Institutional Repository - Research Portal
Dépôt Institutionnel - Portail de la Recherche
researchportal.unamur.be
University of Namur

THESIS / THÈSE

MASTER EN SCIENCES MATHÉMATIQUES

Méthode de décomposition lagrangienne pour problèmes non linéaires et stratégie d'approximation conservative en optimisation de structrure

Salmon, Geneviève

Award date:
1993

Awarding institution:
Universite de Namur

Link to publication

General rights
Copyright and moral rights for the publications made accessible in the public portal are retained by the authors and/or other copyright owners and it is a condition of accessing publications that users recognise and abide by the legal requirements associated with these rights.

- Users may download and print one copy of any publication from the public portal for the purpose of private study or research.
- You may not further distribute the material or use it for any profit-making activity or commercial gain
- You may freely distribute the URL identifying the publication in the public portal ?

Take down policy
If you believe that this document breaches copyright please contact us providing details, and we will remove access to the work immediately and investigate your claim.

Download date: 02. May. 2026

FACULTES UNIVERSITAIRES NOTRE-DAME DE LA PAIX
NAMUR
FACULTE DES SCIENCES

METHODE DE DECOMPOSITION LAGRANGIENNE POUR PROBLEMES NON LINEAIRES ET STRATEGIE D'APPROXIMATION CONSERVATIVE EN OPTIMISATION DE STRUCTURE

Mémoire présenté pour l'obtention du grade
de Licencié en Sciences
Mathématiques
par

GENEVIEVE SALMON

Promoteur :
J.-J. STRODIOT

Année académique : 1992-1993

Je tiens à remercier le professeur J.-J. Strodiot pour sa disponibilité et pour l'aide qu'il m'a apportée au cours de l'élaboration de ce mémoire.

Je remercie également mes parents, Pierre et Dominique pour leur soutien et pour la patience dont ils ont fait preuve durant mes études.

Table des Matières

Introduction Générale

Partie I

Méthodes Duales pour la

Programmation non Linéaire

avec Variables Entières

INTRODUCTION

Chapitre 1 METHODE DES SOUS-GRADIENTS

Section 1 Particularités de la fonction duale et hyperplans de non différentiabilité 2

Section 2 Algorithme d'optimisation 10

2.1 Méthode 10

2.2 Détermination d'une direction de montée 11

2.3 Critère d'optimalité 13

2.4 Algorithme 14

Section 3 Résolution du problème quadratique 17

3.1 Principe 17

3.2 Algorithme 19

Section 4 Remarques 22

Annexe I

Expression de l'inverse de la matrice N^TN qui apparaît dans la matrice de projection 23

Chapitre 2 DECOMPOSITION LAGRANGIENNE

Section 1 Présentation de la décomposition lagrangienne 2
1.1 Principe 2
1.2 Etude théorique 4
1.3 Variante 15
Section 2 Elimination du saut de dualité 16
Section 3 Cas particulier de la programmation quadratique en variables $0-1$ 23

Annexe II

Annexe II.1 27
Annexe II.2 28
Annexe II.3 30
Annexe II.4 32

CONCLUSIONS

Partie II

Stratégie d'Approximation Conservative pour la Programmation non Linéaire

INTRODUCTION

Chapitre 3 APPROXIMATION CONSERVATIVE

Section 1 Définition de l'approximation conservative et des sous-problèmes approximés 2
Section 2 Bases théoriques 6
Section 3 Algorithme théorique 9
Section 4 Remarques 14

Annexe III

Annexe III.1 Preuve de la Proposition 1 16
Annexe III.2 Preuve de la Proposition 2 17
Annexe III.3 Preuve de la Proposition 3 20
Annexe III.4 Preuve de la Proposition 4 21
Annexe III.5 Preuve de la Proposition 5 22
Annexe III.6 Preuve de la Proposition 6 23
Annexe III.7 Preuve du Théorème 2 24

Chapitre 4 METHODE DES ASYMPTOTES MOBILES ET STRATEGIE D'ENSEMBLE ACTIF

Section 1 Principes de base concernant MMA et théorèmes de convergence . 2
1.1 Description générale de la méthode MMA 2
1.2 Résultats de convergence 7
Section 2 Description de la nouvelle version $MMASS$ 8
Section 3 Convergence de l'algorithme $MMASS$ 9
Section 4 Au sujet de l'implémentation de $MMASS$ 18
4.1 Résolution des sous-problèmes 19
4.2 Mise à jour des paramètres 20
Section 5 Avantages de $MMASS$ 23

Annexe IV

Annexe IV.1 Démonstration des lemmes nécessaires au Théorème 1 24
Annexe IV.2 Expression du dual de $(SP(s^k))$ et du gradient de la fonction duale $\ell(u)$ 37

CONCLUSIONS

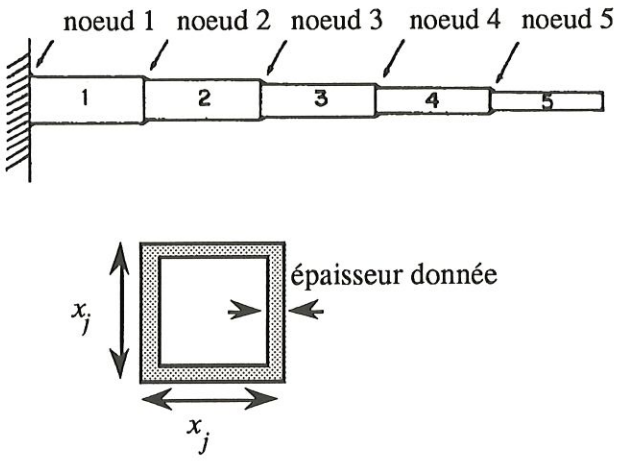
Références

Introduction Générale

Les méthodes numériques que nous allons étudier dans ce mémoire s'appliquent aux problèmes de programmation non linéaire rencontrés en optimisation de structure. Ces méthodes ont été testées avec succès sur de nombreux exemples par les ingénieurs. L'objectif de ce mémoire est d'en donner une présentation précise et d'en étudier la convergence.

Afin de mieux cerner le type de problème étudié en optimisation de structure, commençons par en décrire quelques-uns (ces exemples sont détaillés dans [10]).

Le premier exemple considéré est celui de la *POUTRE CANTILEVER.*



Dans ce problème, la barre est rigidement fixée au noeud 1 et une force verticale externe fixée est appliquée au noeud 6 (extrémité de la barre).

Les variables représentent les poids des différents éléments dont l'épaisseur est donnée. La fonction à minimiser est le poids du système.

Dans cet exemple, il n'y aura qu'une contrainte indiquant une limite au déplacement vertical autorisé au noeud 6, dû à la force qui y est appliquée.

Les bornes sur les variables ne deviendront jamais actives. Nous pouvons donc ne pas y prêter attention.

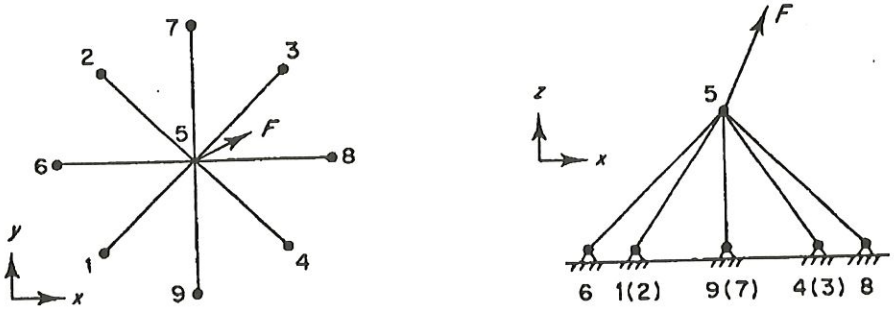
Ceci peut se modéliser de la façon suivante :

$$\begin{cases} \min\ c_1(x_1+x_2+x_3+x_4+x_5) \\ \text{s.c. } \frac{61}{x_1^3}+\frac{37}{x_2^3}+\frac{19}{x_3^3}+\frac{7}{x_4^3}+\frac{1}{x_5^3} \leq c_2\ , \\ \quad x_i > 0\ , \qquad i=1,\cdots,5\ . \end{cases}$$

où les constantes c_1 et c_2 dépendent des propriétés du matériau utilisé ainsi que de l'amplitude de la force appliquée.

Un second exemple est celui du *TREILLIS A 8–BARRES.*

Considérons la structure suivante composée de huit éléments :



Une force externe $F = (F_X, F_Y, F_Z)$ est appliquée au noeud 5 telle que, par exemple,

$$F_X = 40\ kN\ , \quad F_Y = 20\ kN\ , \quad F_Z = 200\ kN\ .$$

Les variables correspondent aux surfaces des sections transversales des éléments.

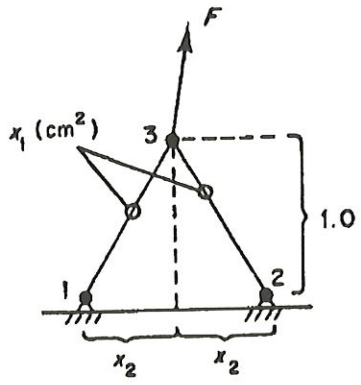
Les bornes inférieures sont fixées à $100mm^2$ tandis que les bornes supérieures sont si grandes qu'elles ne deviennent jamais actives.

La fonction que nous cherchons à minimiser est le poids de la structure.

Les seules contraintes imposées sont des limites aux forces (de pression ou de tension) sur chacun des éléments. Ces forces sont déterminées par la force extérieure considérée.

Le troisième exemple que nous considérons est le *TREILLIS A 2–BARRES.*

Voici une structure composée de deux éléments. Nous appliquons une force externe (F_X, F_Y) au noeud 3, où $F_X = 24.8\ kN$ et $F_Y = 198.4\ kN$.



Ce problème ressemble, en un sens, au précédent, mais il présente cependant un intérêt différent. En effet, nous avons ici des variables représentant des surfaces de sections et d'autres, des distances, contrairement au cas du treillis à 8 barres. Ainsi, la variable x_1

correspond à la surface de la section transversale des éléments et la variable x_2 , à la moitié de la distance séparant les noeuds 1 et 2 .

La fonction à minimiser est le poids du système.

Les contraintes imposent que la force de tension dont les deux éléments sont l'objet, ne peut dépasser 100 N/mm^2 .

Ceci peut s'exprimer analytiquement comme suit :

$$\begin{cases} \min\ w(x_1,x_2) = c_1\ x_1\ \sqrt{1+x_2^2} \\ \text{s.c. } \sigma_1(x_1,x_2) = c_2\ \sqrt{1+x_2^2}\left(\frac{8}{x_1}+\frac{1}{x_1x_2}\right) \le 1\ , \\ \qquad \sigma_2(x_1,x_2) = c_2\ \sqrt{1+x_2^2}\left(\frac{8}{x_1}-\frac{1}{x_1x_2}\right) \le 1\ , \\ \qquad 0.2 \le x_1 \le 4\ , \\ \qquad 0.1 \le x_2 \le 1.6\ , \end{cases}$$

où $c_1 = 1$, $c_2 = 0.124$.

Au vu de ces exemples, nous remarquons que, généralement, le but poursuivi par l'ingénieur en optimisation de structure est de minimiser le poids de la structure considérée. Cependant, on ne peut minimiser ce poids sans prendre certaines précautions, sinon la structure ne *tient* plus et les critères de résistance des matériaux ne sont plus respectés. C'est pourquoi on définit des contraintes qui limitent les tensions, les déplacements ou les fréquences propres dans les différents éléments de la structure.

Ainsi, la forme générale de ces problèmes est la suivante :

$$(P_1) \qquad \begin{cases} \min\ f(x) \\ \text{s.c. } g_j(x) \le 0\ , \qquad j = 1,\cdots,m\ , \\ \qquad \underline{x}_i \le x_i \le \overline{x}_i\ , \quad i = 1,\cdots,n\ , \end{cases}$$

où f , $g_j : I\!R^n \to I\!R$ ($j = 1,\cdots,m$) sont différentiables,

$x = (x_1,\cdots,x_n)^T$ est le vecteur des variables de conception,

$\underline{x}_i$ et $\overline{x}_i$ ($i = 1,\cdots,n$) sont les bornes inférieure et supérieure sur la variable de conception x_i .

Nous consacrons la deuxième partie de ce travail à traiter ce type de problème.

Il existe cependant une autre catégorie de contraintes qui n'est en aucun cas imputable à l'analyse structurale du produit, mais bien aux conditions technologiques du problème. En effet, les éléments qui composent le produit ont souvent des dimensions standardisées. La présence fréquente de cette situation dans le domaine aéronautique ou spatial montre l'importance que revêt l'optimisation en variables entières.

C'est ainsi que nous développons, dans la première partie de ce travail, des méthodes permettant de résoudre ce deuxième type de problème. Cela a été possible car ce genre de problème non linéaire en variables discrètes peut se ramener très facilement à un problème d'optimisation quadratique avec contraintes linéaires en variables discrètes. En effet, les problèmes d'optimisation de structure peuvent se mettre sous la forme :

$$\begin{cases} \min\ w = \sum_{i=1}^{n} \gamma_i\ \ell_i\ a_i \\ \text{s.c. } h_j \geq 0\ , \quad j = 1, \cdots, m\ , \\ \qquad a_i \in \Omega_i\ , \quad i = 1, \cdots, n\ , \end{cases}$$

où w est le poids structural,

a_i est la section de la barre i de la structure,

γ_i est le poids volumique de la barre i,

ℓ_i est la longueur de la barre i ,

h_j ($j = 1, \cdots, m$) sont les contraintes liées au comportement mécanique de la structure,

Ω_i est l'ensemble des valeurs discrètes admissibles pour la variable de conception a_i .

En construisant une approximation linéaire de chaque contrainte h_j ($j = 1, \cdots, m$) et un développement en série de Taylor du deuxième ordre de la fonction objectif, on est ramené, après plusieurs changements de variables, au problème suivant (voir [8]) :

$$(P_2) \qquad \begin{cases} \min\ \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{n} x_i^2 \\ \text{s.c. } \sum_{i=1}^{n} c_{ij}\ x_i \geq \underline{c}_j\ , \quad j = 1, \cdots, m\ , \\ \qquad x_i \in X_i\ , \qquad\qquad i = 1, \cdots, n\ , \end{cases}$$

où $X_i = \{x_i^{(k)}\ , k = 1, 2, \cdots, q\} \subseteq I\!R$ est l'ensemble des valeurs discrètes que peut prendre la variable x_i .

Les méthodes de résolution que nous proposons dans la première partie sont destinées aux problèmes de cette forme.

Ce travail est ainsi divisé en deux parties :

La première partie est consacrée à la résolution de problèmes du type (P_2) :

$$\begin{cases} \min \ \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{n} x_i^2 \\ \text{s.c.} \ \sum_{i=1}^{n} c_{ij} \ x_i \geq \underline{c}_j \ , \quad j = 1, \cdots, m \ , \\ \qquad x_i \in X_i \ , \qquad\qquad i = 1, \cdots, n \ , \end{cases}$$

où X_i est une partie de $\mathbb{R}$ qui désigne l'ensemble des valeurs discrètes possibles pour la variable x_i et

c_{ij} , $\underline{c}_j$ sont des coefficients réels.

Il s'agit donc de problèmes quadratiques avec contraintes linéaires en variables discrètes.

Nous présentons deux approches duales permettant de résoudre ces problèmes :

Dans le Chapitre 1, nous développons une méthode de relaxation lagrangienne appelée *méthode des sous-gradients*, technique duale qui ne fournit qu'une évaluation de la valeur optimale : une borne inférieure puisqu'il s'agit d'une minimisation. Pratiquement, la relaxation lagrangienne ne peut s'appliquer qu'au cas de la programmation quadratique. En effet, hormis ce cas particulier, on ne sait pas solutionner efficacement les sous-problèmes générés par la relaxation.

Cette méthode de relaxation lagrangienne n'étant pas très satisfaisante quant aux propriétés de convergence, nous proposons, dans le Chapitre 2, une autre méthode dite de *décomposition lagrangienne* suggérée par P. Michelon dans [5]. La décomposition lagrangienne se présente comme une forme particulière et sophistiquée de relaxation lagrangienne. Cette fois, cependant, cette technique n'est pas réservée au cas particulier de la programmation quadratique : elle est applicable à tout problème de programmation non linéaire. C'est pourquoi nous exposons la méthode de décomposition lagrangienne dans le cadre général de la programmation non linéaire avant de nous restreindre au cas particulier de la programmation quadratique. L'application de la décomposition lagrangienne au problème (P_2) nous paraît assez satisfaisante puisqu'on se ramène à la résolution d'un problème linéaire en variables discrètes.

Dans la deuxième partie, nous considérons les problèmes qui sont de la forme de (P_1) :

$$\begin{cases} \min\ f(x) \\ \text{s.c. } g_j(x) \leq 0\ , \qquad j = 1, \cdots, m\ , \\ \qquad \underline{x}_i \leq x_i \leq \overline{x}_i\ , \quad i = 1, \cdots, n\ , \end{cases}$$

avec $f\ ,\ g_j : I\!R^n \to I\!R\ (\ j = 1, \cdots, m\ )$ continûment différentiables,

$x \in I\!R^n$ vecteur des variables,

$\underline{x}\ ,\ \overline{x} \in I\!R^n$ bornes inférieure et supérieure sur x fixées.

De nombreuses méthodes proposent de résoudre ce type de problème en l'approximant successivement par une suite de sous-problèmes. Le schéma de base commun à ces différentes méthodes consiste donc en un processus itératif. Il s'agit de construire et résoudre une suite de sous-problèmes approximés jusqu'à ce qu'un critère de convergence soit vérifié ou, plus simplement, jusqu'à ce que le résultat intermédiaire obtenu donne satisfaction. Nous pouvons modéliser cela par l'algorithme suivant :

Etape 0 : Choisir un point de départ x^0 .
$k := 0$

Etape 1 : Soit x^k le point courant.
Construire le sous-problème $(SP(x^k))$ associé à x^k .

Etape 2 : Résoudre $(SP(x^k))$. Soit x^{k+1} sa solution optimale.

Etape 3 : $k := k + 1$
Retourner à l'Etape 1.

Ces différents algorithmes se distinguent principalement par la façon de construire les sous-problèmes, c'est-à-dire par le type d'approximation de la fonction objectif et des contraintes choisi. Ainsi, pour la méthode SQP : "*Sequential Quadratic Programming*" (voir, par exemple [4]), les sous-problèmes générés sont obtenus en effectuant une approximation quadratique de la fonction objectif et une approximation linéaire des contraintes. C. Fleury et V. Braibant, quant à eux, proposent dans [3] une méthode où les sous-problèmes s'obtiennent en linéarisant la fonction objectif et les contraintes soit par rapport

aux variables, soit par rapport aux variables réciproques selon le signe des dérivées partielles des fonctions. Nous parlons alors de "*linéarisation mixte*". Les propriétés théoriques de cette méthode appelée $CONLIN$: "*CONvex LINearization*" sont étudiées dans [7]. La méthode MMA : "*Method of Moving Asymptotes*" proposée par Svanberg dans [10] s'insère dans cette perspective et peut être interprétée comme une généralisation de la méthode précédente. Cependant, étant plus flexible, elle est plus performante. Elle fait, en effet, intervenir des paramètres supplémentaires appelés "*Asymptotes mobiles*" qui permettent de stabiliser et augmenter la vitesse de convergence du processus général.

En s'inspirant de [4], nous présentons au Chapitre 3 *un traitement unifié* des méthodes qui utilisent une approximation convexe conservative de la fonction objectif et des contraintes. Les méthodes SQP , $CONLIN$ et MMA peuvent être considérées comme des cas particuliers de ce type d'approximation. Le cas particulier de *la méthode des asymptotes mobiles* est ensuite détaillé au Chapitre 4. Comme suggéré dans l'article [9], nous ajoutons à cette méthode une stratégie d'ensemble actif qui permet, entre autres, d'augmenter la stabilité numérique. Le théorème de convergence que nous avons personnellement démontré généralise les théorèmes déjà existants (voir [2]) en permettant une plus grande liberté de choix pour la mise à jour des asymptotes mobiles. Nous pouvons ainsi prendre en considération la façon dont évoluent les itérés et ajuster les asymptotes de manière appropriée. Nous accélérons de la sorte la vitesse de convergence du processus.

Partie I

Méthodes duales pour la programmation non linéaire avec variables entières

INTRODUCTION

Dans cette première partie, nous développons des méthodes duales de résolution du problème quadratique avec contraintes linéaires et variables discrètes :

$$\begin{cases} \min \ \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{n} x_i^2 \\ \text{s.c.} \ \sum_{i=1}^{n} c_{ij} \ x_i \geq \underline{c}_j \ , \quad j = 1, \cdots, m \ , \\ \qquad x_i \in X_i \ , \qquad\qquad i = 1, \cdots, n \ , \end{cases}$$

où X_i est une partie de $\mathbb{R}$ qui désigne l'ensemble des valeurs discrètes que peut prendre la variable x_i , et

c_{ij} , $\underline{c}_j$ sont des coefficients réels qui caractérisent les contraintes.

Nous commençons au Chapitre 1 par une méthode de relaxation lagrangienne appelée *méthode des sous-gradients.* Après avoir dégagé les inconvénients de cette technique, nous étudions au Chapitre 2 une *méthode de décomposition lagrangienne* en suivant les idées de P. Michelon exposées dans [5]. L'application de cette démarche au problème quadratique considéré semble être assez avantageuse.

Chapitre 1

METHODE DES SOUS-GRADIENTS

La *méthode des sous-gradients* est un processus d'optimisation dans l'espace dual qui permet de résoudre le problème discret uniquement de manière approchée puisque celui-ci est non convexe.

On tentera de maximiser la fonction duale en déterminant, à chaque étape, la direction de la plus forte montée et en effectuant, ensuite, une recherche linéaire le long de cette direction.

Nous commençons, dans la Section 1, par exposer les caractéristiques du dual correspondant au problème particulier considéré. Sur base de ces constatations, nous établissons l'algorithme proprement dit au cours de la Section 2. Une méthode de résolution des sous-problèmes engendrés par cet algorithme est alors proposée à la Section 3. Et enfin, quelques remarques concernant les inconvénients de cette procédure sont exposées dans la dernière section.

Section 1 Particularités de la fonction duale et hyperplans de non différentiabilité

Considérons le problème quadratique séparable :

$$(P) \qquad \begin{cases} \min\limits_{x} \ \frac{1}{2} \sum\limits_{i=1}^{n} x_i^2 \\ \text{s.c.} \quad \sum\limits_{i=1}^{n} c_{ij} x_i \geq \underline{c}_j \ , \quad j = 1, \cdots, m \ , \\ \qquad\qquad x_i \in X_i \ , \quad i = 1, \cdots, n \ , \end{cases}$$

avec $c_{ij} \in I\!R$ ($i = 1, \cdots, n$, $j = 1, \cdots, m$),

$\underline{c}_j \in I\!R$ ($j = 1, \cdots, m$),

$X_i = \{x_i^{(k)}, \ k = 1, 2, \cdots, q\}$ ($i = 1, \cdots, n$) partie finie de $I\!R$.

Sans perdre de généralité, on peut supposer que $x_i^{(k)} < x_i^{(k+1)}$.

X_i représente l'ensemble fini des valeurs que peut prendre la variable x_i (classées par ordre croissant).

Notons $S = X_1 \times X_2 \times \cdots \times X_n = \{x = (x_1, \cdots, x_n)^T \in I\!R^n \text{ t.q. } x_i \in X_i \quad \forall\, i\}$ l'ensemble des combinaisons de variables x_i possibles. Chaque X_i étant un ensemble fini, S contient aussi un nombre fini d'éléments. Pour des raisons de clarté, nous désignerons par $x^1, x^2, \cdots, x^r$ les éléments de S . Donc, $S = \{x^\ell = (x_1^\ell, x_2^\ell, \cdots, x_n^\ell)^T \ , \ \ell = 1, \cdots, r\}$.

La fonction lagrangienne associée à (P) s'écrit

$$L(x, \lambda) = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{2} x_i^2 - \sum_{j=1}^{m} \lambda_j \left(\sum_{i=1}^{n} c_{ij} x_i - \underline{c}_j \right) \ , \qquad x \in S \ , \ \lambda \in I\!R^m \ ,$$

et le problème dual a la forme

$$(D) \qquad \max_{\lambda \in I\!R^{m+}} \ell(\lambda)$$

où ℓ est la fonction duale définie pour tout λ dans $I\!R^{m+}$ par

$$\ell(\lambda) = \min_{x \in S} \ L(x, \lambda) \ .$$

En exploitant le caractère séparable de $L(x, \lambda)$, nous obtenons

$$L(x, \lambda) = \sum_{i=1}^{n} L_i(x_i, \lambda) + \sum_{j=1}^{m} \lambda_j \underline{c}_j$$

où

$$L_i(x_i, \lambda) = \frac{1}{2}x_i^2 - \sum_{j=1}^{m} \lambda_j c_{ij} x_i$$

et

$$\ell(\lambda) = \sum_{i=1}^{n} \min_{x_i \in X_i} L_i(x_i, \lambda) + \sum_{j=1}^{m} \lambda_j \underline{c}_j \ .$$

Ceci nous ramène donc à n problèmes de minimisation

$$\min_{x_i \in X_i} L_i(x_i, \lambda) \ , \qquad \forall \ i = 1, \cdots, n \ .$$

Propriétés de la fonction duale $\ell(\lambda)$

En considérant la notation $S = \{x^\ell, \ \ell = 1, \cdots, r\}$, $\ell(\lambda)$ peut encore s'écrire

$$\ell(\lambda) = \min_{\ell=1,\cdots,r} L(x^\ell, \lambda) \ .$$

Propriété 1

$\ell(\lambda)$ est concave.

Preuve :

Soient $\lambda^1, \lambda^2 \in I\!R^{m+}$ et $\theta \in [0,1]$ quelconques.

Montrons que $\ell(\theta\lambda^1 + (1-\theta)\lambda^2) \geq \theta\ell(\lambda^1) + (1-\theta)\ell(\lambda^2)$.

Définissons $\overline{\lambda} = \theta\lambda^1 + (1-\theta)\lambda^2$.

Il existe alors $\overline{x} \in S$ tel que

$$\ell(\overline{\lambda}) = L(\overline{x}, \overline{\lambda}) \ .$$

Par définition de $\ell(\lambda^1)$ et $\ell(\lambda^2)$, on a que

$$\ell(\lambda^1) \leq L(\overline{x}, \lambda^1) \qquad \text{et} \qquad \ell(\lambda^2) \leq L(\overline{x}, \lambda^2) \ .$$

En multipliant la première inégalité par θ et la seconde par $(1-\theta)$ et en les additionnant, on obtient

$$\begin{aligned} \theta\ell(\lambda^1) + (1-\theta)\ell(\lambda^2) &\leq L(\overline{x}, \theta\lambda^1 + (1-\theta)\lambda^2) \\ &= L(\overline{x}, \overline{\lambda}) \\ &= \ell(\overline{\lambda}) \ . \end{aligned}$$

■

Propriété 2

$\ell(\lambda)$ est différentiable par morceaux.

Preuve :
Il suffit de constater que le graphe de ℓ est l'enveloppe inférieure d'une famille finie d'hyperplans dans $\mathbb{R}^{m+1}$

$$\begin{cases} z = L(x^1, \lambda) , \\ \vdots \\ z = L(x^r, \lambda) . \end{cases}$$

■

Caractérisation des points de non différentiabilité de $\ell(\lambda)$

1 Basons-nous sur le résultat suivant :

Proposition 1

Si ℓ est différentiable en $\overline{\lambda}$,
Alors le problème $\min_{\xi \in S} L(\xi, \overline{\lambda})$ admet une solution unique.

La réciproque est évidemment vérifiée.

La preuve de la Proposition 1 nécessite le Lemme suivant (la démonstration de celui-ci peut se trouver dans [6]) :

Lemme 1

Soit $\overline{\lambda} \in \mathbb{R}^{m+}$.
Soit $X(\overline{\lambda}) = \{x \in S : \ell(\overline{\lambda}) = L(x, \overline{\lambda})\}$.
Alors,

$$\forall\, x \in X(\overline{\lambda}) , \qquad g(x) \in \partial \ell(\overline{\lambda})$$

où $g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ est telle que

$$g_j(x) = \sum_{i=1}^{n} c_{ij} x_i - \overline{c}_j , \qquad \forall\, x \in \mathbb{R}^n , \ \forall\, j = 1, \cdots, m .$$

Nous pouvons maintenant démontrer la Proposition 1.

Preuve de la Proposition 1 :
Comme ℓ est différentiable en $\overline{\lambda}$, le sous-différentiel de ℓ en $\overline{\lambda}$ se réduit au gradient de ℓ en $\overline{\lambda}$

$$\partial\ell(\overline{\lambda}) = \{\nabla\ell(\overline{\lambda})\} .$$

Le Lemme 1 nous indique donc que

$$g(x) = \nabla\ell(\overline{\lambda}) , \qquad \forall\, x \in X(\overline{\lambda}) .$$

On en conclut alors que $X(\overline{\lambda})$ se réduit à un point unique.
Le problème $\min_{\xi \in S} L(\xi, \overline{\lambda})$ admet donc une solution unique. ∎

2 Rappelons que

$$L(x, \overline{\lambda}) = \sum_{i=1}^{n} L_i(x_i, \overline{\lambda}) + \sum_{j=1}^{m} \overline{\lambda}_j \underline{c}_j , \qquad x \in S , \ \overline{\lambda} \in I\!R^{m+} .$$

La Proposition 1 nous permet donc d'affirmer que

> *ℓ est différentiable en $\overline{\lambda}$*
> *ssi, pour tout $i = 1, \cdots, n$, le problème $\min_{x_i \in X_i} L_i(x_i, \overline{\lambda})$ admet une solution unique.*

ou encore que

> *ℓ est non différentiable en $\overline{\lambda}$*
> *ssi il existe $i \in \{1, \cdots, n\}$ tel que $\min_{x_i \in X_i} L_i(x_i, \overline{\lambda})$ admet plus d'une solution.*

En conclusion, les points de non différentiabilité de ℓ sont les points $\lambda \in I\!R^{m+}$ pour lesquels un des systèmes $\min_{x_i \in X_i} L_i(x_i, \lambda)$ admet au moins deux solutions.

On peut encore préciser ceci grâce à la Proposition 2 :

Proposition 2

> *Si le problème $\min_{x_i \in X_i} L_i(x_i, \overline{\lambda})$ n'admet pas une solution unique,*
> *Alors le minimum est atteint en deux points consécutifs $x_i^{(k)}$ et $x_i^{(k+1)}$ de X_i .*

Preuve :
Divisons la preuve en deux parties :

A) Si le minimum de $L_i(\cdot, \overline{\lambda})$ sur l'ensemble discret X_i n'est pas unique, c'est qu'il est atteint en au plus deux points.
En effet, supposons par l'absurde que le minimum de $L_i(\cdot, \overline{\lambda})$ soit atteint en trois points distincts $x_i^{(s)}$, $x_i^{(t)}$, $x_i^{(u)}$ de X_i tels que $x_i^{(s)} < x_i^{(t)} < x_i^{(u)}$.
$x_i^{(t)}$ peut alors s'écrire

$$x_i^{(t)} = \theta x_i^{(s)} + (1-\theta) x_i^{(u)} , \qquad \theta \in]0,1[.$$

$L_i(\cdot, \overline{\lambda})$ étant strictement convexe, il suit que

$$\begin{aligned} L_i(x_i^{(t)}, \overline{\lambda}) &< \theta L_i(x_i^{(s)}, \overline{\lambda}) + (1-\theta) L_i(x_i^{(u)}, \overline{\lambda}) \\ &= L_i(x_i^{(s)}, \overline{\lambda}) , \end{aligned}$$

ce qui est en contradiction avec le fait que $x_i^{(t)}$ et $x_i^{(s)}$ sont tous deux minima de $L_i(\cdot, \overline{\lambda})$.

B) Il faut encore voir que le minimum est atteint en deux points consécutifs de X_i .
Si, par l'absurde, le minimum est atteint en $x_i^{(k)}$ et $x_i^{(k+\ell)}$ de X_i avec $\ell > 1$, il existe alors $x_i^{(k+j)} \in X_i$ avec $1 \leq j < \ell$ (i.e. $x_i^{(k)} < x_i^{(k+j)} < x_i^{(k+\ell)}$ car on a supposé que les $x_i^{(k)}$ sont classés par ordre croissant).
Par le même raisonnement qu'en A), on tire que

$$L_i(x_i^{(k+j)}, \overline{\lambda}) < L_i(x_i^{(k)}, \overline{\lambda}) ,$$

ce qui contredit le fait que $x_i^{(k)}$ et $x_i^{(k+\ell)}$ sont les seuls minima de $L_i(\cdot, \overline{\lambda})$ sur X_i .

■

Les points de non différentiabilité de ℓ sont donc les points λ pour lesquels $\exists\ i \in \{1, \cdots, n\}$, $\exists\ x_i^{(k)}, x_i^{(k+1)} \in X_i$ tels que

$$\min_{x_i \in X_i} L_i(x_i, \lambda) = L_i(x_i^{(k)}, \lambda) = L_i(x_i^{(k+1)}, \lambda) ,$$

i.e.

$$\frac{1}{2}(x_i^{(k)})^2 - \sum_{j=1}^{m} \lambda_j c_{ij} x_i^{(k)} = \frac{1}{2}(x_i^{(k+1)})^2 - \sum_{j=1}^{m} \lambda_j c_{ij} x_i^{(k+1)} ,$$

ou encore

$$\sum_{j=1}^{m} \lambda_j c_{ij} = \frac{x_i^{(k)} + x_i^{(k+1)}}{2} .$$

Donc, les points de non différentiabilité de ℓ se trouvent en cherchant les λ pour lesquels $L_i(x_i^{(k)}, \lambda) = L_i(x_i^{(k+1)}, \lambda)$ et ce, pour chaque couple de points consécutifs $(x_i^{(k)}, x_i^{(k+1)})$. On obtient alors chaque fois un hyperplan de $\mathbb{R}^{m+1}$ appelé *hyperplan de non différentiabilité* et donné par

$$\sum_{j=1}^{m} \lambda_j c_{ij} = \frac{x_i^{(k)} + x_i^{(k+1)}}{2} .$$

Remarque : Soit N_i le nombre d'éléments de X_i . Alors, la variable $x_i \in X_i$ correspond à $(N_i - 1)$ hyperplans de non différentiabilité parallèles entre eux.

3 Il est facile de voir que la fonction duale est non différentiable en au moins un point optimal dual $\lambda^* \in \mathbb{R}^{m+}$ i.e. que λ^* se trouve à l'intersection de un ou plusieurs hyperplans de non différentiabilité.

En effet, la fonction duale $\ell(\lambda)$ étant concave et différentiable par morceaux, son maximum se trouve généralement en un point de non différentiabilité.

Dans le cas où $m = 1$, on peut visualiser les différentes situations possibles par les schémas suivants :

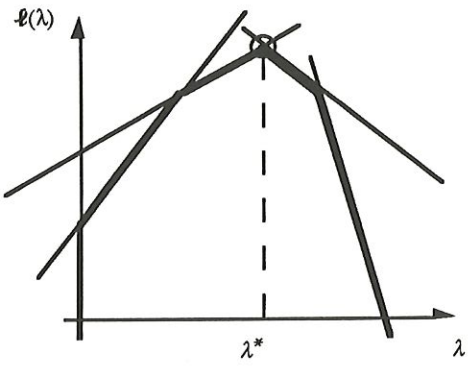


Fig. 1. Une solution unique.

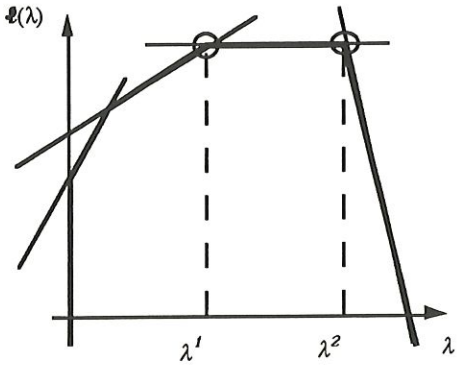


Fig. 2. Une infinité de solutions.

Dans la Figure 1, on voit que l'unique point optimal λ^* est un point de non différentiabilité.

Dans la Figure 2, tous les points du segment $[\lambda^1, \lambda^2]$ sont solutions. Parmi ceux-ci, λ^1 et λ^2 sont des points de non différentiabilité.

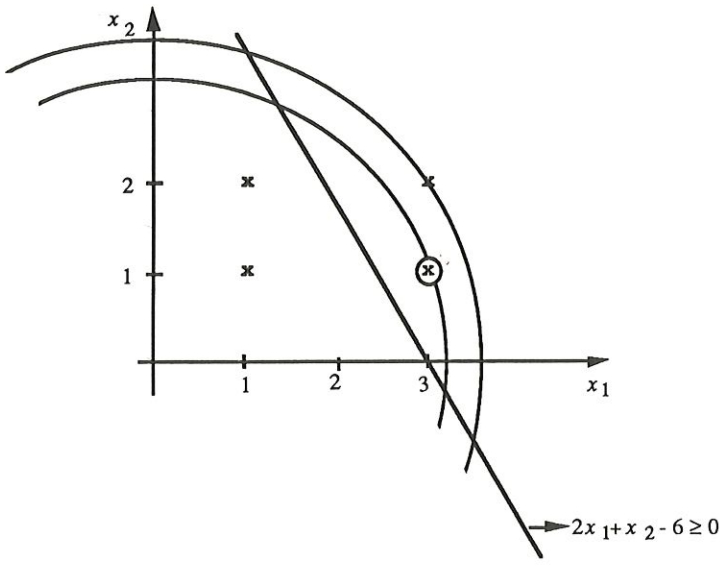
Remarque : Une fois qu'un point dual optimal λ^* a été déterminé, il faut encore trouver quelles combinaisons de variables primales lui correspondent (combinaisons qui fournissent la même valeur à la fonction duale, i.e. $\{x^\ell \in S \text{ t.q. } \ell(\lambda^*) = L(x^\ell, \lambda^*)\}$). L'avantage de la formulation duale est de réduire considérablement le nombre de combinaisons à tester; celui-ci est donné par 2^p où p représente le nombre d'hyperplans de non différentiabilité qui se rencontrent au point dual optimal. Il reste alors à choisir parmi ces combinaisons celle qui est admissible pour (P) et minimise la fonction objectif primale.

Exemple numérique

Considérons l'exemple très simple qui suit et mettons en évidence les différentes propriétés citées.

$$(P) \qquad \begin{cases} \min\limits_{x} \ \frac{1}{2}(x_1^2 + x_2^2) \\ \text{s.c.} \quad 2x_1 + x_2 \geq 6 \ , \\ \qquad x_1 \in \{1, 3\} \ , \\ \qquad x_2 \in \{1, 2\} \ . \end{cases}$$

A) **Résolution primale**



solution : (3,1)

Valeur optimale primale : 5

B) **Résolution duale**

fonction lagrangienne :

$$L(x_1, x_2, \lambda) = \frac{1}{2}(x_1^2 + x_2^2) - \lambda(2x_1 + x_2 - 6) \, .$$

En particulier,

(I) $L(1, 1, \lambda) = 1 + 3\lambda$

(II) $L(1, 2, \lambda) = \frac{5}{2} + 2\lambda$

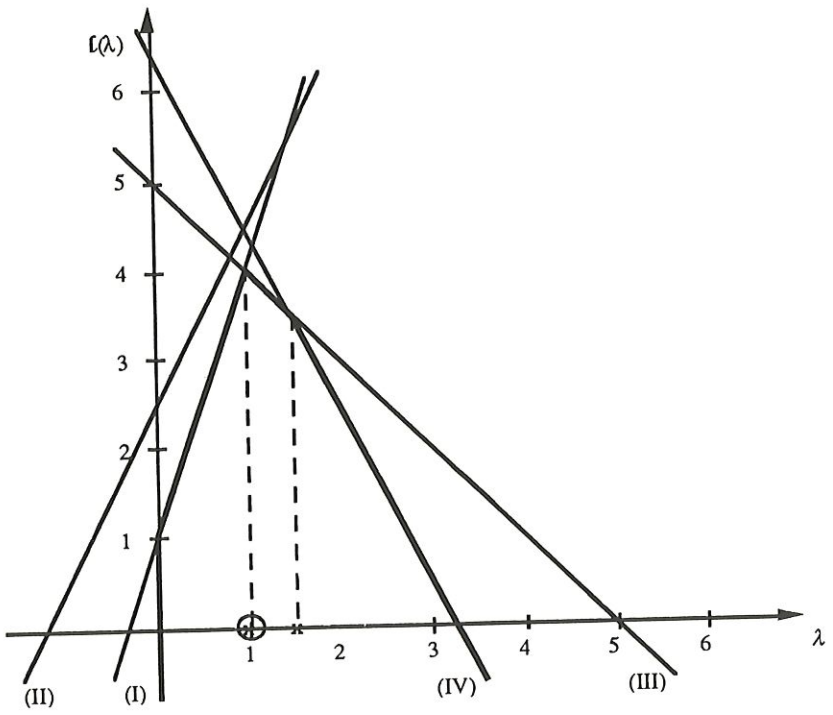
(III) $L(3, 1, \lambda) = 5 - \lambda$

(IV) $L(3, 2, \lambda) = \frac{13}{2} - 2\lambda$

hyperplans de non différentiabilité de ℓ :

Pour x_1 : $\lambda = 1$

Pour x_2 : $\lambda = \frac{3}{2}$



solution : $\lambda^* = 1$

valeur optimale duale : $\ell(1) = L(1, 1, 1) = L(3, 1, 1) = 4$

Pour trouver la combinaison primale correspondant à λ^* , nous avons le choix entre (1,1) et (3,1) . Or, (1,1) n'est pas admissible. On en déduit donc que (3,1) est la solution optimale primale.

On constate que

- ℓ est concave et linéaire par morceaux;
- $\lambda^* = 1$ est un point de non différentiabilité de ℓ ;
- le saut de dualité vaut $5 - 4 = 1$!

Section 2 Algorithme d'optimisation

2.1 Méthode

L'algorithme présenté dans ce chapitre se base sur le schéma habituel suivant :

I. En un point dual λ^k , résultant de l'itération $k-1$, et point de départ de l'itération k , on cherche une *direction S^k de montée dans l'espace dual.*

II. On effectue *une recherche linéaire selon S^k* , i.e. on cherche un point $\lambda^{k+1} = \lambda^k + \alpha^k S^k$ tel que $\ell(\lambda^k + \alpha^k S^k) = \max_{0 \leq \alpha \leq \alpha^k_{\max}} \ell(\lambda^k + \alpha S^k)$ où $\alpha^k_{\max}$ correspond à une limite que ne peut dépasser α afin de ne pas violer les inégalités $\lambda_j \geq 0$.

III. Critère d'arrêt

IV. Restitution des variables primales.

Nous décrivons dans ce qui suit la phase de recherche d'une direction de montée. Un critère d'optimalité est également établi.

Les différentes méthodes de recherche linéaire ne seront pas détaillées. La procédure employée pourra tenir compte du fait que le point solution de la recherche linéaire est à l'intersection de la direction de recherche S et, soit d'un hyperplan de non différentiabilité, soit d'un plan de base de l'espace dual. Plusieurs techniques de recherche linéaire sont mises en évidence dans [11].

Comme on l'a dit précédemment, la phase de maximisation se termine en un point de l'espace dual se trouvant à l'intersection de un ou plusieurs hyperplans de non différentiabilité. A chacun d'entre eux, on peut associer deux valeurs à la variable primale,

de sorte qu'il existe 2^P points primaux discrets associés à la même solution duale. On peut alors balayer séquentiellement les 2^P possibilités existantes et retenir la conception admissible qui conduit à la fonction objectif primale minimum. C'est ce procédé que nous appelons *Restitution des variables primales.* Ce travail peut paraître énorme, mais il est grandement facilité si les calculs sont effectués de telle manière que leur nombre soit limité. Un algorithme heuristique qui tente d'économiser un certain nombre d'opérations est proposé dans [11].

2.2 Détermination d'une direction de montée

Supposons que l'on se trouve en un point de l'espace dual $\overline{\lambda}$ où passent p hyperplans de non différentiabilité. Nous savons que le nombre de combinaisons primales $x^\ell \in S$ associées à $\overline{\lambda}$ (i.e. telles que $L(x^\ell, \overline{\lambda}) = \ell(\overline{\lambda})$) est 2^P et qu'à chacun de ces x^ℓ correspond le gradient $\nabla_\lambda L(x^\ell, \overline{\lambda})$. Par la suite, nous noterons G_i , $i = 1, \cdots, 2^P$ les 2^P gradients différents qui existent au point $\overline{\lambda}$.

Notre but est de construire, à partir de ces 2^P vecteurs gradients, une direction de montée idéale S^* . Or, la théorie de l'optimisation non différentiable nous enseigne que la direction de la plus grande montée de ℓ en $\overline{\lambda}$ est le vecteur de norme minimum dans le sous-différentiel de ℓ en $\overline{\lambda}$. S^* sera donc obtenu en résolvant le problème suivant

$$\min_{S \in \partial\ell(\overline{\lambda})} \|S\| \ .$$

Cette minimisation est rendue *facile* par le fait que l'expression du sous-différentiel de ℓ en $\overline{\lambda}$ est donnée par

$$\partial\ell(\overline{\lambda}) = co\{G_i \ , \ \ i = 1, 2, \cdots, 2^P\}$$

où *co* désigne la combinaison convexe de ces vecteurs.

Ainsi, tout élément $S \in \partial\ell(\overline{\lambda})$ peut s'écrire

$$S = \sum_{i=1}^{2^P} \beta_i G_i$$

où les coefficients β_i vérifient

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^{2^P} \beta_i &= 1 \\ \beta_i &\geq 0 \ , \qquad i = 1, \cdots, 2^P \ . \end{aligned}$$

Remarque : Pour montrer que $\partial\ell(\overline{\lambda}) = co\{G_i\ ,\quad i = 1, \cdots, 2^P\}$, référons-nous à la proposition suivante démontrée dans [6].

Proposition

Soit $f : I\!R^n \to I\!R$ *concave telle que*

$$f(x) = \min_{i=1,\cdots,k} f_i(x)\ , \qquad \forall\ x \in I\!R^n\ .$$

avec $f_i \in \mathcal{C}^1$.
Alors

$$\forall\ x \in I\!R^n\ : \qquad \partial f(x) = co\{\nabla f_i(x) : i \in I\}$$

où $I = \{i \in \{1, \cdots, k\}\ t.q.\ f(x) = f_i(x)\}$.

Dans notre cas :

$$\ell(\overline{\lambda}) = \min_{\ell=1,\cdots,r} L(x^\ell, \overline{\lambda}) \text{ concave}$$
$$\text{avec } L(x^\ell, \cdot) \text{ linéaire.}$$

Nous nous trouvons ainsi dans les conditions d'application de la proposition ci-dessus et pouvons donc affirmer que

$$\partial\ell(\overline{\lambda}) = co\{\nabla L(x^\ell, \overline{\lambda}) : \ell \in I\}$$

où

$$I = \{\ell \in \{1, \cdots, r\} \text{ t.q. } L(x^\ell, \overline{\lambda}) = \ell(\overline{\lambda})\}\ ,$$

autrement dit :

$$\partial\ell(\overline{\lambda}) = co\{G_i\ ,\ \ i = 1, \cdots, 2^P\}\ .$$

■

Le problème à résoudre sera donc le suivant :

$$(QP) \qquad \begin{cases} \min\limits_{\beta}\ \beta^T\ Q^T\ Q\ \beta \\ \text{s.c.}\ \ \sum\limits_{i=1}^{2^P} \beta_i\ =\ 1\ , \\ \qquad\quad \beta_i\ \geq\ 0\ ,\quad i = 1, \cdots, 2^P\ , \end{cases}$$

avec $\beta = (\beta_i)_{i=1,\cdots,2^P}$ vecteur $(2^P \times 1)$

$Q = [G_1 \ \cdots \ G_{2^P}]$ matrice $(m \times 2^P)$

La solution de ce problème β^* nous permettra de trouver la direction S^* cherchée : $S^* = Q\beta^*$. La Section 3 est consacrée à la résolution de (QP) .

Notes :

1) Lorsque $p = 0$, i.e. ℓ est différentiable en $\overline{\lambda}$, on a alors $\partial\ell(\overline{\lambda}) = \{G\}$ où G désigne le gradient. Dans ce cas, la direction idéale ne sera pas déterminée en résolvant (QP) mais par la *méthode du gradient modifié*

$$S_j = \begin{cases} 0 \ , & \text{si } \lambda_j = 0 \text{ et } G_j < 0 \ , \\ G_j & \text{sinon.} \end{cases} \qquad j = 1, \cdots, m \ .$$

2) Lorsqu'on a obtenu la direction de montée idéale par la résolution de (QP) , il faut s'assurer qu'elle ne pointe pas vers le domaine inadmissible.

$$S_j = \begin{cases} 0 \ , & \text{si } \lambda_j = 0 \text{ et } S_j < 0 \ , \\ S_j & \text{sinon.} \end{cases} \qquad j = 1, \cdots, m \ .$$

2.3 Critère d'optimalité

Nous nous servirons, dans l'algorithme, du critère suivant :

Proposition 3

λ^* point dual optimal ssi $S^* = 0$.

Preuve :

λ^* point dual optimal

$\Leftrightarrow \quad \ell(\lambda^*) = \max\limits_{\lambda \in \mathbb{R}^{m+}} \ell(\lambda)$

$\Leftrightarrow \quad 0 \in \partial\ell(\lambda^*)$

$\Leftrightarrow \quad S^*$, le vecteur de norme minimum dans $\partial\ell(\lambda^*)$, est nul.

■

2.4 Algorithme

Soient k le compteur d'itérations,

ε la précision.

Etape 1 : Choisir un point dual $\lambda^0 \in I\!R^{m+}$
$k := 0$

Etape 2 : Si λ^k se trouve sur un ou plusieurs hyperplans de non différentiabilité, aller à l'Etape 4.

Etape 3 : Si aucun hyperplan de non différentiabilité n'existe en λ^k , on utilise la méthode dite du gradient modifié pour trouver une direction de montée

$$S_j^k = \begin{cases} 0\,, & \text{si } \lambda_j^k = 0 \text{ et } G_j^k < 0\,, \\ G_j^k & \text{sinon.} \end{cases} \qquad j = 1, \cdots, m\,.$$

Aller à l'Etape 6.

Etape 4 : Calculer les 2^P vecteurs gradients $\{G_1^k, \cdots, G_{2^P}^k\}$ possibles au point λ^k , puis résoudre le système

$$(QP)_k \qquad \begin{cases} \min\limits_{\beta} \ \beta^T \, Q^{kT} \, Q^k \, \beta \\ \text{s.c.} \ \sum\limits_{i=1}^{2^P} \beta_i \ = \ 1\,, \\ \qquad \beta_i \ \geq \ 0\,, \quad i = 1, \cdots, 2^P\,, \end{cases}$$

avec $Q^k = [G_1^k \ \cdots \ G_{2^P}^k]$ matrice $(m \times 2^P)$. Connaissant les coefficients β_i^k , on en déduit la direction de la plus forte montée : $S^k = Q^k \beta^k$.

Etape 5 : Afin d'éviter d'avoir une direction S^k pointant vers le domaine inadmissible ($\lambda_j^k < 0$), on construit une direction admissible de la façon suivante :

$$S_j^k = \begin{cases} 0\,, & \text{si } \lambda_j^k = 0 \text{ et } S_j^k < 0\,, \\ S_j^k & \text{sinon.} \end{cases} \qquad j = 1, \cdots, m\,.$$

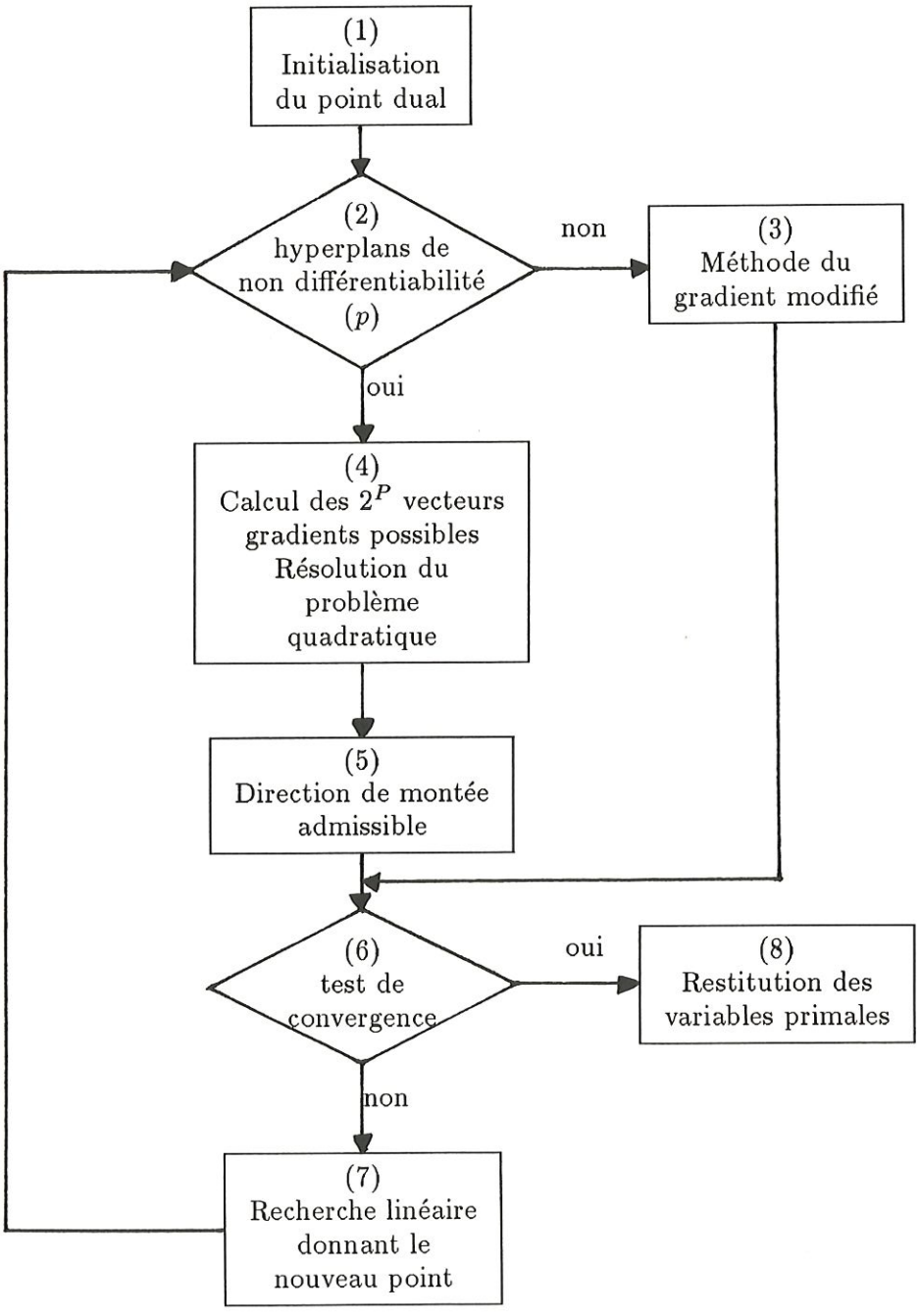
Etape 6 : Test d'arrêt : Si $\|S^k\| < \varepsilon$, c'est qu'on se trouve à l'optimum.
Aller alors à l'Etape 8.

Etape 7 : Le test d'arrêt n'étant pas vérifié, connaissant S^k , il est possible de déduire un nouveau point λ^{k+1} . Pour le trouver, on effectue une recherche linéaire le long de S^k , i.e. on cherche la valeur $\alpha^k \in [0, \alpha^k_{\max}]$ telle que

$$\max_{0 \leq \alpha \leq \alpha^k_{\max}} \ell(\lambda^k + \alpha S^k) = \ell(\lambda^k + \alpha^k S^k) .$$

On en déduit alors un nouveau point dual $\lambda^{k+1} = \lambda^k + \alpha^k S^k$.
$k := k + 1$
Retour à l'Etape 2.

Etape 8 : On se trouve au point optimum de la fonction duale et bien souvent à l'intersection de p hyperplans de non différentiabilité.
Il existe alors un ensemble de 2^P combinaisons primales parmi lesquelles il reste à sélectionner la meilleure.
STOP.


(1)
Initialisation
du point dual
(2)
hyperplans de
non différentiabilité
(p)
non
(3)
Méthode du
gradient modifié
oui
(4)
Calcul des 2^P vecteurs
gradients possibles
Résolution du
problème
quadratique
(5)
Direction de montée
admissible
(6)
test de
convergence
oui
(8)
Restitution des
variables primales
non
(7)
Recherche linéaire
donnant le
nouveau point

Section 3 Résolution du problème quadratique

Dans ce qui suit, nous allons exposer les grandes lignes d'une méthode de résolution du problème quadratique engendré par l'algorithme des sous-gradients :

$$(QP) \qquad \begin{cases} \min\limits_{\beta} \ \beta^T \, Q^T \, Q \, \beta \\ \text{s.c.} \ \sum\limits_{i=1}^{2^P} \beta_i \ = \ 1 \, , \\ \qquad \beta_i \ \geq \ 0 \, , \quad i = 1, \cdots, 2^P \, , \end{cases}$$

avec $\beta = (\beta_i)_{i=1,\cdots,2^P}$ vecteur $(2^P \times 1)$

$Q = [G_1 \ \cdots \ G_{2^P}]$ matrice $(m \times 2^P)$

Les mots clés de cette section seront les suivants :

- Projection du gradient sur les contraintes actives.
- Conjugaison de la direction.

3.1 Principe

Soit β un point de départ admissible. Nous pouvons alors effectuer les opérations suivantes :

I. Repérer les contraintes actives au point β (la contrainte $\sum\limits_{i=1}^{2^P} \beta_i = 1$ sera toujours active et les autres contraintes actives correspondront aux β_i nuls).

II. Introduire dans la matrice N les vecteurs directeurs des hyperplans correspondant aux contraintes actives.

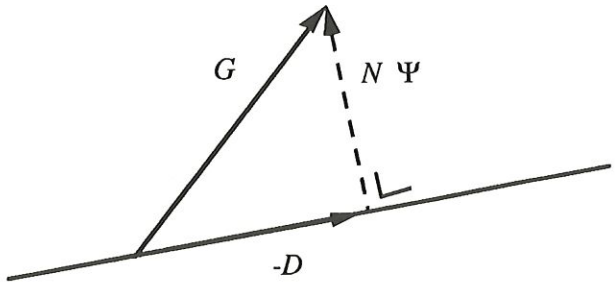
III. Calculer la direction D de descente en fonction de la projection du gradient G dans l'intersection des plans actifs, i.e.

$$D = -PG$$

avec P matrice de projection dans l'intersection des plans actifs :

$$P = I - N(N^T N)^{-1} N^T \, .$$

Remarque : G représente ici le gradient de la fonction objectif de (QP) calculé au point β et n'est pas à confondre avec le G ou les G_i , $i = 1, \cdots, 2^P$, considérés à la section précédente.



La composante de G perpendiculaire à l'intersection des plans actifs est une combinaison linéaire des vecteurs directeurs des plans actifs et peut donc s'écrire $N\Psi$ où Ψ est le vecteur des coefficients de cette combinaison linéaire.

Il suit de ceci que

$$-D = G - N\Psi \ .$$

Pour obtenir l'expression de Ψ , il suffit alors de multiplier cette égalité par N^T et de constater que $N^T D = 0$

$$0 = -N^T D = N^T G - N^T N\Psi$$

et donc

$$\Psi = (N^T N)^{-1} N^T G \ .$$

A l'optimum, on a évidemment $D = 0$ et on peut écrire

$$0 = G - N\Psi \ .$$

Cette relation est tout à fait semblable aux conditions d'optimalité de Kuhn-Tucker et donc, en conclusion, on se trouvera à l'optimum si $\|D\| = 0$ et $\Psi \geq 0$.

Trois cas peuvent se présenter :

1er cas : $\|D\| = 0$ et $\Psi \geq 0$.
On se trouve alors à l'optimum.

2ème cas : $\|D\| = 0$ et $\exists\ \ell : \Psi_\ell < 0$.
Alors, on ne se trouve pas à l'optimum car les conditions de Kuhn-Tucker ne sont pas vérifiées. On ne sait cependant pas progresser le long de D car $D = 0$.

On relaxe alors le plan relatif au multiplicateur le plus négatif (i.e. on le retire de la matrice N avant d'évaluer une nouvelle direction de recherche).

3ème cas : $\|D\| \neq 0$.

Tant que cela est possible (i.e. à condition que l'ensemble des plans contenus dans la matrice N soit identique à celui qu'elle contenait à l'itération précédente), on conjugue la direction de façon à accélérer le processus de recherche.

IV. Lorsqu'on a la direction de recherche D , on procède alors à une recherche linéaire pour trouver un nouveau point β . Si la dérivée directionnelle au point correspondant au pas maximum $\alpha_{\max}$: $\beta + \alpha_{\max} D$ est négative, ce point est le résultat de la recherche linéaire et on ajoute le plan rencontré à la matrice N . Sinon, on effectue une recherche linéaire habituelle.

Remarque : La formule générale donnant la matrice de projection est la suivante :

$$P = I - N(N^T N)^{-1} N^T .$$

La partie délicate est le calcul de l'inverse de $N^T N$ mais, dans le cas du problème (QP) , cet inverse peut être obtenu de façon explicite. Ceci est décrit dans l'Annexe I.

3.2 Algorithme

Soient k le compteur d'itérations,

ε la précision.

Etape 1 : On se donne un point de départ β^0 admissible et on initialise N^0 (vecteurs directeurs des plans actifs).
$k := 0$

Etape 2 : Calculer la valeur G^k du gradient de la fonction objectif de (QP) au point β^k .
Projeter ensuite le gradient G^k dans l'intersection des plans actifs pour obtenir D^k .

Etape 3 : Test d'arrêt : Si $\|D^k\| < \varepsilon$, aller à l'Etape 4. Sinon, aller à l'Etape 8.

Etape 4 : Repérer la composante de Ψ^k de valeur minimale. Soit Ψ_r^k cette composante.

Etape 5 : Si Ψ_r^k est négatif, aller à l'Etape 7.

Etape 6 : On se trouve en un point où $D^k \approx 0$ et $\Psi^k \geq 0$, l'optimum est donc atteint. STOP.

Etape 7 : On ne se trouve plus à l'optimum, on relâche alors la contrainte relative à Ψ_r^k . Retour à l'Etape 2.

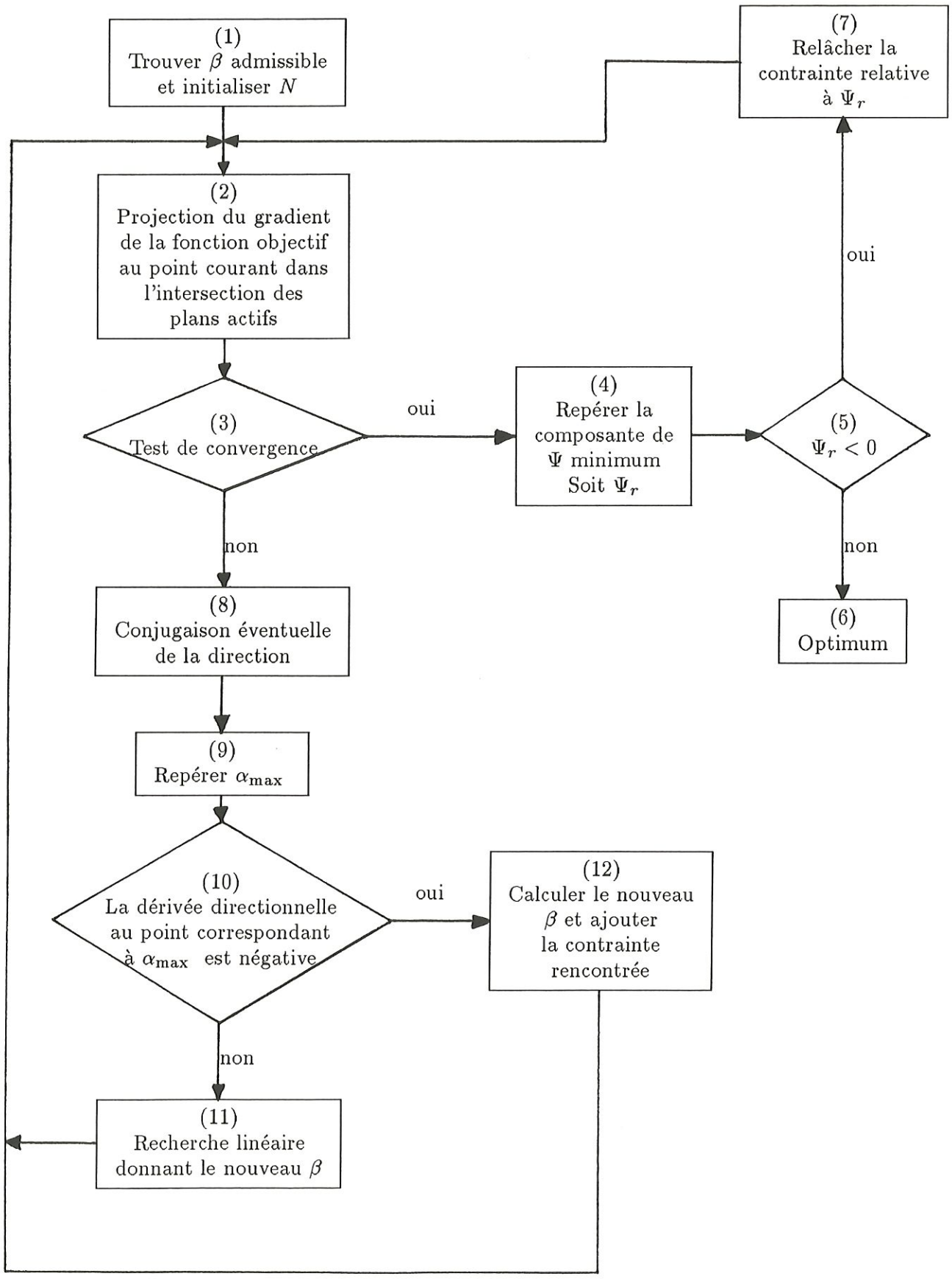
Etape 8 : On regarde si il est possible de conjuguer et, dans l'affirmative, on conjugue la direction.

Etape 9 : On a maintenant une direction de recherche (conjuguée ou non), il est alors possible de calculer un pas maximum pour le paramètre α de la recherche linéaire : $\alpha_{\max}^k$.

Etape 10 : Si la dérivée directionnelle au point $\beta^k + \alpha_{\max}^k D^k$ est négative, on va à l'Etape 12.

Etape 11 : On effectue une recherche linéaire traditionnelle le long de D^k et on en déduit un nouveau point : $\beta^{k+1} = \beta^k + \alpha^k D^k$.
Retour à l'Etape 2.

Etape 12 : On initialise : $\beta^{k+1} = \beta^k + \alpha_{\max}^k D^k$ et on ajoute ensuite le plan que l'on rencontre à la matrice N^k .
Retour à l'Etape 2.


(1)
Trouver β admissible
et initialiser N
(2)
Projection du gradient
de la fonction objectif
au point courant dans
l'intersection des
plans actifs
(3)
Test de convergence
oui
non
(4)
Repérer la
composante de
Ψ minimum
Soit Ψ_r
(5)
$\Psi_r < 0$
oui
non
(6)
Optimum
(7)
Relâcher la
contrainte relative
à Ψ_r
(8)
Conjugaison éventuelle
de la direction
(9)
Repérer $\alpha_{\max}$
(10)
La dérivée directionnelle
au point correspondant
à $\alpha_{\max}$ est négative
oui
non
(11)
Recherche linéaire
donnant le nouveau β
(12)
Calculer le nouveau
β et ajouter
la contrainte
rencontrée

Section 4 Remarques

Cette méthode qui se montre rapide et efficace en pratique, présente cependant deux inconvénients majeurs. Le premier désavantage provient de la construction de la matrice Q qui contient les 2^P vecteurs gradients et peut donc rapidement devenir très grosse. Une deuxième lacune se situe au niveau de la convergence puisque, dans le cas non différentiable, rien ne permet d'affirmer que cette méthode converge.

Ces constatations ont motivé l'étude d'une autre méthode de résolution de ce type de problème. Le chapitre suivant y sera consacré.

Annexe I

Expression de l'inverse de la matrice $N^T N$ qui apparaît dans la matrice de projection

Supposons qu'on se trouve en un point β où passent b plans de base ($\beta_j = 0$).

La matrice N qui contient les vecteurs directeurs des plans actifs peut alors s'écrire

$$N = \left[\cdots \quad \{e_j\} \quad \cdots \quad \{1\}_{2^P} \right] \qquad \text{matrice } (2^P \times (b+1))$$

où

$$\{e_j\} = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \qquad \text{vecteur } (2^P \times 1)$$

est le vecteur directeur associé aux contraintes de base $\beta_j = 0$;
et

$$\{1\}_{2^P} = \begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix} \qquad \text{vecteur } (2^P \times 1)$$

est le vecteur directeur du plan associé à la contrainte $\sum_{i=1}^{2^P} \beta_i = 1$.

On a alors

$$N^T N = \begin{bmatrix} I_{b\times b} & \{1\}_b \\ \{1\}_b^T & 2^P \end{bmatrix}$$

où $I_{b\times b}$ est la matrice unité $(b \times b)$,

$\{1\}_b$ est le vecteur $(b \times 1)$ comportant uniquement des 1 .

Et en utilisant une variante de la formule de Frobenius-Shur :

$$\begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} A^{-1} + A^{-1}BF^{-1}CA^{-1} & -A^{-1}BF^{-1} \\ -F^{-1}CA^{-1} & F^{-1} \end{bmatrix}$$

si A et $F = D - CA^{-1}B$ sont inversibles.

On obtient dans notre cas

$$(N^T N)^{-1} = \begin{bmatrix} I_{b\times b} - \frac{[1]_{b\times b}}{2^P - b} & -\frac{\{1\}_b}{2^P - b} \\ -\frac{\{1\}_b^T}{2^P - b} & \frac{1}{2^P - b} \end{bmatrix}$$

où $[1]_{b\times b}$ est la matrice $(b \times b)$ comportant uniquement des 1 .

Chapitre 2

DECOMPOSITION LAGRANGIENNE

Il est bien connu que l'association non linéaire–variables entières est génératrice de difficultés. La méthode que nous allons présenter possède l'avantage de rompre cette association; nous aurons d'une part un problème non linéaire sans variables entières et d'autre part un problème avec variables entières mais linéaire.

Avant de nous restreindre au cas du problème quadratique traité au Chapitre 1, nous exposons la méthode de décomposition lagrangienne proposée par P. Michelon (voir [5]) dans le cadre plus général de la programmation non linéaire.

Dans la première section, nous établissons les bases théoriques relatives à la technique de décomposition lagrangienne. Ensuite, dans la Section 2, nous détaillons deux algorithmes qui fournissent des ε-solutions optimales en se basant sur la réduction du saut de dualité. A la section suivante, nous particularisons l'approche au cas de la programmation quadratique et concluons sur les perspectives qu'offre la décomposition.

Les principales notations utilisées dans ce chapitre sont les suivantes :

- Etant donné un problème d'optimisation (Q) , nous désignons par :

$(\overline{Q})$ la relaxation continue de (Q) , i.e. le problème (Q) où les contraintes d'intégrité ont été relâchées;

$V(Q)$ la valeur optimale de (Q) ;

$D(Q)$ le domaine admissible de (Q) , i.e. l'ensemble des points de $\mathbb{R}^n$ satisfaisant les contraintes de (Q) ;

$\mathcal{O}(Q)$ l'ensemble des solutions optimales de (Q) .

- Etant donné un ensemble E , $co(E)$ désigne son enveloppe convexe.

Section 1 Présentation de la décomposition lagrangienne

Un problème de programmation non linéaire en nombres entiers, avec contraintes linéaires, peut s'écrire de la façon suivante :

$$(P) \qquad \begin{cases} \min\ f(x) \\ \text{s.c. } Ax = b \\ \qquad x \in X \end{cases}$$

avec $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ continue

$A \in \mathbb{R}^{m \times n}$, $b \in \mathbb{R}^m$,

$X \subseteq \mathbb{R}^n$ ensemble qui définit les contraintes d'intégralité.

Nous supposerons, dans la suite, que le domaine admissible de (P) est compact et non vide. Ceci implique que $\mathcal{O}(P) \neq \emptyset$ et $\mathcal{O}(\overline{P}) \neq \emptyset$.

1.1 Principe

La méthode de décomposition lagrangienne consiste à introduire dans le domaine admissible de (P) une copie des variables et des contraintes. $D(P)$ reste inchangé si nous lui

ajoutons les contraintes " $y = x$ ", " $Ay = b$ " et " $y \in co(X)$ ". Le problème obtenu est alors le suivant :

$$(P) \qquad \left\{ \begin{array}{l} \min \ f(y) \\ \text{s.c.} \quad Ay = b \\ \qquad y \in co(X) \\ \qquad\quad y = x \\ \qquad\quad Ax = b \\ \qquad\quad x \in X \end{array} \right.$$

Dualisant (P) par rapport à la contrainte " $y = x$ " en utilisant le vecteur dual $u \in I\!R^n$, on obtient la fonction duale :

$$\ell(u) = \left[\begin{array}{l} \min \ f(y) - \langle u, y - x \rangle \\ \text{s.c.} \quad Ay = b \\ \qquad y \in co(X) \\ \qquad\quad Ax = b \\ \qquad\quad x \in X \end{array} \right.$$

ou, puisque, par définition de $(\overline{P})$: $D(\overline{P}) = \{y \in I\!R^n : Ay = b \ , \ y \in co(X)\}$:

$$\ell(u) = \min_{\substack{y \in D(\overline{P}) \\ x \in D(P)}} \left(f(y) - \langle u, y - x \rangle \right)$$

ou encore

$$\ell(u) = \min_{y \in D(\overline{P})} \left(f(y) - \langle u, y \rangle \right) + \min_{x \in D(P)} \langle u, x \rangle \ .$$

On a alors le problème dual

$$(D) \qquad \max_{u \in I\!R^n} \ell(u)$$

Etant donné $u \in I\!R^n$, nous avons ainsi deux problèmes indépendants à résoudre pour calculer $\ell(u)$:

1) Le problème en y , que nous noterons $(P \ u \ y)$. Il s'agit d'un problème non linéaire à variables continues qui est convexe si f est convexe.

2) Le problème en x , noté $(P\ u\ x)$, qui est linéaire à variables entières.

Nous avons de cette façon séparé la fonction objectif non linéaire des contraintes d'intégralité.

Soulignons déjà que la méthode fournit, pour chaque variable duale $u \in I\!R^n$, non seulement une borne inférieure $\ell(u)$ à $V(P)$ (voir Propriété 1) mais aussi une borne supérieure et une solution réalisable. En effet, pour calculer $\ell(u)$, on doit déterminer $\tilde{x}$ solution optimale de $(P\ u\ x)$ et par conséquent solution admissible pour (P) . Autrement dit,

$$\forall\ u \in I\!R^n : \ell(u) \leq V(P) \leq f(\tilde{x}) \qquad \text{où } \tilde{x} \in \mathcal{O}(P\ u\ x)\ .$$

Remarquons aussi que

$$\ell(0) = V(P\ 0\ y) = V(\overline{P})\ .$$

Etudions maintenant plus en détail la décomposition.

1.2 Etude théorique

A. Propriétés de la fonction duale

Propriété 1

$$\forall\ u \in I\!R^n\ , \qquad \ell(u) \leq V(P)\ .$$

Preuve :
Soit $u \in I\!R^n$ quelconque. Montrons que $\forall\ z \in D(P)$, $\ell(u) \leq f(z)$. Le résultat sera alors immédiat.

Soit $z \in D(P) \subseteq D(\overline{P})$. On a, par définition de $\ell(u)$:

$$\begin{aligned} \ell(u) &= \min_{\substack{y \in D(\overline{P}) \\ x \in D(P)}} \left(f(y) - \langle u, y - x\rangle\right) \\ &\leq f(z) - \langle u, z - z\rangle = f(z)\ . \end{aligned}$$

■

Par conséquent, lors d'une minimisation, une méthode lagrangienne ne peut fournir qu'une borne inférieure à la valeur optimale du problème. La résolution du dual (D) nous permet d'obtenir la meilleure borne inférieure possible en maximisant $\ell(u)$ sur $I\!R^n$.

Propriété 2

ℓ est une fonction concave.

Preuve :
ℓ est un minimum de fonctions concaves. ∎

Propriété 3

ℓ est non différentiable mais

$$\forall\, u \in I\!R^n\ ,\quad \partial\ell(u) = co\{z = x - y \ \textit{avec}\ \ x \in \mathcal{O}(P\ u\ x)\ \textit{et}\ y \in \mathcal{O}(P\ u\ y)\}\ .$$

Rappelons que $\partial\ell(u)$ désigne le sous-différentiel de ℓ en u , i.e.

$$\partial\ell(u) = \{s \in I\!R^n \mid \forall\, \xi \in I\!R^n : \ell(\xi) \leq \ell(u) + s^T(\xi - u\}\ .$$

Nous employons aussi les notations suivantes :

$$\forall\, u \in I\!R^n\ ,\quad Y(u) \ \equiv\ \{(x,y) \in I\!R^n \times I\!R^n : x \in \mathcal{O}(P\ u\ x) \text{ et } y \in \mathcal{O}(P\ u\ y)\}$$

et

$$E(u) \ \equiv\ \{z = x - y \mid (x,y) \in Y(u)\}\ .$$

Le Lemme 1 qui suit est utilisé dans la preuve de la Propriété 3 et démontré dans l'Annexe II.1.

Lemme 1

$\forall\, u \in I\!R^n$, $\forall\, d \in I\!R^n$, $\exists\, \overline{\nu} = (\overline{x}, \overline{y}) \in Y(u)$ tel que $\ell'(u;d) \geq d^T(\overline{x} - \overline{y})$ où $\ell'(u;d)$ représente la dérivée directionnelle de ℓ en u dans la direction d .

Preuve : (Propriété 3)
Soit $u \in I\!R^n$. La preuve sera divisée en deux parties :

1) $co(E(u)) \subseteq \partial\ell(u)$.

   Puisque $\partial\ell(u)$ est un ensemble convexe (voir [6]), il suffit de montrer que $E(u) \subseteq \partial\ell(u)$.

   Soit donc $z \in E(u)$. Il existe alors $x \in \mathcal{O}(P\ u\ x)$ et $y \in \mathcal{O}(P\ u\ y)$ pour lesquels $z = x - y$.

Par définition de ℓ , nous avons :

$$\ell(u) = f(y) - \langle u, y\rangle + \langle u, x\rangle$$

et

$$\forall\, \xi \in I\!R^n\ , \qquad \ell(\xi) \leq f(y) - \langle \xi, y\rangle + \langle \xi, x\rangle\ .$$

Par conséquent,

$$\forall\, \xi \in I\!R^n\ , \qquad \ell(\xi) - \ell(u) \leq \langle \xi - u, x - y\rangle\ ,$$

ce qui exprime que $z = x - y \in \partial\ell(u)$.

2) $\partial\ell(u) \subseteq co(E(u))$.
Par l'absurde, supposons qu'il existe $\gamma \in \partial\ell(u)$ tel que $\gamma \notin co(E(u))$. En utilisant le théorème de séparation des convexes, on obtient :

$$\exists\, d \in I\!R^n\ ,\ d \neq 0\ ,\ \exists\, \alpha \in I\!R \quad \text{t.q.} \quad \begin{cases} d^T\gamma < \alpha\ , \\ d^T z \geq \alpha\ ,\ \forall\, z \in co(E(u))\ . \end{cases}$$

Par le Lemme 1 :

$$\exists\, (\overline{x}, \overline{y}) \in Y(u) \text{ t.q. } \ell'(u; d) \geq d^T(\overline{x} - \overline{y})$$

et donc $\ell'(u; d) \geq \alpha$.

Par ailleurs, on sait que (voir [6]) :

$$\ell'(u; d) = \min_{\xi \in \partial\ell(u)} d^T\xi\ .$$

Par conséquent, comme $\gamma \in \partial\ell(u)$:

$$\ell'(u; d) \leq d^T\gamma < \alpha\ .$$

On aboutit ainsi à une contradiction.

■

B. Interprétation primale

Considérons le problème :

$$(P^*) \qquad \min_{x \in co(D(P))} f(x) \; .$$

Il est très difficile de déterminer de façon explicite le polyèdre qui définit $co(D(P))$ mais le rôle théorique important que joue (P^*) nous amène à l'introduire ici.

Théorème 1

$$V(\overline{P}) \leq V(P^*) \leq V(P) \; .$$

Preuve :
Le résultat découle directement des inclusions :

$$D(P) \subseteq D(P^*) \subseteq D(\overline{P}) \; .$$

■

Théorème 2 (Interprétation primale)

Si f est convexe,
Alors $V(P^*) = V(D)$.

Preuve :
(P^*) est un problème à variables continues, convexe (car f l'est) et peut encore s'écrire :

$$(P^*) \qquad \begin{cases} \min \; f(y) \\ \text{s.c. } x \in co(D(P)) \\ \qquad y \in D(\overline{P}) \\ \qquad\quad y = x \end{cases}$$

Nous pouvons observer que le domaine réalisable de ce nouveau problème est un polytope non vide de $\mathbb{R}^{2n}$. La théorie de la dualité convexe nous enseigne alors que $V(P^*) = V(D^*)$ où (D^*) désigne le dual de (P^*) et que (D^*) s'écrit :

$$(D^*) \qquad \max_{v \in \mathbb{R}^n} \; \min_{\substack{x \in co(D(P)) \\ y \in D(\overline{P})}} \; (f(y) + \langle v, x - y \rangle) \; .$$

Il résulte que

$$V(P^*) = V(D^*) = \max_{v \in \mathbb{R}^n} \left\{ \min_{y \in D(\overline{P})} (f(y) - \langle v, y \rangle) + \min_{x \in co(D(P))} \langle v, x \rangle \right\}$$

ou encore, puisqu'on ne change pas la valeur optimale d'un problème de programmation linéaire en remplaçant son domaine par son enveloppe convexe :

$$V(P^*) = \max_{v \in \mathbb{R}^n} \left\{ \min_{y \in D(\overline{P})} (f(y) - \langle v, y \rangle) + \min_{x \in D(P)} \langle v, x \rangle \right\} .$$

Donc,

$$V(P^*) = \max_{v \in \mathbb{R}^n} \ell(v) = V(D) .$$

■

Corollaire 3

$$V(\overline{P}) \leq V(D) \leq V(P) .$$

Preuve :
Si f est convexe, cela découle immédiatement des Théorèmes 1 et 2. Sinon, $V(\overline{P}) \leq V(D)$ car $V(\overline{P}) = \ell(0) \leq V(D)$ et $V(D) \leq V(P)$ puisque, pour tout $u \in \mathbb{R}^n$, $\ell(u) \leq V(P)$ (voir Propriété 1). ■

Pour illustrer les Théorèmes 1, 2 et 3, examinons l'exemple suivant (proposé par P. Michelon dans [5]) illustré à la Figure 1.

$$(P) \qquad \begin{cases} \min\ (x_1 - 1)^2 + (x_2 - 1)^2 \\ \text{s.c. } x_1 + x_2 \leq 1.5 , \\ \qquad x_1 \in \{0, 1\} , \\ \qquad x_2 \in \{0, 1\} ; \end{cases}$$

$$(\overline{P}) \qquad \begin{cases} \min\ (x_1 - 1)^2 + (x_2 - 1)^2 \\ \text{s.c. } x_1 + x_2 \leq 1.5 , \\ \qquad x_1 \in [0, 1] , \\ \qquad x_2 \in [0, 1] ; \end{cases}$$

$$(P^*) \qquad \begin{cases} \min\ (x_1-1)^2+(x_2-1)^2 \\ \text{s.c. } x_1+x_2 \leq 1\,, \\ \qquad\quad x_1 \in [0,1]\,, \\ \qquad\quad x_2 \in [0,1]\,. \end{cases}$$

Nous observons à la Figure 1 que

$$V(\overline{P})=\frac{1}{8}\,, \qquad V(D)=V(P^*)=\frac{1}{2}\,, \qquad V(P)=1\,.$$

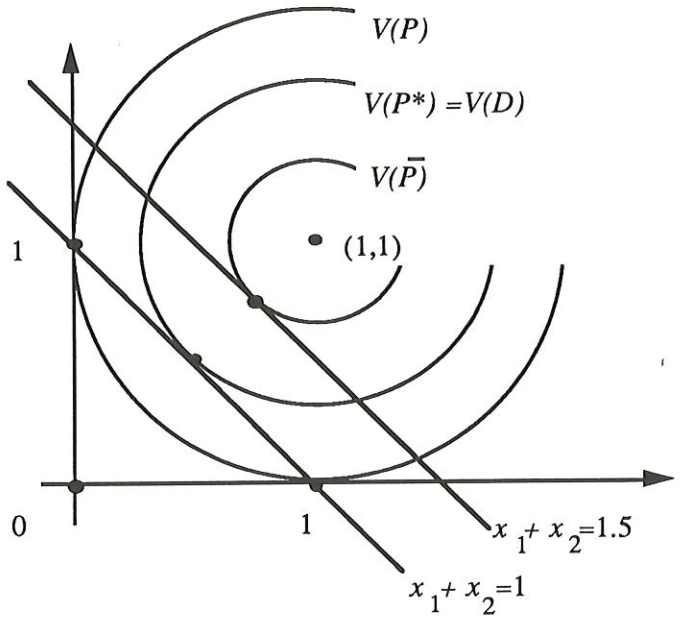


Figure 1.

Le Corollaire 3 assure que la meilleure borne inférieure fournie par la méthode duale est au moins aussi bonne que celle fournie par le calcul direct de $V(\overline{P})$.

Malheureusement, il existe des problèmes pour lesquels $V(\overline{P}) = V(D)$.

Théorème 4 (c.n.s. pour que $V(D) = V(\overline{P})$)

Si f est convexe,
Alors les trois assertions suivantes sont équivalentes :

1) $V(D) = V(\overline{P})$.

2) $\mathcal{O}(\overline{P}) \cap co(D(P)) \neq \emptyset$.

3) $0 \in \partial\ell(0)$ *(* $\Leftrightarrow$ $0 \in \mathcal{O}(D)$ *).*

Preuve :

1) $\Rightarrow$ 2)
Si 1) est vraie, par le Théorème 2, on a

$$V(\overline{P}) = V(D) = V(P^*) .$$

D'où

$$\exists\, x \in D(P^*) \quad \text{t.q.} \quad f(x) = V(\overline{P}) ,$$

i.e.

$$\exists\, x \in \mathcal{O}(\overline{P}) \cap co(D(P)) .$$

2) $\Rightarrow$ 1)
Combinant 2) et le Théorème 1, on a

$$\exists\, x \in co(D(P)) \quad \text{t.q.} \quad f(x) = V(\overline{P}) \leq V(P^*) .$$

Autrement dit,

$$x \in \mathcal{O}(P^*) , \qquad \text{i.e.} \quad f(x) = V(P^*) .$$

On a alors

$$V(P^*) = f(x) = V(\overline{P}) .$$

Et puisqu'on a aussi $V(P^*) = V(D)$ (voir Théorème 2), on obtient bien

$$V(\overline{P}) = V(D) .$$

3) $\Leftrightarrow$ 1)
Comme $V(\overline{P}) = \ell(0)$, on a

$$\begin{aligned} V(D) = V(\overline{P}) \quad &\Leftrightarrow \quad V(D) = \ell(0) \\ &\Leftrightarrow \quad 0 \in \mathcal{O}(D) \ . \end{aligned}$$

■

Nous avons déjà dit qu'expliciter $co(D(P))$ est un problème notoirement difficile. Par conséquent, on ne sait pas, après avoir résolu $(\overline{P})$ (i.e. après avoir calculé $\ell(0)$), si on a atteint ou non $V(D)$. Pour remédier à ce problème, introduisons la notion de *propriété d'intégralité* qui nous permettra d'établir une condition suffisante plus facile à vérifier en pratique.

Nous dirons que la décomposition possède la propriété d'intégralité si, pour tout $u \in \mathbb{R}^n$,

$$V(P\ u\ x) = V(\overline{P}\ u\ x)$$

(i.e. la contrainte " $x \in X$ " de $(P\ u\ x)$ est redondante).

Considérons les deux lemmes suivants (démontrés dans l'Annexe II.2):

Lemme 2

La propriété d'intégralité revient à dire que tous les points extrêmes de $D(\overline{P})$ sont éléments de X .

Lemme 3

Si la propriété d'intégralité est vérifiée,
Alors $D(\overline{P}) = co(D(P))$.

Ces deux lemmes permettent d'affirmer que, si la décomposition lagrangienne possède la propriété d'intégralité, les points extrêmes de $co(D(P))$ sont dans X .

On peut alors établir une condition suffisante plus pratique que celle du Théorème 4 :

Théorème 5 (c.s. pour que $V(D) = V(\overline{P})$)

Si f est convexe et si la décomposition possède la propriété d'intégralité,
Alors $V(\overline{P}) = V(D)$.

Preuve :
Si la propriété d'intégralité est vérifiée, le Lemme 3 affirme que $D(\overline{P}) = co(D(P))$ et donc $V(\overline{P}) = V(P^*)$. En combinant ceci avec $V(D) = V(P^*)$ démontré au Théorème 2, on obtient le résultat. ∎

Il est certain que les problèmes pour lesquels $V(\overline{P}) = V(D)$ ne sont pas le meilleur contexte pour appliquer la décomposition puisqu'elle ne donne pas de meilleurs résultats que la méthode qui consiste simplement à résoudre $(\overline{P})$. Cependant, sauf si on parvient à établir la propriété d'intégralité, il n'y a guère moyen de savoir a priori si $V(\overline{P}) = V(D)$. D'autre part, même dans ce cas, la méthode de décomposition lagrangienne peut s'avérer intéressante car elle a l'énorme avantage de générer, outre la borne inférieure, une borne supérieure et des solutions réalisables.

Comme $V(\overline{P}) \leq V(D) \leq V(P)$ (voir Corollaire 3), la décomposition sera d'une utilité optimale si $V(P) = V(D)$.

Théorème 6 (c.n.s. pour que $V(P) = V(D)$)

Si f est convexe,
Alors les deux assertions suivantes sont équivalentes :

1) $V(D) = V(P)$.

2) $\mathcal{O}(P^*) \cap X \neq \emptyset$.

Preuve :

1) $\Rightarrow$ 2)
Il suffit de se rappeler que $V(P^*) = V(D)$ (cf. Théorème 2).

2) $\Rightarrow$ 1)
L'inégalité $V(D) \leq V(P)$ étant toujours vérifiée (voir Corollaire 3), il reste à voir que $V(P) \leq V(D)$.
Or, par 2),

$$\exists\, x \in X \cap \mathcal{O}(P^*) \quad \text{i.e.} \quad \exists\, x \in D(P) \text{ t.q. } f(x) = V(P^*) .$$

D'où $V(P) \leq f(x) = V(P^*)$, et puisque $V(P^*) = V(D)$ (cf. Théorème 2), on a bien $V(P) \leq V(D)$. ∎

Bien sûr, la condition nécessaire et suffisante du Théorème 6 est impossible – du moins pour une fonction f quelconque – à vérifier a priori, mais elle nous permet quand même d'affirmer que, pour la plus grande partie des problèmes, il existera un saut de dualité. En effet, comme f est non linéaire, ce n'est que pour des cas bien particuliers qu'une solution optimale de (P^*) sera un point extrême du domaine réalisable.

Donnons également un théorème de dualité :

Théorème 7 (Théorème de dualité)

Si $\exists\ x \in \mathbb{R}^n$, $\exists\ u \in \mathbb{R}^n$ *t.q.* $x \in \mathcal{O}(P\ u\ x) \cap \mathcal{O}(P\ u\ y)$,
Alors

1) $u \in \mathcal{O}(D)^*$.

2) $x \in \mathcal{O}(P)$ *et* $V(P) = V(D)$.

Preuve :

1) L'expression du sous-différentiel de ℓ en u donnée à la Propriété 3 était

$$\partial\ell(u) = \{z = x - y \text{ t.q. } x \in \mathcal{O}(P\ u\ x) \text{ et } y \in \mathcal{O}(P\ u\ y)\} .$$

Il suit des hypothèses que

$$0 \in \partial\ell(u) , \qquad \text{i.e. } u \in \mathcal{O}(D) .$$

2) Comme $x \in \mathcal{O}(P\ u\ x) \cap \mathcal{O}(P\ u\ y)$ et $u \in \mathcal{O}(D)$:

$$x \in D(P) \quad \text{et} \quad V(D) = \ell(u) = f(x) + \langle u, x - x\rangle = f(x) .$$

Nous avons aussi que

$$V(P) \leq f(x) \qquad \text{et} \qquad V(P) \geq V(D)$$

(voir Corollaire 3).

En combinant ces relations, on a

$$x \in D(P) \qquad \text{et} \qquad V(P) \geq V(D) = f(x) \geq V(P) ,$$

et donc

$$x \in D(P) \qquad \text{et} \qquad f(x) = V(P) = V(D) .$$

■

Pour clore l'interprétation primale de la méthode, nous allons nous intéresser à la résolution de (P^*) en nous limitant au cas où f est convexe.

Répétons d'abord que la détermination explicite de $D(P^*) = co(D(P))$ est un problème aussi et sans doute plus difficile que (P) lui-même. Par conséquent, il n'est pas question d'appliquer à (P^*) n'importe quelle méthode d'optimisation non linéaire. Nous allons cependant montrer que l'algorithme de Frank et Wolfe est susceptible de résoudre (P^*) sans la connaissance explicite de $D(P^*)$.

ALGORITHME DE FRANK ET WOLFE

Etape 0 : Choisir $x^0 \in D(P)$. $k := 0$

Etape 1 : Résoudre

$$(PL(x^k)) \equiv \min_{x \in D(P)} \langle \nabla f(x^k), x \rangle \ .$$

Soient y^k une solution de $(PL(x^k))$ et $\alpha^k = V(PL(x^k))$.

Etape 2 : Si $\alpha^k \geq \langle \nabla f(x^k), x^k \rangle$,

Alors STOP. x^k est la solution optimale.

Sinon, déterminer t_k tel que

$$f(x^k + t_k(y^k - x^k)) = \min_{t \in [0,1]} f(x^k + t(y^k - x^k)) \ .$$

Etape 3 : $x^{k+1} := x^k + t_k(y^k - x^k)$.

$k := k + 1$

Retour à l'Etape 1.

Comme $(PL(x^k))$ est un problème linéaire,

$$\alpha^k \equiv \min_{x \in D(P)} \langle \nabla f(x^k), x \rangle = \min_{x \in co(D(P))} \langle \nabla f(x^k), x \rangle \ .$$

Cet algorithme est donc exactement l'algorithme de Frank et Wolfe appliqué à (P^*) et permet ainsi de résoudre (P^*) .

Puisqu'on suppose, dans ce cadre, que f est convexe, le Théorème 2 nous assure que $V(D) = V(P^*)$. C'est ainsi que cette méthode primale fournit la même borne inférieure que la décomposition lagrangienne.

1.3 Variante

Etudions maintenant une autre décomposition lagrangienne de (P) :

Si nous introduisons dans (P) les contraintes " $y = x$ " et " $y \in co(X)$ ", nous obtenons le problème équivalent suivant :

$$(P) \qquad \begin{cases} \min\ f(y) \\ \text{s.c. } y \in co(X)\ , \\ \qquad y = x\ , \\ \qquad Ax = b\ , \\ \qquad x \in X\ . \end{cases}$$

Dualisons par rapport à la contrainte " $y = x$ " en utilisant la variable duale $u \in I\!R^n$. La fonction duale ℓ' devient

$$\ell'(u) = \min_{y \in co(X)} (f(y) - \langle u, y \rangle) + \min_{x \in D(P)} \langle u, x \rangle\ .$$

Le problème non linéaire sera désigné par $(P'\ u\ y)$. Nous garderons la notation $(P\ u\ x)$ pour le problème linéaire.

Le problème dual (D') associé est donné par

$$(D') \qquad \max_{u \in I\!R^n} \ell'(u)\ .$$

Un avantage de cette variante est que $(P'\ u\ y)$ est beaucoup plus facile à résoudre que $(P\ u\ y)$. Par exemple, en programmation 0-1 :

$$co(X) = [0,1]^n\ .$$

Un autre avantage est mis en évidence par le théorème suivant :

Théorème 8

Si f est convexe,
Alors $V(D') = V(D)$.

Preuve :
(P^*) peut aussi s'écrire

$$(P^*) \qquad \begin{cases} \min\ f(y) \\ \text{s.c. } x \in co(D(P)) \,, \\ \qquad y \in co(X) \,, \\ \qquad\quad y = x \,. \end{cases}$$

En utilisant les mêmes idées que dans la démonstration du Théorème 2, on obtient

$$V(P^*) = \max_{v \in I\!R^n} \ell'(v) = V(D') \,,$$

d'où

$$V(D') = V(P^*) = V(D) \,.$$

■

On garde donc la même borne avec un problème continu plus facile. Cette version pourra ainsi s'avérer intéressante, même lorsque $V(\overline{P}) = V(D)$.

Remarquons aussi qu'avec cette décomposition, nous n'avons plus nécessairement que $\ell'(0) = V(\overline{P})$.

Section 2 Elimination du saut de dualité

En utilisant la méthode de décomposition lagrangienne énoncée à la section précédente, nous allons obtenir à chaque étape une borne inférieure pour $V(P)$, une solution admissible et une borne supérieure. En effet, pour tout $u \in I\!R^n$,

$$\ell(u) \leq V(P) \leq f(\tilde{x}) \qquad \text{où } \tilde{x} \in \mathcal{O}(P\ u\ x) \,.$$

Les deux algorithmes théoriques présentés ici mettent en oeuvre un procédé permettant d'encadrer toujours plus finement $V(P)$. Ils reposent tous les deux sur la même idée : il s'agit de *forcer* la suite de bornes supérieures à être décroissante par l'ajout de coupes dans le problème discret $(P\ u\ x)$. Les algorithmes diffèrent seulement par les coupes générées.

Désignons par BI et BS les bornes inférieure et supérieure de $V(P)$, les algorithmes vont engendrer des suites $(BI^k)_k$ et $(BS^k)_k$ telles que, pour tout k ,

$$BI^{k-1} \leq BI^k \leq V(P) \leq BS^k \leq BS^{k-1} \,.$$

Nous supposerons que f est convexe et différentiable sur $co(X)$.

Dans le premier algorithme, nous ajoutons à l'ensemble des contraintes de $(P\ u\ x)$ la coupe " $f(x) \leq BS - \varepsilon$ " où BS est la meilleure borne supérieure connue jusqu'à présent et ε est un réel strictement positif.

ALGORITHME 1

Soient σ_1 et σ_2 représentant des tolérances fixées.

Etape 0 : (Initialisation)

$u^0 := 0$

Résoudre $(P\ 0\ y)$. Soit $y^0 \in \mathcal{O}(P\ 0\ y)$

Résoudre $(P\ 0\ x)$. Soit $x^0 \in \mathcal{O}(P\ 0\ x)$

$BI := \ell(0)$, $BS := f(x^0)$

$k := 0$

Etape 1 : (Critère d'arrêt)

Si $(\|x^k - y^k\| \leq \sigma_1)$ ou $(BS - BI \leq \sigma_2)$

Alors STOP

Etape 2 : (Mise à jour des multiplicateurs lagrangiens)

Déterminer $u^{k+1} = u^k + t_k(x^k - y^k)$ par une méthode sous-gradient.

Etape 3 : $k := k + 1$

Etape 4 : (Résolution de $(P\ u^k\ x)$ auquel on a ajouté une coupe et mise à jour de la borne supérieure)

Résoudre $(P\ u^k\ x)$ avec la restriction supplémentaire " $f(x) \leq BS - \varepsilon$ ", i.e. résoudre

$$\begin{cases} \min \langle u^k, x \rangle \\ \text{s.c.} \quad Ax = b\,, \\ \qquad f(x) \leq BS - \varepsilon\,, \\ \qquad\quad x \in X\,. \end{cases}$$

Si le domaine réalisable est vide, Alors STOP
Sinon, soit x^k solution optimale

$$BS := f(x^k) .$$

Etape 5 : (Résolution de $(P\ u^k\ y)$)
Résoudre $(P\ u^k\ y)$. Soit y^k une solution optimale.

Etape 6 : (Mise à jour éventuelle de la borne inférieure)
Si $\ell(u^k) > BI$,
Alors $BI := \ell(u^k)$.

Etape 7 : Retour à l'Etape 1.

Remarques concernant cet algorithme

1. A l'Etape 0, pour résoudre $(P\ 0\ x)$, il suffit tout simplement de déterminer un point réalisable du domaine (car $V(P\ 0\ x) = 0$, pour tout $x \in D(P)$).

   Cependant, en programmation $0-1$, il sera préférable de considérer le problème

$$\begin{cases} \min\ \|x - y^0\|^2 \\ \text{s.c. } Ax = b\,, \\ \qquad x \in \{0,1\}^n\,, \end{cases}$$

   que nous pouvons résoudre comme un programme linéaire en variables $0-1$. En effet,

$$\begin{aligned} \|x - y^0\|^2 &= \sum_{i=1}^{n}(x_i - y_i^0)^2 \\ &= \sum_{i=1}^{n}\left\{x_i^2 + (y_i^0)^2 - 2x_i y_i^0\right\} \\ &= \sum_{i=1}^{n}(1 - 2y_i^0)x_i + \sum_{i=1}^{n}(y_i^0)^2 \end{aligned}$$

   puisque $x_i^2 = x_i$ si $x_i \in \{0,1\}$.

   On peut ainsi espérer que le x^0 déterminé de la sorte donne une borne supérieure relativement bonne.

2. Le critère d'arrêt a été établi sur base des constatations suivantes :

   A l'itération k ,

   Si $x^k = y^k$, Alors x^k est solution optimale de (P)

   (voir Théorème 7 de dualité)

   Si $BS = BI$, Alors $f(x^k) = V(P)$ et donc x^k est la solution optimale de (P) .

3. La mise à jour de u^k , quant à elle, nous est suggérée par la Propriété 3 qui assure que $(x^k - y^k) \in \partial\ell(u^k)$. Une méthode sous-gradient est alors envisageable. Le choix de la méthode utilisée est important pour la vitesse de convergence de l'algorithme car la mise à jour des bornes dépend de u^{k+1} .

4. L'ajout de la coupe " $f(x) \leq BS - \varepsilon$ " dans le problème en x rend ce problème plus difficile à résoudre puisque cette contrainte est non linéaire. Cet inconvénient disparaîtra dans le deuxième algorithme où la coupe " $f(x) \leq BS - \varepsilon$ " sera remplacée par des contraintes linéaires.

   Une autre conséquence de cet ajout est que l'algorithme n'aboutira, en général, qu'à une ε-solution optimale.

Le second algorithme repose sur la même idée mais, cette fois, nous allons générer des contraintes linéaires.

On va remplacer la contrainte " $f(x) \leq BS - \varepsilon$ " de l'itération k , par la série de contraintes

$$\text{" } \langle \nabla f(x^\ell), x - x^\ell \rangle \leq BS - \varepsilon - f(x^\ell) , \qquad \forall\, \ell = 0, 1, \cdots, k-1, \text{"}$$

où les x^ℓ sont les points réalisables générés par la méthode à l'itération k . Nous utilisons ainsi la méthode des plans sécants pour réduire le saut de dualité.

ALGORITHME 2

Les Etapes de 0 à 3 sont identiques à celles de l'Algorithme 1.

Etape 4 : (Résoudre $(P\ u^k\ x)$ augmenté d'une coupe)

Résoudre le problème

$$\begin{cases} \min \langle u^k, x \rangle \\ \text{s.c. } Ax = b \,, \\ \qquad \langle \nabla f(x^\ell), x - x^\ell \rangle \leq BS - \varepsilon - f(x^\ell) \,, \quad \ell = 0, 1, \cdots, k-1, \\ \qquad x \in X \,. \end{cases}$$

Si le domaine réalisable est vide, alors STOP
Sinon, soit x^k la solution otimale de ce problème.

Etape 5 : (Résolution de $(P\ u^k\ y)$)
Résoudre $(P\ u^k\ y)$. Soit y^k une solution optimale.

Etape 6 : (Ajustement des bornes inférieure et supérieure)

Si $f(x^k) < BS$, Alors $BS := f(x^k)$

Si $\ell(u^k) > BI$, Alors $BI := \ell(u^k)$.

Etape 7 : Retour à l'Etape 1.

Nous avons, en quelque sorte, approximé la contrainte " $f(x) \leq BS - \varepsilon$ " par les contraintes linéaires

$$\text{“ } \langle \nabla f(x^\ell), x - x^\ell \rangle \leq BS - \varepsilon - f(x^\ell) \,, \qquad \ell = 0, 1, \cdots, k-1, \text{”}$$

En effet, comme f est convexe, on a, pour $\ell = 0, 1, \cdots, k-1$,

$$\forall\ x \in I\!R^n \,, \qquad f(x) \geq f(x^\ell) + \langle \nabla f(x^\ell), x - x^\ell \rangle \,.$$

Par conséquent, une façon naturelle de remplacer " $f(x) \leq BS - \varepsilon$ " est d'imposer

$$BS - \varepsilon \geq f(x^\ell) + \langle \nabla f(x^\ell), x - x^\ell \rangle \qquad \forall\ \ell = 0, 1, \cdots, k-1 \,.$$

Remarques au sujet de l'Algorithme 2

1. Contrairement à l'Algorithme 1, la suite $(f(x^k))_k$ n'est pas nécessairement décroissante.

   Il est, en effet, possible que la solution x^k du problème de l'Etape 4 vérifie " $f(x^k) \geq BS$ " car on sait, par construction de l'algorithme, que, pour tout $\ell = 0, 1, \cdots, k-1$,

   $$f(x^\ell) + \langle \nabla f(x^\ell), x^k - x^\ell \rangle \leq BS - \varepsilon$$

   et aussi que, pour tout $\ell = 0, 1, \cdots, k-1$,

   $$f(x^\ell) + \langle \nabla f(x^\ell), x^k - x^\ell) \rangle \leq f(x^k)$$

   puisque f est convexe. Mais rien ne permet d'affirmer que $f(x^k) \leq BS - \varepsilon$.

   Cependant, en mettant à jour la borne supérieure BS de façon à ce qu'elle prenne des valeurs décroissantes au cours de l'algorithme, cela ne pose pas de problèmes.

2. Pour chaque contrainte ajoutée à l'Etape 4, nous éliminons au moins un point du domaine. Plus précisément : à l'itération k , on élimine x^{k-1} du domaine admissible.

   En effet, puisque à l'itération k : $BS \leq f(x^{k-1})$, x^{k-1} ne vérifie pas la contrainte

   $$\langle \nabla f(x^{k-1}), x - x^{k-1} \rangle \leq BS - \varepsilon - f(x^{k-1}) .$$

   x^{k-1} n'est donc pas admissible pour le problème :

   $$\begin{cases} \min \langle u^k, x \rangle \\ \text{s.c. } Ax = b , \\ \quad \langle \nabla f(x^\ell), x - x^\ell \rangle \leq BS - \varepsilon - f(x^\ell) , \quad \ell = 0, 1, \cdots, k-1, \\ \quad x \in X . \end{cases}$$

Grâce à la dernière remarque, nous pouvons montrer le théorème suivant

Théorème 9

Si le problème est totalement discret et f est convexe sur $co(X)$
Alors l'algorithme s'arrête après un nombre fini d'itérations.

Preuve :
Si $X = \{x \mid x \in \mathbb{Z}^n\}$ et X fini, par la Remarque 3, on explore au maximum une fois tous les points du domaine admissible et donc, l'algorithme s'arrête après un nombre fini d'itérations. ∎

Pour les problèmes mixtes, nous avons besoin d'une hypothèse supplémentaire :

Théorème 10

Si le problème est mixte et f est convexe et continûment différentiable dans $co(X)$,
Alors l'algorithme s'arrête après un nombre fini d'itérations.

Preuve :
Supposons par l'absurde que l'Algorithme 2 ne converge pas en un nombre fini d'itérations. Soit donc $(x^k)_{k\in\mathbb{N}}$, la suite de points générée par cet algorithme.
Puisque chaque élément de cette suite est un élément du domaine admissible et que celui-ci est borné, $(x^k)_{k\in\mathbb{N}}$ est bornée et admet donc une sous-suite qui converge vers $\overline{x} \in D(P)$.
Pour deux indices $k_1 < k_2$ de cette sous-suite, on a par construction de l'algorithme que

$$\langle \nabla f(x^{k_1}), x^{k_2} - x^{k_1} \rangle \leq BS - \varepsilon - f(x^{k_1})$$

et

$$BS \leq f(x^{k_1}) .$$

Il suit que

$$\langle \nabla f(x^{k_1}), x^{k_2} - x^{k_1} \rangle \leq -\varepsilon$$

ou encore

$$\varepsilon \leq \langle \nabla f(x^{k_1}), x^{k_1} - x^{k_2} \rangle \leq \|\nabla f(x^{k_1})\| \, \|x^{k_1} - x^{k_2}\| .$$

Mais f étant continûment différentiable,

$$\lim_{k_1 \to +\infty} \|\nabla f(x^{k_1})\| = \|\nabla f(\overline{x})\|$$

et

$$\lim_{\substack{k_1 < k_2 \\ k_1 \to +\infty \\ k_2 \to +\infty}} \|x^{k_1} - x^{k_2}\| = 0$$

d'où, en passant à la limite, on obtient $\varepsilon \leq 0$, ce qui est absurde. ∎

Note : Les deux algorithmes proposés ci-dessus sont d'ordre théorique. Pour envisager une implémentation, il faudrait encore expliciter la façon de choisir ε et approfondir la mise à jour des multiplicateurs de Lagrange. On devrait aussi se poser des questions quant au nombre de contraintes qu'il va falloir générer dans le deuxième algorithme. De plus, pour que la décomposition présente un intérêt, il faut que l'on sache solutionner rapidement les sous-problèmes générés. En ajoutant des contraintes dans le problème en x , nous risquons de rendre plus difficile sa résolution.

Section 3 Cas particulier de la programmation quadratique en variables $0-1$

Revenons au problème quadratique en variables entières étudié au chapitre 1 (on se limitera ici au cas des variables $0-1$)

$$(P) \qquad \begin{cases} \min \ \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{n} x_i^2 \\ \text{s.c.} \ \sum_{i=1}^{n} c_{ij} x_i \geq \underline{c}_j \ , \qquad j = 1, \cdots, m \ , \\ \qquad\qquad x \in \{0,1\}^n \ , \end{cases}$$

où $x = (x_1, \cdots, x_n)^T \in I\!R^n$ est le vecteur des variables du problème, et

$c_{ij}, \underline{c}_j \in I\!R$ caractérisent les contraintes.

Nous allons lui appliquer la technique de décomposition lagrangienne décrite ci-dessus. Nous verrons que, dans ce cas particulier, un certain nombre de propriétés supplémentaires apparaissent.

Intéressons-nous au dual de la deuxième décomposition introduite :

$$(D) \qquad \max_{u \in I\!R^n} \ell(u)$$

$$\begin{aligned} \text{avec} \ \ell(u) &= \ell_1(u) + \ell_2(u) \ , \\ \ell_1(u) &= \min_{y \in [0,1]^n} \left(\frac{1}{2} \sum_{i=1}^{n} y_i^2 - \langle u, y \rangle \right) \ , \\ \ell_2(u) &= \min_{x \in D(P)} \langle u, x \rangle \ . \end{aligned}$$

Comme précédemment, nous désignerons par $(P \ u \ y)$ le problème non linéaire en y et par $(P \ u \ x)$ le problème en x .

Le Théorème 11 (démontré dans l'Annexe II.3) permet de restreindre la recherche des solutions optimales de (D) à $[0,1]^n$.

Théorème 11

Parmi les solutions optimales de (D) *, il en existe nécessairement une dans* $[0,1]^n$.

Et ainsi que le montre le résultat suivant, lorsque $u \in [0,1]^n$, le calcul de $\ell(u)$ se limite à la résolution de $(P\ u\ x)$.

Théorème 12

Sur $[0,1]^n$ *,* ℓ *s'exprime par*

$$\ell(u) = -\frac{1}{2}\|u\|^2 + \ell_2(u)$$

et donc ℓ *est strictement concave.*

Preuve :
Soit $u \in [0,1]^n$. $y(u) = u$ est solution optimale de $(P\ u\ y)$ car

1) $y(u) = u \in [0,1]^n$;

2) $y(u) = u$ annule le gradient de la fonction : $y \to \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} y_i^2 - \langle u, y\rangle$.

Donc,

$$\ell_1(u) = -\frac{1}{2}\|u\|^2 .$$

De plus, $\ell(u)$ est strictement concave sur $[0,1]^n$ puisque c'est la somme d'une fonction strictement concave : $-\frac{1}{2}\|u\|^2$ et d'une fonction concave : $\ell_2(u)$. ∎

Théorème 13

(D) *possède une solution et une seule appartenant à* $[0,1]^n$.

Preuve :
C'est une conséquence directe des Théorèmes 11 et 12. ∎

Corollaire 14

Le dual (D) *est équivalent à*

$$(D) \qquad \max_{u\in[0,1]^n} \left(-\frac{1}{2}\|u\|^2 + \ell_2(u)\right) .$$

Cette formulation nous permet d'établir l'équivalence entre l'algorithme de Frank et Wolfe appliqué à (P^*) qui est décrit à la Section 1 et une méthode sous-gradient appliquée au dual.

Théorème 15

L'algorithme de Frank et Wolfe appliqué au primal est une méthode sous-gradient appliquée au dual.

Preuve :
Voir Annexe II.4. ∎

On peut encore restreindre le domaine de (D) .

Corollaire 16

(D) *possède au moins une solution optimale* u^* *appartenant à* $co(D(P))$. *Par conséquent,* (D) *peut encore se formuler de la façon suivante :*

$$(D) \qquad \max_{u\in co(D(P))} \left(-\frac{1}{2}\|u\|^2 + \ell_2(u)\right) .$$

Preuve :
Par le Théorème 15, l'algorithme de Frank et Wolfe appliqué à (P^*) engendre des points $w^k \in co(D(P))$ identiques à ceux générés par une méthode sous-gradient appliquée à (D) . Donc,

$$\exists\, u^* \in \mathcal{O}(D) \quad \text{t.q.} \quad u^* \in co(D(P)) .$$

∎

Corollaire 17

Si $u^* \in \mathcal{O}(D) \cap \{0,1\}^n$,
Alors $V(P) = V(D)$.

Preuve :
La fonction objectif étant convexe, le Théorème 2 nous indique que $V(P^*) = V(D)$.
Par le Théorème 15, nous savons en plus que (P^*) et (D) ont les mêmes solutions optimales.
L'hypothèse implique donc que $u^* \in \mathcal{O}(P^*) \cap \{0,1\}^n$.
Et par le Théorème 6 :

$$V(P) = V(D) .$$

■

La formulation de (D) donnée au Corollaire 14

$$(D) \qquad \max_{u \in [0,1]^n} \left(-\frac{1}{2}\|u\|^2 + \ell_2(u) \right)$$

est extrêmement intéressante, tant du point de vue théorique que pratique. On peut en effet essayer d'imaginer des algorithmes tirant parti de la structure de ce problème.

La décomposition lagrangienne s'avère donc être une méthode bien adaptée à notre problème quadratique de départ. Il suffit de résoudre à chaque étape le problème linéaire en variables $0-1$ $(P\ u\ x)$. Et en utilisant un algorithme de réduction du saut de dualité décrit à la Section 2, nous obtiendrons une ε-solution optimale.

Annexe II

Annexe II.1

Lemme 1

$$\forall\, u \in I\!R^n\ ,\ \forall\, d \in I\!R^n\ ,\ \exists\, \overline{v} = (\overline{x}, \overline{y}) \in Y(u) \textit{ tel que}$$

$$\ell'(u; d) \geq d^T(\overline{x} - \overline{y})\ .$$

Rappelons que

$$Y(u) \equiv \{(x, y) \in I\!R^n \times I\!R^n \text{ t.q. } x \in \mathcal{O}(P\ u\ x) \text{ et } y \in \mathcal{O}(P\ u\ y)\}\ .$$

Preuve :
Soient $u, d \in I\!R^n$. Par définition,

$$\ell'(u; d) = \lim_{\substack{\theta \to 0 \\ >}} \frac{\ell(u + \theta d) - \ell(u)}{\theta}\ .$$

Considérons une suite de nombres réels strictement positifs (θ^k) telle que $\theta^k \underset{k\to\infty}{\longrightarrow} 0^+$. A chaque θ^k, on peut associer un $\nu^k = (x^k, y^k) \in Y(u + \theta^k d)$ tel que $\ell(u + \theta^k d) = f(y^k) + (u + \theta^k d)^T(x^k - y^k)$.
Les éléments des suites (x^k) et (y^k) ainsi créées appartiennent respectivement à $D(P)$ et $D(\overline{P})$. Puisque, par hypothèse, $D(P)$ et $D(\overline{P})$ sont tous deux compacts, on obtient que

- $(x^k)_{k\in K}$ admet une sous-suite $(x^k)_{k\in K_1 \subseteq K}$ convergeant vers $\overline{x} \in D(P)$;
- $(y^k)_{k\in K_1}$ admet une sous-suite $(y^k)_{k\in K_2 \subseteq K_1}$ convergeant vers $\overline{y} \in D(\overline{P})$.

Montrons maintenant que $\overline{\nu} = (\overline{x}, \overline{y})$ convient.
Par définition des suites (x^k) et (y^k), on a, pour tout $k \in K_2$

$$\begin{aligned} \ell(u + \theta^k d) &= f(y^k) + (u + \theta^k d)^T (x^k - y^k) \\ &\leq f(y) + (u + \theta^k d)^T (x - y) \end{aligned}$$

$$\forall\, x \in D(P)\,, \qquad \forall\, y \in D(\overline{P})\,.$$

Et, en prenant la limite pour $k \to \infty$:

$$f(\overline{y}) + u^T(\overline{x} - \overline{y}) \leq f(y) + u^T(x - y)\,, \qquad \forall\, x \in D(P)\,,\ \forall\, y \in D(\overline{P})\,.$$

Ceci indique que $\overline{x} \in \mathcal{O}(P\ u\ x)$ et $\overline{y} \in \mathcal{O}(P\ u\ y)$, autrement dit $(\overline{x}, \overline{y}) \in Y(u)$.
De plus, pour tout $k \in K_2$:

$$\begin{aligned} \ell(u + \theta^k d) &= f(y^k) + (u + \theta^k d)^T (x^k - y^k) \\ &= f(y^k) + u^T(x^k - y^k) + \theta^k d^T (x^k - y^k) \\ &\geq \ell(u) + \theta^k d^T (x^k - y^k)\,. \end{aligned}$$

En conclusion, pour tout $k \in K_2$:

$$\frac{\ell(u + \theta^k d) - \ell(u)}{\theta^k} \geq d^T(x^k - y^k)\,,$$

et, par passage à la limite, on obtient le résultat annoncé. ∎

Annexe II.2

Lemme 2

La décomposition lagrangienne possède la propriété d'intégralité

$$\Leftrightarrow$$

les points extrêmes de $D(\overline{P})$ sont dans X .

Rappelons que la propriété d'intégralité consiste à dire que, pour tout $u \in I\!R^n$:

$$V(P\ u\ x) = V(\overline{P}\ u\ x)\,.$$

Preuve :

$$V(\overline{P}\ u\ x) = \min_{x \in D(\overline{P})} \langle u, x \rangle \ .$$

$\Rightarrow$ Soit $\tilde{x}$ un point extrême de $D(\overline{P})$. Alors

$$\exists\ \tilde{u} \in I\!R^n \ : \quad \mathcal{O}(\overline{P}\ \tilde{u}\ x) = \{\tilde{x}\} \ .$$

Par ailleurs, la propriété d'intégralité permet de dire que $V(\overline{P}\ \tilde{u}\ x) = V(P\ \tilde{u}\ x)$. D'où

$$\exists\ x^* \in D(P) \subseteq D(\overline{P}) \qquad \text{t.q.} \quad x^* \in \mathcal{O}(P\ \tilde{u}\ x) \cap \mathcal{O}(\overline{P}\ \tilde{u}\ x) \ .$$

Puisque $\mathcal{O}(\overline{P}\ \tilde{u}\ x) = \{\tilde{x}\}$, il suit que $\tilde{x} = x^* \in X$. Tout point extrême $\tilde{x}$ de $D(\overline{P})$ appartient donc à X .

$\Leftarrow$ Soit $u \in I\!R^n$. Parmi les solutions optimales de $(\overline{P}\ u\ x)$, il y a au moins un point extrême $\tilde{x}$ de $D(\overline{P})$ et par hypothèse, ce point $\tilde{x}$ se trouve dans X .
Donc $\tilde{x} \in \mathcal{O}(\overline{P}\ u\ x) \cap X$. Il suit directement que

$$\tilde{x} \in \mathcal{O}(\overline{P}\ u\ x) \cap \mathcal{O}(P\ u\ x) \ , \qquad \text{i.e. } V(\overline{P}\ u\ x) = V(P\ u\ x) \ .$$

■

Lemme 3

Si la propriété d'intégralité est vérifiée,
Alors $D(\overline{P}) = co(D(P))$.

Preuve :
L'inclusion $co(D(P)) \subseteq D(\overline{P})$ étant toujours vraie, il reste à montrer que $D(\overline{P}) \subseteq co(D(P))$.
Soit $x \in D(\overline{P})$.
Si x est un point extrême de $D(\overline{P})$, alors, par le Lemme 2, $x \in X$. Donc, $x \in D(P) \subseteq co(D(P))$.
Sinon, x peut s'exprimer comme combinaison convexe de plusieurs points extrêmes de $D(\overline{P})$ qui, par le même raisonnement que précédemment, sont aussi des éléments de $D(P)$.
D'où $x \in co(D(P))$. ■

Annexe II.3

Rappelons que

$$(D) \qquad \max_{u \in I\!R^n} \ell(u)$$

$$\begin{aligned} \text{avec } \ell(u) &= \ell_1(u) + \ell_2(u) \,, \\ \ell_1(u) &= V(P\ u\ y) = \min_{y \in [0,1]^n} \left(\tfrac{1}{2} \sum_{i=1}^{n} y_i^2 - \langle u, y \rangle \right) \,, \\ \ell_2(u) &= V(P\ u\ x) = \min_{x \in D(P)} \langle u, x \rangle \,. \end{aligned}$$

Théorème 11

Parmi les solutions optimales de (D) *, il en existe nécessairement une dans* $[0,1]^n$.

Preuve :
Soit $u \in I\!R^n$ quelconque.
Désignons par $y(u)$ la solution optimale du problème $(P\ u\ y)$ (unique puisque la fonction objectif est strictement convexe). Les conditions de Kuhn-Tucker qui expriment que $y(u)$ est solution de $(P\ u\ y)$ s'écrivent

$$\exists\ \lambda^0(u), \lambda^1(u) \in I\!R^n \text{ tels que}$$

$$(1) \quad y(u) - u - \lambda^0(u) + \lambda^1(u) = 0 \,,$$

$$(2) \quad \lambda_i^0(u) y_i(u) = 0 \,, \quad i = 1, \cdots, n \,,$$

$$(3) \quad \lambda_i^1(u)(y_i(u) - 1) = 0 \,, \quad i = 1, \cdots, n \,,$$

$$(4) \quad \lambda^0(u) \geq 0 \,, \qquad \lambda^1(u) \geq 0 \,.$$

De (2) et (3), nous tirons que

$$\begin{aligned} \text{si } y_i(u) \in]0,1[\quad &\Rightarrow \quad \lambda_i^1(u) = \lambda_i^0(u) = 0 \,, \\ \text{si } y_i(u) = 0 \quad &\Rightarrow \quad \lambda_i^1(u) = 0 \,, \\ \text{si } y_i(u) = 1 \quad &\Rightarrow \quad \lambda_i^0(u) = 0 \,. \end{aligned}$$

Montrons que

$$\exists\ \tilde{u} \in [0,1]^n \qquad \text{t.q.} \quad \ell(\tilde{u}) \geq \ell(u)\ .$$

On aura bien qu'il existe au moins une solution optimale de (D) dans $[0,1]^n$.
Choisissons $\tilde{u} = y(u)$.
Naturellement, $\tilde{u} \in [0,1]^n$.
On remarque que $y(\tilde{u}) = y(u)$, i.e. que $y(u)$ est solution de $(P\ \tilde{u}\ y)$ car, en posant $\lambda^1(\tilde{u}) = \lambda^0(\tilde{u}) = 0$, $y(u)$ satisfait bien les conditions de Kuhn-Tucker pour $\tilde{u}$.
Par conséquent,

$$\ell_1(\tilde{u}) - \ell_1(u) = \langle u - \tilde{u}, y(u)\rangle\ .$$

Désignons par $x(\tilde{u})$ une solution du problème $(P\ \tilde{u}\ x)$.
On a alors

$$\begin{aligned} \ell_2(\tilde{u}) - \ell_2(u) &= \langle \tilde{u}, x(\tilde{u})\rangle - \ell_2(u) \\ &\geq \langle \tilde{u} - u, x(\tilde{u})\rangle\ . \end{aligned}$$

D'où

$$\begin{aligned} \ell(\tilde{u}) - \ell(u) &= (\ell_1(\tilde{u}) - \ell_1(u)) + (\ell_2(\tilde{u}) - \ell_2(u)) \\ &\geq \langle u - \tilde{u}, y(u) - x(\tilde{u})\rangle\ . \end{aligned}$$

Or, par (1) : $u - \tilde{u} = u - y(u) = \lambda^1(u) - \lambda^0(u)$.

$$\begin{aligned} \ell(\tilde{u}) - \ell(u) &\geq \langle \lambda^1(u) - \lambda^0(u), y(u) - x(\tilde{u})\rangle \\ &= \sum_{i=1}^{n} (\lambda_i^1(u) - \lambda_i^0(u))(y_i(u) - x_i(\tilde{u}))\ . \end{aligned}$$

Les indices pour lesquels $y_i(u) \in]0,1[$ n'interviennent pas dans la somme car, alors, $\lambda_i^1(u) = \lambda_i^0(u) = 0$. De même, les indices pour lesquels $y_i(u) = x_i(\tilde{u})$.
Soit

$$I = \left\{ i \in \{1,2,\cdots,n\} \text{ t.q. } \Big(y_i(u) = 1 \text{ et } x_i(\tilde{u}) = 0\Big) \text{ ou } \Big(y_i(u) = 0 \text{ et } x_i(\tilde{u}) = 1\Big) \right\}\ .$$

Alors

$$\ell(\tilde{u}) - \ell(u) \geq \sum_{i \in I} (\lambda_i^1(u) - \lambda_i^0(u))(y_i(u) - x_i(\tilde{u}))\ .$$

$$\begin{array}{rlrcl} \text{Or, si } y_i(u)=0 & \Rightarrow & \lambda_i^1(u)-\lambda_i^0(u) & = & -\lambda_i^0(u) \leq 0 \\ & & \text{et} \quad y_i(u)-x_i(\tilde{u}) & = & -1\,, \\ \text{si } y_i(u)=1 & \Rightarrow & \lambda_i^1(u)-\lambda_i^0(u) & = & \lambda_i^1(u) \geq 0 \\ & & \text{et} \quad y_i(u)-x_i(\tilde{u}) & = & 1\,. \end{array}$$

Par conséquent, tous les termes de la somme sont positifs ou nuls et $\ell(\tilde{u}) \geq \ell(u)$. ∎

Annexe II.4

Théorème 15

L'algorithme de Frank et Wolfe appliqué au primal est une méthode sous-gradient appliquée au dual.

Preuve :
L'algorithme de Frank et Wolfe (voir Section 1) engendre une suite $(w^k)_k \in co(D(P))$ définie par les étapes suivantes :

Initiatilisation : Choisir $w^0 \in D(P)$.
$k := 0$

Etape k : (1) Résoudre le problème linéaire $(PL(w^k))$.

Soit x^k la solution.

(2) $d^k := x^k - w^k$

(3) $w^{k+1} := w^k + t_k d^k$

où t_k minimise la fonction $t \to f(w^k + td^k)$

avec

$$\Big(PL(w^k)\Big) \equiv \min_{x \in D(P)} \langle \nabla f(w^k), x \rangle \,.$$

Or, ici,

$$f(w) = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} w_i^2 \,.$$

Donc

$$\nabla f(w^k) = w^k$$

et

$$\Big(PL(w^k)\Big) \equiv \min_{x \in D(P)} \langle w^k, x \rangle \equiv (P\ w^k\ x)\ .$$

Puisque, par le Corollaire 14, calculer $\ell(w^k)$ revient à résoudre $(P\ w^k\ x)$, il suffirait que $x^k - w^k \in \partial\ell(w^k)$ pour que les points w^k générés par la méthode de Frank et Wolfe coïncident avec les points engendrés par une méthode sous-gradient.
Montrons donc que $x^k - w^k \in \partial\ell(w^k)$.
L'expression du sous-différentiel donnée à la Propriété 3 était

$$\forall\ u \in I\!R^n\ , \qquad \partial\ell(u) = co\,\{z = x - y \text{ avec } x \in \mathcal{O}(P\ u\ x) \text{ et } y \in \mathcal{O}(P\ u\ y)\}\ .$$

Or ici, $u \in \mathcal{O}(P\ u\ y)$. D'où

$$\forall\ u \in I\!R^n\ , \qquad \partial\ell(u) = co\,\{x - u \text{ avec } x \in \mathcal{O}(P\ u\ x)\}\ .$$

Comme

$$x^k \in \mathcal{O}(PL(w^k)) = \mathcal{O}(P\ w^k\ x)\ ,$$

il résulte que

$$x^k - w^k \in \partial\ell(w^k)\ .$$

■

CONCLUSIONS

Dans cette première partie, nous avons développé deux méthodes duales pour résoudre un problème quadratique en variables discrètes propre à l'optimisation de structure.

Pour *la méthode des sous-gradients*, à chaque étape, nous cherchons une direction de plus forte montée dans l'espace dual et effectuons une recherche linéaire le long de cette direction. Grâce à la forme particulière du problème considéré, trouver cette direction de montée revient à résoudre un sous-problème quadratique "*classique*". Cependant, cette méthode est coûteuse et ne fournit qu'une borne inférieure pour la valeur optimale. De plus, sa convergence n'est pas assurée.

Nous avons alors étudié *la méthode de décomposition lagrangienne* qui permet de séparer la fonction objectif non linéaire des contraintes d'intégralité. Elle crée à chaque étape deux problèmes distincts : un problème non linéaire en variables continues et un problème linéaire en variables discrètes. Ce dernier fournit une solution admissible du problème original et donc une borne supérieure à la valeur optimale. Nous disposons ainsi à chaque étape d'une solution admissible et de bornes inférieure et supérieure. Des algorithmes d'élimination du saut de dualité qui utilisent ces bornes inférieure et supérieure accompagnent cette méthode. La technique de décomposition n'a d'intérêt que si on peut résoudre de façon efficace les sous-problèmes engendrés. Le problème non linéaire en variables continues peut être considéré comme relativement facile pour autant que la fonction soit convexe. Quant au problème linéaire en variables entières, des méthodes efficaces sont maintenant connues (entre autres, la méthode "*Branch and Bound*" décrite, par exemple dans [6]). Dans le cas du problème quadratique considéré, le problème non linéaire est directement résolu. La décomposition lagrangienne est ainsi simplifiée.

Pour comparer ces deux méthodes, rappelons qu'un avantage de la décomposition

lagrangienne est de fournir à chaque étape, non seulement une borne inférieure, pareillement à la méthode des sous-gradients, mais en plus une solution admissible et une borne supérieure. En tirant parti de ceci, il est alors possible de réduire le saut de dualité. Alors qu'on n'avait aucun résultat de convergence pour la méthode des sous-gradients, on est assuré ici de la convergence vers une ε–solution optimale en un nombre fini d'itérations.

Partie II

Stratégies d'approximation conservative pour la programmation non linéaire

INTRODUCTION

Dans cette deuxième partie, nous proposons de résoudre un problème non linéaire avec contraintes non linéaires en variables continues, en construisant et résolvant une suite de sous-problèmes qui l'approximent.

Dans le Chapitre 3, nous présentons une *approche théorique unifiée* de la résolution de problèmes non linéaires en nous référant à ce qui est exposé dans [4]. Le type d'approximation utilisé pour la construction des sous-problèmes englobe toutes les approximations convexes conservatives comme SQP , $CONLIN$ et MMA .

Ensuite, au Chapitre 4, nous étudions plus particulièrement la *méthode des asymptotes mobiles*. Plus précisément, en nous inspirant de [9], nous proposons une nouvelle version de MMA ainsi qu'une analyse mathématique de sa convergence. Cette nouvelle variante se caractérise principalement par l'introduction d'une stratégie d'ensemble actif qui rend la méthode plus stable numériquement.

Chapitre 3

APPROXIMATION CONSERVATIVE

Destinée à la résolution de problèmes de programmation non linéaire, l'approche décrite dans ce chapitre se base sur des sous-problèmes construits en effectuant une approximation convexe, dite *conservative*, de la fonction objectif et des contraintes. Elle fait également intervenir une fonction de pénalité exacte non différentiable et une stratégie d'ensemble actif. Cette méthode possède de bonnes propriétés de convergence et s'adapte bien à la résolution de problèmes de conception, où le nombre de variables peut être énorme et où les évaluations des gradients peuvent être très coûteuses comme c'est le cas, par exemple, en optimisation de structure.

Nous exposons ici les principaux résultats théoriques qui mènent à un algorithme général pour lequel les méthodes bien connues telles que SQP , $CONLIN$, MMA sont des cas particuliers.

Dans la première section, nous définissons ce qu'on entend par *approximation conservative* et décrivons les sous-problèmes approximés considérés. Sur base des résultats théoriques établis à la section 2, nous proposons, à la section suivante, un algorithme général de résolution accompagné de la démonstration de sa convergence. Nous terminons en exposant, dans la dernière section, quelques améliorations de l'algorithme présenté.

Section 1 Définition de l'approximation conservative et des sous-problèmes approximés

Le problème d'optimisation non linéaire que nous cherchons à résoudre a la forme générale suivante :

$$(P) \qquad \begin{cases} \min \ f(x) \\ \text{s.c.} \quad g_j(x) \leq 0 \ , \qquad j \in I \ . \end{cases}$$

avec $x \in \mathbb{R}^n$ vecteur des variables;

$f, g_j \ (\ j \in I \ ) : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ fonctions continûment différentiables;

$I = \{1, \cdots, m\}$.

La résolution de (P) est liée à la minimisation de la fonction de pénalité exacte :

$$\theta_c = f + cP \ ,$$

où c est un scalaire strictement positif;

P est défini par $P(x) = \max \ (0, (g_j(x), j \in I))$.

Notons

$$I' = I \cup \{0\} = \{0, 1, \cdots, m\}$$

et considérons la fonction nulle $g_0 : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ telle que

$$g_0(x) = 0 \ , \qquad \forall \ x \in \mathbb{R}^n \ .$$

$P(x)$ peut alors s'écrire

$$P(x) = \max_{j \in I'} \ g_j(x) \ .$$

Nous désignons par (NDP_c) ("Non Differentiable Problem"), le problème non différentiable associé à la fonction de pénalité θ_c :

$$(NDP_c) \qquad \min_{x \in \mathbb{R}^n} \theta_c(x) \ .$$

Points critiques de la fonction de pénalité θ_c

Une notion importante dans ce chapitre est celle de *point critique*. Donnons-en ici une définition.

Soit $x^* \in I\!R^n$.
Notons

$$\mathcal{J}(x^*) = \{j \in I' : g_j(x^*) = P(x^*)\}$$

et désignons par $\theta'_c(x^*; d)$ la dérivée directionnelle de la fonction de pénalité θ_c en x^* le long de $d \in I\!R^n$. On a

$$\theta'_c(x^*; d) = \max_{j \in \mathcal{J}(x^*)} \left(\nabla f(x^*)^T d + c \nabla g_j(x^*)^T d \right) . \tag{1}$$

Nous dirons que x^* est un point critique de θ_c si, pour tout $d \in I\!R^n$, $\theta'_c(x^*; d) \geq 0$.

Les directions de descente de la fonction de pénalité θ_c se trouvent donc uniquement en des points non critiques.

Approximations conservatives

Définissons maintenant le type d'approximation que nous allons utiliser.

Etant donnée $f : I\!R^n \to I\!R$ une fonction différentiable, on appelle *approximation conservative* de f au point $x \in I\!R^n$ toute fonction convexe $\overline{f}(\bullet; x)$ telle que :

$$\begin{cases} \overline{f}(x; x) & = & f(x) , \\ \nabla \overline{f}(x; x) & = & \nabla f(x) , \\ \overline{f}(y; x) & \geq & f(x) + \nabla f(x)^T (y - x) , \qquad \forall\, y \in I\!R^n . \end{cases}$$

Pour des raisons de facilité, nous noterons provisoirement $\overline{f}(y; x)$ par $\overline{f}(y - x)$. Avec cette notation, la définition se reformule en ces termes :

Une *approximation conservative* de la fonction f au point $x \in I\!R^n$ est une fonction convexe $\overline{f}(\bullet)$ vérifiant les trois propriétés suivantes :

$$\begin{cases} \overline{f}(0) & = & f(x) , & (2) \\ \nabla \overline{f}(0) & = & \nabla f(x) , & (3) \\ \overline{f}(d) & \geq & f(x) + \nabla f(x)^T d , \quad \forall\, d \in I\!R^n . & (4) \end{cases}$$

Les approximations linéaires, $CONLIN$ et MMA sont des cas particuliers d'approximation conservative.

Propriétés de l'approximation conservative :

(1) L'approximation conservative de f au point x étant convexe, si nous supposons en plus que $\overline{f}$ est deux fois continûment différentiable, sa matrice hessienne doit être semi-définie positive.

(2) Dans le cas où $\overline{f}$ est deux fois continûment différentiable, nous pouvons aussi montrer qu'il existe $\beta, \eta \in]0,1[$ tels que

$$\nabla f(x)^T d = \nabla \overline{f}(d)^T d - \frac{1}{2} d^T \nabla^2 \overline{f}(\eta d) d - \frac{1}{2} d^T \nabla^2 \overline{f}(\beta d) d \, . \tag{5}$$

En effet, en utilisant la formule de Taylor, on peut dire que

$$\exists\, \eta \in]0,1[\quad \text{t.q.} \quad \overline{f}(d) = \overline{f}(0) + \nabla \overline{f}(0)^T d + \frac{1}{2} d^T \nabla^2 \overline{f}(\eta d) d \, ,$$

$$\exists\, \beta \in]0,1[\quad \text{t.q.} \quad \overline{f}(0) = \overline{f}(d) - \nabla \overline{f}(d)^T d + \frac{1}{2} d^T \nabla^2 \overline{f}(\beta d) d \, .$$

Ces deux équations s'écrivent encore, grâce à (2) et (3)

$$\exists\, \eta \in]0,1[\quad \text{t.q.} \quad \overline{f}(d) = f(x) + \nabla f(x)^T d + \frac{1}{2} d^T \nabla^2 \overline{f}(\eta d) d \, , \tag{6}$$

$$\exists\, \beta \in]0,1[\quad \text{t.q.} \quad f(x) = \overline{f}(d) - \nabla \overline{f}(d)^T d + \frac{1}{2} d^T \nabla^2 \overline{f}(\beta d) d \, . \tag{7}$$

Et en additionnant (6) et (7), on obtient bien (5).

Nous avons également besoin du concept d'approximation strictement conservative.

Une approximation conservative $\overline{f}$ au point x est *strictement conservative* si $\overline{f}$ est strictement convexe et donc, en particulier, on aura

$$\overline{f}(d) > f(x) + \nabla f(x)^T d \, , \qquad \forall\, d \in I\!R^n \, , \; d \neq 0 \, . \tag{8}$$

Dans ce cas, si $\overline{f}$ est en plus deux fois continûment différentiable, sa matrice hessienne est alors définie positive.

Sous-problèmes approximés

Nous allons utiliser l'approximation conservative pour définir les sous-problèmes considérés dans ce chapitre.

Etant donné un problème non différentiable du type (NDP_c) , nous désignons par (CAP_c) ("*Conservative Approximate Problem*") le sous-problème approximé associé :

$$(CAP_c(x,\mathcal{J})) \qquad \begin{cases} \min\limits_{d,s} \ \overline{f}(d) + cs \\ \text{s.c. } \overline{g}_j(d) \ \leq \ s \ , \quad j \in \mathcal{J} \ , \\ \qquad\qquad s \ \geq \ 0 \ , \end{cases}$$

où $\overline{f}$ est une approximation strictement conservative de f en x ,

$\overline{g}_j$ est une approximation conservative de g_j en x ,

$c \quad > 0$,

$\mathcal{J}$ est tel que $\mathcal{J}(x) \subseteq \mathcal{J} \cup \{0\} \subseteq I'$.

En posant $\mathcal{J}' = \mathcal{J} \cup \{0\}$, on obtient une autre façon d'écrire $(CAP_c(x,\mathcal{J}))$:

$$(CAP_c(x,\mathcal{J})) \qquad \begin{cases} \min\limits_{d,s} \ \overline{f}(d) + cs \\ \text{s.c. } \overline{g}_j(d) \ \leq \ s \ , \quad j \in \mathcal{J}' \ . \end{cases}$$

C'est cette dernière formulation que nous utiliserons en pratique.

Le sous-problème approximé associé à (P) peut, quant à lui, se formuler de la façon suivante :

$$(CAP_0(x,\mathcal{J})) \qquad \begin{cases} \min\limits_{d} \ \overline{f}(d) \\ \text{s.c. } \overline{g}_j(d) \ \leq \ 0 \ , \quad j \in \mathcal{J} \ . \end{cases}$$

Section 2 Bases théoriques

Notre but étant de résoudre le problème non linéaire (P) , la série de propositions qui suit nous permettra de ramener la résolution de ce problème à la recherche de points critiques de la fonction de pénalité exacte θ_c . Elles indiquent également le chemin à suivre pour l'élaboration d'un algorithme de recherche de ces points critiques.

Nous renvoyons à l'Annexe III pour les démonstrations des propositions de cette section.

Proposition 1

Pour tout $x \in \mathbb{R}^n$, *pour tout* $d \in \mathbb{R}^n$, *pour tout* $\alpha > 0$,

$$\theta_c(x + \alpha d) - \theta_c(x) = \alpha\ \theta_c'(x; d) + \mathcal{O}(\alpha)$$

où $\lim\limits_{\alpha \to 0^+} \frac{\mathcal{O}(\alpha)}{\alpha} = 0$.

Une conséquence directe de cette proposition est que :

Si $\theta_c'(x; d) < 0$,
Alors il existe $\overline{\alpha} > 0$ *tel que*

$$\theta_c(x + \alpha d) < \theta_c(x) , \qquad \forall\ \alpha \in]0, \overline{\alpha}] .$$

Proposition 2

Soient $x \in \mathbb{R}^n$ *et* $\mathcal{J}$ *tels que* $\mathcal{J}(x) \subseteq \mathcal{J}' \subseteq I'$.
Si (d, s) *est la solution de* $(CAP_c(x, \mathcal{J}))$ *et* $d \neq 0$,
Alors d *est une direction de descente de* θ_c *au point* x .

Note : Si les hypothèses de la Proposition 2 sont vérifiées, la démonstration nous révèle que

$$\theta_c'(x; d) \leq -d^T \left\{ \frac{1}{2} \left(\nabla^2 \overline{f}(\eta d) + \nabla^2 \overline{f}(\beta d) + \sum_{j \in \mathcal{J}'} \mu_j \nabla^2 \overline{g}_j(\beta_j d) \right) \right\} d .$$

En posant

$$H(d) = \frac{1}{2} \left(\nabla^2 \overline{f}(\eta d) + \nabla^2 \overline{f}(\beta d) + \sum_{j \in \mathcal{J}'} \mu_j \nabla^2 \overline{g}_j(\beta_j d) \right) , \tag{18}$$

on obtient

$$-\theta_c'(x; d) \geq d^T\ H(d)\ d .$$

En conclusion,

Soient $x \in I\!R^n$ et $\mathcal{J}$ tels que $\mathcal{J}(x) \subseteq \mathcal{J}' \subseteq I'$.
Si (d, s) *est solution de* $(CAP_c(x, \mathcal{J}))$ *et* $d \neq 0$,
Alors

$$-\theta_c'(x; d) \geq d^T \; H(d) \; d \; . \tag{19}$$

Remarquons que la matrice définie positive $H(d)$ dépend de d ainsi que des multiplicateurs lagrangiens μ_j associés.

Proposition 3

Si x^* *est un point critique de* θ_c ,
Alors $\Big(CAP_c(x^*, \mathcal{J})\Big)$ *a* $\Big(d = 0, s = P(x^*)\Big)$ *comme solution,*
avec $\mathcal{J}(x^*) \subseteq \mathcal{J}' \subseteq I'$.

Proposition 4

Si $\Big(d = 0 \; , \; s = P(x^*)\Big)$ *est la solution de* $\Big(CAP_c(x^*, \mathcal{J})\Big)$
avec $\mathcal{J}(x^*) \subseteq \mathcal{J}' \subseteq I'$,
Alors x^* *est un point critique de* θ_c .

Proposition 5

Si $\Big(d, (\mu_j, j \in \mathcal{J})\Big)$ *est un point de Kuhn-Tucker de* $(CAP_0(x, \mathcal{J}))$ *et*
$c \geq \sum\limits_{j \in \mathcal{J}} \mu_j$,
Alors $\Big(d, s = 0, (\overline{\mu}_j, j \in \mathcal{J}')\Big)$ *est un point de Kuhn-Tucker de* $(CAP_c(x, \mathcal{J}))$

avec $\overline{\mu}_j = \mu_j \; , \quad \forall \; j \in \mathcal{J}$,

$$\overline{\mu}_0 = c - \sum_{j \in \mathcal{J}} \mu_j \; .$$

Ainsi, lorsqu'on connaît la solution de $(CAP_0(x, \mathcal{J}))$, on obtient immédiatement la solution de $(CAP_c(x, \mathcal{J}))$ pour c assez grand.

Proposition 6

Si $(x^*, (\mu_j^*, j \in I))$ *est un point de Kuhn-Tucker de* (P) ,
Alors $\Big(d^* = 0, (\mu_j^*, j \in \mathcal{J})\Big)$ *est un point de Kuhn-Tucker de* $(CAP_0(x^*, \mathcal{J}))$
pour tout $\mathcal{J}$ *tel que* $\mathcal{J}(x^*) \subseteq \mathcal{J}' \subseteq I'$.

Nous pouvons maintenant déduire des propositions précédentes le résultat qui suit :

Théorème 1

Si $\left(x^*, (\mu_j^*, j \in I)\right)$ *est un point de Kuhn-Tucker de* (P) ,
Alors x^* *est un point critique de* θ_c *pour tout* c *assez grand.*

En effet, si $\left(x^*, (\mu_j^*, j \in I)\right)$ est un point de Kuhn-Tucker de (P) ,

- *par la Proposition 6* : $\left(d^* = 0, (\mu_j^*, j \in \mathcal{J})\right)$ est un point de Kuhn-Tucker de $(CAP_0(x^*, \mathcal{J}))$ pour tout $\mathcal{J}$ tel que $\mathcal{J}(x^*) \subseteq \mathcal{J}' \subseteq I'$.

- *par la Proposition 5* : à condition que $c \geq \sum_{j \in \mathcal{J}} \mu_j^*$, $\left(d^* = 0, s^* = 0, (\overline{\mu}_j^*, j \in \mathcal{J}')\right)$ est un point de Kuhn-Tucker de $(CAP_c(x^*, \mathcal{J}))$ pour tout $\mathcal{J}$ tel que $\mathcal{J}(x^*) \subseteq \mathcal{J}' \subseteq I'$.

- *et par la Proposition 4* : x^* est un point critique de θ_c .

Nous savons à présent que tout point de Kuhn-Tucker de (P) donne lieu à un point critique de θ_c pour c assez grand. Cependant, puisque notre but est de résoudre (P) , c'est surtout la réciproque qui nous intéresse. Bien qu'il soit possible, en général, que les points critiques de θ_c ne correspondent pas à des points de Kuhn-Tucker de (P) (voir [1]), le théorème suivant met en évidence une situation où ce n'est pas le cas.

Théorème 2

Soit $X \subseteq \mathbb{R}^n$ *un compact tel que, pour tout* $x \in X$:
$\{\nabla g_j(x) : j \in \mathcal{J}(x) \ , \ j \neq 0\}$ *est linéairement indépendant,*

Alors il existe $c^* \geq 0$ *tel que, pour tout* $c > c^*$,

Si x^* *est un point critique de* θ_c *et* $x^* \in X$,

Alors il existe $\mu^* \in \mathbb{R}^m$ *tel que* (x^*, μ^*) *est un point de Kuhn-Tucker de* (P) .

De cette façon, nous sommes amenés à rechercher les points critiques de θ_c pour résoudre (P) .

Section 3 Algorithme théorique

Sur base des résultats établis à la section précédente, nous allons construire un algorithme permettant de résoudre (P) .

Rappelons que, sous certaines conditions de qualification des contraintes, la résolution de (P) peut se ramener à chercher les points critiques de θ_c (voir Théorème 2). Se basant sur cette idée, l'algorithme proposé dans cette section s'emploie à trouver ces points critiques. Il utilise la solution d'un sous-problème de type CAP comme direction de descente de la fonction de pénalité θ_c (cf. Proposition 2) et effectue une recherche linéaire dans cette direction.

L'itération de base est donnée par :

$$x^{k+1} = x^k + \alpha_k d^k$$

où

(1) $d^k \in I\!R^n$ est une direction obtenue en résolvant $(CAP_c(x^k, \mathcal{J}_k))$:

$$(CAP_c(x^k, \mathcal{J}_k)) \qquad \begin{cases} \min\limits_{d,s} \ \overline{f}(d) + cs \\ \text{s.c. } \overline{g}_j(d) \ \leq \ s \ , \quad j \in \mathcal{J}_k' \ . \end{cases}$$

$\mathcal{J}_k$ doit satisfaire $\mathcal{J}_\delta(x^k) \subseteq \mathcal{J}_k' \subseteq I'$ avec $\mathcal{J}_\delta(x^k) = \left\{ j \in I' : g_j(x^k) \geq P(x^k) - \delta \right\}$, $\delta > 0$.

(2) $\alpha_k \in I\!R_0^+$ est la longueur du pas obtenue par la règle d'Armijo :

Choisissons les scalaires s, τ, σ tels que $s > 0$, $\tau \in]0,1[$ et $\sigma \in \left]0, \frac{1}{2}\right[$; α_k est alors défini par $\alpha_k = \tau^{m_k} s$ où m_k est le plus petit entier m pour lequel

$$\theta_c(x^k) - \theta_c(x^k + \tau^m s d^k) \geq \sigma \tau^m s {d^k}^T H(d^k) d^k \tag{56}$$

avec

$$H(d^k) = \frac{1}{2} \left\{ \nabla^2 \overline{f}(\eta d^k) + \nabla^2 \overline{f}(\beta d^k) + \sum_{j \in \mathcal{J}_k'} \mu_j^k \nabla^2 \overline{g}_j(\beta_j d^k) \right\} \tag{57}$$

où $\eta, \beta, \beta_j \in]0,1[$, $j \in \mathcal{J}_k'$,

μ_j^k ($j \in \mathcal{J}_k'$) sont les multiplicateurs de Lagrange associés à $(CAP_c(x^k, \mathcal{J}_k))$.

(La matrice $H(d)$ a été définie en (18)).

Remarque sur la loi d'Armijo :

La Proposition 1 permet de dire que, pour tout $\alpha > 0$,

$$\theta_c(x^k) - \theta_c(x^k + \alpha d^k) = -\alpha\theta_c'(x^k; d^k) + \mathcal{O}(\alpha)$$

où $\lim_{\alpha \to 0+} \frac{\mathcal{O}(\alpha)}{\alpha} = 0$.

Et puisqu'on a vu en (19) que

$$-\theta_c'(x^k; d^k) \geq {d^k}^T H(d^k) d^k ,$$

on obtient, pour tout $\alpha > 0$,

$$\theta_c(x^k) - \theta_c(x^k + \alpha d^k) \geq \alpha {d^k}^T H(d^k) d^k + \mathcal{O}(\alpha) . \tag{58}$$

Donc,

Si il existe $\overline{\alpha} > 0$ tel que, pour tout $\alpha \in]0, \overline{\alpha}]$,

$$(1 - \sigma)\alpha {d^k}^T H(d^k) d^k + \mathcal{O}(\alpha) \geq 0 ,$$

Alors, en utilisant (58), il s'ensuit que

$$\theta_c(x^k) - \theta_c(x^k + \alpha d^k) \geq \sigma\alpha {d^k}^T H(d^k) d^k , \qquad \forall\ \alpha \in]0, \overline{\alpha}] .$$

Par conséquent, il existe bien un entier m tel que (56) soit satisfait.

La Proposition 4 montre de façon évidente que l'algorithme doit s'arrêter lorsque $d^k = 0$.

Attachons-nous maintenant à montrer que l'algorithme ainsi construit converge vers un point critique de θ_c .

Théorème 3

Soit $(x^k)_{k \in K}$ la suite de points engendrée par l'algorithme proposé.
Si il existe $\gamma > 0$ et $\Gamma > 0$ tels que

$$\gamma \|z\|^2 \leq z^T H(d^k) z \leq \Gamma \|z\|^2 , \qquad \forall\ z \in I\!R^n\ ,\ \forall\ k \in K , \tag{59}$$

Alors, toute valeur d'adhérence de (x^k) est un point critique de θ_c .

L'hypothèse (59) impose que la suite de matrices $(H(d^k))_{k \in K}$ est définie positive et uniformément bornée.

Preuve :
Soit x une valeur d'adhérence de la suite (x^k) générée par l'algorithme.
Supposons, par l'absurde, que x n'est pas un point critique de θ_c .
Sans perdre de généralité, nous supposerons que $\mathcal{J}_\delta(x^k) \subseteq \mathcal{J}' \subseteq I'$ avec $\mathcal{J}_k = \mathcal{J}$ pour tout k .
Puisqu'à chaque itération, on prend $x^{k+1} = x^k + \alpha_k d^k$ avec d^k solution de $(CAP_c(x^k, \mathcal{J}_k))$ et donc direction de descente de θ_c (voir Proposition 2), la suite $(\theta_c(x^k))_{k\in K}$ est décroissante. D'où

$$\begin{cases} (\theta_c(x^k))_{k\in K} & \longrightarrow \ \theta_c(x) \ , \\ \left(\theta_c(x^k) - \theta_c(x^{k+1})\right)_{k\in K} & \longrightarrow \ 0 \ . \end{cases} \tag{60}$$

α_k étant choisi par la règle d'Armijo de sorte que $\theta_c(x^k) - \theta_c(x^k + \alpha_k d^k) \geq \sigma \alpha_k d^{k^T} H(d^k) d^k$, il suit de (60) que

$$\left(\alpha_k d^{k^T} H(d^k) d^k\right)_{k\in K} \longrightarrow 0 \ . \tag{61}$$

Remarquons encore que, pour tout $k \in K$, d^k est, par construction de l'algorithme, la solution optimale de $(CAP_c(x^k, \mathcal{J}))$. Nous pouvons ainsi écrire les conditions de Kuhn-Tucker :

$\exists\ \mu^k \in I\!R^{\#\mathcal{J}'}$ tel que

$$\begin{cases} \nabla \overline{f}(d^k) + \sum\limits_{j\in\mathcal{J}'} \mu_j^k \nabla \overline{g}_j(d^k) = 0 \ , & & (62) \\ c - \sum\limits_{j\in\mathcal{J}'} \mu_j^k = 0 \ , & & (63) \\ \mu_j^k \geq 0 \ , & \forall\ j \in \mathcal{J}' \ , & (64) \\ \mu_j^k (\overline{g}_j(d^k) - s^k) = 0 \ , & \forall\ j \in \mathcal{J}' \ , & (65) \\ \overline{g}_j(d^k) \leq s^k \ , & \forall\ j \in \mathcal{J}' \ , & (66) \\ s^k \geq 0 \ , & & (67) \\ \text{avec } s^k = \max\limits_{j\in\mathcal{J}'} \overline{g}_j(d^k) \ . & & (68) \end{cases}$$

Les équations (63) et (64) indiquent que la suite $(\mu_j^k)_{k\in K}$ est bornée. Sans perdre de généralité, nous pouvons donc supposer que

$$(\mu_j^k)_{k\in K} \longrightarrow \mu_j \ , \qquad \forall\ j \in \mathcal{J}' \ . \tag{69}$$

En utilisant l'hypothèse (59), on peut aussi supposer sans perdre de généralité que

$$(H(d^k))_{k\in K} \longrightarrow H \qquad \text{avec } H \text{ matrice définie positive.} \tag{70}$$

En (61), nous avions obtenu que $\left(\alpha_k {d^k}^T H(d^k) d^k\right)_{k\in K} \longrightarrow 0$.
Il y a donc deux possibilités

$$\text{(A)} \quad \liminf_{k\to\infty}(\|d^k\|) = 0 \,, \tag{71}$$

$$\text{(B)} \quad \liminf_{k\to\infty} \alpha_k = 0 \qquad \text{et} \qquad \liminf_{k\to\infty}(\|d^k\|) > 0 \,. \tag{72}$$

(A) Si on a (71), nous pouvons alors supposer sans perdre de généralité que

$$(d_k)_{k\in K} \longrightarrow 0 \,. \tag{73}$$

Par (69) et (73), en passant à la limite dans les relations (62)–(68), nous obtenons

$$\begin{cases} \nabla\overline{f}(0) + \sum\limits_{j\in\mathcal{J}'} \mu_j \nabla\overline{g}_j(0) = 0 \,, & \\ c - \sum\limits_{j\in\mathcal{J}'} \mu_j = 0 \,, & \\ \mu_j \geq 0 \,, & \forall\, j \in \mathcal{J}' \,, \\ \mu_j(\overline{g}_j(0) - P(x)) = 0 \,, & \forall\, j \in \mathcal{J}' \,, \\ \overline{g}_j(0) \leq P(x) \,, & \forall\, j \in \mathcal{J}' \,. \end{cases}$$

Ceci exprime que $(d = 0 \ , \ s = P(x))$ est solution de $(CAP_c(x, \mathcal{J}))$ avec $\mathcal{J}(x) \subseteq \mathcal{J}_\delta(x) \subseteq \mathcal{J}' \subseteq I'$.
Par la Proposition 4, nous déduisons alors que x est un point critique de θ_c , ce qui contredit l'hypothèse faite précédemment.

(B) Si (72) est vérifiée, on peut alors supposer sans perdre de généralité que

$$(\alpha_k)_{k\in K} \longrightarrow 0 \,. \tag{74}$$

Puisque la suite $(\alpha_k)_{k\in K}$ converge vers 0 , la définition de la règle d'Armijo indique que les pas initiaux seront au moins réduits une fois à partir d'un certain indice $\overline{k}$.
Ceci signifie que, pour tout $k \in K$ tel que $k \geq \overline{k}$,

$$\theta_c(x^k) - \theta_c(x^k + \overline{\alpha}_k d^k) < \sigma \overline{\alpha}_k {d^k}^T H(d^k) d^k \tag{75}$$

où $\overline{\alpha}_k = \frac{\alpha_k}{\tau}$.

Par ailleurs, on peut affirmer, grâce à la Proposition 1, que

$$\theta_c(x^k) - \theta_c(x^k + \overline{\alpha}_k d^k) = -\overline{\alpha}_k \theta_c'(x^k; d^k) + \mathcal{O}(\overline{\alpha}_k) \tag{76}$$

où

$$\lim_{\overline{\alpha}_k \to 0} \frac{\mathcal{O}(\overline{\alpha}_k)}{\overline{\alpha}_k} = 0 \qquad \text{ou} \qquad \lim_{k \to \infty} \frac{\mathcal{O}(\overline{\alpha}_k)}{\overline{\alpha}_k} = 0 \, .$$

De plus, par (19), puisque d^k est solution de $(CAP_c(x^k, \mathcal{J}))$,

$$-\theta_c'(x^k; d^k) \geq {d^k}^T H(d^k) d^k \, . \tag{77}$$

En se servant de (76) et (77) , on obtient

$$\theta_c(x^k) - \theta_c(x^k + \overline{\alpha}_k d^k) \geq \overline{\alpha}_k {d^k}^T H(d^k) d^k + \mathcal{O}(\overline{\alpha}_k) \tag{78}$$

où

$$\lim_{k \to \infty} \frac{\mathcal{O}(\overline{\alpha}_k)}{\overline{\alpha}_k} = 0 \, .$$

Combinant (75) et (78), on déduit :

$$\overline{\alpha}_k {d^k}^T H(d^k) d^k + \mathcal{O}(\overline{\alpha}_k) < \sigma \overline{\alpha}_k {d^k}^T H(d^k) d^k$$

ou

$$(1 - \sigma) {d^k}^T H(d^k) d^k + \frac{\mathcal{O}(\overline{\alpha}_k)}{\overline{\alpha}_k} < 0 \tag{79}$$

où

$$\lim_{k \to \infty} \frac{\mathcal{O}(\overline{\alpha}_k)}{\overline{\alpha}_k} = 0 \, .$$

L'équation (79) nous permet d'affirmer que la suite (d^k) est bornée. En effet, si par l'absurde, on suppose que (d^k) n'est pas bornée, alors il existe une sous-suite encore notée (d^k) telle que $\|d^k\| \to +\infty$. Cependant, dans ce cas, comme par (59), pour tout k , $\gamma \|d^k\|^2 \leq {d^k}^T H(d^k) d^k$, le membre de gauche de (79) tend vers $+\infty$, ce qui n'est pas possible.

Sans perdre de généralité, nous pouvons alors supposer que

$$(d^k)_{k \in K} \longrightarrow d \neq 0 \tag{80}$$

où d est un vecteur qui ne peut être nul par (72).

En considérant (70) et (80) , le passage à la limite dans (79) donne

$$(1 - \sigma) d^T H d < 0 \, .$$

On aboutit ainsi à une absurdité puisque H est une matrice définie positive, $d \neq 0$ et $\sigma \in \left]0, \frac{1}{2}\right[$. ∎

En conclusion, pour résoudre le problème non linéaire (P) , nous avons construit un algorithme théorique permettant de trouver les points critiques de la fonction de pénalité exacte associée à (P) . A chaque étape de cet algorithme, nous résolvons un sous-problème dont la solution fournit une direction de descente pour la fonction de pénalité et nous effectuons ensuite une recherche linéaire le long de cette direction.

Insistons sur le fait que la convergence de cet algorithme a été démontrée dans le cas général où une approximation conservative de la fonction objectif et des contraintes a été réalisée. Ceci se particularise donc directement aux méthodes du type SQP , MMA , $CONLIN$.

Section 4 Remarques

Nous formulons ici quelques commentaires au sujet de l'algorithme présenté à la section précédente. Ces considérations conduiront à un nouvel algorithme.

L'algorithme exposé à la Section 3 permet de trouver les points critiques de la fonction de pénalité θ_c . Grâce au Théorème 2, nous savons que ces points critiques sont les solutions de (P) à condition que c soit assez grand. La difficulté est que nous ne connaissons pas, jusqu'à présent, une valeur adéquate pour c .

Dans ces circonstances, une approche possible consiste à choisir une valeur initiale c_0 pour c et à augmenter cette valeur à chaque itération k si l'algorithme indique que la valeur courante c_k de c n'est pas adéquate.

Une borne inférieure pour une valeur appropriée de c_k est $\sum_{j \in \mathcal{J}_k} \mu_j^k$ où $\{\mu_j^k, j \in \mathcal{J}_k\}$ sont les multiplicateurs de Lagrange obtenus en résolvant $(CAP_0(x^k, \mathcal{J}_k))$.

En même temps, nous savons, par la Proposition 5, que

Si $c_k \geq \sum_{j \in \mathcal{J}_k} \mu_j^k$,
Alors le problème $(CAP_0(x^k, \mathcal{J}_k))$ *est équivalent au problème* $(CAP_{c_k}(x^k, \mathcal{J}_k))$

en ce sens que, si d^k est solution optimale de $(CAP_0(x^k, \mathcal{J}_k))$, $(d^k, 0)$ sera solution optimale de $(CAP_{c_k}(x^k, \mathcal{J}_k))$.

Par conséquent, en résolvant $(CAP_0(x^k, \mathcal{J}_k))$, non seulement on résout $(CAP_{c_k}(x^k, \mathcal{J}_k))$ comme il est demandé dans l'algorithme de la Section 3, mais nous obtenons simultanément une borne inférieure pour une valeur de c_k convenable.

A la suite de ces remarques, nous proposons l'algorithme suivant :

Choisir $x^0 \in I\!R^n$, $c_0 > 0$.
L'itération k est donnée par :

$$\begin{aligned} x^{k+1} &= x^k + \alpha_k d^k \ , \\ c_{k+1} &= \overline{c}_k \ , \end{aligned}$$

où

- α_k est obtenu par la loi d'Armijo avec c remplacé par $\overline{c}_k$.
- d^k et $\overline{c}_k$ dépendent de x^k , c_k et $\mathcal{J}_k$ qui satisfont $\mathcal{J}_\delta(x^k) \subseteq \mathcal{J}'_k \subseteq I'$ où $\mathcal{J}_\delta(x^k) = \{j \in I' : g_j(x^k) \geq P(x^k) - \delta\}$, $\delta > 0$.

d^k et $\overline{c}_k$ s'obtiennent de la façon suivante :

Si $(CAP_0(x^k, \mathcal{J}_k))$ *est admissible,*
Alors choisir

- d^k *la solution de* $(CAP_0(x^k, \mathcal{J}_k))$, *et*
- $\overline{c}_k = \begin{cases} \sum\limits_{j \in \mathcal{J}_k} \mu_j^k + \varepsilon \ , & si\ c_k < \sum\limits_{j \in \mathcal{J}_k} \mu_j^k \ , \\ c_k & sinon, \end{cases}$

  où $\{\mu_j^k, j \in \mathcal{J}_k\}$ *sont les multiplicateurs de Lagrange pour* $(CAP_0(x^k, \mathcal{J}_k))$,

  $\varepsilon > 0$ *fixé.*

Sinon choisir

- d^k *tel que* (d^k, s^k) *est solution de* $(CAP_{c_k}(x^k, \mathcal{J}_k))$ *; et*
- $\overline{c}_k = c_k$.

Pour clore cette section, répétons que l'algorithme proposé est valable pour tous les types d'approximations conservatives (approximation linéaire, $CONLIN$, MMA, SQP, ...). Il s'agit de choisir le type d'approximation qui convient le mieux au problème considéré.

Annexe III

Annexe III.1 Preuve de la Proposition 1

Proposition 1

Pour tout $x \in \mathbb{R}^n$, *pour tout* $d \in \mathbb{R}^n$, *pour tout* $\alpha > 0$,

$$\theta_c(x + \alpha d) - \theta_c(x) = \alpha\ \theta_c'(x; d) + \mathcal{O}(\alpha)$$

où $\lim\limits_{\alpha \to 0^+} \frac{\mathcal{O}(\alpha)}{\alpha} = 0$.

Preuve :

Soient $x \in \mathbb{R}^n$, $d \in \mathbb{R}^n$, $\alpha > 0$ quelconques.

On a, pour tout $j \in \mathcal{J}(x)$:

$$f(x + \alpha d) + c g_j(x + \alpha d) = \Big(f(x) + \alpha \nabla f(x)^T d\Big) + c\Big(g_j(x) + \alpha \nabla g_j(x)^T d\Big) + \mathcal{O}_j(\alpha)$$

où

$$\lim_{\alpha \to 0^+} \frac{\mathcal{O}_j(\alpha)}{\alpha} = 0 .$$

D'où

$$\begin{aligned} & f(x + \alpha d) + c \max_{j \in \mathcal{J}(x)} (g_j(x + \alpha d)) \\ &= f(x) + \alpha \nabla f(x)^T d + c \max_{j \in \mathcal{J}(x)} \Big(g_j(x) + \alpha \nabla g_j(x)^T d\Big) + \mathcal{O}(\alpha) \\ &= f(x) + c\ P(x) + \alpha \left(\nabla f(x)^T d + c \max_{j \in \mathcal{J}(x)} (\nabla g_j(x)^T d)\right) + \mathcal{O}(\alpha) \end{aligned}$$

où $\lim_{\alpha \to 0^+} \frac{\mathcal{O}(\alpha)}{\alpha} = 0$.
Et par (1),

$$f(x+\alpha d) + c \max_{j \in \mathcal{J}(x)} (g_j(x+\alpha d)) = f(x) + cP(x) + \alpha \theta_c'(x;d) + \mathcal{O}(\alpha) .$$

Par ailleurs, pour tout α suffisamment petit,

$$\begin{aligned} \max_{j \in \mathcal{J}(x)} \Big(g_j(x+\alpha d) \Big) &= \max_{j=0,1,\cdots,m} \Big(g_j(x+\alpha d) \Big) \\ &= P(x+\alpha d) . \end{aligned}$$

Donc, pour α petit, en combinant les deux relations précédentes,

$$f(x+\alpha d) + cP(x+\alpha d) = f(x) + cP(x) + \alpha \theta_c'(x;d) + \mathcal{O}(\alpha) .$$

■

Annexe III.2 Preuve de la Proposition 2

Proposition 2

Soient $x \in \mathbb{R}^n$ et $\mathcal{J}$ tels que $\mathcal{J}(x) \subseteq \mathcal{J}' \subseteq I'$.
Si (d,s) est la solution de $(CAP_c(x,\mathcal{J}))$ et $d \neq 0$,
Alors d est une direction de descente de θ_c au point x .

Preuve :
Pour montrer que d est une direction de descente de θ_c au point x , il suffit de voir que la dérivée directionnelle de θ_c en x dans la direction d est strictement négative. Rappelons que (voir (1)) :

$$\theta_c'(x;d) = \max_{j \in \mathcal{J}(x)} \Big(\nabla f(x)^T d + c \nabla g_j(x)^T d \Big) .$$

A) (d,s) étant solution de $(CAP_c(x,\mathcal{J}))$,

$$\overline{g}_j(d) \leq s , \qquad \forall\, j \in \mathcal{J}' ;$$

or, par (4),

$$\overline{g}_j(d) \geq g_j(x) + \nabla g_j(x)^T d , \qquad \forall\, j \in \mathcal{J}' .$$

Donc,

$$s \geq \overline{g}_j(d) \geq g_j(x) + \nabla g_j(x)^T d \,, \qquad \forall\, j \in \mathcal{J}' \,,$$

et en particulier,

$$s \geq P(x) + \nabla g_j(x)^T d \,, \qquad \forall\, j \in \mathcal{J}(x) \,.$$

D'où,

$$\begin{aligned} \theta'_c(x;d) &= \max_{j \in \mathcal{J}(x)} \left(\nabla f(x)^T d + c \nabla g_j(x)^T d \right) \\ &\leq \nabla f(x)^T d + c(s - P(x)) \,. \end{aligned} \tag{9}$$

B) Comme (d, s) est solution de $(CAP_c(x, \mathcal{J}))$ (problème convexe), les conditions de Kuhn-Tucker s'écrivent :

$\exists\, \mu \in I\!R^{\#\mathcal{J}'}$ tel que

$$\begin{cases} \nabla \overline{f}(d) + \sum\limits_{j \in \mathcal{J}'} \mu_j \nabla \overline{g}_j(d) = 0 \,, & (10) \\ c - \sum\limits_{j \in \mathcal{J}'} \mu_j = 0 \,, & (11) \\ \mu_j \geq 0 \,, \qquad \forall\, j \in \mathcal{J}' \,, & (12) \\ \mu_j (\overline{g}_j(d) - s) = 0 \,, \qquad \forall\, j \in \mathcal{J}' \,, & (13) \\ \overline{g}_j(d) \leq s \,, \qquad \forall\, j \in \mathcal{J}' \,. & (14) \end{cases}$$

De (10), il s'ensuit que

$$\nabla \overline{f}(d)^T d + \sum_{j \in \mathcal{J}'} \mu_j \nabla \overline{g}_j(d)^T d = 0 \,.$$

Et puisque, par (5),

$$\nabla \overline{f}(d)^T d = \nabla f(x)^T d + \frac{1}{2} d^T \nabla^2 \overline{f}(\eta d) d + \frac{1}{2} d^T \nabla^2 \overline{f}(\beta d) d$$

où $\eta, \beta \in]0,1[$

$$\nabla \overline{g}_j(d)^T d = \nabla g_j(x)^T d + \frac{1}{2} d^T \nabla^2 \overline{g}_j(\eta_j d) d + \frac{1}{2} d^T \nabla^2 \overline{g}_j(\beta_j d) d \,, \ \forall\, j \in \mathcal{J}'$$

où $\eta_j, \beta_j \in]0,1[$ pour tout $j \in \mathcal{J}'$.

On obtient

$$\nabla f(x)^T d + \frac{1}{2} d^T \nabla^2 \overline{f}(\eta d) d + \frac{1}{2} d^T \nabla^2 \overline{f}(\beta d) d$$
$$+ \sum_{j \in \mathcal{J}'} \mu_j \Big\{ \nabla g_j(x)^T d + \frac{1}{2} d^T \nabla^2 \overline{g}_j(\eta_j d) d$$
$$+ \frac{1}{2} d^T \nabla^2 \overline{g}_j(\beta_j d) d \Big\} = 0 \qquad (15)$$

où $\eta, \beta, \eta_j, \beta_j \in]0,1[$ pour tout $j \in \mathcal{J}'$.

Par ailleurs, on tire de (13) que

$$\sum_{j \in \mathcal{J}'} \mu_j \big(\overline{g}_j(d) - s \big) = 0 \, .$$

Et comme, par (6),

$$\overline{g}_j(d) = g_j(x) + \nabla g_j(x)^T d + \frac{1}{2} d^T \nabla^2 \overline{g}_j(\eta_j d) d \, , \qquad \forall \, j \in \mathcal{J}'$$

où $0 < \eta_j < 1$ pour tout $j \in \mathcal{J}'$.

On a

$$\sum_{j \in \mathcal{J}'} \mu_j \big(g_j(x) + \nabla g_j(x)^T d + \frac{1}{2} d^T \nabla^2 \overline{g}_j(\eta_j d) d - s \big) = 0$$

ou encore

$$\sum_{j \in \mathcal{J}'} \mu_j \big(\nabla g_j(x)^T d + \frac{1}{2} d^T \nabla^2 \overline{g}_j(\eta_j d) d \big) = \sum_{j \in \mathcal{J}'} \mu_j (s - g_j(x)) \, .$$

Or, par définition de $P(x)$,

$$g_j(x) \leq P(x) \, , \qquad \forall \, j \in \mathcal{J}'$$

et par (11),

$$c = \sum_{j \in \mathcal{J}'} \mu_j \, .$$

Donc,

$$\sum_{j \in \mathcal{J}'} \mu_j \big(\nabla g_j(x)^T d + \frac{1}{2} d^T \nabla^2 \overline{g}_j(\eta_j d) d \big) \geq c(s - P(x)) \, . \qquad (16)$$

En combinant (15) et (16), il s'ensuit que

$$\nabla f(x)^T d + \frac{1}{2} d^T \nabla^2 \overline{f}(\eta d) d + \frac{1}{2} d^T \nabla^2 \overline{f}(\beta d) d$$
$$+ c(s - P(x)) + \frac{1}{2} \sum_{j \in \mathcal{J}'} \mu_j d^T \nabla^2 \overline{g}_j(\beta_j d) d \leq 0 \, . \qquad (17)$$

Et finalement, par (9) et (17),

$$\theta_c'(x;d) \leq -d^T \left\{ \frac{1}{2} \left[\nabla^2 \overline{f}(\eta d) + \nabla^2 \overline{f}(\beta d) + \sum_{j \in \mathcal{J}'} \mu_j \nabla^2 \overline{g}_j(\beta_j d) \right] \right\} d \, .$$

Comme $\nabla^2 \overline{f}$ est définie positive,

$\nabla^2 \overline{g}_j$ est semi-définie positive pour tout $j \in \mathcal{J}'$,

$\mu_j \geq 0$ pour tout $j \in \mathcal{J}'$ (par (12))

on en conclut que

$$\theta_c'(x;d) < 0 \, .$$

■

Annexe III.3 Preuve de la Proposition 3

Proposition 3

Si x^* est un point critique de θ_c ,
Alors $\left(CAP_c(x^*, \mathcal{J})\right)$ a $\left(d = 0, s = P(x^*)\right)$ comme solution,
avec $\mathcal{J}(x^*) \subseteq \mathcal{J}' \subseteq I'$.

Preuve :
Si x^* est un point critique de θ_c , par définition,

$$\theta_c'(x^*, \delta) \geq 0 \, , \qquad \forall \, \delta \in I\!R^n \, .$$

La Proposition 2 indique alors que, si (d, s) est solution de $(CAP_c(x^*, \mathcal{J}))$, on doit avoir $d = 0$. Par conséquent, il faut aussi que $s = P(x^*)$.
La solution de $(CAP_c(x^*, \mathcal{J}))$ est donc $(d = 0 \, , \; s = P(x^*))$. ■

Annexe III.4 Preuve de la Proposition 4

Proposition 4

Si $\big(d = 0\ ,\ s = P(x^*)\big)$ *est la solution de* $\big(CAP_c(x^*, \mathcal{J})\big)$
avec $\mathcal{J}(x^*) \subseteq \mathcal{J}' \subseteq I'$,
Alors x^* *est un point critique de* θ_c .

Preuve :
Par l'absurde, supposons que x^* ne soit pas un point critique de θ_c , i.e. que

$$\exists\ d \in I\!R^n \quad \text{t.q. } \theta_c'(x^*, d) < 0$$

ou encore que (voir (1))

$$\exists\ d \in I\!R^n \quad \text{t.q. } \nabla f(x^*)^T d + c\nabla g_j(x^*)^T d < 0\ , \qquad \forall\ j \in \mathcal{J}(x^*)\ . \tag{20}$$

$(d = 0\ ,\ s = P(x^*))$ étant solution de $(CAP_c(x^*, \mathcal{J}))$, les conditions de Kuhn-Tucker s'écrivent

$\exists\ \mu \in I\!R^{\#\mathcal{J}'}$ tel que

$$\begin{cases} \nabla \overline{f}(0) + \sum\limits_{j \in \mathcal{J}'} \mu_j \nabla \overline{g}_j(0) = 0\ , \text{ i.e. } \nabla f(x^*) + \sum\limits_{j \in \mathcal{J}'} \mu_j \nabla g_j(x^*) = 0\ , & (21) \\ c - \sum\limits_{j \in \mathcal{J}'} \mu_j = 0\ , & (22) \\ \mu_j \geq 0\ , \qquad \forall\ j \in \mathcal{J}'\ , & (23) \\ \mu_j(\overline{g}_j(0) - P(x^*)) = 0\ , \text{ i.e. } \mu_j(g_j(x^*) - P(x^*)) = 0\ , \qquad \forall\ j \in \mathcal{J}'\ , & (24) \\ \overline{g}_j(0) \leq P(x^*)\ , \qquad \forall\ j \in \mathcal{J}'\ . \end{cases}$$

De (24), on tire que

$$\mu_j = 0\ , \qquad \forall\ j \notin \mathcal{J}(x^*)\ . \tag{25}$$

D'où, par (22),

$$c = \sum_{j \in \mathcal{J}'} \mu_j = \sum_{j \in \mathcal{J}(x^*)} \mu_j\ . \tag{26}$$

Comme on a (23) et $c > 0$, cette dernière égalité permet d'écrire

$$\exists\ j' \in \mathcal{J}(x^*) \quad \text{t.q. } \mu_{j'} > 0\ .$$

Et donc, par (20),

$$\exists\, d \in I\!R^n : \qquad \mu_{j'} \nabla f(x^*)^T d + c\mu_{j'} \nabla g_{j'}(x^*)^T d < 0 \,.$$

En sommant sur $\mathcal{J}(x^*)$,

$$\exists\, d \in I\!R^n : \qquad \sum_{j \in \mathcal{J}(x^*)} \mu_j \nabla f(x^*)^T d + c \sum_{j \in \mathcal{J}(x^*)} \mu_j \nabla g_j(x^*)^T d < 0 \,.$$

Ceci implique, grâce à (25) et (26), que

$$\exists\, d \in I\!R^n : \qquad c\Big(\nabla f(x^*) + \sum_{j \in \mathcal{J}'} \mu_j \nabla g_j(x^*)\Big)^T d < 0 \,,$$

ce qui contredit (21). ∎

Annexe III.5 Preuve de la Proposition 5

Proposition 5

Si $\Big(d, (\mu_j, j \in \mathcal{J})\Big)$ *est un point de Kuhn-Tucker de* $(CAP_0(x, \mathcal{J}))$ *et*
$c \geq \sum_{j \in \mathcal{J}} \mu_j$,
Alors $\Big(d, s = 0, (\overline{\mu}_j, j \in \mathcal{J}')\Big)$ *est un point de Kuhn-Tucker de* $(CAP_c(x, \mathcal{J}))$

avec $\overline{\mu}_j = \mu_j \,, \quad \forall\, j \in \mathcal{J}$,

$$\overline{\mu}_0 = c - \sum_{j \in \mathcal{J}} \mu_j \,.$$

Preuve :
$\Big(d, (\mu_j, j \in \mathcal{J})\Big)$ étant un point de Kuhn-Tucker de $(CAP_0(x, \mathcal{J}))$, on peut écrire

$$\begin{cases} \nabla \overline{f}(d) + \sum_{j \in \mathcal{J}} \mu_j \nabla \overline{g}_j(d) = 0 \,, & (27) \\ \mu_j \geq 0 \,, \qquad \forall\, j \in \mathcal{J} \,, & (28) \\ \mu_j \overline{g}_j(d) = 0 \,, \qquad \forall\, j \in \mathcal{J} \,, & (29) \\ \overline{g}_j(d) \leq 0 \,, \qquad \forall\, j \in \mathcal{J} \,. & (30) \end{cases}$$

On veut montrer que $\left(d, s=0, (\overline{\mu}_j, j \in \mathcal{J}')\right)$ est un point de Kuhn-Tucker de $(CAP_c(x, \mathcal{J}))$, i.e. que

$$\begin{cases} \nabla \overline{f}(d) + \sum\limits_{j \in \mathcal{J}'} \overline{\mu}_j \nabla \overline{g}_j(d) = 0 \,, & (31) \\ c - \sum\limits_{j \in \mathcal{J}'} \overline{\mu}_j = 0 \,, & (32) \\ \overline{\mu}_j \geq 0 \,, \qquad \forall\, j \in \mathcal{J}' \,, & (33) \\ \overline{\mu}_j \overline{g}_j(d) = 0 \,, \qquad \forall\, j \in \mathcal{J}' \,, & (34) \\ \overline{g}_j(d) \leq 0 \,, \qquad \forall\, j \in \mathcal{J}' \,. & (35) \end{cases}$$

Il suffit de poser $\overline{\mu}_0 = c - \sum\limits_{j \in \mathcal{J}} \mu_j$ et $\overline{\mu}_j = \mu_j$ pour tout $j \in \mathcal{J}$, pour voir que les relations (31)–(35) découlent immédiatement de (27)–(30). ∎

Annexe III.6 Preuve de la Proposition 6

Proposition 6

Si $(x^*, (\mu_j^*, j \in I))$ *est un point de Kuhn-Tucker de* (P) ,
Alors $\left(d^* = 0, (\mu_j^*, j \in \mathcal{J})\right)$ *est un point de Kuhn-Tucker de* $(CAP_0(x^*, \mathcal{J}))$
pour tout $\mathcal{J}$ *tel que* $\mathcal{J}(x^*) \subseteq \mathcal{J}' \subseteq I'$.

Preuve :
Comme $(x^*, (\mu_j^*, j \in I))$ est un point de Kuhn-Tucker de (P) ,

$$\begin{cases} \nabla f(x^*) + \sum\limits_{j \in I} \mu_j^* \nabla g_j(x^*) = 0 \,, & (36) \\ \mu_j^* \geq 0 \,, \qquad \forall\, j \in I \,, & (37) \\ \mu_j^* g_j(x^*) = 0 \,, \qquad \forall\, j \in I \,, & (38) \\ g_j(x^*) \leq 0 \,, \qquad \forall\, j \in I \,. & (39) \end{cases}$$

On doit montrer que $\left(d^* = 0, (\mu_j^*, j \in \mathcal{J})\right)$ est un point de Kuhn-Tucker de $(CAP_0(x^*, \mathcal{J}))$ pour tout $\mathcal{J}$ tel que $\mathcal{J}(x^*) \subseteq \mathcal{J}' \subseteq I'$, i.e. que

$$\begin{cases} \nabla \overline{f}(0) + \sum\limits_{j \in \mathcal{J}} \mu_j^* \nabla \overline{g}_j(0) = 0 \text{ , i.e. } \nabla f(x^*) + \sum\limits_{j \in \mathcal{J}} \mu_j^* \nabla g_j(x^*) = 0 \text{ ,} & (40) \\ \mu_j^* \geq 0 \text{ ,} \qquad \forall\, j \in \mathcal{J} \text{ ,} & (41) \\ \mu_j^* \overline{g}_j(0) = 0 \text{ , i.e. } \mu_j^* g_j(x^*) = 0 \text{ ,} \qquad \forall\, j \in \mathcal{J} \text{ ,} & (42) \\ \overline{g}_j(0) \leq 0 \text{ , i.e. } g_j(x^*) \leq 0 \text{ ,} \qquad \forall\, j \in \mathcal{J} \text{ .} & (43) \end{cases}$$

Puisque $\mathcal{J} \subseteq I$: (41), (42) et (43) découlent directement de (37), (38) et (39).
Pour que (40) soit vérifié, il suffirait que $\mu_j^* = 0$ pour tout $j \notin \mathcal{J}$ dans (36) ou encore que $\mu_j^* = 0$ pour tout $j \notin \mathcal{J}(x^*)$.
Or, pour tout $j \notin \mathcal{J}(x^*)$: $g_j(x^*) < P(x^*) = 0$.
D'où par (38) : pour tout $j \notin \mathcal{J}(x^*)$: $\mu_j^* = 0$. ∎

Annexe III.7 Preuve du Théorème 2

Théorème 2

Soit $X \subseteq \mathbb{R}^n$ un compact tel que, pour tout $x \in X$:
$\{\nabla g_j(x) : j \in \mathcal{J}(x) \text{ , } j \neq 0\}$ est linéairement indépendant,

Alors il existe $c^* \geq 0$ tel que, pour tout $c > c^*$,

Si x^* est un point critique de θ_c et $x^* \in X$,

Alors il existe $\mu^* \in \mathbb{R}^m$ tel que (x^*, μ^*) est un point de Kuhn-Tucker de (P) .

Pour démontrer le théorème, nous avons besoin du lemme suivant :

Lemme 1

Soit $X \subseteq \mathbb{R}^n$ un compact tel que, pour tout $x \in X$:
$\{\nabla g_j(x), j \in \mathcal{J}(x), j \neq 0\}$ est linéairement indépendant.
Alors

A) $\forall\ x \in X\ ,\ \exists!\ \overline{\mu}(x) = \big(\overline{\mu}_1(x), \cdots, \overline{\mu}_m(x)\big)$ *qui minimise (par rapport à* μ *) la fonction*

$$q_x(\mu) = \|\nabla f(x) + \sum_{j=1}^{m} \mu_j\ \nabla g_j(x)\|^2 + \sum_{j=1}^{m} \big(P(x) - g_j(x)\big)^2 \mu_j^2\ .$$

B) La fonction $\overline{\mu}(\bullet)$ *est continue sur* X .

Preuve du Lemme 1 :

A) Pour prouver l'unicité du minimum de $q_x(\mu)$, il suffit de montrer que le terme du second ordre de $q_x(\mu)$:

$$\|\sum_{j=1}^{m} \mu_j\ \nabla g_j(x)\|^2 + \sum_{j=1}^{m} \big(P(x) - g_j(x)\big)^2 \mu_j^2$$

ne peut être nul sauf si $\mu = 0$.

Si

$$\|\sum_{j=1}^{m} \mu_j\ \nabla g_j(x)\|^2 + \sum_{j=1}^{m} \big(P(x) - g_j(x)\big)^2 \mu_j^2 = 0\ ,$$

on a

$$\|\sum_{j=1}^{m} \mu_j \nabla g_j(x)\|^2 = 0 \tag{44}$$

et

$$\big(P(x) - g_j(x)\big)^2 \mu_j^2 = 0\ , \qquad \forall\ j = 1, \cdots, m\ . \tag{45}$$

Par (45),

$$\mu_j = 0\ , \qquad \forall\ j \notin \mathcal{J}(x)\ . \tag{46}$$

Donc, (44) peut aussi s'écrire

$$\sum_{j \in \mathcal{J}(x)} \mu_j \nabla g_j(x) = 0\ . \tag{47}$$

Et comme, par hypothèse, $\big\{\nabla g_j(x) : j \in \mathcal{J}(x), j \neq 0\big\}$ est linéairement indépendant, (47) implique que

$$\mu_j = 0\ , \qquad \forall\ j \in \mathcal{J}(x)\ . \tag{48}$$

Ainsi, par (46) et (48) : $\mu = 0$.

B) La continuité de $\overline{\mu}$ découle de la continuité de ∇f , ∇g_j ($j = 1, \cdots, m$) et P .

■

Nous pouvons maintenant démontrer le Théorème 2.

Preuve du Théorème 2 :

Choisissons

$$c^* = \max_{x \in X} \sum_{j=1}^{m} \overline{\mu}_j(x)$$

où $\overline{\mu}_j(\bullet)$ est comme dans le Lemme 1.

Remarquons que le maximum de cette expression est atteint vu que X est compact et que, par le Lemme 1, $\overline{\mu}(\bullet)$ est continue sur X .

Soit $c > c^*$.

Soit $x^* \in X$ un point critique de θ_c .

Par la Proposition 3, $(d = 0\ ,\ s = P(x^*))$ est solution de $CAP_c(x^*, \mathcal{J}))$ avec $\mathcal{J}(x^*) \subseteq \mathcal{J}' \subseteq I'$ (prenons ici $\mathcal{J} = I$). Les conditions de Kuhn-Tucker peuvent alors s'écrire :

$\exists\ \mu_0^*, \mu_1^*, \cdots, \mu_m^* \in I\!R$ tels que

$$\begin{cases} \nabla \overline{f}(0) + \sum\limits_{j=0}^{m} \mu_j^* \nabla \overline{g}_j(0) = 0, \text{ i.e. } \nabla f(x^*) + \sum\limits_{j=0}^{m} \mu_j^* \nabla g_j(x^*) = 0\ , & (49) \\ c - \sum\limits_{j=0}^{m} \mu_j^* = 0\ , & (50) \\ \mu_j^* \geq 0\ , \qquad j = 0, \cdots, m\ , & (51) \\ \mu_j^*(\overline{g}_j(0) - P(x^*)) = 0, \text{ i.e. } \mu_j^*(g_j(x^*) - P(x^*)) = 0\ , \qquad j = 0, \cdots, m\ , & (52) \\ \overline{g}_j(0) \leq P(x^*), \text{ i.e. } g_j(x^*) \leq P(x^*)\ , \qquad j = 0, \cdots, m\ . & (53) \end{cases}$$

Puisque, par convention, $g_0 \equiv 0$, (49) s'écrit aussi

$$\nabla f(x^*) + \sum_{j=1}^{m} \mu_j^*\ \nabla g_j(x^*) = 0\ . \qquad (54)$$

D'où, par (54) et (52) :

$$q_{x^*}(\mu^*) = 0\ .$$

μ^* est donc l'unique minimum de $q_{x^*}(\bullet)$ et en employant les notations utilisées dans le Lemme 1 :

$$\mu^* = \overline{\mu}(x^*)\ .$$

Donc, par (50) :

$$\mu_0^* = c - \sum_{j=1}^{m} \mu_j^* = c - \sum_{j=1}^{m} \overline{\mu}_j(x^*)\ .$$

Et comme on a choisi $c^* = \max\limits_{x \in X} \sum\limits_{j=1}^{m} \overline{\mu}_j(x)$ et $c > c^*$:

$$\mu_0^* \geq c - c^* > 0 \ ,$$

ce qui implique par (52) que

$$P(x^*) = g_0(x^*) = 0 \ . \tag{55}$$

Il est alors évident que $(x^*, \mu_1^*, \cdots, \mu_m^*)$ est un point de Kuhn-Tucker de (P) .
En effet,

$$(54) \quad \Rightarrow \quad \nabla f(x^*) + \sum_{j=1}^{m} \mu_j^* \ \nabla g_j(x^*) = 0 \ ,$$

$$(51) \quad \Rightarrow \quad \mu_j^* \geq 0 \ , \qquad j = 1, \cdots, m \ ,$$

$$(52) \text{ et } (55) \quad \Rightarrow \quad \mu_j^* g_j(x^*) = 0 \ , \qquad j = 1, \cdots, m \ ,$$

$$(53) \text{ et } (55) \quad \Rightarrow \quad g_j(x^*) \leq 0 \ , \qquad j = 1, \cdots, m \ .$$

■

Chapitre 4

METHODE DES ASYMPTOTES MOBILES ET STRATEGIE D'ENSEMBLE ACTIF

Après avoir présenté un traitement unifié des méthodes d'approximation convexe conservative, particularisons notre étude à la méthode des Asymptotes Mobiles (MMA) basée sur un type particulier d'approximation conservative.

Nous proposons dans ce qui suit une nouvelle version de MMA où une stratégie d'ensemble actif est appliquée aux contraintes. Nous y ferons référence en termes de $MMASS$ (" *Method of Moving Asymptotes with Active Set Strategy* ").

L'introduction de cette stratégie d'ensemble actif est notamment motivée par la constatation que, dans la méthode MMA , un problème d'admissibilité peut apparaître lorsque beaucoup de contraintes sont remplacées par leur approximation convexe dans le sous-problème $(SP(x^k))$. De plus, l'addition de variables artificielles apporte des instabilités numériques et tend à ralentir la convergence. L'ajout d'une stratégie d'ensemble actif dans le sous-problème à chaque itération permet une meilleure stabilité numérique tout en conservant les propriétés de convergence de l'algorithme.

Dans la première section, nous commençons par rappeler les idées qui sont à l'origine de MMA et les résultats de convergence déjà connus. La nouvelle variante de MMA est alors décrite dans la Section 2 et sa convergence est étudiée à la Section 3. Ensuite,

quelques points au sujet de l'implémentation sont précisés dans la Section 4. Pour clore ce chapitre, nous dégageons les avantages de la nouvelle méthode.

Section 1 Principes de base concernant MMA et théorèmes de convergence

Nous exposons ici les idées directrices concernant la méthode MMA d'origine proposée par K. Svanberg dans [10].

1.1 Description générale de la méthode MMA

Le problème d'optimisation non linéaire considéré dans ce chapitre a la forme générale suivante :

$$(P) \qquad \begin{cases} \min \ f_0(x) \\ \text{s.c.} \ \ f_j(x) \leq 0 \ , \quad j = 1, \cdots, m \ , \\ \qquad x \in [\underline{x}, \overline{x}] \ , \end{cases}$$

avec f_j ($j = 0, 1, \cdots, m$) : $\mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ continûment différentiable;

$x \in \mathbb{R}^n$ vecteur des variables;

$\underline{x}$, $\overline{x} \in \mathbb{R}^n$ bornes inférieure et supérieure sur x fixées.

Comme les méthodes SQP et $CONLIN$, la méthode MMA consiste à générer et résoudre une suite de sous-problèmes selon le schéma itératif suivant :

Soit k le compteur d'itérations.

Etape 0 : Choisir un point de départ x^0 .
$k := 0$

Etape 1 : Construire le sous-problème $(SP(x^k))$ associé à x^k .

Etape 2 : Résoudre $(SP(x^k))$. Soit x^{k+1} sa solution optimale.

Etape 3 : $k := k + 1$
Retour à l'Etape 1.

Pour définir la méthode MMA , nous devons décrire la façon de construire les sous-problèmes et donc le type d'approximation qui lui est propre.

A. Asymptotes mobiles

Considérons $x^k \in \mathbb{R}^n$ le point courant à l'itération k . Avant toute chose, la méthode associe à x^k deux paramètres L^k, $U^k \in \mathbb{R}^n$, appelés " *asymptotes mobiles* ", tels que

$$\begin{cases} L_i^k < x_i^k < U_i^k , & \forall\, i = 1, \cdots, n , \\ [\underline{x}, \overline{x}] \cap [L^k, U^k] \neq \emptyset . \end{cases}$$

Voyons la manière de constuire ces asymptotes et leur utilité.

Un premier choix très simple est le suivant :

$$\begin{cases} L_i^k = \underline{x}_i - s_0(\overline{x}_i - \underline{x}_i) , & i = 1, \cdots, n , \\ U_i^k = \overline{x}_i + s_0(\overline{x}_i - \underline{x}_i) , & i = 1, \cdots, n , \end{cases} \tag{1}$$

où s_0 est un nombre réel fixé (par exemple, $s_0 = 0.1$).

Ici, L^k et U^k ne dépendent pas de k . Il s'agit donc d'asymptotes plutôt fixes que mobiles.

Pour se débarrasser de cette rigidité, nous pouvons introduire une dépendance directe vis-à-vis de l'itéré considéré en prenant

$$\begin{cases} L_i^k = x_i^k - (\overline{x}_i - \underline{x}_i) , & i = 1, \cdots, n , \\ U_i^k = x_i^k + (\overline{x}_i - \underline{x}_i) , & i = 1, \cdots, n . \end{cases} \tag{2}$$

Dans ce cas, les paires (L^k, U^k) correspondant aux différents itérés ne sont plus identiques. Nous pouvons donc dire que ces asymptotes sont mobiles.

Cependant, si nous voulons exploiter au maximum la flexibilité de la méthode, il est intéressant de tenir compte, lors de la construction de L^k et U^k , de la façon dont le processus itératif s'est comporté dans les itérations antérieures. Une règle générale (mais heuristique) pour mettre à jour les valeurs de L^k et U^k est la suivante :

A) Si la méthode oscille, nous devons essayer de la stabiliser. Ceci peut s'effectuer en rapprochant les asymptotes du point courant.

B) Si, au contraire, la méthode est lente et monotone, elle doit être "*relaxée* ". Dans ce cas, nous écartons les asymptotes du point courant.

Ceci peut s'exprimer ainsi :

Soit s_1 un nombre réel donné tel que $0 < s_1 < 1$ (par exemple : $s_1 = 0.7$).

Pour $k = 0$ et $k = 1$:

$$\begin{cases} L_i^k = x_i^k - (\overline{x}_i - \underline{x}_i) , & i = 1, \cdots, n , \\ U_i^k = x_i^k + (\overline{x}_i - \underline{x}_i) , & i = 1, \cdots, n . \end{cases} \tag{3}$$

Pour $k \geq 2$:

A) Si $(x_i^k - x_i^{k-1}) \cdot (x_i^{k-1} - x_i^{k-2}) < 0$, ce qui indique une oscillation, alors

$$\begin{cases} L_i^k = x_i^k - s_1(x_i^{k-1} - L_i^{k-1}) , & i = 1, \cdots, n , \\ U_i^k = x_i^k + s_1(U_i^{k-1} - x_i^{k-1}) , & i = 1, \cdots, n . \end{cases} \tag{4}$$

B) Si $(x_i^k - x_i^{k-1}) \cdot (x_i^{k-1} - x_i^{k-2}) > 0$, ce qui signale que les asymptotes ralentissent la convergence, alors

$$\begin{cases} L_i^k = x_i^k - \frac{1}{s_1}(x_i^{k-1} - L_i^{k-1}) , & i = 1, \cdots, n , \\ U_i^k = x_i^k + \frac{1}{s_1}(U_i^{k-1} - x_i^{k-1}) , & i = 1, \cdots, n . \end{cases} \tag{5}$$

Beaucoup d'autres idées de construction peuvent évidemment être envisagées. Il est possible de procéder différemment pour autant que l'on respecte, pour tout k :

$$\begin{cases} L_i^k < x_i^k < U_i^k , & \forall\, i = 1, \cdots, n , \\ [\underline{x}, \overline{x}] \cap [L^k, U^k] \neq \emptyset . \end{cases}$$

En conclusion, l'introduction des asymptotes mobiles permet d'agir sur l'intervalle qui borne les variables $[\underline{x}, \overline{x}]$. En choisissant une mise à jour des asymptotes comme en (3), (4) et (5) , on accélère la vitesse du processsus puisqu'on tient compte de son évolution.

B. Type d'approximation

Dans l'approche de Svanberg, on construit à l'itération k une approximation du premier ordre de chaque fonction f_j ($j = 0, 1, \cdots, m$) au point courant x^k . Cette approximation, notée $\overline{f}_j(y; x^k)$, est obtenue par une linéarisation de f_j par rapport aux variables $\frac{1}{y_i - L_i^k}$ ou $\frac{1}{U_i^k - y_i}$ selon le signe des dérivées de f_j au point x^k (L^k et U^k sont les asymptotes mobiles associées à x^k).

Soit $f_j : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$.

Soient $x^k \in \mathbb{R}^n$ le point de linéarisation et (L^k, U^k) les asymptotes mobiles associées à x^k .

Alors, la linéarisation de f_j autour de x^k est donnée par (voir [2]) :

$$\overline{f}_j(y; x^k) = r_j^k + \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{p_{ji}^k}{U_i^k - y_i} + \frac{q_{ji}^k}{y_i - L_i^k} \right) \tag{6}$$

où

$$p_{ji}^k = \begin{cases} (U_i^k - x_i^k)^2 \dfrac{\partial f_j}{\partial y_i}(x^k) , & \text{si } \dfrac{\partial f_j}{\partial y_i}(x^k) > 0 , \\ 0 & \text{sinon;} \end{cases}$$

$$q_{ji}^k = \begin{cases} -(x_i^k - L_i^k)^2 \dfrac{\partial f_j}{\partial y_i}(x^k) , & \text{si } \dfrac{\partial f_j}{\partial y_i}(x^k) < 0 , \\ 0 & \text{sinon;} \end{cases}$$

$$r_j^k = f_j(x^k) - \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{p_{ji}^k}{U_i^k - x_i^k} + \frac{q_{ji}^k}{x_i^k - L_i^k} \right) .$$

Les propriétés suivantes (prouvées dans [2]) montrent que l'approximation considérée ici est bien une approximation conservative dans le sens où nous l'avons définie au Chapitre 1.

A) L'approximation $\overline{f}_j(y; x^k)$ d'une fonction f_j au point $x^k \in \mathbb{R}^n$ est séparable et convexe.

B) Il s'agit d'une approximation du premier ordre, i.e.

$$\overline{f}_j(x^k; x^k) = f_j(x^k) , \tag{7}$$

$$\nabla \overline{f}_j(x^k; x^k) = \nabla f_j(x^k) . \tag{8}$$

Remarquons aussi que l'approximation $\overline{f}_j(y;x^k)$ dépend fortement du choix des asymptotes L^k et U^k associées à x^k . En effet, supposons que $\overline{f}_j(y;x^k)$ et $\overline{\overline{f}}_j(y;x^k)$ soient deux approximations différentes de f_j au point x^k correspondant aux paramètres $(\overline{L}^k,\overline{U}^k)$ et $(\overline{\overline{L}}^k,\overline{\overline{U}}^k)$ respectivement. On peut montrer que (voir [2]) :

$$\begin{aligned} &Si \quad \overline{L}_i^k \le \overline{\overline{L}}_i^k < x_i^k < \overline{\overline{U}}_i^k \le \overline{U}_i^k \ , \quad \forall\, i = 1,\cdots,n \ , \\ &Alors \quad \overline{f}_j(y;x^k) \le \overline{\overline{f}}_j(y;x^k) \ , \qquad \forall\, y \in [\overline{\overline{L}}^k,\overline{\overline{U}}^k] \ . \end{aligned}$$

Ce résultat indique donc que plus les asymptotes L^k et U^k sont choisies près de x^k , plus l'approximation devient conservative.

Dans le cas extrême où $L_i^k \to -\infty$ et $U_i^k \to +\infty$, pour tout $i = 1,\cdots,n$, $\overline{f}_j(y;x^k)$ n'est autre que l'approximation linéaire de f_j en x^k :

$$\overline{f}_j(y;x^k) = f_j(x^k) + \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f_j}{\partial y_i}(x^k)\ (y_i - x_i^k) \ .$$

D'autre part, si $L_i^k = 0$ et $U_i^k \to +\infty$, pour tout $i = 1,\cdots,n$, alors $\overline{f}_j(y;x^k)$ s'identifie à l'approximation convexe utilisée dans la méthode $CONLIN$.

La méthode MMA est ainsi très flexible puisque le choix des asymptotes mobiles y est laissé libre. Elle est donc plus générale et plus souple que la méthode $CONLIN$.

C. Sous-problèmes considérés

Considérons x^k le point courant à l'itération k et (L^k,U^k) les asymptotes mobiles qui lui sont associées.

Les considérations précédentes nous amènent à définir le sous-problème correspondant de la façon suivante :

$$(SP(x^k)) \qquad \begin{cases} \min\limits_{y} \ \overline{f}_0(y;x^k) & \\ \text{s.c.} \ \ \overline{f}_j(y;x^k) \le 0 \ , & j = 1,\cdots,m \ , \\ \qquad \max\,(\underline{x}_i,\alpha_i^k) \le y_i \le \min\,(\overline{x}_i,\beta_i^k) \ , & i = 1,\cdots,n \ . \end{cases}$$

Vu les propriétés de convexité et de séparabilité de ce sous-problème, une façon efficace de le résoudre est d'utiliser des techniques duales lagrangiennes.

Remarquons l'introduction, dans $(SP(x^k))$ des paramètres $\alpha^k, \beta^k \in I\!R^n$ appelés " *move limits* " et expliquons leur rôle.

Comme nous travaillons dans $[\underline{x}, \overline{x}] \cap [L^k, U^k]$, il y a un risque d'annulation du dénominateur dans l'expression de l'approximation (pour $y_i = L_i^k$ ou $y_i = U_i^k$). C'est pourquoi nous ajoutons des paramètres α^k et β^k qui doivent vérifier

$$L_i^k < \alpha_i^k \leq x_i^k \leq \beta_i^k < U_i^k \ , \qquad i = 1, \cdots, n \ .$$

En travaillant dans $[\alpha^k, \beta^k] \cap [\underline{x}, \overline{x}]$, nous évitons alors cet inconvénient. Cependant, pour que cet intervalle se rapproche le plus possible du précédent, il est utile de choisir α^k dans un petit voisinage de L^k et β^k proche de U^k . Par exemple, K. Svanberg [10] suggère de prendre

$$\begin{cases} \alpha_i^k = 0.9 \ L_i^k + 0.1 \ x_i^k \ , & i = 1, \cdots, n \ , \\ \beta_i^k = 0.9 \ U_i^k + 0.1 \ x_i^k \ , & i = 1, \cdots, n \ . \end{cases} \tag{9}$$

L'algorithme MMA peut donc s'écrire

Etape 0 : Soient x^0 un point de départ et L^0, U^0, α^0, β^0 les paramètres associés.
$k := 0$

Etape 1 : Construire $(SP(x^k))$

Etape 2 : Résoudre $(SP(x^k))$. Soit x^{k+1} sa solution.

Etape 3 : Mettre à jour les paramètres. Soient donc L^{k+1}, U^{k+1}, α^{k+1}, β^{k+1} associés à x^{k+1} .
$k := k + 1$
Retour à l'Etape 1.

1.2 Résultats de convergence

En choisissant de mettre à jour les asymptotes comme en (2) et les " *move limits* " comme en (9), on a pu démontrer le théorème suivant (voir [2]) :

Si • f_j *($j = 0, 1, \cdots, m$) est concave et continûment différentiable,*
• *pour tout $x \in I\!R^n$, $(SP(x))$ vérifie la condition de qualification de Slater,*

- $E_{x^0} = \{x$ *admissibles pour* (P) *tels que* $f_0(x) \leq f_0(x^0)\}$ *est compact,*

Alors tout point d'accumulation de la suite (x^k) *engendrée par l'algorithme* MMA *est un point de Kuhn-Tucker de* (P) .

Ces hypothèses restrictives sur la concavité des fonctions ont pu être relaxées en introduisant une recherche linéaire avec une fonction de pénalité exacte
$\phi_\lambda(x) = f_0(x) + \lambda \max\,(0, (f_j(x), j = 1, \cdots, m))$.
Dans ce cas, on obtient le théorème que voici (voir [2]) :

Si • f_j *(j* $= 0, 1, \cdots, m$ *) est continûment différentiable,*

- $D = \{t \in I\!R^n : \underline{x}_i \leq t_i \leq \overline{x}_i\ ,\ i = 1, \cdots, n\}$ *est un polyèdre compact de* $I\!R^n$,
- (P) *est admissible,*
- *pour tout* $x \in I\!R^n$ *admissible pour* (P) *, une condition de qualification de contrainte est vérifiée,*

Alors tout point d'accumulation de la suite (x^k) *générée par la méthode est un point de Kuhn-Tucker pour* (P) .

Nous proposons dans la section suivante une autre version de la méthode MMA qui utilise en plus une stratégie d'ensemble actif. La convergence de cette méthode sera démontrée dans un cadre plus général où le choix de la mise à jour des asymptotes est beaucoup plus libre. On pourra, cette fois, tenir compte du comportement de la méthode en mettant à jour les asymptotes comme en (3), (4) et (5) .

Section 2 Description de la nouvelle version $MMASS$

Nous allons étudier une nouvelle variante de la méthode MMA , appelée $MMASS$ " *Method of Moving Asymptotes with Active Set Strategy* ", où une stratégie d'ensemble actif est appliquée aux contraintes. Elle permet d'augmenter la stabilité numérique de l'algorithme et d'alléger l'ensemble admissible des sous-problèmes, ce qui évite ainsi l'introduction de variables artificielles.

Le sous-problème construit par $MMASS$ à l'itération k est le suivant :

Soit x^k le point courant.

$$(SP(x^k)) \qquad \begin{cases} \min\limits_y \ \overline{f}_0(y;x^k) \\ \text{s.c.} \ \ \overline{f}_j(y;x^k) \le 0 \ , & j \in \mathcal{J}_k \ , \\ \qquad \max\left(\underline{x}_i, \alpha_i^k\right) \le y_i \le \min\left(\overline{x}_i, \beta_i^k\right) \ , & i = 1, \cdots, n \ , \end{cases}$$

où $\mathcal{J}_k = \left\{ j \in \{1, \cdots, m\} \text{ t.q. } f_j(x^k) \ge P(x^k) - \delta_k \right\}$, $\delta_k \ge 0$,

$P(x^k) = \max\left(0, (f_j(x^k), j = 1, \cdots, m)\right)$.

L'apport nouveau est donc l'introduction de l'ensemble actif $\mathcal{J}_k$ qui diminue le nombre de contraintes considérées suivant le choix de δ_k .

L'algorithme $MMASS$ effectue aussi une recherche linéaire à l'aide de la fonction de pénalité exacte suivante

$$\phi_\lambda(x) = f_0(x) + \lambda P(x) \ , \qquad \lambda > 0 \ .$$

Section 3 Convergence de l'algorithme $MMASS$

Nous analysons ici la convergence de la méthode exposée à la section précédente.

Rappelons tout d'abord les éléments qui sont nécessaires pour définir le sous-problème $(SP(x^k))$ à l'itération k :

Soit x^k le point courant. Nous avons alors besoin des paramètres suivants :

- L^k et U^k les asymptotes mobiles associées à x^k qui vérifient

$$\begin{cases} -\infty < L_i^k \le x_i^k \le U_i^k < +\infty \ , & i = 1, \cdots, n \ , \\ [\underline{x}, \overline{x}] \cap [L^k, U^k] \ne \emptyset \ . \end{cases}$$

  Plusieurs modes de construction de ces asymptotes ont été proposés à la Section 1.

- α^k et β^k " *move limits* " associées à x^k telles que

$$L_i^k < \alpha_i^k < x_i^k < \beta_i^k < U_i^k \ , \qquad i = 1, \cdots, n \ .$$

Nous avons suggéré, à la Section 1, de prendre

$$\begin{cases} \alpha_i^k = 0.9\ L_i^k + 0.1\ x_i^k\ , & i = 1, \cdots, n\ , \\ \beta_i^k = 0.9\ U_i^k + 0.1\ x_i^k\ , & i = 1, \cdots, n\ . \end{cases}$$

- δ_k paramètre qui caractérise l'ensemble actif et vérifie

$$0 \leq \delta_k \leq M \quad \text{avec } M \text{ constante arbitrairement grande.}$$

On peut prendre, par exemple $\delta_k = P(x^k)$.

Il faut, en effet, que tous ces paramètres soient correctement choisis pour rendre possible la construction du sous-problème associé à x^k .

Dans la suite, nous considérons

$$D = \left\{ x \in I\!R^n \;\middle|\; \underline{x}_i \leq x_i \leq \overline{x}_i\ , \quad i = 1, \cdots, n \right\},$$

$$\widetilde{D} = \Big\{ s = (x, \delta, L, U, \alpha, \beta) \in I\!R^n \times I\!R^+ \times I\!R^n \times I\!R^n \times I\!R^n \times I\!R^n \;\Big|$$

- $x \in D$,
- $0 \leq \delta \leq M$,
- $-\infty < L_i < \alpha_i < x_i < \beta_i < U_i < +\infty$, $i = 1, \cdots, n$,

avec
- $U_i - L_i \geq \tau > 0$, $\quad i = 1, \cdots, n$,
- $x_i = sL_i + (1-s)U_i$, $\quad i = 1, \cdots, n$,
- $\alpha_i = 0.9\ L_i + 0.1\ x_i$, $\quad i = 1, \cdots, n$,
- $\beta_i = 0.9\ U_i + 0.1\ x_i$, $\quad i = 1, \cdots, n \Big\}$,

où τ , s et M sont des constantes fixées telles que $\tau > 0$, $0 < s < 1$ et $M \geq 0$ arbitrairement grande.

Remarquons que $\widetilde{D}$ est fermé.

Considérons $s = (x, \delta, L, U, \alpha, \beta) \in \widetilde{D}$. Dorénavant, nous ne noterons plus $(SP(x))$

mais bien $(SP(s))$ le sous-problème associé à x :

$$(SP(s)) \qquad \begin{cases} \min\limits_{y} \ \overline{f}_0(y;x) \\ \text{s.c.} \ \ \overline{f}_j(y;x) \leq 0 \ , & j \in \mathcal{J}_\delta \ , \\ \qquad \max\left(\underline{x}_i, \alpha_i\right) \leq y_i \leq \min\left(\overline{x}_i, \beta_i\right) \ , & i = 1, \cdots, n \ , \end{cases}$$

où $\mathcal{J}_\delta = \left\{ j \in \{1, \cdots, m\} \;\middle|\; f_j(x) \geq P(x) - \delta \right\}$,

$P(x) = \max\left(0, (f_j(x), j = 1, \cdots, m)\right)$.

L'algorithme $MMASS$ se schématise alors de la façon suivante :

Etape 0 : Choisir $\tau > 0$, $s \in]0,1[$ et $M \geq 0$ arbitrairement grande.
Choisir $s^0 = (x^0, \delta_0, L^0, U^0, \alpha^0, \beta^0) \in \widetilde{D}$.
$k := 0$

Etape 1 : Construire $(SP(s^k))$

$$(SP(s^k)) \qquad \begin{cases} \min\limits_{y} \ \overline{f}_0(y;x^k) \\ \text{s.c.} \ \ \overline{f}_j(y;x^k) \leq 0 \ , & j \in \mathcal{J}_k \ , \\ \qquad \max\left(\underline{x}_i, \alpha_i^k\right) \leq y_i \leq \min\left(\overline{x}_i, \beta_i^k\right) \ , & i = 1, \cdots, n \ , \end{cases}$$

où $\mathcal{J}_k = \left\{ j \in \{1, \cdots, m\} \;\middle|\; f_j(x^k) \geq P(x^k) - \delta_k \right\}$,

$P(x^k) = \max\left(0, (f_j(x^k), j = 1, \cdots, m)\right)$.

Etape 2 : Résoudre $(SP(s^k))$. Soit z^k sa solution optimale.

Si $z^k = x^k$; STOP. x^k est un point de Kuhn-Tucker de (P) .

Sinon aller à l'Etape 3.

Etape 3 : $x^{k+1} := \text{argmin}\left\{\phi_\lambda(x) : x \in [x^k, z^k]\right\}$

Etape 4 : Mise à jour des paramètres tels que

- $0 \leq \delta_{k+1} \leq M$,

- $U_i^{k+1} - L_i^{k+1} \geq \tau > 0\ , \quad i = 1, \cdots, n\ ,$
- $x_i^{k+1} = sL_i^{k+1} + (1-s)U_i^{k+1}\ , \quad i = 1, \cdots, n\ ,$
- $\alpha_i^{k+1} = 0.9\ L_i^{k+1} + 0.1\ x_i^{k+1}\ , \quad i = 1, \cdots, n\ ,$
- $\beta_i^{k+1} = 0.9\ U_i^{k+1} + 0.1\ x_i^{k+1}\ , \quad i = 1, \cdots, n\ .$

Etape 5 : $s^{k+1} := (x^{k+1}, \delta_{k+1}, L^{k+1}, U^{k+1}, \alpha^{k+1}, \beta^{k+1})$
$k := k + 1$
Retour à l'Etape 1.

Les questions concernant l'implémentation sont détaillées à la Section 4. Nous allons maintenant établir la preuve formelle de la convergence de cet algorithme.

Théorème 1

Si

(H_1) f_j ($j = 0, 1, \cdots, m$) *est continûment différentiable,*

(H_2) (P) *et* $(SP(s^k))$ *pour tout* $s^k \in \widetilde{D}$ *sont tels que leur domaine admissible n'est pas vide et une condition de qualification de Slater est vérifiée en tout point admissible.*

(H_3) *pour tout* $s^k \in \widetilde{D}$ *, les multiplicateurs de Lagrange associés à la solution optimale de* $(SP(s^k))$ *sont bornés, i.e. il existe* $N > 0$ *tel que, pour tout* $s^k \in \widetilde{D}$ *, les multiplicateurs optimaux* $(u_j^k)_{j \in \mathcal{J}_k}$ *associés au sous-problème* $(SP(s^k))$ *satisfont*

$$\sum_{j \in \mathcal{J}_k} u_j^k \leq N\ .$$

Alors, en prenant ϕ_λ *avec* $\lambda > N$ *, tout point d'accumulation* $s = (x, \delta, L, U, \alpha, \beta)$ *de la suite* (s^k) *engendrée par l'algorithme est tel que* x *est un point de Kuhn-Tucker de* (P) *.*

La démonstration se base sur le Théorème de Zangwill :

Théorème de Zangwill

Soit le problème non linéaire suivant :

$$\begin{cases} \min \ f(x) \\ s.c. \quad x \in X \end{cases}$$

où $f : \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}$, $X \subseteq \mathbb{R}^p$ *est fermé non vide.*
Soit $\Omega \subseteq \mathbb{R}^p$ *l'ensemble des solutions (non vide).*

$$\Omega = \left\{ \xi \;\middle|\; \xi \text{ satisfait les conditions d'optimalité de Kuhn-Tucker} \right\} .$$

Soit $Alg : X \to \mathcal{P}(X)$ *l'application algorithme.*
Supposons que la suite (ξ^k) *soit générée par*

$$\xi^{k+1} \in Alg(\xi^k) , \qquad \forall \ k .$$

Si

(C_1) *la suite* (ξ^k) *engendrée par l'algorithme est contenue dans un sous-ensemble compact de* X ;

(C_2) *il existe une fonction de descente* $r : X \to \mathbb{R}$ *continue telle que*

A) si $\xi \notin \Omega$, *Alors* $r(y) < r(\xi)$, $\forall \ y \in Alg(\xi)$,

B) si $\xi \in \Omega$, *Alors* $r(y) \leq r(\xi)$, $\forall \ y \in Alg(\xi)$.

(C_3) *la multiplication Alg est fermée sur* $X \setminus \Omega$.

Alors tout point d'accumulation de la suite (ξ^k) *appartient à* Ω .

Pour pouvoir appliquer le Théorème de Zangwill à l'algorithme $MMASS$, on prend

- $X \equiv \widetilde{D}$
- $\Omega \equiv \left\{ s = (x, \delta, L, U, \alpha, \beta) \in \widetilde{D} \;\middle|\; x \text{ est un point de Kuhn-Tucker de } (P) \right\}$
- $Alg : \widetilde{D} \to \mathcal{P}(\widetilde{D})$ l'application algorithme telle que

$$Alg = \mathcal{B} \circ \mathcal{A}$$

où

$$\mathcal{A} : \quad \widetilde{D} \longrightarrow \mathcal{P}(\widetilde{D} \times D) ,$$

$$s \rightsquigarrow \mathcal{A}(s) = \Big\{(s,z) \;\Big|\; z \text{ est solution de } (SP(s))\Big\} ,$$

$$\mathcal{B} : \quad \widetilde{D} \times D \longrightarrow \mathcal{P}(\widetilde{D}) ,$$

$$(s = (x, \delta, L, U, \alpha, \beta), z) \rightsquigarrow \mathcal{B}(s,z) = \Big\{ s' = (x', \delta', L', U', \alpha', \beta') \;\Big|$$

- $x' = \text{argmin}\Big(\phi_\lambda(\xi) : \xi \in [x,z]\Big)$,
- $0 \leq \delta' \leq M$,
- $-\infty < L'_i < \alpha'_i < x'_i < \beta'_i < U'_i < +\infty$, $\quad i = 1, \cdots, n$,
- $U'_i - L'_i \geq \tau > 0$, $\quad i = 1, \cdots, n$,
- $x'_i = sL'_i + (1-s)U'_i$, $\quad i = 1, \cdots, n$,
- $\alpha'_i = 0.9\ L'_i + 0.1\ x'_i$, $\quad i = 1, \cdots, n$,
- $\beta'_i = 0.9\ U'_i + 0.1\ x'_i$, $\quad i = 1, \cdots, n \Big\}$.

Les lemmes suivants sont nécessaires à la démonstration du Théorème 1. La preuve de ceux-ci est établie dans l'Annexe IV.1.

Lemme 1

Soit $s^k = (x^k, \delta_k, L^k, U^k, \alpha^k, \beta^k) \in \widetilde{D}$.
Si les hypothèses (H_1) *et* (H_2) *du Théorème 1 sont vérifiées,*
Alors les assertions suivantes sont équivalentes :

A) x^k *est un point de Kuhn-Tucker de* (P) ,

B) x^k *résout* $(SP(s^k))$.

Lemme 2

Soit $s^k = (x^k, \delta_k, L^k, U^k, \alpha^k, \beta^k) \in \widetilde{D}$.
Si les hypothèses (H_1) , (H_2) *et* (H_3) *du Théorème 1 sont vérifiées,*

Si x^k *n'est pas solution de* $(SP(s^k))$,

Alors $\phi'_\lambda(x^k; d^k) < 0$ *avec* $d^k = z^k - x^k$,

z^k *solution de* $(SP(s^k))$,

$\lambda > N$.

Remarque : $\phi'_\lambda(x^k; d^k)$ désigne la dérivée directionnelle de ϕ_λ en x^k dans la direction d^k .

Lemme 3

Soient une suite (x^k) *qui converge vers* $x \in \mathbb{R}^n$, *et une fonction* $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ *continûment différentiable.*
Alors, pour k *assez grand,* $\frac{\partial f}{\partial y_i}(x^k)$ *est du même signe que* $\frac{\partial f}{\partial y_i}(x)$.
Autrement dit,

$$\exists\ k_0 \in \mathbb{N}_0 \quad t.q. \quad \forall\ k \geq k_0 \ : \qquad \frac{\partial f}{\partial y_i}(x^k) \cdot \frac{\partial f}{\partial y_i}(x) \geq 0 \ .$$

Lemme 4

Sous les hypothèses (H_1) *et* (H_2) *du Théorème 1, la multiapplication Alg est fermée sur* $\widetilde{D} \setminus \Omega$.

Remarque : Le concept de multiapplication fermée se définit de la façon suivante :

Soit X un ensemble fermé non vide de $\mathbb{R}^n$.
Soit $Alg : X \to \mathcal{P}(X)$ une multiapplication.
Alg est dite *fermée* en $x \in X$ si

$$\begin{array}{rr} x^k \in X & x^k \to x \ , \\ y^k \in Alg(x^k) & y^k \to y \end{array}$$

implique que $y \in Alg(x)$.
Alg est dite *fermée* sur $Y \subseteq X$ si elle est fermée en tout point de Y .

Nous pouvons maintenant démontrer le Théorème 1.

Preuve du Théorème 1 :
Considérons la suite (s^k) engendrée par l'algorithme $MMASS$, i.e. telle que, pour tout k , $s^{k+1} \in Alg(s^k)$, et vérifions que l'on se trouve bien dans les conditions d'application du Théorème de Zangwill. Le résultat découlera alors immédiatement.

Passons donc en revue les conditions (C_1) , (C_2) et (C_3) du Théorème de Zangwill.

(C_1) *Les itérés s^k restent dans un compact.*

La démonstration du Lemme 4 révèle que $\widetilde{D}$ est compact. Montrons donc que $s^k \in \widetilde{D}$, pour tout k .

Par construction de l'algorithme, nous avons déjà directement $s^0 \in \widetilde{D}$. De plus, il est facile de voir que, si $s^k = (x^k, \delta_k, L^k, U^k, \alpha^k, \beta^k) \in \widetilde{D}$, alors on a que $s^{k+1} \in \widetilde{D}$. En effet,

$$s^{k+1} \in Alg(s^k) = \mathcal{B} \circ \mathcal{A}(s^k) = \bigcup_{(s^k, z^k) \in \mathcal{A}(s^k)} \mathcal{B}(s^k, z^k) .$$

D'où :

Il existe z^k une solution optimale de $(SP(s^k))$ telle que

$$s^{k+1} = (x^{k+1}, \delta_{k+1}, L^{k+1}, U^{k+1}, \alpha^{k+1}, \beta^{k+1})$$

avec

- $x^{k+1} = \operatorname{argmin}\big(\phi_\lambda(\xi) : \xi \in [x^k, z^k]\big)$ et donc $x^{k+1} \in [\underline{x}, \overline{x}]$,
- $0 \leq \delta_{k+1} \leq M$,
- $-\infty < L_i^{k+1} < \alpha_i^{k+1} < x_i^{k+1} < \beta_i^{k+1} < U_i^{k+1} < +\infty$, $\quad i = 1, \cdots, n$,
- $U_i^{k+1} - L_i^{k+1} \geq \tau > 0$, $\quad i = 1, \cdots, n$,
- $x_i^{k+1} = sL_i^{k+1} + (1-s)U_i^{k+1}$, $\quad i = 1, \cdots, n$,
- $\alpha_i^{k+1} = 0.9\ L_i^{k+1} + 0.1\ x_i^{k+1}$, $\quad i = 1, \cdots, n$,
- $\beta_i^{k+1} = 0.9\ U_i^{k+1} + 0.1\ x_i^{k+1}$, $\quad i = 1, \cdots, n$.

On en déduit que $s^{k+1} \in \widetilde{D}$.

Par récurrence, on peut donc affirmer que $s^k \in \widetilde{D}$ pour tout k .

(C_2) *Il existe une fonction de descente r continue telle que*

A) si $s^k \notin \Omega$, Alors $r(s^{k+1}) < r(s^k)$,

B) si $s^k \in \Omega$, Alors $r(s^{k+1}) \leq r(s^k)$.

Il suffit de choisir

$$r : \quad \widetilde{D} \longrightarrow I\!R ,$$

$$s = (x, \delta, L, U, \alpha, \beta) \rightsquigarrow r(s) \equiv \phi_\lambda(x) = f_0(x) + \lambda P(x) \quad \text{avec } \lambda > N .$$

La fonction r est bien continue puisque ϕ_λ l'est.

A) Soit $s^k = (x^k, \delta_k, L^k, U^k, \alpha^k, \beta^k) \in \widetilde{D}$ tel que $s^k \notin \Omega$.
Par définition de Ω , ceci signifie que x^k n'est pas un point de Kuhn-Tucker de (P) . Par le Lemme 1, ceci équivaut encore à dire que x^k ne résout pas $(SP(s^k))$.
Considérons z^k une solution optimale de $(SP(s^k))$; nous avons alors, par le Lemme 2, que $d^k = z^k - x^k$ est une direction de descente pour ϕ_λ en x^k , i.e.

$$\exists\, \eta > 0 \quad \text{t.q.} \quad \forall\, t \in]0, \eta] : \quad \phi_\lambda(x^k + td^k) < \phi_\lambda(x^k)$$

ou encore

$$\exists\, \eta > 0 , \quad \exists\, t' \in]0, \min\,(1, \eta)] : \quad \phi_\lambda(x^k + t'd^k) < \phi_\lambda(x^k) . \tag{43}$$

Soit $s^{k+1} = (x^{k+1}, \delta_{k+1}, L^{k+1}, U^{k+1}, \alpha^{k+1}, \beta^{k+1}) \in Alg(s^k)$. Alors,

$$x^{k+1} = \text{argmin}\left(\phi_\lambda(\xi) : \xi \in [x^k, z^k]\right) .$$

Donc, par (43) ,

$$\phi_\lambda(x^{k+1}) < \phi_\lambda(x^k) .$$

Par conséquent, on a bien

$$r(s^{k+1}) < r(s^k) ,$$

ce qui termine la preuve de (A) .

B) Soit $s^k = (x^k, \delta_k, L^k, U^k, \alpha^k, \beta^k) \in \Omega$. Donc, x^k est un point de Kuhn-Tucker de (P) et, par le Lemme 1, x^k résout $(SP(s^k))$.

Considérons $s^{k+1} \in Alg(s^k)$; il existe alors z^k une solution optimale de $(SP(s^k))$, telle que $s^{k+1} \in \mathcal{B}(s^k, z^k)$.

x^k et z^k sont ainsi tous deux solutions optimales de $(SP(s^k))$. Comme $(SP(s^k))$ est un problème convexe, tout $x \in [x^k, z^k]$ résout $(SP(s^k))$ et donc, par le Lemme 1, tout $x \in [x^k, z^k]$ est un point de Kuhn-Tucker de (P) . Par conséquent,

$$\forall\, x \in [x^k, z^k] \quad : \quad f_0(x) = f_0(x^k)$$
$$\text{et} \quad f_j(x) \leq 0\,, \qquad \forall\, j = 1, \cdots, m\,, \quad \text{i.e. } P(x) = 0\,.$$

Ainsi,

$$\forall\, x \in [x^k, z^k] \ : \ \phi_\lambda(x) = f_0(x) = f_0(x^k) = \phi_\lambda(x^k)\,.$$

Et puisque $x^{k+1} \in [x^k, z^k]$:

$$\phi_\lambda(x^k) = \phi_\lambda(x^{k+1})$$

ou encore

$$r(s^k) = r(s^{k+1})\,,$$

ce qui correspond bien au résultat attendu en (B).

(C_3) *La multiapplication Alg est fermée sur* $\widetilde{D} \setminus \Omega$ (voir Lemme 4).

Les hypothèses du théorème de convergence de Zangwill étant vérifiées dans le cas de l'algorithme $MMASS$, nous pouvons conclure que tout point d'accumulation de la suite engendrée par cet algorithme correspond à un point de Kuhn-Tucker de (P) .

■

Section 4 Au sujet de l'implémentation de $MMASS$

Dans cette section, nous développons deux points qui concernent l'implémentation de l'algorithme $MMASS$. Dans un premier temps, nous proposons une méthode duale pour la résolution des sous-problèmes $(SP(s^k))$ engendrés par l'algorithme. Ensuite, nous présentons des possibilités de mise à jour des asymptotes mobiles, des " move limits " et de l'ensemble actif.

4.1 Résolution des sous-problèmes

Vu les problèmes de convexité et de séparabilité des sous-problèmes $(SP(s^k))$, nous proposons, à la suite de Svanberg [10], une méthode duale de résolution de ces sous-problèmes.

Si nous exploitons le caractère séparable de $(SP(s^k))$, son dual prend la forme particulière suivante (voir Annexe IV.2) :

$$(D^k) \qquad \max_{u_j \geq 0,\ j \in \mathcal{J}_k} \ell(u) = r_0^k + \sum_{j \in \mathcal{J}_k} u_j r_j^k + \sum_{i \in I} \left[\frac{p_i^k(u)}{U_i^k - y_i(u)} + \frac{q_i^k(u)}{y_i(u) - L_i^k} \right]$$

où

- $I \subseteq \{1, \cdots, n\}$ est l'ensemble des indices des variables qui apparaissent explicitement dans $(SP(s^k))$;
- $p_i^k(u) = p_{0i}^k + \sum\limits_{j \in \mathcal{J}_k} u_j \, p_{ji}^k \, , \qquad \forall \, i \in I \, ;$
- $q_i^k(u) = q_{0i}^k + \sum\limits_{j \in \mathcal{J}_k} u_j \, q_{ji}^k \, , \qquad \forall \, i \in I \, ;$
- $y_i(u)$ est l'unique point de $\left[\max\left(\underline{x}_i, \alpha_i^k\right), \min\left(\overline{x}_i, \beta_i^k\right)\right]$ qui minimise $\ell_i(y_i, u) = \frac{p_i^k(u)}{U_i^k - y_i} + \frac{q_i^k(u)}{y_i - L_i^k}$.
  (L'expression explicite de $y_i(u)$ peut se trouver dans [2]).

Remarques :

1. La fonction duale est différentiable et concave.
2. Son gradient est donné par (voir Annexe IV.2) :

$$\frac{\partial \ell}{\partial u_j}(u) = \overline{f}_j(y(u); x^k) \, , \qquad \forall \, j \in \mathcal{J}_k$$

avec

$$y_i(u) = \begin{cases} \text{minimum de } \ell_i(y_i, u) \, , & \forall \, i \in I \, , \\ x_i^k & \forall \, i \notin I \, . \end{cases}$$

La fonction duale étant différentiable, concave et séparable, il est possible d'utiliser les méthodes de montée les plus efficaces pour la maximisation comme les méthodes Quasi-Newton. Nous pouvons ainsi espérer une convergence superlinéaire.

4.2 Mise à jour des paramètres

La mise à jour des paramètres est une question cruciale pour l'implémentation de l'algorithme *MMASS* exposé à la Section 3. Nous donnons ici quelques suggestions heuristiques concernant la mise à jour des asymptotes mobiles, des " *move limits* " et du paramètre δ_k qui intervient dans l'ensemble actif.

A. Mise à jour de δ_k

La seule contrainte imposée à δ_k est

$$0 \leq \delta_k \leq M$$

où M est une constante positive fixée arbitrairement grande.

Toutes les mises à jour qui respectent cette condition sont donc acceptables. Cependant, si δ_k est trop grand, un nombre trop élevé de contraintes dans l'ensemble actif risque de rendre le sous-problème $(SP(s^k))$ plus difficile à résoudre et même irréalisable. D'autre part, si δ_k est très petit, des instabilités peuvent apparaître quand on s'approche d'un point extrême du domaine.

On propose dans [9] la mise à jour que voici :

$$\begin{aligned} \delta_0 &> P(x^0) , \\ \delta_k &= P(x^k) , \qquad \forall\, k \geq 1 . \end{aligned}$$

Ainsi, pour tout $k \geq 1$, $\mathcal{J}_k = \left\{ j \in \{1, \cdots, m\} \;\middle|\; f_j(x^k) \geq 0 \right\}$. L'ensemble actif ne contient de cette façon que les contraintes violées.

Dans le cas où $(SP(s^k))$ n'admet pas de solution réalisable, on enlève de $\mathcal{J}_k$ l'indice de la " *contrainte la moins violée* " jusqu'à ce qu'une solution admissible soit détectée. Ceci rend la méthode plus stable car on évite ainsi l'introduction de variables artificielles, sources d'instabilités.

B. Mise à jour des " *move limits* "

Comme le propose Svanberg dans [10], on choisit

$$\begin{cases} \alpha_i^k = 0.9\ L_i^k + 0.1 x_i^k , \quad i = 1, \cdots, n , \\ \beta_i^k = 0.9\ U_i^k + 0.1 x_i^k , \quad i = 1, \cdots, n , \end{cases} \qquad \forall\, k .$$

Rappelons que ce choix permet d'éviter le problème des zéros au dénominateur tout en gardant un intervalle $[\alpha^k, \beta^k]$ assez proche de $[L^k, U^k]$.

C. Mise à jour des asymptotes mobiles

Si on veut que la mise à jour des asymptotes mobiles soit en cohérence avec le théorème de convergence, il faut qu'elle vérifie

$$\forall\, k : \begin{cases} U_i^k - L_i^k \geq \tau > 0\,, & i = 1, \cdots, n\,, \quad (44) \\ x_i^k = sL_i^k + (1-s)U_i^k\,, & i = 1, \cdots, n\,, \quad (45) \end{cases}$$

où $\tau > 0$, $0 < s < 1$ sont des paramètres fixés.

Un premier choix proposé à la Section 1 en (2) était le suivant :

$$\forall\, k : \begin{cases} L_i^k = x_i^k - (\overline{x}_i - \underline{x}_i)\,, & i = 1, \cdots, n\,, \\ U_i^k = x_i^k + (\overline{x}_i - \underline{x}_i)\,, & i = 1, \cdots, n\,, \end{cases}$$

Comme $U_i^k - L_i^k = 2(\overline{x}_i - \underline{x}_i) > 0$, pour tout $i = 1, \cdots, n$, pour tout k , (44) est vérifiée avec $\tau = 2(\overline{x}_i - \underline{x}_i)$. On voit aussi immédiatement que $x_i^k = \frac{L_i^k + U_i^k}{2}$, pour tout $i = 1, \cdots, n$, pour tout k , et donc (45) est d'application avec $s = \frac{1}{2}$.

Nous pouvons également envisager une approche plus élaborée où des règles empiriques sont utilisées pour élargir ou resserrer l'intervalle entre les asymptotes en vue de contrôler les comportements lents ou instables de la méthode. Rappelons la mise à jour déjà décrite en (3), (4) et (5) :

Soit s_1 un nombre réel donné tel que $0 < s_1 < 1$ (par exemple : $s_1 = 0.7$).

A) *Pour $k = 0$ et $k = 1$:*

$$\begin{cases} L_i^k = x_i^k - (\overline{x}_i - \underline{x}_i)\,, & i = 1, \cdots, n\,, \\ U_i^k = x_i^k + (\overline{x}_i - \underline{x}_i)\,, & i = 1, \cdots, n\,. \end{cases}$$

B) *Pour $k \geq 2$:*

(i) Si $(x_i^k - x_i^{k-1}) \cdot (x_i^{k-1} - x_i^{k-2}) < 0$ (oscillation) :

$$\begin{cases} L_i^k = x_i^k - s_1(x_i^{k-1} - L_i^{k-1})\,, & i = 1, \cdots, n\,, \\ U_i^k = x_i^k + s_1(U_i^{k-1} - x_i^{k-1})\,, & i = 1, \cdots, n\,. \end{cases}$$

(ii) Si $(x_i^k - x_i^{k-1}) \cdot (x_i^{k-1} - x_i^{k-2}) > 0$ (convergence lente et monotone) :

$$\begin{cases} L_i^k = x_i^k - \frac{1}{s_1}(x_i^{k-1} - L_i^{k-1}) , & i = 1, \cdots, n , \\ U_i^k = x_i^k + \frac{1}{s_1}(U_i^{k-1} - x_i^{k-1}) , & i = 1, \cdots, n . \end{cases}$$

C) Ajoutons en plus à la fin de chaque itération :

Si $U_i^k - L_i^k < \tau$ *avec* $\tau > 0$ *fixé,*

Alors

$$\begin{cases} L_i^k := L_i^k - \tau(1 - s) , \\ U_i^k := U_i^k + s\tau . \end{cases}$$

On tient compte ici de l'évolution des itérés, ce qui permet évidemment d'accélérer la vitesse de convergence du processus. Nous allons voir que le théorème de convergence englobe également cette mise à jour.

En effet, la condition (44) est vérifée grâce au point (C). Il reste donc à contrôler (45)

- Pour $k = 0$ et $k = 1$, il suffit de prendre $s = \frac{1}{2}$ comme précédemment.
- Pour $k \geq 2$, en remplaçant L_i^k et U_i^k par leur valeur, on voit directement que (45) est vraie quelle que soit la valeur donnée à s (et donc en particulier pour $s = \frac{1}{2}$).
- En outre, les ajustements du point (C) ne modifient pas $sL_i^k + (1 - s)U_i^k$ et laissent donc intacte l'égalité (45).

En conclusion, nous pouvons encore dire dans ce cas que

$$x_i^k = \frac{L_i^k + U_i^k}{2} , \qquad \forall\, i = 1, \cdots, n , \quad \forall\, k .$$

Section 5 Avantages de $MMASS$

Un atout important de cette approche est de laisser beaucoup de liberté quant au choix des asymptotes. La convergence a été établie dans le cadre général où toute mise à jour des asymptotes satisfaisant aux conditions

$$\begin{cases} U_i^k - L_i^k \geq \tau > 0 \,, & i = 1, \cdots, n \,, \\ sL_i^k + (1-s)U_i^k = x_i^k \,, & i = 1, \cdots, n \,, \end{cases} \qquad \forall\, k \,,$$

(où $\tau > 0$ et $0 < s < 1$ sont fixés)
peut être prise en compte. Comme nous l'avons vu dans la section précédente, cela permet de tenir compte des comportements de la méthode (oscillation ou monotonie) au cours des itérations et donc d'améliorer la vitesse de convergence.

Un autre avantage de la méthode $MMASS$ par rapport à MMA est l'introduction d'un ensemble de contraintes actives $\mathcal{J}_k$ qui allège le domaine admissible du sous-problème $(SP(s^k))$ et permet ainsi d'éviter l'introduction de variables artificielles. Cette nouvelle méthode a donc une meilleure stabilité numérique.

Annexe IV

Annexe IV.1 Démonstration des lemmes nécessaires au Théorème 1

Lemme 1

Soit $s^k = (x^k, \delta_k, L^k, U^k, \alpha^k, \beta^k) \in \widetilde{D}$.
Si les hypothèses (H_1) *et* (H_2) *du Théorème 1 sont vérifiées,*
Alors les assertions suivantes sont équivalentes :

1) x^k *est un point de Kuhn-Tucker de* (P) ,

2) x^k *résout* $(SP(s^k))$.

Rappelons que

$$(SP(s^k)) \qquad \begin{cases} \min\ \overline{f}_0(y; x^k) \\ \text{s.c.}\ \ \overline{f}_j(y; x^k) \leq 0\ , & j \in \mathcal{J}_k\ , \\ \qquad \max\ (\underline{x}_i, \alpha_i^k) \leq y_i \leq \min\ (\overline{x}_i, \beta_i^k)\ , & i = 1, \cdots, n\ , \end{cases}$$

avec $\mathcal{J}_k = \left\{ j \in \{1, \cdots, m\} \;\middle|\; f_j(x^k) \geq P(x^k) - \delta_k \right\}$,

$P(x^k) = \max\ \Big(0, (f_j(x^k), j = 1, \cdots, m)\Big)$.

Preuve :

1) $\Rightarrow$ 2)

x^k est un point de Kuhn-Tucker de (P) , i.e.

$$\begin{cases} x^k \text{ est admissible pour } (P) \text{ et} \\ \exists\, u \in I\!R^{m+} \ , \quad \exists\, v, w \in I\!R^{n+} \text{ t.q.} \\ \nabla f_0(x^k) + \sum\limits_{j=1}^{m} u_j \, \nabla f_j(x^k) - v + w = 0 \ , & (10) \\ u_j f_j(x^k) = 0 \ , \qquad j = 1, \cdots, m \ , & (11) \\ v_i(\underline{x}_i - x_i^k) = 0 \ , \quad i = 1, \cdots, n \ , & (12) \\ w_i(\overline{x}_i - x_i^k) = 0 \ , \quad i = 1, \cdots, n \ . & (13) \end{cases}$$

Or, par (7) et (8) ,

$$\overline{f}_j(x^k; x^k) = f_j(x^k) \ , \qquad j = 0, 1, \cdots, m \ , \tag{14}$$

$$\nabla \overline{f}_j(x^k; x^k) = \nabla f_j(x^k) \ , \qquad j = 0, 1, \cdots, m \ . \tag{15}$$

De plus, étant donné que x^k est admissible pour (P) , que $\mathcal{J}_k \subseteq \{1, \cdots, m\}$ et que $\alpha_i^k < x_i^k < \beta_i^k$, $i = 1, \cdots, n$, il est facile de voir que x^k est admissible pour $(SP(s^k))$.

Par ailleurs, par (12) , $v_i(\underline{x}_i - x_i^k) = 0$, $i = 1, \cdots, n$. Donc, si $v_i = 0$, on peut aussi écrire

$$v_i(\max\,(\underline{x}_i, \alpha_i^k) - x_i^k) = 0 \ .$$

Par contre, si $v_i \neq 0$, on a $\underline{x}_i = x_i^k$. Par conséquent,

$$\max\,(\underline{x}_i, \alpha_i^k) = \max\,(x_i^k, \alpha_i^k) = x_i^k \ .$$

On en conclut que

$$v_i(\max\,(\underline{x}_i, \alpha_i^k) - x_i^k) = 0 \ , \qquad i = 1, \cdots, n \ . \tag{16}$$

L'étude de (13) donne par le même procédé

$$w_i(\min\,(\overline{x}_i, \beta_i^k) - x_i^k) = 0 \ , \qquad i = 1, \cdots, n \ . \tag{17}$$

Montrons maintenant que

$$u_j = 0 \ , \qquad \forall\, j \notin \mathcal{J}_k \ . \tag{18}$$

En effet, x^k étant admissible pour (P) , on a

$$P(x^k) = 0 \quad \text{et} \quad \mathcal{J}_k = \left\{ j \in \{1, \cdots, m\} \;\middle|\; f_j(x^k) \geq -\delta_k \right\}, \qquad 0 \leq \delta_k \leq M \; .$$

Donc,

$$f_j(x^k) < -\delta_k \leq 0 \; , \qquad \forall \; j \notin \mathcal{J}_k \; .$$

Et par (11) , on a bien

$$u_j = 0 \; , \qquad \forall \; j \notin \mathcal{J}_k \; .$$

Par (14) , (15) , (16) , (17) et (18) , il découle donc des conditions de Kuhn-Tucker (10) , (11) , (12) et (13) que

$$\left\{ \begin{array}{l} x^k \text{ est admissible par } (SP(s^k)) \text{ et} \\ \exists \; u \in I\!R^{\#\mathcal{J}_k +} \; , \quad \exists \; v, w \in I\!R^{n+} \text{ t.q.} \\ \\ \nabla \overline{f}_0(x^k; x^k) + \sum\limits_{j \in \mathcal{J}_k} u_j \; \nabla \overline{f}_j(x^k; x^k) - v + w = 0 \; , \\ \\ u_j \overline{f}_j(x^k; x^k) = 0 \; , \qquad\qquad j \in \mathcal{J}_k \; , \\ v_i(\max\,(\underline{x}_i, \alpha_i^k) - x_i^k) = 0 \; , \quad i = 1, \cdots, n \; , \\ w_i(\min\,(\overline{x}_i, \beta_i^k) - x_i^k) = 0 \; , \quad i = 1, \cdots, n \; . \end{array} \right.$$

Ceci exprime que x^k est un point de Kuhn-Tucker de $(SP(s^k))$ et donc que x^k résout $(SP(s^k))$.

2) $\Rightarrow$ 1)
x^k résout $(SP(s^k))$. x^k est donc un point de Kuhn-Tucker de $(SP(s^k))$, i.e.

$$\left\{ \begin{array}{ll} x^k \text{ est admissible pour } (SP(s^k)) \text{ et} & \\ \exists \; u \in I\!R^{\#\mathcal{J}_k +} \; , \quad \exists \; v, w \in I\!R^{n+} \text{ t.q.} & \\ \\ \nabla \overline{f}_0(x^k; x^k) + \sum\limits_{j \in \mathcal{J}_k} u_j \; \nabla \overline{f}_j(x^k; x^k) - v + w = 0 \; , & (19) \\ \\ u_j \overline{f}_j(x^k; x^k) = 0 \; , \qquad\qquad j \in \mathcal{J}_k \; , & (20) \\ v_i(\max\,(\underline{x}_i, \alpha_i^k) - x_i^k) = 0 \; , \quad i = 1, \cdots, n \; , & (21) \\ w_i(\min\,(\overline{x}_i, \beta_i^k) - x_i^k) = 0 \; , \quad i = 1, \cdots, n \; . & (22) \end{array} \right.$$

De nouveau, rappelons que

$$\nabla \overline{f}_j(x^k; x^k) = \nabla f_j(x^k) , \qquad j = 0, 1, \cdots, m , \tag{23}$$

$$\overline{f}_j(x^k; x^k) = f_j(x^k) , \qquad j = 0, 1, \cdots, m . \tag{24}$$

D'autre part, comme x^k est admissible pour $(SP(s^k))$, on déduit que

$$\begin{cases} f_j(x^k) \leq 0 , \qquad j \in \mathcal{J}_k , & (25) \\ \underline{x}_i \leq x_i^k \leq \overline{x}_i , \quad i = 1, \cdots, n . & (26) \end{cases}$$

Donc,

$$P(x^k) - \delta_k \leq f_j(x^k) \leq 0 , \qquad \forall\, j \in \mathcal{J}_k .$$

Ainsi

$$P(x^k) - \delta_k \leq 0 .$$

Par conséquent,

$$f_j(x^k) < P(x^k) - \delta_k \leq 0 , \qquad \forall\, j \notin \mathcal{J}_k . \tag{27}$$

On peut alors affirmer, grâce à (25) , (26) et (27) que x^k est admissible pour (P) .

Par ailleurs, par (21) : $v_i(\max(\underline{x}_i, \alpha_i^k) - x_i^k) = 0$, $i = 1, \cdots, n$. Donc, si $v_i = 0$, on peut aussi écrire

$$v_i(\underline{x}_i - x_i^k) = 0 .$$

Par contre, si $v_i \neq 0$, alors $\max(\underline{x}_i, \alpha_i^k) = x_i^k$ et comme $\alpha_i^k < x_i^k$, on a directement que $\underline{x}_i = x_i^k$. En conclusion,

$$v_i(\underline{x}_i - x_i^k) = 0 , \qquad i = 1, \cdots, n . \tag{28}$$

L'analyse de (22) conduit par le même raisonnement à

$$w_i(x_i^k - \overline{x}_i) = 0 , \quad i = 1, \cdots, n . \tag{29}$$

En utilisant (23) , (24) , (28) et (29) et en prenant $u_j = 0$, pour tout $j \notin \mathcal{J}_k$, les conditions (19) , (20) , (21) et (22) peuvent se reformuler de la façon suivante :

$$\begin{cases} x^k \text{ est admissible pour } (P) \text{ et} \\ \exists\, u \in I\!R^{m+} \ , \quad \exists\, v, w \in I\!R^{n+} \text{ t.q.} \\ \nabla f_0(x^k) + \sum_{j=1}^{m} u_j \, \nabla f_j(x^k) - v + w = 0 \ , \\ u_j f_j(x^k) = 0 \ , \qquad j = 1, \cdots, m \ , \\ v_i(\underline{x}_i - x_i^k) = 0 \ , \quad i = 1, \cdots, n \ , \\ w_i(\overline{x}_i - x_i^k) = 0 \ , \quad i = 1, \cdots, n \ . \end{cases}$$

Nous avons ainsi montré que x^k est un point de Kuhn-Tucker de (P) .

■

Lemme 2

Soit $s^k = (x^k, \delta_k, L^k, U^k, \alpha^k, \beta^k) \in \widetilde{D}$.
Si les hypothèses (H_1) , (H_2) *et* (H_3) *du Théorème 1 sont vérifiées,*
Si x^k *n'est pas solution de* $(SP(s^k))$,
Alors $\phi'_\lambda(x^k; d^k) < 0$ *avec* $d^k = z^k - x^k$,

z^k *solution de* $(SP(s^k))$,

$\lambda > N$.

Preuve :
Rappelons que

$$\phi_\lambda(x^k) = f_0(x^k) + \lambda P(x^k)$$

où $\lambda > N > 0$,

$$P(x^k) = \max\left(0, (f_j(x^k), j = 1, \cdots, m)\right)$$

Si on pose $f_{m+1}(x) = 0$, pour tout $x \in I\!R^n$, $P(x^k)$ peut encore s'écrire

$$P(x^k) = \max_{j=1,\cdots,m+1} f_j(x^k) \ .$$

Donc, la dérivée directionnelle de ϕ_λ en x^k dans la direction d^k et donnée par

$$\phi'_\lambda(x^k; d^k) = \langle \nabla f_0(x^k), d^k \rangle + \lambda \max_{j \in \mathcal{J}(x^k)} \langle \nabla f_j(x^k), d^k \rangle \tag{30}$$

où

$$\mathcal{J}(x^k) = \left\{ j \in \{1, \cdots, m, m+1\} \;\middle|\; f_j(x^k) = P(x^k) \right\} .$$

A) *Bornons le terme* $\langle \nabla f_0(x^k), d^k \rangle$ *de (30) .*

Comme z^k est une solution optimale de $(SP(s^k))$, les conditions de Kuhn-Tucker s'écrivent

$$\left\{ \begin{array}{l} z^k \text{ est admissible pour } (SP(s^k)) \text{ et} \\ \exists\, u \in I\!R^{\#\mathcal{J}_k +} , \quad \exists\, v, w \in I\!R^{n+} \text{ t.q.} \\ \nabla \overline{f}_0(z^k; x^k) + \sum\limits_{j \in \mathcal{J}_k} u_j \, \nabla \overline{f}_j(z^k; x^k) - v + w = 0 , \\ u_j \overline{f}_j(z^k; x^k) = 0 , \qquad\qquad j \in \mathcal{J}_k , \\ v_i(\max\,(\underline{x}_i, \alpha_i^k) - z_i^k) = 0 , \quad i = 1, \cdots, n , \\ w_i(\min\,(\overline{x}_i, \beta_i^k) - z_i^k) = 0 , \quad i = 1, \cdots, n . \end{array} \right. \tag{31}$$

La condition d'optimalité du point-selle et (31) nous permettent alors d'écrire

$$\overline{f}_0(z^k; x^k) \leq \overline{f}_0(x^k; x^k) + \sum_{j \in \mathcal{J}_k} u_j \, \overline{f}_j(x^k; x^k) . \tag{32}$$

Etant donné que $\overline{f}_0(\bullet; x^k)$ est convexe :

$$\overline{f}_0(z^k; x^k) \geq \overline{f}_0(x^k; x^k) + \langle \nabla \overline{f}_0(x^k; x^k), d^k \rangle . \tag{33}$$

Par conséquent, on obtient par (33) et (32) :

$$\begin{aligned} \langle \nabla f_0(x^k), d^k \rangle &= \langle \nabla \overline{f}_0(x^k; x^k), d^k \rangle \\ &\leq \overline{f}_0(z^k; x^k) - \overline{f}_0(x^k; x^k) \\ &\leq \sum_{j \in \mathcal{J}_k} u_j f_j(x^k) . \end{aligned}$$

Donc, retenons que

$$\langle \nabla f_0(x^k), d^k \rangle \leq \sum_{j \in \mathcal{J}_k} u_j f_j(x^k) . \tag{34}$$

B) *Occupons-nous maintenant du second terme de (30) :*

Comme chaque $\overline{f}_j(\bullet; x^k)$ est convexe, on a

$$\overline{f}_j(z^k; x^k) \geq \overline{f}_j(x^k; x^k) + \langle \nabla \overline{f}_j(x^k; x^k), d^k \rangle , \qquad \forall\, j \in \mathcal{J}_k .$$

Par ailleurs, z^k étant admissible pour $(SP(s^k))$, on obtient

$$\overline{f}_j(z^k; x^k) \leq 0 , \qquad \forall\, j \in \mathcal{J}_k .$$

En particulier, pour tout $j \in \mathcal{J}(x^k)$,

$$\begin{aligned} \langle \nabla f_j(x^k), d^k \rangle &= \langle \nabla \overline{f}_j(x^k; x^k), d^k \rangle \\ &\leq \overline{f}_j(z^k; x^k) - \overline{f}_j(x^k; x^k) \\ &\leq -\overline{f}_j(x^k; x^k) \\ &= -f_j(x^k) \\ &= -P(x^k) . \end{aligned}$$

Donc,

$$\max_{j \in \mathcal{J}(x^k)} \langle \nabla f_j(x^k), d^k \rangle \leq -P(x^k) . \tag{35}$$

Deux cas peuvent alors se présenter :

1) $P(x^k) > 0$;
2) $P(x^k) = 0$.

1) Si $P(x^k) > 0$, alors par (34) et (35) ,

$$\begin{aligned} \phi'_\lambda(x^k; d^k) &\leq \sum_{j \in \mathcal{J}_k} u_j \, f_j(x^k) - \lambda \, P(x^k) \\ &\leq \sum_{j \in \mathcal{J}_k} u_j \, P(x^k) - \lambda \, P(x^k) \\ &= \left(\sum_{j \in \mathcal{J}_k} u_j - \lambda \right) P(x^k) . \end{aligned}$$

Grâce à l'hypothèse (H_3) , $\sum\limits_{j \in \mathcal{J}_k} u_j \leq N < \lambda$, et donc

$$\phi'_\lambda(x^k; d^k) < 0 .$$

2) Si $P(x^k) = 0$, alors, par (35),

$$\max_{j \in \mathcal{J}(x^k)} \langle \nabla f_j(x^k), d^k \rangle \leq 0 .$$

Et comme $m+1 \in \mathcal{J}(x^k)$,

$$\max_{j \in \mathcal{J}(x^k)} \langle \nabla f_j(x^k), d^k \rangle = 0 .$$

Donc, (30) s'écrit

$$\begin{aligned} \phi'_\lambda(x^k; d^k) &= \langle \nabla f_0(x^k), d^k \rangle \\ &= \langle \nabla \overline{f}_0(x^k; x^k), d^k \rangle . \end{aligned}$$

Et par (33) ,

$$\phi'_\lambda(x^k; d^k) \leq \overline{f}_0(z^k; x^k) - \overline{f}_0(x^k; x^k) .$$

De plus, $\overline{f}_0(z^k; x^k) < \overline{f}_0(x^k; x^k)$ car, par hypothèse, x^k est une solution admissible mais non optimale de $(SP(s^k))$. Ainsi;

$$\phi'_\lambda(x^k; d^k) < 0 .$$

■

Lemme 3

Soient une suite (x^k) qui converge vers $x \in \mathbb{R}^n$, et une fonction $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ continûment différentiable.
Alors, pour k assez grand, $\frac{\partial f}{\partial y_i}(x^k)$ est du même signe que $\frac{\partial f}{\partial y_i}(x)$.
Autrement dit,

$$\exists\ k \in \mathbb{N}_0 \quad t.q. \quad \forall\ k' \geq k\ : \qquad \frac{\partial f}{\partial y_i}(x^{k'}) \cdot \frac{\partial f}{\partial y_i}(x) \geq 0 .$$

Preuve :
Par l'absurde, supposons que

$$\forall\ k \in \mathbb{N}_0 , \quad \exists\ n_k \geq k\ : \qquad \frac{\partial f}{\partial y_i}(x^{n_k}) \cdot \frac{\partial f}{\partial y_i}(x) < 0 .$$

Considérons alors les trois cas suivants :

1) Si $\frac{\partial f}{\partial y_i}(x) = 0$, la contradiction est alors immédiate.

2) Si $\frac{\partial f}{\partial y_i}(x) < 0$, on a alors que

$$\forall\, k \in I\!N_0\,, \quad \exists\, n_k \geq k\ : \qquad \frac{\partial f}{\partial y_i}(x^{n_k}) > 0\,.$$

Or, f est continûment différentiable; donc

$$\frac{\partial f}{\partial y_i}(x^{n_k}) \quad \underset{k\to+\infty}{\longrightarrow} \quad \frac{\partial f}{\partial y_i}(x) > 0\,,$$

ce qui est absurde.

3) Si $\frac{\partial f}{\partial y_i}(x) > 0$, on obtient une absurdité par le même raisonnement que ci-dessus.

■

Lemme 4

Sous les hypothèses (H_1) et (H_2) du Théorème 1, la multiapplication Alg est fermée sur $\widetilde{D} \setminus \Omega$.

Preuve :
Rappelons que $Alg : \widetilde{D} \to \mathcal{P}(\widetilde{D})$ est la composée de deux multiapplications :

$$Alg = \mathcal{B} \circ \mathcal{A}\,.$$

Soit $s^* \in \widetilde{D} \setminus \Omega$. Alg sera fermée en s^* si on arrive à montrer que

1) $\mathcal{A}$ est fermée en s^* ;

2) $\mathcal{B}$ est fermée sur $\mathcal{A}(s^*)$;

3) $\widetilde{D} \times D$ est compact.

1) *$\mathcal{A}$ est fermée en $s^* = (x^*, \delta_*, L^*, U^*, \alpha^*, \beta^*) \in \widetilde{D} \setminus \Omega$.*
Soit $s^k = (x^k, \delta_k, L^k, U^k, \alpha^k, \beta^k) \in \widetilde{D} \setminus \Omega$ tel que $s^k \to s^*$.
Soit z^k tel que $(s^k, z^k) \in \mathcal{A}(s^k)$, i.e. z^k est solution optimale de $(SP(s^k))$ et $z^k \to z^*$.
Montrons que $(s^*, z^*) \in \mathcal{A}(s^*)$, i.e. que z^* est solution optimale de $(SP(s^*))$. Pour cela, divisons la preuve en deux parties :

A) z^* est admissible pour $(SP(s^*))$.

B) $\overline{f}_0(z^*;x^*) \leq \overline{f}_0(z;x^*)$ pour tout z admissible pour $(SP(s^*))$.

A) Montrons que z^* est admissible pour $(SP(s^*))$, i.e. que

$$(i) \quad \overline{f}_j(z^*;x^*) \leq 0 , \qquad \forall\, j \in \mathcal{J}_* ,$$

$$(ii) \quad \max\,(\underline{x}_i, \alpha_i^*) \leq z_i^* \leq \min\,(\overline{x}_i, \beta_i^*) , \quad i = 1, \cdots, n ,$$

avec $\mathcal{J}_* = \left\{ j \in \{1, \cdots, m\} \;\middle|\; f_j(x^*) \geq P(x^*) - \delta_* \right\}$,

$$P(x^*) = \max\left(0, (f_j(x^*) \ , \ j = 1, \cdots, m)\right) .$$

Comme s^k converge vers s^* , on a que x^k converge vers x^* et ainsi, par le Lemme 3 :

pour tout $j = 0, 1, \cdots, m$, pour tout $i = 1, \cdots, n$, $\frac{\partial f_j}{\partial y_i}(x^k)$ et $\frac{\partial f_j}{\partial y_i}(x)$ sont de même signe pour k assez grand.

Par ailleurs, z^k est solution optimale de $(SP(s^k))$ et donc admissible pour $(SP(s^k))$. Ainsi

$$\overline{f}_j(z^k;x^k) \leq 0 , \qquad \forall\, j \in \mathcal{J}_k . \tag{36}$$

En prenant en considération le Lemme 3 et le fait que $s^k \to s^*$ et $z^k \to z^*$, le passage à la limite dans (36) donne immédiatement

$$\overline{f}_j(z^*;x^*) \leq 0 , \qquad \forall\, j \in \mathcal{J}_* ,$$

ce qui est conforme à ce qu'on demande en (i) .

De plus, comme z^k est admissible pour $(SP(s^k))$, on a aussi

$$\max\,(\underline{x}_i, \alpha_i^k) \leq z_i^k \leq \min\,(\overline{x}_i, \beta_i^k) , \qquad i = 1, \cdots, n .$$

Puisque $z^k \to z^*$, $\alpha^k \to \alpha^*$, $\beta^k \to \beta^*$, on obtient (ii) par passage à la limite.

B) Il reste à montrer que $\overline{f}_0(z^*;x^*) \leq \overline{f}_0(z;x^*)$ pour tout z admissible pour $(SP(s^*))$.

Soit z admissible pour $(SP(s^*))$. Il vérifie alors

$$\overline{f}_j(z;x^*) \leq 0 , \qquad \forall\, j \in \mathcal{J}_* ,$$

$$\max\,(\underline{x}_i, \alpha_i^*) \leq z_i \leq \min\,(\overline{x}_i, \beta_i^*) , \quad i = 1, \cdots, n .$$

Distinguons les deux cas suivants :

Cas 1 : $\overline{f}_j(z;x^*) = -\varepsilon_j < 0$ pour tout $j \in \mathcal{J}_*$.

Etant donné que $s^k \to s^*$ et que z est admissible pour $(SP(s^*))$, on peut montrer que, pour k assez grand, z est admissible pour $(SP(s^k))$ (la preuve de ceci est assez évidente; il suffit de raisonner par l'absurde).

Or, z^k est une solution optimale de $(SP(s^k))$; donc

$$\overline{f}_0(z^k;x^k) \leq \overline{f}_0(\xi;x^k) \text{ pour tout } \xi \text{ admissible pour } (SP(s^k)) .$$

Ainsi, pour k assez grand,

$$\overline{f}_0(z^k;x^k) \leq \overline{f}_0(z;x^k) .$$

Par conséquent, en passant à la limite,

$$\overline{f}_0(z^*;x^*) \leq \overline{f}_0(z;x^*) ,$$

ce qu'il fallait démontrer.

Cas 2 : Il existe $j \in \mathcal{J}_*$ tel que $\overline{f}_j(z;x^*) = 0$.

Par l'hypothèse (H_2) , l'intérieur du domaine admissible de $(SP(s^*))$ n'est pas vide. Donc,

$$\exists\, w \in \mathbb{R}^n \text{ t.q. } \begin{cases} \overline{f}_j(w;x^*) < 0 , & \forall\, j \in \mathcal{J}_* , \\ \max(\underline{x}_i, \alpha_i^*) \leq w_i \leq \min(\overline{x}_i, \beta_i^*) , & i = 1, \cdots, n . \end{cases}$$

Considérons alors la suite (z_n) définie par

$$z_n = \left(1 - \frac{1}{n}\right) z + \frac{1}{n} w , \qquad \forall\, n \in \mathbb{N}_0 ,$$

telle que $z_n \to z$.

Comme $\overline{f}_j(\bullet;x^*)$ est convexe pour tout $j \in \mathcal{J}_*$,

$$\overline{f}_j(z_n;x^*) \leq \left(1 - \frac{1}{n}\right) \overline{f}_j(z;x^*) + \frac{1}{n} \overline{f}_j(w;x^*) , \qquad \forall\, j \in \mathcal{J}_* .$$

De plus, $\overline{f}_j(z;x^*) \leq 0$ pour tout $j \in \mathcal{J}_*$ car z est admissible pour $(SP(s^*))$ et $\overline{f}_j(w;x^*) < 0$ pour tout $j \in \mathcal{J}_*$. D'où

$$\overline{f}_j(z_n;x^*) < 0 , \qquad \forall\, j \in \mathcal{J}_* . \tag{37}$$

Puisque z et w sont admissibles pour $(SP(s^*))$, on a aussi

$$\max(\underline{x}_i, \alpha_i^*) \leq (z_n)_i \leq \min(\overline{x}_i, \beta_i^*) , \qquad i = 1, \cdots, n . \tag{38}$$

Par (37) et (38) , on peut donc dire que z_n est admissible pour $(SP(s^*))$ et que $\overline{f}_j(z_n; x^*) < 0$ pour tout $j \in \mathcal{J}_*$. On peut alors appliquer le même raisonnement que pour le cas 1 avec $z = z_n$ et on obtient

$$\overline{f}_0(z^*; x^*) \leq \overline{f}_0(z_n; x^*) .$$

En faisant tendre n vers l'infini, il s'ensuit que

$$\overline{f}_0(z^*; x^*) \leq \overline{f}_0(z; x^*) ,$$

ce qui était attendu.

2) *$\mathcal{B}$ est fermée sur $\mathcal{A}(s^*)$ où $s^* = (x^*, \delta_*, L^*, U^*, \alpha^*, \beta^*) \in \widetilde{D} \setminus \Omega$.*

Considérons $(s^*, z^*) \in \mathcal{A}(s^*)$. Il faut voir que $\mathcal{B}$ est fermée en (s^*, z^*) .

Soit $(s^*, z^k) \in \mathcal{A}(s^*)$ tel que $z^k \to z^*$.
Soit $\widetilde{s}^k = (\widetilde{x}^k, \widetilde{\delta}_k, \widetilde{L}^k, \widetilde{U}^k, \widetilde{\alpha}^k, \widetilde{\beta}^k) \in \mathcal{B}(s^*, z^k)$ tel que $\widetilde{s}^k \to \widetilde{s}^* = (\widetilde{x}^*, \widetilde{\delta}_*, \widetilde{L}^*, \widetilde{U}^*, \widetilde{\alpha}^*, \widetilde{\beta}^*)$.

Montrons que $\widetilde{s}^* \in \mathcal{B}(s^*, z^*)$, i.e. que les deux points suivants sont vérifiés :

A) $\widetilde{x}^* = \operatorname{argmin}\left(\phi_\lambda(\xi) \,\middle|\, \xi \in [x^*, z^*]\right)$.
Autrement dit, montrons qu'il existe $\overline{\sigma} \geq 0$ tel que

$$\widetilde{x}^* = x^* + \overline{\sigma}(z^* - x^*) , \tag{39}$$

$$\phi_\lambda(x^* + \sigma(z^* - x^*)) \geq \phi_\lambda(\widetilde{x}^*) , \qquad \forall\, \sigma \geq 0 . \tag{40}$$

Comme $\widetilde{s}^k \in \mathcal{B}(s^*, z^k)$:

$$\widetilde{x}^k = \operatorname{argmin}\left(\phi_\lambda(\xi) \,\middle|\, \xi \in [x^*, z^k]\right) .$$

Donc, il existe $\sigma_k \geq 0$ tel que

$$\widetilde{x}^k = x^* + \sigma_k(z^k - x^*) , \tag{41}$$

$$\phi_\lambda(x^* + \sigma(z^k - x^*)) \geq \phi_\lambda(\widetilde{x}^k) , \qquad \forall\, \sigma \geq 0 . \tag{42}$$

Puisque $\sigma_k \geq 0$ et que $s^* \notin \Omega$, on a pour k assez grand

$$\sigma_k = \frac{\|\widetilde{x}^k - x^*\|}{\|z^k - x^*\|} .$$

Choisissons

$$\overline{\sigma} = \lim_{k \to +\infty} \sigma_k \, .$$

Comme $\widetilde{x}^k \to \widetilde{x}^*$, $z^k \to z^*$ et $s^* \notin \Omega$, on obtient

$$\overline{\sigma} = \frac{\|\widetilde{x}^* - x^*\|}{\|z^* - x^*\|} \, .$$

Pour voir que ce $\overline{\sigma}$ vérifie bien (39) et (40) , il suffit de passer à la limite dans (41) et (42) .

B) • $0 \leq \widetilde{\delta}_* \leq M$,

• $\widetilde{U}_i^* - \widetilde{L}_i^* \geq \tau > 0$, $\quad i = 1, \cdots, n$,

• $\widetilde{x}_i^* = s\widetilde{L}_i^* + (1-s)\widetilde{U}_i^*$, $\quad i = 1, \cdots, n$,

• $\widetilde{L}_i^* > -\infty \quad$ et $\quad \widetilde{U}_i^* < +\infty$, $\quad i = 1, \cdots, n$,

• $\widetilde{\alpha}_i^* = 0.9\ \widetilde{L}_i^* + 0.1\ \widetilde{x}_i^*$, $\quad i = 1, \cdots, n$,

• $\widetilde{\beta}_i^* = 0.9\ \widetilde{U}_i^* + 0.1\ \widetilde{x}_i^*$, $\quad i = 1, \cdots, n$.

Ces relations découlent immédiatement du fait que $\widetilde{s}^k \to \widetilde{s}^*$ et que $\widetilde{s}^k \in \mathcal{B}(s^*, z^k)$ pour tout k .

3) $\widetilde{D} \times D$ *est compact.*
Comme $D = [\underline{x}, \overline{x}]$, D est fermé, borné et donc compact.
Pour montrer que $\widetilde{D}$ est borné, il faut voir que chaque composante d'un élément quelconque de $\widetilde{D}$ admet des bornes inférieure et supérieure finies.
Soit $s = (x, \delta, L, U, \alpha, \beta) \in \widetilde{D}$; on a

- $\underline{x}_i \leq x_i \leq \overline{x}_i$, pour tout $i = 1, \cdots, n$.
- $0 \leq \delta \leq M$.
- pour tout $i = 1, \cdots, n$, il existe $R_i > -\infty$ tel que $R_i \leq L_i$.
  En effet, comme $x_i = s\ L_i + (1-s)\ U_i$, si ce n'était pas le cas, on n'aurait pas que $x_i \in [\underline{x}_i, \overline{x}_i]$.
- De la même façon,
  pour tout $i = 1, \cdots, n$, il existe $T_i < +\infty$ tel que $U_i \leq T_i$.
- $L_i < \alpha_i < x_i$, pour tout $i = 1, \cdots, n$.
- $x_i < \beta_i < L_i$, pour tout $i = 1, \cdots, n$.

On est ainsi arrivé à borner chacune des composantes de s .

Pour vérifier que l'ensemble $\widetilde{D}$ est aussi fermé, il suffit de constater qu'il contient les limites de ses suites convergentes.

■

Annexe IV.2 Expression du dual de $(SP(s^k))$ et du gradient de la fonction duale $\ell(u)$

Soit $s^k = (x^k, \delta_k, L^k, U^k, \alpha^k, \beta^k) \in \widetilde{D}$.

Rappelons la forme de $(SP(s^k))$:

$$(SP(s^k)) \qquad \begin{cases} \min\ \overline{f}_0(y; x^k) \\ \text{s.c.}\ \ \overline{f}_j(y; x^k) \leq 0\ , & j \in \mathcal{J}_k\ , \\ \qquad \max\ (\underline{x}_i, \alpha_i^k) \leq y_i \leq \min\ (\overline{x}_i, \beta_i^k)\ , & i = 1, \cdots, n\ , \end{cases}$$

avec $\mathcal{J}_k = \left\{ j \in \{1, \cdots, m\} \;\middle|\; f_j(x^k) \geq P(x^k) - \delta_k \right\}$,

$$\overline{f}_j(y; x^k) = r_j^k + \sum_{i=1}^{n} \left[\frac{p_{ji}^k}{U_i^k - y_i} + \frac{q_{ji}^k}{y_i - L_i^k} \right] \ , \quad \forall\, j \in \mathcal{J}_k \cup \{0\}\ .$$

Soient $E = \left\{ y \in I\!R^n \;\middle|\; \max\ (\underline{x}_i, \alpha_i^k) \leq y_i \leq \min\ (\overline{x}_i, \beta_i^k)\ ,\ \forall\, i = 1, \cdots, n \right\}$,

$E_i = \left\{ y_i \in I\!R \;\middle|\; \max\ (\underline{x}_i, \alpha_i^k) \leq y_i \leq \min\ (\overline{x}_i, \beta_i^k) \right\}$,

Le dual de $(SP(s^k))$ s'écrit

$$(D^k) \qquad \begin{cases} \max\limits_{u \in I\!R^{\#\mathcal{J}_k}} \ell(u) \\ \text{s.c.}\ \ u \geq 0\ , \end{cases}$$

où $\ell(u) = \min_{y \in E} L(y,u)$,

$$\begin{aligned} L(y,u) &= \overline{f}_0(y;x^k) + \sum_{j \in \mathcal{J}_k} u_j \, \overline{f}_j(y;x^k) \\ &= r_0^k + \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{p_{0i}^k}{U_i^k - y_i} + \frac{q_{0i}^k}{y_i - L_i^k} \right) + \sum_{j \in \mathcal{J}_k} u_j \, r_j^k + \sum_{j \in \mathcal{J}_k} u_j \left[\sum_{i=1}^{n} \left(\frac{p_{ji}^k}{U_i^k - y_i} + \frac{q_{ji}^k}{y_i - L_i^k} \right) \right] . \end{aligned}$$

Posons

$$\begin{aligned} p_i^k(u) &= p_{0i}^k + \sum_{j \in \mathcal{J}_k} u_j \, p_{ji}^k , \qquad i = 1, \cdots, n , \\ q_i^k(u) &= q_{0i}^k + \sum_{j \in \mathcal{J}_k} u_j \, q_{ji}^k , \qquad i = 1, \cdots, n . \end{aligned}$$

De cette façon,

$$L(y,u) = r_0^k + \sum_{j \in \mathcal{J}_k} u_j r_j^k + \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{p_i^k(u)}{U_i^k - y_i} + \frac{q_i^k(u)}{y_i - L_i^k} \right) .$$

Et donc

$$\begin{aligned} \ell(u) &= \min_{y \in E} L(y,u) \\ &= r_0^k + \sum_{j \in \mathcal{J}_k} u_j r_j^k + \sum_{i=1}^{n} \min_{y_i \in E_i} \ell_i(y_i,u) \end{aligned}$$

où $\ell_i(y_i,u) = \frac{p_i^k(u)}{U_i^k - y_i} + \frac{q_i^k(u)}{y_i - L_i^k}$.

Notons $y_i(u)$ l'unique point de E_i qui minimise $\ell_i(y_i,u)$. On obtient

$$\ell(u) = r_0^k + \sum_{j \in \mathcal{J}_k} u_j r_j^k + \sum_{i=1}^{n} \ell_i(y_i(u),u) .$$

Soit encore $I \subseteq \{1, \cdots, n\}$ l'ensemble des indices des variables qui apparaissent explicitement dans $(SP(s^k))$.

Le dual (D^k) de $(SP(s^k))$ peut alors s'écrire de la façon suivante :

$$(D^k) \qquad \max_{u_j \geq 0 \ , \ j \in \mathcal{J}_k} \ell(u) = r_0^k + \sum_{j \in \mathcal{J}_k} u_j \, r_j^k + \sum_{i \in I} \left[\frac{p_i^k(u)}{U_i^k - y_i(u)} + \frac{q_i^k(u)}{y_i(u) - L_i^k} \right] .$$

Les éléments du gradient de la fonction duale $\ell(u)$ s'obtiennent alors facilement :

$$\frac{\partial \ell}{\partial u_j}(u) = r_j^k + \sum_{i \in I} \left(\frac{p_{ji}^k}{U_i^k - y_i(u)} + \frac{q_{ji}^k}{y_i(u) - L_i^k} \right) , \qquad \forall \, j \in \mathcal{J}_k .$$

Or, par définition de I , pour tout $i \notin I$, y_i n'intervient pas explicitement dans $(SP(s^k))$ et donc $p_{ji}^k = q_{ji}^k = 0$ pour tout $j \in \mathcal{J}_k$. On peut alors choisir pour $y_i(u)$ n'importe quel point dans E_i . Une possibilité est donc de prendre $y_i(u) = x_i^k$ pour tout $i \notin I$. D'où

$$\forall\, j \in \mathcal{J}_k : \qquad \frac{\partial \ell}{\partial u_j}(u) = r_j^k + \sum_{i=1}^{n} \left[\frac{p_{ji}^k}{U_i^k - y_i(u)} + \frac{q_{ji}^k}{y_i(u) - L_i^k} \right]$$
$$= \overline{f}_j(y(u); x^k)$$

avec

$$y_i(u) = \begin{cases} \text{minimum de } \ell_i(y_i, u) , & \forall\, i \in I , \\ x_i^k , & \forall\, i \notin I . \end{cases}$$

CONCLUSIONS

Dans cette seconde partie, nous avons décrit des méthodes qui permettent de résoudre un problème de programmation non linéaire en l'approximant successivement par une série de sous-problèmes.

Au Chapitre 3, nous avons étudié la convergence d'un *algorithme général* qui englobe toutes les méthodes d'approximation conservative : SQP , $CONLIN$, MMA , etc. De cette façon, nous pouvons envisager de créer un programme informatique basé sur ce schéma général et où on pourrait sélectionner le type d'approximation le mieux approprié au problème que l'on cherche à résoudre.

Nous avons ensuite analysé plus spécialement *la méthode des asymptotes mobiles* à laquelle une *stratégie d'ensemble actif* a été ajoutée dans le but de stabiliser la méthode. Les démonstrations de la convergence de MMA établies jusqu'ici ne considéraient pas, à notre connaissance, une mise à jour des asymptotes tenant compte du comportement de la méthode. C'est pourquoi nous avons entrepris d'étudier la convergence de $MMASS$ dans un cadre plus général où il est possible de stabiliser les comportements oscillatoires et de relaxer une évolution lente et monotone des itérés.

Dans une perspective d'avenir, il serait intéressant d'étudier le comportement de la méthode des asymptotes mobiles lors de l'introduction de contraintes d'égalité.

Nous avons déjà souligné dans l'introduction que beaucoup de problèmes d'optimisation de structure sont en variables discrètes. Une autre suggestion pour le futur serait donc d'incorporer des variables discrètes. A ce sujet, les remarques suivantes peuvent être éclairantes. La forme générale d'un problème de minimisation de poids structural (décrit

dans l'introduction) est la suivante :

$$(1) \qquad \begin{cases} \min\ w = \sum_{i=1}^{n} \gamma_i\, \ell_i\, a_i \\ \text{s.c. } h_j \geq 0\ , \quad j = 1, \cdots, m\ , \\ \qquad a_i \in \Omega_i\ , \quad i = 1, \cdots, n\ , \end{cases}$$

où w est le poids structural,

a_i est la section de la barre i de la structure,

γ_i est le poids volumique de la barre i,

ℓ_i est la longueur de la barre i ,

Ω_i est l'ensemble des valeurs discrètes admissibles pour la variable de conception a_i ,

h_j ($j = 1, \cdots, m$) sont les contraintes liées au comportement mécanique de la structure.

Par un développement en série de Taylor limité au second ordre, autour d'un point fixé et par une approximation linéaire des contraintes, autour du même point, nous avions transformé le problème (1) ci-dessus en un problème quadratique avec contraintes linéaires en variables entières :

$$(2) \qquad \begin{cases} \min\ \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{n} x_i^2 \\ \text{s.c. } \sum_{i=1}^{n} c_{ij}\, x_i \geq \underline{c}_j\ , \quad j = 1, \cdots, m\ , \\ \qquad x_i \in X_i\ , \qquad\qquad i = 1, \cdots, n\ , \end{cases}$$

La première partie de ce travail était consacrée à la résolution de ce dernier problème.

Pour résoudre (1) en suivant l'esprit de la deuxième partie, on pourrait donc considérer un schéma itératif du même type que SQP , MMA , etc. où on construirait et résoudrait à chaque itération un sous-problème du type (2).

Références

[1] BERTSEKAS, D.P., Constrained Optimization and Lagrange Multipliers Methods, Academic Press, New-York, 1992.

[2] DE BAETS, V., Une Etude de la Nouvelle Méthode des Asymptotes Mobiles en Optimisation, mémoire non publié, Facultés Universitaires de Namur, 1987.

[3] FLEURY, C. & BRAIBANT V., "Structural optimization. A new dual method using mixed variables", LTAS Report SA–115, Université de Liège, 1984.

[4] LONGO, A., NÓ, M., AIZPITARTE, M. & UNZUETA, J., "Conservative approximations in non linear optimization. Theory and Examples", *Computers & Structures*, Vol. 39, No. 5, pp. 441–449, 1991.

[5] MICHELON, P., Méthodes Duales pour Problèmes d'Optimisation avec Variables Entières, Thèse de Doctorat, Université Blaise Pascal de Clermont-Ferrand, 1989.

[6] MINOUX, M., Programmation Mathématique : Théorie et Algorithmes, Tomes I et II, Ed. Dunod, 1983.

[7] NGUYEN, V.H., FLEURY, C. & STRODIOT, J.J., "A mathematical convergence analysis of the convex linearization method for engineering design optimization", *Engineering Optimization*, Vol. 11, pp. 195–216, 1987.

[8] RAELET, D., Optimisation non Linéaire en Variables Discrètes : Approche Primale–Duale, mémoire non publié, Université de Liège, 1992.

[9] SALDANHA, R.R., MAHEY, P. & COULOMB, J.L., "Moving asymptotes and active set strategy for constrainted optimization design in magnetostatic problems", article non publié, Grenoble, 1992.

[10] SVANBERG, K., "The method of moving asymptotes. A new method for structural optimization", *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, Vol. 24, pp. 359–373, 1987.

[11] VESELKO, D., Optimisation en Variables Discrètes : Approche Duale, mémoire non publié, Université de Liège, 1991.