique a conquis de vastes territoires mathématiques indépendants. Elle peut être étudiée selon trois formalismes mathématiques : les systèmes dynamiques, l'algèbre et la géométrie différentielle. Ces trois axes permettent de découvrir la géométrie symplectique dans des cadres mathématiques distincts même s'ils sont étroitement entrelacés dans le cas qui nous occupe.

Actuellement, le cours SMATB307 de Géométrie symplectique, donné en bloc 3 dans le cursus en sciences mathématiques de l'Université de Namur, est principalement axé systèmes dynamiques. Un souhait de la titulaire du cours, Anne-Sophie Libert, est de concevoir une approche plus géométrique des notions principales de ce cours. Pour atteindre cet objectif, nous étudions, dans une première partie, les trois formalismes mathématiques de la géométrie symplectique selon un aspect théorique en mettant en évidence les concepts équivalents dans les différents axes proposés. Dans une seconde partie, nous mettons en place un enseignement pour répondre au souhait d'Anne-Sophie Libert en proposant une séquence de cours centrée sur le formalisme différentiel. Cette séance de deux heures a, par ailleurs, été expérimentée en classe cette année académique 2015-2016 et la pertinence de cet enseignement a été analysée via un questionnaire proposé aux étudiants.

Le présent mémoire est scindé en cinq chapitres. Le Chapitre 1 replace la géométrie symplectique dans la grande famille des géométries et pose les bases historiques en développant les travaux de Lagrange et de Poisson conduisant à l'avènement de la géométrie symplectique. Les Chapitres 2, 3 et 4 développent de façon théorique les trois formalismes mathématiques de la géométrie symplectique. En particulier, le Chapitre 2 synthétise les principaux résultats du cours SMATB307 donné à l'Université de Namur dans un formalisme dynamique en introduisant, entre autres, la mécanique hamiltonienne et les transformations canoniques. Le Chapitre 3 étudie le formalisme algébrique essentiellement à partir des espaces vectoriels symplectiques et du groupe symplectique linéaire. Le Chapitre 4 porte sur le formalisme différentiel et développe principalement les variétés symplectiques, les crochets de Poisson et les symplectomorphismes. Les liens entre les concepts des trois formalismes sont aussi mis en évidence. Le dernier chapitre présente la stratégie d'enseignement proposée, basée sur les variétés symplectiques et sur les crochets de Poisson. Nous discutons des choix opérés et analysons l'expérience réalisée en classe à partir du questionnaire soumis aux étudiants du bloc 3.

L'intégralité de ce mémoire est conçu de manière pédagogique afin d'être compris par le plus grand nombre. Ainsi, les rappels d'algèbre et de géométrie différentielle, provenant de cours dispensés pendant le bachelier en sciences mathématiques à l'Université de Namur et placés au début des chapitres concernés, peuvent être passés par ceux le souhaitant, sans nuire à la compréhension du mémoire. Il est également à noter que les chapitres 3 et 4 émanent d'un travail bibliographique important, de sorte à développer les différents formalismes de façon complète et détaillée tout en faisant une synthèse ordonnée de plusieurs livres et en éclairant les liens entre ces formalismes.

Chapitre 1

Géométrie symplectique

Ce chapitre se veut un préambule à la géométrie symplectique. Cette géométrie est peu connue du grand nombre. Nous proposons de découvrir sa place dans la grande famille qu'est la géométrie (Section 1.1). Nous expliquons également l'histoire de ses origines en développant le contexte des découvertes (entre autres le problème des deux corps et la méthode des perturbations pour résoudre le problème à n -corps) ainsi que le raisonnement de Lagrange lorsqu'il discuta des premiers éléments de géométrie symplectique (Section 1.2).

1.1 Géométries

Le mot *géométrie* vient du grec $\gamma\epsilon\omega\mu\epsilon\tau\rho\eta\zeta$ et signifie la « science de la mesure du terrain ». La géométrie peut être séparée en plusieurs branches : géométrie classique, géométrie algébrique, géométrie analytique, géométrie différentielle, géométrie non-commutative,... Nous nous concentrons sur les quatre premières classifications citées en utilisant les sources [6], [8] et [34].

1.1.1 Géométrie classique

La géométrie classique regroupe les disciplines les plus familières à tout un chacun, à savoir la géométrie euclidienne, la géométrie affine, la géométrie projective et la géométrie non-euclidienne.

Géométrie euclidienne

La géométrie euclidienne prend racine, comme son nom l'indique, dans la Grèce antique avec un mathématicien, Euclide. Dans son livre *Eléments*, il décrit les connaissances géométriques de son époque et tente de les formaliser mathématiquement. Cette géométrie étudie les figures du plan et de l'espace usuels en utilisant les notions de distance et d'angle.

Nous pouvons citer les cinq axiomes d'Euclide et de sa géométrie :

1. Il existe toujours une droite (ou un segment) passant par deux points du plan.
2. Tout segment peut être prolongé à l'infini en une droite.
3. Un cercle peut toujours être tracé en prenant un segment de droite comme rayon et une de ses extrémités comme centre.
4. Tous les angles droits sont équivalents entre eux.
5. Soient une droite et un point donnés, alors il existe une et une seule droite parallèle à la droite donnée et passant par le point donné.

Géométrie affine

Cette géométrie étudie les espaces affines, ensembles de points définis par des propriétés spécifiques permettant de parler d'alignement, de parallélisme, d'intersection, etc., mais sans les notions de distance et d'angle propres à la géométrie euclidienne. L'étude de ces espaces présuppose l'existence d'un espace vectoriel associé pour étudier les propriétés des droites, plans, etc.. Cela requiert des liens étroits avec l'algèbre linéaire, qui étudie les espaces vectoriels et les transformations linéaires. Un des plus beaux résultats de la géométrie affine est le théorème de Thalès.

Géométrie projective

La géométrie projective modélise les notions de perspective et d'horizon en ajoutant aux espaces affines des points à l'infini. Elle étudie donc les propriétés qui laissent inchangées des figures par projection, contrairement à la géométrie euclidienne qui, elle, étudie ce qui reste invariant après déplacement.

Géométrie non-euclidienne

La géométrie non-euclidienne est une variante de la géométrie euclidienne contraire à l'intuition usuelle. Cette géométrie a recours à tous les postulats et axiomes d'Euclide posés dans ses *Eléments* sauf un. La géométrie non-euclidienne ne considère pas l'axiome des parallèles (5^e postulat) comme un axiome. Par exemple, en prenant l'espace d'une sphère S^2 , nous pouvons considérer les points comme deux antipodes et les droites comme les grands cercles passant par les antipodes. Dans ce cas-ci, nous voyons bien que le 5^e postulat d'Euclide n'est pas vérifié.

1.1.2 Géométrie analytique

Le but de cette géométrie est de résoudre, par le calcul, des problèmes géométriques. Le choix d'un repère est indispensable en géométrie analytique. Tous les objets sont décrits relativement à celui-ci, à l'aide de coordonnées. Ce repère permet de représenter tous les objets par des équations ou inéquations. La géométrie analytique étudie cette approche.

1.1.3 Géométrie algébrique

La géométrie algébrique est en partie issue de la géométrie analytique mais s'est développée indépendamment par la suite. Cette géométrie étudie les objets géométriques dont les coordonnées vérifient des équations ne faisant intervenir que des sommes et des produits. Cette géométrie se développe grâce à l'algèbre et la topologie.

1.1.4 Géométrie différentielle

Suite aux travaux de Gauss consacrés à l'étude des surfaces, Riemann développa cette branche maîtresse de la géométrie. En effet, jusqu'au milieu du 19^e siècle, la géométrie différentielle avait un point de vue extrinsèque : les variétés rencontrées étaient définies comme des sous-ensembles d'un espace vectoriel de dimension supérieure. Habituellement, cet espace vectoriel était pris comme étant $\mathbb{R}^n$. Mais Riemann introduisit ensuite une vision intrinsèque des variétés : elles sont considérées comme des objets en tant que tels et non comme des parties d'autres. L'objectif était donc de généraliser les propriétés métriques et différentielles des surfaces usuelles de l'espace euclidien à des variétés considérées maintenant comme espaces de référence.

La géométrie différentielle étudie principalement les variétés différentiables et les fonctions sur ces variétés. Elle utilise les outils de calcul différentiel et intégral dans le but de les appli-

quer en géométrie. Les deux branches principales de la géométrie différentielle sont la géométrie riemannienne et la géométrie symplectique.

Géométrie riemannienne

La géométrie riemannienne fait apparaître les variétés différentiables comme des espaces euclidiens selon un point de vue infinitésimal. Elle étudie les espaces courbes et les propriétés géométriques des variétés présentant une notion d'espaces tangents et équipés d'une métrique, métrique riemannienne, permettant de mesurer ces vecteurs.

Géométrie symplectique

Comme explicité en détail à la section suivante, la géométrie symplectique apporta un nouveau regard sur la mécanique classique et en devint un langage il y a deux cents ans. Depuis, elle a conquis un territoire indépendant et riche grâce à son récent développement. La géométrie symplectique est l'étude des 2-formes fermées non-dégénérées et trouve son application en géométrie algébrique, en géométrie différentielle, dont elle en constitue une partie, et bien sûr en mécanique.

1.2 Origine de la géométrie symplectique

Cette section est inspirée des sources [1], [4], [16], [17], [21], [22], [26], [29], [34] et fortement de [15].

Nous nous intéressons tout d'abord à l'étymologie du terme 'symplectique'. La *géométrie symplectique* porte ce nom depuis le milieu du 20^e siècle. C'est, en effet, dans son livre *Classical groups* que Weyl choisit en 1946 le nom 'symplectique'. Ce mot vient du grec 'sumplektikos' signifiant 'qui est enlacé avec un autre corps'. Cet adjectif grec est la transposition du mot latin 'complexus', déjà utilisé pour désigner les nombres complexes. C'est d'ailleurs à cause de cette utilisation déjà établie que Weyl décida d'utiliser le mot grec pour parler du groupe symplectique. Nous citons ce mathématicien qui explique son choix dans son livre *Classical groups*¹ comme suit :

« The name 'complex group' formerly advocated by me in allusion to line complexes, as these are defined by the vanishing of antisymmetric bilinear forms, has become more and more embarrassing through collision with the word 'complex' in the connotation of complex number. I therefore propose to replace it by the corresponding Greek adjective 'symplectic'. »

L'idée des deux adjectifs 'symplectique' et 'complexe' introduit une notion de dualité. En effet, ces mots expriment l'existence de plusieurs types d'objets maintenus ensemble dans une structure. Dans le cas des nombres complexes, nous avons la dualité réel/imaginaire et pour la géométrie symplectique, il s'agit de la dualité position/vitesse. Nous regardons maintenant comment cette notion de position/vitesse caractérise la géométrie symplectique.

Pour ce faire, nous partons à la découverte des origines de la géométrie symplectique. Une phrase de P. Iglesias-Zemmour, dans son article [15], explique le but de notre démarche : « Comme pour tout fruit de la pensée humaine, la géométrie symplectique mérite que l'on connaisse la branche et même l'arbre qui le porte. Séparer le fruit de l'arbre, comme il est malheureusement courant de le faire dans l'enseignement, aboutit à le flétrir. ». Nous nous intéressons à l'origine de la structure symplectique dans les travaux de Lagrange en 1808. Il travaillait à l'époque sur

1. Princeton University Press, 1939-1946, p.165

la résolution approchée des équations du mouvement des planètes du système solaire. Nous explicitons d'abord quelques résultats préliminaires sur le problème à deux et à n -corps avant de développer les découvertes de Lagrange nous intéressant (Sections 1.2.1, 1.2.2 et 1.2.3). Ensuite, nous enchaînons sur les apports de Lagrange et de Poisson en géométrie symplectique (Section 1.2.4) avant de terminer sur les liens entre la géométrie symplectique et la mécanique analytique (Section 1.2.5).

Nous choisissons d'utiliser les notations utilisées par Lagrange dans le deuxième tome de *Mécanique Analytique*, dans lequel son travail prend sa forme la plus aboutie. La partie de cet ouvrage qui nous intéresse n'a été publiée qu'après sa mort en 1816.

1.2.1 Problème des deux corps

Définition 1.2.1 (Problème des deux corps). Le problème des deux corps consiste en l'étude du mouvement de deux masses m_A et m_B en interaction gravitationnelle. Ce problème a été posé et résolu par Newton dans ses *principia* en 1687, où il a su confirmer les relations expérimentales obtenues par Kepler de 1609 à 1630 énoncées ci-dessous :

Première loi de Kepler En première approximation, les planètes décrivent une ellipse dont le Soleil occupe l'un des foyers.

Deuxième loi de Kepler Le rayon Soleil-planète balaie des aires égales pendant des intervalles de temps égaux.

Troisième loi de Kepler Dans le système solaire, le carré de la période de révolution de chaque planète est proportionnel au cube du demi-grand axe de l'orbite.

Dans le cas qui nous intéresse, nous nous occupons du mouvement d'une planète, comme la Terre, attirée par le Soleil. Le mouvement de la planète attirée est donné par une équation différentielle de degré deux. Il suffit donc de choisir six constantes d'intégration arbitraires pour déterminer la position de la planète dans l'espace, à tout instant passé, présent et futur. Nous pouvons choisir les position et vitesse initiales de la planète à un instant donné, appelé origine des temps arbitraire. Mais un autre choix, très souvent utilisé dans le monde de la physique et notamment par Lagrange², est de prendre les éléments képlériens (aussi appelés éléments orbitaux) de la planète. Pour connaître complètement l'ellipse décrite par la planète, nous avons besoin de connaître le plan dans lequel elle se situe, de définir sa forme et sa taille et, enfin, de déterminer la position de la planète sur son orbite à chaque instant³. Grâce aux deuxième et troisième lois de Kepler, le mouvement est complètement déterminé avec ces six éléments. Nous donnons ici les six éléments képlériens choisis par Lagrange.

ÉLÉMENTS KÉPLÉRIENS (a, b, c, h, i, k) :

- a : valeur du demi-grand axe,
- b : paramètre de l'ellipse (carré du moment cinétique),
- c : époque (représentant la position de la planète sur son orbite, par exemple son temps de passage au périhélie⁴),
- h : longitude des noeuds (angle entre la direction du point vernal⁵ et celle de la ligne des noeuds⁶, mesuré dans le plan de référence),
- i : inclinaison du plan de l'orbite par rapport au plan de référence,

2. Car ce choix a une signification géométrique immédiate.

3. Par exemple, nous donnons sa position à un instant choisi comme origine des temps, via la donnée d'un seul angle.

4. Point de la trajectoire elliptique de la planète qui est le plus proche du Soleil.

5. Intersection entre l'équateur et l'écliptique lorsque le Soleil passe de l'hémisphère Sud à l'hémisphère Nord.

6. Droite d'intersection du plan de l'ellipse avec le plan principal du système de référence.

- k : longitude du périhélie (angle que fait le grand-axe de l'ellipse avec la ligne des noeuds).

Un ensemble analogue a été introduit au cours SMATB208 de *Mécanique du point et du solide*, source [18]. Nous donnons cet équivalent mieux connu⁷ :

$$(a, b, c, h, i, k) \longleftrightarrow (a, e, f, \Omega, i, \omega).$$

Une représentation des éléments képlériens est donnée à la Figure 1.1. Nous remarquons que cinq de ces éléments sont constants dans le problème des deux corps mais que l'élément représentant la position de la planète est variable au cours du temps, par exemple l'anomalie vraie f , donnée par $r = \frac{p}{1+e \cos(f)}$, où r représente la distance de la planète au Soleil et p le paramètre de l'ellipse⁸.

L'ensemble des mouvements képlériens constitue l'espace suivant.

Définition 1.2.2 (Espace des mouvements képlériens). L'ensemble des mouvements de la planète considérés indépendamment du choix des paramètres qui servent à les décrire est appelé espace des mouvements képlériens et est noté $\mathcal{K}$.

L'ensemble des mouvements bornés d'une planète autour du Soleil est une variété différentiable⁹ de dimension 6 dans l'approximation képlérienne. Chaque mouvement borné d'une planète est un point m de cette variété et ses éléments orbitaux sont les coordonnées locales de ce point dans une carte de la variété.

Alors que le problème des deux corps est entièrement résolu analytiquement, le problème à n -corps en interaction mutuelle n'est pas intégrable pour $n \geq 3$. En effet, Poincaré a décou-

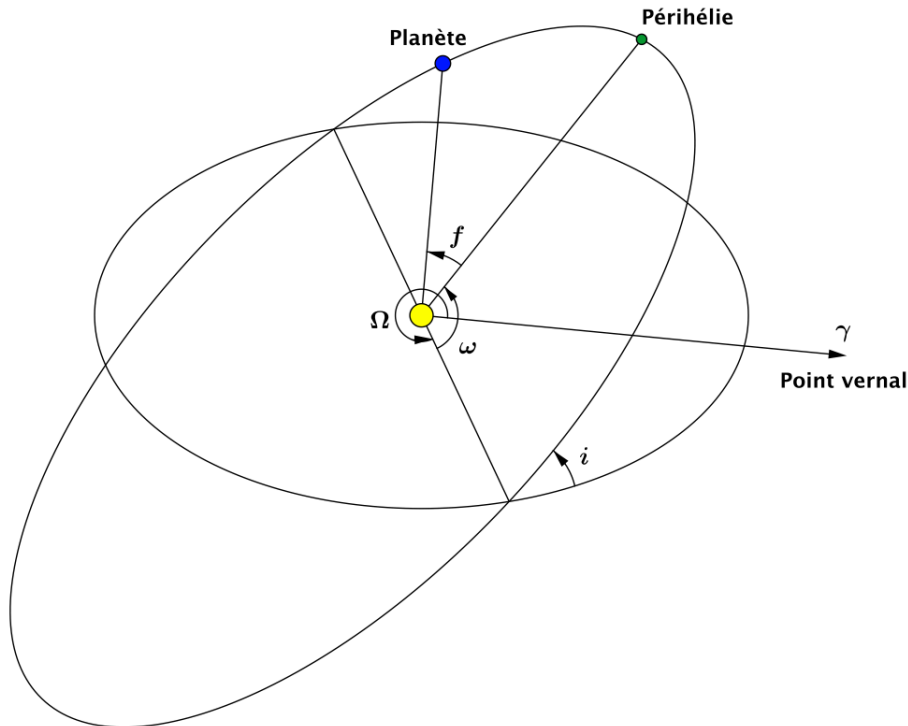


FIGURE 1.1 : Représentation des quatre éléments orbitaux i, ω, Ω et f , figure inspirée de [36]

7. Concernant l'élément b , il est lié à l'excentricité e de l'orbite par la formule $G = \sqrt{\mu a(1 - e^2)}$, où G est la norme du moment cinétique et μ est le paramètre gravitationnel standard égal au produit de la constante gravitationnelle et de la masse du Soleil.

8. Relié au demi-grand axe de l'ellipse a par la formule $p = a(1 - e^2)$.

9. Voir Définition 4.1.1.

vert que les trajectoires des corps pouvaient être chaotiques¹⁰. Ce problème tient compte de l'attraction exercée par chaque planète sur toutes les autres planètes et sur le Soleil, même si le Soleil est bien entendu le corps ayant le plus d'influence sur les planètes environnantes. Les deux méthodes possibles pour traiter le problème à n -corps sont d'une part, d'utiliser l'analyse numérique (intégration des équations newtoniennes du mouvement) et d'autre part, d'utiliser la théorie des perturbations, déjà en place au temps de Laplace, Lagrange et Poisson.

Les éléments képlériens sont au coeur de la méthode utilisée par Lagrange pour étudier le problème à n -corps non-intégrable, méthode qu'il avait créée précédemment pour traiter les solutions des équations différentielles : la *méthode de la variation des constantes*. La méthode de la variation des constantes introduite est celle de la variation des éléments orbitaux des planètes du système solaire. Même si elle s'en inspire sans aucun doute, nous ne parlons pas ici de la méthode de résolution des équations différentielles linéaires non-homogènes déjà développée par Lagrange.

1.2.2 Méthode de la variation des constantes

Nous essayons à présent de comprendre cette méthode qui consiste à expliquer le problème à n -corps, en considérant les éléments képlériens des planètes, non plus comme constants, mais lentement variables. Nous développons dans la suite cette idée ingénieuse de Lagrange.

Pour étudier le mouvement des planètes du système solaire, Lagrange partit du problème des deux corps et considéra l'influence des autres planètes comme une perturbation. En effet, considérons une planète qui suit un certain mouvement ellipsoïdal, représenté comme un point m de l'espace des éléments képlériens. Supposons maintenant que la planète subisse un choc instantané, au temps t . Son mouvement est donc perturbé au point d'impact et suit une autre ellipse décrite par de nouveaux éléments képlériens après le choc. Le nouveau mouvement képlérien est alors représenté par un nouveau point m' de $\mathcal{K}$. Ce raisonnement est présenté à la Figure 1.2. Selon Lagrange, un choc symbolise l'influence d'une planète du système solaire sur celle étudiée à un instant précis. Lagrange interpréta donc l'interaction des autres planètes du système solaire comme une série infinie de chocs 'infinitement petits et continuels'. Le mouvement de chaque planète est décrit, non plus par un point fixe de $\mathcal{K}$, mais par une courbe tracée sur

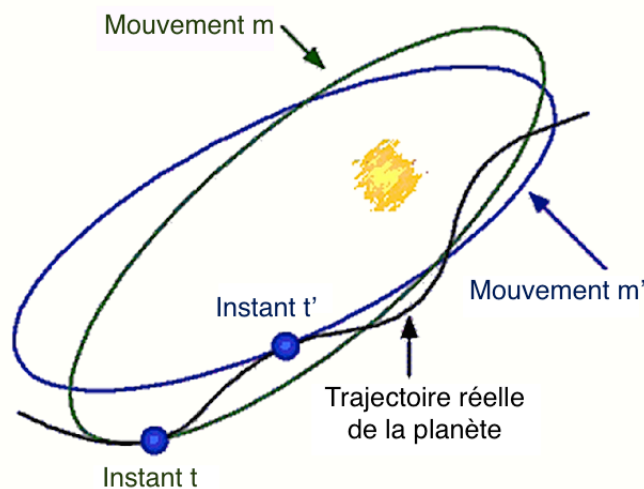


FIGURE 1.2 : Méthode de la variation des constantes, figure modifiée à partir de [15]

10. Une petite différence dans les positions et vitesses initiales peut causer d'importantes différences dans la trajectoire des corps.

cette variété.

C'est avec cette méthode que Lagrange mit en évidence les premiers éléments de géométrie symplectique, qui furent ses parenthèses et crochets. Nous en venons maintenant au raisonnement suivi par ce dernier pour tenter de déterminer la courbe

$$t \rightarrow (a(t), b(t), c(t), h(t), i(t), k(t))$$

définie sur l'espace des mouvements képlériens pour décrire le problème à n -corps. Nous représentons à la Figure 1.3 notre variété des mouvements képlériens en précisant la courbe que nous recherchons.

1.2.3 Crochets et parenthèses de Lagrange

En se rappelant que le mouvement d'une planète est complètement déterminé, aussi bien en donnant les éléments képlériens, qu'en donnant les position et vitesse initiales à une origine des temps arbitraire, l'application

$$(t, \mathbf{r}, \mathbf{v}) \mapsto (t, a, b, c, h, i, k)$$

est un difféomorphisme¹¹. En conséquence, ce qui vaut dans un système de coordonnées a une transcription équivalente dans l'autre système de coordonnées, du moins localement.

Considérons une planète du système solaire subissant continuellement de petits chocs. Ces chocs se traduisent par une variation instantanée de la vitesse au point d'impact. Nous remarquons que les chocs influencent la vitesse mais n'influencent en rien le temps et la position de la planète. C'est donc la vitesse qui va induire un nouveau mouvement elliptique. En notant $\mathbf{v} = (v^1, v^2, v^3)$ la vitesse instantanée de la planète, nous pouvons écrire la variation infinitésimale de a , élément képlérien quelconque de la planète. Nous obtenons

$$\frac{da}{dt} = \frac{\partial a}{\partial \mathbf{v}} \frac{d\mathbf{v}}{dt} = \sum_{i=1}^3 \frac{\partial a}{\partial v^i} \frac{dv^i}{dt}.$$

Le mouvement de la planète décrit par la courbe dans $\mathcal{K}$ est solution de ces équations différentielles.

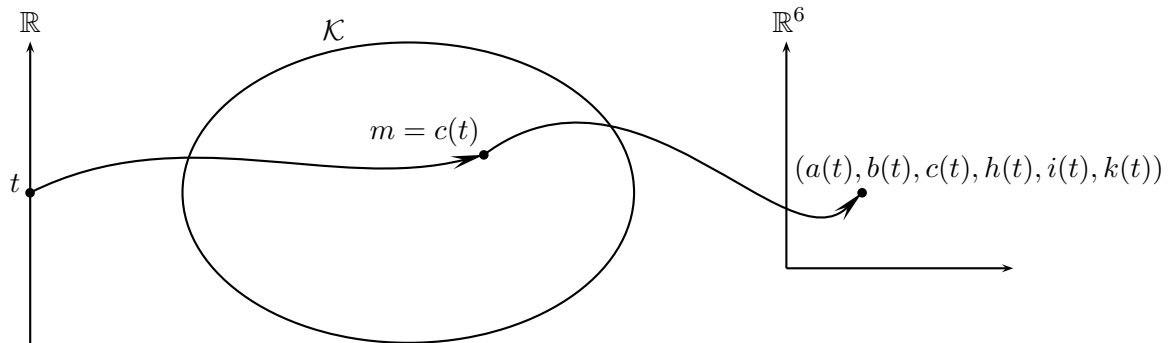


FIGURE 1.3 : Espace des mouvements képlériens

11. Il s'agit d'une bijection différentiable d'une variété dans une autre, dont la bijection réciproque est aussi différentiable.

En utilisant la deuxième loi de Newton¹² et en posant la masse de la planète égale à un, le vecteur $\frac{d\mathbf{v}}{dt}$ représente la force perturbatrice $\mathbf{X} = (X^1, X^2, X^3)$ exercée sur la planète à l'instant t au point $\mathbf{r} = (r^1, r^2, r^3)$. Sous l'effet de la perturbation, l'équation précédente devient

$$\frac{da}{dt} = \frac{\partial a}{\partial \mathbf{v}} \mathbf{X} = \sum_{i=1}^3 \frac{\partial a}{\partial v^i} X^i. \quad (1.1)$$

Supposons que la force perturbatrice $\mathbf{X}$ dérive d'un potentiel Ω , c'est-à-dire

$$\mathbf{X} = \nabla_{\mathbf{r}} \Omega \quad \text{i.e.} \quad X^i = \frac{\partial \Omega}{\partial r^i},$$

et que ce potentiel soit indépendant de la vitesse¹³ $\mathbf{v}$, c'est-à-dire

$$\nabla_{\mathbf{v}} \Omega = 0 \quad \text{i.e.} \quad \frac{\partial \Omega}{\partial v^i} = 0.$$

Nous pouvons donc réécrire l'équation (1.1) comme suit

$$\frac{da}{dt} = \sum_{i=1}^3 \left(\frac{\partial a}{\partial v^i} \frac{\partial \Omega}{\partial r^i} - \frac{\partial a}{\partial r^i} \frac{\partial \Omega}{\partial v^i} \right). \quad (1.2)$$

Grâce au difféomorphisme $(t, \mathbf{r}, \mathbf{v}) \mapsto (t, a, b, c, h, i, k)$, nous pouvons considérer le potentiel de perturbation comme fonction du temps et des éléments képlériens de la planète et donc introduire les transformations suivantes

$$\frac{\partial \Omega}{\partial r^i} = \frac{\partial \Omega}{\partial a} \frac{\partial a}{\partial r^i} + \frac{\partial \Omega}{\partial b} \frac{\partial b}{\partial r^i} + \dots$$

et

$$\frac{\partial \Omega}{\partial v^i} = \frac{\partial \Omega}{\partial a} \frac{\partial a}{\partial v^i} + \frac{\partial \Omega}{\partial b} \frac{\partial b}{\partial v^i} + \dots$$

Avec ces changements, l'équation (1.2) devient

$$\begin{aligned} \frac{da}{dt} &= \sum_{i=1}^3 \left[\frac{\partial a}{\partial v^i} \left(\frac{\partial \Omega}{\partial a} \frac{\partial a}{\partial r^i} + \frac{\partial \Omega}{\partial b} \frac{\partial b}{\partial r^i} + \dots \right) - \frac{\partial a}{\partial r^i} \left(\frac{\partial \Omega}{\partial a} \frac{\partial a}{\partial v^i} + \frac{\partial \Omega}{\partial b} \frac{\partial b}{\partial v^i} + \dots \right) \right] \\ &= \sum_{i=1}^3 \left[\frac{\partial a}{\partial v^i} \frac{\partial \Omega}{\partial a} \frac{\partial a}{\partial r^i} + \frac{\partial a}{\partial v^i} \frac{\partial \Omega}{\partial b} \frac{\partial b}{\partial r^i} + \dots - \frac{\partial a}{\partial r^i} \frac{\partial \Omega}{\partial a} \frac{\partial a}{\partial v^i} - \frac{\partial a}{\partial r^i} \frac{\partial \Omega}{\partial b} \frac{\partial b}{\partial v^i} - \dots \right] \\ &= \sum_{i=1}^3 \left(\frac{\partial a}{\partial v^i} \frac{\partial b}{\partial r^i} - \frac{\partial a}{\partial r^i} \frac{\partial b}{\partial v^i} \right) \frac{\partial \Omega}{\partial b} + \dots \end{aligned}$$

En définissant les *parenthèses de Lagrange* comme les fonctions de $(t, \mathbf{r}, \mathbf{v})$ suivantes

$$(a, b) = \sum_{i=1}^3 \left(\frac{\partial a}{\partial v^i} \frac{\partial b}{\partial r^i} - \frac{\partial a}{\partial r^i} \frac{\partial b}{\partial v^i} \right), \quad (1.3)$$

l'équation précédente devient

$$\frac{da}{dt} = (a, b) \frac{\partial \Omega}{\partial b} + (a, c) \frac{\partial \Omega}{\partial c} + \dots \quad (1.4)$$

Lagrange présenta les termes $\frac{\partial \Omega}{\partial a}, \frac{\partial \Omega}{\partial b}, \dots$ comme les forces perturbatrices exprimées dans les variables (a, b, c, h, i, k) . Les parenthèses de Lagrange sont donc les coefficients des forces perturbatrices exprimées dans les variables (a, b, c, h, i, k) . Nous remarquons que l'expression finale (1.4) de la variation des éléments képlériens semble plus compliquée que l'équation (1.1). L'intérêt de ces transformations réside dans le théorème suivant.

12. La somme des forces est égale au produit entre la masse et l'accélération.

13. Comme c'est le cas pour la force gravitationnelle $\mathbf{F}(\mathbf{r})$.

Théorème 1.2.1 (Théorème de Lagrange). *Les parenthèses $(a, b), (a, c), \dots$ considérées comme des fonctions de (t, a, b, c, h, i, k) ¹⁴ ne sont fonction que des éléments (a, b, c, h, i, k) .*

Grâce à l'équation (1.4), nous pouvons voir l'effet des forces perturbatrices comme une variation infinitésimale continue des éléments de son orbite. Après intégration et grâce au Théorème 1.2.1, nous obtenons

$$a(t) = a_0 + (a, b) \int_0^t \frac{\partial \Omega}{\partial b} dt + (a, c) \int_0^t \frac{\partial \Omega}{\partial c} dt + \dots$$

De plus, Lagrange montra que l'équation (1.4) s'inverse pour donner l'expression des forces perturbatrices en fonction des éléments de la planète, c'est-à-dire

$$\frac{\partial \Omega}{\partial a} = [a, b] \frac{db}{dt} + [a, c] \frac{dc}{dt} + \dots \quad (1.5)$$

où

$$[a, b] = \sum_{i=1}^3 \left(\frac{\partial r^i}{\partial a} \frac{\partial v^i}{\partial b} - \frac{\partial v^i}{\partial a} \frac{\partial r^i}{\partial b} \right) \quad (1.6)$$

sont les *crochets de Lagrange*. Pour cette expression, nous observons que ce sont les vecteurs $\mathbf{r}$ et $\mathbf{v}$ qui sont considérés comme fonction de t et des éléments képlériens, ce qui est l'inverse des parenthèses de Lagrange. Nous considérons donc ici le difféomorphisme réciproque $(t, a, b, c, h, i, k) \mapsto (t, \mathbf{r}, \mathbf{v})$.

PARENTHÈSES DE LAGRANGE VS CROCHETS DE POISSON

Actuellement, les cours de géométrie symplectique introduisent généralement les parenthèses ou crochets de Poisson et ne citent presque jamais les parenthèses ou crochets de Lagrange. Or, l'introduction de ces parenthèses et crochets est due à Lagrange en premier lieu, comme nous venons de l'expliquer.

Lagrange avait déjà l'habitude de travailler avec des parenthèses et des crochets dans ses développements en séries perturbatives. En effet, il regroupait en parenthèses l'ensemble des variables dont les coefficients des différentielles des éléments perturbés dépendaient. Mais, dans le cas qui nous intéresse, cette notation révèle la structure symplectique de l'espace des solutions du système planétaire. Suite aux importantes contributions successives de Poisson ¹⁵, Lagrange a même changé ses notations, ses parenthèses devenant crochets et inversement, entre son mémoire de 1808 et son livre *Mécanique Analytique*. Nous remarquons que ce que nous avons présenté comme parenthèses de Lagrange est aussi ce que nous appelons communément les crochets de Poisson.

La différence principale entre les crochets de Poisson (1.3) et les crochets de Lagrange (1.6) est l'utilisation du difféomorphisme dont nous avons déjà parlé. Nous observons que les crochets de Poisson sont exprimés au moyen des dérivées partielles du difféomorphisme de l'espace des phases au temps t sur l'espace des mouvements

$$(t, \mathbf{r}, \mathbf{v}) \mapsto (t, a, b, c, h, i, k), \quad (1.7)$$

alors que les crochets de Lagrange s'expriment au moyen des dérivées partielles du difféomorphisme réciproque.

14. Par le difféomorphisme $(t, \mathbf{r}, \mathbf{v}) \mapsto (t, a, b, c, h, i, k)$.

15. Cfr. la Sous-section 1.2.4.

Les parenthèses et crochets de Lagrange introduits ici sont à l'origine de la géométrie symplectique. Ces crochets sont les composantes d'une forme symplectique, en Définition 3.2.1, sur l'espace des solutions du système des planètes. Cette forme symplectique se note

$$\omega = [a, b]da \wedge db + [a, c]da \wedge dc + \dots + [i, k]di \wedge dk.$$

Par la suite, Lagrange montra que l'ensemble des mouvements d'un système mécanique perturbé quelconque possédait aussi une structure symplectique et donc un système de parenthèses analogues, pour autant que les forces de perturbation dérivent d'un potentiel. Nous regardons justement, dans la suite, quelles ont été les étapes successives des découvertes de Lagrange et Poisson en géométrie symplectique, ayant pour but de caractériser le problème à n -corps, ainsi que le contexte qui donna lieu à ces avancées.

1.2.4 Apports de Lagrange et Poisson

Dans cette partie, nous rentrons plus en détail dans les apports successifs des deux scientifiques, en Figure 1.4, en retraçant leurs différents mémoires où apparaissent des éléments de géométrie symplectique.

Des mathématiciens tels que Laplace, Lagrange et Poisson cherchèrent à déterminer les lois qui régissent la variation des éléments orbitaux des planètes au cours du temps. Ils tentèrent donc de déterminer les courbes sur $\mathcal{K}$ représentant les mouvements des planètes. Comme les moyens techniques de l'époque n'étaient pas poussés, ils utilisaient des développements en série dont ils calculaient les premiers termes.

Un premier grand résultat dû à Laplace en 1773 est qu'au premier ordre, la période et le demi-grand axe des orbites des planètes ne varient pas au cours du temps. Un an plus tard, Lagrange calcula la variation de la position des noeuds et de l'inclinaison des orbites. Laplace et Lagrange améliorèrent ces résultats jusqu'en 1784. Lagrange laissa ensuite de côté ces problèmes de représentation des mouvements vrais des planètes pour se consacrer à d'autres problèmes mathématiques et physiques pendant plus de 20 ans.

La présentation d'un mémoire de son élève Poisson, le 20 juin 1808 à l'Académie, donna à Lagrange l'envie de retravailler sur le sujet et lui suggéra les découvertes que nous avons développées précédemment. Ce travail de Poisson s'intitulait *Sur les inégalités séculaires des moyens mouvements des planètes*. Il montra que les hypothèses simplificatrices de Lagrange dans ses travaux des années 1776-1784 ne sont pas indispensables, en prenant en compte des termes supplémentaires dans les séries. Suite à ce mémoire, Lagrange publia lui-même, le 22 août 1808, son *Mémoire sur la théorie de la variation des éléments des planètes* où il retrouva le résultat de



FIGURE 1.4 : Joseph-Louis Lagrange - Siméon Denis Poisson, figures issues de [35] et [37]

Poisson en utilisant uniquement les outils de l'analyse. Lagrange généralisa ensuite les résultats de son mémoire précédent à tous les problèmes de la mécanique dans son *Mémoire sur la théorie générale de la variation des constantes arbitraires dans tous les problèmes de la mécanique*, présenté le 13 mars 1809 à l'Académie. Lagrange montra que les éléments elliptiques sont solutions du système différentiel (1.5) et qu'en le résolvant par rapport aux dérivées $\frac{da}{dt}$, nous obtiendrions un système différentiel utilisant certaines fonctions dont il ne donna pas l'expression. Le 16 octobre 1809, Poisson présenta un nouveau mémoire, *Sur la variation des constantes arbitraires*, où il améliora encore les résultats de Lagrange en donnant la construction de ces fonctions, les crochets de Poisson, utilisant le difféomorphisme réciproque. Comprenant qu'il avait laissé passer un fait important, Lagrange lui répondit le 19 février 1810 avec son *Second mémoire sur la théorie de la variation des constantes arbitraires dans les problèmes de mécanique* en allant encore plus loin dans l'analyse et en montrant que leurs calculs conduisaient aux mêmes résultats. La Sous-section 1.2.3 montre un résumé de toutes ces découvertes.

Avec tous ces différents travaux et ces apports successifs, Lagrange et son élève Poisson ont montré que la variété des mouvements képlériens d'une planète autour du Soleil possède une structure symplectique naturelle et que ce résultat peut être étendu à tous les systèmes mécaniques conservatifs.

1.2.5 Géométrie symplectique et mécanique analytique

MÉCANIQUE ANALYTIQUE

La *mécanique analytique* est une branche très mathématique de la mécanique classique. Son usage est plus pratique que celui des formulations standards de la dynamique newtonienne puisqu'elle est parfaitement adaptée à la description de systèmes où les mouvements sont sujets à des contraintes. Ce formalisme date de la fin du 18^e siècle. Lagrange et Hamilton, entre autres, l'utilisaient comme technique de perturbations. Les *mécaniques lagrangienne* et *hamiltonienne* sont les deux branches les plus importantes de cette mécanique.

De plus, la mécanique analytique peut être étudiée avec des outils géométriques. En effet, la géométrie symplectique a permis une nouvelle utilisation de la mécanique classique lorsqu'elle apparut comme la géométrie naturelle des espaces des phases¹⁶. Elle traite du comportement global d'un système mécanique en étudiant les trajectoires du système dans l'espace des phases. Le chapitre suivant étant consacré à cette étude, nous n'entrons pas plus en détail ici sur le sujet.

La géométrie symplectique est apparue comme une réponse mathématique aux constructions nécessaires de la physique. Et réciproquement, un nouveau regard a été porté sur la mécanique grâce au développement de la géométrie symplectique, qui est devenue le cadre type de la mécanique. Comme le dit P. Iglesias-Zemmour dans son article [15] : « *La géométrie symplectique n'est pas seulement le langage de la mécanique, elle en est l'essence et la matière.* »

H COMME HAMILTONIEN ?

Dans les cours actuels de mécanique hamiltonienne, la lettre $\mathcal{H}$ désigne l'hamiltonien, en l'honneur de Sir Hamilton (1805-1865), en Figure 1.5, célèbre mathématicien irlandais. L'hamiltonien représente l'énergie totale du système étudié. Or, dans son oeuvre *Mécanique Analytique* de 1811, Lagrange utilise déjà la notation $\mathcal{H}$ pour la constante des forces vives représentant l'énergie totale, et cela en hommage à Huygens (1629-1695), en Figure 1.5. Malentendu historique ! En 1811, Hamilton n'était alors âgé que de 5 ans... Devrions-nous renommer l'hamiltonien l'huygensien ? L'utilisation de noms pour désigner des objets mathématiques était peu courante

16. Ensemble des valeurs de position et d'impulsion $(q^1, \dots, q^n, p_1, \dots, p_n)$ admissibles d'un système, i.e. ensemble des mouvements possibles.



FIGURE 1.5 : Sire William Rowan Hamilton - Christian Huygens, figures issues de [38] et [33]

à l'époque de Lagrange, ce qui explique peut-être l'erreur des mathématiciens de la fin du 19^e siècle¹⁷.

Après ce chapitre consacré aux préliminaires de ce mémoire, dans lequel différentes géométries ont été évoquées et l'histoire de la géométrie symplectique détaillée, nous entrons à présent dans l'étude théorique de la géométrie symplectique. La littérature consacrée à la géométrie symplectique est abordée en suivant trois axes principaux : la théorie des systèmes dynamiques, l'algèbre et la géométrie différentielle. Dans les trois chapitres suivants, nous développons chacune de ces approches théoriques, en discutant des liens entre les différents formalismes dès que possible.

17. Pour plus d'informations, [15] contient maints détails sur le sujet.

Chapitre 2

Formalisme dynamique

Le cours SMATB307 de *Géométrie symplectique* donné en bachelier en sciences mathématiques à l'UNamur (titulaire : Anne-Sophie Libert) est orienté mécanique analytique et systèmes dynamiques. Nous résumons dans ce chapitre les principales notions de ce cours, en utilisant les notes de cours [20] et le syllabus [5]. Ce dernier se base sur le livre *Analytical Mechanics*, de A. Fasano et S. Marmi, Oxford University Press, 2006.

Le cours SMATB307 ex cathedra contient la table des matières suivante.

- | |
|--|
| <ol style="list-style-type: none">1. Rappels de mécanique lagrangienne<ol style="list-style-type: none">1.1 Méthodes variationnelles en mécanique lagrangienne1.2 Principe d'Hamilton2. Introduction à la mécanique hamiltonienne<ol style="list-style-type: none">2.1 La transformation de Legendre2.2 La fonction d'Hamilton2.3 Equations hamiltoniennes2.4 Théorème de Liouville2.5 Méthodes variationnelles en mécanique hamiltonienne3. Formalisme canonique<ol style="list-style-type: none">3.1 Structure symplectique de l'espace des phases3.2 Transformations canoniques3.3 Condition de Lie3.4 Fonctions génératrices3.5 Parenthèses de Poisson4. Théorie d'Hamilton-Jacobi et variables angle-action<ol style="list-style-type: none">4.1 Théorie d'Hamilton-Jacobi4.2 Systèmes séparables4.3 Variables angle-action5. Le problème des deux corps<ol style="list-style-type: none">5.1 Transformation de Mathieu5.2 Le problème des deux corps |
|--|

Nous notons que les chapitres suivants du mémoire ne développent pas les points 4 et 5 repris ci-dessus.

2.1 Rappels de mécanique lagrangienne

La mécanique lagrangienne fait l'objet du cours SMATB208 *Mécanique du point et du solide* donné en bachelier en sciences mathématiques à l'Université de Namur. Nous rappelons cependant ici les notions indispensables à la compréhension de ce chapitre.

Considérons n masses ponctuelles interagissant entre elles par des forces de liaison et/ou extérieures. En utilisant les équations de Newton,

$$\vec{F} = m\vec{a},$$

nous avons $3n$ équations différentielles à résoudre pour caractériser ce problème mécanique. Le but de la mécanique lagrangienne est de réduire le nombre d'équations en introduisant des coordonnées généralisées q_i , où $i = 1, \dots, m$. Si nous considérons des liaisons holomorphes¹ et sans frictions, un système de points matériels sur lesquels agissent des forces extérieures provenant d'une énergie potentielle V , telle que $\vec{F} = -\nabla V$, peut être décrit par une fonction lagrangienne.

Définition 2.1.1 (Fonction lagrangienne). Soit $\vec{q} = (q_1, \dots, q_m)$ le vecteur des coordonnées généralisées et $\dot{\vec{q}}$ sa dérivée par rapport au temps. La fonction de Lagrange est définie par

$$\mathcal{L}(\vec{q}, \dot{\vec{q}}) = T - V,$$

où T représente l'énergie cinétique et V l'énergie potentielle.

Définition 2.1.2 (Espace des phases lagrangien). L'espace à $2m$ dimensions des couples de vecteurs $(\vec{q}, \dot{\vec{q}})$ est appelé l'espace des phases, chaque point dans cet espace détermine de façon univoque la position et la vitesse instantanée du système.

Comme illustration, nous donnons, en Figure 2.1, l'espace des phases associé au problème du pendule simple².

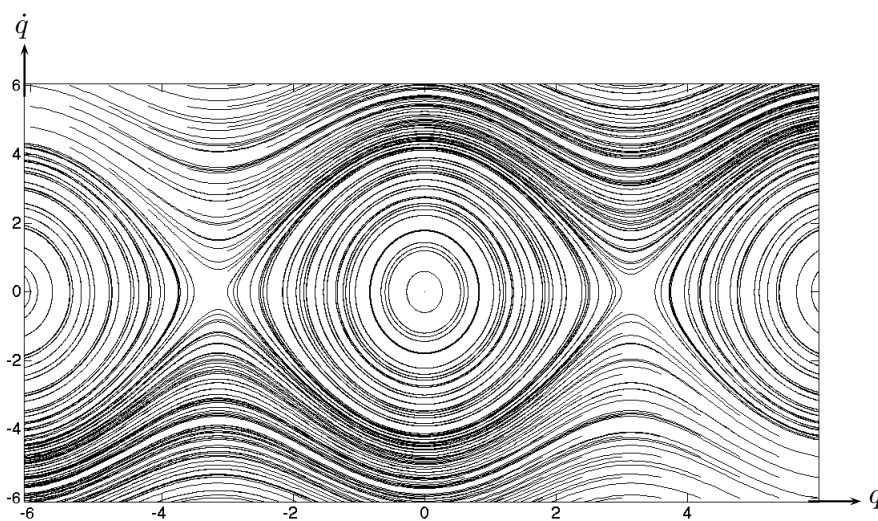


FIGURE 2.1 : Espace des phases du pendule simple pour $l = 2$

1. Liaisons indépendantes du temps.

2. L'équation du mouvement du pendule simple est donnée par $m\ddot{q} + mg \sin q = 0$, où m est la masse ponctuelle, l la longueur du fil inextensible, q l'angle entre la verticale et la direction du fil et g l'accélération de la pesanteur.

En résolvant les *équations d'Euler-Lagrange*,

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_j} - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_j} = 0, \quad \forall j = 1, \dots, m, \quad (2.1)$$

nous obtenons l'évolution du système des points. Cela demande la résolution de m équations du second ordre. Nous aimerions, dans la suite, simplifier encore les équations nécessaires à l'obtention de la dynamique et des équilibres du système, et ce, en passant du deuxième ordre au premier ordre.

2.1.1 Méthodes variationnelles en mécanique lagrangienne

Le mouvement naturel, découlant des équations d'Euler-Lagrange, rend stationnaire une certaine fonctionnelle³ dans la classe de tous les mouvements a priori possibles avec certaines contraintes.

Théorème 2.1.1. *Soient*

- $F : \mathbb{R}^{2m+1} \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction de classe $\mathcal{C}^2$;
- $\mathcal{Q}$, appelé ensemble des mouvements variés synchrones, donné par

$$\{\vec{q} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^m \mid \vec{q} \in \mathcal{C}^2[t_0, t_1], \vec{q}(t_0) = \vec{q}_0 \text{ et } \vec{q}(t_1) = \vec{q}_1\},$$

- pour deux temps t_0, t_1 fixés et $\vec{q}_0, \vec{q}_1$ dans $\mathbb{R}^m$;*
- la fonctionnelle $\mathcal{F}(\vec{q}, \dot{\vec{q}}) = \int_{t_0}^{t_1} F(\vec{q}(s), \dot{\vec{q}}(s), s) ds$;
- $\vec{q}_*$ un élément de $\mathcal{Q}$;
- H , l'ensemble des perturbations, i.e. $\{\vec{\eta} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^m \mid \vec{\eta} \in \mathcal{C}^2[t_0, t_1], \vec{\eta}(t_0) = \vec{\eta}(t_1) = 0\}$;
- le sous-ensemble $\mathcal{Q}_n \subset \mathcal{Q}$, pour $\vec{\eta}$ fixé, des courbes telles que chaque composante peut s'écrire sous la forme

$$q_k(t) = q_{*,k}(t) + \alpha_k \eta_k(t), \quad \forall k = 1, \dots, m, \quad \forall t \in [t_0, t_1],$$

où le vecteur $\vec{\alpha} = (\alpha_1, \dots, \alpha_m)$ appartient à $\mathbb{R}^m$.

Nous dirons que $\mathcal{F}$ est stationnaire dans $\mathcal{Q}$ en q_* si sa restriction $\mathcal{F}_\eta(\vec{\alpha}) = \mathcal{F}(\vec{q}_* + \vec{\alpha}\vec{\eta}, \dot{\vec{q}}_* + \dot{\vec{\alpha}}\dot{\vec{\eta}})$ est stationnaire pour $\vec{\alpha} = 0$ et pour tout $\vec{\eta} \in H$. Une condition nécessaire et suffisante pour que $\mathcal{F}$ soit stationnaire dans $\mathcal{Q}$ en $\vec{q}_*$ est que les composantes $(q_{*,k}(t))_{1 \leq k \leq m}$ soient solutions des équations d'Euler-Lagrange

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial F}{\partial \dot{q}_k} - \frac{\partial F}{\partial q_k} = 0.$$

2.1.2 Principe d'Hamilton

Suite à la sous-section précédente, nous pouvons énoncer le principe d'Hamilton. Celui-ci déclare que, en considérant toutes les courbes possibles, le mouvement naturel est celui qui rend stationnaire la moyenne temporelle de la différence entre l'énergie cinétique et l'énergie potentielle.

Théorème 2.1.2 (Principe d'Hamilton). *Le mouvement naturel est caractérisé par la propriété de rendre stationnaire l'action hamiltonienne,*

$$\mathcal{A}(\vec{q}, \dot{\vec{q}}) := \int_{t_0}^{t_1} \mathcal{L}(\vec{q}(s), \dot{\vec{q}}(s), s) ds,$$

dans la classe des mouvements variés synchrones qui préservent les conditions initiales et finales.

3. Fonction dont les arguments sont des fonctions.

2.2 Introduction à la mécanique hamiltonienne

Le formalisme hamiltonien est motivé par la volonté de simplifier les équations du mouvement à résoudre.

2.2.1 Transformation de Legendre

Cette notion est essentielle à la définition de fonction hamiltonienne, point central de la mécanique hamiltonienne.

Définition 2.2.1 (Transformation de Legendre). Soit $f(x)$ convexe⁴ et $\mathcal{C}^2$ dans son domaine $[a, b]$. La transformation de Legendre de la fonction $f(x)$ est la fonction $g(p)$, définie par

$$g(p) := pw(p) - f(w(p)),$$

où $w(p)$ est le seul point qui vérifie $f'(w(p)) = p$.

Géométriquement, la fonction $w(p)$ peut être vue comme l'abscisse du point où le graphe de la fonction $f(x)$ est tangent à la droite de pente p .

Théorème 2.2.1. *La transformation de Legendre est inversible et involutive, c'est-à-dire $g \circ g = \text{id}$. La fonction $g(p)$, transformation de Legendre d'une fonction $f \in \mathcal{C}^2$ convexe, admet une transformation de Legendre qui coïncide avec la fonction f .*

2.2.2 Fonction d'Hamilton

Comme l'énergie cinétique est quadratique en $\dot{\vec{q}}$, la fonction de Lagrange $\mathcal{L}(\vec{q}, \dot{\vec{q}}, t)$ admet une transformation de Legendre vectorielle par rapport à $\dot{\vec{q}}$, pour tout couple $(\vec{q}, t)$ fixé. Donc le système

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_j} = p_j, \quad j = 1, \dots, m \quad (2.2)$$

peut être résolu en fonction de

$$\dot{\vec{q}} = \dot{\vec{q}}(\vec{p}, \vec{q}, t). \quad (2.3)$$

Définition 2.2.2 (Fonction d'Hamilton). La fonction d'Hamilton est définie comme la transformation de Legendre de la fonction lagrangienne, i.e.

$$\mathcal{H}(\vec{p}, \vec{q}, t) := \vec{p} \cdot \dot{\vec{q}} - \mathcal{L}(\vec{q}, \dot{\vec{q}}, t),$$

où $\dot{\vec{q}}$ est la solution de (2.3).

Le couple $(\vec{p}, \vec{q})$ est appelé les coordonnées canoniques.

Dans un système avec forces conservatives (i.e. qui dérivent d'une énergie potentielle) sans contraintes dépendantes du temps, l'Hamiltonien représente l'énergie mécanique totale du système : $\mathcal{H} = E$.

4. I.e. $f''(x) > 0$.

2.2.3 Equations hamiltoniennes

Nous montrons que les nouvelles coordonnées $(\vec{p}, \vec{q})$ permettent de baisser l'ordre des équations différentielles à résoudre pour déterminer la dynamique d'un système mécanique.

Nous pouvons montrer de façon assez simple en utilisant le Théorème 2.2.1 et les équations d'Euler-Lagrange (2.1) que les équations différentielles qui déterminent la variation des coordonnées canoniques sont données par

$$\begin{cases} \dot{p}_j = -\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial q_j} \\ \dot{q}_j = \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial p_j} \end{cases} \quad \forall j = 1, \dots, m, \quad (2.4)$$

appelées les *équations d'Hamilton*.

Propriété 2.2.1. Si $\vec{q}(t)$ et $\vec{p}(t)$ sont solutions des équations hamiltoniennes, alors

$$\frac{d}{dt} \mathcal{H}(\vec{p}(t), \vec{q}(t), t) = \frac{\partial \mathcal{H}(\vec{p}(t), \vec{q}(t), t)}{\partial t}.$$

2.2.4 Théorème de Liouville

Les équations d'Hamilton (2.4) peuvent être réécrites de façon matricielle pour mettre en évidence une certaine symétrie. En considérant un espace à $2m$ dimensions avec le vecteur $\vec{x} = \begin{pmatrix} \vec{p} \\ \vec{q} \end{pmatrix}$, nous obtenons les équations hamiltoniennes sous la forme⁵

$$\begin{pmatrix} \dot{\vec{p}} \\ \dot{\vec{q}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0_{m \times m} & -I_{m \times m} \\ I_{m \times m} & 0_{m \times m} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \partial \mathcal{H} / \partial \vec{p} \\ \partial \mathcal{H} / \partial \vec{q} \end{pmatrix} \quad \text{ou encore} \quad \dot{\vec{x}} = J \nabla \mathcal{H}. \quad (2.5)$$

La matrice J est appelée la *matrice symplectique principale*.

Propriété 2.2.2. Si $\mathcal{H}$ a des dérivées secondes continues par rapport à $\vec{q}$ et $\vec{p}$, alors⁶

$$\operatorname{div} \vec{X} = 0,$$

où $\vec{X} = J \nabla \mathcal{H}$.

Les champs de vecteurs à divergence nulle sont appelés les *champs solénoïdaux*.

Définition 2.2.3 (Flot hamiltonien). Le flot hamiltonien Φ^t est une application dépendante du temps de l'espace des phases en lui-même qui, à tout point $\vec{x}_0 \in \mathbb{R}^{2m}$ et pour tout $t > 0$, associe le point $\vec{x}(t)$ obtenu comme solution de (2.5) au temps t avec condition initiale $\vec{x}_0$, i.e.

$$\Phi^t(\vec{x}_0) = \vec{x}(t).$$

Nous nous intéressons maintenant à la transformation, à l'aide de Φ^t , de tout un volume de points dans $\mathbb{R}^{2m}$ et nous nous demandons comment ce volume varie dans le temps. Comme nous le constatons dans le théorème suivant, la mesure de ce volume ne change pas même si sa forme au temps t peut être différente de sa forme au temps $t = 0$.

Théorème 2.2.2 (Liouville). Le flot hamiltonien préserve les volumes de l'espace des phases. Cette propriété est vraie pour tout système de la forme $\dot{\vec{x}} = \vec{X}(\vec{x}, t)$ tel que $\operatorname{div} \vec{X} = 0$.

Corollaire 2.2.1. Tout point d'équilibre d'un système de divergence nulle ne peut pas être asymptotiquement stable.

5. La matrice O représente la matrice nulle et I la matrice identité.

6. Pour rappel, $\operatorname{div} \vec{f} = \sum_i \partial f_i / \partial x_i$.

2.2.5 Méthodes variationnelles en mécanique hamiltonienne

A la Sous-section 2.1.2, nous avons vu que le mouvement naturel est celui qui rend stationnaire l'action hamiltonienne dans la classe des mouvements variés synchrones. Puisque l'action hamiltonienne est construite à partir du lagrangien du système, nous pouvons, en passant au formalisme hamiltonien, la réécrire en utilisant l'hamiltonien du système.

Soient l'action hamiltonienne

$$A(\vec{p}, \vec{q}) := \int_{t_0}^{t_1} [\vec{p} \cdot \dot{\vec{q}} - \mathcal{H}(\vec{p}(t), \vec{q}(t), t)] dt,$$

la classe des mouvements⁷

$$\begin{cases} q_k(t) = q_k^*(t) + \eta_k(t) \\ p_k(t) = p_k^*(t) + \xi_k(t) \end{cases}, \quad (2.6)$$

avec $\vec{\eta}$ et $\vec{\xi}$ des fonctions $\mathcal{C}^2[t_0, t_1]$ telles que⁸ $\vec{\eta}(t_0) = \vec{\eta}(t_1) = 0$, et $(\vec{p}^*, \vec{q}^*)$ une solution du système.

Théorème 2.2.3. *Une condition nécessaire et suffisante pour rendre stationnaire l'action hamiltonienne dans la classe des mouvements (2.6) est que $(\vec{p}^*, \vec{q}^*)$ soit solution des équations hamiltoniennes.*

2.3 Formalisme canonique

Nous présentons certains aspects plus géométriques caractérisant la formulation hamiltonienne de la mécanique classique. La géométrie permet de traiter de questions globales, donc liées à la géométrie du problème. Comme le dit T. Carletti dans son syllabus [5], « *La géométrie symplectique peut être vue comme une possibilité d'écrire la mécanique hamiltonienne de façon intrinsèque, c'est-à-dire indépendamment des coordonnées choisies.* »

2.3.1 Structure symplectique de l'espace des phases

La matrice $J = \begin{pmatrix} 0_{m \times m} & -I_{m \times m} \\ I_{m \times m} & 0_{m \times m} \end{pmatrix}$ introduite en Sous-section 2.2.4 est orthogonale et antisymétrique, i.e.

$$J^T = J^{-1} \text{ et } J^T = -J.$$

En particulier, nous avons $J^2 = -I$.

Définition 2.3.1 (Matrice hamiltonienne). Toute matrice réelle carrée avec un nombre pair de lignes, notée A , est dite matrice hamiltonienne si $A^T J + J A = 0$.

Théorème 2.3.1. *Les propriétés suivantes sont équivalentes*

1. *A est hamiltonienne ;*
2. *il existe une matrice symétrique S telle que $A = JS$;*
3. *la matrice JA est symétrique.*

De plus, l'ensemble des matrices hamiltoniennes forme un groupe, noté $sp(m, \mathbb{R})$, le groupe des matrices hamiltoniennes avec l'addition.

7. Les mouvements variés doivent être définis sur l'espace des phases $(\vec{p}, \vec{q})$.

8. Nous remarquons que la condition aux extrêmes pour les variations de $\vec{p}$ n'est pas imposée, donc cette classe de variations satisfait toujours aux contraintes d'être aux points P_0 et P_1 aux temps t_0 et t_1 .

Définition 2.3.2 (Matrice symplectique). Une matrice réelle carrée A est dite symplectique si $A^T J A = J$.

Théorème 2.3.2. *Les matrices symplectiques $2m \times 2m$ forment un groupe, noté $Sp(m, \mathbb{R})$, par rapport au produit matriciel.*

Pour $m = 1$, le groupe $Sp(1, \mathbb{R})$ coïncide avec $SL(2, \mathbb{R})$, le groupe des matrices 2×2 tel que le déterminant vaut un. Lorsque $m > 1$, $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ avec a, b, c et $d \in \mathbb{R}^{m \times m}$, est symplectique si et seulement si $a^T b - c^T d = I$ et $a^T c, b^T d$ sont des matrices symétriques.

Considérons un champ de vecteurs $\vec{X}(\vec{x}, t)$ défini sur $\mathbb{R}^{2m+1}$.

Définition 2.3.3 (Champ hamiltonien). Un champ vectoriel $\vec{X}(\vec{x}, t)$ est hamiltonien s'il existe une fonction $f : \mathbb{R}^{2m+1} \rightarrow \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^2$ telle que

$$\vec{X}(\vec{x}, t) = J \nabla f(\vec{x}, t).$$

La fonction f est appelée hamiltonien correspondant au champ $\vec{X}$.

Théorème 2.3.3. *Une condition nécessaire et suffisante pour qu'un champ de vecteurs $\vec{X}(\vec{x}, t)$ soit hamiltonien est que la matrice jacobienne $\nabla_{\vec{x}} \vec{X}$ soit une matrice hamiltonienne, pour tout $(t, \vec{x})$.*

2.3.2 Transformations canoniques

Une façon de résoudre plus facilement une équation différentielle est de déterminer des coordonnées bien choisies dans lesquelles l'équation possède une forme plus simple. En d'autres termes, à partir d'une équation

$$\dot{\vec{x}} = v(\vec{x}, t),$$

nous choisissons un changement de coordonnées $\vec{x} \mapsto \vec{y}$ régulier et inversible, donné par la transformation suivante

$$\vec{x} = \vec{x}(\vec{y}, t).$$

Cela permet de réécrire notre équation différentielle sous la forme

$$\dot{\vec{y}} = w(\vec{y}, t),$$

que nous recherchons plus simple que la précédente.

De plus, si nous supposons que le champ de départ est hamiltonien, i.e.

$$\dot{\vec{x}} = J \nabla \mathcal{H}(\vec{x}, t),$$

pour une certaine fonction régulière $\mathcal{H} : \mathbb{R}^{2m+1} \rightarrow \mathbb{R}$, nous aimerions que, dans les nouvelles coordonnées $\vec{y}$, le champ de vecteurs reste hamiltonien.

Nous étudions donc les hypothèses sous lesquelles le caractère hamiltonien des équations est préservé par une transformation de coordonnées.

Définition 2.3.4 (Préservation de la structure canonique des équations hamiltoniennes). Une transformation de coordonnées $\vec{x} = \vec{x}(\vec{y}, t)$, avec $\vec{x} = (\vec{p}, \vec{q})$ et $\vec{y} = (\vec{P}, \vec{Q})$, régulière et inversible pour tout t fixé, préserve la structure canonique des équations hamiltoniennes si, pour tout

hamiltonien $\mathcal{H}(\vec{x}, t)$, il existe une fonction $\mathcal{K}(\vec{y}, t)$, dite nouvel hamiltonien, telle que dans ces nouvelles coordonnées les équations du mouvement sont sous la forme

$$\begin{cases} \dot{P}_j = -\frac{\partial K}{\partial Q_j} \\ \dot{Q}_j = \frac{\partial K}{\partial P_j} \end{cases} \quad \forall j = 1, \dots, m. \quad (2.7)$$

Définition 2.3.5 (Transformation canonique). Une transformation de coordonnées $\vec{y} = \vec{y}(\vec{x}, t)$ différentiable et inversible, pour tout t fixé, est dite canonique si la matrice jacobienne

$$A(\vec{x}, t)_{ij} = \frac{\partial y_i}{\partial x_j}$$

est symplectique, pour tout $(\vec{x}, t)$ dans le domaine de définition de la transformation. Si la transformation est indépendante du temps, $\vec{y} = \vec{y}(\vec{x})$, elle est appelée transformation complètement canonique.

Avec ces deux définitions, nous pouvons enfin déterminer quelles transformations de coordonnées préservent la structure canonique des équations d'Hamilton.

Théorème 2.3.4. *Les transformations canoniques préservent la structure canonique des équations hamiltoniennes.*

Par la démonstration de ce théorème⁹, le nouvel hamiltonien est donné par

$$\mathcal{K} = \hat{\mathcal{H}} + \mathcal{K}_0,$$

où $\hat{\mathcal{H}}$ est l'ancien hamiltonien réécrit dans les nouvelles variables, i.e. $\hat{\mathcal{H}}(\vec{y}, t) := \mathcal{H}(\vec{x}(\vec{y}, t), t)$, et $\mathcal{K}_0$ est l'hamiltonien associé au champ de vecteurs hamiltonien $\frac{\partial \vec{y}}{\partial t}$, i.e.

$$\frac{\partial \vec{y}}{\partial t} = J \nabla_{\vec{y}} \mathcal{K}_0.$$

Si la transformation est complètement canonique, alors $\mathcal{K}_0 \equiv 0$ et le nouvel hamiltonien est le transformé de l'ancien.

Nous présentons maintenant une deuxième propriété du flot hamiltonien.

Théorème 2.3.5. *Le flot hamiltonien définit une transformation canonique. Autrement dit, soit $\mathcal{H}$ un hamiltonien et Φ^t son flot pour t réel, i.e.*

$$\Phi^t(\vec{p}(0), \vec{q}(0)) = (\vec{p}(t), \vec{q}(t)),$$

où $(\vec{p}(t), \vec{q}(t))$ est solution des équations hamiltoniennes de $\mathcal{H}$ avec conditions initiales $(\vec{p}(0), \vec{q}(0))$. Alors l'application flot est canonique.

La solution des équations d'Hamilton pour un hamiltonien donné, vu comme une application à temps fixé, préserve la structure des équations hamiltoniennes pour tout autre hamiltonien.

Nous donnons dans les trois parties suivantes des caractérisations permettant d'obtenir des transformations canoniques.

9. Cfr. [5].

2.3.3 Condition de Lie

Cette condition caractérise les transformations canoniques à l'aide des formes différentielles.

Définition 2.3.6 (Forme non-singulière). Une forme différentielle θ dans $\mathbb{R}^{2m+1}$,

$$\theta = \sum_{i=1}^{2m+1} \theta_i(\vec{x}) dx_i,$$

est dite non-singulière si la matrice $A(\vec{x})$, antisymétrique, $(2m+1) \times (2m+1)$, définie par

$$A_{ij} = \frac{\partial \theta_i}{\partial x_j} - \frac{\partial \theta_j}{\partial x_i},$$

est de rang maximal, c'est-à-dire $2m$ ¹⁰. Le noyau de A , donné par

$$\ker(A) = \left\{ \vec{v} \in \mathbb{R}^{2m+1} \mid A\vec{v} = \vec{0} \right\},$$

détermine, quand $\vec{x}$ varie, un champ de directions appelées directions de rotationnel.

Nous introduisons une forme particulière nous permettant de caractériser les transformations canoniques.

Théorème 2.3.6. *La 1-forme différentiable*

$$\theta = \sum_{j=1}^m p_j dq_j - \mathcal{H}(\vec{p}, \vec{q}, t) dt$$

est non-singulière et est dite la forme de Poincaré-Cartan. Ses lignes de rotationnel sont les courbes intégrables des équations hamiltoniennes associées à $\mathcal{H}$.

Les transformations canoniques envoient un système d'équations hamiltoniennes pour un hamiltonien $\mathcal{H}$ dans un nouveau système d'équations hamiltoniennes pour un nouvel hamiltonien $\mathcal{K}$. Donc, elles envoient aussi les surfaces de rotationnel d'un système sur l'autre.

Proposition 2.3.1. *Une transformation canonique envoie les surfaces de rotationnel de la forme de Poincaré-Cartan dans les surfaces de rotationnel de la forme*

$$\Theta = \sum_{j=1}^m P_j dQ_j - \mathcal{K}(\vec{P}, \vec{Q}, t) dt. \quad (2.8)$$

CARACTÉRISATION 1 (Condition de Lie)

Si la transformation de coordonnées

$$\begin{cases} p_i = p_i(P_i, Q_i, t) \\ q_i = q_i(P_i, Q_i, t) \end{cases} \quad \forall i = 1, \dots, m$$

est canonique et si nous dénotons la nouvelle forme de Poincaré-Cartan par l'équation (2.8), alors il existe une fonction régulière $f(\vec{P}, \vec{Q}, t)$ telle que

$$\sum_{j=1}^m (p_j dq_j - P_j dQ_j) + (\mathcal{K} - \mathcal{H}) dt = df, \quad (2.9)$$

et réciproquement.

10. En effet, par cette définition, la diagonale de A est toujours nulle.

2.3.4 Fonctions génératrices

Dans la sous-section précédente, nous avons énoncé une condition nécessaire et suffisante pour avoir une transformation canonique : la condition de Lie. Maintenant, nous développons une procédure explicite pour construire ces transformations canoniques.

Prenons une transformation $(\vec{p}, \vec{q}) \mapsto (\vec{P}, \vec{Q})$. Par la condition de Lie, nous pouvons trouver quatre types de fonctions régulières telles que l'équation (2.9) soit vérifiée, et ainsi obtenir des transformations canoniques.

CARACTÉRISATION 2

Soit une transformation $(\vec{p}, \vec{q}) \mapsto (\vec{P}, \vec{Q})$. Il existe quatre classes de fonctions génératrices¹¹ rendant cette transformation canonique :

premier type $F_1(\vec{q}, \vec{Q}, t)$ avec $\det\left(\frac{\partial^2 F_1}{\partial q_i \partial Q_j}\right) \neq 0$ et $p_i = \frac{\partial F_1}{\partial q_i}$, $P_i = -\frac{\partial F_1}{\partial Q_i}$;

deuxième type $F_2(\vec{q}, \vec{P}, t)$ avec $\det\left(\frac{\partial^2 F_2}{\partial q_i \partial P_j}\right) \neq 0$ et $p_i = \frac{\partial F_2}{\partial q_i}$, $Q_i = \frac{\partial F_2}{\partial P_i}$;

troisième type $F_3(\vec{p}, \vec{Q}, t)$ avec $\det\left(\frac{\partial^2 F_3}{\partial p_i \partial Q_j}\right) \neq 0$ et $q_i = -\frac{\partial F_3}{\partial p_i}$, $P_i = -\frac{\partial F_3}{\partial Q_i}$;

quatrième type $F_4(\vec{p}, \vec{P}, t)$ avec $\det\left(\frac{\partial^2 F_4}{\partial p_i \partial P_j}\right) \neq 0$ et $q_i = -\frac{\partial F_4}{\partial p_i}$, $Q_i = \frac{\partial F_4}{\partial P_i}$.

De plus, l'hamiltonien $\mathcal{K}(\vec{P}, \vec{Q}, t)$ est lié à l'hamiltonien $\mathcal{H}(\vec{p}, \vec{q}, t)$ par la relation suivante

$$\mathcal{K} = \mathcal{H} + \frac{\partial F_i}{\partial t}. \quad (2.10)$$

2.3.5 Parenthèses de Poisson

Comme nous l'avons développé dans la Section 1.2, les parenthèses/crochets de Poisson sont des objets grandement étudiés en géométrie symplectique et plus spécialement en mécanique hamiltonienne. En effet, ils permettent la recherche des intégrales premières et la caractérisation des transformations canoniques.

Ce que nous appelons dans cette sous-section les *parenthèses* de Poisson est communément appelé dans la littérature¹² les *crochets* de Poisson.

Nous pouvons remarquer l'analogie entre une matrice symplectique A , vérifiant

$$A^T J A = J,$$

et une matrice orthogonale A , vérifiant

$$A^T = A^{-1} \Leftrightarrow A^T I A = I.$$

Au lieu d'un produit scalaire, nous pouvons introduire le produit symplectique.

Définition 2.3.7 (Produit symplectique). Pour tout $\vec{x}, \vec{y} \in \mathbb{R}^{2m}$, le produit symplectique est défini par

$$\vec{x} * \vec{y} := \vec{x}^T J \vec{y} = \sum_{i,j=1}^{2m} x_i J_{ij} y_j.$$

11. Une fonction génératrice dépend toujours d'une combinaison de 'vieilles' variables et de 'nouvelles' variables parmi les variables $(\vec{p}, \vec{q}, \vec{P}, \vec{Q})$, sans répétition.

12. Et dans les autres chapitres de ce mémoire.

Grâce à cette définition, nous pouvons définir la parenthèse de Poisson comme suit.

Définition 2.3.8 (Parenthèse de Poisson). La parenthèse de Poisson de deux fonctions régulières $f, g : \mathbb{R}^{2m} \rightarrow \mathbb{R}$ est définie comme le produit symplectique de leur gradient, i.e.

$$\{f, g\} := (\nabla f) * (\nabla g).$$

Dans le cas où $\vec{x} = (\vec{p}, \vec{q})$, la parenthèse de Poisson s'écrit comme

$$\{f, g\} = \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial \vec{p}} & \frac{\partial f}{\partial \vec{q}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -I \\ I & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{\partial g}{\partial \vec{p}} \\ \frac{\partial g}{\partial \vec{q}} \end{pmatrix}.$$

En résolvant le produit matriciel, nous obtenons l'expression suivante

$$\{f, g\} = \sum_{i=1}^m \left(\frac{\partial f}{\partial q_i} \frac{\partial g}{\partial p_i} - \frac{\partial f}{\partial p_i} \frac{\partial g}{\partial q_i} \right). \quad (2.11)$$

Propriété 2.3.1. Les équations hamiltoniennes peuvent être réécrites en utilisant les parenthèses de Poisson sous la forme

$$\begin{cases} \dot{p}_j = \{p_j, \mathcal{H}\} \\ \dot{q}_j = \{q_j, \mathcal{H}\} \end{cases}.$$

En effet, en utilisant les équations hamiltoniennes en équation (2.4), nous obtenons pour la première égalité

$$\begin{aligned} \{p_j, \mathcal{H}\} &= \sum_{i=1}^m \left(\underbrace{\frac{\partial p_j}{\partial q_i}}_{=0} \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial p_i} - \underbrace{\frac{\partial p_j}{\partial p_i}}_{=\delta_{ij}} \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial q_i} \right) \\ &= \sum_{i=1}^m -\delta_{ij} \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial q_i} \\ &= -\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial q_j} \\ &= \dot{p}_j. \end{aligned}$$

La deuxième égalité s'obtient de la même manière.

Remarque 2.3.1 (Parenthèses de Poisson fondamentales). Nous avons les relations suivantes

$$\{p_i, p_j\} = 0, \quad \{q_i, q_j\} = 0 \quad \text{et} \quad \{q_i, p_j\} = \delta_{ij}.$$

Définition 2.3.9 (Intégrale première du flot hamiltonien). Une fonction $f : \mathbb{R}^{2m+1} \rightarrow \mathbb{R}$ est une intégrale première du flot hamiltonien si et seulement si, pour tout $\vec{x}_0 \in \mathbb{R}^{2m}$ et pour tout $t \in \mathbb{R}$,

$$f(\Phi^t(\vec{x}_0), t) = f(\vec{x}_0, t).$$

Autrement dit, la fonction f est constante sur les orbites du flot hamiltonien.

Théorème 2.3.7. Une fonction $f : \mathbb{R}^{2m} \rightarrow \mathbb{R}$, indépendante du temps, est une intégrale première du flot hamiltonien si et seulement si $\{f, \mathcal{H}\} = 0$.

CARACTÉRISATION 3

Les faits suivants sont équivalents :

1. la transformation $\vec{x} = \vec{x}(\vec{X}, t)$ est canonique ;
2. pour tout couple de fonctions régulières $f(\vec{x}, t)$ et $g(\vec{x}, t)$,

$$\{f, g\}_{\vec{x}} = \{F, G\}_{\vec{X}},$$

où $F(\vec{X}, t) = f(\vec{x}(\vec{X}, t), t)$ et $G(\vec{X}, t) = g(\vec{x}(\vec{X}, t), t)$;

3. Pour tout $i, j = 1, \dots, m$,

$$\{P_i, P_j\}_{\vec{x}} = \{Q_i, Q_j\}_{\vec{x}} = 0 \text{ et } \{Q_i, P_j\}_{\vec{x}} = \delta_{ij},$$

i.e. la transformation préserve les parenthèses de Poisson fondamentales.

Le chapitre suivant développe une approche algébrique du même concept de structure symplectique.

Chapitre 3

Formalisme algébrique

Les notions de géométrie symplectique étudiées dans le chapitre précédent sont cette fois développées dans un formalisme algébrique, au moyen des notions d'espaces vectoriels et de matrices. En effet, les variétés symplectiques peuvent être vues localement comme des espaces vectoriels symplectiques. Il est donc nécessaire d'étudier ces structures avant d'étendre ces notions aux variétés dans le chapitre suivant.

De plus, la géométrie des groupes consiste en l'étude des actions de groupes sur des ensembles. Il s'agit, dans ce chapitre, d'analyser l'action du groupe symplectique sur des espaces vectoriels. Lorsque la théorie développée reste au niveau d'espaces vectoriels sans aborder les variétés différentiables, nous parlons de *géométrie symplectique linéaire*. Ce chapitre est réalisé principalement suivant le livre [2] mais aussi grâce aux notes de cours [11], aux livres [3], [14] et [28] ainsi qu'aux références [7], [9], [10], [12], [15], [19], [23], [24], [25] et [30].

Dans ce chapitre, nous commençons par quelques rappels d'algèbre linéaire nécessaires à sa compréhension. Nous abordons ensuite les espaces vectoriels symplectiques, en Section 3.2, avant d'étudier les formes bilinéaires antisymétriques et celles non-dégénérées. Dans la Section 3.3, nous exposons les morphismes symplectiques en détaillant le groupe symplectique linéaire et en développant l'exemple standard d'espace symplectique : $\mathbb{R}^{2n}$. Certains sous-espaces d'espaces vectoriels symplectiques sont définis (Section 3.4) avant d'établir un lien entre l'algèbre et la géométrie différentielle : nous abordons l'algèbre de Lie du groupe symplectique. Nous continuons ce chapitre en introduisant la notion de structure complexe sur un espace vectoriel réel (Section 3.6). Nous établissons finalement les liens entre les formalismes dynamique et algébrique en résumant les concepts identiques ou équivalents traités dans les deux chapitres.

3.1 Rappels d'algèbre linéaire

Cette section présente les définitions et résultats nécessaires pour ce chapitre. Ceux-ci sont tirés de la source [32], syllabus du cours SMATB101 d'*Algèbre* donné à l'Université de Namur¹.

3.1.1 Espaces vectoriels

Quelques propriétés des ensembles

Nous donnons premièrement quelques définitions spécifiant certaines relations entre ensembles.

Définition 3.1.1 (Correspondance). Une correspondance f définie sur l'ensemble U et à valeurs dans l'ensemble V est le triplet $f = (G, U, V)$ où G est le graphe d'une relation donnée $R(x, y)$

1. Le cours et le syllabus ont été modifiés entre notre première année de bachelier 2011-2012 et cette année académique 2015-2016.

avec $x \in U$ et $y \in V$,

$$G = \{(x, y) : R(x, y)\}.$$

Une correspondance particulière peut être déterminée en faisant référence à l'espace de départ.

Définition 3.1.2 (Application). Une application $f = (G, U, V)$ est caractérisée par le fait qu'un élément $x \in U$ est toujours en relation avec un et un seul $y \in V$, c'est-à-dire

$$\forall x \in U, \exists! y \in V, (x, y) \in G.$$

Autrement dit, une et une seule flèche part de chaque point U . Nous signalons qu'une application est souvent appelée simplement une *fonction*².

D'autres correspondances sont caractérisées par rapport à l'ensemble d'arrivée.

Définition 3.1.3 (Correspondance injective). Une correspondance injective $f = (G, U, V)$ est caractérisée par le fait qu'un élément $y \in V$ n'est jamais en relation qu'avec au plus un $x \in U$, c'est-à-dire

$$\forall y \in V, !x \in U, (x, y) \in G.$$

Autrement dit, au plus une flèche arrive en chaque point de V .

Définition 3.1.4 (Correspondance surjective). Une correspondance surjective $f = (G, U, V)$ est caractérisée par le fait qu'un élément $y \in V$ est toujours en relation avec au moins un $x \in U$, c'est-à-dire

$$\forall y \in V, \exists x \in U, (x, y) \in G.$$

Autrement dit, au moins une flèche arrive en chaque point de V .

Définition 3.1.5 (Correspondance bijective). Une correspondance bijective $f = (G, U, V)$ est une correspondance injective et surjective ; i.e. elle est caractérisée par le fait qu'un élément $y \in V$ est toujours en relation avec un et un seul $x \in U$, c'est-à-dire

$$\forall y \in V, \exists! x \in U, (x, y) \in G.$$

Autrement dit, une et une seule flèche arrive en chaque point de V .

En combinant les propriétés relatives à l'ensemble de départ à celui d'arrivée, d'autres définitions peuvent être énoncées.

Définition 3.1.6 (Injection). Une application injective f définie sur l'ensemble U et à valeurs dans l'ensemble V est appelée une injection et vérifie

$$\forall x, y \in U, x \neq y \Rightarrow f(x) \neq f(y).$$

Définition 3.1.7 (Surjection). Une application surjective f définie sur l'ensemble U et à valeurs dans l'ensemble V est appelée une surjection et vérifie

$$\forall y \in V, \exists x \in U, f(x) = y.$$

Définition 3.1.8 (Bijection). Une application f définie sur l'ensemble U et à valeurs dans l'ensemble V est une bijection si et seulement si elle est une injection et une surjection.

2. Par définition, une fonction $f = (G, U, V)$ est caractérisée par le fait qu'un élément $x \in U$ n'est jamais en relation qu'avec au plus un $y \in V$.

Structures algébriques

Nous considérons un ensemble E non vide que nous munissons d'une loi de composition $+$, interne et partout définie, i.e. cette loi est une fonction du produit cartésien $E \times E$ dans E qui, à chaque couple d'éléments de E , fait correspondre un élément de E . Nous définissons uniquement les structures algébriques nécessaires à la définition d'espace vectoriel énoncée ci-dessous.

Définition 3.1.9 (Groupe). $\{E, +\}$ est un groupe si et seulement si

- 1) $\forall x, y, z \in E, (x + y) + z = x + (y + z)$,
- 2) $\exists e \in E, \forall x \in E, e + x = x + e = x$,
- 3) $\forall x \in E, \exists y \in E, x + y = e = y + x$.

Si une loi satisfait la propriété 1), nous la disons *associative*, si l'ensemble E contient un élément e satisfaisant la propriété 2), l'élément e est le *neutre* pour la loi et si les éléments de E satisfont la propriété 3), ils sont dits *symétrisables*.

Nous nous intéressons à une notion un peu plus restrictive, celle de groupe commutatif.

Définition 3.1.10 (Groupe commutatif). $\{E, +\}$ est un groupe commutatif si et seulement si

- 1) $\{E, +\}$ est un groupe,
- 2) $\forall x, y \in E, x + y = y + x$.

D'autres structures algébriques peuvent être construites en adjoignant à l'ensemble E une seconde loi interne partout définie et en imposant certaines relations entre les deux lois de composition. Supposons que les deux lois sont notées respectivement $+$ et $*$ et considérons le triplet $\{E, +, *\}$.

Définition 3.1.11 (Corps commutatif). $\{E, +, *\}$ est un corps commutatif si et seulement si

- 1) $\{E, +\}$ est un groupe commutatif,
- 2) $\forall x, y, z \in E, (x * y) * z = x * (y * z)$,
- 3) $\forall x, y, z \in E, (x * y) + (x * z) = x * (y + z)$ et $(y + z) * x = (y * x) + (z * x)$,
- 4) $\exists n \in E, \forall x \in E, x * n = n * x = x$, avec $n \neq e$,
- 5) $\forall x \in E \setminus \{e\}, \exists y \in E, x * y = n = y * x$,
- 6) $\forall x, y \in E, x * y = y * x$.

L'ensemble $\mathbb{R}$ des nombres réels muni des lois d'addition et de multiplication habituelles est un corps commutatif, de même que l'ensemble des nombres complexes $\{\mathbb{C}, +, \cdot\}$.

Nous arrivons à la notion fondamentale d'espace vectoriel. Pour la définir, nous considérons deux ensembles et un certain nombre de lois de composition. Prenons deux ensembles, un ensemble de *scalaires* noté $\mathbb{K}$, formant un corps commutatif muni des lois $+$ et $*$, et un ensemble de *vecteurs* noté E . Cet ensemble de vecteurs est doté de deux lois de composition. La première, notée $\sharp$, est une loi interne correspondant à l'addition de vecteurs. La deuxième, notée $\bullet$, associe à un scalaire et à un vecteur un nouveau vecteur³.

Définition 3.1.12 (Espace vectoriel). $\{E, \{\mathbb{K}, +, *\}, \sharp, \bullet\}$ est un espace vectoriel (ou, plus brièvement, E est un espace vectoriel sur $\mathbb{K}$) si et seulement si

1. $\{\mathbb{K}, +, *\}$ est un corps commutatif dont le neutre est n ,
2. $\{E, \sharp\}$ est un groupe commutatif,
3. $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{K}, \forall x \in E, \alpha \bullet (\beta \bullet x) = (\alpha * \beta) \bullet x$,
4. $\forall x \in E, n \bullet x = x$,
5. $\forall \alpha \in \mathbb{K}, \forall x, y \in E, \alpha \bullet (x \sharp y) = (\alpha \bullet x) \sharp (\alpha \bullet y)$,
6. $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{K}, \forall x \in E, (\alpha + \beta) \bullet x = (\alpha \bullet x) \sharp (\beta \bullet x)$.

3. Cette loi n'est donc plus interne, mais définie sur le produit cartésien $\mathbb{K} \times E$ et à valeurs dans E .

Dépendance linéaire et dimension

Avant d'introduire la notion de *base* d'un espace vectoriel, nous abordons deux notions nécessaires à sa définition.

Définition 3.1.13 (Vecteurs linéairement indépendants). Soit un ensemble de m scalaires $\{\alpha_i\}_{i=1}^m$ non tous nuls. Les vecteurs $\{x_i\}_{i=1}^m$ sont linéairement indépendants si et seulement si la relation

$$\sum_{i=1}^m \alpha_i x_i = 0$$

implique que $\alpha_i = 0$, pour tout $i = 1, \dots, m$.

Définition 3.1.14 (Ensemble générateur). Un ensemble X de vecteurs d'un espace vectoriel E est dit générateur de cet espace vectoriel si et seulement si tout vecteur de E est une combinaison linéaire⁴ des éléments de X .

Ces concepts nous permettent de définir ceux de base et de dimension d'un espace vectoriel.

Définition 3.1.15 (Base). Une base d'un espace vectoriel E est un ensemble X de vecteurs linéairement indépendants et générateurs de E .

Définition 3.1.16 (Dimension finie). Un espace vectoriel est de dimension finie si et seulement si il admet une base X composée d'un nombre fini de vecteurs.

De plus, le nombre de vecteurs d'une base quelconque d'un espace vectoriel de dimension finie est identique à celui de toute autre base du même espace.

Théorème 3.1.1. Soit X une base d'un espace vectoriel de dimension finie E non réduit à l'origine. Alors tout vecteur de E s'exprime de manière unique en fonction de la base.

Définition 3.1.17 (Dimension). La dimension d'un espace vectoriel de dimension finie est le nombre de vecteurs dans une base quelconque de cet espace.

Sous-espaces vectoriels

Nous nous intéressons souvent à certaines parties d'un espace complet qui ont, en général, des propriétés qui en font des sous-espaces.

Définition 3.1.18 (Sous-espace vectoriel). Un sous-ensemble M non-vide d'un espace vectoriel E (associé au champ $\mathbb{K}$) est un sous-espace vectoriel si et seulement si il est lui-même un espace vectoriel sur le champ $\mathbb{K}$ ou encore, si et seulement si

$$\forall x, y \in M, \forall \alpha, \beta \in \mathbb{K}, \alpha x + \beta y \in M.$$

Nous dirons donc qu'un sous-ensemble est un sous-espace s'il contient toutes les combinaisons linéaires de ses éléments. De plus, tout sous-espace contient aussi l'origine⁵.

Nous donnons un exemple de sous-espace vectoriel qui nous sera utile lors d'une preuve. Prenons S un ensemble de vecteurs quelconques (pas nécessairement un sous-espace) dans E . Il existe certainement des sous-espaces qui contiennent S , E tout entier par exemple. Considérons M l'intersection de tous les sous-espaces qui contiennent S . Etant donné que l'intersection de toute collection de sous-espaces est un sous-espace, M est alors un sous-espace. Nous l'appelons le *sous-espace engendré par S* et le notons $\text{span}(S)$. Il est le plus petit des sous-espaces contenant S .

4. x est combinaison linéaire des vecteurs $\{x_i\}_{i=1}^m$ si et seulement si il existe un ensemble fini de coefficients $\{\alpha_i\}_{i=1}^m$ tels que $\sum_{i=1}^m \alpha_i x_i$.

5. En effet, par la définition, si $x \in M$, alors $x - x = 0$ est aussi dans M .

Théorème 3.1.2. Soit $S = \{x_1, \dots, x_m\}$. Alors le sous-espace $\text{span}(S)$ est constitué de l'ensemble des combinaisons linéaires des vecteurs de S .

La dimension d'un sous-espace vectoriel peut être mise en relation avec la dimension de l'espace vectoriel correspondant.

Théorème 3.1.3. Tout sous-espace M d'un espace vectoriel E de dimension n admet une base (sauf M réduit au vecteur nul) et est de dimension plus petite ou égale à n .

Nous définissons maintenant la somme directe de deux sous-espaces vectoriels d'un espace vectoriel donné grâce à ces deux définitions.

Définition 3.1.19 (Sous-espaces complémentaires). Deux sous-espaces H et G de E sont complémentaires si et seulement si $H + G = E$ ⁶ et $H \cap G = \{0\}$.

Définition 3.1.20 (Somme directe). L'espace vectoriel E est dit somme directe de ses sous-espaces M et N si et seulement si les sous-espaces M et N sont complémentaires. Nous notons alors $E = M \oplus N$.

3.1.2 Applications et formes linéaires

Applications linéaires et isomorphismes

Les applications linéaires permettent de transporter une structure d'espace vectoriel vers un autre espace vectoriel.

Définition 3.1.21 (Application linéaire). Une application linéaire f d'un espace vectoriel E de dimension finie dans un espace vectoriel F de dimension finie est une application qui, à chaque vecteur x de E , fait correspondre un vecteur de F , noté $f(x)$, et qui vérifie

$$\forall x, y \in E, \forall \alpha, \beta \in \mathbb{K}, f(\alpha x + \beta y) = \alpha f(x) + \beta f(y).$$

Les espaces vectoriels E et F sont construits sur le même champ de scalaires $\mathbb{K}$.

Dans le cas particulier où l'espace de départ est égal à l'espace d'arrivée, nous pouvons énoncer le théorème suivant.

Théorème 3.1.4. Toute application linéaire de E dans E injective est surjective. Réciproquement, toute application linéaire de E dans E surjective est injective.

Définition 3.1.22 (Application linéaire inverse). Une application linéaire f de E dans F est dite inversible si et seulement si elle est bijective.

Théorème 3.1.5. L'inverse d'une bijection linéaire est une bijection linéaire.

Nous pouvons caractériser une application linéaire inversible à l'aide du théorème suivant.

Théorème 3.1.6. Considérons un espace vectoriel E de dimension finie. Soit f une application linéaire de E dans E . Alors f est inversible si et seulement si $f(x) = 0$ implique que $x = 0$.

Nous introduisons une notion très importante en algèbre, à propos des relations possibles entre deux espaces vectoriels de dimension finie.

Définition 3.1.23 (Isomorphisme). Deux espaces vectoriels E et F (sur le même corps $\mathbb{K}$) sont isomorphes si et seulement si il existe un isomorphisme f entre E et F ou, en d'autres termes, s'il existe une bijection linéaire f de E dans F .

Si $E = F$, l'isomorphisme est appelé automorphisme (d'espaces vectoriels).

6. Nous notons $H + G$ le sous-espace $\text{span}(H \cup G) = \{x + y \mid x \in H \text{ et } y \in G\}$.

Noyau et image d'une application linéaire

Deux sous-espaces vectoriels particuliers sont associés à une application linéaire de E dans F . Ils sont définis de la manière suivante.

Définition 3.1.24 (Noyau). Le sous-espace vectoriel de E

$$\text{Ker}(E) = \{x \in E \mid f(x) = 0\}$$

est appelé noyau de l'application linéaire f .

Définition 3.1.25 (Image). Le sous-espace vectoriel de E

$$\text{Im}(E) = \{x \in F \mid \exists y \in E, x = f(y)\}$$

est appelé image de l'application linéaire f .

Nous donnons deux théorèmes intéressants en lien avec ces définitions.

Théorème 3.1.7. *Soit f une application linéaire de E dans F . Alors*

1. *f est injective si et seulement si le noyau de f est réduit à l'origine,*
2. *f est surjective si et seulement si l'image de f est F tout entier.*

Théorème 3.1.8. *Soit f une application linéaire de E dans F . Alors*

$$\dim E = \dim \text{Ker}(f) + \dim \text{Im}(f).$$

Matrices et applications linéaires

Nous regardons maintenant le lien entre le concept de transformation linéaire et celui de base.

Définition 3.1.26 (Matrice d'une application linéaire). Soient E un espace vectoriel de dimension n , $X = \{x_i\}_{i=1}^n$ une base quelconque de E et f une application linéaire de E dans E . Considérons les scalaires a_{ij} définis par les relations

$$f(x_j) = \sum_{i=1}^n a_{ij} x_i, \quad \forall j = 1, \dots, n.$$

L'ensemble des n^2 scalaires $\{a_{ij}\}_{i,j=1}^n$ est appelé matrice de f dans la base X .

Théorème 3.1.9. *Soit E un espace vectoriel de dimension n et soit X une base fixée de cet espace. Alors, à toute application linéaire de E dans E correspond une et une seule matrice et réciproquement.*

Formes linéaires

Nous commençons par la définition de ce concept.

Définition 3.1.27 (Forme linéaire). Une forme linéaire sur un espace vectoriel E est une application y de E dans $\mathbb{K}$ définie pour tout vecteur x et satisfaisant la propriété

$$\forall x, z \in E, \forall \alpha, \beta \in \mathbb{K}, y(\alpha x + \beta z) = \alpha y(x) + \beta y(z),$$

où $\mathbb{K}$ est le corps associé à l'espace vectoriel E .

Nous pouvons définir la somme de deux formes linéaires par la relation

$$(y_1 + y_2)(x) = y_1(x) + y_2(x), \quad (3.1)$$

pour deux formes linéaires quelconques y_1, y_2 et pour tout vecteur x ; ainsi que la multiplication scalaire par la relation

$$(\alpha y)(x) = \alpha y(x), \quad (3.2)$$

pour tout x , pour toute forme linéaire y et pour tout scalaire α .

Théorème 3.1.10. *Toute combinaison linéaire de formes linéaires est une forme linéaire.*

Si nous considérons l'ensemble des formes linéaires sur un espace vectoriel E , en le munissant de l'addition et de la multiplication par un scalaire considérés ci-dessus, cet ensemble est un espace vectoriel que nous appelons *espace dual de E* .

Définition 3.1.28 (Espace dual). L'espace (vectoriel) dual E^* d'un espace vectoriel E est composé de l'ensemble des formes linéaires sur E , muni de la loi interne d'addition (3.1) et de la multiplication par un scalaire (3.2).

Les vecteurs de l'espace dual sont donc des formes linéaires.

Théorème 3.1.11. *Soit E un espace vectoriel de dimension n . Soit $\{x_i\}_{i=1}^n$ une base de E . Alors il existe une base $\{y_i\}_{i=1}^n$ du dual E^* telle que*

$$y_j(x_i) = \delta_{ij},$$

pour tous les i et j entre 1 et n .

Une conséquence de ce théorème est que l'espace dual E^* d'un espace vectoriel E de dimension n est aussi de dimension n . De plus, la base $\{y_i\}_{i=1}^n$ est appelée la *base duale* de $\{x_i\}_{i=1}^n$.

3.1.3 Multilinéarité

Nous introduisons une extension de la notation de somme directe de deux sous-espaces vectoriels à la Définition 3.1.20.

Définition 3.1.29 (Somme interne). La somme interne de n sous-espaces vectoriels E_i est le sous-espace $\oplus_{i=1}^n E_i$ défini par

$$\oplus_{i=1}^n E_i = \left\{ \sum_{i=1}^n u_i \text{ où } u_i \in E_i, \forall i = 1, \dots, n \right\}.$$

Par extension également, nous définissons la notion de sous-espaces vectoriels linéairement indépendants.

Définition 3.1.30 (Somme interne directe). Les sous-espaces vectoriels E_i sont linéairement indépendants si tout vecteur de leur somme directe s'écrit de façon unique en une somme de n vecteurs choisis dans chacun des E_i , c'est-à-dire que les vecteurs composant cette somme interne sont toujours linéairement indépendants dans l'espace vectoriel E . Dans ce cas, nous parlons de somme interne directe ou simplement de somme directe, et nous avons

$$\bigoplus_{i=1}^n E_i = \left\{ \sum_{i=1}^n u_i \text{ où } u_i \in E_i \text{ et où les } u_i \text{ sont linéairement indépendants, } \forall i = 1, \dots, n \right\}.$$

Produit cartésien

A partir de k ensembles A_i , où $i = 1, 2, \dots, k$, nous pouvons toujours construire un ensemble, appelé le *produit cartésien des A_i* et noté $A_1 \times A_2 \times \dots \times A_k$. Chacun de ses éléments est un k -uplet dont la $i^{\text{ème}}$ composante est dans A_i , i.e.

$$A_1 \times A_2 \times \dots \times A_k = \{(u_1, u_2, \dots, u_k) \text{ où } u_i \in A_i, \forall i = 1, 2, \dots, k\}.$$

Si chacun des ensembles est muni d'une structure d'espace vectoriel sur un même champ $\mathbb{K}$, nous parlons alors d'un produit cartésien d'espaces vectoriels et ce produit cartésien peut aussi être muni d'une structure d'espace vectoriel. Soit $V_i = (A_i, \mathbb{K}, +_i, \bullet_i)$, $\forall i = 1, \dots, k$, k espaces vectoriels munis chacun d'une loi interne, notée $+_i$, et d'une multiplication externe, notée $\bullet_i$. Nous munissons alors $V_1 \times V_2 \times \dots \times V_k$ d'une loi interne, notée $+$, et d'une loi externe, notée $\bullet$, définies par

$$(u_1, u_2, \dots, u_k) + (v_1, v_2, \dots, v_k) = (u_1 + v_1, u_2 + v_2, \dots, u_k + v_k)$$

$$\text{et } \alpha \bullet (u_1, u_2, \dots, u_k) = (\alpha \bullet_1 u_1, \alpha \bullet_2 u_2, \dots, \alpha \bullet_k u_k).$$

Le produit cartésien de ces k espaces vectoriels est lui-même un espace vectoriel sur le champ $\mathbb{K}$, une fois muni de ces deux lois, et nous le notons

$$V = \prod_{i=1}^k V_i.$$

Formes multilinéaires et k -formes

Définition 3.1.31 (Forme multilinéaire). Une forme w , définie sur $\prod_{i=1}^k V_i$ et à valeurs dans $\mathbb{K}$, est une forme multilinéaire (ou k -linéaire) si et seulement si

$$w(u_1, u_2, \dots, \alpha u_i + \beta v_i, \dots, u_k) = \alpha w(u_1, u_2, \dots, u_i, \dots, u_k) + \beta w(u_1, u_2, \dots, v_i, \dots, u_k),$$

pour tout $(u_1, u_2, \dots, u_k), (v_1, v_2, \dots, v_k) \in \prod_{i=1}^k V_i$, pour tout $\alpha, \beta \in \mathbb{K}$ et pour tout $i = 1, \dots, k$.

Une forme multilinéaire (ou k -linéaire) est donc une forme linéaire sur chacune de ses k variables, si les $k - 1$ autres restent fixes.

Nous nous intéressons maintenant au cas particulier où tous les espaces vectoriels V_i sont identiques $V_i = V$, pour tout $i = 1, \dots, k$. Dans ce cas, nous notons $\prod_{i=1}^k V_i = V^k$. La dimension de cet espace est donc k fois la dimension de l'espace vectoriel V .

Définition 3.1.32 (k -forme). Une k -forme est une forme linéaire sur l'espace vectoriel V^k .

Nous donnons une caractéristique que peuvent vérifier les k -formes, en précisant tout d'abord un terme. Une *permutation* de k éléments est une bijection de l'ensemble $\{1, 2, \dots, k\}$ dans lui-même. L'ensemble des permutations de k éléments est appelé S_k . Pour une k -forme, nous pouvons donc effectuer une permutation des k indices et comparer le résultat au cas initial. Les propriétés de symétrie et d'antisymétrie sont les suivantes.

Définition 3.1.33 (k -forme symétrique). Une k -forme w est symétrique si et seulement si, $\forall \pi \in S_k$, nous avons $\pi w = w$, où $\pi w(x_1, x_2, \dots, x_k) = w(x_{\pi(1)}, x_{\pi(2)}, \dots, x_{\pi(k)})$.

Définition 3.1.34 (k -forme antisymétrique). Une k -forme w est antisymétrique si et seulement si, $\forall \pi$ impaire⁷ $\in S_k$, nous avons $\pi w = -w$.

7. Une permutation est impaire si elle peut être exprimée comme le produit d'un nombre impair de transpositions, où une transposition est une permutation qui échange deux éléments distincts en laissant tous les autres inchangés.

3.1.4 Valeurs propres et vecteurs propres

Considérons une application linéaire f de l'espace vectoriel $\mathbb{K}^n$ dans lui-même. Certaines directions privilégiées sont invariantes par la transformation f et portent le nom de *vecteurs propres* de f .

Définition 3.1.35 (Valeur propre et vecteur propre associé). Soit f une application linéaire de $\mathbb{K}^n$ dans lui-même. Alors $\lambda \in \mathbb{K}$ est dite valeur propre de f associée au vecteur propre non nul $x \in \mathbb{K}^n \setminus \{0\}$ si et seulement si

$$f(x) = \lambda x.$$

L'ensemble des valeurs propres de f est aussi appelé spectre de f .

Cette définition montre que le vecteur x est transformé en un autre vecteur dans la direction de x . Ceci est également vrai pour tout multiple du vecteur x .

Si A est la matrice de f par rapport à une base particulière, l'équation qui définit les valeurs et vecteurs propres s'écrit

$$Ax = \lambda x,$$

où x est la représentation (par une matrice colonne) du vecteur propre x dans la même base. Nous parlons alors de x et de λ comme vecteur propre et valeur propre de la matrice A .

Le problème aux valeurs propres demande de calculer les valeurs et les vecteurs propres d'une matrice donnée.

Théorème 3.1.12. Soit A une matrice carrée d'ordre⁸ n . Alors toute valeur propre λ de A est racine de l'équation polynomiale

$$\det(\lambda I - A) = 0.$$

Réciproquement, toute racine λ est valeur propre de A .

L'équation du théorème est appelée l'équation caractéristique de A et le polynôme $\det(\lambda I - A)$, polynôme caractéristique de A .

Théorème 3.1.13. Soit A une matrice carrée d'ordre n . Alors son déterminant est égal au produit de ses valeurs propres.

3.2 Espaces vectoriels symplectiques

Considérons V un espace vectoriel⁹ de dimension finie m sur $\mathbb{R}$. Le concept d'espace vectoriel symplectique est le suivant.

Définition 3.2.1 (Forme symplectique). Une forme symplectique

$$\Omega : V \times V \rightarrow \mathbb{R}$$

est une forme bilinéaire¹⁰ antisymétrique et non-dégénérée, i.e. elle satisfait

$$\begin{aligned} \Omega(v, v) &= 0, \quad \forall v \in V \\ \text{et } \Omega(v, w) &= 0, \quad \forall w \in V \Rightarrow v = 0. \end{aligned} \tag{3.3}$$

8. L'ordre d'une matrice est la taille de celle-ci.

9. En Définition 3.1.12.

10. Nous remarquons que nous utilisons le terme général *forme bilinéaire* mais nous aurions pu employer le terme spécifique 2-*forme*.

Remarque 3.2.1. Si Ω est bilinéaire, l'antisymétrie, i.e. $\Omega(v, w) = -\Omega(w, v)$, est équivalente à la relation (3.3).

Preuve

$\Rightarrow$ Par hypothèse, $\Omega(v, w) = -\Omega(w, v)$, $\forall v, w \in V$. En remplaçant w par v dans cette formule, nous obtenons la thèse.

$\Leftarrow$ Par hypothèse, $\Omega(v + w, v + w) = 0$, $\forall v, w \in V$. En utilisant la bilinéarité et l'équation (3.3), cette équation devient

$$\begin{aligned} \Omega(v + w, v + w) &= 0 \\ \Leftrightarrow \Omega(v, v) + \Omega(v, w) + \Omega(w, v) + \Omega(w, w) &= 0 \\ \Leftrightarrow \Omega(v, w) + \Omega(w, v) &= 0 \\ \Leftrightarrow \Omega(v, w) &= -\Omega(w, v). \end{aligned}$$

Ce qui clôture cette preuve. □

Remarque 3.2.2. La non-dégénérescence de Ω de l'équation (3.4) peut aussi être vérifiée par le fait que le noyau

$$\ker \Omega = \{v \in V \mid \Omega(v, w) = 0, \forall w \in V\}$$

est trivial.

Nous pouvons donc, avec ces éléments en main, définir un espace symplectique.

Définition 3.2.2 (Espace vectoriel symplectique). Un espace vectoriel V est appelé espace vectoriel symplectique s'il est muni d'une forme symplectique Ω . Nous le notons (V, Ω) .

Cette définition peut être lue en parallèle de celle d'un espace vectoriel euclidien, espace possédant un produit scalaire/forme euclidienne (forme bilinéaire symétrique définie positive¹¹).

3.2.1 Formes bilinéaires antisymétriques

Nous étudions premièrement les formes bilinéaires antisymétriques en général, avant de nous restreindre à celles non-dégénérées.

Proposition 3.2.1. Soit $\Omega : V \times V \rightarrow \mathbb{R}$ une forme bilinéaire antisymétrique où V est un espace vectoriel de dimension m . Alors il existe une base de V , $e = \{e_1, \dots, e_m\}$, dans laquelle la matrice associée à Ω , c'est-à-dire $(\Omega(e_i, e_j))_{1 \leq i, j \leq m} = (\Omega_{ij})_{1 \leq i, j \leq m}$, est de la forme

$$\begin{pmatrix} O_{n \times n} & I_{n \times n} & O_{n \times (m-2n)} \\ -I_{n \times n} & O_{n \times n} & O_{n \times (m-2n)} \\ O_{(m-2n) \times n} & O_{(m-2n) \times n} & O_{(m-2n) \times (m-2n)} \end{pmatrix}. \quad (3.5)$$

Preuve Cette preuve se fait par récurrence sur la dimension de l'espace vectoriel V .

- DIM $V = 0$ OU DIM $V = 1$.

Alors, la 2-forme Ω est nulle. En effet, si la dimension de V est nulle, alors $V = \{0\}$. Si la dimension de V vaut 1, alors $V = \text{span}\{v\}$ où $v \in V \setminus \{0\}$. Dès lors, pour tous w_1 et w_2 dans V , $\Omega(w_1, w_2) = 0$ puisque ces deux éléments sont multiples de v . Dans ces deux cas, la matrice de Ω est toujours nulle, pour n'importe quelle base, et nous prenons $n = 0$.

11. La forme bilinéaire $\langle \cdot, \cdot \rangle$ est définie positive si et seulement si, pour tout vecteur v non nul, $\langle v, v \rangle$ est strictement positif.

- DIM $V = 2$.

Soit $\Omega \equiv 0$. Nous avons aussi $n = 0$.

Soit $\Omega \not\equiv 0$. Nous pouvons choisir deux vecteurs linéairement indépendants u et v dans V tels que $\Omega(u, v) = r \neq 0$. Nous posons $e_1 = u$ et $f_1 = \frac{1}{r}v$. La base retenue est $\{e_1, f_1\}$.

- DIM $V > 2$.

L'hypothèse de récurrence est supposée vraie pour $\dim V - 2$.

Soit $\Omega \equiv 0$. Nous prenons à nouveau $n = 0$.

Soit $\Omega \not\equiv 0$. Nous effectuons le même raisonnement en considérant les vecteurs e_1 et f_1 définis ci-dessus. Nous construisons le sous-espace vectoriel suivant

$$V' = \{v \in V \mid \Omega(v, e_1) = 0 \text{ et } \Omega(v, f_1) = 0\}.$$

Comme nous avons deux conditions pour m variables, la dimension de V' est plus grande ou égale à $m - 2$. Cependant, les vecteurs e_1 et f_1 n'appartiennent pas à V' par définition. La dimension de V' vaut donc exactement $m - 2$. Nous pouvons alors décomposer V comme suit ¹²

$$V = V' \oplus \text{span}\{e_1\} \oplus \text{span}\{f_1\}.$$

Prenons la restriction de Ω au sous-espace vectoriel $V' \times V'$,

$$\Omega' \equiv \Omega|_{V' \times V'} : V' \times V' \rightarrow \mathbb{R},$$

bilinéaire et antisymétrique. Par l'hypothèse de récurrence, il existe une base $\{e_2, \dots, e_n, f_2, \dots, f_n, g_1, \dots, g_{m-2n}\}$ de V' dans laquelle

$$(\Omega') = \begin{pmatrix} O_{(n-1) \times (n-1)} & I_{(n-1) \times (n-1)} & O_{(n-1) \times (m-2n)} \\ -I_{(n-1) \times (n-1)} & O_{(n-1) \times (n-1)} & O_{(n-1) \times (m-2n)} \\ O_{(m-2n) \times (n-1)} & O_{(m-2n) \times (n-1)} & O_{(m-2n) \times (m-2n)} \end{pmatrix}.$$

Par définition de V' , e_1 et f_1 sont linéairement indépendants des éléments de la base de V' . Nous avons donc que $\{e_1, e_2, \dots, e_n, f_1, f_2, \dots, f_n, g_1, \dots, g_{m-2n}\}$ est une base de V dans laquelle la matrice de Ω est donnée par l'équation (3.5).

Nous observons, de plus, que le rang de cette matrice ¹³ est égal à $2n$.

□

Prenons V^* l'espace dual ¹⁴ de V et e^* la base duale de e sur V^* , satisfaisant

$$e_i^*(e_j) = \delta_{ij}.$$

Un résultat d'algèbre multilinéaire énonce que l'espace $A^q(V, \mathbb{R})$ des fonctions q -linéaires antisymétriques de V^q dans $\mathbb{R}$ est isomorphe à l'espace $\wedge^q V^*$, rassemblant l'ensemble des combinaisons linéaires de q produits extérieurs ¹⁵ d'éléments de V^* . Une base de $\wedge^q V^*$ est donnée par l'ensemble des éléments de la forme

$$e_{i_1}^* \wedge \dots \wedge e_{i_q}^* \quad \text{avec } i_1 < \dots < i_q.$$

En particulier, une forme bilinéaire antisymétrique Ω peut être écrite comme

$$\Omega = \sum_{i < j} \Omega_{ij} e_i^* \wedge e_j^*, \quad \text{où } (\Omega(e_i, e_j))_{1 \leq i, j \leq m} = (\Omega_{ij})_{1 \leq i, j \leq m}.$$

12. En effet, il s'agit de trois sous-espaces vectoriels disjoints dont la somme des dimensions est égale à m . De plus, $\oplus$ représente la somme directe de trois sous-espaces vectoriels, en Définition 3.1.30, et le span est défini via le Théorème 3.1.2.

13. Le rang d'une matrice est le nombre maximal de vecteurs lignes (ou colonnes) linéairement indépendants.

14. En Définition 3.1.28.

15. Le produit extérieur, en Définition 4.1.19 pour le formalisme différentiel, peut être appliqué dans le cas des espaces vectoriels. En effet, un espace vectoriel est une variété différentiable nécessitant une unique carte locale.

La forme Ω peut donc être vue comme une fonction qui envoie $(v, w) \in V \times V$ sur

$$\begin{aligned}\Omega(v, w) &= \left(\sum_{i < j} \Omega_{ij} e_i^* \wedge e_j^* \right) (v, w) \\ &= \sum_{i < j} \Omega_{ij} (e_i^* \wedge e_j^*) (v, w) \\ &= \sum_{i < j} \Omega_{ij} (e_i^*(v) e_j^*(w) - e_i^*(w) e_j^*(v)).\end{aligned}$$

Nous pouvons remarquer que $e_i^*(v)$ est égale à la $i^{\text{ième}}$ composante de v ¹⁶ et écrire

$$\Omega(v, w) = v^T (\Omega_{ij}) w. \quad (3.6)$$

La Proposition 3.2.1 peut être reformulée comme suit.

Corollaire 3.2.1. *Par un choix approprié d'une base e , la forme bilinéaire antisymétrique Ω peut s'écrire*

$$\Omega = \sum_{i=1}^n e_i^* \wedge e_{i+n}^*. \quad (3.7)$$

Une telle représentation est appelée la *forme canonique* de Ω . Alors,

$$\Omega(v, w) = \sum_{i=1}^n (x_i y'_i - x'_i y_i), \quad (3.8)$$

où les composantes relatives à la base e pour v et $w \in V$ sont données par

$$\begin{aligned}v &= \sum_{i=1}^n x_i e_i + \sum_{i=1}^n y_i e_{i+n} + \sum_{i=1}^{m-2n} z_i e_{2n+i} \\ w &= \sum_{i=1}^n x'_i e_i + \sum_{i=1}^n y'_i e_{i+n} + \sum_{i=1}^{m-2n} z'_i e_{2n+i}.\end{aligned}$$

3.2.2 Formes bilinéaires antisymétriques non-dégénérées

Concernant la géométrie symplectique, nous nous intéressons à une forme Ω bilinéaire antisymétrique mais aussi non-dégénérée. Dans ce cas, nous pouvons énoncer un corollaire de la Proposition 3.2.1.

Corollaire 3.2.2. *Si (V, Ω) est symplectique, alors la dimension de V est nécessairement paire, $\dim V = m = 2n$.*

Preuve

Par la Proposition 3.2.1, il existe une base de V , $e = \{e_1, \dots, e_m\}$, dans laquelle la matrice associée à Ω est de la forme (3.5). Supposons, par l'absurde, que $m \neq 2n$. Alors, il existe un indice i , tel que $2n < i \leq m$. Pour un tel i , $\Omega(e_i, e_j) = 0, \forall 1 \leq j \leq m$. Cela implique que $\Omega(e_i, v) = 0, \forall v \in V$, car Ω est bilinéaire et e est une base de V . Par la non-dégénérescence de Ω , e_i est nul, ce qui est en contradiction avec le fait que e est une base de V . En conclusion, $m = 2n$.

□

16. En effet, si $v = \sum_{j=1}^m v_j e_j$, alors $e_i^*(v) = e_i^* \left(\sum_{j=1}^m v_j e_j \right) = \sum_{j=1}^m v_j e_i^*(e_j) = v_i$, par la définition de la base duale.

Une base $e = (e_1, \dots, e_{2n})$ de l'espace vectoriel symplectique (V, Ω) vérifiant

$$(\Omega_{ij}) = \begin{pmatrix} O & I \\ -I & O \end{pmatrix} \quad (3.9)$$

est dite *canonique*. Tout espace vectoriel symplectique admet une telle base, par la Proposition 3.2.1.

De plus, une forme symplectique Ω rend possible l'identification

$$\begin{aligned} \Omega^\flat : V &\rightarrow V^* \\ v &\mapsto \Omega^\flat(v) \end{aligned}$$

avec $\Omega^\flat(v)(w) = \Omega(v, w)$, pour $v, w \in V$.

Proposition 3.2.2. *La forme Ω est non-dégénérée si et seulement si l'identification $\Omega^\flat$ est un isomorphisme linéaire.*

Il est intéressant à partir d'ici d'introduire une notation que nous utilisons couramment par la suite.

Définition 3.2.3 (Produit interne linéaire i). Le produit interne linéaire, noté i , est défini par

$$\begin{aligned} i : V \times \wedge^q V^* &\rightarrow \wedge^{q-1} V^* \\ (v, \vartheta) &\mapsto i(v)\vartheta, \end{aligned}$$

où $i(v)\vartheta$ est la fonction $(q-1)$ -linéaire donnée par

$$i(v)\vartheta(v_1, \dots, v_{q-1}) = \vartheta(v, v_1, \dots, v_{q-1}).$$

Nous pouvons donc écrire $\Omega^\flat(v) = i(v)\Omega \in V^*$. Par le Corollaire 3.2.1, il s'ensuit que, pour tout $1 \leq j \leq n$,

$$\begin{aligned} i(e_j)\Omega &= \Omega^\flat(e_j) = e_{j+n}^* \\ i(e_{j+n})\Omega &= \Omega^\flat(e_{j+n}) = -e_j^*. \end{aligned}$$

En effet,

$$\begin{aligned} \Omega^\flat(e_j) &= \left(\sum_{i=1}^n e_i^* \wedge e_{i+n}^* \right) (e_j, \cdot) \\ &= \sum_{i=1}^n (e_i^* \wedge e_{i+n}^*) (e_j, \cdot) \\ &= \sum_{i=1}^n \left(\underbrace{e_i^*(e_j)}_{=\delta_{ij}} e_{i+n}^* - \underbrace{e_{i+n}^*(e_j)}_{=\delta_{i+n,j}} e_i^* \right) \\ &= e_{j+n}^*, \end{aligned}$$

$\delta_{i+n,j}$ étant toujours nul puisque $j \leq n$, et

$$\begin{aligned} \Omega^\flat(e_{j+n}) &= \left(\sum_{i=1}^n e_i^* \wedge e_{i+n}^* \right) (e_{j+n}, \cdot) \\ &= \sum_{i=1}^n (e_i^* \wedge e_{i+n}^*) (e_{j+n}, \cdot) \\ &= \sum_{i=1}^n \left(\underbrace{e_i^*(e_{j+n})}_{=\delta_{i,j+n}} e_{i+n}^* - \underbrace{e_{i+n}^*(e_{j+n})}_{=\delta_{i+n,j+n}} e_i^* \right) \\ &= -e_j^*. \end{aligned}$$

En parallèle de la situation en géométrie euclidienne, nous pouvons définir une notion d'orthogonalité en géométrie symplectique.

Définition 3.2.4 (Ω -orthogonalité). Deux vecteurs v et w d'un espace vectoriel symplectique (V, Ω) sont dits Ω -orthogonaux si

$$\Omega(v, w) = 0.$$

Nous les notons $v \perp w$.

3.3 Morphismes symplectiques et groupes symplectiques

Nous développons à présent le concept de morphisme symplectique nous permettant par la suite d'étudier la notion de groupe symplectique, élément central de la géométrie symplectique linéaire.

3.3.1 Morphismes symplectiques

La notion de morphisme¹⁷ est présente en géométrie symplectique.

Définition 3.3.1 (Morphisme symplectique linéaire). Soient (V_1, Ω_1) et (V_2, Ω_2) deux espaces vectoriels symplectiques et $\phi : V_1 \rightarrow V_2$ une application linéaire¹⁸. Le morphisme ϕ est symplectique si

$$\Omega_2(\phi(v), \phi(w)) = \Omega_1(v, w), \quad \forall v, w \in V_1, \quad (3.10)$$

ce que nous notons¹⁹

$$\phi^* \Omega_2 = \Omega_1.$$

Remarque 3.3.1. *Un morphisme symplectique est nécessairement injectif. En effet, si $\phi(v) = 0$, alors l'équation (3.10) force v à être nul par la non-dégénérescence de Ω_1* ²⁰. Cette injectivité implique que $\dim V_1 \leq \dim V_2$.

Si $\dim V_1 = \dim V_2 < \infty$, ϕ est alors un isomorphisme²¹ par l'injectivité de ϕ et par l'égalité des dimensions.

Définition 3.3.2 (Symplectomorphisme linéaire). Un symplectomorphisme est un isomorphisme symplectique.

Une autre dénomination est utilisée pour désigner un symplectomorphisme : nous parlons aussi de *transformation canonique*.

Nous pouvons maintenant aborder un des théorèmes les plus importants en géométrie symplectique, à savoir le théorème de Darboux, ici dans le cas linéaire : la dimension est le seul invariant symplectique linéaire.

Théorème 3.3.1 (Théorème de Darboux linéaire). *Deux espaces symplectiques de même dimension sont deux à deux linéairement symplectomorphes.*

17. Un morphisme entre deux espaces vectoriels est une application linéaire entre ces deux espaces.

18. En Définition 3.1.21.

19. Nous introduisons, pour la première fois, l'application cotangente induite utilisée principalement dans le formalisme différentiel, en Définition 4.1.24.

20. Fixons $v \in V$ tel que $\phi(v) = 0$. Nous avons, par la bilinéarité de Ω_2 , que $\Omega_1(v, w) = \Omega_2(0, \phi(w)) = 0, \forall w \in V$. Par la non-dégénérescence de Ω_1 , $v = 0$.

21. En Définition 3.1.23.

En d'autres termes, il existe un isomorphisme qui échange leurs formes symplectiques.

Preuve

Soient (V_1, Ω_1) et (V_2, Ω_2) deux espaces vectoriels symplectiques de dimension $2n$. Par la Proposition 3.2.1, il existe une base $e_1 = \{e_{1,1}, \dots, e_{1,2n}\}$ de V_1 et une base $e_2 = \{e_{2,1}, \dots, e_{2,2n}\}$ de V_2 vérifiant

$$\left((\Omega_1)_{ij} \right)_{1 \leq i,j \leq 2n} = \left((\Omega_2)_{ij} \right)_{1 \leq i,j \leq 2n} = \begin{pmatrix} O_{n \times n} & I_{n \times n} \\ -I_{n \times n} & O_{n \times n} \end{pmatrix}. \quad (3.11)$$

Nous construisons un symplectomorphisme $\phi : V_1 \rightarrow V_2$ de la façon suivante. Prenons ϕ comme étant une application linéaire et posons $\phi(e_{1,i}) = e_{2,i}$, $\forall 1 \leq i \leq 2n$. De cette manière, ϕ est complètement défini car, pour tout $v = \sum_{i=1}^{2n} v_i e_{1,i} \in V_1$,

$$\begin{aligned} \phi(v) &= \phi \left(\sum_{i=1}^{2n} v_i e_{1,i} \right) \\ &= \sum_{i=1}^{2n} v_i \phi(e_{1,i}) \\ &= \sum_{i=1}^{2n} v_i e_{2,i}. \end{aligned}$$

Nous vérifions que ϕ ainsi défini est un symplectomorphisme en montrant la relation (3.10).

Soient $v = \sum_{i=1}^{2n} v_i e_{1,i}$ et $w = \sum_{j=1}^{2n} w_j e_{1,j}$ deux vecteurs quelconques de V_1 . Nous calculons

$$\begin{aligned} \Omega_2(\phi(v), \phi(w)) &= \Omega_2 \left(\sum_{i=1}^{2n} v_i e_{2,i}, \sum_{j=1}^{2n} w_j e_{2,j} \right) \\ &= \sum_{i=1}^{2n} \sum_{j=1}^{2n} v_i w_j \Omega_2(e_{2,i}, e_{2,j}) \\ &= \sum_{i=1}^{2n} \sum_{j=1}^{2n} v_i w_j (\Omega_2)_{ij} \\ &= \sum_{i=1}^{2n} \sum_{j=1}^{2n} v_i w_j (\Omega_1)_{ij} \\ &= \sum_{i=1}^{2n} \sum_{j=1}^{2n} v_i w_j \Omega_1(e_{1,i}, e_{1,j}) \\ &= \Omega_1 \left(\sum_{i=1}^{2n} v_i e_{1,i}, \sum_{j=1}^{2n} w_j e_{1,j} \right) = \Omega_1(v, w), \end{aligned}$$

où nous avons utilisé la relation (3.11) ainsi que la bilinéarité de Ω_1 et de Ω_2 . Ceci montre que ϕ est un symplectomorphisme de (V_1, Ω_1) dans (V_2, Ω_2) , ces deux espaces symplectiques sont donc symplectomorphes.

□

3.3.2 Groupes symplectiques

Quand $(V_1, \Omega_1) = (V_2, \Omega_2) = (V, \Omega)$, toute application symplectique ϕ doit être un automorphisme de (V, Ω) . L'ensemble des automorphismes symplectiques forme un groupe par rapport à la composition, appelé le *groupe symplectique* de (V, Ω) et noté $Sp(V)$.

Après avoir choisi une base canonique de l'espace vectoriel symplectique (V, Ω) de dimension $2n$, nous pouvons identifier celui-ci à $\mathbb{R}^{2n}$ muni de la forme canonique donnée par (3.8) grâce au Théorème 3.3.1 de Darboux linéaire. Lorsque $V = \mathbb{R}^{2n}$ avec la forme canonique, ce groupe est appelé le *groupe symplectique linéaire* par rapport au produit matriciel²² et est noté $Sp(n, \mathbb{R})$, comme nous l'avons vu au Théorème 2.3.2 du formalisme dynamique.

Plus précisément, ce groupe est le sous-groupe du groupe général linéaire $Gl(2n, \mathbb{R}) = \{A \in \mathbb{R}^{2n \times 2n} \mid \det A \neq 0\}$ laissant invariant une forme symplectique, comme nous le montrons ci-après.

Les éléments $M \in Sp(n, \mathbb{R})$ peuvent être écrits sous forme matricielle. En effet, en utilisant la matrice

$$J = \begin{pmatrix} O_{n \times n} & I_{n \times n} \\ -I_{n \times n} & O_{n \times n} \end{pmatrix} \quad (3.12)$$

et les vecteurs $v = (x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_n)^T$ et $w = (x'_1, \dots, x'_n, y'_1, \dots, y'_n)^T$, nous pouvons ré-écrire la forme canonique en équation (3.8) sous la forme

$$\Omega(v, w) = v^T J w, \quad (3.13)$$

où J est la *matrice symplectique principale*.

Remarque 3.3.2. Dans le Chapitre 2 et dans certains ouvrages, la matrice symplectique principale est donnée par

$$\begin{pmatrix} O_{n \times n} & -I_{n \times n} \\ I_{n \times n} & O_{n \times n} \end{pmatrix}.$$

La théorie reste cohérente, seuls certains signes diffèrent.

La matrice M laisse la forme symplectique Ω invariante, c'est-à-dire

$$\Omega(Mv, Mw) = \Omega(v, w),$$

lorsque $M^T J M = J$. En effet,

$$\begin{aligned} \Omega(Mv, Mw) &= v^T M^T J M w \\ &= v^T J w \\ &= \Omega(v, w). \end{aligned}$$

Le groupe symplectique linéaire peut donc s'écrire sous la forme

$$Sp(n, \mathbb{R}) = \{M \in Gl(2n, \mathbb{R}) \mid M^T J M = J\}. \quad (3.14)$$

Ses éléments sont appelés *matrices symplectiques*.

Une transformation canonique de V dans V est donc une application linéaire dont la matrice est symplectique²³. Il s'agit d'un cas particulier de la définition de transformation canonique introduite dans le formalisme dynamique à la Définition 2.3.5. Nous travaillons dans cette sous-section avec des applications linéaires, cas particuliers pour lesquels la matrice de l'application est la jacobienne de celle-ci, dont l'espace de départ est égal à l'espace d'arrivée.

²². Une application linéaire de V dans V peut toujours être représentée par une matrice $2n \times 2n$, comme introduit à la Définition 3.1.26.

²³. Comme vu au début de cette sous-section, ces applications forment le groupe $Sp(V)$.

Proposition 3.3.1. Si $A, B \in Sp(n, \mathbb{R})$, alors A^{-1} , AB , $A^T \in Sp(n, \mathbb{R})$.

Remarque 3.3.3. Soient A, B, C et $D \in \mathbb{R}^{n \times n}$, les propositions suivantes sont équivalentes.

i)

$$M = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} \in Sp(n, \mathbb{R});$$

ii)

$$A^T C = C^T A, \quad B^T D = D^T B, \quad A^T D - C^T B = I;$$

iii)

$$AB^T = BA^T, \quad CD^T = DC^T, \quad AD^T - BC^T = I.$$

Ceci découle directement de l'égalité $M^T J M = J$ et du fait que M^T est symplectique.

Nous définissons également deux matrices symplectiques qui nous seront utiles dans la suite :

$$U_V = \begin{pmatrix} V & 0 \\ 0 & V^* \end{pmatrix} \text{ où } V^* = (V^T)^{-1} \text{ et } V \in Gl(2n, \mathbb{R});$$

$$T_S = \begin{pmatrix} I & S \\ 0 & I \end{pmatrix} \text{ avec } S^T = S \text{ et } S \in Gl(2n, \mathbb{R}).$$

Proposition 3.3.2. Ces deux types de matrice génèrent le groupe $Sp(n, \mathbb{R})$: toute matrice symplectique peut s'écrire comme un produit de deux de ces matrices.

Nous avons, comme conséquence immédiate de la Proposition 3.3.2, le fait que

$$\det M = 1, \quad \forall M \in Sp(n, \mathbb{R}).$$

En effet, nous voyons clairement que le déterminant de la matrice T_S vaut 1. Quant à U_V , nous trouvons

$$\det(U_V) = \det(V) \cdot \det(V^*) = \det(V) \cdot \det(V^{-1}) = 1.$$

Cela confirme que le groupe symplectique linéaire est un sous-groupe du groupe général linéaire.

Remarque 3.3.4. Si $n = 1$, une matrice est symplectique si et seulement si son déterminant est égal à 1. Pour $n > 1$, d'autres conditions s'y ajoutent²⁴.

Nous venons de voir que le déterminant d'une matrice symplectique de $Sp(n, \mathbb{R})$ est toujours égal à 1. Dans le cadre général d'un groupe symplectique $Sp(V)$, nous pouvons aussi caractériser la non-dégénérescence de Ω en utilisant la notation matricielle.

Proposition 3.3.3. La non-dégénérescence de Ω peut s'écrire comme $\det(\Omega_{ij}) \neq 0$.

Preuve

$\Leftarrow$ Supposons que le déterminant de (Ω_{ij}) est non-nul. Soit $v \in V$ tel que $\Omega(v, w) = 0, \forall w \in V$. Montrons que v est le vecteur nul.

Par l'équation (3.6), nous pouvons écrire $\Omega(v, w) = \langle (\Omega_{ij})^T v, w \rangle$. Par la non-dégénérescence du produit scalaire, $(\Omega_{ij})^T v = 0$. Puisque le déterminant de $(\Omega_{ij})^T$, qui est égal au déterminant de (Ω_{ij}) , est non-nul, la matrice $(\Omega_{ij})^T$ est inversible. Cela implique que v est le vecteur nul.

$\Rightarrow$ Considérons la forme Ω non-dégénérée. Supposons, par l'absurde, que $\det(\Omega_{ij}) = 0$. Comme $\det(\Omega_{ij})^T = 0$, la matrice $(\Omega_{ij})^T$ n'est pas inversible et son noyau n'est donc pas réduit à l'origine²⁵. Cela signifie qu'il existe un vecteur $v \in V$ non-nul tel que $(\Omega_{ij})^T v = 0$. Pour ce v , nous avons $\Omega(v, w) = \langle (\Omega_{ij})^T v, w \rangle = \langle 0, w \rangle = 0, \forall w \in V$. Cela contredit la non-dégénérescence

24. Voir la Remarque 3.3.3.

25. Par le Théorème 3.1.6.

de Ω car v n'est pas le vecteur nul. Nous concluons, par l'absurde, que $\det(\Omega_{ij}) \neq 0$.

□

Nous terminons cette sous-section en donnant une propriété spectrale des matrices symplectiques.

Proposition 3.3.4. *Soient $M \in Sp(n, \mathbb{R})$ et λ une valeur propre²⁶ de M . Alors $\frac{1}{\lambda}$ est aussi une valeur propre de M .*

Preuve

Remarquons que, pour une matrice symplectique M , 0 n'est jamais une valeur propre car sinon, M ne serait pas inversible. En effet, le déterminant est donné par le produit des valeurs propres, comme vu au Théorème 3.1.13.

Soient M une matrice symplectique de dimension $2n \times 2n$ et λ une valeur propre de M . Prenons le polynôme caractéristique de M ,

$$P(t) = \det(M - tI_{2n}).$$

Les valeurs propres de M sont données par les racines de ce polynôme.

Nous avons successivement les égalités suivantes

$$\begin{aligned} P(t) &= \det(M^T - tI_{2n}) && \text{puisque } \det(A) = \det(A^T) \\ &= \det(JM^{-1}J^{-1} - tI_{2n}) && \text{car } M \in Sp(n, \mathbb{R}) \\ &= \det(J(M^{-1} - tI_{2n})J^{-1}) && \text{puisque } I_{2n} = JJ^{-1} \\ &= \det(J) \det(M^{-1} - tI_{2n}) \det(J^{-1}) \\ &= \det(M^{-1} - tI_{2n}) && \text{car } \det(J) = \det(J^{-1}) = 1 \\ &= \det(M^{-1}) \det(I_{2n} - tM) \\ &= \det(I_{2n} - tM) && \text{puisque } \det(M) = 1 \\ &= \det(tM - I_{2n}) \\ &= t^{2n} \det\left(M - \frac{1}{t}I_{2n}\right) && \text{car } \det(\alpha A) = \alpha^{\dim A} \det(A) \\ &= t^{2n} P\left(\frac{1}{t}\right). \end{aligned}$$

Donc, $\frac{1}{t}$ est aussi valeur propre de M .

□

3.3.3 Exemple standard $\mathbb{R}^{2n}$

Nous continuons cette section avec l'exemple standard d'espace vectoriel symplectique : $\mathbb{R}^{2n}$ muni de la forme symplectique Ω donnée par l'équation (3.8) où

$$\begin{aligned} v &= x_1 e_1 + \dots + x_n e_n + y_1 e_{n+1} + \dots + y_n e_{2n} \\ v &= x'_1 e_1 + \dots + x'_n e_n + y'_1 e_{n+1} + \dots + y'_n e_{2n}, \end{aligned}$$

avec la base canonique $e = \{e_1, \dots, e_{2n}\}$. Cet espace est appelé l'*espace standard symplectique*. Il s'agit du seul espace symplectique de dimension $2n$, à un isomorphisme linéaire près (Théorème 3.3.1 de Darboux linéaire).

26. Voir la Sous-section de rappels 3.1.4.

Il est possible de donner une autre interprétation de la forme symplectique donnée par l'équation (3.8). Prenons comme espace vectoriel le plan P à deux dimensions (X, Y) . Le groupe symplectique du plan peut aussi être vu comme le groupe des applications linéaires de P dans P qui préservent l'aire signée des triplets de points ou des couples de vecteurs. Nous développons cette interprétation.

Considérons trois points du plan A, B et C qui définissent un couple de vecteurs $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC})$ et un système de coordonnées orthonormées du plan d'origine A . Les deux vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ sont repérés par des couples de nombres, respectivement (x, y) et (x', y') . L'aire signée de ce couple est définie par

$$S(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}) = xy' - x'y. \quad (3.15)$$

Cette aire est équivalente à l'aire du parallélogramme dont les côtés sont portés par les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$, elle est dite signée²⁷ parce qu'elle s'inverse lorsqu'on permute les points B et C , i.e.

$$S(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}) = -S(\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AB}).$$

Nous pouvons vérifier que l'équation (3.15) représente l'aire signée du couple de vecteurs en utilisant la Figure 3.1. En effet, l'aire du parallélogramme dont les côtés sont portés par les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ est équivalente à l'aire du polygone peint en gris clair. Ces deux figures ont exactement la même aire étant donné les déplacements de différents triangles. L'aire²⁸ vaut donc

$$x'y - xy'.$$

Dans notre situation, le signe de l'aire signée doit être négatif, étant donné la configuration des deux vecteurs. L'aire signée des vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ est donc bien égale à l'équation (3.15). De plus, nous observons que cette forme est exactement la même que celle donnée en équation (3.8), ce qui justifie cette nouvelle interprétation.

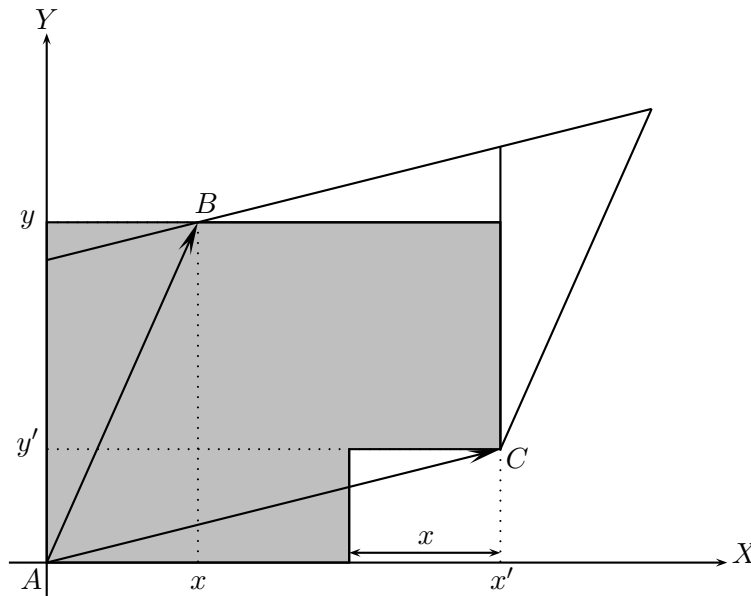


FIGURE 3.1 : Aire signée de deux vecteurs, figure inspirée de [25]

27. L'aire signée est positive si, pour amener le vecteur $\overrightarrow{AB}$ sur le vecteur $\overrightarrow{AC}$, il est plus court de tourner dans le sens inverse des aiguilles d'une montre, et inversement.

28. Nous parlons bien ici de l'aire non-signée, donc positive, du polygone considéré.

La forme symplectique du plan est donc vue comme une opération qui, à chaque couple de vecteurs du plan, issus d'une même origine, renvoie l'aire du parallélogramme associé. Le groupe symplectique est donc le groupe des applications linéaires qui préservent cette forme symplectique.

3.4 Sous-espaces d'espaces vectoriels symplectiques

Nous considérons l'étude des sous-espaces d'un espace vectoriel symplectique intéressante d'un point de vue théorique et pertinente pour l'étude de la géométrie symplectique linéaire. Cependant, notre objectif principal est de développer des notions pouvant être abordées dans les trois formalismes considérés. Nous choisissons donc d'introduire uniquement dans cette section les bases permettant de comprendre les sous-espaces d'espaces vectoriels symplectiques. Pour ceux désirant en apprendre davantage, l'Annexe A contient plus de développements, de preuves et de détails sur ce sujet.

Nous définissons plusieurs sous-espaces vectoriels²⁹ particuliers d'espaces symplectiques. Considérons (V, Ω) un espace vectoriel symplectique de dimension $2n$.

3.4.1 Orthogonal symplectique

Prenons W un sous-espace vectoriel de dimension k de V . Nous définissons premièrement l'orthogonal symplectique avant de donner certaines de ses propriétés.

Définition 3.4.1 (Orthogonal symplectique). L'orthogonal symplectique de W , noté $W^\perp$, est défini par

$$W^\perp = \{v \in V \mid \Omega(v, w) = 0, \forall w \in W\}.$$

C'est un sous-espace vectoriel de V .

Propriété 3.4.1. *Les espaces Ω -orthogonaux ont les propriétés suivantes.*

- a) $W^\perp \subset U^\perp$ si $U \subset W$;
- b) $(W^\perp)^\perp = W$;
- c) $(W + W')^\perp = W^\perp \cap W'^\perp$;
- d) $(W \cap W')^\perp = W^\perp + W'^\perp$.

Le concept d'orthogonalité en géométrie symplectique est assez différent de celui en géométrie euclidienne. En effet, W et $W^\perp$ ne sont pas obligatoirement des espaces complémentaires dans notre cas. Par exemple, chaque vecteur $v \in V$ est orthogonal à lui-même par l'antisymétrie, $\Omega(v, v) = -\Omega(v, v)$. Donc, si $\dim W = 1$, nous avons $W \subset W^\perp$, en appliquant la Définition 3.4.1. Cependant, l'égalité $W = W^\perp$ n'est pas nécessairement vérifiée puisque la dimension de $W^\perp$ ne vaut pas 1³⁰.

3.4.2 Sous-espaces vectoriels

Les exemples les plus importants de sous-espaces vectoriels d'un espace symplectique (V, Ω) sont les suivants.

29. En Définition 3.1.18.

30. Pour prouver que $W^\perp \subset W$, nous pouvons le voir comme $W^\perp \subset (W^\perp)^\perp$.

Définition 3.4.2 (Sous-espaces d'un espace symplectique).

1. Un sous-espace $W \subset V$ vérifiant $\Omega|_{W \times W}$ non-dégénérée³¹ est appelé sous-espace symplectique de (V, Ω) .
2. Un sous-espace Q de V vérifiant $\Omega|_{Q \times Q} \equiv 0$ est appelé sous-espace isotropique de (V, Ω) .
3. Un sous-espace $W \subset V$ vérifiant $W^\perp$ isotropique est appelé sous-espace coïstotropique de (V, Ω) .
4. Un sous-espace $L \subset V$ étant isotropique et coïstotropique est appelé sous-espace lagrangien de (V, Ω) .

Un sous-espace lagrangien peut donc être décrit comme un sous-espace isotropique maximal. Par exemple, $\mathbb{R}^n$ est un sous-espace lagrangien de $\mathbb{C}^n$. Ces sous-espaces sont les plus importants en géométrie symplectique.

Proposition 3.4.1. *Si $L \subset V$ est un sous-espace lagrangien d'un espace vectoriel symplectique (V, ω) , alors $\dim L = \frac{1}{2} \dim V$.*

Proposition 3.4.2. *Si L est un sous-espace lagrangien de (V, Ω) , alors toute base $\{e_1, \dots, e_n\}$ de L peut être étendue à une base symplectique $\{e_1, \dots, e_n, f_1, \dots, f_n\}$ de (V, Ω) .*

Nous pouvons résumer les principales propriétés des différents sous-espaces ci-dessous.

Propriété 3.4.2. *Pour un sous-espace $W \subset V$ avec $\dim W = k$, nous avons*

$$\begin{aligned} W \text{ symplectique} &\Leftrightarrow W \cap W^\perp = \{0\} \\ W \text{ isotropique} &\Leftrightarrow W \subset W^\perp \Rightarrow k \leq n \\ W \text{ coïstotropique} &\Leftrightarrow W \supset W^\perp \Rightarrow k \geq n \\ W \text{ lagrangien} &\Leftrightarrow W = W^\perp \Rightarrow k = n. \end{aligned}$$

3.5 Algèbre de Lie du groupe symplectique

Nous développons maintenant des notions à la réunion de l'algèbre et de la géométrie différentielle : les groupes de Lie et les algèbres de Lie.

Définition 3.5.1 (Algèbre de Lie). Une algèbre de Lie est un espace vectoriel $\mathfrak{g}$ muni d'une application bilinéaire, appelée crochet de Lie,

$$\begin{aligned} \mathfrak{g} \times \mathfrak{g} &\rightarrow \mathfrak{g} \\ (X, Y) &\mapsto [X, Y] \end{aligned}$$

vérifiant les propriétés suivantes

- antisymétrie : $[X, Y] = -[Y, X]$, $\forall X, Y \in \mathfrak{g}$;
- identité de Jacobi : $[[X, Y], Z] + [[Y, Z], X] + [[Z, X], Y] = 0$, $\forall X, Y, Z \in \mathfrak{g}$.

Définition 3.5.2 (Groupe de Lie). G est un groupe de Lie si et seulement si G est un groupe ainsi qu'une variété différentiable $\mathcal{C}^\infty$ et si les applications

$$\begin{aligned} m : G \times G &\rightarrow G \\ (g, h) &\mapsto gh \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} inv : G &\rightarrow G \\ g &\mapsto g^{-1} \end{aligned} \quad \text{sont } \mathcal{C}^\infty.$$

31. Nous pouvons toujours restreindre la forme symplectique Ω à un sous-espace vectoriel W . Cette forme restreinte $\Omega|_W$ est évidemment antisymétrique mais, en général, n'est plus non-dégénérée.

Nous pouvons aussi définir plus particulièrement, suite à la Définition 3.5.1, une algèbre associée à un groupe de Lie.

Définition 3.5.3 (Algèbre de Lie d'un groupe de Lie). Soit G un groupe de Lie où e représente le neutre. L'algèbre de Lie de G , notée $\mathcal{G}$, est définie comme l'espace tangent³² de G au neutre, c'est-à-dire

$$\mathcal{G} = T_e(G),$$

en tant qu'espace vectoriel.

Le groupe des matrices symplectiques $Sp(n, \mathbb{R})$ par rapport au produit matriciel forme un groupe de Lie. L'algèbre de Lie associée à ce groupe, notée $sp(n, \mathbb{R})$, vaut

$$sp(n, \mathbb{R}) = \{M \in \mathbb{R}^{2n \times 2n} \mid \Omega(Mv, w) + \Omega(v, Mw) = 0, \forall v, w \in \mathbb{R}^{2n}\}.$$

En utilisant la forme standard de l'équation (3.13), nous pouvons définir cette algèbre.

Définition 3.5.4 (Algèbre de Lie du groupe symplectique). L'algèbre de Lie de $Sp(n, \mathbb{R})$ est donnée par l'ensemble suivant

$$sp(n, \mathbb{R}) = \{M \in \mathbb{R}^{2n \times 2n} \mid M^T J + JM = 0\}.$$

Le groupe des matrices hamiltoniennes, définies en Définition 2.3.1 dans le formalisme dynamique, a donc une structure d'algèbre de Lie.

De plus, en décomposant M en blocs $n \times n$, $M = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}$, nous obtenons les conditions suivantes sur les blocs

$$D = -A^T, \quad B^T = B \text{ et } C^T = C.$$

Proposition 3.5.1. *L'algèbre de Lie de $Sp(n, \mathbb{R})$ est l'ensemble*

$$sp(n, \mathbb{R}) = \left\{ \begin{pmatrix} A & B \\ C & -A^T \end{pmatrix} \mid \begin{array}{l} A, B, C \in \mathbb{R}^{n \times n} \\ B, C \text{ symétriques} \end{array} \right\}.$$

Nous donnons maintenant un lien avec les champs de vecteurs hamiltoniens, définis en Définition 2.3.3, ici dans le cas linéaire.

Définition 3.5.5 (Champ de vecteurs hamiltonien linéaire). Un champ de vecteurs hamiltonien linéaire $\dot{x}$ est représenté par une équation de la forme

$$\frac{dx}{dt}(t) = A(t)x(t), \quad x(t) \in \mathbb{R}^{2n} \text{ et } A(t) \in sp(n, \mathbb{R}).$$

Le cas autonome est le cas où la matrice $A(t)$ est une matrice constante. En posant $x = (x_1, x_2)$ et en introduisant l'hamiltonien $\mathcal{H}(t, x) = \frac{1}{2}x^T S(t)x$, l'équation s'écrit

$$\begin{pmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & I \\ -I & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \partial \mathcal{H} / \partial x_1 \\ \partial \mathcal{H} / \partial x_2 \end{pmatrix},$$

et le vecteur $\begin{pmatrix} \partial \mathcal{H} / \partial x_1 \\ \partial \mathcal{H} / \partial x_2 \end{pmatrix}$ est le gradient $\nabla_x \mathcal{H}$.

32. Voir Définition 4.1.7.

3.6 Structures complexes sur des espaces symplectiques réels

Bien que le formalisme dynamique ne permet pas d'introduire cette notion, nous développons les structures complexes dans le formalisme algébrique et regardons quelles adaptations sont nécessaires à sa généralisation dans le formalisme différentiel au chapitre suivant.

Prenons V un espace vectoriel réel de dimension finie. Toute forme symplectique sur V peut être vue comme la partie imaginaire d'une forme hermitienne sur V muni d'une structure complexe. Nous donnons premièrement quelques concepts afin de nous familiariser avec la notion de structure complexe.

Définition 3.6.1 (Structure complexe). Une structure complexe sur V est une application linéaire $J : V \rightarrow V$ telle que $J^2 = -I$. La paire (V, J) est appelée espace vectoriel complexe³³.

La matrice symplectique principale, en équation (3.12), est une structure complexe sur $\mathbb{R}^{2n}$.

Remarque 3.6.1. *L'existence d'une structure complexe implique que la dimension de V soit paire. En effet, nous pouvons constater que $\det(J^2) = (-1)^m = (\det J)^2 \geq 0$, où m est la dimension de V .*

Définition 3.6.2 (Compatibilité). Soit (V, Ω) un espace vectoriel symplectique. Une structure complexe J sur V est dite compatible avec Ω si

$$\Omega(Ju, Jv) = \Omega(u, v), \quad \forall u, v \in V \quad (3.16)$$

$$\text{et} \quad \Omega(u, Ju) > 0, \quad \forall u \in V \setminus \{0\}. \quad (3.17)$$

Proposition 3.6.1. *Si (V, Ω) est un espace vectoriel symplectique, alors il existe une structure complexe compatible J sur V . Réciproquement, si (V, J) est un espace vectoriel complexe, alors il existe une structure symplectique Ω telle que J soit compatible avec Ω .*

Nous nous intéressons à la *forme hermitienne*

$$h : V \times V \rightarrow \mathbb{C},$$

application vérifiant les conditions suivantes

- i. $u \mapsto h(u, v)$ est linéaire (complexe), $\forall v \in V$, i.e.

$$\begin{cases} h(u_1 + u_2, v) = h(u_1, v) + h(u_2, v), & \forall u_1, u_2, v \in V \\ h(zu, v) = zh(u, v), & \forall z \in \mathbb{C}, \forall u, v \in V \end{cases};$$

- ii. $h(v, u) = \overline{h(u, v)}$;

- iii. $h(u, u) > 0$, $\forall u \neq 0$.

Nous remarquons que la condition ii. implique que $v \mapsto h(u, v)$ est antilinéaire (complexe,) $\forall u \in V$, i.e.

$$\begin{cases} h(u, v_1 + v_2) = h(u, v_1) + h(u, v_2), & \forall u, v_1, v_2 \in V \\ h(u, zv) = \bar{z}h(u, v), & \forall z \in \mathbb{C}, \forall u, v \in V \end{cases}.$$

Le triplet (V, J, h) est appelé *espace vectoriel hermitien*.

33. Attention de ne pas confondre cette dénomination avec un espace vectoriel dont le champ des scalaires est $\mathbb{C}$. Cependant, la structure complexe induit une structure d'espace vectoriel sur $\mathbb{C}$. En effet, la multiplication de $v \in V$ par un scalaire $z = x + iy \in \mathbb{C}$ est définie par $zv = xv + yJv$.

Si nous notons

$$h = g + i\Omega, \quad g = \mathcal{R}(h), \quad \Omega = \mathcal{I}(h),$$

alors la partie réelle g est une forme euclidienne et la partie imaginaire Ω est une forme symplectique sur V .

La relation entre g , Ω et la structure complexe J est donnée par

$$g(u, v) = \Omega(Ju, v), \quad \Omega(u, v) = g(u, Jv),$$

pour tout u, v dans V .

Définition 3.6.3. Soit V un espace vectoriel réel de dimension finie muni d'une forme euclidienne g , d'une forme symplectique Ω et d'une structure complexe J . Ces trois structures sont dites *compatibles* si $h = g + i\Omega$ est une forme hermitienne sur (V, J) ou, de manière équivalente, si

$$g(u, v) = \Omega(Ju, v) \tag{3.18}$$

$$\text{et } \Omega(u, v) = g(u, Jv), \tag{3.19}$$

pour tout u, v dans V .

Nous donnons trois observations concernant cette définition.

1. Deux éléments d'un triplet compatible (g, Ω, J) sur V déterminent automatiquement le troisième.
2. Pour un triplet compatible, l'opérateur J est orthogonal par rapport à g , i.e.

$$g(Ju, Jv) = g(u, v), \quad \forall u, v \in V. \tag{3.20}$$

En effet, nous pouvons l'observer en combinant les équations (3.18) et (3.19). De plus, en considérant deux des trois équations (3.18) à (3.20), la troisième est immédiatement vérifiée.

3. La remarque 2 reste vraie en considérant les équations (3.16), (3.18) et (3.19).

Théorème 3.6.1. Soit un espace vectoriel symplectique (V, Ω) . Alors il existe une forme euclidienne g et une structure complexe J compatibles sur V .

3.7 Identification des concepts équivalents

Nous terminons ce chapitre en établissant les liens entre les deux formalismes développés jusqu'ici, à savoir les formalismes dynamique et algébrique de la géométrie symplectique. Nous listons les concepts identiques ou équivalents étudiés.

- Le groupe symplectique est étudié dans les deux formalismes, via la Définition 2.3.2 dans le cadre du formalisme dynamique et via la relation (3.14) dans le cadre du formalisme algébrique.
- La notion de matrice symplectique est identique dans les deux formalismes, à la Définition 2.3.2 pour le formalisme dynamique et à la Sous-section 3.3.2 pour le formalisme algébrique. La notion de matrice symplectique principale J est, pour sa part, équivalente pour les deux formalismes, même si les notations diffèrent ³⁴.
- Le formalisme dynamique présente les champs de vecteurs hamiltoniens, en Définition 2.3.3, et le formalisme algébrique définit les champs de vecteurs hamiltoniens linéaires, en Définition 3.5.5.

34. Voir la Remarque 3.3.2.

- Les matrices hamiltoniennes sont traitées dans les deux formalismes, dans le cadre des champs vectoriels hamiltoniens pour le formalisme dynamique, en Définition 2.3.1, et dans le cadre de l'algèbre de Lie du groupe symplectique pour le formalisme algébrique, en Définition 3.5.4.
- La préservation des volumes de l'espace des phases, via le Théorème 2.2.2 de Liouville dans le formalisme dynamique, peut être liée à l'exemple standard en Sous-section 3.3.3 du formalisme algébrique. En effet, nous avons étudié le groupe symplectique du plan comme le groupe préservant l'aire signée des couples de vecteurs.
- Un des concepts centraux du formalisme dynamique, la transformation canonique en Définition 2.3.5, est équivalente, dans le formalisme algébrique, au symplectomorphisme en Définition 3.3.2.

Après avoir étudié le deuxième formalisme concernant l'algèbre linéaire, nous pouvons maintenant étendre certaines de ces notions aux variétés différentiables et en aborder de nouvelles. En effet, la notion de forme symplectique s'étend aux variétés différentiables de dimension paire, en supposant l'existence d'une forme symplectique définie sur chaque domaine de coordonnées.

Chapitre 4

Formalisme différentiel

Nous avons recours, dans ce chapitre, à la géométrie différentielle pour décrire la géométrie symplectique. Pour ce faire, nous utilisons les notes de cours [11] et [23], les livres [2] et [28] ainsi que l'article [27]. Comme explicité à la Section 1.1, la géométrie symplectique fait partie intégrante de la géométrie différentielle et, de ce fait, énormément de notions de géométrie différentielle se retrouvent en géométrie symplectique.

Nous donnons tout d'abord, à la Section 4.1, certains rappels de géométrie différentielle utilisés dans ce chapitre. Le lecteur doit impérativement comprendre ces notions avant de poursuivre sa lecture.

La suite de ce chapitre a pour but d'introduire les concepts et les éléments de géométrie symplectique les plus souvent explicités dans la littérature. Nous parlons bien sûr des variétés symplectiques (Section 4.2) avant de donner deux exemples couramment cités (Section 4.3). Ensuite, nous expliquons, à la Section 4.4, les champs de vecteurs hamiltoniens, fortement utilisés en théorie des systèmes dynamiques. À la Section 4.5, les crochets de Poisson, déjà abordés en Sous-section 1.2.3 et en Sous-section 2.3.5, sont définis rigoureusement dans le cadre différentiel. Nous enchaînons en décrivant les symplectomorphismes et les transformations canoniques (Section 4.6) avant d'exposer un autre ensemble de vecteurs, les vecteurs symplectiques (Section 4.7). Nous parlons de variétés presque complexes, en Section 4.8, et terminons en identifiant les liens entre les trois formalismes développés.

4.1 Rappels de géométrie différentielle

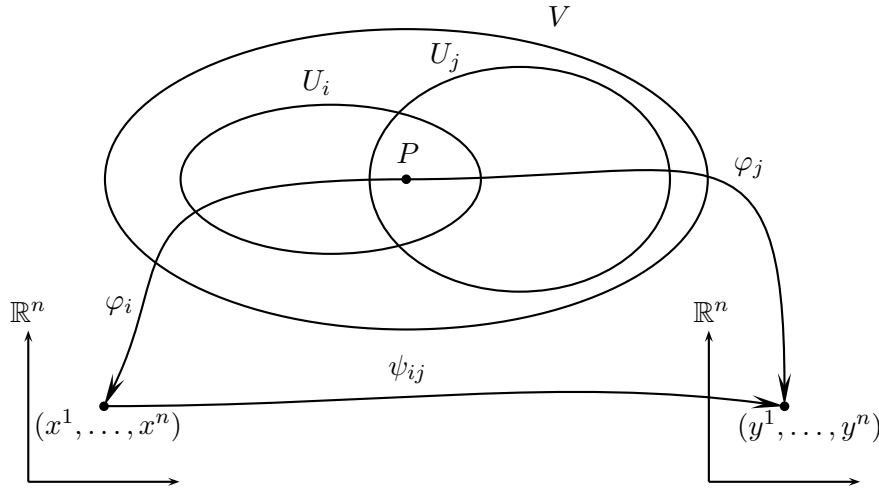
Nous rappelons au lecteur les bases de géométrie différentielle nécessaires à la bonne compréhension de ce chapitre. Ces rappels sont réalisés à l'aide des notes du cours SMATB214 de *Géométrie différentielle* [8], donné en bachelier en sciences mathématiques à l'Université de Namur.

4.1.1 Variétés différentiables

Nous commençons par la définition d'une variété différentiable, objet d'étude de la géométrie différentielle.

Définition 4.1.1 (Variété différentiable). V est une variété différentiable de dimension n si

1. V est un espace topologique séparé, i.e. pour deux points distincts de V , nous pouvons trouver un ouvert pour chacun de ces points tel que leur intersection est vide.
2. Pour tout P appartenant à V , il existe une carte locale (U_i, φ_i) où U_i est un ensemble

FIGURE 4.1 : Variété différentiable V , figure inspirée de [8]

ouvert de V contenant P et φ_i est un homéomorphisme¹ de $U_i \subset V$ dans $W \subset \mathbb{R}^n$, avec W un ouvert de $\mathbb{R}^n$. U_i est appelé voisinage de coordonnées et φ_i fonction de coordonnées. Les coordonnées² de P dans la carte (U_i, φ_i) sont $\varphi_i(P) = (x^1, \dots, x^n)$.

3. Il existe un atlas $\mathcal{A} = \{(U_i, \varphi_i)_{i \in I \subseteq \mathbb{N}} \mid \bigcup_{i \in I} U_i = V\}$, ensemble de cartes locales recouvrant la variété différentiable V .
4. Le changement de coordonnées est différentiable, c'est-à-dire soit $P \in U_i \cap U_j$, l'application

$$\psi_{ij} = \varphi_j \circ \varphi_i : \varphi_i(U_i \cap U_j) \longrightarrow \varphi_j(U_i \cap U_j) \quad \text{est } \mathcal{C}^\infty,$$

$$\{x^\mu\}_{\mu=1, \dots, n} \longmapsto \{y^\nu\}_{\nu=1, \dots, n}$$

avec

$$\begin{cases} y^1 = y^1(x^1, \dots, x^n) \\ y^2 = y^2(x^1, \dots, x^n) \\ \vdots \\ y^n = y^n(x^1, \dots, x^n). \end{cases}$$

Une représentation graphique d'une variété différentiable V avec les éléments de sa définition se trouve à la Figure 4.1.

4.1.2 Calculus sur variétés différentiables

Applications sur les variétés

Pour chaque application, nous donnons sa définition générale ainsi que sa représentation en coordonnées utilisée en pratique.

Définition 4.1.2 (Champ scalaire, aussi appelé fonction). Un champ scalaire f est une application

$$f : V \longrightarrow \mathbb{R}$$

$$P \longmapsto f(P).$$

1. Bijection continue dont la bijection réciproque est aussi continue.

2. Dans les sections suivantes, nous notons $\varphi_i(P) = (x^1(P), \dots, x^n(P))$. Ainsi, $x^j(P) = (\varphi_i(P))^j$, pour $1 \leq j \leq n$. Cela nous permet de noter $x^j(P) = \tilde{x}^j$. Nous faisons également remarquer que x^μ est parfois considéré comme un réel et parfois comme une fonction. Le lecteur averti peut donc en tenir compte dans la suite de sa lecture.

Soient $P \in V$ et (U, φ) une carte locale de V telle que P appartient à U , la représentation en coordonnées d'un champ scalaire est donnée par l'application

$$\begin{aligned} f \circ \varphi^{-1} : \mathbb{R}^n &\longrightarrow \mathbb{R} \\ \{x^\mu\}_{\mu=1,\dots,n} &\longmapsto f(\{x^\mu\}) \stackrel{\text{not.}}{=} f(x^\mu) \quad \text{où } \mu = 1, \dots, n. \end{aligned}$$

Notons $\mathcal{F}(V)$ l'ensemble des champs scalaires sur V .

Remarque : Une fonction f est $\mathcal{C}^\infty$ si et seulement si $f \circ \varphi^{-1}$ est $\mathcal{C}^\infty$. L'ensemble des fonctions $\mathcal{C}^\infty$ sur V est noté $\mathcal{C}^\infty(V, \mathbb{R})$ ou $\mathcal{C}^\infty(V)$.

Définition 4.1.3 (Courbe). Une courbe (ouverte) c dans V est une application

$$\begin{aligned} c : I &\longrightarrow V \\ t &\longmapsto c(t) \end{aligned}$$

où I est un intervalle ouvert de $\mathbb{R}$. Soient $t \in I$ et (U, φ) une carte locale de V telle que $c(t)$ appartient à U , la représentation en coordonnées d'une courbe est donnée par l'application

$$\begin{aligned} \varphi \circ c : I &\longrightarrow \mathbb{R}^n \\ t &\longmapsto (x^1(t), \dots, x^n(t)). \end{aligned}$$

Remarque : Une courbe c est $\mathcal{C}^\infty$ si et seulement si $\varphi \circ c$ est $\mathcal{C}^\infty$.

Nous regardons maintenant des applications f depuis une variété N de dimension n vers une autre variété M de dimension m , c'est-à-dire

$$\begin{aligned} f : N &\rightarrow M \\ P &\mapsto f(P). \end{aligned}$$

Si nous prenons une carte locale (U, φ) de N et une autre carte (R, ψ) de M , la représentation en coordonnées de l'application f s'écrit

$$\psi \circ f \circ \varphi^{-1} : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m.$$

Nous pouvons à présent donner la définition suivante.

Définition 4.1.4 (Difféomorphisme). Posons $f : N \rightarrow M$ un homéomorphisme ainsi que (U, φ) et (R, ψ) deux cartes locales sur N et M , respectivement. Si

1. l'application composée $\psi \circ f \circ \varphi^{-1}$ est inversible (i.e. l'application $\varphi \circ f^{-1} \circ \psi^{-1}$ existe) ;
2. $\psi \circ f \circ \varphi^{-1}$ et $\varphi \circ f \circ \psi^{-1}$ sont $\mathcal{C}^\infty$,

alors f est un difféomorphisme et N est dit difféomorphe à M .

Vecteurs

Nous introduisons d'abord la notion de dérivée directionnelle nécessaire à la notion de vecteur en géométrie différentielle, à savoir vecteur tangent à une courbe sur la variété V .

Définition 4.1.5 (Dérivée directionnelle). Soient une courbe $c : I \subset \mathbb{R} \rightarrow V$ et un champ scalaire $f : V \rightarrow \mathbb{R}$. Nous définissons la dérivée directionnelle de $f(c(t))$ le long de la courbe $c(t)$ au point $t = 0$ comme le réel

$$X|_P[f] = \sum_{\mu=1}^n \left(X^\mu \frac{\partial f}{\partial x^\mu} \right) \Big|_{c(0) \equiv P} \equiv \frac{df(c(t))}{dt} \Big|_{t=0}.$$

Définition 4.1.6 (Vecteur tangent). Le vecteur tangent à V en $P = c(0)$ le long de la courbe c est l'opérateur différentiel linéaire du premier ordre

$$X|_P[\cdot] = \sum_{\mu=1}^n X^\mu|_P \frac{\partial \cdot}{\partial x^\mu}|_P.$$

Les composantes du vecteur tangent sont données par

$$X^\mu|_P = \frac{dx^\mu}{dt}|_P.$$

Propriété 4.1.1. *Un vecteur tangent au point $P \in V$ est une application linéaire*

$$X|_P : \mathcal{F}(V) \longrightarrow \mathbb{R}$$

telle que

1. *pour tout α, β dans $\mathbb{R}$ et pour tout f, g champs scalaires,*

$$X|_P[\alpha f + \beta g] = \alpha X|_P[f] + \beta X|_P[g]$$

2. *la règle de Leibniz est vérifiée, c'est-à-dire, pour tout f, g champs scalaires,*

$$X|_P[fg] = X|_P[f]g + fX|_P[g].$$

Nous introduisons maintenant la notion d'espace de vecteurs tangents.

Définition 4.1.7 (Espace tangent). L'espace tangent de V au point P appartenant à V , noté $T_P(V)$, est défini comme l'espace vectoriel associé aux vecteurs tangents au point P . Nous avons donc

$$T_P(V) = \text{span} \left\{ \frac{\partial}{\partial x^\mu}|_P \right\}_{\mu=1, \dots, n} \stackrel{\text{not.}}{=} \text{span} \{e_\mu|_P\}_{\mu=1, \dots, n}.$$

Un vecteur tangent est, à chaque fois, pris en un point $P \in V$. La notion de champ vectoriel permet de travailler en tout point d'une variété avec la notion de vecteur tangent.

Définition 4.1.8 (Champ vectoriel). Un champ vectoriel est une application X de la variété V vers un espace tangent à la variété V qui associe un vecteur à tout point de la variété

$$\begin{aligned} X : V &\longrightarrow T_P(V) \\ P &\longmapsto X|_P = \sum_{\mu=1}^n X^\mu|_P \frac{\partial}{\partial x^\mu}|_P. \end{aligned}$$

L'ensemble des champs vectoriels sur la variété V se note $\mathcal{X}(V)$.

Un-formes différentielles

Etant donné que $T_P(V)$ est un espace vectoriel, nous pouvons définir des formes linéaires

$$\omega|_P : T_P(V) \longrightarrow \mathbb{R},$$

pour tout P appartenant à V sur cet espace, qui constituent donc l'espace vectoriel dual de $T_P(V)$.

Définition 4.1.9 (Espace cotangent). L'espace cotangent au point P appartenant à V est l'espace dual de $T_P(V)$, noté $T_P^*(V)$ et défini par

$$T_P^*(V) = \text{span} \{dx^\mu\}_{\mu=1, \dots, n}.$$

Définition 4.1.10 (Un-forme différentielle ou covecteur). Une un-forme différentielle est un élément $\omega|_P$ appartenant à l'espace cotangent au point $P \in V$, c'est-à-dire

$$\omega|_P : T_P(V) \longrightarrow \mathbb{R}.$$

Nous pouvons aussi, dans ce cadre, parler de champ de un-formes permettant de travailler en tout point de la variété avec une un-forme différentielle.

Définition 4.1.11 (Champ de un-formes). Un champ de un-formes différentielles est une application ω de la variété V vers l'espace cotangent au point P qui associe un covecteur à tout point de la variété, c'est-à-dire

$$\begin{aligned} \omega : V &\longrightarrow T_P^*(V) \\ P &\longmapsto \omega|_P = \sum_{\mu=1}^n \omega_\mu|_P dx^\mu|_P. \end{aligned}$$

De plus, chaque composante ω_μ du champ de un-formes est un champ scalaire. L'ensemble des champs de un-formes sur la variété V se note $\Omega^1(V)$.

Nous présentons maintenant un produit utilisé pour appliquer un vecteur à une un-forme.

Définition 4.1.12 (Produit interne). Le produit interne est une application bilinéaire

$$\langle \cdot, \cdot \rangle : T_P^*(V) \times T_P(V) \longrightarrow \mathbb{R}$$

définie pour tout P dans V telle que, pour tout indice $1 \leq \mu, \alpha \leq n$,

$$\left\langle dx^\mu, \frac{\partial}{\partial x^\alpha} \right\rangle = \frac{\partial x^\mu}{\partial x^\alpha} = \delta_\alpha^\mu. \quad (4.1)$$

Prenons un champ scalaire f et sa différentielle au point P , $df|_P = \sum_\mu \frac{\partial f}{\partial x^\mu}|_P dx^\mu|_P$, ainsi qu'un vecteur tangent au point P , $X|_P = \sum_\alpha X^\alpha|_P \frac{\partial}{\partial x^\alpha}|_P$. Alors,

$$\langle df|_P, X|_P \rangle = X|_P[f] = \sum_\mu X^\mu|_P \frac{\partial f}{\partial x^\mu}|_P.$$

Dans le cas général, prenons un vecteur tangent au point P , $X|_P = \sum_\mu X^\mu|_P \frac{\partial}{\partial x^\mu}|_P$, et une un-forme différentielle au point P , $\omega|_P = \sum_\nu \omega_\nu|_P dx^\nu|_P$. Le produit interne entre ces deux objets vaut

$$\langle \omega|_P, X|_P \rangle = \omega|_P(X|_P) = \sum_{\mu=1}^n \omega_\mu|_P X^\mu|_P. \quad (4.2)$$

Tenseurs

Nous décrivons à présent les tenseurs qui permettent de généraliser les vecteurs tangents et les un-formes différentielles. Nous introduisons, dans la suite des rappels, la *convention d'Einstein* permettant d'omettre l'utilisation du symbole $\sum$ dans les sommations. Si un indice est répété deux fois, une fois en haut et une fois en bas dans une expression, alors la somme sur cet indice est sous-entendue.

Définition 4.1.13 (Tenseur). Un tenseur de type (p, q) au point $P \in V$ est une application multilinéaire à $p + q$ arguments qui envoie p covecteurs et q vecteurs vers $\mathbb{R}$. Un tenseur de ce type est de la forme

$$T|_P : \times^p T_P^*(V) \times^q T_P(V) \longrightarrow \mathbb{R}$$

tel que

$$T|_P = T^{\mu_1, \dots, \mu_p}_{\nu_1, \dots, \nu_q} \Big|_P \frac{\partial}{\partial x^{\mu_1}} \Big|_P \otimes \dots \otimes \frac{\partial}{\partial x^{\mu_p}} \Big|_P \otimes dx^{\nu_1} \Big|_P \otimes \dots \otimes dx^{\nu_q} \Big|_P$$

où $\otimes$ est le produit tensoriel (voir Définition 4.1.14).

L'ensemble des tenseurs de type (p, q) au point P sur V est noté $\mathcal{T}_{q,P}^p(V)$.

Afin d'alléger les notations, nous n'indiquons plus dans la suite le symbole $|_P$ pour les vecteurs, un-formes différentielles, tenseurs, ... Soient q vecteurs $V_i = V_i^\mu \frac{\partial}{\partial x^\mu}$, avec $1 \leq i \leq q$, et p un-formes $\omega_i = \omega_{i\mu} dx^\mu$, avec $1 \leq i \leq p$. Alors l'action du tenseur T sur ces objets donne le réel suivant

$$T(\omega_1, \dots, \omega_p; V_1, \dots, V_q) = T^{\mu_1, \dots, \mu_p}_{\nu_1, \dots, \nu_q} \omega_{1\mu_1} \dots \omega_{p\mu_p} V_1^{\nu_1} \dots V_q^{\nu_q},$$

où nous avons utilisé l'équation (4.2).

Définition 4.1.14 (Produit tensoriel). Le produit tensoriel de deux tenseurs $\tau = \mu \otimes \nu \in \mathcal{T}_{q,P}^p(V) \times \mathcal{T}_{q',P}^{p'}(V)$ est un tenseur à $p + p' + q + q'$ arguments, appartenant à $\mathcal{T}_{q+q',P}^{p+p'}(V)$ et dont l'action sur $p + p'$ covecteurs et $q + q'$ vecteurs est définie par

$$\tau(\omega_1, \dots, \omega_p, \xi_1, \dots, \xi_{p'}; V_1, \dots, V_q, U_1, \dots, U_{q'}) = \mu(\omega_1, \dots, \omega_p; V_1, \dots, V_q) \nu(\xi_1, \dots, \xi_{p'}; U_1, \dots, U_{q'}),$$

soit le produit algébrique des actions des deux tenseurs μ et ν .

Comme pour les vecteurs et les un-formes, nous introduisons un champ de tenseurs.

Définition 4.1.15 (Champ tensoriel). Un champ tensoriel de type (p, q) est une application qui associe un élément de $\mathcal{T}_{q,P}^p(V)$ à chaque point P de la variété

$$\begin{aligned} T : V &\longrightarrow \mathcal{T}_{q,P}^p(V) \\ P &\longmapsto T|_P = T^{\mu_1, \dots, \mu_p}_{\nu_1, \dots, \nu_q} \Big|_P \left(\frac{\partial}{\partial x^{\mu_1}} \otimes \dots \otimes \frac{\partial}{\partial x^{\mu_p}} \otimes dx^{\nu_1} \otimes \dots \otimes dx^{\nu_q} \right) \Big|_P. \end{aligned}$$

Chaque composante de ces champs $T^{\mu_1, \dots, \mu_p}_{\nu_1, \dots, \nu_q} \Big|_P$ est un champ scalaire. L'ensemble des champs tensoriels de type (p, q) est noté $\mathcal{T}_q^p(V)$.

k-formes différentielles

Nous parlons enfin d'une notion indispensable à la géométrie symplectique, la 2-forme différentielle, en présentant le concept de k -forme différentielle.

Définition 4.1.16 (Action d'une permutation sur une forme). Soit un tenseur $\omega \in \mathcal{T}_{k,P}^0$ de type $(0, k)$. L'action d'une permutation p sur cette forme multilinéaire est définie par

$$p[\omega](X_1, \dots, X_k) \equiv \omega(X_{p(1)}, \dots, X_{p(k)}),$$

où les $X_i \in T_P(V)$ sont des vecteurs et p un élément de S_k , le groupe des permutations des entiers de 1 à k .

Définition 4.1.17 (Antisymétriseur). L'antisymétriseur $\mathcal{A}$ est un opérateur dont l'action sur un tenseur $\omega \in \mathcal{T}_{k,P}^0$ est définie par

$$\mathcal{A}\omega = \frac{1}{k!} \sum_{p \in S_k} \text{sgn}(p) p[\omega]$$

où la signature de la permutation p , $\text{sgn}(p)$, vaut $+1$ si la permutation est paire et -1 si elle est impaire. $\mathcal{A}\omega$ est totalement antisymétrique i.e. $p\mathcal{A}\omega = \text{sgn}(p)\mathcal{A}\omega$, $\forall p \in S_k$.

Nous donnons à présent la définition centrale de ce mémoire : la k -forme différentielle.

Définition 4.1.18 (Forme différentielle d'ordre k). Une forme différentielle d'ordre k (ou une k -forme) est un tenseur totalement antisymétrique de type $(0, k)$.

Nous notons $\Omega_P^k(V)$ l'ensemble des k -formes au point $P \in V$. Soit $\omega \in \Omega_P^k(V)$, cette k -forme se présente sous la forme

$$\begin{aligned} \omega &= \frac{1}{k!} \sum_{p \in S_k} \omega_{\mu_{p(1)}, \dots, \mu_{p(k)}} dx^{\mu_{p(1)}} \otimes \dots \otimes dx^{\mu_{p(k)}} \\ &= \frac{1}{k!} \sum_{p \in S_k} \text{sgn}(p) \omega_{\mu_1, \dots, \mu_k} dx^{\mu_{p(1)}} \otimes \dots \otimes dx^{\mu_{p(k)}}, \end{aligned}$$

par l'antisymétrie des composantes.

Nous regardons maintenant comment multiplier des formes différentielles entre elles.

Définition 4.1.19 (Produit extérieur de k un-formes). Le produit extérieur, appelé aussi wedge product et noté $\wedge$, de k un-formes est défini par le produit tensoriel complètement antisymétrique

$$dx^{\mu_1} \wedge \dots \wedge dx^{\mu_k} = \sum_{p \in S_k} \text{sgn}(p) dx^{\mu_{p(1)}} \otimes \dots \otimes dx^{\mu_{p(k)}}.$$

Nous pouvons donc réécrire $\omega \in \Omega_P^k(V)$ en utilisant le produit extérieur

$$\omega = \frac{1}{k!} \omega_{\mu_1, \dots, \mu_k} dx^{\mu_1} \wedge \dots \wedge dx^{\mu_k}. \quad (4.3)$$

Nous nous intéressons ensuite au concept de dérivée extérieure.

Définition 4.1.20 (Dérivée extérieure). La dérivée extérieure, notée d_k , est une application $\Omega^k(V) \rightarrow \Omega^{k+1}(V)$ dont l'action sur une k -forme ω donnée par (4.3) est définie par

$$d_k \omega = \frac{1}{k!} \frac{\partial \omega_{\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_k}}{\partial x^\nu} dx^\nu \wedge dx^{\mu_1} \wedge dx^{\mu_2} \wedge \dots \wedge dx^{\mu_k}.$$

L'indice k est souvent omis dans la notation de la dérivée extérieure $d \equiv d_k$.

Nous énonçons un théorème d'une grande utilité en géométrie différentielle et en géométrie symplectique.

Théorème 4.1.1. *Deux dérivées extérieures successives s'annulent, c'est-à-dire*

$$d^2 = 0 \text{ (ou } d_{k+1}d_k = 0).$$

Nous pouvons enfin définir deux propriétés des k -formes.

Définition 4.1.21 (*k*-forme fermée). Une *k*-forme ω est fermée si et seulement si

$$d_k \omega = 0.$$

Définition 4.1.22 (*k*-forme exacte). Une *k*-forme ω est exacte si et seulement si

$$\omega = d_{k-1} \psi,$$

où $\psi \in \Omega_P^{k-1}(V)$.

Par le Théorème 4.1.1, toute forme exacte est donc fermée³.

Applications (co)tangentes induites

Deux applications sont nécessaires afin de pouvoir passer d'un espace tangent à un autre, et d'un espace cotangent à un autre.

Définition 4.1.23 (Application linéaire tangente). Soient une application lisse $f : V \rightarrow W$, où V et W sont des variétés différentiables, et un champ scalaire $g \in \mathcal{F}(W)$ ⁴. Prenons aussi P un point de V et $X \in T_P(V)$ un vecteur tel que $X[g \circ f] \in \mathbb{R}$. L'application f induit naturellement une application f_* au niveau des espaces tangents

$$\begin{aligned} f_* : T_P(V) &\rightarrow T_{f(P)}(W) \\ X &\mapsto (f_* X)[\cdot] = X[\cdot \circ f], \end{aligned}$$

appelée application linéaire tangente à f en P (ou *pushforward*). Appliquée au champ scalaire g , $(f_* X)[g] = X[g \circ f]$.

Une représentation graphique du pushforward est donnée à la Figure 4.2. Prenons (U, φ) et (R, ψ) deux cartes locales de V et de W , respectivement. Nous avons la relation suivante

$$(f_* X)[g \circ \psi^{-1}(y)] \equiv X[g \circ f \circ \varphi^{-1}(x)], \quad (4.4)$$

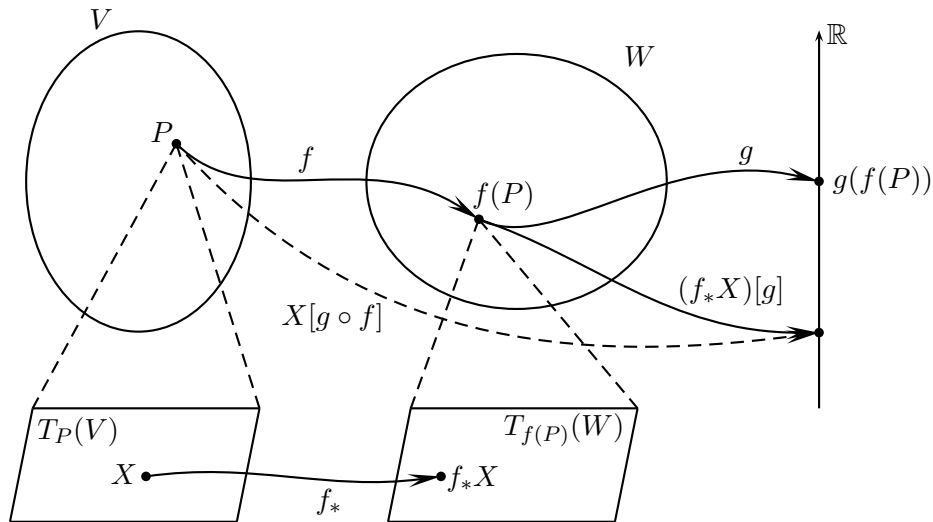


FIGURE 4.2 : f_* pushforward, figure inspirée de [8]

3. Mais la réciproque n'est pas nécessairement vraie.

4. Nous avons évidemment que $g \circ f \in \mathcal{F}(V)$.

où $x = \varphi(P)$ et $y = \psi(f(P))$. Si $X = X^\mu \frac{\partial}{\partial x^\mu}$ et $f_*X = Y^\alpha \frac{\partial}{\partial y^\alpha}$, nous obtenons, en utilisant (4.4),

$$Y^\alpha \frac{\partial}{\partial y^\alpha} [g \circ \psi^{-1}(y)] = X^\mu \frac{\partial}{\partial x^\mu} [g \circ f \circ \varphi^{-1}(x)].$$

De plus, si nous considérons comme champ scalaire g la fonction de coordonnées y^α , nous obtenons la relation suivante entre Y^α et X^μ

$$Y^\alpha = X^\mu \frac{\partial}{\partial x^\mu} y^\alpha(f(P)).$$

Remarque 4.1.1. La matrice $\left(\frac{\partial y^\alpha}{\partial x^\mu}\right)$ est la jacobienne de l'application $f : V \rightarrow W$.

L'application $f : V \rightarrow W$ s'accompagne également d'une application au niveau des espaces cotangents.

Définition 4.1.24 (Application cotangente). L'application cotangente induite par f , application lisse de V dans W qui sont deux variétés différentiables,

$$f^* : T_{f(P)}^*(W) \rightarrow T_P^*(V),$$

où $P \in V$, est définie, pour tout $\omega \in T_{f(P)}^*(W)$ et pour tout $X \in T_P^*(V)$, par

$$\langle f^*\omega, X \rangle = \langle \omega, f_*X \rangle.$$

L'application cotangente induite s'appelle aussi le *pullback*.

Sous-variétés

Nous définissons la notion de sous-variété d'une variété.

Définition 4.1.25 (Sous-variété). Soit une application $f : V \rightarrow W$ qui est $\mathcal{C}^\infty$ et telle que $\dim(V) \leq \dim(W)$. Il y a alors deux possibilités :

1. L'application f est une immersion de V dans W si le pushforward $f_* : T_P(V) \rightarrow T_{f(P)}(W)$ est une injection, i.e. $\dim(\text{Im}(f_*)) = \dim(T_P(V)) = \dim(V)$.
2. L'application f est un plongement si f est une immersion injective. L'image $f(V)$ est alors appelée une sous-variété de W . En pratique, $f(V)$ ainsi défini est donc difféomorphe à V .

4.1.3 Flots et dérivées de Lie

Ces notions sont particulièrement importantes pour la géométrie symplectique.

Flots

Définition 4.1.26 (Courbe intégrale). Soit X un champ vectoriel dans la variété V . Une courbe intégrale $x(t)$ de X est une courbe dans V dont le vecteur tangent au point $x(t)$ est $X|_{x(t)}$. En termes de coordonnées dans la carte locale (U, φ) , cela signifie

$$\frac{dx^\mu(t)}{dt} = X^\mu(x(t)),$$

où $x^\mu(t)$ est la μ -ième composante⁵ de $\varphi(x(t))$ et où le vecteur X est donné via ses composantes par $X = X^\mu \frac{\partial}{\partial x^\mu}$.

5. Attention à l'abus de notation : $x(t)$ est utilisé pour désigner un point de la variété mais aussi pour désigner les coordonnées de ce point $\{x^\mu(t)\} \in \mathbb{R}^n$.

En supposant que le point $x(0)$ se situe dans le voisinage de coordonnées U , trouver la courbe intégrale associée au champ vectoriel X est équivalent à résoudre le problème de Cauchy constitué par le système d'équations différentielles autonome

$$\begin{cases} \frac{dx^\mu(t)}{dt} = X^\mu(x(t)) \\ x^\mu(t=0) = x_0^\mu \end{cases},$$

où la condition initiale correspond aux coordonnées du point situé sur la courbe intégrale en $t = 0$. Par le théorème de Cauchy, nous avons une solution unique pour la représentation de la courbe intégrale, du moins localement, avec la condition initiale x_0^μ .

Nous pouvons à présent définir la notion de flot et donner un théorème important.

Définition 4.1.27 (Flot). Soit $\sigma(t, x_0)$ une courbe intégrale de X qui passe par le point x_0 en $t = 0$ et notons les coordonnées des points de la courbe intégrale par $\sigma^\mu(t, x_0)$ dans une carte donnée. L'application

$$\sigma : \mathbb{R} \times V \rightarrow V$$

est appelée le flot généré par le vecteur $X \in \mathcal{X}(V)$ et constitue une solution du problème de Cauchy suivant

$$\begin{cases} \frac{d}{dt}\sigma^\mu(t, x_0) = X^\mu(\sigma(t, x_0)) \\ \sigma^\mu(0, x_0) = x_0^\mu \end{cases}.$$

Théorème 4.1.2. Pour tout point x dans la variété V , il existe une application différentielle nommée flot $\sigma : \mathbb{R} \times V \rightarrow V$ telle que

1. $\sigma(0, x) = x$;
2. $\sigma(t, x)$ est solution unique du problème de Cauchy

$$\begin{cases} \frac{d}{dt}\sigma^\mu(t, x) = X^\mu(\sigma(t, x)) \\ \sigma(0, x) = x \end{cases} ;$$

3. $\sigma(t, \sigma^\mu(s, x)) = \sigma(t + s, x)$.

Groupes à un paramètre

Nous regardons maintenant la définition d'un groupe, généré à partir d'un flot.

Définition 4.1.28 (Groupe à un paramètre des transformations). Pour un paramètre $t \in \mathbb{R}$ fixé, un flot $\sigma(t, x)$ est un difféomorphisme de V dans V , noté $\sigma_t : V \rightarrow V$. L'ensemble de ces difféomorphismes constitue un groupe, appelé groupe à un paramètre des transformations, une fois muni des conditions suivantes

1. Loi de composition interne : $\sigma_t(\sigma_s(x)) = \sigma_{t+s}(x)$, i.e. $\sigma_t \circ \sigma_s = \sigma_{t+s}$;
2. Existence d'un neutre : σ_0 est l'application identité ;
3. Inversion : $\sigma_{-t} = (\sigma_t)^{-1}$.

Dérivées de Lie

Les flots sont des applications nous permettant de comparer deux champs vectoriels de la variété appartenant à deux espaces tangents différents. Prenons deux flots $\sigma(t, x)$ et $\tau(t, x)$ générés par les champs vectoriels X et Y ,

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}\sigma^\mu(t, x) &= X^\mu(\sigma(t, x)) \\ \frac{d}{dt}\tau^\mu(t, x) &= Y^\mu(\tau(t, x)). \end{aligned}$$

En utilisant la variation du champ vectoriel Y le long du flot $\sigma(t, x)$, nous pouvons définir la dérivée de Lie qui est une opération de dérivée de champ de vecteurs.

Définition 4.1.29 (Dérivée de Lie). La dérivée de Lie d'un champ vectoriel Y le long du flot σ généré par un champ vectoriel X se définit par l'égalité suivante

$$\mathcal{L}_X Y = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{1}{\varepsilon} \left[(\sigma_{-\varepsilon})_* Y|_{\sigma_\varepsilon(P)} - Y|_P \right].$$

De manière équivalente, la dérivée de Lie s'écrit également

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_X Y &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{1}{\varepsilon} \left[Y|_P - (\sigma_\varepsilon)_* Y|_{\sigma_{-\varepsilon}(P)} \right] \\ &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{1}{\varepsilon} \left[Y|_{\sigma_\varepsilon(P)} - (\sigma_\varepsilon)_* Y|_P \right]. \end{aligned}$$

Nous pouvons aussi définir le concept suivant.

Définition 4.1.30 (Crochet de Lie). Le crochet de Lie, noté $[X, Y]$, est le commutateur de deux vecteurs X et Y . En particulier, si $X = X^\mu \partial / \partial x^\mu$ et $Y = Y^\mu \partial / \partial x^\mu \in \mathcal{X}(V)$, le crochet de Lie a l'action suivante sur un champ scalaire $f \in \mathcal{F}(V)$

$$[X, Y](f) = X[Y(f)] - Y[X(f)].$$

Le prochain résultat établit un lien entre la dérivée de Lie et le crochet de Lie.

Théorème 4.1.3. Soient deux champs de vecteurs X et Y dans $\mathcal{X}(V)$. Alors, nous avons la relation suivante

$$\mathcal{L}_X Y = [X, Y].$$

Géométriquement, le crochet de Lie, et donc la dérivée de Lie, représentent le défaut de commutation de deux flots.

Le crochet de Lie et la dérivée de Lie vérifient aussi les propriétés suivantes.

Propriété 4.1.2. Soient X, X_1, X_2, Y, Y_1, Y_2 et $Z \in \mathcal{X}(V)$.

1. *Bilinéarité* : Pour tout $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned} [X, c_1 Y_1 + c_2 Y_2] &= c_1 [X, Y_1] + c_2 [X, Y_2] \\ [c_1 X_1 + c_2 X_2, Y] &= c_1 [X_1, Y] + c_2 [X_2, Y] \end{aligned}$$

2. *Antisymétrie* :

$$[X, Y] = -[Y, X]$$

3. *Identité de Jacobi* :

$$[[X, Y], Z] + [[Z, X], Y] + [[Y, Z], X] = 0$$

4. *Pour tout f champ scalaire,*

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{fX} Y &= f[X, Y] - Y[f]X \\ \mathcal{L}_X(fY) &= f[X, Y] + X[f]Y. \end{aligned}$$

Nous présentons, à présent, la dérivée de Lie d'autres objets tensoriels.

Définition 4.1.31 (Dérivée de Lie d'un-formes). La dérivée de Lie d'une un-forme $\omega \in \Omega^1(V)$ le long d'un champ vectoriel $X \in \mathcal{X}(V)$ est définie par

$$\mathcal{L}_X \omega = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{1}{\varepsilon} \left[(\sigma_\varepsilon)^* \omega|_{\sigma_\varepsilon(P)} - \omega|_P \right],$$

où $\omega|_P \in T_P^*(V)$ est la un-forme ω au point P et $\sigma(t, x)$ est le flot généré par X .

Le théorème suivant nous permet d'obtenir la dérivée de Lie de tout tenseur.

Théorème 4.1.4. *La dérivée de Lie satisfait d'une part*

$$\mathcal{L}_X(t_1 + t_2) = \mathcal{L}_X(t_1) + \mathcal{L}_X(t_2),$$

où t_1 et t_2 sont des champs tensoriels de même type, et la règle de Leibniz d'autre part

$$\mathcal{L}_X(t_1 \otimes t_2) = (\mathcal{L}_X(t_1)) \otimes t_2 + t_1 \otimes (\mathcal{L}_X(t_2)),$$

où t_1 et t_2 sont des champs tensoriels de types arbitraires.

4.2 Variétés symplectiques

Nous donnons une définition de ces variétés avant d'expliquer les éléments principaux de cette notion.

Définition 4.2.1 (Variété symplectique). Une variété symplectique est une variété différentiable⁶ M de classe $\mathcal{C}^\infty$ de dimension m munie d'une 2-forme ω fermée et non-dégénérée. Nous notons la variété symplectique (M, ω) .

Le concept de fermeture est défini à la Définition 4.1.21. Pour celui de non-dégénérescence, nous l'expliquons maintenant⁷.

Définition 4.2.2 (2-forme non-dégénérée). Pour tout $P \in M$, l'application

$$\omega|_P : T_P M \times T_P M \rightarrow \mathbb{R}$$

est non-dégénérée si et seulement si $\omega|_P(X|_P, Y|_P) = 0$, pour tout $Y|_P \in T_P M$, implique que $X|_P = 0$.

Les hypothèses sur ω dans la Définition 4.2.1 expriment le fait que sa restriction à chaque $P \in M$ fait apparaître l'espace tangent $T_P M$ comme un espace vectoriel symplectique (cfr. Définition 3.2.2).

La dimension d'une variété symplectique (M, ω) est obligatoirement paire. Nous notons $m = 2n$. Soyons cependant prudents car cela ne signifie pas pour autant que toute variété de dimension paire soit symplectique. Par exemple, les sphères S^{2n} n'admettent pas de structure symplectique pour $n \geq 2$.

4.2.1 Forme volume de Liouville

Nous nous questionnons maintenant sur le fait que toute variété symplectique soit orientable ou non. Nous définissons premièrement cette notion.

Définition 4.2.3 (Forme volume). Soit M une variété différentiable de dimension m . Une forme volume sur M est une m -forme ν telle que $\nu|_P \neq 0$, pour tout P , point de M .

Définition 4.2.4 (Variété orientable). Soit M une variété différentiable de dimension m . Cette variété est dite orientable s'il existe une forme volume sur M .

La proposition suivante nous donne réponse.

6. En Définition 4.1.1.

7. Nous le définissons dans le cadre des 2-formes utilisées dans ce mémoire.

Proposition 4.2.1. *La 2-forme ω est non-dégénérée sur une variété de dimension $2n$ si et seulement si $\omega^n = \underbrace{\omega \wedge \dots \wedge \omega}_{n \text{ fois}}$ est non-nulle en tout point.*

Toute variété symplectique est donc orientable et nous pouvons définir une forme volume sur notre variété symplectique (M, ω) , donnée par

$$\frac{\omega^n}{n!}$$

et appelée la *forme volume de Liouville*.

4.2.2 Sous-variétés d'une variété symplectique

Dans un souci d'exhaustivité, nous donnons le pendant du formalisme algébrique, en Sous-section 3.4.2.

Définition 4.2.5. Soient (M, ω) une variété symplectique et N une sous-variété⁸ de M . N est une sous-variété isotrope (resp. coïsothrope, resp. lagrangienne, resp. symplectique) si, pour tout $P \in N$, $T_P N$ est un sous-espace vectoriel isotrope (resp. coïsothrope, resp. lagrangien, resp. symplectique) de $(T_P M, \omega|_P)$.

4.3 Exemples de variétés symplectiques

Il est intéressant de regarder certains exemples de variétés symplectiques pour se rendre compte des applications de cette géométrie. Nous nous concentrons sur deux exemples bien connus : $\mathbb{R}^{2n}$ et le fibré cotangent.

Un troisième exemple notoire de variété symplectique nécessite des notions d'algèbre supérieure et n'est pas central pour notre objectif de découverte de la géométrie symplectique. Nous choisissons donc de développer en Annexe B l'exemple de l'orbite coadjointe, ainsi que l'action symplectique, action d'un groupe de Lie sur une variété symplectique par symplectomorphisme, qui utilise des concepts introduits dans cet exemple.

4.3.1 Espace $\mathbb{R}^{2n}$

Considérons $\mathbb{R}^{2n}$ de coordonnées⁹ $(q^1, \dots, q^n, p_1, \dots, p_n)$.

Définition 4.3.1 (Forme standard). La 2-forme symplectique standard sur $\mathbb{R}^{2n}$ est donnée par

$$\omega_0 = dp_1 \wedge dq^1 + dp_2 \wedge dq^2 + \dots + dp_n \wedge dq^n.$$

Vérifions que ω_0 est une 2-forme symplectique.

1. FERMÉE ? Nous pouvons aussi écrire la 2-forme ω_0 sous la forme

$$d \left(\sum_{i=1}^n p_i dq^i \right).$$

Par le théorème 4.1.1, $d\omega_0 = 0$ et ω_0 est donc fermée.

8. En Définition 4.1.25.

9. Nous travaillons avec les notations habituellement utilisées dans les problèmes de physique : q symbolise la position et p l'impulsion.

2. NON-DÉGÉNÉRÉE ? Soit $P \in \mathbb{R}^{2n}$. Dans la base

$$\left\{ \frac{\partial}{\partial q^1} \Big|_P, \dots, \frac{\partial}{\partial q^n} \Big|_P, \frac{\partial}{\partial p_1} \Big|_P, \dots, \frac{\partial}{\partial p_n} \Big|_P \right\}$$

de $T_P(\mathbb{R}^{2n})$, la matrice de $\omega_0|_P$ est donnée par

$$\begin{pmatrix} \omega_0|_P \left(\frac{\partial}{\partial q^i} \Big|_P, \frac{\partial}{\partial q^j} \Big|_P \right) & \omega_0|_P \left(\frac{\partial}{\partial q^i} \Big|_P, \frac{\partial}{\partial p_j} \Big|_P \right) \\ \omega_0|_P \left(\frac{\partial}{\partial p_i} \Big|_P, \frac{\partial}{\partial q^j} \Big|_P \right) & \omega_0|_P \left(\frac{\partial}{\partial p_i} \Big|_P, \frac{\partial}{\partial p_j} \Big|_P \right) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -I_n \\ I_n & 0 \end{pmatrix}.$$

Le déterminant de cette matrice vaut 1, ce qui implique, par la Remarque 3.3.3, que ω_0 est non-dégénérée¹⁰.

Nous avons donc que $(\mathbb{R}^{2n}, \omega_0)$ est une variété symplectique.

Remarque 4.3.1. *Pour cet exemple, la forme volume de Liouville vaut*

$$\frac{\omega_0^n}{n!} = dp_1 \wedge dq^1 \wedge \dots \wedge dp_n \wedge dq^n.$$

4.3.2 Fibré cotangent

L'exemple le plus important de variété symplectique pour les applications physiques est sans nul doute le fibré cotangent. Nous développons cet exemple avant de le relier avec les origines de la géométrie symplectique et avec le formalisme dynamique.

Nous définissons, tout d'abord, le fibré cotangent avant de le munir d'une forme symplectique. Nous partons d'une variété différentiable N de classe $\mathcal{C}^\infty$ et de dimension n . Le fibré cotangent est défini par¹¹

$$T^*N = \bigsqcup_{P \in N} (T_P^*N).$$

Ce fibré cotangent possède la projection canonique suivante

$$\begin{aligned} \pi : T^*N &\rightarrow N \\ \alpha|_P &\mapsto \pi(\alpha|_P) = P, \end{aligned}$$

où $\alpha|_P$ appartient à T_P^*N .

Nous considérons maintenant un atlas

$$\mathcal{A} = \{(U_i, \varphi_i), i \in I\}$$

de N dont les coordonnées dans une carte locale arbitraire¹² (U, φ) sont données par $\{q^1, \dots, q^n\}$. Pour tout $P \in U$, $\{dq^1|_P, \dots, dq^n|_P\}$ est donc une base de T_P^*N .

A partir de $\mathcal{A}$, nous pouvons construire $\mathcal{B}$ un atlas de T^*N défini par

$$\mathcal{B} = \{(\pi^{-1}(U_i), \psi_i), i \in I\},$$

10. Cette matrice est parfois considérée comme la matrice symplectique principale. Pour plus de détails, se reporter au formalisme algébrique.

11. Le symbole $\bigsqcup$ représente l'union disjointe.

12. Nous simplifions les notations : plutôt qu'écrire (U_i, φ_i) , pour i appartenant à I , nous écrivons (U, φ) .

où

$$\begin{aligned} \psi_i : \pi^{-1}(U_i) &\rightarrow \varphi_i(U_i) \times \mathbb{R}^n \\ \alpha|_P &\mapsto \left(\varphi_i(P), p_1(\alpha|_P) = \alpha|_P \left(\frac{\partial}{\partial q^1} \Big|_P \right), \dots, p_n(\alpha|_P) = \alpha|_P \left(\frac{\partial}{\partial q^n} \Big|_P \right) \right) \end{aligned}$$

et

$$\alpha|_P = \sum_{j=1}^n p_j(\alpha|_P) dq^j|_P.$$

Nous remarquons que, par la définition de ψ_i , la dimension de T^*N vaut $2n$. Dans une carte locale $(\pi^{-1}(U), \psi)$, les coordonnées sont données par

$$\{\hat{q}^1, \dots, \hat{q}^n, p_1, \dots, p_n\}, \quad (4.5)$$

où, pour tout $1 \leq j \leq n$, $\hat{q}^j = q^j \circ \pi$ avec π la projection canonique définie plus haut¹³.

A partir de ces notions, nous pouvons définir une un-forme sur T^*N .

Définition 4.3.2 (Un-forme de Liouville). La un-forme de Liouville Θ , définie sur le fibré cotangent T^*N , est donnée par l'expression

$$\Theta|_{\alpha|_P} \left(\Xi|_{\alpha|_P} \right) = \left\langle \alpha|_P, \pi_{*\alpha|_P} \left(\Xi|_{\alpha|_P} \right) \right\rangle,$$

où $P = \pi(\alpha|_P)$, $\alpha|_P \in T_P^*N$, $\Xi|_{\alpha|_P} \in T_{\alpha|_P}(T^*N)$ et $\pi_{*\alpha|_P} \left(\Xi|_{\alpha|_P} \right) \in T_P N$.

Nous avons utilisé dans cette définition le pushforward rappelé à la Définition 1.2.20 et ayant pour expression dans ce cas

$$\pi_{*\alpha|_P} : T_{\alpha|_P}(T^*N) \rightarrow T_P N.$$

Remarque 4.3.2. En utilisant les notations définies plus haut, la matrice du pushforward $\pi_{*\alpha|_P}$ dans les bases

$$\left\{ \frac{\partial}{\partial \hat{q}^1} \Big|_{\alpha|_P}, \dots, \frac{\partial}{\partial \hat{q}^n} \Big|_{\alpha|_P}, \frac{\partial}{\partial p_1} \Big|_{\alpha|_P}, \dots, \frac{\partial}{\partial p_n} \Big|_{\alpha|_P} \right\} \quad (4.6)$$

de $T_{\alpha|_P}(T^*N)$ et

$$\left\{ \frac{\partial}{\partial q^1} \Big|_{\alpha|_P}, \dots, \frac{\partial}{\partial q^n} \Big|_{\alpha|_P} \right\}$$

de $T_P(N)$ est donnée par l'expression suivante¹⁴

$$\left(\pi_{*\alpha|_P} \right)_{ij} = \left(\frac{\partial (\varphi \circ \pi \circ \psi^{-1}) (\tilde{y}^1, \dots, \tilde{y}^{2n})}{\partial \tilde{y}^j} \Big|_{\psi(\alpha|_P)} \right)_{ij}.$$

En effet, par la Remarque 4.1.1, $\left(\pi_{*\alpha|_P} \right)$ est la jacobienne de π .

13. Nous remarquons que $\hat{q}^j$ correspond à une fonction de la un-forme $\alpha|_P$ alors que q^j est une fonction du point P .

14. Nous notons $(\tilde{y}^1, \dots, \tilde{y}^{2n})$ la représentation dans la carte $(\pi^{-1}(U), \psi)$ d'un point de T^*N . Nous remarquons que $\tilde{a}$ représente un point alors que $\hat{a}$ et a représentent des fonctions.

A partir de Θ , nous pouvons définir une forme symplectique

$$\omega = d\Theta$$

et la variété symplectique associée (T^*N, ω) .

Nous écrivons maintenant la un-forme de Liouville Θ et la 2-forme ω dans la carte locale $(\pi^{-1}(U), \psi)$ de T^*N . Avec l'expression des fonctions de coordonnées à l'équation (4.5), nous pouvons écrire en toute généralité

$$\begin{aligned}\Xi|_{\alpha|_P} &= \sum_{j=1}^n \Xi^j(\alpha|_P) \frac{\partial}{\partial \hat{q}^j}|_{\alpha|_P} + \sum_{j=1}^n \Xi'^j(\alpha|_P) \frac{\partial}{\partial p_j}|_{\alpha|_P} \\ \Theta|_{\alpha|_P} &= \sum_{k=1}^n \Theta_k(\alpha|_P) d\hat{q}^k|_{\alpha|_P} + \sum_{k=1}^n \Theta'^k(\alpha|_P) dp_k|_{\alpha|_P}.\end{aligned}$$

Par la Remarque 4.3.2, la matrice du pushforward de la projection canonique est la suivante

$$\left(\pi_{*\alpha}|_P\right) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & & & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & & \ddots & & \vdots & & & \vdots \\ \vdots & & & \ddots & & 0 & & 0 \\ 0 & \dots & \dots & \dots & 1 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}, \quad (4.7)$$

où nous avons utilisé le fait que

$$\varphi \circ \pi \circ \psi^{-1}(\tilde{q}^1, \dots, \tilde{q}^n, \tilde{p}_1, \dots, \tilde{p}_n) = (\tilde{q}^1, \dots, \tilde{q}^n).$$

Nous écrivons maintenant explicitement la un-forme de Liouville dans une carte locale. Par la Définition 4.3.2 et la matrice (4.7), nous avons successivement les relations suivantes

$$\begin{aligned}\Theta|_{\alpha|_P} \left(\Xi|_{\alpha|_P}\right) &= \left\langle \sum_{j=1}^n p_j(\alpha|_P) dq^j|_P, \sum_{j=1}^n \Xi^j(\alpha|_P) \frac{\partial}{\partial q^j}|_P \right\rangle \\ &= \sum_{j=1}^n p_j(\alpha|_P) \Xi^j(\alpha|_P) \\ &= \sum_{j=1}^n p_j(\alpha|_P) d\hat{q}^j|_{\alpha|_P} \left(\Xi|_{\alpha|_P}\right).\end{aligned}$$

Nous pouvons donc définir la un-forme de Liouville en écriture locale.

Définition 4.3.3 (Un-forme de Liouville en coordonnées locales). Localement, la un-forme de Liouville s'écrit sous la forme

$$\Theta = \sum_{j=1}^n p_j d\hat{q}^j.$$

A partir de Θ , nous pouvons définir la 2-forme ω par

$$\omega = d\Theta = \sum_{j=1}^n dp_j \wedge d\hat{q}^j.$$

En effet,

$$\begin{aligned}
 d\Theta &= d\left(\sum_{j=1}^n p_j d\hat{q}^j\right) \\
 &= \sum_{k=1}^n \sum_{j=1}^n \frac{\partial p_j}{\partial p_k} dp_k \wedge d\hat{q}^j + \sum_{k=1}^n \sum_{j=1}^n \frac{\partial p_j}{\partial \hat{q}^k} d\hat{q}^k \wedge d\hat{q}^j \\
 &= \sum_{j=1}^n dp_j \wedge d\hat{q}^j.
 \end{aligned}$$

Nous vérifions maintenant que ω est bien une 2-forme symplectique, c'est-à-dire qu'elle est fermée et non-dégénérée.

1. FERMÉE ? Par le Théorème 4.1.1,

$$d\omega = d(d\Theta) = 0.$$

2. NON-DÉGÉNÉRÉE ? Dans la base de $T_{\alpha|_P}(T^*N)$ donnée par la formule (4.6), la matrice de $\omega_{\alpha|_P}$ est la suivante

$$\begin{pmatrix} \omega_{\alpha|_P} \left(\frac{\partial}{\partial \hat{q}^i} |_{\alpha|_P}, \frac{\partial}{\partial \hat{q}^j} |_{\alpha|_P} \right) & \omega_{\alpha|_P} \left(\frac{\partial}{\partial \hat{q}^i} |_{\alpha|_P}, \frac{\partial}{\partial p_j} |_{\alpha|_P} \right) \\ \omega_{\alpha|_P} \left(\frac{\partial}{\partial p_i} |_{\alpha|_P}, \frac{\partial}{\partial \hat{q}^j} |_{\alpha|_P} \right) & \omega_{\alpha|_P} \left(\frac{\partial}{\partial p_i} |_{\alpha|_P}, \frac{\partial}{\partial p_j} |_{\alpha|_P} \right) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -I_n \\ I_n & 0 \end{pmatrix}.$$

Nous retrouvons la même matrice que lors du premier exemple. Nous avons donc que ω est non-dégénérée.

Nous pouvons conclure que (T^*N, ω) est bien une variété symplectique.

Espace des phases

L'espace des phases défini pour le formalisme lagrangien, en Définition 2.1.2, représente en réalité le fibré tangent¹⁵ de la variété de configuration $(q^1, \dots, q^n)$ d'un système mécanique. La question ne s'était pas posée dans le Chapitre 2 puisque, sur des espaces vectoriels réels, la dynamique est relativement simple, les vecteurs de vitesse étant similaires aux vecteurs de position. Sur les variétés différentiables, cependant, les vecteurs doivent être discutés à l'aide d'espaces tangents.

Une des utilités de travailler avec le formalisme hamiltonien est de passer de l'espace des phases lagrangien à une nouvelle représentation de l'espace des phases plus facile à étudier¹⁶.

Définition 4.3.4 (Espace des phases hamiltonien). L'ensemble composé des position et impulsion d'un système mécanique, soit l'ensemble $(q^1, \dots, q^n, p_1, \dots, p_n)$ de dimension $2n$, est appelé espace des phases.

Cet espace des phases a la caractéristique de former le fibré cotangent de l'espace de configuration du système.

15. La définition du fibré tangent est analogue à celle du fibré cotangent. Il s'agit de l'espace $TN = \bigsqcup_{P \in N} (T_P N)$.

16. Sans perdre aucune information puisque les équations hamiltoniennes sont construites à partir des équations lagrangiennes.

Remarque 4.3.3. Dans le cas du pendule simple, en Figure 2.1, l'espace des phases hamiltonien est similaire à l'espace des phases lagrangien à une dilatation près¹⁷.

La transformation de Legendre en Définition 2.2.1 nous permet de passer du fibré tangent au fibré cotangent

$$\begin{aligned} TN &\rightarrow T^*N \\ (q, \dot{q}) &\mapsto (q, p), \end{aligned}$$

grâce à l'équation (2.2). La fonction de Lagrange, en Définition 2.1.1, sur TN est remplacée par la fonction d'Hamilton, en Définition 2.2.2, sur le fibré cotangent T^*N . Ce passage confère à l'espace des phases une structure de variété symplectique. Avec toute la richesse d'étude de ces variétés spécifiques, l'analyse des espaces des phases hamiltoniens est plus aisée.

Les équations hamiltoniennes (2.4) forment un système d'équations différentielles ordinaires qui, un ensemble de conditions initiales étant donné, définit une courbe unique sur l'espace des phases T^*N dont la projection sur l'espace de configuration N résout le problème mécanique en donnant les trajectoires physiques $q(t)$.

Nous pouvons aussi faire le lien avec le Chapitre 1 concernant les origines de la géométrie symplectique. En effet, Lagrange a étudié l'espace des mouvements képlériens, en Définition 1.2.2, qui est l'espace des phases du problème des mouvements des planètes du système solaire. Cette variété est naturellement munie d'une structure symplectique qui, comme nous l'avons vu, permet de décrire les perturbations que subissent les planètes.

4.4 Champs de vecteurs hamiltoniens

Nous étudions, dans cette sous-section, les champs de vecteurs hamiltoniens, associés à des fonctions $\mathcal{C}^\infty(M, \mathbb{R})$. Cette notion a déjà été abordée dans les deux premiers formalismes, en Définitions 2.3.3 et 3.5.5. Maintenant, nous les développons dans le cadre général d'une variété symplectique (M, ω) .

Nous donnons premièrement la définition, dans ce formalisme, du produit interne introduit dans le formalisme algébrique à la Définition 3.2.3. Attention cependant au fait que le produit interne défini ici possède le même nom que celui présenté à la Définition 4.1.12 des rappels de géométrie différentielle. En effet, il s'agit du même objet lorsque nous travaillons avec des un-formes. Cette définition-ci est plus générale car elle tient compte de toutes les r -formes, où $r \in \mathbb{N}$.

Définition 4.4.1 (Produit interne i). Le produit interne, noté i , est défini par

$$\begin{aligned} i : \mathcal{X}(M) \times \Omega^r(M) &\rightarrow \Omega^{r-1}(M) \\ (X, \alpha) &\mapsto i(X)\alpha, \end{aligned}$$

où $i(X)\alpha$ est la fonction linéaire donnée par

$$(i(X)\alpha)(X_1, \dots, X_{r-1}) = \alpha(X, X_1, \dots, X_{r-1}).$$

Nous pouvons maintenant utiliser cette définition sans restriction dans la suite de ce mémoire.

17. L'énergie cinétique du pendule simple est donnée par $\frac{1}{2}ml^2\dot{q}^2$ et son énergie potentielle par $mgl(1 - \cos q)$. Donc, $p = ml^2\dot{q}$.

Comme nous l'avons vu dans le formalisme algébrique à la Proposition 3.2.2, la 2-forme symplectique

$$\omega|_P : T_P M \times T_P M \rightarrow \mathbb{R},$$

pour $P \in M$, est non-dégénérée si et seulement si l'isomorphisme induit $\omega|_P^b$ par $\omega|_P$ entre $T_P M$ et $T_P^* M$

$$\begin{aligned} T_P M &\rightarrow T_P^* M \\ X|_P &\mapsto i(X|_P) \omega|_P = \omega|_P(X|_P, \cdot) \end{aligned}$$

est un isomorphisme linéaire.

De plus, la différentielle df de la fonction $f \in \mathcal{C}^\infty(M, \mathbb{R})$ est une 1-forme sur M et, pour $P \in M$,

$$\begin{aligned} df|_P : T_P M &\rightarrow \mathbb{R} \\ X|_P &\mapsto df|_P(X|_P) := X|_P(f), \end{aligned}$$

où $X|_P(f)$ est la dérivée directionnelle de f .

Définition 4.4.2 (Champ hamiltonien). Soit f une fonction $\mathcal{C}^\infty$ sur (M, ω) , une variété symplectique. Il existe un seul¹⁸ champ de vecteurs $X \in \mathcal{X}(M)$ sur M , noté X_f et appelé champ hamiltonien associé à f , défini par

$$i(X_f)\omega = df.$$

Nous notons $ham(M, \omega) = \{X_f \mid f \in \mathcal{C}^\infty(M, \mathbb{R})\}$ et la fonction f est appelée fonction hamiltonienne.

EXEMPLE

Nous calculons le champ hamiltonien associé à une fonction f dans le cas de $\mathbb{R}^{2n}$ présenté à la Sous-section 4.3.1. Nous prenons

$$\omega_0 = \sum_{i=1}^n (dp_i \otimes dq^i - dq^i \otimes dp_i).$$

La différentielle de f est donnée par¹⁹

$$df = \sum_{i=1}^n (\partial_{q^i} f dq^i + \partial_{p_i} f dp_i). \quad (4.8)$$

En utilisant l'équation (4.1) de la définition du produit interne, nous pouvons calculer

$$\begin{aligned} \omega_0(\partial_{p_k}, \cdot) &= \sum_{i=1}^n (\langle \partial_{p_k}, dp_i \rangle dq^i - \langle \partial_{p_k}, dq^i \rangle dp_i) = dq^k \\ \text{et } \omega_0(\partial_{q^l}, \cdot) &= \sum_{i=1}^n (\langle \partial_{q^l}, dp_i \rangle dq^i - \langle \partial_{q^l}, dq^i \rangle dp_i) = -dp_l. \end{aligned}$$

Prenons $X_f = \sum_{i=1}^n (\alpha_i \partial_{q^i} + \beta_i \partial_{p_i})$. Alors, en utilisant les deux équations précédentes, nous obtenons

$$\omega_0(X_f, \cdot) = \sum_{i=1}^n (\alpha_i (-dp_i) + \beta_i dq^i). \quad (4.9)$$

18. L'unicité vient de la non-dégénérescence de ω .

19. Nous utilisons la notation simplifiée $\partial_{q^i} f$ pour $\frac{\partial f}{\partial q^i}$.

Par la définition de champ hamiltonien, nous égalons les équations (4.8) et (4.9) pour trouver les constantes suivantes

$$\begin{aligned}\alpha_i &= -\partial_{p_i} f \\ \beta_i &= \partial_{q^i} f.\end{aligned}$$

Nous pouvons finalement écrire le champ hamiltonien associé à f , donné par l'équation

$$X_f = \sum_{i=1}^n (\partial_{q^i} f \partial_{p_i} - \partial_{p_i} f \partial_{q^i}). \quad (4.10)$$

Nous introduisons une formule très utile par la suite concernant la dérivée de Lie définie en Sous-section 4.1.3. La *formule de Cartan* permet de définir la dérivée de Lie de formes différentielles, plus aisément que le Théorème 4.1.4.

Définition 4.4.3 (Formule de Cartan). La dérivée de Lie est une application définie par

$$\begin{aligned}\mathcal{L}_X : \Omega^r(M) &\rightarrow \Omega^r(M) \\ \alpha &\mapsto \mathcal{L}_X \alpha := (d \circ i(X) + i(X) \circ d)(\alpha),\end{aligned}$$

où $X \in \mathcal{X}(M)$ et $r \in \mathbb{N}$.

Avec cette définition, nous pouvons énoncer une remarque concernant les champs hamiltoniens. En effet, une fonction peut être vue comme une 0-forme.

Remarque 4.4.1. Si X_f est hamiltonien, alors

$$\mathcal{L}_{X_f} f = i(X_f)df = i(X_f)i(X_f)\omega = 0$$

et

$$\mathcal{L}_{X_f}\omega = 0.$$

Nous pouvons terminer cette section en notant que les équations hamiltoniennes, en équation (2.4), peuvent s'écrire à l'aide des champs de vecteurs hamiltoniens.

Proposition 4.4.1. Les équations hamiltoniennes relatives à l'hamiltonien $\mathcal{H} \in \mathcal{F}(M)$ correspondent au flot $\Phi_{-X_{\mathcal{H}}}$ généré par le champ de vecteurs hamiltonien $-X_{\mathcal{H}}$.

Preuve

Considérons une courbe sur la variété symplectique M , donnée par

$$c(t) = (q(t), p(t)) = (q^1(t), \dots, q^m(t), p_1(t), \dots, p_m(t)).$$

Le flot de $X_{\mathcal{H}}$ est constitué de l'ensemble des courbes intégrales²⁰ de $X_{\mathcal{H}}$, i.e.

$$\dot{c}(t) = X_{\mathcal{H}}(c(t)).$$

Nous pouvons calculer $X_{\mathcal{H}}(c(t))$,

$$\begin{aligned}X_{\mathcal{H}}(c(t)) &= \sum_{i=1}^m \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial q^i} \Big|_{c(t)} \frac{\partial}{\partial p_i} \Big|_{c(t)} - \sum_{j=1}^m \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial p_j} \Big|_{c(t)} \frac{\partial}{\partial q^j} \Big|_{c(t)} \\ &= \left(-\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial p_1} \Big|_{c(t)}, \dots, -\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial p_m} \Big|_{c(t)}, \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial q^1} \Big|_{c(t)}, \dots, \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial q^m} \Big|_{c(t)} \right).\end{aligned}$$

20. Comme expliqué à la Définition 4.1.27.

Nous obtenons finalement

$$\begin{cases} \dot{q}^i(t) = -\frac{\partial H}{\partial p_i} \Big|_{c(t)} \\ \dot{p}_j(t) = \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial q^j} \Big|_{c(t)} \end{cases} \quad \forall i, j = 1, \dots, m.$$

Il suffit de changer les signes afin de vérifier que le flot de $-X_{\mathcal{H}}$ est bien donné par les équations hamiltoniennes.

□

4.5 Crochets de Poisson

Nous abordons un sujet bien connu de la géométrie symplectique dans les cours de l'enseignement universitaire : les crochets de Poisson. Cette notion est abordée dans le cours SMATB307, en Sous-section 2.3.5 de ce mémoire, dans le cadre d'une variété symplectique réelle de dimension paire.

Définition 4.5.1 (Crochet de Poisson). Soit (M, ω) une variété symplectique. Nous définissons le crochet de Poisson²¹

$$\begin{aligned} \{\cdot, \cdot\} : \mathcal{C}^\infty(M, \mathbb{R}) \times \mathcal{C}^\infty(M, \mathbb{R}) &\rightarrow \mathcal{C}^\infty(M, \mathbb{R}) \\ (f, g) &\mapsto \{f, g\} := -\omega(X_f, X_g), \end{aligned}$$

où $i(X_f)\omega = df$ et $i(X_g)\omega = dg$.

Nous avons aussi comme relation, en utilisant la Définition 4.4.2,

$$\{f, g\} = -\omega(X_f, X_g) = -df(X_g) = -X_g(f) = X_f(g). \quad (4.11)$$

EXEMPLE

Nous calculons l'expression locale du crochet de Poisson en coordonnées canoniques dans le cas de $\mathbb{R}^{2n}$ présenté à la Sous-section 4.3.1. Grâce au champ hamiltonien calculé précédemment et donné en équation (4.10), nous avons

$$\{f, g\} = X_f(g) = \sum_{i=1}^n (\partial_{q^i} f \partial_{p_i} g - \partial_{p_i} f \partial_{q^i} g).$$

Nous obtenons exactement la même expression que l'équation (2.11), présentée au cours SMATB307.

Théorème 4.5.1. Pour $f, g \in \mathcal{C}^\infty(M, \mathbb{R})$, $\{f, g\} = \mathcal{L}_{X_f}g = -\mathcal{L}_{X_g}f$.

Preuve Soient f et $g \in \mathcal{C}^\infty(M, \mathbb{R})$. Nous avons les relations suivantes, successivement par les Définitions 4.4.3 et 4.4.1²² ainsi que par les relations (4.11),

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{X_f}g &= (d \circ i(X_f) + i(X_f) \circ d)g \\ &= d(i(X_f)g) + i(X_f)dg \\ &= dg(X_f) \\ &= X_f(g) \\ &= \{f, g\}. \end{aligned}$$

21. Certains ouvrages considèrent une définition du crochet de Poisson avec un signe inverse. Ceux-ci prennent ω comme la 2-forme $dq^i \wedge dp_i$. Nous travaillons avec la convention énoncée afin d'obtenir la même expression que celle du cours [20], et des livres étudiés, dans le cas de $\mathbb{R}^{2n}$.

22. Soient $X \in \mathcal{X}(M)$ et $g \in \mathcal{C}^\infty(M)$, $i(X)g = 0$ car une -1 -forme n'existe pas.

La deuxième égalité résulte de l'antisymétrie de ω , et donc du crochet de Poisson, comme montré plus bas à la Propriété 4.5.1.

□

Corollaire 4.5.1. *Les propositions suivantes sont équivalentes. Soient $f, g \in \mathcal{C}^\infty(M, \mathbb{R})$.*

- i. *f est constante le long des courbes intégrales de X_g ;*
- ii. *g est constante le long des courbes intégrales de X_f ;*
- iii. *$\{f, g\} = 0$.*

Intuitivement, la dérivée de Lie $\mathcal{L}_{X_f}g$ représente la variation de g le long des courbes intégrales de X_f . Si cette variation est nulle, alors g est constante le long des courbes intégrales de X_f .

Nous donnons deux propriétés en lien avec l'algèbre de Lie, en Définition 3.5.1.

Propriété 4.5.1. (i) *Le crochet $\{\cdot, \cdot\}$ définit une structure d'algèbre de Lie sur $\mathcal{C}^\infty(M, \mathbb{R})$.*

(ii) *L'application*

$$\begin{aligned} \mathcal{C}^\infty(M, \mathbb{R}) &\rightarrow \mathcal{X}(M) \\ f &\mapsto X_f \end{aligned}$$

est un morphisme d'algèbre de Lie, i.e. elle est linéaire

$$X_{f+f'} = X_f + X_{f'} \text{ et } X_{af} = aX_f, \forall f, f' \in \mathcal{C}^\infty(M, \mathbb{R}), \forall a \in \mathbb{R}$$

et nous avons la relation

$$X_{\{f, g\}} = [X_f, X_g]. \quad (4.12)$$

Preuve

La preuve du point (i) est réalisée lors de la Proposition 4.5.1.

Pour le point (ii), nous montrons les trois éléments demandés.

Soient $f, f', g \in \mathcal{C}^\infty(M, \mathbb{R})$ et $a \in \mathbb{R}$.

1. En utilisant la Définition 4.4.2 de champ hamiltonien, nous avons que

$$\begin{aligned} i(X_{f+f'})\omega &= d(f+f') \\ &= df + df' \\ &= i(X_f)\omega + i(X_{f'})\omega \\ &= i(X_f + X_{f'})\omega. \end{aligned}$$

En effet, la dérivée extérieure d est linéaire et ω est bilinéaire.

2. Par les mêmes justifications, nous avons les égalités suivantes

$$\begin{aligned} i(X_{af})\omega &= d(af) \\ &= adf \\ &= a i(X_f)\omega \\ &= i(aX_f)\omega. \end{aligned}$$

3. Nous montrons que

$$i([X_f, X_g])\omega = d\{f, g\}.$$

Or, une formule propre à la dérivée de Lie énonce le fait que, pour toute forme α ,

$$i([X, Y])\alpha = \mathcal{L}_X i(Y)\alpha - i(Y)\mathcal{L}_X \alpha = [\mathcal{L}_X, i(Y)]\alpha. \quad (4.13)$$

Nous calculons les deux relations suivantes

$$\begin{aligned}
 \mathcal{L}_{X_f}\omega &= \underbrace{d i(X_f)\omega}_{= df} + \underbrace{i(X_f) d\omega}_{= 0} \\
 &= 0 \\
 \text{et } d \circ \mathcal{L}_X &= d \circ i(X) \circ d + d \circ d \circ i(X) \\
 &= \mathcal{L}_X \circ d.
 \end{aligned}$$

Donc, par les relations précédentes, par la Définition 4.4.1 et par les égalités (4.11), nous obtenons

$$\begin{aligned}
 i([X_f, X_g])\omega &= \mathcal{L}_{X_f}i(X_g)\omega - i(X_g)\mathcal{L}_{X_f}\omega \\
 &= \mathcal{L}_{X_f}i(X_g)\omega \\
 &= \mathcal{L}_{X_f}dg \\
 &= d(\mathcal{L}_{X_f}g) \\
 &= d\left(i(X_f)dg + \underbrace{d i(X_f)g}_{= 0}\right) \\
 &= d(dg(X_f)) \\
 &= dX_f(g) \\
 &= d\{f, g\}.
 \end{aligned}$$

□

Après les variétés symplectiques, d'autres variétés $\mathcal{C}^\infty$ peuvent être munies d'un crochet de Poisson.

Définition 4.5.2 (Structure de Poisson). Une variété différentiable $\mathcal{C}^\infty$, notée M , est munie d'une structure de Poisson s'il existe une application, appelée crochet,

$$\{\cdot, \cdot\} : \mathcal{C}^\infty(M, \mathbb{R}) \times \mathcal{C}^\infty(M, \mathbb{R}) \rightarrow \mathcal{C}^\infty(M, \mathbb{R}) \text{ bilinéaire}$$

vérifiant les propriétés suivantes²³

- antisymétrie : $\{f, g\} = -\{g, f\}$
- identité de Jacobi²⁴ : $\bigoplus_{fgh} \{f, \{g, h\}\} = 0 \quad \forall f, g, h \in \mathcal{C}^\infty(M, \mathbb{R}).$
- règle de Leibniz : $\{f, gh\} = \{f, g\}h + g\{f, h\}$

Proposition 4.5.1. Si (M, ω) est une variété symplectique, elle est munie d'une structure de Poisson donnée par

$$\{f, g\} = -\omega(X_f, X_g) \text{ avec } i(X_f)\omega = df \text{ et } i(X_g)\omega = dg.$$

Preuve

Soient f et $g \in \mathcal{C}^\infty(M, \mathbb{R})$. Montrons les trois conditions nécessaires à l'existence d'une structure de Poisson.

- ANTISYMMÉTRIE. Nous avons successivement

$$\begin{aligned}
 \{f, g\} &= -\omega(X_f, X_g) \\
 &= \omega(X_g, X_f) \\
 &= -\{g, f\}.
 \end{aligned}$$

23. Les deux premières conditions définissent une algèbre de Lie.

24. La notation $\bigoplus_{fgh}$ représente la somme cyclique sur f, g, h .

- IDENTITÉ DE JACOBI. Pour démontrer cette identité, nous introduisons une propriété des formes $\mathcal{C}^\infty$.

Propriété 4.5.2. *Si $\omega \in \Omega^2(M)$ et $A, B, C \in \mathcal{X}(M)$, nous avons la formule suivante*

$$(d\omega)(A, B, C) = \bigoplus_{ABC}^{\curvearrowright} A(\omega(B, C)) - \bigoplus_{ABC}^{\curvearrowright} \omega([A, B], C).$$

En utilisant les relations (4.11), la Propriété 4.5.2 et l'équation (4.12), nous obtenons

$$\begin{aligned} \bigoplus_{fgh}^{\curvearrowright} \{f, \{g, h\}\} &= - \bigoplus_{fgh}^{\curvearrowright} X_f(\omega(X_g, X_h)) \\ &= -d\omega(X_f, X_g, X_h) - \bigoplus_{fgh}^{\curvearrowright} \omega([X_f, X_g], X_h) \\ &= - \bigoplus_{fgh}^{\curvearrowright} \omega(X_{\{f, g\}}, X_h) \\ &= \bigoplus_{fgh}^{\curvearrowright} \{\{f, g\}, h\} \\ &= - \bigoplus_{fgh}^{\curvearrowright} \{h, \{f, g\}\} \\ &= - \bigoplus_{fgh}^{\curvearrowright} \{f, \{g, h\}\}. \end{aligned}$$

L'utilisation d'une somme cyclique nous permet la dernière égalité. L'identité de Jacobi est donc vérifiée.

- RÈGLE DE LEIBNIZ. Nous devons montrer que $\{f, \cdot\}$ vérifie la règle de Leibniz. Par la dernière égalité des relations (4.11), nous observons que

$$\{f, \cdot\} = X_f(\cdot).$$

Or, par la Propriété 4.1.1, nous savons que les champs vectoriels vérifient la règle de Leibniz. Ce qui clôture la démonstration.

□

4.6 Symplectomorphismes et transformations canoniques

Nous pouvons donner le pendant en formalisme différentiel du symplectomorphisme algébrique présenté en Définition 3.3.2.

Définition 4.6.1 (Symplectomorphisme). Soient (M_1, ω_1) et (M_2, ω_2) des variétés symplectiques et soit $\psi : M_1 \rightarrow M_2$ un difféomorphisme. Alors ψ est un symplectomorphisme si $\psi^*\omega_2 = \omega_1$.

Pour rappel, le pullback est défini dans ce cas par

$$\omega_1|_P(X, Y) = \omega_2|_{\psi(P)}(\psi_*|_P X, \psi_*|_P Y), \quad \forall P \in M, \quad \forall X, Y \in T_P M.$$

Comme dit implicitement dans la Définition 4.6.1, les deux variétés symplectiques concernées doivent forcément être de même dimension. En effet, ψ étant un difféomorphisme entre les deux,

elles possèdent donc la même dimension.

Le théorème suivant énonce le fait que la dimension est le seul invariant local des variétés symplectiques par rapport aux symplectomorphismes. Comme toute variété de dimension n ressemble localement à $\mathbb{R}^n$, toute variété symplectique de dimension $2n$ ressemble localement à $(\mathbb{R}^{2n}, \omega_0)$ ²⁵. Autrement dit, toute variété symplectique (M, ω) de dimension $2n$ est localement symplectomorphe à $(\mathbb{R}^{2n}, \omega_0)$.

Théorème 4.6.1 (Théorème de Darboux). *Soit (M, ω) une variété symplectique de dimension $2n$ et soit P un point de M . Alors, il existe un voisinage ouvert U de P dans M et des coordonnées locales $\{q^1, \dots, q^n, p_1, \dots, p_n\}$ sur U tels que*

$$\omega|_U = \sum_{i=1}^n dp_i \wedge dq^i.$$

En effet, nous avons vu en Section 4.3 que la forme symplectique en coordonnées locales de $\mathbb{R}^{2n}$ et celle du fibré cotangent d'une variété symplectique de dimension $2n$ sont symplectomorphes.

Nous pouvons définir un autre type de transformation : la transformation canonique.

Définition 4.6.2 (Transformation canonique). Soient (M_1, ω_1) et (M_2, ω_2) deux variétés symplectiques possédant respectivement les crochets de Poisson $\{\cdot, \cdot\}^{\omega_1}$ et $\{\cdot, \cdot\}^{\omega_2}$. Le difféomorphisme $\psi : M_1 \rightarrow M_2$ est une transformation canonique si et seulement si

$$\{f \circ \psi, g \circ \psi\}^{\omega_1} = \{f, g\}^{\omega_2} \circ \psi, \quad \forall f, g \in \mathcal{C}^\infty(M_2).$$

Autrement dit, une transformation canonique préserve les crochets de Poisson.

Cette transformation a déjà été vue dans le formalisme dynamique, en Définition 2.3.5. Dans ce cadre, nous l'avons définie grâce à la matrice jacobienne de la transformation de coordonnées et avons utilisé les crochets de Poisson afin de caractériser ces transformations.

Les deux transformations définies en 4.6.1 et 4.6.2 sont équivalentes par le Théorème suivant.

Théorème 4.6.2. *Soient (M_1, ω_1) et (M_2, ω_2) deux variétés symplectiques de même dimension. L'application $\psi : M_1 \rightarrow M_2$ est un symplectomorphisme si et seulement si $\psi : M_1 \rightarrow M_2$ est une transformation canonique.*

4.7 Champs de vecteurs symplectiques

Nous pouvons aussi définir d'autres vecteurs spécifiques à la géométrie symplectique.

Définition 4.7.1 (Champ de vecteurs symplectique). Un champ de vecteurs $X \in \mathcal{X}(M)$ sur une variété symplectique (M, ω) est dit symplectique si et seulement si $i(X)\omega$ est fermée ou si et seulement si $\mathcal{L}_X\omega = 0$. Nous notons $\text{symp}(M, \omega) = \{X \in \mathcal{X}(M) \mid d(i(X)\omega) = 0\}$.

En effet, les deux conditions sont équivalentes par la formule de Cartan en Définition 4.4.3 :

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_X\omega = 0 &\Leftrightarrow (i(X)d + di(X))\omega = 0 \\ &\Leftrightarrow d(i(X)\omega) = 0 \\ &\Leftrightarrow i(X)\omega \text{ est fermée.} \end{aligned}$$

25. Voir l'exemple en Sous-section 4.3.1 pour le rappel de ω_0 .

Proposition 4.7.1. *Un champ de vecteurs X sur une variété symplectique (M, ω) engendre un groupe à un paramètre de difféomorphismes qui sont des symplectomorphismes si et seulement si $i(X)\omega$ est une un-forme fermée sur M .*

En d'autres termes, X est un champ de vecteurs symplectique si et seulement si

$$(\Phi_X^t)^* \omega = \omega,$$

pour tout t réel, où Φ_X est le flot généré par X , i.e. si et seulement si le flot Φ_X^t généré par X , pour tout t , consiste en des symplectomorphismes.

4.7.1 Liens avec les champs hamiltoniens

Dans cette sous-section, nous lions les champs de vecteurs symplectiques aux champs de vecteurs hamiltoniens.

Propriété 4.7.1. *Soit (M, ω) une variété symplectique. Nous avons l'inclusion suivante*

$$\text{ham}(M, \omega) \subseteq \text{symp}(M, \omega).$$

En effet, comme vu avec le Théorème 4.1.1, toute forme exacte est fermée.

Remarque 4.7.1. *Nous avons la relation*

$$\text{symp}(M, \omega) / \text{ham}(M, \omega) \cong \{1\text{-formes fermées}\} / \{1\text{-formes exactes}\}.$$

En particulier, sur tout ouvert de $\mathbb{R}^{2n}$, $\text{ham}(M, \omega) = \text{symp}(M, \omega)$.

Proposition 4.7.2. *Si X et Y sont des champs de vecteurs symplectiques sur une variété symplectique (M, ω) , alors le crochet $[X, Y]$ est hamiltonien avec la fonction hamiltonienne $\omega(X, Y)$.*

Preuve En utilisant la formule (4.13), celle de Cartan en Définition 4.4.3 et les hypothèses de la Proposition, nous obtenons

$$\begin{aligned} i([X, Y])\omega &= \mathcal{L}_X i(Y)\omega - i(Y)\mathcal{L}_X \omega \\ &= di(X)i(Y)\omega + i(X) \underbrace{di(Y)\omega}_{=0} - i(Y) \underbrace{di(X)\omega}_{=0} - i(Y)i(X) \underbrace{d\omega}_{=0} \\ &= d(\omega(X, Y)). \end{aligned}$$

□

En résumé, les champs de vecteurs sur une variété symplectique (M, ω) qui préservent ω sont appelés symplectiques. Les propositions suivantes sont équivalentes :

- X est un champ de vecteurs symplectique ;
- le flot Φ_X généré par X préserve ω , i.e. $(\Phi_X^t)^* \omega = \omega, \forall t \in \mathbb{R}$;
- $\mathcal{L}_X \omega = 0$;
- $i(X)\omega$ est fermée.

Par contre, un champ de vecteurs hamiltonien est un champ de vecteurs X tel que

- $i(X)\omega$ est exacte, i.e. $i(X)\omega = df$ pour $f \in \mathcal{C}^\infty(M, \mathbb{R})$.

Une primitive f de $i(X)\omega$ est appelée une fonction hamiltonienne de X .

4.7.2 Théorème de Liouville différentiel

Dans cette partie, nous construisons l'équivalent du Théorème 2.2.2 de Liouville développé dans le formalisme dynamique.

Théorème 4.7.1 (Théorème de Liouville différentiel). *Soit (M, ω) une variété symplectique. Le flot généré par un champ de vecteurs hamiltonien conserve la forme volume de Liouville $\frac{\omega^n}{n!}$.*

Preuve

Soit (M, ω) une variété symplectique.

La Proposition 4.7.1 nous affirme que le flot généré par un champ de vecteurs symplectique forme un ensemble de symplectomorphismes. En particulier, par la Propriété 4.7.1, le flot d'un champ de vecteurs hamiltonien constitue également un ensemble de symplectomorphismes.

Prenons X un champ de vecteurs hamiltonien et Φ_X le flot associé.

Nous avons donc, pour tout t réel, que $\Phi_X^t : M \rightarrow M$ est un symplectomorphisme. Autrement dit, la 2-forme symplectique ω est conservée par Φ_X . Alors, par propriété du produit extérieur et du pullback²⁶ ainsi que par linéarité du pullback, la forme volume de Liouville est également conservée par ce flot :

$$\begin{aligned} (\Phi_X^t)^* \left(\frac{\omega^n}{n!} \right) &= \frac{1}{n!} (\Phi_X^t)^* (\omega \wedge \dots \wedge \omega) \\ &= \frac{1}{n!} [((\Phi_X^t)^* \omega) \wedge \dots \wedge ((\Phi_X^t)^* \omega)] \\ &= \frac{1}{n!} (\omega \wedge \dots \wedge \omega) \\ &= \frac{\omega^n}{n!}, \quad \forall t. \end{aligned}$$

□

4.8 Variétés presque complexes

Suite à la Section 3.6 du formalisme algébrique traitant des structures complexes sur des espaces symplectiques réels, nous généralisons cette notion aux variétés presque complexes. En géométrie différentielle, une structure presque complexe ressemble à une structure complexe mais remplit, de plus, des conditions de régularité.

Définition 4.8.1 (Structure presque complexe). Une structure presque complexe sur une variété M est un champ différentiable²⁷ de structures complexes sur les espaces tangents

$$P \mapsto J_P : T_P M \rightarrow T_P M$$

où J_P est linéaire et telle que $J_P^2 = -I$. (M, J) est appelée une variété presque complexe.

Définition 4.8.2 (Structure presque complexe compatible). Soit (M, ω) une variété symplectique. Une structure presque complexe J sur M est dite compatible (avec ω) si le champ

$$\begin{aligned} P \mapsto g|_P : T_P M \times T_P M &\rightarrow \mathbb{R} \\ (X, Y) &\mapsto g|_P(X, Y) := \omega|_P(X, J_P Y) \end{aligned}$$

26. Prenons M et N deux variétés différentiables, respectivement de dimensions m et n . Soient $\varphi : M \rightarrow N$ un difféomorphisme, $\alpha \in \Omega^p(M)$ et $\beta \in \Omega^q(N)$ (pour $1 \leq p, q \leq m$). Alors $\varphi^*(\alpha \wedge \beta) = (\varphi^*\alpha) \wedge (\varphi^*\beta)$. Cette propriété est issue de [13].

27. Le caractère différentiable de ce champ signifie qu'il existe une certaine condition de régularité dans le passage des coordonnées d'un point P à l'application J_P correspondante. Nous ne développons pas cette notion davantage dans le cadre du mémoire.

est une métrique riemannienne²⁸ sur M .

Si nous récapitulons, nous avons trois structures différentes possibles sur une variété M .

- ω , une forme symplectique : $P \mapsto \omega|_P : T_P M \times T_P M \rightarrow \mathbb{R}$
bilinéaire, antisymétrique et non-dégénérée ;
- g , une métrique riemannienne : $P \mapsto g|_P : T_P M \times T_P M \rightarrow \mathbb{R}$
produit scalaire ;
- J , une structure presque complexe : $P \mapsto J_P : T_P M \times T_P M \rightarrow \mathbb{R}$
linéaire telle que $J_P^2 = -I$.

Le triplet (ω, g, J) , quand il existe, est dit compatible si $g(\cdot, \cdot) = \omega(\cdot, J\cdot)$.

Proposition 4.8.1. *Soient (M, ω) une variété symplectique et g une métrique riemannienne sur M . Alors, il existe une structure presque complexe J sur M qui est compatible.*

En général, la métrique riemannienne $g_J(\cdot, \cdot) := \omega(\cdot, J\cdot)$ est différente de g .

Corollaire 4.8.1. *Toute variété symplectique possède une structure complexe compatible.*

En effet, toute variété possède une métrique riemannienne. Le contraire de ce corollaire est faux, toute variété presque complexe ne possède pas nécessairement de structure symplectique.

4.9 Identification des concepts équivalents

De la même manière que pour le chapitre précédent, nous listons les différents concepts pouvant être mis en parallèle dans les trois formalismes développés. Concernant ces liens, certaines notions évoquées dans ce chapitre sont présentes dans les deux autres axes proposés, d'autres uniquement dans l'un. Nous séparons les différentes possibilités.

Liens entre les trois formalismes

- Le Théorème 2.2.2 de Liouville expose, dans le formalisme dynamique, la préservation des volumes de l'espace des phases par le flot hamiltonien. Son équivalent, dans le formalisme différentiel, est le Théorème 4.7.1 de Liouville différentiel dans lequel la conservation de la forme volume de Liouville par le flot d'un champ de vecteurs hamiltonien est considérée. Pour le formalisme algébrique, il est question, dans la Sous-section 3.3.3, de conservation d'aire signée.
- Les champs de vecteurs hamiltoniens sont abordés dans les trois formalismes étudiés. En effet, nous les présentons en Définition 2.3.3 pour le formalisme dynamique, les champs de vecteurs hamiltoniens linéaires du formalisme algébrique sont donnés en Définition 3.5.5, et ceux étudiés dans le formalisme différentiel en Définition 4.4.2.
- Le concept de transformation canonique est aussi présent dans les trois axes. Ce nom est utilisé dans le formalisme dynamique, en Définition 2.3.5. Dans le formalisme algébrique, une transformation canonique est aussi appelée symplectomorphisme, en Définition 3.3.2. Ces deux notions sont utilisées dans le formalisme différentiel, respectivement en Définitions 4.6.1 et 4.6.2, et sont rendues équivalentes par le Théorème 4.6.2.

²⁸. Une métrique riemannienne sur une variété différentiable est une 2-forme bilinéaire symétrique définie positive.

Liens entre le formalisme dynamique et le formalisme différentiel

- Comme expliqué en Sous-section 4.3.2, l'espace des phases lagrangien, en Définition 2.1.2, représente le fibré tangent de la variété de configuration $(q^1, \dots, q^n)$ d'un système mécanique, alors que l'espace des phases hamiltonien, en Définition 4.3.4, en représente le fibré cotangent. Tout espace des phases d'un système mécanique possède donc une structure de variété symplectique²⁹.
- Le formalisme dynamique étudie le flot hamiltonien, en Définition 2.2.3, représentant les solutions des équations hamiltoniennes correspondantes. Ces équations sont traitées dans le formalisme différentiel via le flot d'un certain champ de vecteurs hamiltonien, comme exprimé à la Proposition 4.4.1.
- Les parenthèses de Poisson, en Définition 2.3.8 dans le formalisme dynamique, sont identiques aux crochets de Poisson, en Définition 4.5.1 dans le formalisme différentiel. Cette identification est vérifiée par le calcul de l'expression locale du crochet de Poisson en coordonnées canoniques dans le cas de $\mathbb{R}^{2n}$.

Liens entre le formalisme algébrique et le formalisme différentiel

- Le formalisme algébrique étudie les espaces vectoriels symplectiques, en Définition 3.2.2. Le formalisme différentiel, quant à lui, traite des variétés symplectiques, en Définition 4.2.1. Ces variétés généralisent les espaces vectoriels symplectiques. En effet, un espace vectoriel nécessite l'utilisation d'une unique carte locale, qui est dans ce cas globale.
- Les sous-variétés d'une variété symplectique, en Définition 3.4.2, généralisent aussi les sous-espaces vectoriels d'un espace vectoriel symplectique, en Définition 4.2.5.
- De même, les espaces vectoriels complexes dans le formalisme algébrique, à la Définition 3.6.1, peuvent être transposés dans le formalisme différentiel en variétés presque complexes, à la Définition 4.8.1. Les variétés presque complexes sont définies par le fait que l'espace tangent en tout point de la variété possède une structure complexe. Elles demandent, de plus, une condition de régularité : le passage d'un point à la structure complexe correspondante doit être différentiable.

Ce chapitre étudiant le formalisme différentiel de la géométrie symplectique clôture la partie bibliographique de ce mémoire. Dans la suite, nous développons et analysons une proposition d'enseignement pour des élèves de bachelier en sciences mathématiques en nous basant sur la connaissance des trois chapitres précédents, présentant certains développements théoriques importants en géométrie symplectique.

29. Nous travaillons dans ce mémoire avec des systèmes conservatifs.

Chapitre 5

Développement d'un enseignement

Nous entrons avec ce chapitre dans la deuxième partie du mémoire, ayant pour objectif la mise en place d'une proposition d'enseignement de la géométrie symplectique centrée sur le formalisme différentiel. En effet, le cours SMATB307 de géométrie symplectique donné actuellement en bachelier en sciences mathématiques est orienté mécanique analytique, comme nous l'avons montré dans le Chapitre 2. Un souhait de la titulaire du cours, Anne-Sophie Libert, est de concevoir une approche plus géométrique des notions principales du cours et d'ainsi renforcer les liens avec le cours SMATB214 de géométrie différentielle du même cursus. Nous avons ainsi réalisé un chapitre plus géométrique pouvant être inclus dans le cours actuel.

Nous discutons premièrement, sur base du cours actuel et des chapitres précédents du mémoire, les choix qui ont été réalisés concernant les notions que nous jugeons pertinentes à développer dans cet enseignement. La Section 5.2 contient la proposition d'enseignement. Cette dernière a été testée en conditions réelles lors d'une séance de cours en décembre 2015. La description de cette expérimentation en classe est l'objet de la Section 5.3. Enfin, nous terminons par une analyse critique de cette expérimentation, sur base d'un questionnaire qui a été distribué aux étudiants à la fin de la séance de cours.

5.1 Stratégie

Cette section décrit la démarche qui a été entreprise afin d'aboutir à la conception de l'enseignement détaillé à la Section 5.2.

Pour concevoir notre proposition d'enseignement, nous devons, tout d'abord, tenir compte des prérequis du cours SMATB307 de géométrie symplectique. Il s'agit, d'une part, du cours d'*Equations différentielles* [SMATB222] et, d'autre part, du cours de *Mécanique du point et du solide* [SMATB208], donnés tous les deux dans le bloc 2. Le chapitre que nous allons introduire nécessite un nouveau prérequis : le cours de *Géométrie différentielle* [SMATB214]. Les rappels de ce cours ont été réalisés en Section 4.1 et sont indispensables à la compréhension du formalisme différentiel de la géométrie symplectique, comme nous avons pu le constater. Nous sommes conscients qu'il peut être utile de réaliser certains rappels avant d'entamer, lors d'une séance de cours, la proposition d'enseignement décrite à la Section 5.2.

Ensuite, nous avons analysé en détail le cours actuel SMATB307 afin de définir ce qui est déjà proposé aux étudiants. Nous travaillons avec l'objectif de réaliser un chapitre basé sur le formalisme différentiel à introduire dans le cours, il faut cependant que ce chapitre soit bien intégré aux autres chapitres déjà présents.

Durant le deuxième quadrimestre de Master 1, nous avons la possibilité de suivre un cours

extérieur de notre choix, hors du cursus proposé à l'UNamur. Le choix du sujet de mémoire précédemment accompli, nous avons choisi d'assister au cours MATH - F512 de *Géométrie symplectique* enseigné à l'Université Libre de Bruxelles. Ce cours, dispensé par Simone Gutt, présente la géométrie symplectique dans un cadre entièrement géométrique, ce qui nous a permis de comprendre plus facilement la littérature à ce sujet. La proposition que nous allons développer s'inspire des notes de ce cours [11] ainsi que du livre de référence de celui-ci, [28].

Concernant le choix des notions géométriques à développer, il nous semble évident d'introduire les variétés symplectiques, base de la géométrie symplectique, ainsi que certaines propriétés les concernant. Nous choisissons aussi de sélectionner un des théorèmes les plus importants en géométrie symplectique, à savoir le théorème de Darboux. Celui-ci nous autorise à toujours travailler localement avec l'espace réel. Ensuite, une notion aux origines de la géométrie symplectique et indispensable pour la caractérisation des transformations canoniques paraît intéressante à développer, il s'agit bien sûr des crochets de Poisson, souvent étudiée dans la littérature. De plus, cela demande d'introduire les champs de vecteurs hamiltoniens. Ceux-ci donnent quant à eux la possibilité de faire un lien avec les équations hamiltoniennes. Nous remarquons que les objets de la géométrie symplectique que nous voulons développer sont déjà étudiés dans le cours SMATB307 via l'espace réel. Nous proposons donc de généraliser ces notions dans le cadre des variétés différentiables. Pour terminer notre proposition d'enseignement, nous pouvons donner une quatrième caractérisation des transformations canoniques¹. Celle-ci est développée dans le syllabus du cours actuel [5], mais n'est pas discutée au cours oral ou en séance d'exercices. Nous proposons de l'insérer dans notre proposition, étant donné que le concept de forme différentielle est nécessaire à son introduction. La proposition d'enseignement que nous développons utilise donc également la source [5].

Etant donné que les notions de variété symplectique, de champ hamiltonien et de crochet de Poisson sont déjà développées dans le cours SMATB307 pour le cas particulier d'un espace réel de dimension paire, il paraît intéressant d'illustrer les notions générales en travaillant avec $\mathbb{R}^{2m}$, exemple le plus simple de variété symplectique. Cela permettra aux étudiants d'expérimenter ces notions et de se rendre compte qu'elles sont équivalentes à ce qu'ils ont vu dans les chapitres précédents.

Concernant la place de notre enseignement dans le cours actuel, nous pensons qu'il serait opportun de l'introduire après le premier contact du chapitre 3 avec le mot *symplectique*. Pour rappel, le chapitre 3 présente l'étude de la structure symplectique des espaces réels de dimension paire et des crochets de Poisson pour traiter des transformations canoniques. Le chapitre suivant, le nôtre, permettrait de généraliser ces notions dans le cadre des variétés symplectiques. Les élèves, nous semblent-ils, pourraient comprendre et adhérer plus facilement à cette matière plus abstraite après l'avoir présentée dans le cadre réel. Nous demandons, dans la Section 5.4 de ce chapitre, l'avis des élèves concernés sur ce sujet.

Un dernier point a dû être réfléchi avant de réaliser le chapitre du cours. Les notations utilisées dans ce mémoire ne sont pas toutes celles du cours SMATB307. Nous avons donc dû modifier certaines pour coller au mieux à celles vues par les étudiants. Ceci explique le fait que les définitions et exemples de la section suivante ne sont pas toujours écrits avec les mêmes notations que dans les chapitres précédents de ce mémoire. De plus, les parenthèses de Poisson, définies dans le cours actuel, sont appelées dans ce mémoire crochets de Poisson. Cette différence provient probablement de la confusion qu'il existe parfois entre ces deux appellations, présentée en Sous-section 1.2.3. Nous avons donc dû tenir compte de ces changements pour écrire la proposition d'enseignement développée dans la section suivante.

1. Trois caractérisations sont déjà abordées dans le cours actuel, voir les Sous-sections 2.3.3, 2.3.4 et 2.3.5.

5.2 Proposition d'enseignement

Les pages suivantes présentent une proposition d'enseignement axée géométrie différentielle. Celle-ci consiste en un chapitre pouvant être intégré dans le cours SMATB307 de géométrie symplectique. Les sections suivantes traiteront de l'enseignement de ce chapitre lors de l'expérimentation en classe réalisée fin de l'année 2015.

Chapitre 6

Formalisme différentiel

Ce chapitre a été réalisé par Elodie Mal, sur base de [1], [2] et [3].

Dans le Chapitre 3, nous avons discuté de la structure symplectique de l'espace des phases, constitué de l'ensemble des mouvements possibles $(\vec{p}, \vec{q})$ d'un système. La mécanique hamiltonienne peut être vue comme une géométrie dans cet espace des phases, qui est naturellement muni d'une structure symplectique.

Si nous travaillons en coordonnées locales, les méthodes que nous avons vues précédemment sont suffisantes. Cependant, nous pourrions nous intéresser à la géométrie du problème. En général, cela nécessite l'utilisation de plusieurs systèmes de coordonnées locales pour pouvoir couvrir toute la variété différentiable considérée. Nous étudions donc, dans ce chapitre, les variétés symplectiques en termes de géométrie différentielle afin de décrire la mécanique hamiltonienne de façon intrinsèque.

Définition 6.0.1 (Système hamiltonien). Un système hamiltonien est un triplet $(M, \omega, \mathcal{H})$, où (M, ω) est une variété symplectique et $\mathcal{H}$ est un champ scalaire¹ $\mathcal{C}^\infty$, appelé la fonction hamiltonienne.

L'objectif de ce chapitre est de préciser les différents éléments de cette définition, la variété symplectique et la fonction hamiltonienne², et d'introduire les crochets de Poisson dans le cadre général des variétés qui nous occupent. L'espace réel étant l'exemple standard de variété symplectique, nous y faisons référence dès que possible. Nous terminons ce chapitre en donnant une quatrième caractérisation des transformations canoniques, possible grâce aux formes différentielles.

6.1 Variétés symplectiques

Nous donnons une définition de ces variétés avant d'aborder une propriété et deux exemples.

Définition 6.1.1 (Variété symplectique). Une variété symplectique est une variété différentiable M de classe $\mathcal{C}^\infty$ de dimension n munie d'une 2-forme ω fermée, i.e. $d\omega = 0$, non-dégénérée, i.e. pour tout $P \in M$, l'application

$$\omega|_P : T_P M \times T_P M \rightarrow \mathbb{R}$$

est non-dégénérée si et seulement si

$$\omega|_P(X|_P, Y|_P) = 0 \quad \forall Y|_P \in T_P M \Rightarrow X|_P = 0.$$

On note la variété symplectique (M, ω) .

1. Un champ scalaire est $\mathcal{C}^\infty$ lorsque sa représentation en coordonnées locales est $\mathcal{C}^\infty$.

2. Aussi appelée hamiltonien dans le Chapitre 3.

Proposition 6.1.1. Soit $\Omega : V \times V \rightarrow \mathbb{R}$ une forme bilinéaire antisymétrique où V est un espace vectoriel de dimension n . Alors il existe une base de V , $e = \{e_1, \dots, e_n\}$, dans laquelle la matrice associée à Ω , c'est-à-dire $(\Omega(e_i, e_j))_{1 \leq i, j \leq n} = (\Omega_{ij})_{1 \leq i, j \leq n}$, est de la forme

$$\begin{pmatrix} O_{m \times m} & I_{m \times m} & O_{m \times (n-2m)} \\ -I_{m \times m} & O_{m \times m} & O_{m \times (n-2m)} \\ O_{(n-2m) \times m} & O_{(n-2m) \times m} & O_{(n-2m) \times (n-2m)} \end{pmatrix}.$$

Le rang de cette matrice vaut $2m$.

Puisque l'espace tangent en un point spécifique d'une variété est toujours muni d'une structure d'espace vectoriel, nous pouvons appliquer cette Proposition à la 2-forme symplectique. Par la non-dégénérescence de ω , la dimension de la variété symplectique est égale à $n = 2m$.

Corollaire 6.1.1. Si (M, ω) est symplectique, alors la dimension de M est nécessairement paire.

EXEMPLE

Considérons $\mathbb{R}^{2m}$ de coordonnées $(\vec{p}, \vec{q}) = (p_1, \dots, p_m, q_1, \dots, q_m)$.

Définition 6.1.2 (Forme standard). La 2-forme symplectique standard sur $\mathbb{R}^{2m}$ est définie par³

$$\begin{aligned} \omega_0 &= dp_1 \wedge dq_1 + dp_2 \wedge dq_2 + \dots + dp_m \wedge dq_m \\ &= \sum_{i=1}^m (dp_i \otimes dq_i - dq_i \otimes dp_i). \end{aligned}$$

En effet,

- nous pouvons écrire ω_0 sous la forme

$$d \left(\sum_{i=1}^m p_i dq_i \right).$$

Nous obtenons donc $d\omega_0 = d \left(d \left(\sum_{i=1}^m p_i dq_i \right) \right) = 0$, puisque $d^2 = 0$.

- Soit $P \in \mathbb{R}^{2m}$. Dans la base

$$\left\{ \frac{\partial}{\partial p_1} \Big|_P, \dots, \frac{\partial}{\partial p_m} \Big|_P, \frac{\partial}{\partial q_1} \Big|_P, \dots, \frac{\partial}{\partial q_m} \Big|_P \right\}$$

de $T_P(\mathbb{R}^{2m})$, la matrice de $\omega_0|_P$ est donnée par

$$\begin{pmatrix} \omega_0|_P \left(\frac{\partial}{\partial p_i} \Big|_P, \frac{\partial}{\partial p_j} \Big|_P \right) & \omega_0|_P \left(\frac{\partial}{\partial p_i} \Big|_P, \frac{\partial}{\partial q_j} \Big|_P \right) \\ \omega_0|_P \left(\frac{\partial}{\partial q_i} \Big|_P, \frac{\partial}{\partial p_j} \Big|_P \right) & \omega_0|_P \left(\frac{\partial}{\partial q_i} \Big|_P, \frac{\partial}{\partial q_j} \Big|_P \right) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & I_m \\ -I_m & 0 \end{pmatrix},$$

ce qui prouve la non-dégénérescence de ω_0 .

Le fibré cotangent, soit l'ensemble des espaces cotangents sur une variété N , i.e.⁴

$$T^*N = \bigsqcup_{P \in N} (T_P^*N),$$

forme une variété différentiable et est toujours muni d'une structure symplectique naturelle. De plus, le fibré cotangent de l'espace de configuration $(q_1, \dots, q_m)$ d'un système mécanique représente l'espace des phases de ce système. Cela explique le fait que *tout espace des phases possède*

3. Le symbole $\wedge$ désigne le produit extérieur et $\otimes$ le produit tensoriel.

4. Le symbole $\bigsqcup$ représente l'union disjointe.

une structure symplectique.

Le théorème de Darboux est l'un des plus importants en géométrie symplectique. Il rend compte du fait que toute variété symplectique de dimension $2m$ ressemble localement à $(\mathbb{R}^{2m}, \omega_0)$. Autrement dit, la dimension est le seul invariant local de ces variétés.

Théorème 6.1.1 (Théorème de Darboux). *Soit (M, ω) une variété symplectique de dimension $2m$ et soit P un point de M . Alors, il existe un voisinage ouvert U de P dans M et des coordonnées locales $\{p_1, \dots, p_m, q_1, \dots, q_m\}$ sur U tels que*

$$\omega|_U = \sum_{i=1}^m dp_i \wedge dq_i.$$

Ce théorème nous autorise à travailler localement avec la forme standard de l'espace réel de dimension correspondante. Ceci justifie l'étude des chapitres précédents portant sur l'espace réel.

6.2 Champs de vecteurs hamiltoniens

Pour rappel, la différentielle $d\mathcal{H}$ du champ scalaire $\mathcal{H} \in \mathcal{F}(M)$ est une 1-forme sur M et, pour $P \in M$,

$$\begin{aligned} d\mathcal{H}|_P : T_P M &\rightarrow \mathbb{R} \\ X|_P &\mapsto d\mathcal{H}|_P(X|_P) := X|_P(\mathcal{H}), \end{aligned}$$

où $X|_P(\mathcal{H})$ est la dérivée directionnelle de $\mathcal{H}$.

Définition 6.2.1 (Champ hamiltonien). Soit $\mathcal{H}$ un champ scalaire sur (M, ω) , une variété symplectique. Il existe un seul champ de vecteurs $X \in \mathcal{X}(M)$ sur M , noté $X_{\mathcal{H}}$ et appelé champ hamiltonien associé à $\mathcal{H}$, défini par

$$\omega(X_{\mathcal{H}}, \cdot) = d\mathcal{H}.$$

Le champ scalaire $\mathcal{H}$ est appelé fonction hamiltonienne.

EXEMPLE

Nous calculons le champ de vecteurs hamiltonien associé à un champ scalaire $\mathcal{H}$ dans le cas de $\mathbb{R}^{2m}$. Nous prenons

$$\omega_0 = \sum_{i=1}^m (dp_i \otimes dq_i - dq_i \otimes dp_i).$$

La différentielle de $\mathcal{H}$ est donnée par

$$d\mathcal{H} = \sum_{i=1}^m \left(\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial q_i} dq_i + \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial p_i} dp_i \right). \quad (6.1)$$

Nous pouvons calculer

$$\begin{aligned} \omega_0 \left(\frac{\partial}{\partial p_k}, \cdot \right) &= \sum_{i=1}^m \left(\langle dp_i, \frac{\partial}{\partial p_k} \rangle dq_i - \langle dq_i, \frac{\partial}{\partial p_k} \rangle dp_i \right) = dq_k \\ \text{et } \omega_0 \left(\frac{\partial}{\partial q_l}, \cdot \right) &= \sum_{i=1}^m \left(\langle dp_i, \frac{\partial}{\partial q_l} \rangle dq_i - \langle dq_i, \frac{\partial}{\partial q_l} \rangle dp_i \right) = -dp_l. \end{aligned}$$

Prenons $X_{\mathcal{H}} = \sum_{i=1}^m \left(\alpha_i \frac{\partial}{\partial q_i} + \beta_i \frac{\partial}{\partial p_i} \right)$. Alors, en utilisant les deux équations du dessus, nous obtenons

$$\omega_0(X_{\mathcal{H}}, \cdot) = \sum_{i=1}^m (\alpha_i (-dp_i) + \beta_i dq_i). \quad (6.2)$$

Par la définition de champ hamiltonien, nous égalons les équations (6.1) et (6.2) pour trouver les constantes suivantes

$$\begin{aligned}\alpha_i &= -\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial p_i} \\ \beta_i &= \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial q_i}.\end{aligned}$$

Nous pouvons finalement écrire le champ hamiltonien associé à $\mathcal{H}$, donné par l'équation

$$X_{\mathcal{H}} = \sum_{i=1}^m \left(\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial q_i} \frac{\partial}{\partial p_i} - \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial p_i} \frac{\partial}{\partial q_i} \right). \quad (6.3)$$

EQUATIONS HAMILTONIENNES

Ces équations, vues au Chapitre 2, peuvent être écrites grâce aux champs de vecteurs hamiltoniens que nous venons de voir : *les équations hamiltoniennes correspondent au flot de $-X_{\mathcal{H}}$, où $\mathcal{H} \in \mathcal{F}(M)$* . En effet, considérons une courbe sur la variété symplectique M , donnée par

$$c(t) = (p(t), q(t)) = (p_1(t), \dots, p_m(t), q_1(t), \dots, q_m(t)).$$

Le flot de $X_{\mathcal{H}}$ est constitué de l'ensemble des courbes intégrales de $X_{\mathcal{H}}$, i.e.

$$\dot{c}(t) = X_{\mathcal{H}}(c(t)).$$

Nous pouvons calculer $X_{\mathcal{H}}(c(t))$,

$$\begin{aligned}X_{\mathcal{H}}(c(t)) &= \sum_{i=1}^m \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial q_i} \Big|_{c(t)} \frac{\partial}{\partial p_i} \Big|_{c(t)} - \sum_{j=1}^m \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial p_j} \Big|_{c(t)} \frac{\partial}{\partial q_j} \Big|_{c(t)} \\ &= \left(\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial q_1} \Big|_{c(t)}, \dots, \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial q_m} \Big|_{c(t)}, -\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial p_1} \Big|_{c(t)}, \dots, -\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial p_m} \Big|_{c(t)} \right).\end{aligned}$$

Nous obtenons finalement

$$\begin{cases} \dot{p}_i(t) = \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial q_i} \Big|_{c(t)} \\ \dot{q}_j(t) = -\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial p_j} \Big|_{c(t)} \end{cases} \quad \forall i, j = 1, \dots, m.$$

Il suffit de changer les signes afin de vérifier que le flot de $-X_{\mathcal{H}}$ est bien donné par les équations hamiltoniennes.

6.3 Crochets de Poisson

Cette notion a déjà été abordée dans le Chapitre 3 dans le cadre d'une variété symplectique réelle. Nous étendons maintenant cette définition à une variété symplectique quelconque.

Aux origines de la géométrie symplectique, Lagrange et Poisson utilisèrent des parenthèses et crochets pour résoudre les équations du mouvement des planètes du système solaire. Cette notation leur permit de découvrir la structure symplectique naturelle existant sur tout espace des phases d'un système mécanique quelconque. Pendant leurs travaux menés séparément, ils se rendirent compte que les parenthèses développées par Lagrange étaient équivalentes aux crochets de Poisson. Ces notions sont parfois mal nommées dans la littérature, Lagrange changeant même de notations entre deux publications. Les parenthèses de Poisson, exposées au Chapitre 3, sont communément appelées crochets de Poisson, nous utilisons donc cette appellation par la suite.

Définition 6.3.1 (Crochet de Poisson). Soit (M, ω) une variété symplectique. Le crochet de Poisson est défini par l'application

$$\begin{aligned} \{\cdot, \cdot\} : \mathcal{F}(M) \times \mathcal{F}(M) &\rightarrow \mathcal{F}(M) \\ (f, g) &\mapsto \{f, g\} := -\omega(X_f, X_g), \end{aligned}$$

où X_f et X_g sont respectivement les champs hamiltoniens de f et de g .

Nous avons aussi les relations suivantes, en utilisant la Définition 6.2.1,

$$\{f, g\} = -\omega(X_f, X_g) = -df(X_g) = -X_g(f) = X_f(g).$$

EXEMPLE

Nous calculons l'expression locale du crochet de Poisson en coordonnées canoniques dans le cas de $\mathbb{R}^{2m}$. Grâce au champ hamiltonien calculé précédemment et donné en équation (6.3), nous avons

$$\{f, g\} = X_f(g) = \sum_{i=1}^m \left(\frac{\partial f}{\partial q_i} \frac{\partial g}{\partial p_i} - \frac{\partial g}{\partial p_i} \frac{\partial f}{\partial q_i} \right).$$

Nous obtenons exactement la même expression que dans le Chapitre 3.

Le crochet de Poisson permet de munir une variété symplectique d'une structure de Poisson, i.e. ce crochet est bilinéaire et vérifie les propriétés suivantes

- antisymétrie : $\{f, g\} = -\{g, f\}$
- identité de Jacobi : $\bigoplus_{fgh} \{f, \{g, h\}\} \stackrel{\text{déf.}}{=} \{f, \{g, h\}\} + \{h, \{f, g\}\} + \{g, \{h, f\}\} = 0$
- règle de Leibniz : $\{f, gh\} = \{f, g\}h + g\{f, h\} \quad \forall f, g, h \in \mathcal{F}(M).$

Nous pouvons retrouver la caractérisation vue dans le Chapitre 3, ici dans le cadre général des variétés symplectiques : une transformation canonique préserve les crochets de Poisson.

CARACTÉRISATION 3

Soient (M_1, ω_1) et (M_2, ω_2) deux variétés symplectiques possédant respectivement les crochets de Poisson $\{\cdot, \cdot\}^{\omega_1}$ et $\{\cdot, \cdot\}^{\omega_2}$. Le difféomorphisme⁵ $\psi : M_1 \rightarrow M_2$ est une transformation canonique si et seulement si

$$\{f \circ \psi, g \circ \psi\}^{\omega_1} = \{f, g\}^{\omega_2} \circ \psi \quad \forall f, g \in \mathcal{F}(M_2).$$

6.4 Invariants généraux

En utilisant les formes différentielles, une dernière caractérisation des transformations canoniques est possible. Nous nous intéressons aux changements de variables ne dépendant pas du temps et nous nous plaçons dans le cadre de $(\mathbb{R}^{2m}, \omega_0)$. La 2-forme ω_0 donne la somme des projections sur les plans (p_j, q_j) du volume dans l'espace des phases. Par cette observation et par le théorème de Liouville, la caractérisation suivante n'est pas étonnante.

CARACTÉRISATION 4

Théorème 6.4.1. Une transformation de coordonnées $(\vec{p}, \vec{q}) = (\vec{p}(\vec{P}, \vec{Q}), \vec{q}(\vec{P}, \vec{Q}))$ est complètement canonique si et seulement si

$$\sum_{j=1}^m dp_j \wedge dq_j = \sum_{j=1}^m dP_j \wedge dQ_j. \quad (6.4)$$

5. Bijection différentiable d'une variété dans une autre, dont la bijection réciproque est aussi différentiable.

Preuve

$\Rightarrow$ Par la condition de Lie, une transformation est complètement canonique si et seulement si il existe une fonction régulière $f(\vec{P}, \vec{Q})$ telle que

$$\sum_{j=1}^m (p_j dq_j - P_j dQ_j) = df. \quad (6.5)$$

En effet, $\mathcal{H} = \mathcal{K}$ puisque la transformation est indépendante du temps. Comme deux dérivées extérieures successives s'annulent (i.e. $d^2 = 0$), nous obtenons

$$\begin{aligned} & d \left(\sum_{j=1}^m (p_j dq_j - P_j dQ_j) \right) = 0 \\ \Leftrightarrow & \sum_{j=1}^m \sum_{i=1}^m \left(\frac{\partial p_j}{\partial p_i} dp_i \wedge dq_j + \frac{\partial p_j}{\partial q_i} dq_i \wedge dq_j \right) - \sum_{j=1}^m \sum_{i=1}^m \left(\frac{\partial P_j}{\partial P_i} dP_i \wedge dQ_j + \frac{\partial P_j}{\partial Q_i} dQ_i \wedge dQ_j \right) = 0 \\ \Leftrightarrow & \sum_{j=1}^m dp_j \wedge dq_j - \sum_{j=1}^m dP_j \wedge dQ_j = 0 \\ \Leftrightarrow & \sum_{j=1}^m dp_j \wedge dq_j = \sum_{j=1}^m dP_j \wedge dQ_j. \end{aligned}$$

$\Leftarrow$ Puisque (6.4) est équivalente à

$$d \left(\sum_{j=1}^m (p_j dq_j - P_j dQ_j) \right) = 0,$$

ce qui signifie que la 1-forme $\sum_{j=1}^m (p_j dq_j - P_j dQ_j)$ est fermée, nous pouvons utiliser le lemme de Poincaré. Celui-ci énonce que, dans $\mathbb{R}^k$, toute forme fermée est exacte. Il existe donc une fonction f telle que (6.5), la condition de Lie permet de conclure que la transformation est complètement canonique.

□

Bibliographie

- [1] T. Carletti, *Syllabus de Géométrie symplectique*, SMATB307, UNamur, 2013
- [2] S. Gutt, *Cours de Géométrie symplectique*, MATH - F512, ULB, 2015
- [3] A. Cannas da Silva, *Lectures on Symplectic Geometry*, Lectures Notes in Mathematics, Springer, 2008

5.3 Expérimentation en classe

La titulaire du cours SMATB307 m'a gentiment proposé d'expérimenter ma proposition d'enseignement au premier quadrimestre de l'année académique 2015-2016. Cette séance de deux heures de cours a eu lieu le 10 décembre 2015 et 11 étudiants y ont assisté. Je rends compte dans cette section de perceptions plus personnelles de cette expérimentation.

Etant en finalité didactique et me dirigeant vers l'enseignement l'année prochaine, il m'a été bénéfique de réaliser cette première expérience devant une classe et, de surcroît, devant un public universitaire. Comme il s'agissait pour moi d'une première, le début de la séance de cours a été quelque peu stressant. Mais les étudiants, attentifs et réceptifs, ont contribué à une bonne ambiance de travail et de réflexion. Ils semblaient, de plus, poser des questions d'eux-mêmes lorsque des points théoriques n'étaient pas clairs pour eux.

Les questions des étudiants durant la séance portaient, pour une grande partie, sur la matière de géométrie différentielle abordée dans le cours SMATB214. Ces difficultés principales seront analysées dans la section suivante. J'avais heureusement prévu, dans la préparation de ma séance de cours, quelques rappels de géométrie différentielle au cas où les élèves ne se souviendraient pas de certaines notions. Il m'a fallu principalement rappeler les concepts suivants :

- la définition d'une forme différentielle d'ordre 2 ;
- la définition du produit extérieur, du produit tensoriel et du produit interne ;
- la définition de la dérivée extérieure ;
- la définition de l'espace cotangent ;
- la définition du flot.

Ces rappels ont été effectués soit oralement, soit au tableau en explicitant les calculs impliquant ces notions.

Dans les feuilles distribuées aux étudiants, une erreur s'est glissée dans l'expression locale du crochet de Poisson en coordonnées canoniques dans le cas de $\mathbb{R}^{2m}$:

$$\{f, g\} = X_f(g) = \sum_{i=1}^m \left(\frac{\partial f}{\partial q_i} \frac{\partial g}{\partial p_i} - \frac{\partial f}{\partial p_i} \frac{\partial g}{\partial q_i} \right) \longrightarrow \{f, g\} = X_f(g) = \sum_{i=1}^m \left(\frac{\partial f}{\partial q_i} \frac{\partial g}{\partial p_i} - \frac{\partial g}{\partial p_i} \frac{\partial f}{\partial q_i} \right).$$

Les étudiants m'ont eux-mêmes fait remarquer cette erreur.

La séance de cours de deux heures s'est déroulée comme suit. Les élèves ne disposaient d'aucun support de cours pendant la première heure. Ils ont ainsi pris note des explications apportées au tableau. Mais les notes du chapitre proposé étant fortement concentrées et les explications à apporter nombreuses, nous avons décidé, pour la deuxième partie du cours, de distribuer les notes de cours aux étudiants afin de les parcourir avec eux et de développer uniquement au tableau les notions essentielles. Une demi-heure environ y a été consacrée. Nous avons finalement utilisé le dernier quart d'heure de cours pour soumettre aux étudiants un questionnaire d'appréciation sur la séance de cours à laquelle ils venaient d'assister. De cette façon, nous pouvons, à la section suivante, analyser la manière dont la séance a été accueillie par les étudiants et leur avis sur la matière proposée.

5.4 Avis des étudiants

Les deux pages suivantes contiennent le questionnaire distribué aux étudiants à la fin de la séance de cours. Le but de ce questionnaire était double : d'une part, réfléchir de manière générale à l'enseignement de la géométrie en bachelier en sciences mathématiques et d'autre part, connaître leurs appréciations de la matière enseignée dans ce chapitre additionnel. Lors de la conception du questionnaire, nous nous sommes, de plus, rendus compte de la difficulté de le rédiger, en particulier de former les questions.

Questionnaire d'appréciation

Elodie Mal
10 décembre 2015

Dans le cadre de mon mémoire portant sur la géométrie symplectique, je vous ai proposé une séance de cours qui reprend des notions de Géométrie symplectique SMATB307 dans un formalisme plus géométrique. L'appréciation qui vous est demandée porte sur le CONTENU et non sur la manière dont il est enseigné. Ce questionnaire est anonyme et sera utilisé uniquement à des fins statistiques, je vous demande donc d'y répondre le plus honnêtement possible.

Géométrie

- De manière spontanée, qu'entendez-vous par le terme géométrie ?

- Quels cours de votre cursus universitaire qualifieriez-vous de géométrie ?
Précisez la/les notion(s) de base et/ou le but du cours.

Cours actuel SMATB307

- Trouvez-vous le cours géométrique ?
☐ Tout à fait ☐ Assez ☐ Pas assez ☐ Pas du tout
- Quels chapitres du cours trouvez-vous les plus géométriques ?
☐ Rappel de mécanique lagrangienne
☐ Introduction à la mécanique hamiltonienne
☐ Formalisme canonique
☐ Théorie d'Hamilton-Jacobi et variables angle-action
☐ Le problème des deux corps

Séance de cours d'aujourd'hui

- Les notions présentées vous ont-elles paru claires ?
☐ Tout à fait ☐ Assez ☐ Pas assez ☐ Pas du tout

Pourquoi ?

- Les notions présentées vous ont-elles paru difficiles ?

☐ Tout à fait ☐ Assez ☐ Pas assez ☐ Pas du tout

Pourquoi ?

- Les notions présentées vous ont-elles paru géométriques ?

☐ Tout à fait ☐ Assez ☐ Pas assez ☐ Pas du tout

- Les rappels ont-ils été suffisants ?

☐ Tout à fait ☐ Assez ☐ Pas assez ☐ Pas du tout

Quels sont ceux manquants ?

- Certains concepts vous ont été présentés selon une approche différente de celle du cours. Personnellement, quelle approche préférez-vous et pourquoi ?

Stratégie pour l'an prochain

- Pour les années futures, préféreriez-vous

- ☐ conserver le contenu actuel du cours SMATB307 ?
☐ conserver le contenu actuel du cours SMATB307 et ajouter la séance d'aujourd'hui après le chapitre consacré aux transformations canoniques ?
☐ commencer le cours SMATB307 par la séance d'aujourd'hui dans le cadre général des variétés et ensuite conserver le contenu actuel du cours SMATB307 ?

Commentaires

Autres idées ou commentaires ?

Merci pour votre aide !

Nous analysons maintenant les réponses apportées à ce questionnaire d'appréciation selon le découpage en quatre parties que nous avons souhaité. Nous citons également quelques propos d'étudiants afin de mieux comprendre et de rester le plus fidèle possible à leurs impressions. Cette analyse statistique reste purement descriptive et est assez limitée de par le nombre peu élevé d'étudiants. Nous travaillons, en effet, avec douze questionnaires complétés². Nous cherchons surtout, via l'analyse de ce questionnaire, à dégager les tendances principales des étudiants.

5.4.1 Géométrie

Concernant la signification spontanée du terme 'géométrie', quasiment tous les étudiants pensent à la géométrie euclidienne, comme nous pouvons l'observer sur la Figure 5.1. En effet, ceux-ci abordent les notions d'espaces, de vecteurs, de surfaces, de bases, de formes géométriques, de calculs d'aire et de périmètre, d'orthogonalité, d'angles ou encore de trajectoires. Un étudiant parle même de « *concepts moins abstraits, facilement représentables* ». Il semble donc que les étudiants de bachelier en sciences mathématiques gardent une vision de la géométrie essentiellement euclidienne, première géométrie découverte dès l'enfance et la plus souvent considérée. Uniquement trois étudiants évoquent la géométrie sous forme différentielle en citant l'étude des variétés et de la différentiabilité. Finalement deux étudiants mentionnent « *la visualisation (par des schémas) de certains concepts* » et « *certaines concepts difficiles à visualiser (comprendre ce que ça représente réellement)* ». Nous pouvons donc remarquer que peu d'étudiants semblent avoir une idée très claire de la notion de géométrie, comme en témoigne clairement cette réponse : « *J'ai du mal à vraiment voir ce qui est géométrique de ce qui ne l'est pas...* ». La deuxième question nous permet de rentrer plus en détail dans leurs significations du terme 'géométrie'.

Les cours du cursus considérés comme *géométriques* par nos étudiants sont représentés à la Figure 5.2. Il est à remarquer que les cours les plus cités contiennent le mot 'géométrie' dans leur intitulé. Bien entendu, le cours de *Géométrie analytique* est le plus proche de la représentation intuitive de la géométrie en tant qu'étude de l'espace euclidien et donc le plus cité. Il semble que les étudiants soient quelque peu orientés dans leur choix par l'intitulé des cours. En effet, lors de la première question, uniquement trois étudiants ont cité l'étude des variétés comme signification intuitive de la géométrie et, pour cette question-ci, dix d'entre eux trouvent le cours de *Géométrie différentielle* géométrique. Cependant, seule la moitié des étudiants qualifie le cours de *Géométrie symplectique* de géométrique. Certains élèves évoquent aussi deux cours de mécanique, ce qui paraît a priori quelque peu étrange. Peut-être cela est-ce dû au fait que le cours de *Géométrie symplectique* commence par des rappels de mécanique lagrangienne développée dans le cours de *Mécanique du point et du solide*. Quant au cours de *Topologie générale*, il contient

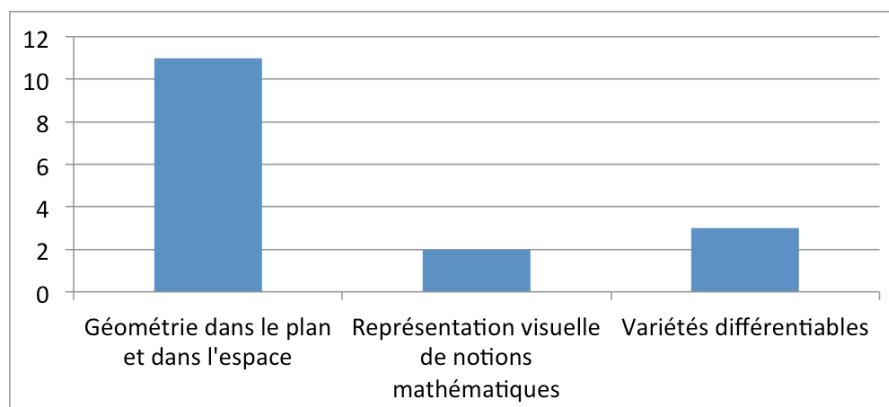


FIGURE 5.1 : Signification spontanée du terme 'géométrie'

2. Outre les onze étudiants, l'assistante du cours a également participé à notre expérimentation.

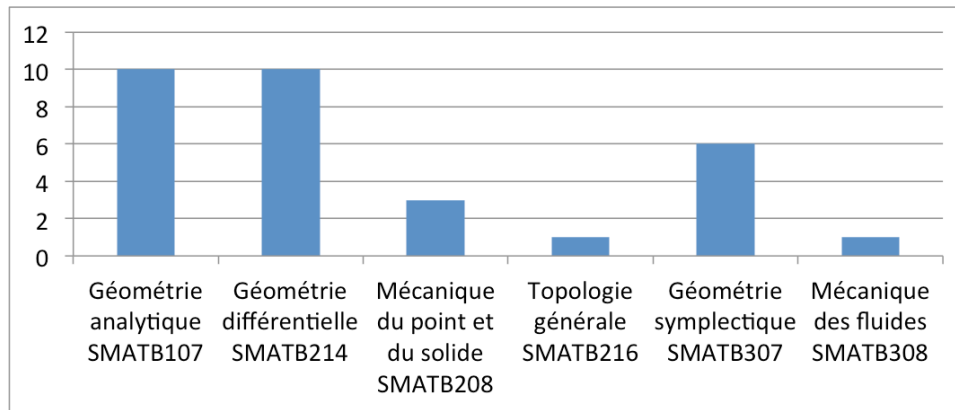


FIGURE 5.2 : Cours du cursus universitaire qualifiés de géométries

effectivement des représentations visuelles d'objets mathématiques puisqu'il y est entre autres question d'ouverts, d'espaces et d'intervalles.

5.4.2 Cours actuel SMATB307

Concernant la question ayant trait au caractère géométrique du cours actuel de *Géométrie symplectique*, les résultats sont difficilement exploitables. En effet, nous observons, en Figure 5.3, que le même nombre d'étudiants considèrent le cours géométrique et non-géométrique, ce qui est cohérent avec les résultats de la Figure 5.2 à propos de ce cours. Nous remarquons donc que la volonté d'Anne-Sophie Libert de géométriser quelque peu le cours semble justifiée.

Les chapitres du cours SMATB307 considérés par les étudiants comme étant les plus géométriques sont représentés à la Figure 5.4. A nos yeux, le chapitre d'*Introduction à la mécanique hamiltonienne* et plus particulièrement la section développant le théorème de Liouville³ traitent de concepts géométriques (conservation des volumes de l'espace des phases). Tous les chapitres sont choisis par un nombre relativement proche d'élèves. Peut-être le formalisme canonique est-il préféré étant donné qu'il introduit la structure symplectique de l'espace des phases et le problème des deux corps puisqu'il traite du mouvement de deux corps dans l'espace.

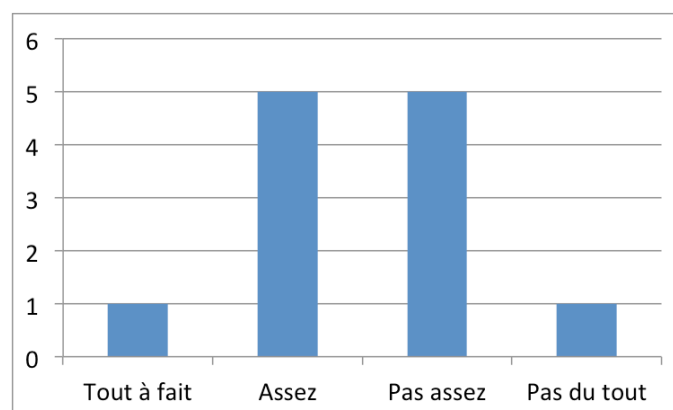


FIGURE 5.3 : Cours actuel géométrique

3. Pour rappel, il s'agit du Théorème 2.2.2.

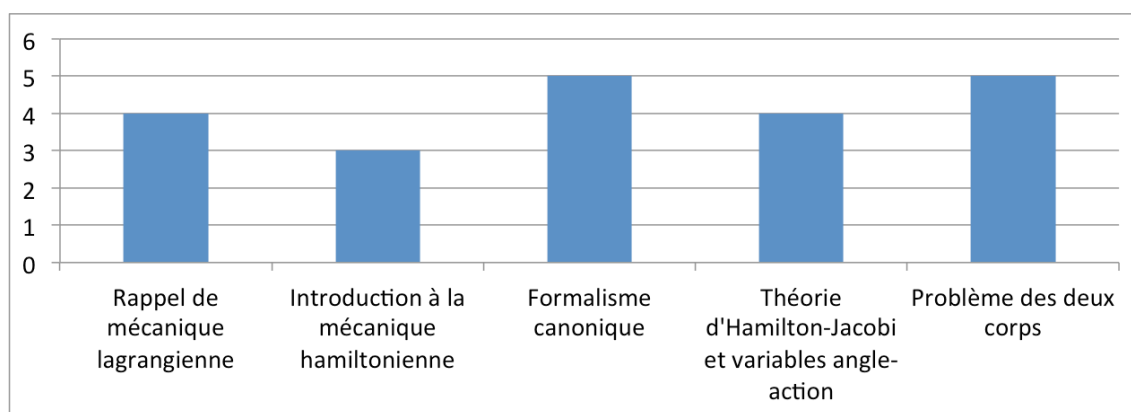


FIGURE 5.4 : Chapitres du cours considérés comme géométriques

5.4.3 Séance de cours proposée

Nous synthétisons maintenant l'avis des étudiants sur l'expérimentation à laquelle ils ont assisté en novembre 2015. Comme le montre la Figure 5.5, plus de la moitié des étudiants semble trouver claires les notions abordées à la séance de cours. Citons quelques commentaires des étudiants illustrant cette position majoritaire : « *Notions bien expliquées, exemples illustratifs compréhensibles* », « *Explications détaillées, rappels des notions de géométrie différentielle* », « *Liens avec de la matière vue précédemment (géo diff et symplectique) détaillés, bons rappels au tableau* », ... Pour les trois étudiants trouvant les notions peu claires, ils invoquent le nombre de « nouvelles » notions vues en peu de temps et, surtout, la complexité du cours de *Géométrie différentielle* du bloc 2. Ils expliquent avoir « *des lacunes par rapport au cours de Géométrie différentielle* » dûes à « *un manque de clarté dans le cours de Géométrie différentielle du bloc 2* ». Cette difficulté est également abordée à plusieurs reprises par les étudiants trouvant les notions claires : « *Le cours de Géométrie différentielle du bloc 2 était assez complexe, ce qui compliquait les notions* ». Ainsi, les étudiants semblent être assez réticents à l'utilisation de notions de géométrie différentielle dans le cours de géométrie symplectique. Nous le remarquons aussi dans la question suivante concernant la difficulté des notions présentées.

Comme indiqué à la Figure 5.6, un nombre important d'étudiants considère les notions présentées difficiles. D'une part, ils évoquent « *les concepts de géométrie différentielle du bloc 2 (qui) remontent d'assez loin et étaient parfois flous, cela rend les notions plus difficiles ; de plus, c'est moins facile à visualiser* », ce qui confirme l'impression donnée à la question précédente. D'autre part, le cours concentre de nombreuses notions. Plusieurs étudiants parlent de « *beaucoup*

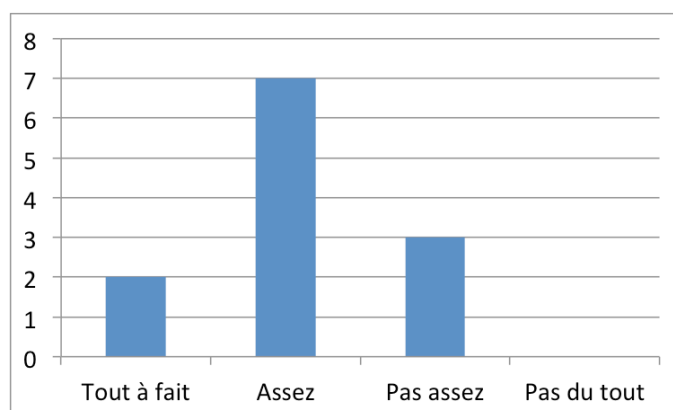


FIGURE 5.5 : Clarté des notions présentées

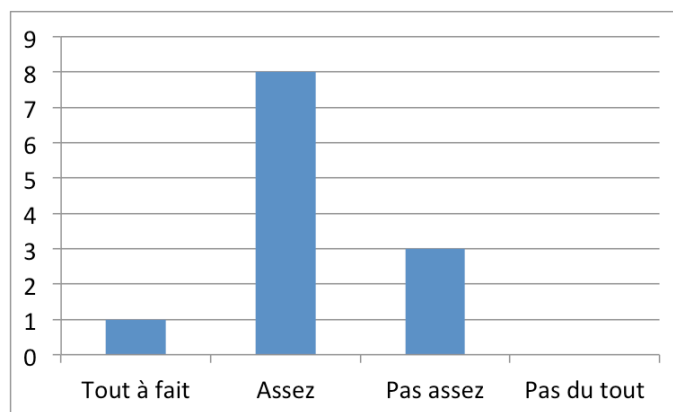


FIGURE 5.6 : Difficulté des notions présentées

de concepts mélangés, imbriqués ». Pour ceux considérant le niveau de difficulté peu élevé, ils évoquent les « notions déjà vues expliquées sous un autre angle, donc plus faciles à comprendre » montrant ainsi leur maîtrise des séances de géométrie symplectique précédemment suivies.

Concernant le contenu de la séance de cours, la plupart des étudiants⁴ semblent considérer les notions proposées comme ayant un caractère géométrique, comme nous pouvons le constater sur la Figure 5.7. Ceci montre que l'objectif poursuivi de développer un enseignement plus géométrique des notions de géométrie symplectique a été atteint dans la vision des étudiants.

Nous nous intéressons, à la Figure 5.8, à l'opinion des étudiants quant aux rappels proposés lors de cette séance de cours. Il s'agissait essentiellement de rappels de géométrie différentielle. Nous avons, en effet, considéré que des rappels du cours de géométrie symplectique n'étaient pas nécessaires. La moitié des étudiants interrogés trouvent les rappels tout à fait suffisants : « rien ne manquait, les notions de géométrie différentielle étaient rappelées si nécessaire ». Pour ceux les trouvant insuffisants, un évoque le besoin de rappels de géométrie symplectique et l'autre davantage de rappels de géométrie différentielle.

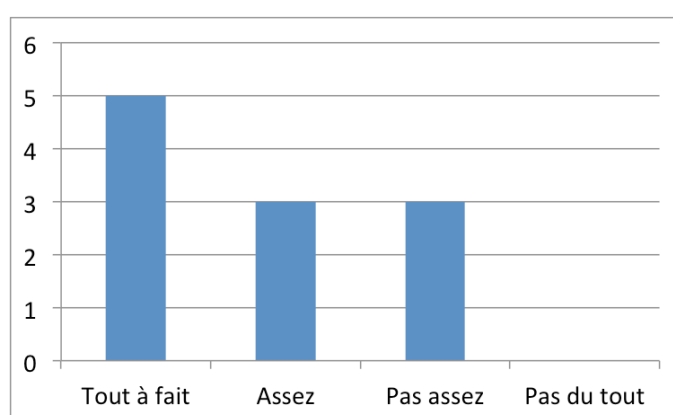


FIGURE 5.7 : Caractère géométrique des notions présentées

4. Un étudiant s'est abstenu de répondre à cette question.

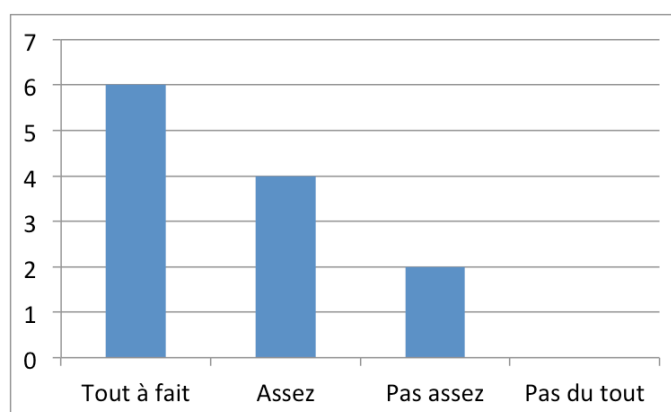


FIGURE 5.8 : Satisfaction quant aux rappels proposés en séance

Concernant l'approche que les étudiants ont préférée quant aux notions abordées dans le formalisme dynamique et dans le formalisme différentiel, la Figure 5.9 montre que la majorité d'entre eux sont plus portés vers l'approche du cours actuel. En effet, celle-ci leur semble beaucoup plus concrète, plus intuitive et plus proche de la volonté de faire des mathématiques appliquées. Encore une fois, certains étudiants expliquent que la géométrie différentielle est plus difficile pour eux, beaucoup plus abstraite : « *Cette approche-ci est mieux d'un point de vue géométrique mais elle rappelle des mauvais souvenirs de l'an passé. Donc, d'un point de vue appréciation générale, j'ai préféré le cours normal.* ». Deux étudiants, cependant, trouvent que les deux formalismes se complètent bien et que cela est intéressant de montrer deux points de vue différents.

5.4.4 Stratégie pour l'an prochain

Nous donnons, finalement, l'avis des étudiants quant à la stratégie à mettre en place dans le cours de géométrie symplectique pour la prochaine année académique, à savoir conserver le contenu actuel du cours SMATB307, ajouter le chapitre différentiel proposé après le chapitre 3 actuel ou commencer le cours par la séance proposée. Les résultats, donnés à la Figure 5.10, montrent que les étudiants sont assez partagés sur la question. Une petite majorité souhaite conserver le cours actuel centré sur le formalisme dynamique de la géométrie symplectique. Cependant, nous pouvons aussi regrouper les deux dernières possibilités sous un même label et regarder les avis des étudiants lorsqu'il s'agit de conserver le contenu actuel du cours SMATB307 ou d'y introduire le chapitre élaboré dans ce mémoire. Dans ce cas, sept étudiants choisissent de développer la séance proposée, axée géométrie différentielle, dans le cours SMATB307 de l'an prochain, avec une petite préférence pour terminer avec ce formalisme.

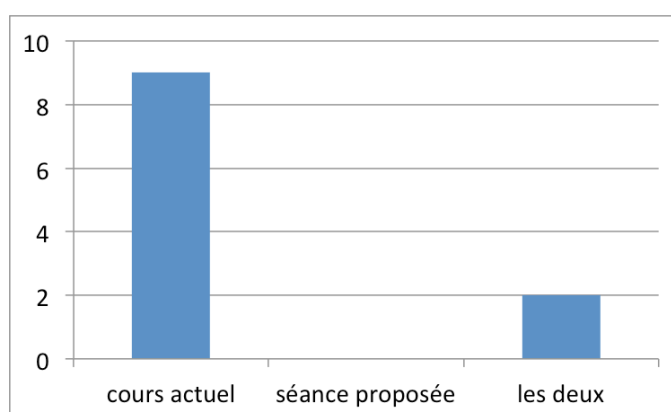


FIGURE 5.9 : Approche privilégiée

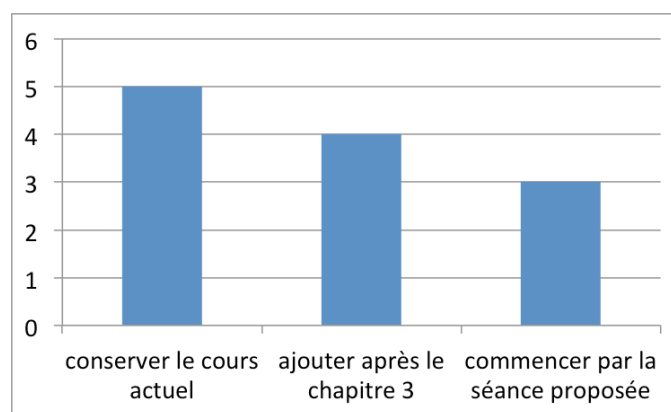


FIGURE 5.10 : Stratégie privilégiée

5.4.5 Conclusions générales

Les élèves interrogés ne semblent pas contre l'ajout d'un chapitre axé géométrie différentielle dans le cours actuel de géométrie symplectique : « *J'ai trouvé ça intéressant et ça montre qu'on peut aborder le cours de différentes façons. De plus, je trouve ça très intéressant de se baser plus sur le cours de géométrie différentielle (voir à quoi ça sert) car c'était assez flou en bloc 2.* ». Il ressort principalement de ce questionnaire que la géométrie différentielle est fortement abstraite pour eux et que les notions présentées axées sur ce formalisme leur semblent assez difficiles, même si elles leur paraissent claires : « *Cette séance pourrait être ajoutée car elle est intéressante mais uniquement si les étudiants possèdent de bonnes bases en géométrie différentielle. Sans cela, elle reste assez vague.* ». Il pourrait être pertinent de réaliser à nouveau un test similaire l'année prochaine pour observer si les étudiants ont la même appréhension pour la géométrie différentielle chaque année. Il est aussi à remarquer que le titulaire en charge de SMATB214 a confié l'enseignement de ce cours à un suppléant l'année précédant notre enquête, ce qui pourrait également expliquer le renforcement de cette appréhension et justifierait un renouvellement de l'expérience mise en place dans le cadre de ce mémoire. De plus, la signification intuitive des étudiants du terme 'géométrie' reste principalement bloquée à la géométrie euclidienne, paraissant la plus naturelle pour eux étant donné qu'elle est celle principalement étudiée dans les classes inférieures. En conclusion, il paraît approprié d'intégrer, dans le cours actuel, certaines notions symplectiques sous forme différentielle afin d'informer les étudiants de leur existence mais un remaniement total du cours dans un formalisme différentiel semble peu opportun à l'heure actuelle.

Conclusion

Ce mémoire propose une étude de la géométrie symplectique selon trois formalismes mathématiques distincts et une conception d'un enseignement axé géométrie différentielle. Sur base du cours SMATB307 de Géométrie symplectique dispensé en bachelier en sciences mathématiques à l'Université de Namur, nous avons développé un grand nombre d'aspects théoriques avant de nous centrer sur le formalisme différentiel en particulier pour proposer une séance de cours pouvant prendre place dans le cours SMATB307 et expérimenter cet enseignement en classe.

La première partie du mémoire présente un état de l'art des principaux résultats et développements théoriques de la géométrie symplectique afin d'avoir une vision globale de cette discipline. Nous avons tout d'abord cherché à comprendre son émergence. Elle provient historiquement de la méthode de la variation des constantes introduite par Lagrange afin d'étudier le problème à n -corps. Ensuite, trois formalismes mathématiques permettant d'analyser la géométrie symplectique sous différents points de vue ont été étudiés. Le formalisme dynamique introduit principalement les équations hamiltoniennes, la structure symplectique de l'espace des phases d'un système mécanique et les transformations canoniques. Le formalisme algébrique, quant à lui, traite des espaces vectoriels symplectiques, des symplectomorphismes et du groupe symplectique linéaire. Finalement, le formalisme différentiel étudie les variétés symplectiques, le fibré cotangent représentant l'espace des phases d'un système mécanique et les crochets de Poisson nécessitant l'introduction des champs de vecteurs hamiltoniens. Ces formalismes ont été développés dans des chapitres distincts mais les liens entre les concepts équivalents existants dans ces axes ont été soulignés et sont résumés dans la Table 1.

Formalisme dynamique	Formalisme algébrique	Formalisme différentiel
Théorème 2.2.2 de Liouville	Conservation de l'aire signée en Sous-section 3.3.3	Théorème 4.7.1 de Liouville différentiel
Champs de vecteurs hamiltoniens en Définition 2.3.3	Champs de vecteurs hamiltoniens linéaires en Définition 3.5.5	Champs de vecteurs hamiltoniens en Définition 4.4.2
Transformation canonique en Définition 2.3.5	Symplectomorphisme en Définition 3.3.2	Transformation canonique en Définition 4.6.2
Groupe symplectique en Définition 2.3.2	Groupe symplectique par la relation (3.14)	
Matrices symplectiques en Définition 2.3.2	Matrices symplectiques en Sous-section 3.3.2	
Matrices hamiltoniennes en Définition 2.3.1	Matrices hamiltoniennes en Définition 3.5.4	
Espace des phases hamiltonien en Définition 4.3.4		Fibré cotangent en Sous-section 4.3.2

Formalisme dynamique	Formalisme algébrique	Formalisme différentiel
Flot hamiltonien en Définition 2.2.3		Flot généré par un champ de vecteurs hamiltonien particulier en Proposition 4.4.1
Parentèses de Poisson en Définition 2.3.8		Crochets de Poisson en Définition 4.5.1
	Espaces vectoriels symplectiques en Définition 3.2.2	Variétés symplectiques en Définition 4.2.1
	Sous-espaces vectoriels d'un espace vectoriel symplectique en Définition 3.4.2	Sous-variétés d'une variété symplectique en Définition 4.2.5
	Espaces vectoriels complexes en Définition 3.6.1	Variétés presque complexes en Définition 4.8.1

TABLE 1 : Concepts équivalents dans les différents formalismes

La deuxième partie du mémoire met en place une stratégie d'enseignement. Nous avons sélectionné les notions à intégrer dans la proposition axée sur le formalisme différentiel et avons travaillé à les expliciter de manière pédagogique. Dans l'enseignement conçu, certains concepts du cours actuel sont repris et expliqués dans une approche plus géométrique : la structure symplectique de l'espace des phases, les équations hamiltoniennes et les crochets de Poisson. Nous avons, de plus, établi des liens entre les deux formalismes à l'aide de l'espace réel de façon à montrer aux étudiants qu'ils sont complémentaires. Cette séquence didactique a été expérimentée dans le cadre du cours SMATB307. A l'aide de nos ressentis et d'un questionnaire proposé aux étudiants, nous avons pu tirer quelques conclusions. D'une part, les étudiants interrogés semblent avoir quelques difficultés à définir le terme *géométrie* et à déterminer si un cours proposé en bachelier en sciences mathématiques peut être perçu comme géométrique. D'autre part, l'appréciation des étudiants quant au contenu de la séance est assez positive. Bien que globalement favorables à l'introduction d'un chapitre plus géométrique dans le cours SMATB307, ils sont cependant partagés étant donné leur vision négative de la géométrie différentielle. Il serait intéressant de réaliser à nouveau une expérience du même type l'année académique prochaine pour analyser si cette sensation est toujours aussi présente.

Bibliographie

- [1] M. Audin et P. Iglesias, *De la mécanique à la géométrie symplectique*, Einstein Institute of Mathematics, Israël, 1994
- [2] R. Berndt, *An Introduction to Symplectic Geometry*, Graduate Studies in Mathematics, American Mathematical Society, Allemagne, 2001
- [3] B. Bonnard, L. Faubourg, E. Trélat, *Mécanique céleste et contrôle des véhicules spatiaux*, Springer, 2006
- [4] R. Brouzet, *La double origine du groupe symplectique*, Expositiones Mathematicae, Elsevier, France, 2003
- [5] T. Carletti, *Syllabus de Géométrie symplectique*, SMATB307, UNamur, 2013
- [6] ChronoMath, *Géométrie différentielles, variétés*, http://serge.mehl.free.fr/anx/geodiff_varietes.html, consulté le 5 mai 2015
- [7] EASO, *Chapitre 2 : Mécanique hamiltonienne*, http://www.aeos.ulg.ac.be/upload/Hamilton_2012_13.pdf, Université de Liège, 2012
- [8] A. Füzfa, *Cours de Géométrie différentielle*, SMATB214, UNamur, 2013
- [9] M. Geis, *Hamiltonian Mechanics and Symplectic Geometry*, Rutgers University, 2012
- [10] M. Goze, *Algèbres de Lie : classifications, déformations et rigidité, géométrie différentielle*, ENSET d'Oran, 2008
- [11] S. Gutt, *Cours de Géométrie symplectique*, MATH - F512, ULB, 2015
- [12] G. Heckman, *Symplectic geometry*, Radboud University Nijmegen, 2014
- [13] F. Hélein, *Introduction à la mécanique statistique et à la physique quantique : Quelques notions de calcul différentiel extérieur et de géométrie différentielle*, M2 de Mathématiques fondamentales, Université Paris Diderot, 2011-2012
- [14] H. Hofer et E. Zehnder, *Symplectic invariants and hamiltonian dynamics*, Birkhäuser Advanced Texts, Zurich, 1994
- [15] P. Iglesias-Zemmour, *Aperçu des origines de la géométrie symplectique*, Einstein Institute of Mathematics, Israël, 2002
- [16] P. Iglesias-Zemmour, *Lagrange et Poisson, sur la variation des constantes*, dans Yvette Kosmann-Schwarzbach, *Siméon-Denis Poisson, Les mathématiques au service de la science*, Histoire des Mathématiques et des Sciences physiques, Les Editions de l'école polytechnique, France, 2013
- [17] *La Lettre de l'Académie des sciences N°33 page 31*, http://www.academie-sciences.fr/activite/lettre/lettre_33/La%20Lettre%20de%20l/files/assets/basic-html/page31.html, consulté le 9 avril 2015
- [18] A. Lemaitre, *Cours de Mécanique du point et du solide*, SMATB208, UNamur, 2013
- [19] E. Lerman, *Symplectic geometry and hamiltonian systems*, <http://www.math.uiuc.edu/lerman/467/v3.pdf>, consulté le 22 juillet 2015
- [20] A-S. Libert, *Cours de Géométrie symplectique*, SMATB307, UNamur, 2013

- [21] C-M. Marle, *Aux sources de la géométrie symplectique : les mémoires de Lagrange et de Poisson sur la méthode de variation des constantes*, Université Pierre et Marie Curie, Paris, France, 2008
- [22] C-M. Marle, *Systèmes hamiltoniens et géométrie symplectique*, Université Pierre et Marie Curie, 2013
- [23] C-M. Marle, *Cours de DEA : Variétés symplectiques et variétés de Poisson*, Université Pierre et Marie Curie, Paris, 2006
- [24] E. Meinrenken, *Symplectic geometry*, University of Toronto, 2000
- [25] S. Perret, *Mathématiques : supplément pour scientifiques*, Version 3.000, Lycée cantonal de Porrentruy, Suisse, 2013
- [26] J-M. Raimond, *Partie I : Mécanique analytique*, [http ://www.phys.ens.fr/cours/notes-de-cours/jmr/analytique.pdf](http://www.phys.ens.fr/cours/notes-de-cours/jmr/analytique.pdf), consulté le 24 septembre 2015
- [27] A. Rivera, *Théorie de Morse, géométrie symplectique et un théorème de convexité*, Universidad de los Andes, Colombia, 31 août 2013
- [28] A. Cannas da Silva, *Lectures on Symplectic Geometry*, Lectures Notes in Mathematics, Springer, 2008
- [29] J-M. Souriau, *La structure symplectique de la mécanique décrite par Lagrange en 1811*, Journée d'histoire des sciences de Marseille, "Mécanique et Mathématiques", 1985
- [30] S. Tabachnikov, *Introduction to symplectic topology, Lecture notes*, PennState University
- [31] S. Thiry, *Cours d'Algèbre supérieure*, SMATB202, UNamur, 2013
- [32] P. Toint, *Syllabus d'Algèbre*, SMATB101, UNamur, 2010-2011
- [33] Wikipédia, *Christian Huygens*, [http ://fr.wikipedia.org/wiki/Christian_Huygens](http://fr.wikipedia.org/wiki/Christian_Huygens), consulté le 28 mars 2015
- [34] Wikipédia, *Géométrie, Géométrie affine, Géométrie algébrique, Géométrie analytique, Géométrie différentielle, Géométrie euclidienne, Géométrie non euclidienne, Géométrie projective, Géométrie riemannienne, Géométrie symplectique et Mécanique analytique*, à partir des pages [http ://fr.wikipedia.org/wiki/Géométrie](http://fr.wikipedia.org/wiki/Géométrie) et [http ://fr.wikipedia.org/wiki/Mécanique_analytique](http://fr.wikipedia.org/wiki/Mécanique_analytique), consultées le 8 avril 2015
- [35] Wikipédia, *Joseph-Louis Lagrange*, [http ://fr.wikipedia.org/wiki/Joseph-Louis_Lagrange](http://fr.wikipedia.org/wiki/Joseph-Louis_Lagrange), consulté le 28 mars 2015
- [36] Wikipédia, *Orbite*, [http ://fr.wikipedia.org/wiki/Orbite](http://fr.wikipedia.org/wiki/Orbite), consulté le 28 mars 2015
- [37] Wikipédia, *Siméon Denis Poisson*, [http ://fr.wikipedia.org/wiki/Siméon_Denis_Poisson](http://fr.wikipedia.org/wiki/Siméon_Denis_Poisson), consulté le 28 mars 2015
- [38] Wikipédia, *William Rowan Hamilton*, [http ://fr.wikipedia.org/wiki/William_Rowan_Hamilton](http://fr.wikipedia.org/wiki/William_Rowan_Hamilton), consulté le 28 mars 2015

Annexe A

Sous-espaces d'espaces vectoriels symplectiques

Nous pouvons définir plusieurs sous-espaces vectoriels particuliers d'espaces symplectiques. Considérons (V, Ω) un espace vectoriel symplectique de dimension $2n$.

A.1 Orthogonal symplectique

Prenons W un sous-espace vectoriel de dimension k de V . Nous définissons premièrement l'orthogonal symplectique avant de donner certaines de ses propriétés.

Définition A.1.1 (Orthogonal symplectique). L'orthogonal symplectique de W , noté $W^\perp$, est défini par

$$W^\perp = \{v \in V \mid \Omega(v, w) = 0, \forall w \in W\}.$$

C'est un sous-espace vectoriel de V .

Remarque A.1.1. Par la non-dégénérescence de Ω , nous avons la relation suivante

$$\dim W^\perp = \dim V - \dim W = 2n - k.$$

Preuve Montrons la formule de cette remarque, sous la forme

$$\dim V = \dim W + \dim W^\perp. \tag{A.1}$$

Nous choisissons une application linéaire f de la forme

$$\begin{aligned} f : V &\rightarrow W^* = \text{Hom}(W, \mathbb{R}) \\ v &\mapsto \Omega(v, \cdot)|_W, \end{aligned}$$

où $\text{Hom}(W, \mathbb{R})$ représente l'ensemble des morphismes de W dans $\mathbb{R}$, i.e. l'espace dual de W comme nous travaillons en dimension finie¹. Nous calculons le noyau et l'image de notre application f afin d'appliquer le Théorème 3.1.8.

- En utilisant la définition de l'orthogonal symplectique, nous obtenons

$$\begin{aligned} \text{Ker } f &= \{v \in V \mid f(v) = 0\} \\ &= \{v \in V \mid \Omega(v, \cdot)|_W = 0\} \\ &= \{v \in V \mid \Omega(v, w)|_W = 0, \forall w \in W\} \\ &= W^\perp. \end{aligned}$$

1. En dimension infinie, le problème de continuité rentre en jeu.

- Par définition,

$$\text{Im } f = \{ \Omega(v, \cdot)|_W \mid v \in V \}.$$

Si nous montrons que f est surjective, l'image de f est constituée de l'espace W^* tout entier. Or,

$$\begin{aligned} f \text{ surjective} &\Leftrightarrow \forall \alpha \in W^*, \exists v \in V \mid \alpha = \Omega(v, \cdot)|_W \\ &\Leftrightarrow \forall \alpha \in W^*, \exists v \in V \mid \forall w \in W, \alpha(w) = \Omega(v, w). \end{aligned}$$

Nous pouvons écrire la dernière égalité en écriture matricielle comme suit

$$Aw = v^T (\Omega_{ij}) w, \quad (\text{A.2})$$

pour tout w dans W et où A est la matrice représentant la forme linéaire α . L'équation (A.2) peut être résolue afin de trouver un vecteur v , pour toute forme linéaire α , sous la forme

$$v = (\Omega_{ij})^{-T} A^T.$$

Cette relation est seulement vérifiée si la matrice de la forme symplectique (Ω_{ij}) est non-dégénérée afin de pouvoir l'inverser. Nous venons donc de vérifier la surjectivité de l'application f .

Nous obtenons que

$$\dim V = \dim W^\perp + \dim W^*.$$

Pour finir, la dimension du dual de W est égale à la dimension de W , ce qui clôture cette preuve. $\square$

Propriété A.1.1. *Les espaces Ω -orthogonaux ont les propriétés suivantes.*

- a) $W^\perp \subset U^\perp$ si $U \subset W$;
- b) $(W^\perp)^\perp = W$;
- c) $(W + W')^\perp = W^\perp \cap W'^\perp$;
- d) $(W \cap W')^\perp = W^\perp + W'^\perp$.

Preuve Montrons ces différentes propriétés grâce à la Définition A.1.1.

a) Soit $v \in W^\perp$, i.e. $\Omega(v, w) = 0$, pour tout w dans W . Comme $U \subset W$, $\Omega(v, w) = 0$ pour tout w dans U . Nous pouvons donc conclure que v appartient à $U^\perp$, ce qu'il fallait démontrer.

b) Par définition, $(W^\perp)^\perp = \{v \in V \mid \Omega(v, u) = 0, \forall u \in W^\perp\}$. D'une part, prenons $v \in W$. Il est évident que $\Omega(v, u) = 0$, pour tout $u \in W^\perp$. Donc,

$$W \subset (W^\perp)^\perp. \quad (\text{A.3})$$

D'autre part, par la formule (A.1), nous pouvons écrire les deux relations suivantes²

$$\begin{aligned} \dim W + \dim W^\perp &= \dim V \\ \dim W^\perp + \dim (W^\perp)^\perp &= \dim V. \end{aligned}$$

Nous avons donc que la dimension de W est égale à la dimension de $(W^\perp)^\perp$. Comme nous travaillons avec deux sous-espaces vectoriels de même dimension et que la relation (A.3) est vérifiée,

2. En considérant le sous-espace de la formule comme W et puis comme $W^\perp$.

nous obtenons la thèse.

c) Par la bilinéarité de la forme Ω , nous avons les égalités suivantes

$$\begin{aligned}
 (W + W')^\perp &= \{v \in V \mid \Omega(v, w + w') = 0, \forall w \in W, \forall w' \in W'\} \\
 &= \{v \in V \mid \underbrace{\Omega(v, w) + \Omega(v, w')}_{\diamond} = 0, \forall w \in W, \forall w' \in W'\} \\
 &\stackrel{*}{=} \{v \in V \mid \Omega(v, w) = 0, \forall w \in W, \wedge \Omega(v, w') = 0, \forall w' \in W'\} \\
 &= \{v \in V \mid \Omega(v, w) = 0, \forall w \in W\} \cap \{v \in V \mid \Omega(v, w') = 0, \forall w' \in W'\} \\
 &= W^\perp \cap W'^\perp.
 \end{aligned}$$

Le passage $\star$ se justifie comme suit. En prenant l'égalité $\diamond$,

$$\begin{cases} \text{pour } w' = 0, \text{ nous obtenons } \Omega(v, w) = 0, \forall w \in W \\ \text{pour } w = 0, \text{ nous obtenons } \Omega(v, w') = 0, \forall w' \in W' \end{cases}.$$

d) Par la formule c) en prenant

$$\begin{cases} W \rightarrow W^\perp \\ W' \rightarrow W'^\perp \end{cases},$$

nous obtenons³,

$$(W^\perp + W'^\perp)^\perp = (W^\perp)^\perp \cap (W'^\perp)^\perp = W \cap W'.$$

En prenant l'orthogonal symplectique des deux côtés de l'égalité et en utilisant le point b), la thèse est vérifiée.

□

Le concept d'orthogonalité en géométrie symplectique est assez différent de celui en géométrie euclidienne. En effet, W et $W^\perp$ ne sont pas obligatoirement des espaces complémentaires dans notre cas. Par exemple, chaque vecteur $v \in V$ est orthogonal à lui-même par l'antisymétrie, $\Omega(v, v) = -\Omega(v, v)$. Donc, si $\dim W = 1$, nous avons $W \subset W^\perp$, en appliquant la Définition A.1.1. Cependant, l'égalité $W = W^\perp$ n'est pas nécessairement vérifiée puisque la dimension de $W^\perp$ ne vaut pas 1⁴.

3. La dernière égalité utilise le point b) des propriétés.

4. Pour prouver que $W^\perp \subset W$, nous pouvons le voir comme $W^\perp \subset (W^\perp)^\perp$.

A.2 Sous-espaces vectoriels

Les exemples les plus importants de sous-espaces vectoriels d'un espace symplectique (V, Ω) sont les suivants.

Définition A.2.1 (Sous-espaces d'un espace symplectique).

1. Un sous-espace $W \subset V$ vérifiant $\Omega|_{W \times W}$ non-dégénérée⁵ est appelé sous-espace symplectique de (V, Ω) .
2. Un sous-espace Q de V vérifiant $\Omega|_{Q \times Q} \equiv 0$ est appelé sous-espace isotropique de (V, Ω) .
3. Un sous-espace $W \subset V$ vérifiant $W^\perp$ isotropique est appelé sous-espace coïslotropique de (V, Ω) .
4. Un sous-espace $L \subset V$ étant isotropique et coïslotropique est appelé sous-espace lagrangien de (V, Ω) .

Concernant un sous-espace symplectique W , nous avons que W et $W^\perp$ sont complémentaires, i.e.

$$W \oplus W^\perp = V, \quad (\text{A.4})$$

par la formule (A.1). De plus, W est symplectique si et seulement si $W^\perp$ est symplectique, par la symétrie de W et $W^\perp$ dans (A.4).

Un sous-espace lagrangien peut donc être décrit comme un sous-espace isotropique maximal. Par exemple, $\mathbb{R}^n$ est un sous-espace lagrangien de $\mathbb{C}^n$. Ces sous-espaces sont les plus importants en géométrie symplectique.

Proposition A.2.1. *Si $L \subset V$ est un sous-espace lagrangien d'un espace vectoriel symplectique (V, ω) , alors $\dim L = \frac{1}{2} \dim V$.*

Proposition A.2.2. *Si L est un sous-espace lagrangien de (V, Ω) , alors toute base $\{e_1, \dots, e_n\}$ de L peut être étendue à une base symplectique $\{e_1, \dots, e_n, f_1, \dots, f_n\}$ de (V, Ω) .*

Preuve

Soit $\{e_1, \dots, e_n\}$ une base de L . Nous cherchons un ensemble de vecteurs de V , $\{f_1, \dots, f_n\}$, tel que $\{e_1, \dots, e_n, f_1, \dots, f_n\}$ soit une base symplectique de (V, Ω) , i.e. la matrice de Ω dans cette base soit donnée par (3.9).

★ Le premier bloc constitué de la matrice nulle $n \times n$ provient du fait que L est symplectique. En effet, par définition, nous avons que $\Omega|_{L \times L} \equiv 0$. De là, $\Omega(e_i, e_j) = 0$, pour tout $1 \leq i, j \leq n$.

★ Considérons le sous-espace vectoriel $W_1 = \text{span}\{e_2, \dots, e_n\}$.

Nous pouvons écrire l'orthogonal de W_1 , par la bilinéarité de Ω , comme suit

$$\begin{aligned} W_1^\perp &= \{v \in V \mid \Omega(v, w) = 0, \forall w \in W_1\} \\ &= \{v \in V \mid \Omega(v, e_i) = 0, \forall 2 \leq i \leq n\}. \end{aligned}$$

Nous remarquons aussi, par la formule (A.1), que

$$\dim W_1^\perp = 2n - \dim W_1 = n + 1.$$

Par ces deux observations, nous savons qu'il existe u_1 dans $W_1^\perp$ tel que $\Omega(u_1, e_1)$ soit différent de 0. Sinon, nous aurions que, pour tout u_1 dans $W_1^\perp$, $\Omega(u_1, e_1)$ est nul. Alors,

$$\begin{aligned} W_1^\perp &= \{v \in V \mid \Omega(v, e_i) = 0, \forall 1 \leq i \leq n\} \\ &= (\text{span}\{e_1, \dots, e_n\})^\perp. \end{aligned}$$

5. Nous pouvons toujours restreindre la forme symplectique Ω à un sous-espace vectoriel W . Cette forme restreinte $\Omega|_W$ est évidemment antisymétrique mais, en général, n'est plus non-dégénérée.

Or, la dimension de $\text{span}\{e_1, \dots, e_n\}$ vaut n , ce qui implique que la dimension de $(\text{span}\{e_1, \dots, e_n\})^\perp$ vaut n également par la relation (A.1). Nous obtenons donc une contradiction étant donné que la dimension de $W_1^\perp$ est égale à $n+1$.

Il existe donc u_1 dans $W_1^\perp$ tel que $\Omega(u_1, e_1) = r_1$, avec $r_1 \in \mathbb{R}_0$. De là, nous pouvons définir notre premier vecteur f_1 comme $\frac{u_1}{r_1}$. Celui-ci appartient à $W^\perp$ puisque il s'agit d'un sous-espace vectoriel. Nous avons donc un vecteur f_1 vérifiant $\Omega(e_1, f_1) = 1$ et $\Omega(e_j, f_1) = 0$, pour tout $j \neq 1$.

★ Nous construisons maintenant le vecteur f_2 en suivant presque la même méthode. Nous avons cependant une contrainte supplémentaire : ce nouveau vecteur et f_1 doivent également être Ω -orthogonaux. Nous considérons alors l'espace W_2 comme $\text{span}\{e_1, e_3, \dots, e_n, f_1\}$ et choisissons f_2 dans l' Ω -orthogonal de W_2 , où

$$W_2^\perp = \{v \in V \mid \Omega(v, e_i) = 0, \forall i \neq 2 \text{ et } \Omega(v, f_1) = 0\}.$$

Comme précédemment, il existe⁶ $u_2 \in W_2^\perp$ tel que $\Omega(u_2, e_2) = r_2 \neq 0$. Nous définissons f_2 comme $\frac{u_2}{r_2}$. Ce vecteur vérifie $\Omega(e_2, f_2) = 1$, $\Omega(e_j, f_2) = 0$, pour tout $j \neq 2$, et $\Omega(f_1, f_2) = 0$.

★ De la même façon, nous pouvons construire successivement⁷ $f_3, \dots, f_n$. Pour k allant de 3 à n , nous utilisons pour ce faire le sous-espace vectoriel $W_k = \text{span}\{e_1, \dots, e_{k-1}, e_{k+1}, \dots, e_n, f_1, \dots, f_{k-1}\}$.

★ Pour une base $\{e_1, \dots, e_n\}$ de L , nous avons donc construit un ensemble de vecteurs, $\{f_1, \dots, f_n\} \subset V$, tel que $\{e_1, \dots, e_n, f_1, \dots, f_n\}$ soit une base symplectique de (V, Ω) , i.e. les relations suivantes soient vérifiées, pour $1 \leq i, j \leq n$,

$$\begin{cases} \Omega(e_i, e_j) = 0 \\ \Omega(f_i, f_j) = 0 \\ \Omega(e_i, f_j) = \delta_{ij} \end{cases}.$$

La matrice de Ω dans la base choisie est symplectique⁸, ce qu'il fallait montrer.

□

Nous pouvons résumer les principales propriétés des différents sous-espaces ci-dessous.

Propriété A.2.1. *Pour un sous-espace $W \subset V$ avec $\dim W = k$, nous avons*

$$\begin{aligned} W \text{ symplectique} &\Leftrightarrow W \cap W^\perp = \{0\} \\ W \text{ isotropique} &\Leftrightarrow W \subset W^\perp \Rightarrow k \leq n \\ W \text{ coïsoptropique} &\Leftrightarrow W \supset W^\perp \Rightarrow k \geq n \\ W \text{ lagrangien} &\Leftrightarrow W = W^\perp \Rightarrow k = n. \end{aligned}$$

Preuve Prouvons ces propriétés en utilisant la Définition A.2.1.

W SYMPLECTIQUE

$\Rightarrow$ Prenons W un sous-espace symplectique. Nous supposons donc que $\Omega|_{W \times W}$ est non-dégénérée. Or,

$$W \cap W^\perp = \{v \in W \mid \Omega(v, w) = 0, \forall w \in W\}. \quad (\text{A.5})$$

Par la non-dégénérescence de la restriction de Ω à $W \times W$, $W \cap W^\perp$ est réduit au neutre.

$\Leftarrow$ Supposons que $W \cap W^\perp = \{0\}$. Par la relation (A.5), nous avons directement que $\Omega|_{W \times W}$ est non-dégénérée, et donc la thèse.

6. La preuve par l'absurde de cette affirmation est similaire au cas de f_1 .

7. En effet, f_{k-1} est utilisé dans la définition de W_k .

8. Par l'antisymétrie de Ω , nous obtenons aussi que $\Omega(f_i, e_j) = -\delta_{ij}$, pour $1 \leq i, j \leq n$.

W ISOTROPIQUE

Partons de la droite de cette équivalence et développons-la.

$$\begin{aligned} W \subset W^\perp &\Leftrightarrow \forall v \in W, \Omega(v, w) = 0, \forall w \in W \\ &\Leftrightarrow \Omega|_{W \times W} \equiv 0, \end{aligned}$$

ce qui est la définition d'un sous-espace isotropique.

Concernant la relation sur les dimensions, nous pouvons utiliser la formule (A.1) nous affirmant que

$$\dim W + \dim W^\perp = 2n,$$

où $2n$ est la dimension de V . Puisque $W \subset W^\perp$, la dimension de W doit être plus petite ou égale à la dimension de $W^\perp$. De là, nous obtenons que⁹

$$\dim W \leq n.$$

 W COÏSOTROPIQUE

Par le point $b)$ de la Propriété A.1.1, nous avons que

$$\begin{aligned} W \text{ coïsoptropique} &\Leftrightarrow W^\perp \text{ isotropique} \\ &\Leftrightarrow W^\perp \subset (W^\perp)^\perp = W. \end{aligned}$$

De plus, la formule des dimensions se démontre de manière analogue à celle du sous-espace isotropique.

 W LAGRANGIEN

Evident par les propriétés d'isotropie et de coïsoptropie assemblées.

□

9. Sinon, en supposant que $\dim W > n$, nous aurions que $\dim W^\perp > n$ et la dimension de l'espace V serait strictement plus grande que $2n$.

Annexe B

Orbite coadjointe et action symplectique

B.1 Rappels d'algèbre supérieure

L'orbite coadjointe, exemple de variété symplectique, utilise des notions d'algèbre supérieure. Nous donnons, dans cette section, les rappels indispensables à cet exemple en nous servant du syllabus du cours SMATB202 d'*Algèbre supérieure* donné à l'UNamur [31].

B.1.1 Sous-groupes

Soit G un groupe¹. Nous nous intéressons aux sous-ensembles de G qui obéissent aux axiomes du groupe pour la loi de composition définie sur G .

Définition B.1.1 (Sous-groupe). Soient G un groupe et $H \subseteq G$. H est un sous-groupe de G si les conditions suivantes sont satisfaites :

1. $u, v \in H \Rightarrow uv \in H$;
2. $1 \in H$ où 1 est le neutre de G ;
3. $u \in H \Rightarrow u^{-1} \in H$.

Nous en venons à la définition d'une classe latérale.

Définition B.1.2 (Classe latérale). Soient G un groupe et H un sous-groupe de G . Une classe latérale à droite (respectivement à gauche) selon H est un ensemble de la forme Hx (respectivement xH) où x est un élément quelconque de G .

L'ensemble des classes latérales à droite (ou à gauche) selon H définit le *quotient* à droite (ou à gauche) de G par H et se note $(G/H)_d$ (ou $(G/H)_g$). Nous avons les égalités suivantes

$$\begin{aligned}(G/H)_d &= \{Hx \mid x \in G\}, \\ (G/H)_g &= \{xH \mid x \in G\}.\end{aligned}$$

Nous définissons également la relation d'équivalence suivante.

Définition B.1.3 (Conjugaison). Soit G un groupe. Les éléments $a, b \in G$ sont conjugués si

$$\exists t \in G : b = tat^{-1}.$$

La relation de conjugaison définie sur G par

$$a \sim b \Leftrightarrow \exists t \in G : b = t^{-1}at$$

est une relation d'équivalence sur G .

1. Voir Définition 3.1.9.

B.1.2 Action d'un groupe sur un ensemble

Nous introduisons tout d'abord cette notion.

Définition B.1.4 (Action d'un groupe sur un ensemble). Une action d'un groupe G sur un ensemble X est une application

$$\begin{aligned} \rho : G \times X &\rightarrow X \\ (g, S) &\mapsto \rho(g)S = g \bullet S \end{aligned}$$

qui vérifie

1. $\rho(e) = id_X$, c'est-à-dire $e \bullet S = S$, pour tout $S \in X$ et où e représente le neutre de G ;
2. $\rho(g') \circ \rho(g) = \rho(g'g)$, c'est-à-dire $g' \bullet (g \bullet S) = (g'g) \bullet S$, pour tout $g, g' \in G$ et pour tout $S \in X$.

On dit que le groupe G opère sur l'ensemble X .

Nous considérons une action du groupe G sur l'ensemble X . Nous pouvons définir deux ensembles particuliers.

Définition B.1.5 (Orbite). On appelle orbite de $S \in X$ l'ensemble

$$\text{Orb}(S) = \{g \bullet S \mid g \in G\}.$$

Définition B.1.6 (Stabilisateur). On appelle stabilisateur de $S \in X$ l'ensemble

$$\text{Stab}(S) = \{g \in G \mid g \bullet S = S\}.$$

Le stabilisateur d'un point S de X est donc l'ensemble des éléments du groupe G laissant S inchangé. De plus, $\text{Stab}(S)$ est un sous-groupe de G .

Nous énonçons finalement un théorème nous donnant une bijection entre le quotient de G par le stabilisateur de S et l'orbite de S .

Théorème B.1.1. *Nous considérons une action du groupe G sur l'ensemble X , notée*

$$g \bullet S,$$

où $g \in G$ et $S \in X$. La correspondance

$$\begin{aligned} f : (G/\text{Stab}(S))_g &\rightarrow \text{Orb}(S) \\ g\text{Stab}(S) &\mapsto g \bullet S \end{aligned}$$

est une bijection.

B.2 Orbite coadjointe

Nous développons un troisième exemple de variété symplectique en lien avec les notions d'algèbre vues en Section 3.5 et celles rappelées en Section B.1. Cet exemple est celui de l'orbite sous l'action coadjointe.

Les définitions d'action d'un groupe G sur un ensemble X , d'orbite et de stabilisateur introduits en Définitions B.1.4, B.1.5 et B.1.6 peuvent être particularisées en prenant G comme un groupe de Lie² et, non plus X comme un ensemble quelconque, mais X comme une variété différentiable M .

Nous pouvons énoncer le résultat suivant, en se rappelant le Théorème B.1.1 qui introduit une bijection entre l'orbite et le quotient du groupe par le stabilisateur.

2. En Définition 3.5.2.

Théorème B.2.1. *Soit $\rho : G \times M \rightarrow M$ une action d'un groupe de Lie G sur une variété M . Soit $P \in M$. Alors $\text{Orb}(P)$ est munie d'une structure de variété³ $\text{Orb}(P) \cong G/\text{Stab}(P)$.*

En considérant l'application

$$\begin{aligned} L_g : G &\rightarrow G \\ k &\mapsto gk, \end{aligned}$$

où g appartient à G , nous pouvons donner la définition suivante.

Définition B.2.1 (Champ de vecteurs invariants à gauche). Un champ de vecteurs X sur G est dit invariant à gauche si et seulement si, pour tout élément g, h de G , nous avons l'égalité suivante

$$(L_g)_{*h} X|_h = X|_{gh}.$$

Nous donnons maintenant deux remarques sur ces champs de vecteurs.

1. Si X est un champ de vecteurs invariant à gauche, alors

$$X|_g = (L_g)_{*e} X|_e, \text{ pour tout } g \text{ dans } G.$$

2. Si $Y \in T_e(G)$ et si nous définissons $Y|_g = (L_g)_{*e} Y$, alors Y est un champ invariant à gauche. En effet⁴,

$$\begin{aligned} (L_g)_{*h} Y|_h &= (L_g)_{*h} (L_h)_{*e} Y \\ &= (L_g \circ L_h)_{*e} Y \\ &= (L_{gh})_{*e} Y \\ &= Y|_{gh}. \end{aligned}$$

Grâce à ces deux remarques, nous pouvons construire une bijection entre l'algèbre de Lie⁵ $\mathcal{G}$ du groupe de Lie G et l'ensemble des champs de vecteurs invariants à gauche de G donnée par

$$\begin{aligned} T_e(G) &\longleftrightarrow \{\text{champs de vecteurs invariants à gauche de } G\} \\ Y &\longrightarrow \tilde{Y} \text{ tel que } \tilde{Y}|_g = (L_g)_{*e} Y \\ X \text{ tel que } X &= \tilde{X}|_e \longleftarrow \tilde{X}. \end{aligned}$$

Nous pouvons, à partir de cette bijection, définir un crochet de Lie sur l'algèbre de Lie $\mathcal{G}$.

Définition B.2.2 (Crochet de Lie sur l'algèbre de Lie). Le crochet de Lie $[\cdot, \cdot]_{\mathcal{G}}$ sur l'algèbre de Lie $\mathcal{G}$ est défini par

$$\begin{aligned} [\cdot, \cdot]_{\mathcal{G}} : \mathcal{G} \times \mathcal{G} &\rightarrow \mathcal{G} \\ (X, Y) &\mapsto [X, Y]_{\mathcal{G}} := \left([\tilde{X}, \tilde{Y}] \right)|_e, \end{aligned}$$

où $[\tilde{X}, \tilde{Y}]$ est le crochet de Lie donné en Définition 4.1.30.

Prenons $g \in G$ un élément d'un groupe de Lie. Grâce à la Définition B.1.3, nous pouvons définir la conjugaison par g comme l'application $\mathcal{C}^\infty$ suivante

$$\begin{aligned} c(g) : G &\rightarrow G \\ h &\mapsto ghg^{-1}. \end{aligned}$$

Nous pouvons maintenant donner deux applications.

3. La notation $\cong$ indique le fait qu'il existe une bijection entre les deux espaces.

4. Par propriété du pushforward et en notant que $L_{g'} \circ L_g = L_{g'g}$.

5. En Définition 3.5.3.

Définition B.2.3 (Application adjointe). Soit $g \in G$, l'application adjointe de G est définie comme le pushforward de la conjugaison par g au neutre, c'est-à-dire

$$Adg := c(g)_{*e} : \mathcal{G} \rightarrow \mathcal{G}.$$

Cette application est linéaire.

Définition B.2.4 (Application coadjointe). Soit $g \in G$, l'application coadjointe de G est définie par

$$\begin{aligned} Ad^*g : \mathcal{G}^* &\rightarrow \mathcal{G}^* \\ \xi &\mapsto (Ad^*g)(\xi) := \xi \circ Ad(g^{-1}), \end{aligned}$$

où $\mathcal{G}^*$ est le dual de $\mathcal{G}$. Cette application est linéaire.

Avant de définir une 2-forme symplectique sur une orbite, nous avons encore besoin d'introduire la notion de champ fondamental associé à un champ de vecteurs de l'algèbre de Lie. Nous définissons tout d'abord l'application exponentielle nécessaire à cette définition.

Définition B.2.5 (Application exponentielle). L'application exponentielle est donnée par la formule suivante

$$\begin{aligned} exp : \mathcal{G} &\rightarrow G \\ X &\mapsto expX := \gamma_{\tilde{X}}(1), \end{aligned}$$

où $\gamma_{\tilde{X}} : \mathbb{R} \rightarrow G$ est la courbe intégrale de $\tilde{X}$ de condition initiale e et $\tilde{X}$ est un champ de vecteurs tel que, en un élément g de G , $\tilde{X}|_g = (L_g)_{*e} X$.

Nous donnons maintenant la définition de champ fondamental.

Définition B.2.6 (Champ fondamental associé à un champ de vecteurs de l'algèbre de Lie). Soit $\rho : G \times M \rightarrow M$ une action d'un groupe de Lie G sur une variété M . Soit $X \in \mathcal{G}$. Le champ fondamental associé à X , noté $X^{*M} \in \mathcal{X}(M)$, est défini, pour tout $P \in M$, par

$$X|_P^{*M} = \frac{d}{dt}\Big|_0 (\rho(exp - tX)P).$$

Propriété B.2.1. *Nous donnons certaines propriétés concernant l'application exponentielle et les champs fondamentaux.*

1. Nous avons l'égalité suivante

$$Ad(exp tY) = Exp(t(adY)),$$

où

$$\begin{aligned} adY : \mathcal{G} &\rightarrow \mathcal{G} \\ Z &\mapsto [Y, Z] \end{aligned}$$

et Exp représente l'exponentielle habituelle.

2. Pour tout $Y \in \mathcal{G}$,

$$(exp - tY)^{-1} = exp tY.$$

3. Pour tout $y \in Orb(P)$ ⁶ et $P \in M$,

$$T_y(Orb(P)) = \left\{ X|_y^{*Orb(P)} \mid X \in \mathcal{G} \right\}.$$

6. L'orbite de P est une variété par le Théorème B.2.1.

4. Soit ρ une action à gauche d'un groupe de Lie G sur une variété M . Soient $X \in \mathcal{G}$ et X^{*M} le champ fondamental associé. Alors, pour tout X et $Y \in \mathcal{G}$,

$$[X^{*M}, Y^{*M}] = ([X, Y]_{\mathcal{G}})^{*M}.$$

5. Nous pouvons représenter le champ de vecteurs X^{*M} par une courbe. En effet, en prenant

$$\gamma(t) = \rho(\exp -tX) P,$$

où P appartient à la variété M , nous pouvons écrire

$$X|_P^{*M} = \dot{\gamma}(0).$$

Par rapport à la Propriété 5, nous pouvons définir formellement $\dot{\gamma}(t)$.

Définition B.2.7 (Représentation d'un vecteur par une courbe). Si $\gamma : I \rightarrow M$ est une courbe $\mathcal{C}^\infty$ et si $t \in I$, nous définissons

$$\begin{aligned} \dot{\gamma}(t) : \mathcal{C}^\infty &\rightarrow \mathbb{R} \\ f &\mapsto \dot{\gamma}(t)(f) := \left. \frac{df(\gamma(s))}{ds} \right|_t. \end{aligned}$$

Alors, $\dot{\gamma}(t) \in T_{\gamma(t)}M$.

Nous remarquons qu'il s'agit uniquement d'une écriture différente pour un vecteur tangent. En effet, avec la Définition 4.1.5, nous voyons immédiatement que $\dot{\gamma}(t)$ est le vecteur tangent à la courbe γ en t .

Nous avons enfin tous les éléments en main pour définir notre exemple de variété symplectique. Considérons G un groupe de Lie et $\mathcal{G}$ son algèbre de Lie. Prenons $\xi \in \mathcal{G}^*$. Nous définissons son orbite sous l'action coadjointe par

$$\begin{aligned} \text{Orb}(\xi) &= \{Ad^*(g)\xi \mid g \in G\} \\ &= \{\xi \circ Ad(g^{-1}) \mid g \in G\} \subset \mathcal{G}^*. \end{aligned}$$

Par le Théorème B.2.1, chaque orbite $\text{Orb}(\xi)$ de G dans $\mathcal{G}^*$ est munie d'une structure de variété $\text{Orb}(\xi) \cong G/\text{Stab}(\xi)$, où $\text{Stab}(\xi) = \{g \in G \mid \xi \circ Ad(g^{-1}) = \xi\}$.

Considérons aussi $f \in \text{Orb}(\xi)$ tel que

$$T_f(\text{Orb}(\xi)) = \left\{ X|_f^{*\text{Orb}(\xi)} \mid X \in \mathcal{G} \right\}. \quad (\text{B.1})$$

Définition B.2.8 (2-forme symplectique sur une orbite⁷). Pour tout Y, Z dans l'algèbre de Lie $\mathcal{G}$, la 2-forme ω sur $\text{Orb}(\xi)$ est définie par

$$\omega|_f^{\text{Orb}(\xi)} \left(Y|_f^{*\text{Orb}(\xi)}, Z|_f^{*\text{Orb}(\xi)} \right) := -\langle f, [Y, Z]_{\mathcal{G}} \rangle.$$

Nous regardons maintenant si ω est bien définie et ensuite nous vérifions que cette 2-forme est symplectique, c'est-à-dire fermée et non-dégénérée. Ces trois points sont réalisés grâce aux Propriétés B.2.1.

7. Nous utilisons les notations définies juste au-dessus.

1. BIEN DÉFINIE ? Montrons que, si nous prenons deux champs fondamentaux⁸ égaux $Y|_f^*$ et $U|_f^*$, alors cela implique que

$$\langle f, [Y, Z]_{\mathcal{G}} \rangle = \langle f, [U, Z]_{\mathcal{G}} \rangle,$$

où $f \in \text{Orb}(\xi)$ et $Z \in \mathcal{G}$. Or, par les Définitions B.2.4⁹ et B.2.6 ainsi que par les Propriétés 1 et 2, nous avons les égalités suivantes¹⁰

$$\begin{aligned} Y^*|_f &= \left. \frac{d}{dt} \right|_0 (\rho(\exp - tY) f) \\ &= \left. \frac{d}{dt} \right|_0 (f \circ \text{Ad}(\exp tY)) \\ &= \left. \frac{d}{dt} \right|_0 (f \circ (\text{Exp}(t \text{ad}Y))) \\ &= f \circ \text{ad}Y. \end{aligned}$$

Par la Définition 4.1.12 du produit interne et par la Propriété 1,

$$\begin{aligned} \langle f \circ \text{ad}Y, Z \rangle &= (f \circ \text{ad}Y)(Z) \\ &= f(\text{ad}Y(Z)) \\ &= f([Y, Z]_{\mathcal{G}}). \end{aligned}$$

Nous obtenons donc que¹¹

$$\langle f \circ \text{ad}Y, Z \rangle = \langle f, [Y, Z]_{\mathcal{G}} \rangle. \quad (\text{B.2})$$

Finalement,

$$\begin{aligned} Y^*|_f = U^*|_f &\Leftrightarrow f \circ \text{ad}Y = f \circ \text{ad}U \\ &\Rightarrow \langle f \circ \text{ad}Y, Z \rangle = \langle f \circ \text{ad}U, Z \rangle, \forall Z \in \mathcal{G} \\ &\Leftrightarrow \langle f, [Y, Z]_{\mathcal{G}} \rangle = \langle f, [U, Z]_{\mathcal{G}} \rangle, \forall Z \in \mathcal{G}. \end{aligned}$$

Nous avons donc montré que la 2-forme ω est bien définie.

2. FERMÉE ? Soit $f \in \text{Orb}(\xi)$. Prenons trois vecteurs au point f de notre variété¹² : $U = X|_f^*$, $V = Y|_f^*$ et $W = Z|_f^*$. Nous voudrions obtenir

$$(d\omega)|_f(U, V, W) = 0.$$

Nous utilisons, pour ce faire, la Propriété 4.5.2. Dans notre cas, en l'évaluant au point f de $\text{Orb}(\xi)$, nous obtenons comme relation¹³

$$(d\omega)|_f(X|_f^*, Y|_f^*, Z|_f^*) = \bigoplus_{XYZ}^{\curvearrowright} X|_f^*(\omega(Y^*, Z^*)) - \bigoplus_{XYZ}^{\curvearrowright} \omega|_f([X^*, Y^*]|_f, Z|_f^*).$$

8. Nous allégeons quelque peu les notations, nous travaillons toujours avec des champs fondamentaux sur la variété $\text{Orb}(\xi)$.

9. Pour définir l'action coadjointe.

10. Concernant la dernière égalité, $\text{Exp}(t \text{ad}Y)$ peut être vue comme une exponentielle matricielle, puisque $\text{ad}Y : \mathcal{G} \rightarrow \mathcal{G}$ est une application linéaire. Nous pouvons donc appliquer les propriétés habituelles de la dérivée.

11. Puisque $f \in \mathcal{G}^*$ et $[Y, Z]_{\mathcal{G}} \in \mathcal{G}$.

12. Par la relation (B.1).

13. Le lecteur attentif remarquera dans cette relation que les vecteurs et 2-formes sont bien différenciés des champs vectoriels et champs de 2-formes.

Nous développons d'abord le premier membre, en utilisant successivement la Propriété 5, les Définitions B.2.7, B.2.8 et B.2.4 ainsi que les Propriétés 2, 1 et l'équation (B.2). Nous obtenons

$$\begin{aligned}
X|_f^*(\omega(Y^*, Z^*)) &= \frac{d}{dt}\Big|_0 ((\omega(Y^*, Z^*))(\rho(\exp - tX)f)) \\
&= \frac{d}{dt}\Big|_0 \left(\omega_{\rho(\exp - tX)f} \left(Y|_{\rho(\exp - tX)f}^*, Z|_{\rho(\exp - tX)f}^* \right) \right) \\
&= -\frac{d}{dt}\Big|_0 \langle \rho(\exp - tX)f, [Y, Z]_{\mathcal{G}} \rangle \\
&= -\frac{d}{dt}\Big|_0 \langle f \circ \text{Ad}(\exp tX), [Y, Z]_{\mathcal{G}} \rangle \\
&= -\frac{d}{dt}\Big|_0 \langle f \circ \text{Exp}(t(\text{ad}X)), [Y, Z]_{\mathcal{G}} \rangle \\
&= -\langle f \circ \text{ad}X, [Y, Z]_{\mathcal{G}} \rangle \\
&= -\langle f, [X, [Y, Z]_{\mathcal{G}}]_{\mathcal{G}} \rangle.
\end{aligned}$$

Le premier membre devient donc, par linéarité et par l'identité de Jacobi du crochet de Lie sur l'algèbre de Lie,

$$\begin{aligned}
\bigoplus_{XYZ}^{\curvearrowright} X|_f^*(\omega(Y^*, Z^*)) &= -\langle f, \bigoplus_{XYZ}^{\curvearrowright} [X, [Y, Z]_{\mathcal{G}}]_{\mathcal{G}} \rangle \\
&= 0.
\end{aligned}$$

Nous regardons maintenant le deuxième membre. Nous avons, par la Propriété 4, la Définition B.2.8 et l'identité de Jacobi du crochet de Lie sur l'algèbre de Lie, les égalités suivantes

$$\begin{aligned}
\bigoplus_{XYZ}^{\curvearrowright} \omega|_f([X^*, Y^*]|_f, Z|_f^*) &= \bigoplus_{XYZ}^{\curvearrowright} \omega|_f([X, Y]_{\mathcal{G}}|_f^*, Z|_f^*) \\
&= -\langle f, \bigoplus_{XYZ}^{\curvearrowright} [X, Y]_{\mathcal{G}}, Z|_{\mathcal{G}} \rangle \\
&= 0.
\end{aligned}$$

Nous avons donc montré que la 2-forme ω est fermée.

3. NON-DÉGÉNÉRÉE ? Prenons $f \in \text{Orb}(\xi)$ et $U \in T_f(\text{Orb}(\xi))$. Montrons que

$$\omega|_f(U, V) = 0, \quad \forall V \in T_f(\text{Orb}(\xi)),$$

implique que $U = 0$. Nous écrivons U et V sous forme de champs fondamentaux : $U = X|_f^*$ et $V = Y|_f^*$. Nous avons successivement, par la Définition B.2.8 et la relation (B.2), que

$$\begin{aligned}
\omega|_f(X|_f^*, Y|_f^*) = 0, \quad \forall Y \in \mathcal{G} &\Leftrightarrow \langle f, [X, Y]_{\mathcal{G}} \rangle = 0, \quad \forall Y \in \mathcal{G} \\
&\Leftrightarrow \langle f \circ \text{ad}X, Y \rangle = 0, \quad \forall Y \in \mathcal{G} \\
&\Leftrightarrow f \circ \text{ad}X = 0 \\
&\Leftrightarrow X|_f^* = U = 0.
\end{aligned}$$

Ce qui prouve la non-dégénérescence de ω .

Nous avons donc montré que, pour tout $\xi \in \mathcal{G}^*$, $(\text{Orb}(\xi), \omega)$ est une variété symplectique.

B.3 Action symplectique

Nous considérons l'action (à gauche, différentiable) d'un groupe de Lie G sur une variété symplectique (M, ω) .

Définition B.3.1 (Action de G sur M par symplectomorphisme¹⁴). Une action d'un groupe de Lie G sur une variété symplectique M par symplectomorphisme est une application

$$\begin{aligned} \rho : G \times M &\rightarrow M & \mathcal{C}^\infty \\ (g, P) &\mapsto \rho(g)P \end{aligned}$$

telle que

$$\begin{cases} \rho(e) = id_M \text{ où } e \text{ est le neutre de } G \\ \rho(g'g) = \rho(g') \circ \rho(g), \quad \forall g, g' \in G \end{cases}$$

et

$$\rho(g)^*\omega = \omega, \quad \forall g \in G.$$

Définition B.3.2 (Action transitive). L'action est transitive si, pour tout point P de M , nous avons

$$\{\rho(g)P \mid g \in G\} = M.$$

Comme en Sous-section B.2, nous pouvons définir des champs fondamentaux X^{*M} à partir d'une action. Grâce à ces champs, nous pouvons définir une action symplectique.

Définition B.3.3 (Action symplectique). Une action ρ est symplectique si et seulement si le flot des champs fondamentaux associés sont symplectiques¹⁵, i.e. si et seulement si $i(X^{*M})\omega$ est fermée pour $X|_P^{*M} = \frac{d}{dt}|_0 (\rho(\exp - tX)P)$, $P \in M$.

Nous terminons en donnant les définitions d'actions faiblement et fortement hamiltoniennes.

Définition B.3.4 (Action hamiltonienne). Une action de G sur M est dite

- faiblement hamiltonienne si, pour tout champ de vecteurs Y dans $\mathcal{G}$, il existe une fonction f_Y dans $\mathcal{C}^\infty(M, \mathbb{R})$ telle que $Y^{*M} = X_{f_Y}$ pour un champ X dans $\mathcal{X}(M)$, i.e.

$$i(Y^{*M})\omega = df_Y.$$

- fortement hamiltonienne si, pour tout champ de vecteurs Y dans $\mathcal{G}$, il existe une fonction λ_Y dans $\mathcal{C}^\infty(M, \mathbb{R})$ telle que $i(Y^{*M})\omega = d\lambda_Y$ et la correspondance

$$\begin{aligned} \lambda : \mathcal{G} &\rightarrow \mathcal{C}^\infty(M, \mathbb{R}) \\ Y &\mapsto \lambda_Y \end{aligned}$$

est un homomorphisme d'algèbre de Lie, i.e. $\lambda_{[X,Y]} = \{\lambda_X, \lambda_Y\}$.

14. En Définition 4.6.1.

15. En Définition 4.7.1.