THESIS / THÈSE

MASTER EN SCIENCES MATHÉMATIQUES

Principe du problème auxiliaire et méthoddes de projection pour la résolution de problèmes d'équilibre

Castelain, Marie-Paule

Award date:
2007

FUNDP
NAMUR

Faculté des Sciences
Département de Mathématique

Rempart de la Vierge, 8
B - 5000 Namur (Belgique)

Principe du problème auxiliaire et méthodes de projection pour la résolution de problèmes d'équilibre

Mémoire présenté pour l'obtention
du grade de
Licencié en Sciences Mathématiques
par

CASTELAIN Marie-Paule

Promoteur : STRODIOT Jean-Jacques

Année Académique 2006-2007

Résumé

Nous considérons un problème d'équilibre qui inclut notamment les inéquations variationnelles, l'équilibre de Nash dans les jeux non coopératifs, l'optimisation vectorielle et le problème de complémentarité. Nous étudions une méthode pour résoudre des problèmes d'équilibre qui est basée sur la formulation du point fixe. Nous présentons une légère modification de l'algorithme précédent qui prend en compte une recherche linéaire. Nous montrons que de tels problèmes sont des cas praticuliers de problème d'admissibilité convexe avec un nombre infini d'ensembles convexes. Pour résoudre ces problèmes, nous utilisons des algorithmes de projections pour des problèmes d'admissibilité convexe. Ceux-ci peuvent être modifiés afin d'améliorer leurs propriétés de convergence en réalisant la convergence globale. Nous présentons un algorithme de projection avec la stratégie de contrôle de la contrainte la plus violée. Et finalement, nous montrons une variante de l'algorithme précédent en utilisant les projections approximatives au lieu des projections exactes. Pour chaque algorithme, nous effectuons une étude de la convergence.

Abstract

We consider equilibrium problems which include variational inequalities, Nash equilibria in noncooperative games, vector optimization and complementarity problems for instances. We study a method to solve equilibrium problems based on the fixed point formulation. We present a slight modification of the previous algorithm which considers a line search. We show that such problems are particular instances of convex feasibility problems with infinitely many convex sets. To solve these problems, we use projection algorithms for convex feasibility. There can be modified in order to improve their convergence properties mainly achieving global convergence. We present a projection algorithm with a most violated contraint control strategy. And finally we show a variante of the previous algorithm using approximate projections instead of exact ones. We include full convergence analysis of these algorithms.

Remerciements

Je tiens à remercier mon promoteur de mémoire, M. Jean-Jacques Strodiot pour sa direction et ses conseils judicieux tout au long de ce travail.

Je remercie toutes les personnes qui me sont chères et qui tiennent une grande place dans mon coeur, en commençant par ma famille. Plus particulièrment mes parents, sans qui bien sûr je ne serais rien, et qui ont toujours été présents. Tout au long de mes études, ils m'ont toujours soutenue, encouragée et aidée. Ils ont su me donner toutes les chances pour réussir.

Je voulais également remercier Charly, pour tout l'amour qu'il me donne et bien plus, merci de ton soutien sans faille, de ta présence à mes côtés et ta patience hors du commun. Je remercie tous mes plus proches amis.

Table des matières

Introduction

Nous considérons un problème d'équilibre de la même forme que celui introduit par Blum et Oettli [3]. Ce problème d'équilibre inclut un grand nombre d'autres problèmes comme :

- les inéquations variationnelles,
- l'équilibre de Nash dans les jeux non coopératifs,
- la minimisation vectorielle,
- le point fixe,
- $\cdots$

Notre objectif est de présenter et d'étudier la convergence de plusieurs algorithmes pout résoudre un problème d'équilibre.

Le premier chapitre est une introduction du problème d'équilibre comprenant la définition et l'équivalence entre ce problème et le problème de minimisation convexe, le problème du point fixe, l'équilibre de Nash, le problème d'inéquation variationnelle, le problème de complémentarité, $\cdots$

Ensuite, dans le chapitre suivant, nous définissons une première manière de résoudre ce problème utilisant la formulation du point fixe. Mais comme cette technique n'est pas pratique à appliquer, nous devons définir un problème d'équilibre auxiliaire. A partir de ce second problème, nous adaptons la résolution vue auparavant. Nous étudions aussi la convergence de cet algorithme.

Nous présentons également l'approche de la fonction gap couplée au problème d'équilibre auxiliaire afin de définir une autre manière de résoudre le problème d'équilibre. Pour celle-ci, nous définissons un algorithme de recherche linéaire qui utilise une direction de descente.

Le quatrième chapitre est consacré à l'étude du problème d'admissibilité convexe ainsi qu'au lien reliant ce dernier au problème d'équilibre.

Ensuite, nous présentons un algorithme de résolution du problème d'admissibilité convexe basé sur une méthode de projections successives exactes avec la stratégie de contrôle de la contrainte la plus violée. Nous étudions également les propriétés de convergence de cet algorithme.

Le chapitre six est la résolution du problème d'admissibilité convexe à l'aide d'un algorithme plus complexe. Celui-ci améliore le précédent en utilisant les projections approximatives au lieu des projections exactes. Et nous finissons ce chapitre par l'étude de la convergence.

Ce travail est essentiellement basé sur les articles [4], [5], [7], [8].

Chapitre 1

Définition du problème d'équilibre

1.1 Définition

Définition 1.1.1
Un problème d'équilibre est défini comme (EP) :

$$\text{trouver } x^\star \in K \quad \text{telque} \quad f(x^\star, y) \geq 0 \quad \forall y \in K$$

où

1. *K est un sous ensemble fermé convexe non vide de $I\!R^n$.*
2. *$f : K \times K \longrightarrow I\!R$ est une fonction continue satisfaisant*
   P1 : $f(x,x) = 0, \forall x \in K$.   (H1)
   P2 : $f(x,\cdot) : K \longrightarrow I\!R$ convexe $\forall x \in K$.   (H2)

1.2 Exemples de problèmes d'équilibre

Nous analysons en détail six problèmes (le problème de minimisation, le problème de point fixe, le problème du complémentaire, le problème d'équilibre de Nash, le problème d'inéquation variationnelle et le problème de minimisation vectorielle).

1.2.1 Le problème de minimisation convexe

Définition 1.2.1
Soient $h : I\!R^n \longrightarrow I\!R$ une fonction convexe et $K \subset I\!R^n$ un ensemble fermé

convexe.

Le problème de minimisation convexe est défini comme (OP) :

$$\text{trouver } x^\star \in K \quad \text{tel que} \quad h(x^\star) \leq h(y) \quad \forall y \in K.$$

<u>**Ramenons ce problème à un problème d'équilibre :**</u>

En effet : prenons $f(x, y) := h(y) - h(x) \quad \forall y \in K$.

La définition du problème d'équilibre devient :

$$\begin{array}{llcl} \text{trouver } x^\star \in K & \text{tel que} & f(x^\star, y) \geq 0 & \forall y \in K \\ \text{trouver } x^\star \in K & \text{tel que} & h(y) - h(x^\star) \geq 0 & \forall y \in K \\ \text{trouver } x^\star \in K & \text{tel que} & h(x^\star) \leq h(y) & \forall y \in K \end{array}$$

Vérifions que les hypothèses du problème d'équilibre soient satisfaites :

1. K est un sous ensemble convexe fermé non vide de $\mathbb{R}^n$.
2. $f : K \times K \longrightarrow \mathbb{R}$ est une fonction continue qui vérifie :

   P1 : $f(x, x) = 0 \quad \forall x \in K$.
   En effet : $f(x, x) = h(x) - h(x) = 0$.

   P2 : $f(x, \cdot) : K \longrightarrow \mathbb{R}$ est convexe $\forall x \in K$.
   En effet : $f(x, \cdot) = h(\cdot) - \underbrace{h(x)}_{\mathbb{R}}$ est une fonction convexe car h est convexe.

1.2.2 Le problème du point fixe

Définition 1.2.2

Soient $T : K \longrightarrow K$ un opérateur continu et $K \subset \mathbb{R}^n$ un ensemble fermé convexe.

Le problème du point fixe est défini comme (FixP) :

$$\text{trouver } x^\star \in K \quad \text{tel que} \quad x^\star = T(x^\star).$$

<u>**Ramenons ce problème à un problème d'équilibre :**</u>

En effet : prenons $f(x, y) := \langle x - T(x), y - x \rangle \quad \forall x, y \in K$.

1. Montrons que FixP $\Longrightarrow$ EP.

   Soit $x^\star \in K$ tel que $x^\star = Tx^\star$. Alors pour tout $y \in K$,

$$f(x^\star, y) = \langle \underbrace{x^\star - Tx^\star}_{0 \text{ car } x^\star = Tx^\star}, y - x^\star \rangle \geq 0.$$

   Vérifions que $f(x, x) = 0$.

$$f(x, x) = \langle x - T(x), x - x \rangle = 0.$$

   Donc, nous avons un EP comme souhaité.

2. Montrons que EP $\Longrightarrow$ FixP.

   Posons $y^\star = Tx^\star$. Nous avons alors successivement

$$\begin{aligned} 0 \underbrace{\leq}_{EP} f(x^\star, y^\star) &= \langle x^\star - Tx^\star, y^\star - x^\star \rangle \\ &= \langle x^\star - Tx^\star, Tx^\star - x^\star \rangle \\ &= -\|x^\star - Tx^\star\|^2. \end{aligned}$$

   Par conséquent $\|x^\star - Tx^\star\|^2 = 0$ et donc $x^\star = Tx^\star$.

1.2.3 Le problème du point fixe multivoque

Définition 1.2.3

Soit $T : I\!R^N \longrightarrow \mathcal{P}(I\!R^N)$ un opérateur multivoque continu tel que $K \cap T(x)$ est un ensemble compact convexe non vide pour tout $x \in K$.

L'extension du problème du point fixe est définie comme (XFixP) :

$$\textit{trouver } x^\star \in K \quad \textit{tel que} \quad x^\star \in Tx^\star.$$

Lemme 1.2.1
Soient D un ensemble convexe et compact et K un ensemble convexe.
Soit $p : D \times K \longrightarrow I\!R$ une fonction concave, semi-continue supérieurement dans le premier argument et convexe dans le second argument.
Supposons que

$$\max_{\xi \in D} p(\xi, y) \geq 0 \quad \forall y \in K$$

Alors $\exists \xi^\star \in D$ tel que $p(\xi^\star, y) \geq 0 \quad \forall y \in K$.

Preuve :
Supposons par l'absurde que la conclusion n'est pas vraie,

$$\forall \xi \in D \quad \exists y \in K \quad \epsilon > 0 \qquad \text{tel que} \qquad p(\xi, y) < -\epsilon$$

Les ensemble ouverts

$$S(y_i, \epsilon) := \{\xi \in D \,:\, p(\xi, y) < -\epsilon\} \quad y \in K \;,\; \epsilon > 0$$

couvrent l'ensemble compact D.
Alors il existe un ensemble de sous recouvements finis $S(y_i, \epsilon_i)$, $i = 1, \ldots, m$.

Soit $\epsilon := \min_i \epsilon_i$.
Alors

$$D \subset \bigcup_i S(y_i, \epsilon),$$

il suit que

$$\min_i p(\xi, y_i) \leq -\epsilon \quad \forall \xi \in D.$$

Puisque les fonctions $p(\cdot, y_i)$ sont concaves, il suit d'un résultat d'analyse convexe [9] (Théorème 21.1) qu'il existe des nombres réels

$$\mu_i \geq 0 \quad i = 1, \ldots, m$$

avec

$$\sum_i \mu_i = 1 \text{ tel que } \sum_i \mu_i p(\xi, y_i) \leq -\epsilon \quad \forall \xi \in D.$$

Puisque $p(\xi, \cdot)$ est convexe, cela implique que $p(\xi, \bar{y}) \leq -\epsilon \quad \forall \xi \in D$ avec $\bar{y} = \sum_i \mu_i y_i$. Or $\max_{\xi \in D} p(\xi, y^\star) < 0$, il y a donc contradiction avec l'hypothèse du Lemme. $\square$

Ramenons ce problème à un problème d'équilibre :
En effet : prenons $f(x,y) := \max_{\xi \in T(x) \cap K} \langle x-\xi, y-x\rangle \quad \forall x, y \in K$ et remarquons que pour $x^\star \in K$, on a

$$f(x^\star, y) \geq 0 \quad \forall y \in K$$

Si on utilise la définition de $f(x^\star, y)$, on obtient

$$\forall y \in K \qquad \max_{\xi \in K \cap T(x^\star)} \langle x^\star - \xi, y - x^\star\rangle \geq 0$$

Si on applique maintenant le Lemme 1.2.1,

$$\exists \bar{\xi} \in K \cap T(x^\star) \ \text{ tel que } \ \langle x^\star - \bar{\xi}, y - x^\star\rangle \geq 0 \quad \forall y \in K$$

Comme c'est vrai pour tout y et donc en particulier pour $y = \bar{\xi}$, on a :

$$\begin{aligned} \langle x^\star - \bar{\xi}, \bar{\xi} - x^\star\rangle &\geq 0 \\ -\|x^\star - \bar{\xi}\| &\geq 0 \\ \|x^\star - \bar{\xi}\| &= 0 \\ x^\star &= \bar{\xi} \end{aligned}$$

Par conséquent $x^\star \in Tx^\star$.

1.2.4 Le problème d'équilibre de Nash dans des jeux non coopératifs

Soit I un ensemble fini (l'ensemble des n joueurs). Pour chaque $i \in K$, considérons un sous ensemble non vide fermé convexe K_i de R^n (l'ensemble des stratégies du $i^{\text{ème}}$ joueur).
Soit $K := \prod_{i \in I} K_i$.
$\forall i \in I$, on considère une fonction $f_i : K \longrightarrow \mathbb{R}$ convexe en chacun de ses arguments (la fonction perte du $i^{\text{ème}}$ joueur dépendant des stratégies de tous les joueurs).
Pour chaque x et $y \in K$, on définit :

$$x(y_i) = \begin{cases} (x(y_i))_j = x_j & \text{si } j \neq i \\ (x(y_i))_j = y_i & \text{si } i = j \end{cases}$$

Définition 1.2.4
Le problème d'équilibre de Nash dans des jeux non coopératifs est défini comme

$$\text{trouver } x \in K \text{ tel que } f_i(x) \leq f_i(x(y_i)) \quad \forall i \in I \text{ et } \forall y \in K.$$

(i.e. aucun joueur ne peut réduire sa perte en étant le seul à modifier sa stratégie).

<u>**Ramenons ce problème à un problème d'équilibre :**</u>
Pour cela, définissons $f : K \times K \longrightarrow \mathbb{R}$ par

$$f(x, y) = \sum_{i \in I} (f_i(x^i, y_i) - f_i(x))$$

où x^i est le vecteur composé des vecteurs stratégies x_j avec $j \neq i$.

Alors $x^\star$ est un équilibre de Nash si et seulement si $x^\star$ correspond à un problème d'équilibre.

En effet, si $f_i(x^\star) \leq f_i(x^\star(y_i)) \quad \forall y_i \in K_i$, nous obtenons

$$f(x^\star, y) \geq 0.$$

En effet en utilisant la définition de la fonction, on a

$$\sum_{i \in I} (\underbrace{f_i(x^{\star i}, y_i) - f_i(x^\star)}_{\geq 0 \text{ car } f_i(x^\star) \leq f_i(x^\star(y_i))}) \geq 0.$$

Vérifions que $f(x, x) = 0$, i.e.,

$$f(x, x) = \sum_i (\underbrace{f_i(x^i, x_i)}_{f_i(x)} - f_i(x)) = \sum_i (f_i(x) - f_i(x)) = 0.$$

1.2.5 Le problème d'inéquation variationnelle

Définition 1.2.5
Soit K un sous ensemble convexe fermé de $\mathbb{R}^n$.
Soit $T : K \longrightarrow \mathbb{R}^n$ une fonction continue.
Le problème d'inéquation variationnelle classique (VI) est défini comme

$$\text{trouver } x^\star \in K \quad \text{tel que} \quad \langle Tx^\star, y - x^\star \rangle \geq 0 \quad \forall y \in K.$$

Ramenons ce problème à un problème d'équilibre :

Pour cela, prenons la fonction suivante

$$f(x,y) = \langle T(x), y - x\rangle \quad \forall x, y \in K.$$

Par la définition du EP, il faut trouver

$$x^\star \in K \text{ tq } f(x^\star, y) = \langle T(x^\star), y - x^\star\rangle \geq 0 \quad \forall y \in K.$$

Vérifions que les hypothèses de la définition du problème d'équilibre sont satisfaites :

1. K est une ensemble convexe fermé non vide de $\mathbb{R}^n$.
2. $f : K \times K \longrightarrow \mathbb{R}$ est une fonction continue qui vérifie
   P1 : $f(x,x) = \langle Tx^\star, x^\star - x^\star\rangle = \langle Tx^\star, 0\rangle = 0 \quad \forall x \in K$.
   P2 : $f(x,\cdot) = \langle Tx, \cdot - x\rangle = \langle Tx, \cdot\rangle - \langle Tx, x\rangle$ est convexe $\forall x \in K$.

1.2.6 Le problème d'inéquation variationnelle multivoque

Définition 1.2.6

Soit $T : K \longrightarrow \mathcal{P}(\mathbb{R}^n)$ un opérateur continu tel que $T(x)$ soit non vide, compact pour tout $x \in K$.
On considère le problème d'inéquation variationnelle généralisé (GIV) où K est un ensemble convexe fermé non vide de $\mathbb{R}^n$:

$$\textit{trouver } x^\star \in K \quad \xi^\star \in T(x^\star) \quad \textit{tel que} \quad \langle \xi^\star, y - x^\star\rangle \geq 0 \quad \forall y \in K.$$

Ramenons ce problème à un problème d'équilibre :

Nous montrons maintenant qu'il est possible de ramener un GIV à un EP et vice-versa.
Pour cela on considère la fonction

$$f(x,y) = \max_{\xi \in Tx} \langle \xi, y - x\rangle.$$

1. Montrons que GIV $\Longrightarrow$ EP.
   En effet, soient $x^\star$ et $\xi^\star$ résolvant GIV alors on a

$$0 \leq \langle \xi^\star, y - x^\star\rangle \leq \max_{\xi^\star \in Tx^\star} \langle \xi^\star, y - x^\star\rangle = f(x^\star, y) \quad \forall y \in K.$$

Vérifions maintenant que les hypothèses de la définition soient satisfaites :

1. K est un ensemble convexe fermé non vide.
2. $f : K \times K \longrightarrow \mathbb{R}$ est une fonction continue vérifiant

   P1 : $f(x,x) = \max\langle \xi, 0\rangle = 0$.

   P2 : $f(x,\cdot) = \max\langle \xi, \cdot - x\rangle = \max[\langle \xi, \cdot\rangle - \langle \xi, x\rangle]$ est convexe $\forall x \in K$.

Nous obtenons alors que $x^\star$ satisfait le problème d'équilibre.

2. Montrons que EP $\Longrightarrow$ GIV.

   En appliquant le Lemme 1.2.1 avec

   (a) $D := Tx^\star$ un ensemble convexe et compact,

   (b) K un ensemble convexe,

   (c) une fonction p concave, semi-continue supérieurement dans le premier argument et convexe dans le second avec $p(\xi, y) := \langle \xi, y - x^\star\rangle$, vérifiant

$$\max_{\xi \in Tx^\star} p(\xi, y) = \max_{\xi \in Tx^\star} \langle \xi, y - x^\star\rangle = f(x^\star, y) \underbrace{\geq}_{\text{déf de EP}} 0.$$

   Alors $\exists\, \xi^\star \in Tx^\star$ tel que $p(\xi^\star, y) = \langle \xi^\star, y - x^\star\rangle \geq 0$.

1.2.7 Le problème de complémentarité

Soient $K \subset \mathbb{R}^N$ un cône convexe fermé et

$$K^+ := \{x \in \mathbb{R}^n \;:\; \langle x, y\rangle \geq 0 \quad \forall y \in K\}$$

son cône polaire.

Définition 1.2.7
Soit $T : K \longrightarrow \mathbb{R}^n$ un opérateur continu.
Le problème de complémentarité est défini comme (NCP) :

$$\textit{trouver } x^\star \in K \qquad \textit{tel que} \qquad T(x^\star) \in K^+ \quad \langle T(x^\star), x^\star\rangle = 0.$$

Ramenons ce problème à un problème d'équilibre :

En effet : prenons $f(x,y) := \langle T(x), y - x\rangle \quad \forall x, y \in K$.

Il est facile de voir que le problème NCP est équivalent au problème d'inéquation variationnelle (VI) suivant :

$$\text{trouver } x^\star \in K \quad \text{tq} \quad \langle T(x^\star), y - x^\star \rangle \geq 0 \quad \forall y \in K.$$

1. Montrons que NCP $\Longrightarrow$ VI
   Soit $x^\star \in K$ tq $Tx^\star \in K^+$ $\langle T(x^\star), x^\star \rangle = 0$.
   Alors pour tout $y \in K$,

   $$\langle Tx^\star, y - x^\star \rangle = \langle Tx^\star, y \rangle - \underbrace{\langle Tx^\star, x^\star \rangle}_{0} = \langle Tx^\star, y \rangle \geq 0,$$

   car $Tx^\star \in K^+$ et donc on a que $\langle Tx^\star, y \rangle \geq 0 \quad \forall y \in K$.

2. Montrons que VI $\Longrightarrow$ NCP
   Soit $x^\star \in K$ et $\langle Tx^\star, y - x^\star \rangle \geq 0 \quad \forall y \in K$. Considérons $y := 2x^\star$ et $y := 0$, alors nous obtenons respectivement

   $$\langle Tx, 2x^\star - x^\star \rangle = \langle Tx^\star, x^\star \rangle \geq 0,$$

   $$\langle Tx^\star, -x^\star \rangle = -\langle Tx^\star, x^\star \rangle \geq 0.$$

   Et donc

   $$\langle Tx^\star, x^\star \rangle = 0.$$

   Comme

   $$\langle Tx^\star, y \rangle = \underbrace{\langle Tx^\star, y - x^\star \rangle}_{\geq 0} + \underbrace{\langle Tx^\star, x^\star \rangle}_{=0} \geq 0,$$

   $x^\star$ résout NCP.

1.2.8 Le problème de minimisation vectorielle

Considérons l'ordre partiel dans $\mathbb{R}^n$ donné par

$$\begin{array}{ll} x \preceq y & \text{ssi } y - x \in C \\ x \prec y & \text{ssi } y - x \in \text{int}(C) \end{array}$$

Soit $C \subset X = \mathbb{R}^m$ un cône convexe fermé avec un intérieur non vide

$$C^+ = \{y \in \mathbb{R}^m \, : \, \langle x, y \rangle \geq 0 \quad \forall x \in C\}$$

et $F : K \longrightarrow \mathbb{R}^m$ une fonction continue C-convexe.

Définition 1.2.8
Le problème de minimisation vectorielle est défini comme (VectOP) :

$$\textit{trouver } x^\star \in K \textit{ tel que } F(x) \not\leq F(x^\star) \quad \forall x \in K.$$

Avant de ramener ce problème à un problème d'équilibre, nous avons un résultat qui sera utile pour la suite :

Proposition 1.2.1

$$d \in int(C) \quad \Longleftrightarrow \quad \begin{array}{c} \forall z \in C^\star \\ \|z\| = 1 \end{array} \quad \langle z, d \rangle > 0.$$

Preuve :

$\Longrightarrow$

$$d \in \mathrm{int}(C) \quad \Longrightarrow \quad \exists\ \alpha > 0 \quad d + \alpha B_1 \subseteq C \quad \text{où } B_1 \text{ est la boule unité.}$$

D'où

$$\begin{array}{ll} \forall e \in B_1 & \\ \forall z \in C^\star & \langle z, d + \alpha e \rangle \geq 0. \\ \|z\| = 1 & \end{array}$$

En prenant $e = -z \in B_1$, l'inégalité précédente devient

$$\langle z, d - \alpha z \rangle \geq 0.$$

A partir de cette dernière inégalité, nous remarquons

$$\langle z, d - \alpha z \rangle = \langle z, d \rangle - \alpha \langle z, z \rangle \geq 0,$$

ce qui est équivalent à

$$\langle z, d \rangle \geq \alpha \underbrace{\|z\|^2}_{1} = \alpha > 0.$$

Ceci conclut la première partie de la preuve.

$\Longleftarrow$

$$\min_{\substack{z\in C^\star\\ \|z\|=1}} \langle z, d\rangle = \langle \bar{z}, d\rangle > 0 \text{ avec } \bar{z} \in C^\star \text{ et } \|\bar{z}\| = 1.$$

Soit $\alpha = \langle \bar{z}, d\rangle > 0$. Alors $d + \alpha B_1 \subset C$.
En effet,

$$\begin{array}{ll} \forall z \in C^\star & \\ \|z\| = 1 & \langle z, d + \alpha e\rangle = \langle z, d\rangle + \alpha\langle z, e\rangle \geq \langle \bar{z}, d\rangle - \alpha \underbrace{\|z\|}_{=1} = \langle \bar{z}, d\rangle - \alpha \geq 0. \\ \forall e \in B_1 & \end{array}$$

La première inégalité suit d'une part du fait que

$$\langle z, d\rangle \geq \langle \bar{z}, d\rangle$$

et d'autre part du fait que

$$\|z\| = \sup_{\|y\|\leq 1} \langle z, y\rangle,$$

ce qui implique

$$\|z\| \geq \langle z, -e\rangle = -\langle z, e\rangle.$$

$\square$

Ramenons ce problème à un problème d'équilibre :

Soit $D = C^+ \cap \{z \,:\, \|z\| = 1\}$ et prenons

$$f(x, y) := \max_{z\in D} \langle z, F(y) - F(x)\rangle.$$

Montrons que VectOP $\Longleftrightarrow \quad \exists\, x^\star \in K \quad$ tel que $\quad f(x^\star, y) \geq 0 \quad \forall y \in K$.

On a que $C^{\star\star} = C$ car C est un cône fermé convexe.

Montrons cette équivalence par l'absurde :
Supposons que notre problème ne résout pas la relation VectOP, i.e.,

$$\exists\, y \in K \quad \text{tq} \quad F(y) \prec F(x^\star).$$

En utilisant la définition de l'ordre partiel

$$\exists\ y \in K \quad F(x^\star) - F(y) \in \mathrm{int}(C).$$

Ensuite, par la définition de la Proposition 1.2.1

$$\exists\ y \in K \quad \begin{array}{c} \forall z \in C^\star \\ \|z\| = 1 \end{array} \quad \langle z, F(y) - F(x^\star)\rangle < 0,$$

ce qui est équivalent à

$$\exists\ y \in K \quad \max_{z \in C^\star,\, \|z\|=1\,,\, compact} \langle z, F(y) - F(x^\star)\rangle < 0.$$

Et donc par la définition de f

$$\exists\ y \in K \quad f(x^\star, y) < 0.$$

Chapitre 2

Principe du problème auxiliaire et problème d'équilibre

2.1 Le problème d'équilibre auxiliaire

2.1.1 La formulation du point fixe

Nous commençons par démontrer un résultat de Mastroeni [6] qui affirme l'équivalence entre la formulation minimax et la formulation du point fixe.

Lemme 2.1.1
Soit $f : K \times K \longrightarrow I\!R$ avec $f(x,x) = 0$ pour tout $x \in K$.
Les affirmations suivantes sont équivalentes :

(i) **EP :** *Il existe un $x^\star \in K$ tq $f(x^\star, y) \geq 0$ pour tout $y \in K$.*

(ii) **Formulation minimax :**

$$\min_{x\in K} \left\{ \sup_{y\in K} \quad \{-f(x,y)\} \right\} = 0.$$

(iii) **Formulation du point fixe :** *$x^\star \in K$ est une solution du problème*

$$\min_{y\in K} f(x^\star, y).$$

Preuve :

1. $(i) \Longrightarrow (ii)$:
   Nous avons par hypothèse du problème d'équilibre que $f(x,x) = 0, \forall\, x \in$

K. Ceci implique que

$$\inf_{y \in K} f(x,y) \leq 0 \quad \forall x \in K$$

et en prenant le supremum sur x de la relation ci-dessus, comme elle est vraie pour tout x,

$$\sup_{x \in K} \left\{ \inf_{y \in K} f(x,y) \right\} \leq 0. \tag{2.1}$$

Mais comme $x^\star \in K$,

$$\sup_{x \in K} \left\{ \inf_{y \in K} f(x,y) \right\} \geq \inf_{y \in K} f(x^\star, y).$$

Et d'autre part, l'hypothèse (i) implique

$$f(x^\star, y) \geq 0 \quad \forall y \in K \quad \Longrightarrow \quad \inf_{y \in K} f(x^\star, y) \geq 0. \tag{2.2}$$

Nous obtenons alors, en mettant en commun (2.1) et (2.2)

$$0 \underbrace{\leq}_{(2.1)} \inf_{y \in K} f(x^\star, y) \quad \leq \quad \sup_{x \in K} \left\{ \inf_{y \in K} f(x,y) \right\} \underbrace{\leq}_{(2.2)} 0.$$

Et donc

$$\sup_{x \in K} \left\{ \inf_{y \in K} f(x,y) \right\} = 0.$$

Le point (ii) est alors vérifié :

$$\min_{x \in K} \left\{ \sup_{y \in K} [-f(x,y)] \right\} = 0.$$

2. $(ii) \Longrightarrow (i)$:
   Il suit de l'hypothèse (ii) qu'il existe un $x^\star \in K$ tel que

   $$\sup_{y \in K} \{-f(x^\star, y)\} = \min_{x \in K} \left\{ \sup_{y \in K} \{-f(x,y)\} \right\} \underbrace{=}_{(ii)} 0.$$

   Comme le suprémum est nul, cela implique que la fonction est négative ou nulle, i.e., $-f(x^\star, y) \leq 0$, pour tout $y \in K$. Nous obtenons alors (i).

3. $(iii) \Longrightarrow (i)$:
   Par la définition de minimisation de fonction, nous avons l'équivalence suivante :

   $$\min_{y \in K} f(x^\star, y) \quad \Longleftrightarrow \quad f(x^\star, y) \geq f(x^\star, x^\star) = 0 \quad \forall y \in K.$$

   Nous voyons directement que nous obtenons la définition d'un problème d'équilibre comme défini par (i). □

2.1.2 L'algorithme

Si on considère la formulation du point fixe donnée par le Lemme 2.1.1 (*ii*). Supposons que pour tout $x^\star \in K$, le problème $\min_{y\in K} f(x^\star, y)$ a une solution unique. Pour cela, nous définissons l'algorithme itératif suivant :

Algorithme 2.1.1

PAS 1 : Soit $k = 0$, $x^0 \in K$.
PAS 2 : Soit x^{k+1} une solution du problème

$$\min_{y\in K} f(x^k, y).$$

PAS 3 : Si $\|x^{k+1} - x^k\| \leq \eta$ pour un certain facteur de tolérance $\eta > 0$, alors on s'arrête. Sinon on remplace k par $k+1$ et on retourne au PAS 2.

Dans la plupart des cas, il n'est pas possible ou il n'est pas pratique d'appliquer cet algorithme. Il est dés lors nécessaire d'introduire le problème d'équilibre auxiliaire équivalent au EP. En effet, ce problème auxiliaire est plus pratique lors de l'application de l'algorithme précédent.

2.1.3 La formulation du problème auxiliaire

Définition 2.1.1
$x^\star \in K$ est une solution du problème d'équilibre auxiliaire (AuxEP) si et seulement si

$$\epsilon f(x^\star, y) + \mathcal{L}(x^\star, y) \geq 0 \quad \forall y \in K \text{ et } \epsilon > 0$$

où

1. *$f : K \times K \longrightarrow I\!R$ une fonction vérifiant $f(x^\star, x^\star) = 0$ pour tout $x^\star \in K$.*
2. *$f(x^\star, \cdot) : K \longrightarrow I\!R$ est une fonction convexe différentiable.*
3. *$\mathcal{L} : K \times K \longrightarrow I\!R$ est positive, différentiable sur l'ensemble convexe K dans le second argument y et vérifiant*
   - *(i) $\mathcal{L}(x, x) = 0 \quad \forall x \in K$,*
   - *(ii) $\nabla_y \mathcal{L}(x, x) = 0 \quad \forall x \in K$.*

Proposition 2.1.1
$x^\star \in K$ est une solution de EP si et seulement si il est une solution du problème d'équilibre auxiliaire.

Preuve :

1. Prouvons que $x^\star \in K$ est une solution de EP $\Longrightarrow x^\star \in K$ est une solution du AuxEP :
   Montrons que pour $x^\star \in K$, on a $\epsilon\, f(x^\star, y) + \mathcal{L}(x^\star, y) \geq 0 \quad \forall y \in K$. En effet par la définition de EP, $f(x^\star, y) \geq 0$ et par la propriété de positivité de $\mathcal{L}$, nous obtenons alors le résultat souhaité.

2. Montrons que $x^\star \in K$ est une solution de AuxEP $\Longrightarrow x^\star \in K$ est une solution du EP :
   Par hypothèse $x^\star \in K$ est un minimiseur du problème suivant :
   $$\min_{y \in K} \quad \{\epsilon f(x^\star, y) + \mathcal{L}(x^\star, y)\} \tag{2.3}$$
   par le Lemme 2.1.1 avec $f = f + \mathcal{L}$.
   Puisque nous sommes en présence d'un problème d'optimisation convexe, $x^\star \in K$ est une solution optimale du problème (2.3) si et seulement si
   $$\langle \epsilon \nabla_y f(x^\star, x^\star) + \nabla_y \mathcal{L}(x^\star, x^\star), y - x^\star \rangle \geq 0 \quad \forall\, y \in K.$$
   Comme nous avons que $\nabla_y \mathcal{L}(x, x) = 0$ pour tout $x \in K$, le problème devient
   $$\langle \epsilon \nabla_y f(x^\star, x^\star), y - x^\star \rangle \geq 0 \quad \forall\, y \in K.$$
   En sortant ϵ du produit scalaire et en divisant par ϵ ensuite, nous avons
   $$\langle \nabla_y f(x^\star, x^\star), y - x^\star \rangle \geq 0 \quad \forall\, y \in K.$$
   Cela signifie que $x^\star \in K$ est un minimiseur de
   $$\min_{y \in K} f(x^\star, y)$$
   et donc en utilisant le Lemme 2.1.1 ($(iii) \Rightarrow (i)$), nous pouvons conclure que
   $$f(x^\star, y) \geq 0 \quad \forall\, y \in K$$
   ce qui correspond à la définition du problème d'équilibre. $\square$

Corollaire 2.1.1
$x^\star \in K$ est une solution de EP si et seulement si $x^\star$ est une solution optimale du problème d'optimisation

$$\min_{y \in K} \{\epsilon f(x^\star, y) + \mathcal{L}(x^\star, y)\}.$$

Preuve :
Ce Corollaire suit directement de la Proposition 2.1.1. □

2.2 Le principe du problème d'équilibre auxiliaire

2.2.1 Le principe

Dans cette section, nous présentons un algorithme général pour la résolution des problèmes d'équilibre.

Soit $\mathcal{G} : K \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction différentiable fortement convexe de module $\beta > 0$ et soit $\epsilon > 0$. Dans la Proposition 2.1.1, vue précédemment, nous prenons

$$\mathcal{L}(x, y) = \mathcal{G}(y) - \mathcal{G}(x) - \langle \nabla \mathcal{G}(x), y - x \rangle.$$

Ainsi, nous obtenons le problème d'équilibre auxiliaire (AuxEP) suivant :

trouver $x^\star \in K$ tel que $\epsilon f(x^\star, y) + \mathcal{G}(y) - \mathcal{G}(x^\star) - \langle \nabla \mathcal{G}(x^\star), y - x^\star \rangle \geq 0 \quad \forall y \in K.$

Lemme 2.2.1
Soit $f : K \times K \longrightarrow \mathbb{R}$ avec $f(x, x) = 0$ pour tout $x \in K$, et soit $x^\star \in K$. Supposons que $f(x^\star, \cdot) : K \longrightarrow \mathbb{R}$ est une fonction convexe différentiable et fixons $\epsilon > 0$.
Alors $x^\star \in K$ est une solution de EP si et seulement si $x^\star$ est une solution du problème d'équilibre auxiliaire.

Preuve :
Ce Lemme suit directement de la Proposition 2.1.1 car

$$\mathcal{L}(x, y) = \mathcal{G}(y) - \mathcal{G}(x)\langle -\nabla \mathcal{G}(x), y - x \rangle$$

satisfait les hypothèses suivantes :

(i) $\mathcal{L}(x,x) = \mathcal{G}(x) - \mathcal{G}(x) - \langle \nabla \mathcal{G}(x), x - x \rangle = 0 \quad \forall x \in K.$

(ii) $\nabla_y \mathcal{L}(x,x) = 0 \quad \forall x \in K.$ □

Nous pouvons faire le même type de raisonnement que lors du Corollaire 2.1.1 afin d'obtenir un résultat similaire pour le principe du problème d'équilibre auxiliaire.

$x^\star \in K$ est une solution du EP si et seulement si $x^\star$ est une solution optimale du problème d'optimisation

$$\min_{y \in K} \quad \{\epsilon f(x^\star, y) + \mathcal{G}(y) - \mathcal{G}(x^\star) - \langle \nabla \mathcal{G}(x^\star), y - x^\star \rangle\}$$

et donc du problème suivant

$$\min_{y \in K} \quad \{\epsilon f(x^\star, y) + \mathcal{G}(y) - \mathcal{G}(x^\star) - \langle \nabla \mathcal{G}(x^\star), y \rangle + \langle \nabla \mathcal{G}(x^\star), x^\star \rangle\}$$

où les termes $\mathcal{G}(x^\star)$ et $\langle \mathcal{G}(x^\star), x^\star \rangle$ sont constants, donc ceux-ci n'interviennent pas dans la minimisation mais dans l'estimation de la valeur optimale. Nous obtenons alors le résultat suivant :

Corollaire 2.2.1
$x^\star \in K$ est une solution du EP si et seulement si $x^\star$ est une solution optimale du problème d'optimisation suivant

$$\min_{y \in K} \quad \{\epsilon f(x^\star, y) + \mathcal{G}(y) - \langle \nabla \mathcal{G}(x^\star), y \rangle\} \tag{2.4}$$

Preuve :
Ce Corollaire suit directement du Lemme 2.2.1. □

2.2.2 L'algorithme

En appliquant l'algorithme 2.1.1 vue précédemment dans cette section au problème d'équilibre auxiliaire (AuxEP) donné par (2.4), nous obtenons

Algorithme 2.2.1

PAS 1 : Soit $k = 0$, $x^0 \in K$.

PAS 2 : Soit x^{k+1} *une solution du problème*

$$\min_{y \in K} \quad \left\{ \epsilon f(x^k, y) + \mathcal{G}(y) - \langle \nabla \mathcal{G}(x^k), y \rangle \right\}. \tag{2.5}$$

PAS 3 : Si $\|x^{k+1} - x^k\| \leq \eta$ *pour un certain facteur de tolérance* $\eta > 0$, *alors on s'arrête. Sinon on remplace* k *par* $k + 1$ *et on retourne au PAS 2.*

Remarquons que le problème (2.5) a une solution unique puisque $\mathcal{G}$ est une fonction fortement convexe.

2.2.3 La convergence

Théorème 2.2.1
Supposons que

(i) $f(x,\cdot) : K \longrightarrow I\!R$ *est une fonction convexe pour tout* $x \in K$.

(ii) $f(\cdot,y) : K \longrightarrow I\!R$ *est continue pour tout* $y \in K$.

(iii) $f : K \times K \longrightarrow I\!R$ *est strictement monotone de module* $\alpha > 0$ *sur* K, *i.e.,*

$$f(x,y) + f(y,x) \leq -\alpha\|y-x\|^2 \quad \forall\, x,y \in K$$

(iv) $\mathcal{G}$ *est fortement convexe de module* $\beta > 0$, *différentiable sur* K, *i.e.,* $\forall\, x,y \in K \quad \forall\, t \in]0,1[$

$$\mathcal{G}(tx+(1-t)y) \leq t\mathcal{G}(x) + (1-t)\mathcal{G}(y) - \frac{1}{2}\beta t(1-t)\|y-x\|^2$$

(v) Il existe des constantes $c > 0$ *et* $d > 0$ *telles que pour tout* x, y, $z \in K$

$$f(x,y) + f(y,z) \geq f(x,z) - c\|y-x\|^2 - d\|z-y\|^2$$

Alors la suite $\{x^k\}_{k\in K}$ *générée par l'Algorithme 2.2.1 converge vers une solution* $x^\star \in K$ *de EP :*

$$f(x^\star, y) \geq 0 \quad \forall y \in K$$

avec

$$\epsilon \leq \frac{\beta}{2d} \quad et \quad c < \alpha$$

Preuve :
Considérons la fonction de Lyapounov $l : K \longrightarrow \mathbb{R}$ définie par

$$l(y) = \mathcal{G}(x^\star) - \mathcal{G}(y) - \langle \nabla\mathcal{G}(y), x^\star - y\rangle. \tag{2.6}$$

Puisque $\mathcal{G}$ est une fonction fortement convexe et différentiable sur K, nous avons que

$$l(y) \geq \frac{1}{2}\beta\|x^\star - y\|^2 \quad \forall\, y \in K.$$

En effet, pour tout $x, y \in K$ et pour $t \in]0,1[$, nous avons par le fait $\mathcal{G}$ est fortement convexe de module $\beta > 0$,

$$\mathcal{G}(tx+(1-t)y) \leq t\mathcal{G}(x) + (1-t)\mathcal{G}(y) - \frac{1}{2}\beta t(1-t)\|y-x\|^2.$$

En transformant l'inégalité précédente, nous obtenons

$$\mathcal{G}(tx+(1-t)y) \leq (1-t)(\mathcal{G}(y)-\mathcal{G}(x)) + \mathcal{G}(x) - \frac{1}{2}\beta t(1-t)\|y-x\|^2.$$

En isolant le terme $(1-t)(\mathcal{G}(y)-\mathcal{G}(x))$, nous avons

$$\begin{aligned}
(1-t)[\mathcal{G}(y)-\mathcal{G}(x)] &\geq \mathcal{G}(tx+(1-t)y) - \mathcal{G}(x) + \frac{1}{2}\beta t(1-t)\|y-x\|^2 \\
(1-t)[\mathcal{G}(y)-\mathcal{G}(x)] &\geq \langle \nabla\mathcal{G}(x), tx+(1-t)y-x\rangle + \frac{1}{2}\beta t(1-t)\|y-x\|^2 \\
(1-t)[\mathcal{G}(y)-\mathcal{G}(x)] &\geq \langle \nabla\mathcal{G}(x), (1-t)(y-x)\rangle + \frac{1}{2}\beta t(1-t)\|y-x\|^2 \\
(1-t)[\mathcal{G}(y)-\mathcal{G}(x)] &\geq (1-t)\langle \nabla\mathcal{G}(x), y-x\rangle + \frac{1}{2}\beta t(1-t)\|y-x\|^2.
\end{aligned}$$

En divisant chaque membre de l'inégalité par $(1-t)$, nous remarquons

$$\mathcal{G}(y)-\mathcal{G}(x) \geq \langle \nabla\mathcal{G}(x), y-x\rangle + \frac{1}{2}\beta t\|y-x\|^2.$$

En prenant la limite en $t \nearrow 1$, nous en déduisons

$$\mathcal{G}(y)-\mathcal{G}(x) \geq \langle \nabla\mathcal{G}(x), y-x\rangle + \frac{1}{2}\beta\|y-x\|^2.$$

Et donc nous obtenons le résultat souhaité

$$\mathcal{G}(y)-\mathcal{G}(x) - \langle \nabla\mathcal{G}(x), y-x\rangle \geq \frac{1}{2}\beta\|y-x\|^2.$$

Comme l est borné inférieurement par zéro car la norme deux est positive ou nulle et $\beta > 0$.
En prenant $y = x^k$ et $y = x^{k+1}$ dans la relation (2.6) et en effectuant la différence entre $l(x^k) - l(x^{k+1})$, nous obtenons

$$\begin{aligned}
l(x^k) - l(x^{k+1}) &= \mathcal{G}(x^\star) - \mathcal{G}(x^k) - \langle \nabla\mathcal{G}(x^k)\,,\, x^\star - y\rangle \\
&\quad -\mathcal{G}(x^\star) + \mathcal{G}(x^{k+1}) + \langle \nabla\mathcal{G}(x^{k+1})\,,\, x^\star - x^{k+1}\rangle \\
&= \mathcal{G}(x^{k+1}) - \mathcal{G}(x^k) - \langle \nabla\mathcal{G}(x^k)\,,\, x^\star - x^k\rangle + \langle \nabla\mathcal{G}(x^{k+1})\,,\, x^\star - x^{k+1}\rangle \\
&\quad +\langle \nabla\mathcal{G}(x^k)\,,\, x^{k+1}\rangle - \langle \nabla\mathcal{G}(x^k)\,,\, x^{k+1}\rangle \\
&= \mathcal{G}(x^{k+1}) - \mathcal{G}(x^k) - \langle \nabla\mathcal{G}(x^k)\,,\, x^\star - x^k + x^{k+1}\rangle \\
&\quad +\langle \nabla\mathcal{G}(x^{k+1})\,,\, x^\star - x^{k+1}\rangle + \langle \nabla\mathcal{G}(x^k)\,,\, x^{k+1}\rangle
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
l(x^k) - l(x^{k+1}) &= \overbrace{\mathcal{G}(x^{k+1}) - \mathcal{G}(x^k) - \langle \nabla \mathcal{G}(x^k)\,,\, x^{k+1} - x^k\rangle}^{\geq \frac{1}{2}\beta\|x^{k+1}-x^k\|^2} - \langle \nabla \mathcal{G}(x^k)\,,\, x^\star\rangle \\
&\quad + \langle \nabla \mathcal{G}(x^{k+1})\,,\, x^\star - x^{k+1}\rangle + \langle \nabla \mathcal{G}(x^k)\,,\, x^{k+1}\rangle \\
&\geq \frac{1}{2}\beta\|x^{k+1} - x^k\|^2 \\
&\quad + \langle \nabla \mathcal{G}(x^{k+1}) - \nabla \mathcal{G}(x^k)\,,\, x^\star - x^{k+1}\rangle. \qquad (2.7)
\end{aligned}$$

A partir du pas deux de l'Algorithme 2.2.1, nous avons que x^{k+1} résout le problème d'optimisation convexe (2.5) :

$$\min_{y \in K} \quad \left\{ \epsilon f(x^k, y) + \mathcal{G}(y) - \langle \nabla \mathcal{G}(x^k), y\rangle \right\}.$$

Désormais

$$\langle \nabla_y [\epsilon\, f(x^k, y) + \mathcal{G}(y) - \langle \nabla \mathcal{G}(x^k)\,,\, y\rangle]\,(x^{k+1})\,,\, x - x^{k+1}\rangle \geq 0 \quad \forall x \in K.$$

Ce qui nous donne

$$\langle \epsilon \nabla_y f(x^k, x^{k+1}) + \nabla \mathcal{G}(x^{k+1}) - \nabla \mathcal{G}(x^k)\,,\, x - x^{k+1}\rangle \geq 0 \quad \forall x \in K.$$

En prenant $x = x^\star$, nous obtenons

$$\langle \nabla \mathcal{G}(x^{k+1}) - \nabla \mathcal{G}(x^k)\,,\, x^\star - x^{k+1}\rangle \geq \epsilon \langle \nabla_y f(x^k, x^{k+1})\,,\, x^{k+1} - x^\star\rangle.$$

Revenons alors à la relation (2.7), nous remarquons

$$l(x^k) - l(x^{k+1}) \geq \frac{1}{2}\beta\|x^{k+1} - x^k\|^2 + \epsilon\langle \nabla_y f(x^k, x^{k+1})\,,\, x^{k+1} - x^\star\rangle. \qquad (2.8)$$

Comme nous avons par hypothèse que $f(x^k, \cdot)$ est une fonction convexe différentiable, nous obtenons

$$f(x^k, x^\star) \geq f(x^k, x^{k+1}) + \langle \nabla_y f(x^k, x^{k+1}), x^\star - x^{k+1}\rangle,$$

ou de manière équivalente

$$\langle \nabla_y f(x^k, x^{k+1}), x^{k+1} - x^\star\rangle \geq f(x^k\,,\, x^{k+1}) - f(x^k, x^\star).$$

Ainsi (2.8) devient

$$l(x^k) - l(x^{k+1}) \geq \frac{1}{2}\beta\|x^{k+1} - x^k\|^2 + \epsilon[f(x^k, x^{k+1}) - f(x^k, x^\star)].$$

En utilisant les hypothèses (v) et (iii), nous voyons

$$\begin{aligned}
l(x^k) - l(x^{k+1}) &\geq \frac{1}{2}\beta\|x^{k+1} - x^k\|^2 \\
&\quad +\epsilon \left[\left\{f(x^\star, x^k) + f(x^k, x^{k+1})\}\right. - \left.\{f(x^\star, x^k) + f(x^k, x^\star)\right\}\right] \\
&\geq \frac{1}{2}\beta\|x^{k+1} - x^k\|^2 \\
&\quad +\epsilon \left\{f(x^\star, x^{k+1}) - c\|x^k - x^\star\|^2 - d\|x^{k+1} - x^k\|^2\right\} \\
&\quad +\epsilon\alpha\|x^k - x^\star\|^2 \\
&= \left(\frac{1}{2}\beta - \epsilon\, d\right)\|x^{k+1} - x^k\|^2 + \epsilon(\alpha - c)\|x^k - x^\star\|^2 \\
&\quad +\epsilon\, f(x^\star, x^{k+1}) \\
&\geq \left(\frac{1}{2}\beta - \epsilon\, d\right)\underbrace{\|x^{k+1} - x^k\|^2}_{\geq 0} +\epsilon(\alpha - c)\underbrace{\|x^k - x^\star\|^2}_{\geq 0}. \qquad (2.9)
\end{aligned}$$

Comme $f(x^\star, x^{k+1}) \geq 0$, $x^\star$ est un solution du problème d'équilibre (EP) $f(x^\star, y) \geq 0$ pour tout $y \in K$, il suffit de prendre $y = x^{k+1}$.

A partir de l'inégalité (2.9), nous concluons que la suite $\{l(x^k)\}_{k\in\mathbb{N}}$ est décroissante et bornée inférieurement par zéro. Ainsi, il existe $l^\star \in \mathbb{R}$ tel que $l(x^k) \longrightarrow l^\star$ quand $k \longrightarrow +\infty$, et en prenant la limite dans (2.9), nous obtenons que $x^k \longrightarrow x^\star$. $\square$

Chapitre 3

Fonctions gap et problèmes d'équilibre

3.1 La fonction gap

Nous avons vu qu'une formulation équivalente du problème d'équilibre est la formulation minimax :

$$\min_{x \in K} \left\{ \sup_{y \in K} \{-f(x,y)\} \right\} = 0.$$

Cette formulation minimax nous permet d'introduire la fonction gap associée à un problème d'équilibre (EP).

Définition 3.1.1
Soit K un ensemble fermé de $I\!R^N$. Alors une fonction $g : K \longrightarrow I\!R$ est une fonction gap pour le problème d'équilibre (EP) si elle satisfait les propriétés suivantes :

(i) $g(x) \geq 0 \quad \forall x \in K$.

(ii) $g(x^\star) = 0 \Longleftrightarrow x^\star$ *résout le problème d'équilibre (EP).*

Exemple :
Nous pouvons voir facilement que la fonction suivante est une fonction gap :

$$g(x) = \sup_{y \in K} \{-f(x,y)\}. \tag{3.1}$$

En effet :

(i) $g(x) \geq 0 \quad \forall x \in K$.

(ii) $g(x^\star) = \underbrace{\sup_{y\in K} \{- \underbrace{f(x^\star, y)}_{\geq 0 \text{ par EP}}\}}_{\leq 0} = 0$.

Une fonction gap est en général non différentiable. Nous verrons par la suite que les résultats sont étroitement liés à l'introduction des problèmes d'équilibre auxiliaire (AuxEP). Ceux-ci nous permettent de régulariser le problème d'équilibre (EP) de telle manière que la fonction gap associée au problème d'équilibre auxiliaire (AuxEP) soit continûment différentiable.

Proposition 3.1.1
Supposons que $f(x,\cdot) : K \longrightarrow I\!R$ soit une fonction fortement convexe pour tout $x \in K$, différentiable en x et que $\nabla_x f(\cdot,\cdot)$ est continu sur $K \times K$.
Alors

$$g(x) = \sup_{y\in K}\{-f(x,y)\}$$

est une fonction gap continûment différentiable pour le problème d'équilibre (EP), et son gradient est donné par

$$\nabla g(x) = -\nabla_x f(x, y(x)) \tag{3.2}$$

où $y(x) = argmin_{y\in K}\, f(x,y)$.

Preuve :
Puisque $f(\cdot,\cdot)$ est une fonction fortement convexe en y, alors il existe un unique minimum $y(x)$ au problème :

$$\min_{y\in K} f(x,y).$$

En appliquant le Théorème 4.3.3 de B. Bank [2], nous avons que $y(x)$ est semi-continu supérieurement. Comme $y(x)$ est une valeur unique, il suit que c'est continu en x. Puisque $\nabla_x f(\cdot,\cdot)$ est continu, suite au Théorème 1.7 d'Auslender [1], il suit que

$$\nabla g(x) = -\underbrace{\nabla_x f(x, \underbrace{y(x)}_{continu})}_{continu}.$$

Dès lors, nous avons que $\nabla g(x)$ est continu en x. $\square$

Cependant cette Proposition 3.1.1 n'est pas toujours applicable car l'hypothèse de convexité forte n'est pas toujours satisfaite. Nous pouvons contrer ce problème en travaillant avec le problème d'équilibre auxiliaire et en additionnant un terme fortement convexe $\mathcal{L}(x, \cdot)$ de telle manière que la Proposition 3.1.1 soit applicable.

Théorème 3.1.1

Supposons que $f(x, \cdot) : K \longrightarrow I\!R$ est une fonction convexe pour tout $x \in K$, différentiable en x et que $\nabla_x f(\cdot, \cdot)$ est continu sur $K \times K$.

Soit $\mathcal{L}(\cdot, \cdot)$ un terme positive, différentiable continue sur $K \times K$, fortement convexe en y pour tout $x \in K$ et tel que

(i) $\mathcal{L}(x, x) = 0$ pour tout $x \in K$.

(ii) $\nabla_y(x, x) = 0$ pour tout $x \in K$.

Alors

$$g(x) = \sup_{y \in K} \{-f(x, y) - \mathcal{L}(x, y)\} \tag{3.3}$$

est une fonction gap continûment différentiable pour un problème d'équilibre (EP) et son gradient est donné par

$$\nabla g(x) = -\nabla_x f(x, y(x)) - \nabla_x \mathcal{L}(x, y(x))$$

où $y(x) = argmin_{y \in K} \quad \{f(x, y) + \mathcal{L}(x, y)\}$.

Preuve :

Par le Corollaire 2.1.1, nous avons que (EP) est équivalent à (AuxEP) :

$$\min_{y \in K} \quad \{\epsilon f(x^\star, y) + \mathcal{L}(x^\star, y)\}.$$

En fixant $\epsilon = 1$ et en appliquant la Proposition 3.1.1 au problème d'équilibre auxiliaire (AuxEP), nous avons le résultat suivant. $\square$

3.2 Fonction gap et principe du problème auxiliaire

L'approche de la fonction gap couplée au principe du problème auxiliaire nous permet d'exprimer le problème d'équilibre (EP) par la moyenne d'une fonction d'optimisation sous contrainte d'une fonction continûment différentiable.

3.2.1 Le problème classique

L'algorithme

Nous considérons un algorithme de recherche linéaire afin de minimiser la fonction g donnée par (3.1).

Algorithme 3.2.1

Soit g définit par (3.1).
PAS 1 : Soit $k = 0$, $x^0 \in K$.
PAS 2 : Soit $x^{k+1} = x^k + t_k d^k$ pour $k = 1, 2, 3, \ldots$ où

$$d^k = y(x^k) - x^k,$$

$y(x^k)$ est la solution du problème d'optimisation :

$$\min_{y \in K} f(x^k, y),$$

et t_k est la solution du problème de recherche linéaire :

$$\min_{t \in [0,1]} g(x^k + td^k).$$

PAS 3 : Si $\|x^{k+1} - x^k\| \leq \mu$ pour un certain facteur de tolérance $\mu > 0$, alors on s'arrête. Sinon on remplace k par $k+1$ et on retourne au PAS 2.

Nous pouvons montrer que d^k, défini dans l'Algorithme 3.2.1, est une direction de descente de la fonction gap g en x^k. Pour affirmer cela, nous devons faire l'hypothèse suivante :

$$\langle \nabla_x f(x,y) + \nabla_y f(x,y) \, , \, y - x \rangle \geq 0 \quad \forall x, y \in K. \tag{3.4}$$

Nous pouvons exprimer cela par le résultat suivant :

Proposition 3.2.1
Supposons que les hypothèses de la Proposition 3.1.1 soient vérifiées et supposons en plus que l'hypothèse (3.4) ait lieu.
Alors

$$d(x) = y(x) - x$$

est une direction de descente pour la fonction gap g *au point* $x \in K$*, tel que* $y(x) \neq x$*.*

Preuve :
Nous avons d'abord que $x^\star$ est une solution du problème d'équilibre (EP) si et seulement si $y(x^\star) = x^\star$.

Ensuite, puisque $y(x)$ est la solution du problème suivant :

$$\min_{y \in K} f(x, y)$$

et comme $f(x, \cdot)$ est strictement convexe, nous avons l'inéquation variationnelle suivante :

$$\langle \nabla_y f(x, y(x)) \, , \, z - y(x) \rangle > 0 \quad \forall z \in K \text{ et } z \neq y(x).$$

En fixant $z = x$, nous obtenons

$$\langle \nabla_y f(x, y(x)) \, , \, x - y(x) \rangle \quad > \quad 0.$$

Ceci est équivalent à l'inégalité suivante,

$$\langle \nabla_y f(x, y(x)) \, , \, y(x) - x \rangle \quad < \quad 0.$$

Ainsi en prenant en compte l'hypothèse (3.4), nous obtenons

$$\langle \nabla_x f(x, y(x)) + \nabla_y f(x, y(x)), y(x) - x \rangle \geq 0.$$

Par la décomposition du produit scalaire, nous remarquons

$$\langle \nabla_x f(x, y(x)) \, , \, y(x) - x \rangle + \langle \nabla_y f(x, y(x)) \, , \, y(x) - x \rangle \geq 0.$$

Si nous passons le premier terme de l'équation précédente dans le membre de droite et en utilisant (3.2), nous avons

$$0 > \langle \nabla_y f(x, y(x)) \, , \, y(x) - x \rangle \geq \underbrace{-\langle \nabla_x f(x, y(x))}_{\nabla g(x)} \, , \, y(x) - x . \rangle$$

Nous obtenons alors

$$\langle \nabla g(x), y(x) - x \rangle < 0.$$

Ce qui signifie que $d(x) = y(x) - x$ est une direction de descente pour g en x. □

La Convergence

Théorème 3.2.1
Soit K un ensemble compact et convexe de $I\!R^N$.
Supposons que $f(x, \cdot)$ est une fonction strictement convexe en y pour tout $x \in K$, différentiable en x, et supposons que $\nabla_x f$ est continu sur $K \times K$.
Supposons aussi que l'hypothèse (3.4) soit satisfaite.
Alors, pour tout point de départ $x^0 \in K$, la suite $\{x^k\}_{k \in I\!N}$ définie par l'Algorithme de recherche linéaire 3.2.1 appartient à K, et que tout point limite de $\{x^k\}_{k \in I\!N}$ est une solution du problème d'équilibre (EP).

Preuve :
Premièrement, nous avons que K est convexe et que $0 \leq t_k \leq 1$ par l'Algorithme 3.2.1, alors la suite $\{x^k\}_{k \in \mathbb{N}}$ est contenue dans K.

La fonction $d(x) = y(x) - x$ est continue sur K car $y(x)$ est une fonction continue. Nous avons aussi que

$$U(x, d) = \left\{ y : y = x + t_k d \, , \quad g(x + t_k d) = \min_{t \in [0,1]} g(x + td) \right\}$$

est fermé quand g est une fonction continue.
Dés lors, la fonction algorithmique $x^k \to x^{k+1} = U(x^k, d(x^k))$ est fermé. Le Théorème de Zangwill implique que tout point limite de $\{x^k\}_{k \in \mathbb{N}}$ est une solution du problème d'équilibre (EP). □

3.2.2 Le problème auxiliaire

L'algorithme

Nous pouvons également appliquer l'Algorithme de recherche linéaire 3.2.1 au problème d'équilibre auxiliaire (AuxEP). Nous obtenons alors l'algorithme suivant :

Algorithme 3.2.2

Soit g défini par (3.3).
PAS 1 : Soit $k = 0$, $x^0 \in K$.
PAS 2 : Soit $x^{k+1} = x^k + t_k d^k$ pour $k = 1, 2, 3, \dots$ où

$$d^k = y(x^k) - x^k,$$

$y(x^k)$ est la solution du problème d'optimisation :

$$\min_{y \in K} \quad \{f(x^k, y) + \mathcal{L}(x^k, y)\},$$

et t_k est la solution du problème de recherche linéaire :

$$\min_{t \in [0,1]} g(x^k + td^k).$$

PAS 3 : Si $\|x^{k+1} - x^k\| \leq \mu$ pour un certain facteur de tolérance $\mu > 0$, alors on s'arrête. Sinon on remplace k par $k+1$ et on retourne au PAS 2.

Comme pour l'algorithme 3.2.1, nous avons une hypothèse similaire à (3.4) qui est

$$\langle \nabla_x f(x,y) + \nabla_x \mathcal{L}(x,y) + \nabla_y f(x,y) + \nabla_y \mathcal{L}(x,y)\, ,\, y - x \rangle \geq 0 \quad \forall x, y \in K. \quad (3.5)$$

La converge

La convergence de cet algorithme suit directement du Théorème 3.2.1.

Théorème 3.2.2
Soit K un ensemble compact et convexe de $\mathbb{R}^N$.
Supposons que $f(x,\cdot)$ est une fonction strictement convexe en y pour tout $x \in K$, différentiable en x, et supposons que $\nabla_x f$ est continu sur $K \times K$.
Soit $\mathcal{L}(\cdot,\cdot) : K \times K \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction positive, continûment différentiable sur $K \times K$, strictement convexe dans le second argument y pour tout $x \in K$ et tel que

(i) $\mathcal{L}(x,x) = 0$ *pour tout* $x \in K$.

(ii) $\nabla_y \mathcal{L}(x,x) = 0$ *pour tout* $x \in K$.

Supposons aussi que l'hypothèse (3.4) soit satisfaite.
Alors, pour tout point de départ $x^0 \in K$, la suite $\{x^k\}_{k \in \mathbb{N}}$ définie par l'Algorithme de recherche linéaire 3.2.2 appartient à K, et que tout point limite de $\{x^k\}_{k \in \mathbb{N}}$ est une solution du problème d'équilibre (EP).

Preuve :
Il suit de la Proposition 2.1.1 que EP est équivalent à AuxEP.
En fixant $\epsilon = 1$ et en appliquant le Théorème 3.2.1 au problème d'équilibre auxiliaire (AuxEP), nous avons alors le résultat souhaité. $\square$

Chapitre 4

Problème d'admissibilité convexe et problème d'équilibre

4.1 Rappel

Dans cette section, nous considérons le problème d'admissibilité convexe (CFP) comme un problème auxiliaire du problème d'équilibre. Redonnons la définition du problème d'équilibre, où on ajoute une hypothèse supplémentaire sur la fonction f.

Définition 4.1.1
Un problème d'équilibre est défini comme (EP) :

$$\text{trouver } x^\star \in K \quad \text{tel que} \quad f(x^\star, y) \geq 0 \quad \forall y \in K$$

où

1. *K est un sous ensemble fermé convexe non vide de $I\!R^n$.*
2. *$f : K \times K \longrightarrow I\!R$ est une fonction continue satisfaisant*

   P1 : $f(x, x) = 0$, $\forall x \in K$.

   P2 : $f(x, \cdot) : K \longrightarrow I\!R$ convexe $\forall x \in K$ et semi-continue inférieurement pour tout $x \in K$.

   P3 : $f(\cdot, y) : K \longrightarrow I\!R$ est semi-continue supérieurement pour tout $y \in K$.

4.2 Le problème d'admissibilité convexe

Définition 4.2.1
Le problème admissibilité convexe (CFP) est défini comme

$$\text{trouver } x \in \bigcap_{y \in K} L_f(y), \quad \text{où } L_f(y) := \{x \in K \; tq \; f(y,x) \leq 0\}.$$

Remarque :
Pour tout $y \in K$, $L_f(y)$ est un sous ensemble non vide, fermé et convexe de K.
Car nous avons que $f(x,x) = 0$, $\forall y \in K$, que la fonction est semi-continue inférieurement et convexe dans le second argument et que K est fermé et convexe.

4.3 Liens entre EP et CFP

Lemme 4.3.1
Soit Y un sous ensemble d'un espace vectoriel topologique compact X.
Pour chaque $y \in Y$, considérons un sous ensemble fermé $C(y)$ de X.
Si les deux conditions suivantes ont lieu :

C1. l'enveloppe convexe de tout sous ensemble fini $\{x_1, \dots x_n\}$ de Y, notée $co\{x_1, \dots, x_n\}$, est contenue dans $\bigcup_{i=1}^{n} C(x_i)$,

C2. $C(x)$ est compact pour au moins certains $x \in Y$,

alors

$$\bigcap_{y \in Y} C(y) \neq \emptyset.$$

Une légère variation du Lemme 4.3.1 nous donne le suivant :

Lemme 4.3.2
Si nous remplaçons, dans le Lemme 4.3.1, le condition C2 par la condition suivante :

C3. la fermeture $\overline{co}Y$ *de l'enveloppe convexe de* Y *est compact,*

Alors la condition du Lemme 4.3.1 a encore lieu, i.e.,

$$\bigcap_{y\in Y} C(y) \neq \emptyset.$$

Preuve :
Pour chaque y, définissons $D(y) := \overline{co}K \cap C(y)$ et considérons un sous ensemble fini quelconque $\{x_1, \ldots x_n\}$ de Y. Nous obtenons de *C1.* que

$$co\{x_1, \ldots, x_n\} \subset \bigcup_{i=1}^{n} C(x_i)$$

et que

$$co\{x_1, \ldots, x_n\} \subset \overline{co}Y.$$

Il suit de ces relations que

$$co\{x_1, \ldots, x_n\} \subset \overline{co}Y \bigcap \bigcup_{i=1}^{n} C(x_i),$$

ce qui implique que

$$co\{x_1, \ldots, x_n\} \subset \bigcup_{i=1}^{n} \overline{co}Y \bigcap C(x_i) = \bigcup_{i=1}^{n} D(x_i).$$

D'un autre coté, $D(y)$ est compact pour tout $y \in Y$. Alors par le Lemme 4.3.1, nous avons que $\bigcap_{y\in Y} D(y) \neq \emptyset$, ce qui implique que $\bigcap_{y\in Y} C(y) \neq \emptyset$. □

Théorème 4.3.1
L'ensemble solution de CFP est un sous ensemble de l'ensemble solution de EP.

Preuve :
Soit $x^\star \in K$ une solution de CFP, et soit $y \in K$. Nous définissons $z_\lambda \in K$ pour chaque $\lambda \in]0,1[$ par

$$z_k = \lambda y + (1-\lambda)x^\star.$$

Nous avons pour chaque $\lambda \in]0,1[$

$$\begin{array}{rcl} 0 & \underbrace{=}_{f(x,x)=0} & f(z_\lambda, z_\lambda) \\ & = & f(z_\lambda, \lambda y + (1-\lambda)x^\star) \\ & \underbrace{\leq}_{f(x,\cdot)\,convexe} & \lambda f(z_\lambda, y) + (1-\lambda) f(z_\lambda, x^\star). \end{array}$$

Puisque par définition du CFP,

$$x^\star \in \bigcap_{y\in K} L_f(y) \underbrace{=}_{\text{déf de } L_f(y)} \bigcap_{y\in K} \{x \in K : f(y,x) \leq 0\}$$

et comme dans notre cas $y = z_\lambda \in K$, nous obtenons pour chaque $\lambda \in]0,1[$

$$f(z_\lambda, x^\star) \leq 0.$$

Alors, pour chaque $\lambda \in]0,1[$ et pour tout $y \in K$, il suit que

$$0 \leq f(z_\lambda, y) = f(\lambda y + (1-\lambda)x^\star, y) = f(x^\star + \lambda(y - x^\star), y).$$

En fixant $\lambda \searrow 0$, nous avons

$$\begin{array}{rcl} 0 & \leq & f(x^\star + \lambda(y-x^\star), y) \\ & \leq & f(x^\star, y) + \lambda f(y - x^\star, y) \\ & \leq & f(x^\star, y) + \lambda \underbrace{f(y,y)}_{=0} - \lambda f(x^\star, y) \\ & = & \underbrace{(1-\lambda)}_{<1} f(x^\star, y) \\ & \leq & f(x^\star, y) \end{array}$$

pour tout $y \in K$, i.e. $x^\star$ est une solution du EP. □

Remarquons que la réciproque du Théorème 4.3.1 n'est pas vraie. Pour voir cela de manière plus explicite, regardons quelques contre-exemples. Soient $n = 1$ et $K = [0, 2]$.

Contre-exemple 1 :

$$f(x, y) = (x - y)^2$$

Dans ce cas l'ensemble solution du EP est l'entièreté de l'intervalle K.
En effet, il faut trouver un $x^\star$ tel que $f(x^\star, y) \geq 0$, c'est-à-dire trouver $x^\star$ tel que $(x^\star - y)^2 \geq 0$. Or un carré est toujours positif.

Et l'ensemble solution du CFP est vide car il faut trouver un $x^\star$ tel que $f(y, x^\star) \leq 0$, c'est-à-dire tel que $(y - x^\star)^2 \leq 0$. Or un tel $x^\star$ n'existe pas.

Contre-exemple 2 :

$$f(x, y) = \max\{0, |x - y| - 1\}$$

Pour cet exemple, l'ensemble EP équivaut l'ensemble K.
Il faut trouver un $x^\star$ tel que $f(x^\star, y) \geq 0$, donc tel que $\max\{0, |x - y| - 1\} \geq 0$.
Etudions les valeurs que peuvent prendre le maximum :

$$\begin{array}{lcl} \text{si } y = 0 & \longrightarrow & \{0, |x| - 1\} \\ \text{si } y = 2 & \longrightarrow & \{0, |x - 2| - 1\} \end{array}$$

Et l'ensemble solution du CFP est le singleton 1.
Ici, il faut encore trouver $x^\star$ tel que $f(y, x) \leq 0$.
En effet, comme $x^\star = 1$, montrons que le maximum est toujours négatif. Dans ce but, prenons des valeurs de $\hat{x}$ proche de 1 supérieurement et inférieurement afin de montrer qu'elles ne sont pas acceptables.

Si nous étudions les valeurs que peuvent prendre le maximum de $\{0, |y - \hat{x}| - 1\}$ pour $\hat{x}$ légèrement inférieure à 1, nous obtenons :

$$\begin{array}{lcl} \text{si } y = 0 & \longrightarrow & \max\{0, \underbrace{|-\hat{x}| - 1}_{<0}\} = 0 \\ \text{si } y = 2 & \longrightarrow & \max\{0, \underbrace{|2 - \hat{x}| - 1}_{>0}\} > 0 \end{array}$$

Nous avons ici que le maximum est nul ou supérieur à zéro lorsque $\hat{x}$ est proche inférieurement à un. Or ceci n'est pas une solution acceptable comme solution de CFP.

Recommencons le même principe mais pour une valeur de $\hat{x}$ légèrement supérieure à 1, nous obtenons :

$$\begin{array}{lcl}\text{si } y=0 & \longrightarrow & \max\{0, \underbrace{|-\hat{x}|-1}_{>0}\} > 0 \\ \text{si } y=2 & \longrightarrow & \max\{0, \underbrace{|2-\hat{x}|-1}_{<0}\} = 0\end{array}$$

Nous avons ici que le maximum est encore nul ou supérieur à zéro lorsque $\hat{x}$ est proche supérieurement à un. Or, comme précedemment, ceci n'est pas une solution acceptable pour CFP.

Contre-exemple 3 :

Considérons le contre-exemple suivant $X = \mathbb{R}$, $a \in R$, $a > 0$, prenons $K =]0, a[$ et définissons

$$f(x,y) := \begin{cases} 0 & \text{si } x = 0 \\ -\frac{y}{x} + 1 & \text{si } x > 0 \end{cases}$$

Dans ce cas, l'ensemble solution de EP vaut $\{0, a\}$.
Montrons ceci de manière plus détaillée. Il faut trouver $x^\star \in K$ tel que $f(x^\star, y) \geq 0$, i.e., dans le cas ou $x^\star \neq 0$.

$$\begin{aligned} f(x^\star, y) = -\frac{y}{x^\star} + 1 &\geq 0 \\ -\frac{y}{x^\star} &\geq -1 \\ y &\leq x^\star \end{aligned}$$

Comme $y \in K$ et que a est la borne supérieure de $[0, a]$, a est une solution possible.
Dans le cas où $a = 0$, nous avons une autre solution possible car $0 \geq 0$.
Pour le CFP, nous avons $\bigcap_{y \in [0,a]} [y, a] = \{a\}$.

Remarque :

Quand f est pseudomonotone, i.e. si $\forall\, x, y \in K$

$$f(x,y) \geq 0 \Longrightarrow f(y,x) \leq 0,$$

la réciproque du Théorème 4.3.1 est vraie, c'est-à-dire sous cette hypothèse supplémentaire, CFP et EP ont le même ensemble solution.

Nous allons noter, pour plus de simplicité par la suite, l'hypothèse de pseudomonotonicité comme :

P4. $\forall x, y \in K \quad f(x,y) \geq 0 \Longrightarrow f(y,x) \leq 0$.

Une variante de cette hypothèse est la suivante :

P4'. $\forall x, y \in K \quad f(x,y) > 0 \Longrightarrow f(y,x) < 0$.

Proposition 4.3.1

Si f est pseudomonotone et que $\{y_m\}_{m \in K} \subset I\!N$ est une suite bornée, alors

$$\bigcap_{m=1}^{\infty} L_f(y^m) \neq \emptyset.$$

Preuve :

Soit $Y = \{y^m\}_{m \in I\!N}$ et $C(y) = L_f(y)$ pour $y \in Y$.

Affirmer que

$$\bigcap_{m=1}^{\infty} L_f(y^m) \neq \emptyset$$

est équivalent à dire que les hypothèses *C1.* et *C3.* des Lemmes 4.3.1 et 4.3.2 ont lieu.

L'hypothèse *C3.* est satisfaite car la fermeture de l'enveloppe convexe de Y est un compact puisque Y est une suite bornée.

L'hypothèse *C1.* est elle aussi satisfaite car nous considérons un sous-ensemble fini quelconque $\{y^{m_1}, y^{m_2}, \cdots, y^{m_p}\}$ de Y et un élément $\bar{x}$ appartenant à l'enveloppe convexe de $\{y^{m_1}, y^{m_2}, \cdots, y^{m_p}\}$ i.e., par la définition de combinaison convexe,

$$\bar{x} = \sum_{i=1}^{p} \lambda_i y^{m_1} \quad \text{avec} \sum_{i=1}^{p} \lambda_i = 1 \text{ et } \lambda_i \geq 0 \quad (1 < i < p).$$

Supposons par contradiction que

$$\bar{x} \notin \bigcap_{i=1}^{p} L_f(y^{m_i})$$

en utilisant la définition de $L_f(y^{m_i})$, nous obtenons

$$f(y^{m_i}, \bar{x}) > 0 \text{ où } 1 < i < p.$$

Par la pseudomonotonicité, nous avons que $f(\bar{x}, y^{m_i}) < 0$ où $1 < i < p$.
En utilisant les hypothèses *P1 :* et *P2 :* de la définition du problème d'équilibre, avec $x = \bar{x}$

$$0 \underbrace{=}_{P1} f(\bar{x}, \bar{x}) = f(\bar{x}, \sum_{i=1}^{p} \lambda_i y^{m_1}) \leq \sum_{i=1}^{p} \lambda_i f(\bar{x}, y^{m_i}) < 0.$$

Ainsi on a que $0 < 0$, il y a donc contradiction.
Puisque les hypothèses C1 et C2 des Lemmes 4.3.1 et 4.3.2 sont vérifiées, nous pouvons affirmer que

$$\bigcap_{m=1}^{\infty} L_f(y^m) \neq \emptyset.$$

□

Proposition 4.3.2
Considérons $X = K = I\!R^n$ et une fonction $f : I\!R^n \times I\!R^n \longrightarrow I\!R \cup \{\infty\}$ définie par

$$f(x, y) := y^t A y + x^t B y - x^t A x,$$

où $B \in I\!R^{n \times n}$ est tel que $B = -B^T$, et $A \in I\!R^{n \times n}$ est semi-définie positive, satisfaisant $x^t A x > 0$ pour certains $x \in I\!R^n$.
Alors

1. *f satisfait P1, P2, P3 et P4,*
2. *il n'existe aucun $h : I\!R^n \longrightarrow I\!R$ tel que $f(x, y) = h(y) - h(x)$,*
3. *il n'existe aucun $T : I\!R^n \longrightarrow \mathcal{P}(I\!R^n)$ tel que $f(x, y) = \max_{u \in T(x)} \langle u, y - x \rangle$ pour tout $x, y \in R^n$,*
4. *il n'existe aucun $T : I\!R^n \longrightarrow \mathcal{P}(I\!R^n)$ tel que $f(x, y) = \max_{u \in T(x)} \langle x - u, y - x \rangle$ pour tout $x, y \in R^n$.*

Preuve :

1. L'hypothèse P1 suit du fait que $x^t B x = 0$ pour tout $x \in K$.
   En effet,
   $$f(x, x) = x^t A x + x^t B x - x^t A x = x^t B x = 0.$$

P2 est satisfaite parce que A est semi-définie positive.

P3 est satisfaite par la définition de f.

P4 est satisfaite vu que $f(x,y)+f(y,x)=0$ pour tout $x,y \in \mathbb{R}^n$.

En effet,

$$\begin{aligned} f(x,y)+f(y,x) &= y^tAy + x^tBy - x^tAx + x^tAx + y^tBx - y^tAy \\ &= 0. \end{aligned}$$

2. L'affirmation est vraie parce que f n'est pas séparable.

3. Prouvons cela par contradiction.

   Supposons alors qu'il existe $T : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathcal{P}(\mathbb{R}^n)$ tel que $f(x,y) = \max_{u\in T(x)}\langle u, y-x\rangle$ pour tout $x, y \in K$. Fixons $x \in \mathbb{R}^n$ telque $x^tAx > 0$.

   Prenons d'abord $y = 2x$, nous obtenons

$$\begin{aligned} f(x,2x) &= 2x^tA2x + x^tB2x - x^tAx \\ &= 4x^tAx + 2x^tBx - x^tAx \\ &= 3\underbrace{x^tAx}_{>0} + 2\underbrace{x^tBx}_{=0} \end{aligned}$$

   et donc

$$3x^tAx = \max_{u\in T(x)}\langle u, x\rangle.$$

   Prenons ensuite $y = 3x$, nous obtenons

$$\begin{aligned} f(x,3x) &= 3x^tA3x + x^tB3x - x^tAx \\ &= 9x^tAx + 3x^tBx - x^tAx \\ &= 8\underbrace{x^tAx}_{>0} + 3\underbrace{x^tBx}_{=0} \end{aligned}$$

   et donc

$$\begin{aligned} 8x^tAx &= \max_{u\in T(x)}\langle u, 2x\rangle \\ 8x^tAx &= \max_{u\in T(x)} 2\langle u, x\rangle \\ 4x^tAx &= \max_{u\in T(x)}\langle u, x\rangle. \end{aligned}$$

   Nous avons d'un côté que

$$3x^tAx = \max_{u\in T(x)}\langle u, x\rangle$$

   et de l'autre

$$4x^tAx = \max_{u\in T(x)}\langle u, x\rangle.$$

   Si nous soustrayons ces deux relations, nous obtenons $x^tAx = 0$, ce qui contredit l'hypothèse que $x^tAx > 0$.

4. En utilisant le même type de raisonnement que la preuve du point 3. $\square$

Chapitre 5

Méthode de projection exacte pour problème d'équilibre

5.1 Principe des méthodes de projections

Les problèmes d'admissibilité convexe peuvent être résolus par des méthodes de projections.

Il existe deux types de méthodes de projection : les méthodes de projections successives et les méthodes de projections simultanées.

Pour les méthodes de projections successives, cela consiste à construire une suite $\{x^k\}_{k\geq 0} \subset \mathbb{R}^N$ à partir d'un point arbitraire x^0.

Soit x^k et l'ensemble $L_f(y^k)$ donnés, nous faisons un pas dans la direction de la projection orthogonale de x^k sur $L_f(y^k)$ et nous évaluons ensuite x^{k+1} par la relation suivante par

$$x^{k+1} = x^k + t_k[P_{L_f(y^k)}(x^k) - x^k]$$

où pour $y \in K$, $P_{L_f(y)}$ désigne la projection orthogonale sur $L_f(y)$ et $\{t^k\}_{k\geq 0} \subset [\alpha, 2-\alpha]$ avec $\alpha \in]0,1[$ une suite de paramètres de relaxation éxogène données.

La manière de choisir la suite $\{y^k\}$ définit ce qu'on appelle la stratégie de contrôle et ce sont ces stratégies de contrôle qui caractérisent chaque méthode.

Il en existe plusieurs sortes, par exemple, pour le cas d'un nombre infini d'ensembles convexes, on peut considérer la stratégie suivante :

Le contrôle de la contrainte la plus violée :
Cette stratégie de contrôle mesure la proximité de x^k à un ensemble. Il faut choisir $y^k \in K$ tel que

$$f(y^k, x^k) = \max_{y \in K} f(y, x^k).$$

Un autre exemple de stratégie de contrôle peut être :
Le contrôle de l'ensemble le plus éloigné :
Il faut déterminer un $y^m \in K$ tel que

$$\|x^m - P_{L_f(y)}(x^m)\| = \max_{y \in K} \|x^m - P_{L_f(y)}(x^m)\|.$$

Le deuxième type de méthodes de projections est les projections simultanées. Pour celles-ci, nous construisons une suite $\{x^k\}_{k \geq 0} \subseteq \mathbb{R}^N$ à partir d'un point de départ aléatoire $x^0 \in \mathbb{R}^N$. Ensuite, nous calculons, étant donné x^k, la projection orthogonale sur tout ensemble convexe $L_f(y)$ pour $y \in K$.

5.2 Résolution de EP sur base des méthodes de projections

5.2.1 L'algorithme

Le premier algorithme pour la résolution de EP, basé sur les projections successives avec la stratégie de contrôle de la contrainte la plus violée, peut être décrit comme :

Algorithme 5.2.1 *Méthode de projection exacte pour la résolution de EP*

PAS 1 : Soit $k = 0$, $x^0 \in K$ *et* $r_0 = \|x^0\|$.

PAS 2 : Soient x^k *et* r_k,

(i) *Définir*

$$K_k = \{x \in K \mid \|x\| \leq r_k + 1\}. \tag{5.1}$$

(ii) Trouver $y^k \in K_k$ vérifiant

$$\max_{y \in K_k} f(y, x^k) - \epsilon_k \leq f(y^k, x^k). \tag{5.2}$$

(iii) Calculer x^{k+1} comme

$$x_{k+1} = x^k + t_k[P_{L_f(y^k)}(x^k) - x^k]. \tag{5.3}$$

(iv) Mettre à jour r_k comme

$$r_{k+1} = \max\{r_k, \|x^{k+1}\|\}. \tag{5.4}$$

Cet algorithme génère deux suites, $\{x^k\}_k \geq 0$ et $\{y^k\}_k \geq 0 \subset K$. Celui-ci exige en plus une suite de paramètres de précision $\{\epsilon_k\}_{k\geq 0} \subset]0, +\infty[$ satisfaisant $\lim_{k\to+\infty} \epsilon_k = 0$ pour la maximisation inexacte.

Chaque itération comprend deux grandes étapes : une étape de maximisation inexacte d'une fonction continue sur un ensemble compact et une seconde étape consistant à la projection orthogonale sur un ensemble de la forme $L_f(y)$ pour $y \in K$.

Proposition 5.2.1
L'algorithme 5.2.1 de projection exacte pour le résolution de EP est bien défini

Preuve :
Le *PAS 2 (ii)* est bien défini :

Il suit (5.1) et (5.4) que

$$K_k \subset K_{k+1} \text{ pour tout } k \in \mathbb{N}.$$

Puisque $x^0 \in K$, par le *PAS 1*, et que $\|x^0\| \leq r_0 + 1$, nous obtenons que $x^0 \in K_0$, par (5.1).
Donc $x^0 \in K_k$ pour tout $k \in \mathbb{N}$ car $K_k \subset K_{k+1}$.

Puisque K est fermé et par (5.1), tout K_k est non vide et compact.
En vertu de la continuité de f, $f(\cdot, y^k)$ atteint son maximum sur K_k, ainsi il existe un y^k satisfaisant (5.2).

Le *PAS 2 (iii)* est bien défini :

Par la convexité de $f(y^k, \cdot)$ et par la convexité et la fermeture de K, l'ensemble

$$L_f(y^k) = \{x \in K \mid f(y^k, x) \leq 0\}$$

est fermé, non vide et convexe.
Ainsi x^{k+1} est uniquement défini par (5.3), car une projection est unique lorsqu'elle a lieu dans un espace fermé et convexe. □

5.2.2 La convergence

Intéressons-nous aux propriétés de convergence de l'algorithme des projections successives :

Lemme 5.2.1
Supposons

$$\bigcap_{k=0}^{+\infty} L_f(y^k) \neq \emptyset$$

alors

(i) Pour tout

$$x^\star \in \bigcap_{k=0}^{+\infty} L_f(y^k),$$

la suite $\{\|x^k - x^\star\|\}_{k\geq 0}$ *est décroissante et convergente.*

(ii) La suite $\{x^k\}_{k\geq 0}$ *est bornée.*

(iii) $\lim_{k\to+\infty} \|x^{k+1} - x^k\| = 0$.

Preuve :

(i) Soit

$$x^\star \in \bigcap_{k=0}^{+\infty} L_f(y^k)$$

Alors par (5.3) : $x^{k+1} = x^k + t_k[P_{L_f(y^k)}(x^k) - x^k]$ nous obtenons

$$\begin{aligned}
\|x^{k+1} - x^\star\|^2 &= \|x^k - x^\star + t_k[P_{L_f(y^k)}(x^k) - x^k]\|^2 \\
&= \|x^k - x^\star\|^2 + t_k^2\|P_{L_f(y^k)}(x^k) - x^k\|^2 \\
&\quad +2t_k\langle x^k - x^\star, P_{L_f(y^k)}(x^k) - x^k\rangle. \qquad (5.5)
\end{aligned}$$

Intéressons-nous au double produit :

$$\begin{aligned}
& 2t_k\langle x^k - x^\star, P_{L_f(y^k)}(x^k) - x^k\rangle \\
= \; & 2t_k\langle x^k - P_{L_f(y^k)}(x^k) + P_{L_f(y^k)}(x^k) - x^\star, P_{L_f(y^k)}(x^k) - x^k\rangle \\
= \; & -2t_k\|x^k - P_{L_f(y^k)}(x^k)\|^2 \\
& +2t_k\langle P_{L_f(y^k)}(x^k) - x^\star, P_{L_f(y^k)}(x^k) - x^k\rangle. \qquad (5.6)
\end{aligned}$$

Ainsi (5.5) et (5.6), nous donne

$$\begin{aligned}
\|x^{k+1} - x^\star\|^2 \; = \; & \|x^k - x^\star\|^2 \\
& +t_k^2\|P_{L_f(y^k)}(x^k) - x^k]\|^2 \\
& -2t_k\|x^k - P_{L_f(y^k)}(x^k)\|^2 \\
& + \underbrace{2t_k\langle P_{L_f(y^k)}(x^k) - x^\star, P_{L_f(y^k)}(x^k) - x^k\rangle}_{\leq 0}.
\end{aligned}$$

Nous avons que le dernier terme de cette relation est négatif par une caractérisation des projections orthogonales et par le fait que $x^\star \in L_f(y^k)$.

Nous en déduisons la relation suivante :

$$\begin{aligned}
\|x^{k+1} - x^\star\|^2 &\leq \|x^k - x^\star\|^2 \\
&\quad + t_k^2 \|P_{L_f(y^k)}(x^k) - x^k]\|^2 \\
&\quad - 2t_k \|x^k - P_{L_f(y^k)}(x^k)\|^2 \\
&= \|x^k - x^\star\|^2 \underbrace{- \underbrace{t_k}_{>0} \underbrace{(2 - t_k)}_{>0} \underbrace{\|x^k - P_{L_f(y^k)}(x^k)\|^2}_{\geq 0}}_{\leq 0} \\
&\leq \|x^k - x^\star\|^2 \qquad (5.7)
\end{aligned}$$

où $t_k \in [\alpha, 2 - \alpha]$ avec $0 < \alpha < 1$.

Nous pouvons conclure à partir de (5.7) que la suite $\{\|x^k - x^\star\|\}_{k \geq 0}$ est décroissante.
En effet, nous avons que

$$\|x^{k+1} - x^\star\|^2 \leq \|x^k - x^\star\|^2 \leq \cdots \leq \|x^0 - x^\star\|^2.$$

On peut conclure que la suite $\{\|x^k - x^\star\|\}_{k \geq 0}$ est convergente en vue de la positivité et la décroissance de celle-ci.

(ii) La convergence de la suite $\{\|x^k - x^\star\|\}_{k \geq 0}$ vue dans le point (i) implique que la suite $\{x^k\}_{k \geq 0}$ est bornée.

(iii) Montrons que

$$\lim_{k \to +\infty} \|x^{k+1} - x^k\| = 0.$$

A partir de (5.7), nous avons

$$\|x^{k+1} - x^\star\|^2 \leq \|x^k - x^\star\|^2 - t_k(2 - t_k)\|x^k - P_{L_f(y^k)}(x^k)\|^2$$

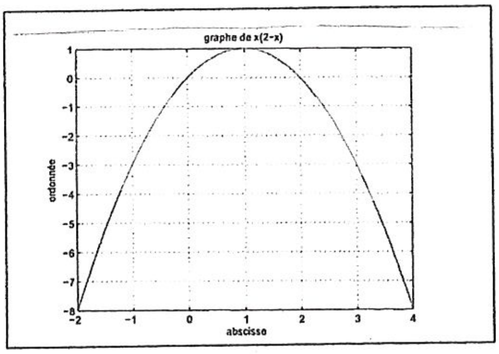
$$\Longleftrightarrow$$

$$t_k(2 - t_k)\|x^k - P_{L_f(y^k)}(x^k)\|^2 \leq \|x^k - x^\star\|^2 - \|x^{k+1} - x^\star\|^2. \qquad (5.8)$$

Puisque $0 < \alpha \leq t_k \leq 2 - \alpha$ avec $0 < \alpha < 1$, nous avons

$$0 < \alpha(2 - \alpha) \leq t_k(2 - t_k).$$

Ceci se voit explicitement sur le graphe de la fonction $y = x(2-x)$.



Ainsi par (5.8),

$$0 \leq \alpha(2-\alpha)\|x^k - P_{L_f(y^k)}(x^k)\|^2 \leq \underbrace{\underbrace{\|x^k - x^*\|^2}_{\searrow 0} - \underbrace{\|x^{k+1} - x^*\|^2}_{\searrow 0}}_{\longrightarrow 0}. \quad (5.9)$$

A partir de (5.9), du fait que $\alpha(2-\alpha) > 0$ et de la convergence de la suite $\{\|x^k - x^*\|\}_{k\geq 0}$, nous obtenons

$$\lim_{k\longrightarrow+\infty} \{x^k - P_{L_f(y^k)}(x^k)\} = 0. \quad (5.10)$$

Nous avons

$$\lim_{k\longrightarrow+\infty} \frac{x^{k+1} - x^k}{t_k} = 0.$$

Puisque $0 < \alpha \leq t_k \leq 2-\alpha$, nous avons que $x^{k+1} - x^k \longrightarrow 0$ quand $k \longrightarrow +\infty$ $\square$

Lemme 5.2.2
Supposons que la suite $\{x^k\}_{k\geq 0}$ est bornée et que

$$\lim_{k\longrightarrow+\infty} \|x^{k+1} - x^k\| = 0.$$

Alors l'entièreté de la suite $\{x^k\}_{k\geq 0}$ converge vers une solution x^* du problème d'équilibre EP.

Preuve :

(i) Par (5.10), nous avons

$$\lim_{k \to +\infty} \left\{ x^k - P_{L_f(y^k)}(x^k) \right\} = 0.$$

(ii) Montrons que la suite $\{y^k\}_{k \geq 0}$ est bornée.
Puisque la suite $\{x^k\}_{k \geq 0}$ est bornée, et en prenant $\bar{r} > 0$ tel que $\|x^k\| \leq \bar{r}$ pour tout $k \in \mathbb{N}$.

Il suit facilement de (5.4) : $r_{k+1} = \max\{r_k, \|x^{k+1}\|\}$ que

$$r_k = \max\{\|x^0\|, \ldots, \|x^k\|\}$$

et que

$$r_k \leq \bar{r} \text{ pour tout } k \in \mathbb{N} \text{ car } \|x^0\| = r_0 \text{ et } \|x^k\| \leq \bar{r}.$$

Ainsi, par (5.1) : $K_k = \{x \in K \mid \|x\| \leq r_k + 1\}$ nous avons que

$$K_k \subset B(0; \bar{r} + 1).$$

Il suit de (5.2) : $\max_{y \in K_k} f(y, x^k) - \epsilon_k \leq f(y^k, x^k)$, $y^k \in K_k$, que, pour tout $k \in \mathbb{N}$,

$$\|y^k\| \leq \bar{r} + 1.$$

Car $y^k \in K_k \subset B(0; \bar{r} + 1) \implies \|y^k\| \leq \bar{r} + 1$. On en déduit que la suite $\{y^k\}_{k \geq 0}$ est bornée.

(iii) Soit $\bar{x}$ une valeur d'adhérence de la suite $\{x^k\}_{k \geq 0} \subset K$. K étant fermé, $\bar{x} \in K$
Alors il doit exister une sous-suite $\{x^{k_n}\}_{k_n \geq 0}$ de $\{x^k\}_{k \geq 0}$ telle que

$$\lim_{k_n \to +\infty} x^{k_n} = \bar{x}.$$

Considérons la sous-suite correspondante $\{y^{k_n}\}_{k_n \geq 0}$ qui est aussi bornée. Dès lors, il doit exister une sous-suite $\{y^{k_{n_p}}\}_{k_{n_p} \geq 0}$ de $\{y^{k_n}\}_{k_n \geq 0}$ qui converge vers $\bar{y}$.
Nous obtenons

$$\lim_{k_{n_p} \to +\infty} y^{k_{n_p}} = \bar{y}$$

Par souci de clareté, nous utiliserons désormais les notations suivantes :

$$y^{k_{n_p}} \equiv y^{k_n},$$
$$x^{k_{n_p}} \equiv x^{k_n}.$$

(iv) Montrons que $f(\bar{y}, \bar{x}) = 0$.
Par (i) :

$$\lim_{k \to +\infty} \{x^k - P_{L_f(y^{k_n})}(x^k)\} = 0,$$

nous obtenons

$$\lim_{k \to +\infty} P_{L_f(y^{k_n})}(x^{k_n}) = \lim_{k \to +\infty} x^{k_n} = \bar{x}.$$

La continuité de f implique

$$\begin{aligned} f(\bar{y}, \bar{x}) &= f\left(\lim_{k_n \to +\infty} y^{k_n}, \lim_{k_n \to +\infty} P_{L_f(y^{k_n})}(x^{k_n})\right) \\ &= \lim_{k_n \to +\infty} f(y^{k_n}, P_{L_f(y^{k_n})}(x^{k_n})) \\ &\leq 0 \end{aligned} \tag{5.11}$$

où l'inégalité (5.11) suit du fait que $P_{L_f(y^{k_n})}(x^{k_n}) \in L_f(y^{k_n})$ et de la définition de $L_f(y^{k_n}) = \{x \in K \mid f(y^{k_n}, x) \leq 0\}$.

Remarquons que (5.1) et (5.4) implique

$$x^k \in K_k \text{ pour tout } k \in \mathbb{N}.$$

Donc en utilisant $f(x, x) = 0$ et (5.2), nous obtenons, pour tout $k \in \mathbb{N}$

$$0 = f(x^k, x^k) \leq \max_{y \in K_k} f(y, x^k) \underbrace{\leq}_{(5.2)} f(y^k, x^k) + \epsilon_k. \tag{5.12}$$

Puisque $\lim_{k \to +\infty} \epsilon_k = 0$ et comme f est continue, il suit de (5.12)

$$\begin{aligned} 0 &\leq \lim_{k_n \to +\infty} \left\{f(y^{k_n}, x^{k_n}) + \epsilon_{k_n}\right\} \\ &= f(\underbrace{\lim_{k_n \to +\infty} y^{k_n}}_{=\bar{y}}, \underbrace{\lim_{k_n \to +\infty} x^{k_n}}_{=\bar{x}}) + \underbrace{\lim_{k_n \to +\infty} \epsilon_{k_n}}_{=0} \\ &= f(\bar{y}, \bar{x}). \end{aligned} \tag{5.13}$$

Nous concluons de (5.11) et de (5.13)

$$0 \leq f(\bar{y}, \bar{x}) \leq 0$$

et donc

$$f(\bar{y}, \bar{x}) = 0. \tag{5.14}$$

(v) Montrons maintenant que pour tout $0 < \delta < 1$

$$\bar{x} \in [\mathrm{int}B(0; r^\star + 1 - \delta)] \cap K \text{ où } r^\star = \sup_{k \in \mathbb{N}} r_k.$$

Définissons

$$r^\star = \sup_{k \in \mathbb{N}} r_k$$

qui est fini car nous avons vu auparavant que r_k est borné.

Fixons δ tel que $0 < \delta < 1$ et considérons

$$B(0; r^\star + 1 - \delta) \equiv B(\epsilon).$$

En vue de (5.4), nous avons

$$\|x\| \leq r_k \leq \sup_{k \in \mathbb{N}} r_k = r^\star < r^\star + \underbrace{1 - \delta}_{>0} \text{ pour tout } k \in \mathbb{N}.$$

Ainsi, nous obtenons

$$\bar{x} \in \mathrm{int}B(\delta).$$

(vi) Maintenant, fixons $\hat{B}(\delta) = B(\delta) \cap K$ et considérons le problème d'équilibre $(E\hat{P}_\delta)$ avec une fonction f et un ensemble admissible $\hat{B}(\delta)$:

$$\text{Trouver } \hat{x} \in \hat{B}(\delta) \text{ tel que } f(\hat{x}, y) \geq 0 \text{ pour tout } y \in \hat{B}(\delta).$$

Nous pouvons affirmer

$$\bar{x} \in \hat{B}(\delta) \text{ résout un } E\hat{P}_\delta \text{ pour tout } 0 < \delta < 1.$$

En effet, observons que la suite $\{r_k\}_{k \in \mathbb{N}}$ est croissante : $r_k \leq r_{k+1}$.

Choisissons $k_0 \in \mathbb{N}$ tel que $r_{k_0} \geq r^\star - \delta$. Alors

$$r^\star + 1 - \delta \leq r_k + 1 \text{ pour tout } k \geq k_0,$$

car $r^\star + 1 - \delta \leq r_{k_0} + 1 \leq r_k + 1$.
Donc

$$\hat{B}(\delta) \subset K_k \text{ pour tout } k \geq k_0.$$

Prenons $z \in \hat{B}(\delta)$. Nous avons alors

$$z \in K_k \text{ pour tout } k \geq k_0$$

car $\hat{B}(\delta) \subset K_k$.

Nous remarquons alors

$$f(z, x^k) \leq \max_{y \in K_k} f(y, x^k) \underbrace{\leq}_{(5.2)} f(y^k, x^k) + \epsilon_k \text{ pour tout } k \geq k_0. \tag{5.15}$$

En utilisant maintenant la continuité de f, (5.15), (5.13) et (5.14) nous obtenons

$$\begin{aligned}
f(z, \bar{x}) & \underbrace{=}_{\text{déf } \bar{x}} f\left(z, \lim_{k_n \to +\infty} x^{k_n}\right) \\
& \underbrace{=}_{\text{continuité}} \lim_{k_n \to +\infty} f(z, x^{k_n}) \\
& \underbrace{\leq}_{(5.15)} \lim_{k_n \to +\infty} \left\{ f(y^{k_n}, x^{kn}) + \epsilon_{k_n} \right\} \\
& = f(\bar{y}, \bar{x}) + \underbrace{\lim_{k_n \to +\infty} \epsilon_{k_n}}_{0} \\
& \underbrace{=}_{(5.14)} 0.
\end{aligned}$$

Nous avons

$$f(z, \bar{x}) \leq 0 \text{ pour tout } z \in \hat{B}(\delta). \tag{5.16}$$

Par (5.16), et comme $\bar{x} \in K$, nous avons que, pour tout $0 < \delta < 1$,

$$\bar{x} \in \bigcap_{z \in \hat{B}(\delta)} L_f(z) = \bigcap_{z \in \hat{B}(\delta)} \{x \in K \mid f(z, \bar{x}) \leq 0\}.$$

Nous pouvons conclure que $\bar{x}$ résout un $\hat{EP}_\delta$ pour chaque $0 < \delta < 1$.

(vii) Montrons que $\bar{x}$ résout un EP.

On a vu précedemment que $\bar{x}$ résout un $\hat{EP}_\delta$, ce qui signifie que

$$f(\bar{x}, y) \geq 0 \quad \forall y \in \hat{B}(\delta).$$

Et le problème vérifie la relation suivante

$$f(\bar{x}, \bar{x}) = 0.$$

De ces deux relations, nous pouvons conclure que $\bar{x}$ résout le problème d'optimisation convexe :

$$\min_{y \in \hat{B}(\delta)} f(\bar{x}, y) \tag{5.17}$$

où $\hat{B}(\delta) = B(\delta) \cap K$.

Considérons la fonction $g : \mathbb{R}^N \longrightarrow \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$:

$$g(y) = \begin{cases} f(\bar{x}, y) & \text{si } y \in K \\ +\infty & \text{si } y \notin K. \end{cases}$$

Etant donnée la définition de g, on peut redéfinir le problème (5.17) :

$$\min_{y \in B(\delta)} g(y).$$

Nous avons montré précédemment que $\bar{x}$, un minimiseur de g sur $B(\delta)$, appartient à l'intérieur de $B(\delta)$.

Comme g est une fonction convexe, nous avons que $\bar{x}$ est une minimiseur de g.

Nous obtenons ainsi

$$g(\bar{x}) \leq g(y) \text{ pour tout } y \in \mathbb{R}^N.$$

ce qui est équivalent à

$$g(\bar{x}) = f(\bar{x}, \bar{x}) = 0 \leq g(y) = f(\bar{x}, y) \text{ pour tout } y \in K$$

c'est-à-dire $\bar{x}$ résout le EP.

(viii) Etablissons l'unicité de la valeur d'adhérence de $\{x^k\}_{k\in\mathbb{N}}$.
Nous avons vu auparavant

$$\bar{x} \in \bigcap_{z\in\hat{B}(\delta)} L_f(z).$$

Dès lors, par définition de

$$L_f(z) = \{x \in K | f(z,x) \leq 0\}$$

et de

$$\hat{B}(\delta) = B(\delta) \cap K$$

avec $B(\delta) \equiv B(0; r^\star + 1 - \delta)$, nous avons

$$f(z,\bar{x}) \leq 0 \quad \forall z \in K,\ \|z\| \leq r^\star + 1 - \delta.$$

Puisque $\delta \in]0,1[$ est arbitraire, nous pouvons conclure que

$$f(z,\bar{x}) \leq 0 \quad \forall z \in K,\ \|z\| < r^\star + 1.$$

Et donc par la continuité de f,

$$f(z,\bar{x}) \leq 0 \quad \forall z \in K,\ \|z\| \leq r^\star + 1.$$

Comme $y^k \in K_k$ pour tout $k \in K$, nous avons

$$\|y^k\| \leq r_k + 1 \leq r^\star + 1.$$

Désormais

$$f(y^k,\bar{x}) \leq 0 \quad \forall k \in \mathbb{N},$$

ce qui signifie, par définition de $L_f(y^k)$

$$\bar{x} \in \bigcap_{k=0}^{+\infty} L_f(y^k).$$

Par le Lemme 5.2.1 (i), la suite $\{\|x^k - \bar{x}\|\}_{k\geq 0}$ est convergente. Puisqu'il y a une sous-suite $\{\|x^{k_n} - \bar{x}\|\}_{k\geq 0}$ qui converge vers 0, l'entièreté de la suite $\{\|x^k - \bar{x}\|\}_{k\geq 0}$ converge vers 0. Ce qui donne

$$\lim_{k\to+\infty} x^k = \bar{x}.$$

□

Théorème 5.2.1

Soient $\{x^k\}_{k\geq 0}$ *et* $\{y^k\}_{k\geq 0} \subset K$ *les suites générées par l'Algorithme 5.2.1.*
Alors :

(i) Si

$$\bigcap_{k=0}^{+\infty} L_f(y^k) \neq \emptyset,$$

alors la suite $\{x^k\}_{k\geq 0}$ *converge vers une solution du EP.*

(ii) Si EP n'a pas de solution, alors $\{x^k\}_{k\geq 0}$ *ne converge pas.*

Preuve :

(i) Voir Lemmes 5.2.1 et 5.2.2.

(ii) Montrons par contradiction que si $\{x^k\}$ est convergente alors EP a des solutions.
Supposons que $\{x^k\}_{k\geq 0} \subset \mathbb{R}^N$ converge vers un certain $x^\star \in \mathbb{R}^N$.
Quand $\{x^k\}_{k\geq 0}$ converge, nous avons que

$$\{x^k\}_{k\geq 0} \text{ est bornée}$$

et

$$\lim_{k\to+\infty} \{x^{k+1} - x^k\} = 0.$$

En faisant intervenir les Lemmes 5.2.1 et 5.2.2, on a que $x^\star$ résout un EP, ce qui contredit l'hypothèse (ii), donc que EP n'a pas de solution. □

Corollaire 5.2.1

Si le problème d'admissibilité convexe (CFP) a une solution, alors la suite $\{x^k\}_{k\geq 0}$ *générée par l'Algorithme 5.2.1 converge vers une solution du problème d'équilibre (EP).*

Preuve :

Pour rappel, la définition du CFP est la suivante

$$\text{trouver } x^\star \in k \text{ tel que } x^\star \in \bigcap_{y\in K} L_f(y).$$

Et comme, le CFP admet des solutions, nous avons que $\bigcap_{y \in K} L_f(y) \neq \emptyset$. Cela implique par le Théorème 5.2.1

$$\bigcap_{k=0}^{+\infty} L_f(y^k) \neq \emptyset$$

car nous avons que

$$\bigcap_{y \in K} L_f(y) \subset \bigcap_{k=0}^{+\infty} L_f(y^k).$$

La suite du résultat est directe en appliquant le Lemme 5.2.2. Comme

$$\bigcap_{y \in K} L_f(y) \neq \emptyset,$$

la suite $\{x_k\}$ converge vers une solution de EP. □

Corollaire 5.2.2
Soient $\{x^k\}_{k\geq 0}$ et $\{y^k\}_{k\geq 0}$ les suites générées par l'Algorithme 5.2.1.
Si f est pseudomonotone, c'est-à dire que $f(x,y) \geq 0 \Rightarrow f(y,x) \leq 0$.
Soient $\{x^k\}_{k\geq 0}$ ou $\{y^k\}_{k\geq 0}$ bornées.
Alors la suite $\{x^k\}_{k\geq 0}$ converge vers une solution du EP.

Preuve :
Si $\{x^k\}_{k\geq 0}$ est bornée, alors $\{y^k\}_{k\geq 0}$ est aussi bornée en vue du Lemme 5.2.2.

Donc, nous pouvons supposer que $\{y^k\}_{k\geq 0}$ est bornée.

Nous pouvons voir qu'en association avec l'hypothèse de pseudomonotonicité de f, on a que

$$\bigcap_{k=0}^{+\infty} L_f(y^k) \neq \emptyset.$$

L'affirmation suit alors du Théorème 5.2.1 □

Chapitre 6

Méthode du sous-gradient projeté pour problèmes d'équilibre

6.1 Le principe

Les méthodes de projections ont été améliorées pour des problèmes d'admissibilité convexe en utilisant des projections approximatives au lieu des projections exactes.

Plus précisement, nous considérons l'ensemble convexe

$$C = \{x \in \mathbb{R}^N \mid h(x) \leq 0\} \tag{6.1}$$

où $h : \mathbb{R}^N \longrightarrow \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ est convexe.

Dans cette section, nous modifions l'Algorithme 5.2.1 en utilisant des projections approximatives sur des hyperplans séparés.

Pour un point $\bar{x} \in \mathbb{R}^N \setminus C$, la projection orthogonale de $\bar{x}$ sur C, notée par $P_C(\bar{x})$, est approximée par :
La projection de $\bar{x}$ sur l'hyperplan $\mathcal{H}$ séparant $\bar{x}$ de C :

$$\mathcal{H} = \{z \in \mathbb{R}^N \mid h(\bar{x}) + \langle \xi, z - \bar{x} \rangle = 0\}$$

où ξ est un sous-gradient non nul de h en $\bar{x}$:

$$\xi \in \partial h(\bar{x}),\ \xi \neq 0$$

Rappelons la définition du sous-gradient :

Définition 6.1.1
$\partial h(\bar{x})$ de h en $\bar{x} \in I\!R^N$ est défini comme :

$$\xi \in \partial h(\bar{x}) \quad \Longleftrightarrow \quad h(y) \geq h(\bar{x}) + \langle \xi, y - \bar{x} \rangle \quad \textit{pour tout } y \in I\!R^N.$$

Alors la projection approximative $\tilde{P}_C(\bar{x})$ de $\bar{x} \notin C$ sur C est donnée par

$$\tilde{P}_C(\bar{x}) = \bar{x} - \frac{h(\bar{x})}{\|\xi\|^2} \cdot \xi. \tag{6.2}$$

Et nous modifions l'Algorithme 5.2.1 en remplaçant la projection orthogonale par cette projection approximative :

$$\tilde{P}_C(\bar{x}) \Longleftarrow P_C(\bar{x}).$$

Les algorithmes résultants sont appelés méthodes du sous-gradient projeté.

Dans notre étude de problème d'équilibre, les ensemble convexes C qui nous intéressent n'ont pas naturellement la forme exigée par (6.1). Nous avons en fait que pour tout $y \in K$:

$$\begin{aligned} C &\equiv L_f(y) = \{x \in K \mid f(y,x) \leq 0\} = \underbrace{\{x \in \mathbb{R}^N \mid f(y,x) \leq 0\}}_{S_f(y)} \bigcap K \\ &\equiv S_f(y) \bigcap K. \end{aligned}$$

Plus précisement, pour tout $y \in K$, nous définissons $f_y : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ comme

$$x \to f_y(x) = \begin{cases} f(y,x) & \text{si } x \in K \\ +\infty & \text{si } x \notin K. \end{cases} \tag{6.3}$$

Nous faisons l'hypothèse suivante sur f appelée *(H3)* :
Si P et Q sont deux sous ensembles compacts non vides de K, alors

$$\bigcup_{(y,x) \in Q \times P} \partial f_y(x) \text{ est borné.}$$

Voyons un Lemme intéressant pour garantir par la suite la validité de l'hypothèse *(H3)* :

Lemme 6.1.1
Soit $V \subset \mathbb{R}^n$ un ensemble convexe ouvert non vide, $g : V \times V \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue telle que pour tout $x \in V$, la fonction $g_x : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ définie par

$$g_x(y) = \begin{cases} g(x,y) & si\ y \in V \\ +\infty & si\ y \notin V \end{cases}$$

est convexe.
Si A et B sont des sous ensembles non vides et compacts de V, alors

$$\bigcap_{(x,y)\, \in\, A \times B} \partial g_x(y)$$

est bornée

Preuve :
Prenons $\epsilon > 0$ tel que

$$\hat{A} := A + B(\bar{0}, \epsilon) \subset V$$

et

$$\hat{B} := B + B(\bar{0}, \epsilon) \subset V.$$

Soit

$$L = \max_{(x,y)\, \in\, \hat{A} \times \hat{B}} |g(x,y)|.$$

Si $v \in \bigcap_{(x,y)\, \in\, A \times B} \partial g_x(y)$, alors il existe $(x,y) \in A \times B$ tel que

$$g(x,w) \geq g(x,y) + \langle v, w-y \rangle \quad \forall w \in V.$$

Ceci suit directement de la définition du sous-gradient.
En modifiant légèrement l'inégalité précédante, nous obtenons

$$\langle v, w-y \rangle \geq g(x,w) - g(x,y) \quad \forall w \in V.$$

Si $v \notin \bar{B}(0,\epsilon)$, alors

$$\bar{z} = y + \epsilon(v/\|v\|) \in \hat{B} \subset V.$$

Remarquons que

$$\|v\|\epsilon = \langle v, \bar{z} - y \rangle,$$

ainsi que

$$\|v\|\epsilon = g(x,\bar{z}) - g(x,y) \leq 2L,$$

ces relations impliquent $\|v\| \leq (2L)/\epsilon$.
Si

$$v \in \bar{B}(0,\epsilon),$$

alors $\|v\| \leq \epsilon$.
Donc $\|v\| \leq \max\{\epsilon, 2L/\epsilon\}$ pour tout v dans l'ensemble qui nous intéresse. Alors le résultat suit directement. □

La validité de l'hypothèse est assurée par la Proposition suivante :

Proposition 6.1.1
Si $f : K \times K \longrightarrow I\!R$ est la restriction sur $K \times K$ d'une fonction continue $\hat{f} : U \times U \longrightarrow I\!R$ satisfaisant (H1) et (H2) sur $U \times U$, où U est un ensemble ouvert contenant K, alors f satisfait (H3).

Preuve :
Cette Proposition est une conséquence directe du Lemme 6.1.1. □

Nous allons présenter deux algorithmes pour résoudre des problèmes d'équilibre où les projections exactes de l'Algorithme 5.2.1 sont remplacées par des projections approximées.

6.2 L'algorithme

Il semble naturel d'approximer seulement l'ensemble niveau

$$S_f(y) = \{x \in \mathbb{R}^N \mid f(y,x) \leq 0\},$$

améliorant la projection de x^k sur l'hyperplan séparant x^k de $S_f(y^k)$ en utilisant un sous-gradient ϵ^k de la fonction convexe $f(y^k,\cdot)$ en x^k :

$$\epsilon^k \in \left[\partial f(y^k,\cdot)\right](x^k) = \partial f_{y^k}(x^k)$$

est suivi d'une projection orthogonale du point z sur K. Cela nous donne l'algorithme du sous-gradient projeté inexact pour des problèmes d'équilibre.

Algorithme 6.2.1 *Méthode du sous-gradient projeté inexact pour la résolution de EP*

PAS 1 : Soit $k = 0$, $x^0 \in K$ *et* $r_0 = \|x^0\|$.

PAS 2 : Soient x^k *et* r_k,

(i) Définir

$$K_k = \{x \in K \mid \|x\| \leq r_k + 1\}.$$

(ii) Trouver $y^k \in K_k$ *vérifiant* $f(y^k, x^k) \geq 0$ *et*

$$\max_{y \in K_k} f(y, x^k) - \epsilon_k \leq f(y^k, x^k).$$

(iii) Si $0 \in \partial f_{y^k}(x^k)$ *alors on s'arrête :* y^k *résout un EP.*
Sinon, séléctionner $\epsilon^k \in \partial f_{y^k}(x^k)$ $\epsilon^k \neq 0$ *et définir*

$$z^k = x^k - t_k \frac{f(y^k, x^k)}{\|\epsilon^k\|^2} \cdot \epsilon^k, \tag{6.4}$$

$$x_{k+1} = x^k + t_k[P_{L_f(y^k)}(x^k) - x^k]. \tag{6.5}$$

(iv) Mettre à jour r_k *comme*

$$r_{k+1} = \max\{r_k, \|x^{k+1}\|\}.$$

Une autre possibilité est de projeter x^k sur K et sur l'hyperplan séparateur, et de faire une combinaison convexe de ces projections. Cela nous donne l'algorithme du sous-gradient projeté inexact pour la résolution des problèmes d'équilibre.

Algorithme 6.2.2 *Autre méthode du sous-gradient projeté inexact pour la résolution de EP*

Cet algorithme exige en plus des données de l'Algorithme 5.2.1 : une constante $\beta \in]0, \frac{1}{2}[$ *et une suite* $\{\lambda_k\}_{k\geq 0} \subset [\beta, 1-\beta]$.

PAS 1 : Soit $k = 0$, $x^0 \in K$ *et* $r_0 = \|x^0\|$.

PAS 2 : Soient x^k *et* r_k,

(i) *Définir*

$$K_k = \{x \in K \mid \|x\| \leq r_k + 1\}.$$

(ii) *Trouver* $y^k \in K_k$ *vérifiant* $f(y^k, x^k) \geq 0$ *et*

$$\max_{y \in K_k} f(y, x^k) - \epsilon_k \leq f(y^k, x^k).$$

(iii) *Si* $0 \in \partial f_{y^k}(x^k)$ *alors on s'arrête :* y^k *résout un EP.*
Sinon, séléctionner $\epsilon^k \in \partial f_{y^k}(x^k)$ $\epsilon^k \neq 0$ *et définir*

$$x^{k+1} = \lambda_k \big[x^k - t_k \frac{f(y^k, x^k)}{\|\epsilon^k\|^2} \cdot \epsilon^k\big] + (1-\lambda_k)\big[x^k + t_k(P_{L_f(y^k)}(x^k) - x^k)\big].$$

(iv) *Mettre à jour* r_k *comme*

$$r_{k+1} = \max\{r_k, \|x^{k+1}\|\}. \tag{6.6}$$

6.3 La convergence

Le Théorème suivant résume les propriétés de convergence des Algorithmes 6.2.1 et 6.2.2 des projections inexactes :

Théorème 6.3.1
Soit $\{x^k\}_{k\geq 0}$ *la suite générée par les Algorithmes 6.2.1 ou 6.2.2.*
Supposons que f *satisfasse (H3).*
Alors :

(i) Si l'ensemble solution de CFP est non vide, alors $\{x^k\}_{k\geq 0}$ *converge vers une solution du EP.*

(ii) Si EP n'a pas de solution, alors $\{x^k\}_{k\geq 0}$ *ne converge pas.*

Preuve :

1. Premièrement, discutons de la terminaison de l'algorithme, i.e., quand $0 \in \partial f_{y^k}(x^k)$.

   Dans ce cas, il suit de la définition de $f_y(\cdot)$ donnée par (6.3) : $\forall y \in K$, $f_y : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ comme

$$x \to f_y(x) = \begin{cases} f(y,x) & \text{si } x \in K \\ +\infty & \text{si } x \notin K \end{cases}$$

$$\begin{aligned} 0 \in \partial f_{y^k}(x^k) \quad & \Longleftrightarrow \quad f_{y^k}(z) \geq f_{y^k}(x^k) + \langle 0, z - x^k\rangle \quad \forall z \in \mathbb{R}^N \\ & \Longleftrightarrow \quad f_{y^k}(z) \geq f_{y^k}(x^k) \quad \forall z \in \mathbb{R}^N \\ & \Longleftrightarrow \quad x^k \text{ minimise } f_{y^k}(\cdot) \text{ sur } K \\ & \underbrace{\Longleftrightarrow}_{x\in K, f_{y^k}(x) = f(y^k, x^k)} \quad x^k \text{ minimise } f(y^k, \cdot) \text{ sur } K. \end{aligned}$$

   En vue du *PAS 2* (ii) des algorithmes 6.2.1 et 6.2.2, nous avons

$$y^k \in K \quad \text{tel que} \quad 0 \quad \leq \quad f(y^k, x^k) \quad \underbrace{\leq}_{x^k \text{ mini-} \atop \text{miseur } f(y^k,\cdot)} \quad f(y^k, z) \quad \forall z \in K.$$

   Donc y^k résout un problème d'équilibre.

2. Deuxièmement, prenons une solution $x^\star$ du problème CFP, et commençons par considérer le cas de l'Algorithme 6.2.1.
   Soit

$$S_k = \{z \in \mathbb{R}^N \mid f(y^k, x^k) + \langle \xi^k, z - x^k\rangle \leq 0\}$$

où ξ^k appartient à $\partial f_{y^k}(x^k)$ et $\xi^k \neq 0$ par la *PAS 2* (iii) de l'Algorithme 6.2.1, et définissons

$$P_{S_k} : \mathbb{R}^N \to S_k$$

la projection orthogonale sur S_k.

Il suit facilement de (6.4) : $z^k = x^k - t_k \frac{f(y^k,x^k)}{\|\epsilon^k\|^2} \cdot \epsilon^k$ que

$$z^k = x^k + t_k\big[P_{S_k}(x^k) - x^k\big]. \tag{6.7}$$

En effet,

$$\begin{aligned} z^k &= x^k - t_k \frac{f(y^k,x^k)}{\|\epsilon^k\|^2} \cdot \epsilon^k - t_k x^k + t_k x^k \\ &= x^k + t_k\big[\underbrace{-\frac{f(y^k,x^k)}{\|\epsilon^k\|^2} \cdot \epsilon^k + x^k}_{P_{S_k}(x^k)} - x^k\big] \\ &= x^k + t_k\big[P_{S_k}(x^k) - x^k\big]. \end{aligned}$$

Remarquons que $x^\star \in S_k$.

En effet :
Par la définition du sous-gradient, nous avons

$$\xi^k \in \partial f_{y^k}(x^k) \iff f_{y^k}(z) \geq f_{y^k}(x^k) + \langle \xi^k, z - x^k \rangle \quad \forall z \in \mathbb{R}^N.$$

Comme c'est vrai pour tout $z \in K$, prenons $z = x^\star$ et nous obtenons :

$$f_{y^k}(x^\star) \geq f_{y^k}(x^k) + \langle \xi^k, x^\star - x^k \rangle.$$

Puisque $y^k \in K$, nous pouvons réécrire cette équation comme, en vue de (6.2) :

$$f(y^k, x^\star) \geq f(y^k, x^k) + \langle \xi^k, x^\star - x^k \rangle.$$

Ceci nous donne le résultat souhaité en utilisant la définition de S_k :

$$f(y^k, x^k) + \langle \xi^k, x^\star - x^k \rangle \leq 0 \quad \iff \quad x^\star \in S_k$$

car $f(y^k, x^\star) \leq 0$, vu que $x^\star$ résout un CFP, i.e.,

$$x^\star \in L_f(y) = \{x \in K \mid f(y, x) \leq 0\}.$$

A partir de (6.7) : $z^k = x^k + t_k\big[P_{S_k}(x^k) - x^k\big]$, nous obtenons

$$\begin{aligned}
\|z^k - x^\star\|^2 &= \|x^k - x^\star + t_k\big[P_{S_k}(x^k) - x^k\big]\|^2 \\
&= \|x^k - x^\star\|^2 - t_k^2\|\big[P_{S_k}(x^k) - x^k\big]\|^2 \\
&\quad +2t_k \underbrace{\langle x^k - x^\star, P_{S_k}(x^k) - x^\star\rangle}_{\leq 0} \\
&\leq \|x^k - x^\star\|^2 - t_k(2-t_k)\|P_{S_k}(x^k) - x^k\|^2 \\
&\underbrace{=}_{(6.4)} \|x^k - x^\star\|^2 - t_k(2-t_k)\left[\frac{f(y^k,x^k)}{\|\xi^k\|}\right]^2. \qquad (6.8)
\end{aligned}$$

Regardons qu'on a bien l'équivalence entre

$$\|P_{S_k}(x^k) - x^k\|^2 \underbrace{=}_{?} \left[\frac{f(y^k,x^k)}{\|\xi^k\|}\right]^2$$

$$\begin{aligned}
\|P_{S_k}(x^k) - x^k\|^2 &= \|P_{S_k}(x^k)\|^2 + \|x^k\|^2 + 2\langle P_{S_k}(x^k), x^k\rangle \\
&= \left\|x^k - \frac{[f(y^k,x^k)]}{\|\xi\|^2}\cdot\xi\right\|^2 + \|x^k\|^2 + 2\langle P_{S_k}(x^k), x^k\rangle \\
&= \|x^k\|^2 + \frac{[f(y^k,x^k)]^2}{\|\xi\|^2} - 2\langle x^k, \frac{f(y^k,x^k)}{\|\xi\|^2}\cdot\xi\rangle \\
&\quad +\|x^k\|^2 - 2\langle x^k, x^k - \frac{f(y^k,x^k)}{\|\xi\|^2}\cdot\xi\rangle \\
&= 2\|x^k\|^2 + \frac{[f(y^k,x^k)]^2}{\|\xi\|^2} - 2\langle x^k, \frac{f(y^k,x^k)}{\|\xi\|^2}\cdot\xi\rangle \\
&\quad -2\underbrace{\langle x^k, x^k\rangle}_{\|x^k\|^2} + 2\langle x^k, \frac{f(y^k,x^k)}{\|x\|^2}\cdot\xi\rangle \\
&= \frac{(f(y^k,x^k))^2}{\|\xi^k\|^2}.
\end{aligned}$$

En utilisant (6.5) : $x^{k+1} = z^k + t_k\big[P_K(z^k) - z^k\big]$ et par le fait que $x^\star \in K$, nous obtenons :

$$\begin{aligned}
\|x^{k+1} - x^k\|^2 &= \|z^k - x^\star + t_k\big[P_K(z^k) - z^k\big]\|^2 \\
&\leq \|z^k - x^\star\|^2 - t_k(2-t_k)\|z^k - P_K(z^k)\|^2. \qquad (6.9)
\end{aligned}$$

En combinant (6.8) et (6.9) nous avons que

$$\begin{aligned}\left\|x^{k+1}-x^k\right\|^2 &\leq \left\|x^k-x^\star\right\|^2\\ &\quad -\underbrace{t_k(2-t_k)}_{>0}\left\{\left[\frac{f(y^k,x^k)}{\|\xi^k\|}\right]^2+\left\|z^k-P_K(z^k)\right\|^2\right\}\\ &\leq \left\|x^k-x^\star\right\|^2. \qquad (6.10)\end{aligned}$$

Comme dans la preuve du Théorème 5.2.1, nous avons de (6.10) que

(i) $\left\{\left\|x^k-x^\star\right\|\right\}_{k\geq 0}$ est décroissante et convergente.

(ii) $\{x^k\}_{k\geq 0}$ est bornée.

(iii) $\{r_k\}_{k\geq 0}$ est bornée et $\{y^k\}_{k\geq 0}$ est bornée.

Ainsi en mettant en commun (6.10) avec la condition sur $\{t_k\}_{k\geq 0}$,

$$0<\alpha(2-\alpha)\leq t_k(2-t_k).$$

Ainsi nous obtenons

$$\alpha(2-\alpha)\left\{\left[\frac{f(y^k,x^k)}{\|\xi^k\|}\right]^2+\|x^k-P_K(z^k)\|^2\right\}\leq\|x^k-x^\star\|^2-\|x^{k+1}-x^\star\|^2. \qquad (6.11)$$

Puisque $\{\|x^k-x^\star\|^2\}_{k\geq 0}$ est convergente et que $\alpha(2-\alpha)>0$, (6.11) implique que

$$\lim_{k\to+\infty}\left\{\left[\frac{f(y^k,x^k)}{\|\xi^k\|}\right]^2+\|z^k-P_K(z^k)\|^2\right\}=0$$

$$\lim_{k\to+\infty}\left[\frac{f(y^k,x^k)}{\|\xi^k\|}\right]^2+\lim_{k\to+\infty}\|z^k-P_K(z^k)\|^2=0$$

$$\lim_{k\to+\infty}\|z^k-P_K(z^k)\|=\lim_{k\to+\infty}\left[\frac{f(y^k,x^k)}{\|\xi^k\|}\right]=0.$$

A partir de l'hypothèse *(H3)*, nous voyons que la suite $\{\xi^k\}_{k\geq 0}$ est bornée car les suites $\{x^k\}_{k\geq 0}\subset K$ et $\{y^k\}_{k\geq 0}\subset K$ sont bornées et $\xi^k\in\partial f_{y^k}(x^k)$.

De ceci, nous concluons que

$$\lim_{k \to +\infty} f(y^k, x^k) = 0$$

car

$$\frac{\overbrace{f(y^k, x^k)}^{\to 0}}{\underbrace{\|\xi^k\|}_{\text{borné}}} \longrightarrow 0.$$

Ainsi, pour tout point $(\bar{y}, \bar{x})$ de la suite $\{(y^k, x^k)\}_{k \geq 0}$, nous avons

$$f(\bar{y}, \bar{x}) = 0.$$

Le résultat souhaité suit en utilisant le même argument que dans la preuve du Théorème 5.2.1.

3. Soit $x^\star$ une solution du CFP et considérons maintenant le cas de l'Algorithme 6.2.2.
Il suit de (6.7) :

$$x^{k+1} = \lambda_k \left[x^k - t_k \frac{f(y^k, x^k)}{\|\xi^k\|^2} \cdot \xi^k \right] + (1 - \lambda_k)[x^k + t_k(P_K(x^k) - x^k)]$$

que

$$x^{k+1} = \lambda_k[x^k + t_k(P_K(x^k) - x^k)] + (1 - \lambda_k)[x^k + t_k(P_K(x^k) - x^k)]. \quad (6.12)$$

Par la convexité de $\| \cdot \|^2$, nous obtenons

$$\begin{aligned}
\|x^{k+1} - x^\star\|2 \quad & \underbrace{=}_{\text{artifice}} \quad \|x^{k+1} - \lambda_k x^\star - (1 - \lambda_k)x^\star\|^2 \\
& \underbrace{=}_{(6.12)} \quad \|\lambda_k[x^k - x^\star + t_k(P_K(x^k) - x^k)] \\
& \qquad\qquad + (1 - \lambda_k)[x^k - x^\star + t_k(P_K(x^k) - x^k)]\|^2 \\
& \leq \quad \lambda_k \|x^k - x^\star + t_k(P_K(x^k) - x^k)\|^2 \\
& \qquad\qquad + (1 - \lambda_k)\|x^k - x^\star + t_k(P_K(x^k) - x^k)\|^2.
\end{aligned} \quad (6.13)$$

En utilisant le même argument que celui utilisé pour parvenir à (5.7) dans la preuve du Théorème 5.2.1, nous obtenons à partir de (6.13) et du fait que $t_k(2-t_k) > 0$:

$$
\begin{aligned}
\|x^{k+1} - x^\star\| &\leq \lambda_k[\|x^k - x^\star\|^2 - t_k(2-t_k)\|P_K(x^k) - x^k\|^2] \\
&\quad +(1-\lambda_k)[\|x^k - x^\star\|^2 - t_k(2-t_k)\|P_K(x^k) - x^k\|^2] \\
&= \|x^k - x^\star\|^2 - t_k(2-t_k)[\lambda_k \left(\frac{f(y^k, x^k)}{\|\xi^k\|}\right)^2 \\
&\quad +(1-\lambda_k)\|P_K(x^k) - x^k\|^2] \qquad (6.14) \\
&\leq \|x^k - x^\star\|^2.
\end{aligned}
$$

A partir de (6.14), nous pouvons voir que

(i) $\{\|x^k - x^\star\|\}_{k\geq 0}$ est décroissante et convergente.

(ii) $\{x^k\}_{k\geq 0}$ est bornée.

(iii) $\{r_k\}_{k\geq 0}$ est bornée et $\{y^k\}_{k\geq 0}$ est bornée.

Ainsi au départ de (6.14) et des conditions imposées sur $\{t_k\}_{k\geq 0}$ et $\{\lambda_k\}_{k\geq 0}$, nous avons :

$$
\alpha(2-\alpha)\cdot\beta \left[\left(\frac{f(y^k, x^k)}{\|\xi^k\|}\right)^2 + \|P_K(x^k) - x^k\|^2\right] \leq \|x^k - x^\star\|^2 - \|x^{k+1} - x^\star\|^2. \qquad (6.15)
$$

Puisque $\{\|x^k - x^\star\|\}_{k\geq 0}$ est convergente, et comme $\alpha(2-\alpha)\cdot\beta > 0$, il suit que

$$
\lim_{k\to+\infty} \|x^k - P_K(x^k)\| = 0
$$

ainsi toute valeur d'adhérence de la suite $\{x^k\}_{k\geq 0}$ appartient à K.

Nous avons aussi, à partir de (6.15) que

$$
\lim_{k\to+\infty} \frac{f(y^k, x^k)}{\|\xi^k\|} = 0.
$$

Alors nous pouvons compléter la preuve de la même manière que le cas précédent.

4. Nous voulons montrer que si EP n'a pas de solution, alors $\{x^k\}$ ne converge pas. Nous allons montrer cela par contradiction. Supposons que $\{x^k\}$ converge vers $x^\star \in \mathbb{R}^n$ et nous souhaitons montrer que EP a une solution.
   Nous remarquons que lorsque $\{x^k\}_{k\geq 0}$ converge, nous avons que la suite $\{x^k\}$ est bornée et que

$$\lim_{k\to+\infty} \|z^k - P_K(z^k)\| = \lim_{k\to+\infty} \frac{f(y^k, x^k)}{\|\xi^k\|} = 0.$$

   Quand $\{x^k\}$ converge, ces deux faits se produisent et la preuve de (i) nous montre que $x^\star$ résout un EP ce qui contredit l'hypothèse que EP n'a pas de solution.

□

Conclusion

Dans ce mémoire, nous avons défini la notion de problème d'équilibre ainsi qu'un certain nombre de problèmes qui sont fortement liés à ce dernier (problème du point fixe, problème de complémentarité, problème d'inéquation variationnelle, problème d'équilibre de Nash...).

Nous avons introduit un problème d'équilibre auxiliaire. Nous avons aussi vu que le problème d'équilibre est lié au problème d'admissibilité convexe.

Nous avons défini plusieurs manières de résoudre ce problème d'équilibre ou le problème d'équilibre auxiliaire que ce soit à l'aide de la formulation du problème du point fixe, à l'aide de la fonction gap ou d'un algorithme de recherche linéaire avec direction de descente. Nous avons aussi observé que le problème d'admissibilité convexe peut être résolu par des méthodes de projections exactes ou approximatives. Dans chacune de ces techniques, nous avons étudié la convergence de l'algorithme.

Bibliographie

[1] A. Auslender *Optimisation - Méthodes numériques.* Masson, Paris, 1976.

[2] B. Bank, J. Guddat, D. Klatte, B. Kummer et K. Tammer *Non-linear Parametric Optimization.* Birkhäuser, Basel, 1983.

[3] E. Blum et W. Oettli. *From optimisation and variational inequalities to equilibrium problems.* The Mathematics Student, Vol. 63, Nos. 1-4, pp 123-145, 1994.

[4] A. Iusem et W. Sosa. *Iterative algorithms for equilibrium problems*, Optimization, Vol. 52, No. 3, pp. 301-316, June 2003.

[5] A. Iusem et W. Sosa. *New existence results for equilibrium problems*, Nonlinear Analysis, Theory Methods and Application, Vol. 52, No. 2, pp. 621-635, 2003.

[6] G. Mastroeni. *Minimax and Extremun Problems Associated to a Variational Inequality*, Rendiconti del Circolo Matematico di Palermo, vol. 58, No. 2, pp. 185-196, 1999.

[7] V. H. Nguyen. *Lecture Notes on Equilibrium Problems : Part I*, CIUF-CUD Summer School on Optimization and Applied Mathematics, Nha Trang, Viet Nam, August 2002.

[8] V. H. Nguyen. *Lecture Notes on Equilibrium Problems : Part II*, CIUF-CUD Summer School on Optimization and Applied Mathematics, Nha Trang, Viet Nam, August 2002.

[9] R. T. Rockafellar. *Convex Analysis*, Princeton University Press, Princeton, 1970.