



THESIS / THÈSE

MASTER EN SCIENCES MATHÉMATIQUES

Un nouvel algorithme en optimisation de structures

Martin, Michèle; Barbeaux, Luc

Award date:
1984

Awarding institution:
Universite de Namur

[Link to publication](#)

General rights

Copyright and moral rights for the publications made accessible in the public portal are retained by the authors and/or other copyright owners and it is a condition of accessing publications that users recognise and abide by the legal requirements associated with these rights.

- Users may download and print one copy of any publication from the public portal for the purpose of private study or research.
- You may not further distribute the material or use it for any profit-making activity or commercial gain
- You may freely distribute the URL identifying the publication in the public portal ?

Take down policy

If you believe that this document breaches copyright please contact us providing details, and we will remove access to the work immediately and investigate your claim.

UN NOUVEL ALGORITHME
EN
OPTIMISATION DE STRUCTURES

présenté par

Promoteur :
Monsieur Nguyen Van Hien

Michèle Martin
Luc Barbeaux

Année 1983-1984

Nous remercions vivement toutes les personnes qui ont contribué à l'élaboration de ce mémoire : Messieurs NGUYEN V.H. et Cl. FLEURY pour leur disponibilité et leurs conseils, Ch. MERCKX, et particulièrement J.J. STRODIOT, pour son aide efficace.

A nos parents

Table des matières

	Page
Introduction	
Chapitre 0 - DEFINITIONS	
Chapitre 1 - PROBLEMES TYPES EN OPTIMISATION DE STRUCTURES	
1.1. Pylône	1.1
1.2. Structure de la monture du moteur d'une fusée auxiliaire d' Ariane 4	1.3
Chapitre 2 - FORMULATION DU PROBLEME ET MOTIVATION POUR LINEARISATION CONVEXE	
2.1. Vers une linéarisation convexe	2.1
2.2. Propriétés de la linéarisation convexe	2.4
Chapitre 3 - METHODE DE LINEARISATION CONVEXE	
3.1. Méthode	3.1
3.2. Forme générale et propriétés d'un sous-problème linéarisé	3.2
3.3. Illustration de la méthode	3.3
Chapitre 4 - RESOLUTION D'UN SOUS-PROBLEME PAR DUALITE	
4.1. Normalisation du sous-problème	4.1
4.2. Résolution du problème dual	4.2
Chapitre 5 - ALGORITHME	
5.1. Relaxation des contraintes primales	5.1
5.2. Résolution du dual	5.2
5.3. Algorithme général	5.5

Chapitre 6 - QUANT A LA CONVERGENCE...

6.1. Cas de non convergence

6.1

6.2. Théorèmes de convergence

6.5

Chapitre 7 - ASPECT NUMERIQUE

Conclusion

Annexes

Références

Introduction

L'optimisation de structures et de formes est confrontée à des problèmes de minimisation coûteux. Les principales difficultés viennent du grand nombre de variables et de contraintes non linéaires d'inégalité qui sont des fonctions implicites difficiles à calculer. En effet, leur évaluation numérique précise demande une analyse aux éléments finis complète et le coût calcul devient souvent prohibitif pour des problèmes de grande taille. Ceci explique les recherches pour développer des méthodes adéquates nécessitant peu d'évaluations de fonctions.

Le Laboratoire de Techniques Aéronautiques et Spatiales de l'Université de LIEGE utilise actuellement une nouvelle méthode qui s'avère en pratique efficace pour la résolution de ses problèmes et pour laquelle aucun résultat théorique de convergence n'avait été prouvé. Le but de ce mémoire est essentiellement d'étudier les conditions de convergence de la méthode ou les modifications à y apporter pour qu'elle converge.

Le premier chapitre sera consacré à la présentation de problèmes types en optimisation de structures; dans le deuxième, nous étudierons les raisons qui sont à l'origine de la méthode présentée et illustrée dans les chapitres 3 et 4. Un algorithme sera exposé au chapitre 5 et le sixième chapitre concernera les résultats de convergence et les modifications possibles à apporter à la méthode. Enfin, quelques résultats numériques illustreront la méthode dans le septième chapitre. Dans un souci de clarté, nous présenterons les démonstrations en annexe.

0. Définitions

Ce chapitre contient des définitions de concepts qui apparaîtront assez fréquemment dans la suite de l'exposé. Le lecteur pourra s'y référer lorsqu'il rencontrera ces concepts.

Multiapplication ou application multivoque

Une multiapplication ou application multivoque $A: X \rightarrow \mathcal{S}(Y)$ est une application qui à tout point de l'ensemble X fait correspondre un ensemble de points de l'ensemble Y .

Multiapplication fermée

La multiapplication $A: X \rightarrow \mathcal{S}(Y)$ est dite fermée si et seulement si pour toute suite (x^k) de X convergeant vers un point x , pour toute suite (y^k) de Y convergeant vers un point y et telle que y^k appartient à $A(x^k)$ pour tout k , y appartient à $A(x)$.

Fonction Lipschitzienne

La fonction f est (localement) Lipschitzienne de constante de LIPSCHITZ égale à L au point x si et seulement si

$$\|f(x) - f(y)\| \leq L \|x - y\|$$

pour tout point y (dans un voisinage de x).

Dérivée directionnelle

La dérivée directionnelle d'une fonction f au point x dans la direction d est notée $f'(x;d)$ et est donnée par

$$\lim_{\lambda \rightarrow 0} \frac{f(x + \lambda d) - f(x)}{\lambda}$$

si f est continûment différentiable alors

$$f'(x;d) = \nabla f(x)^T d$$

où $\nabla f(x)$ est le gradient de f au point x .

Fonction convexe - fonction concave

La fonction f à valeurs réelles est convexe si et seulement si quels que soient x et y dans le domaine de f et pour tout réel λ strictement compris entre 0 et 1

$$f(x + (1 - \lambda)y) \leq f(x) + (1 - \lambda)f(y)$$

Une condition nécessaire et suffisante pour que f soit convexe est:

$$f(y) - f(x) \geq \nabla f(x)^T (y - x)$$

La fonction f est concave si et seulement si la fonction $(-f)$ est convexe.

Problème d'optimisation convexe

$$\text{Un problème du type} \quad \begin{cases} \min & f(x) \\ \text{s.c.} & h_j(x) < 0 \quad j = 1, \dots, m \end{cases} \quad (0.1)$$

où f et h_j sont des fonctions de \mathbb{R}^n à valeurs réelles, est convexe si les fonctions f et h_j pour $j = 1, \dots, m$ sont convexes.

Problème d'optimisation séparable

Un problème du type (0.1) est dit séparable s'il peut se mettre sous

Conditions de qualification de contraintes

Il y a différentes conditions de qualification de contraintes possibles, dans la suite de l'exposé, celle qui nous sera utile est la condition de SLATER: les fonctions f et h_j sont convexes et il existe un point \hat{x} strictement à l'intérieur du domaine admissible, c'est-à-dire $h_j(\hat{x}) < 0$ pour $j=1, \dots, m$

Problème dual

Considérons le problème (0.1), son problème dual est défini par

$$\begin{array}{ll} \max & l(\lambda) \\ \lambda \geq 0 & \end{array}$$

$$\text{où } l(\lambda) = \min_{x \in R^n} \{f(x) + \sum_j \lambda_j h_j(x)\} \quad (0.2)$$

Une propriété importante est donnée par le théorème de dualité forte: pour tout point x admissible pour le problème primal (0.1) et pour toute valeur λ positive. $f(x) \geq l(\lambda)$.

CHAPITRE 1

PROBLEMES TYPES

EN

OPTIMISATION DE STRUCTURES

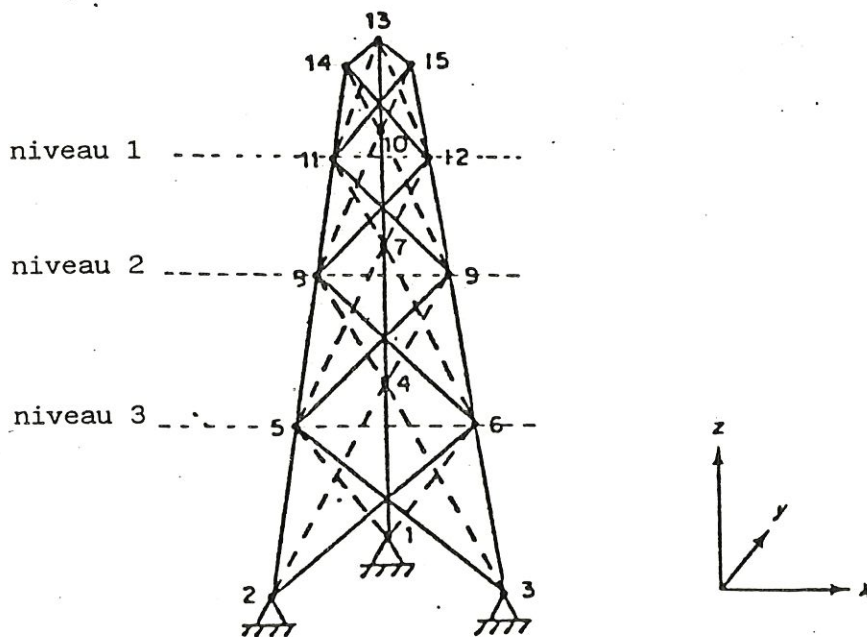
1. Problèmes types en optimisation de structures

L'optimisation de structures traite de problèmes où il faut chercher selon un certain critère (par exemple le poids minimum) la meilleure structure (par exemple une aile d'avion, des systèmes de barres) en respectant des contraintes physiques ou de fabrication.

Pour attaquer ce difficile problème en employant des méthodes mathématiques, il est nécessaire de restreindre la recherche dans un sous-ensemble de toutes les structures possibles. Une manière habituelle de rendre le problème quantitatif est de diviser la structure en éléments reliés entre eux par des noeuds. Ceci peut être fait de façon naturelle (comme pour un assemblage de barres par exemple) ou selon la méthode des éléments finis.

1.1. Pylône [4]

Considérons un pylône comprenant 39 barres ayant la topologie ci-dessous (fig. 1.1). Il y a 39 éléments et 15 noeuds. En supposant que les noeuds au sol et au sommet sont fixés et que le pylône reste symétrique, les

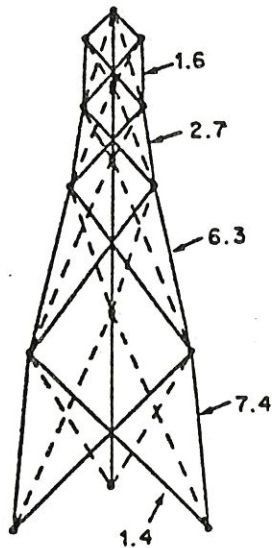


(fig.1.1)

variables sont:

γ_i	la coordonnée en z des noeuds du niveau i	$i=1,2,3$
r_i	le rayon du pylône au niveau i	$i=1,2,3$
α_1	la section des éléments définis par les paires de noeuds (1,4), (2,5) (3,6)	
α_2	la section des éléments définis par les paires de noeuds (4,7), (5,8) (9,12)	
α_3	la section des éléments définis par les paires de noeuds (7,10), (5,8) (6,9)	
α_4	la section des éléments définis par les paires de noeuds (10,13), (11,14), (12,15)	
α_5	la section des éléments restants	

Un problème consiste à minimiser le poids de la structure où tous les éléments sont soumis à des contraintes de torsion dues à une force. La force est composée de trois forces identiques agissant sur les trois noeuds du sommet. Chaque force est du type $(0, P_0, -2 P_0)$, c'est-à-dire que la composante verticale est deux fois plus grande que la composante horizontale. La géométrie optimale est celle de la figure(1.2).

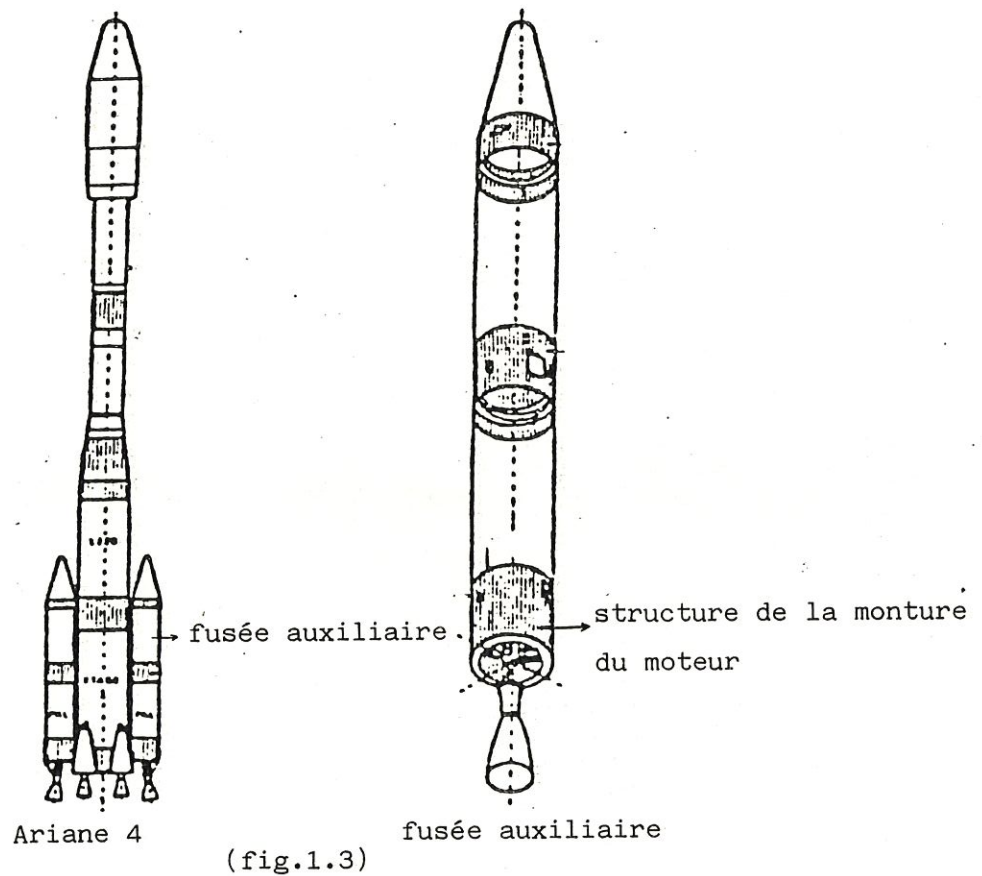


(fig.1.2)

1.2. Structure de la monture du moteur d'une fusée auxiliaire d'Ariane [1]

Ce deuxième exemple concerne une application de techniques d'optimisation pour la fusée Ariane 4.

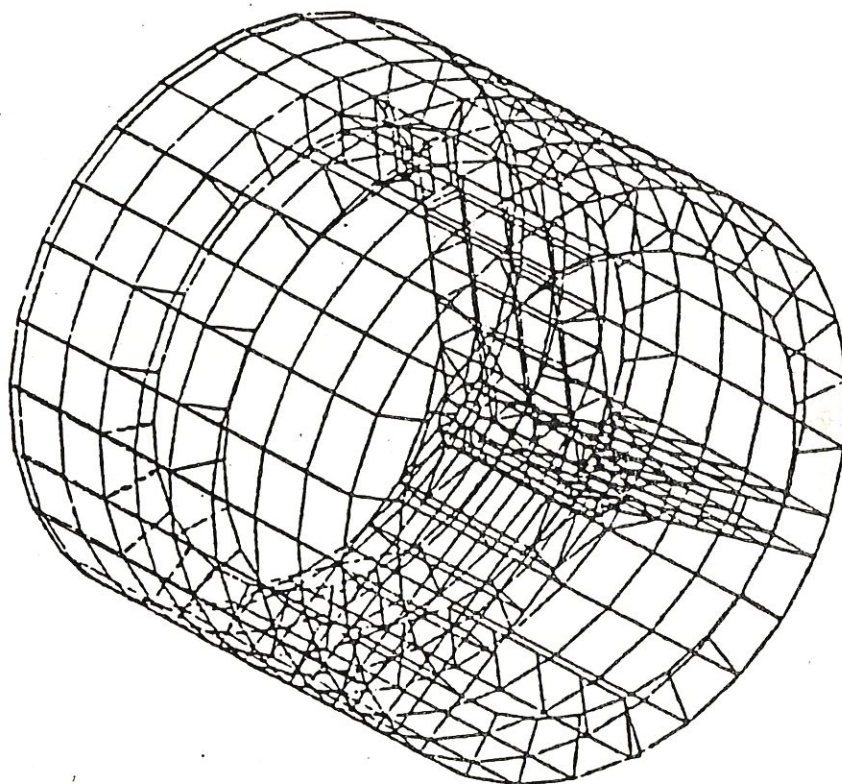
Quatre fusées auxiliaires seront attachées à une future version du vaisseau pour en accroître la puissance. (fig 1.3)



Il est fondamentalement important d'obtenir une structure de poids minimal car un kilo gagné sur la fusée permet d'augmenter la charge embarquée de 0.14 kilo. Le modèle aux éléments finis (fig 1.4) comprend 4883

degrés de liberté et 1008 éléments finis. L'objectif est de minimiser le poids de la structure soumise aux contraintes suivantes:

- limitation de la tension dans l'anneau supérieur
- tension maximale acceptable sous l'application de certaines forces
- contraintes de rigidité locale prises en considération en plusieurs points critiques (par exemple des points où des équipements sont attachés).



Structure de la monture du moteur

(fig.1.4)

CHAPITRE 2

FORMULATION DU PROBLEME

ET

MOTIVATION POUR UNE LINEARISATION CONVEXE

2. Formulation du problème et motivation pour une linéarisation convexe

2.1. Vers une linéarisation convexe

Le problème d'optimisation considéré est le suivant:

$$\left\{ \begin{array}{ll} \min & f(x) & (2.1) \\ \text{s.c.} & h_j(x) \leq 0 & j=1, \dots, m_b \quad (2.2) \\ & \sum_i d_{ij} x_i \leq \bar{d}_j & j=1, \dots, m_l \quad (2.3) \\ & \underline{x}_k \leq x_k \leq \bar{x}_k & k=1, \dots, n \quad (2.4) \end{array} \right.$$

La fonction objectif (2.1) est une fonction non linéaire de poids. Les inégalités (2.2) représentent des contraintes de comportement comme par exemple des tensions ou des déplacements sous certaines forces. Les variables sont sujettes à des contraintes de bornes reflétant des considérations de validité ou de fabrication. Généralement, les variables sont reliées par des contraintes linéaires explicites (2.3) qui tiennent compte de limitations technologiques comme par exemple des bornes sur l'épaisseur totale d'un certain nombre de couches de types différents. La difficulté de ce problème non linéaire vient du fait que les contraintes (2.2) ne sont pas connues explicitement et leur évaluation numérique précise nécessite une analyse aux éléments finis complète. Le coût calcul devient prohibitif pour des problèmes de grande taille.

Pour résoudre ce type de problème, deux approches sont possibles. La première est basée sur des méthodes générales de programmation non linéaire, méthode de pénalisation [8], méthode de directions admissibles [8] etc. Ces méthodes donnent d'excellents résultats de convergence mais le coût de leur application augmente très fort avec la taille des problèmes. Dans une deuxième approche, le problème d'optimisation est transformé en une suite de sous-problèmes approximants ayant une structure algébrique simple. Les contraintes de bornes étant faciles à traiter restent inchangées.

La convergence de ces méthodes dépend essentiellement de la qualité des approximations utilisées. Si l'approximation est mauvaise, le processus peut diverger ou converger après de grandes oscillations.

2.1.1. Linéarisation directe

Une première manière est de linéariser la fonction objectif et les contraintes en fonction des variables directes x_i , les sous-problèmes obtenus sont strictement linéaires et la méthode du simplexe peut s'appliquer. Cependant, la solution optimale du sous-problème explicite se trouve toujours sur un sommet du domaine admissible. Le processus peut soit converger vers une solution non optimale du problème réel, soit diverger, soit osciller entre deux sommets non optimaux. Il est possible d'introduire une stratégie de "move-limits", cependant il est difficile d'obtenir une estimation convenable de ces "move-limits", de plus, cela aura souvent pour effet d'augmenter le nombre d'itérations.

2.1.2. Linéarisation inverse

Une deuxième manière est de linéariser les contraintes (2.2) en fonction des variables inverses ($1/x_i$) et la fonction objectif en fonction des variables directes (x_i), nous obtenons le sous-problème suivant (annexe A1):

$$\left\{ \begin{array}{l} \min \quad \sum_i \left. \frac{\partial f}{\partial x_i} \right|_{x^0} x_i \quad (2.5) \\ \text{s.c.} - \sum_i (x_i^0)^2 \left. \frac{\partial h_j}{\partial x_i} \right|_{x^0} \frac{1}{x_i} \leq -h_j(x^0) - \sum_i \left. \frac{\partial h_j}{\partial x_i} \right|_{x^0} x_i \quad j=1, \dots, m_b \quad (2.6) \\ \sum_i d_{ij} x_i \leq \bar{d}_j \quad j=1, \dots, m_1 \quad (2.7) \\ \underline{x}_i \leq x_i \leq \bar{x}_i \quad i=1, \dots, n \quad (2.8) \end{array} \right.$$

Remarquons que pour que le changement de variables $z_i = 1/x_i$ soit valable, il faut que les variables x_i soient strictement positives, une simple translation peut l'assurer.

Jusqu'à récemment, les problèmes d'optimisation de structures considérés ne comportaient pas de contraintes linéaires (2.7). Dans ce cas, en faisant un changement de variables $z_i = 1/x_i$, le problème explicite (2.5-2.6-2.8) est un problème de minimisation d'une fonction objectif non linéaire sous contraintes linéaires. Un tel problème peut être résolu en utilisant une méthode de gradient projeté, méthode particulièrement bien adaptée dans ce cas [8]. En introduisant les contraintes linéaires, le problème (2.5 à 2.8) ne peut plus être résolu par un algorithme de projection: qu'il soit formulé en terme des variables directes x_i ou en terme des variables inverses $1/x_i$, il comporte toujours des contraintes non linéaires. De plus, il n'est pas nécessairement convexe et la résolution du dual peut poser des difficultés, c'est pourquoi il a semblé nécessaire d'obtenir des sous-problèmes convexes.

2.1.3. Linéarisation mixte

Il est possible de combiner les deux méthodes décrites plus haut en linéarisant les fonctions par rapport à x_i pour un certain groupe de variables et par rapport à $1/x_i$ pour le reste des variables, c'est-à-dire en utilisant une linéarisation mixte. Après calcul (annexe A1), nous obtenons:

$$\begin{aligned} \tilde{h}_j(x; x^0) = & \sum_{I^1} \frac{\partial h_j}{\partial x_i} \Big|_{x^0} x_i - \sum_{I^2} (x_i^0)^2 \frac{\partial h_j}{\partial x_i} \Big|_{x^0} \frac{1}{x_i} + h_j(x^0) \\ & - \sum_{I^1} \frac{\partial h_j}{\partial x_i} \Big|_{x^0} x_i^0 + \sum_{I^2} \frac{\partial h_j}{\partial x_i} \Big|_{x^0} x_i^0 \end{aligned} \quad (2.9)$$

où I^1 (I^2) est l'ensemble des indices des variables pour lesquelles la linéarisation directe (inverse) est utilisée.

En choisissant

$$I^1 = \left\{ i \text{ tq } \left. \frac{\partial h_j}{\partial x_i} \right|_{x^0} \geq 0 \right\}$$

$$I^2 = \left\{ i \text{ tq } \left. \frac{\partial h_j}{\partial x_i} \right|_{x^0} < 0 \right\}$$

$\tilde{h}(x; x^0)$ est une fonction convexe (annexe A3).

En linéarisant la fonction objectif et les contraintes (2.2) de cette manière, nous obtenons, comme souhaité, un sous-problème convexe. Comme nous le verrons plus tard, l'idée de la méthode est d'utiliser le dual, or laisser les contraintes linéaires inchangées rendrait la résolution du dual difficile, c'est pourquoi nous traiterons les contraintes linéaires (2.4) de la même manière. Nous appellerons cette linéarisation mixte particulière linéarisation-convexe.

2.2. Propriétés de la linéarisation-convexe

Rappelons la forme explicite du sous-problème linéarisé en x^0 :

$$P(x^0) \left\{ \begin{array}{l} \min \quad \sum_{+} \left. \frac{\partial f}{\partial x_i} \right|_{x^0} x_i - \sum_{-} (x_i^0)^2 \left. \frac{\partial f}{\partial x_i} \right|_{x^0} \frac{1}{x_i} \\ \text{s.c.} \quad \sum_{+} \left. \frac{\partial h_j}{\partial x_i} \right|_{x^0} x_i - \sum_{-} (x_i^0)^2 \left. \frac{\partial h_j}{\partial x_i} \right|_{x^0} \frac{1}{x_i} + h_j(x^0) \\ \quad - \sum_{+} \left. \frac{\partial h_j}{\partial x_i} \right|_{x^0} x_i^0 + \sum_{-} \left. \frac{\partial h_j}{\partial x_i} \right|_{x^0} x_i^0 \quad j=1, \dots, m \\ \quad 0 < \underline{x}_i \leq x_i \leq \bar{x}_i \quad i=1, \dots, n \end{array} \right.$$

où pour chaque fonction la somme \sum_{+} (\sum_{-}) est la somme sur les indices i tels

que la dérivée par rapport à x_i au point x^0 est positive ou nulle (strictement négative) et où les contraintes linéaires (2.3) ont été incluses dans les contraintes h_j .

Remarquons que le groupe d'indices intervenant dans la somme $\sum_+ (\sum_-)$ peut être différent pour chaque fonction.

Le problème linéarisé possède des propriétés intéressantes:

2.2.1. Convexité

Comme nous l'avons dit plus haut, le choix des groupes d'indices pour obtenir la linéarisation convexe assure la convexité du sous-problème $P(x^0)$ (annexe A 3). Cette propriété est intéressante car tout point de KHUN et TUCKER est minimum global de $P(x^0)$ et réciproquement.

2.2.2. Séparabilité

Une deuxième propriété remarquable due à la linéarisation est la séparabilité, propriété qui s'avère essentielle dans la résolution du dual.

2.2.3. Conservativité

Un facteur important qui contrôle la qualité de l'approximation est la conservativité: il arrive que le domaine approximant soit trop grand par rapport au domaine initial et par conséquent, le point optimal du sous-problème n'est plus admissible pour le domaine de départ. Il serait préférable que ce genre de phénomène soit le plus souvent évité, c'est-à-dire que l'approximation soit la plus conservative possible. Nous allons voir que parmi toutes les linéarisations mixtes possibles la linéarisation convexe est la plus conservative. Considérons une linéarisation mixte quelconque où les variables sont arbitrairement divisées en deux groupes: le groupe J^+ comprend les indices des variables pour lesquelles la linéarisation directe est employée,

tandis que le groupe J^2 reprend les indices des variables pour lesquelles la linéarisation inverse est utilisée:

$$\tilde{h}_m(x; x^0) = h(x^0) + \sum_{J^1} \frac{\partial h}{\partial x_i} \Big|_{x^0} (x_i - x_i^0) + \sum_{J^2} \frac{\partial h}{\partial x_i} \Big|_{x^0} \frac{x_i^0}{x_i} (x_i - x_i^0)$$

Il est important de remarquer que la linéarisation directe (inverse) est un cas particulier de la linéarisation mixte en choisissant $J^1 = \{1, \dots, n\}$ et $J^2 = \emptyset$ ($J^1 = \emptyset$ et $J^2 = \{1, \dots, n\}$). Considérons la linéarisation convexe:

$$\tilde{h}_c(x; x^0) = h(x^0) + \sum_{+} \frac{\partial h}{\partial x_i} \Big|_{x^0} (x_i - x_i^0) + \sum_{-} \frac{\partial h}{\partial x_i} \Big|_{x^0} \frac{x_i^0}{x_i} (x_i - x_i^0)$$

Nous allons voir que le domaine du sous-problème obtenu par linéarisation convexe est inclus dans celui obtenu par linéarisation mixte. En effet,

$$\begin{aligned} \tilde{h}_c(x; x^0) - \tilde{h}_m(x; x^0) &= - \sum_{J^2} \frac{\partial h}{\partial x_i} \Big|_{x^0} (x_i - x_i^0)^2 \frac{1}{x_i} \\ &\quad + \sum_{J^1} \frac{\partial h}{\partial x_i} \Big|_{x^0} (x_i - x_i^0)^2 \frac{1}{x_i} \end{aligned}$$

comme les variables x_i sont strictement positives pour assurer la validité du changement de variables le second membre est négatif. Nous pouvons conclure que la linéarisation convexe \tilde{h}_c est toujours inférieure à la linéarisation mixte \tilde{h}_m ; par conséquent, le domaine admissible du sous-problème obtenu par linéarisation convexe est inclus dans le domaine du sous-problème obtenu par linéarisation mixte. Ainsi, le point optimal du problème donné par linéarisation convexe a plus de chances d'être admissible pour le problème initial que dans toute autre linéarisation mixte. C'est dans ce sens que la linéarisation convexe est plus conservative que toute linéarisation mixte, en particulier que les linéarisations directe et inverse.

Illustrons cette propriété par un exemple en considérant la contrainte suivante au point courant $x^0=(2,2)$

$$h(x)=5x_2 - x_1^2 \leq 10$$

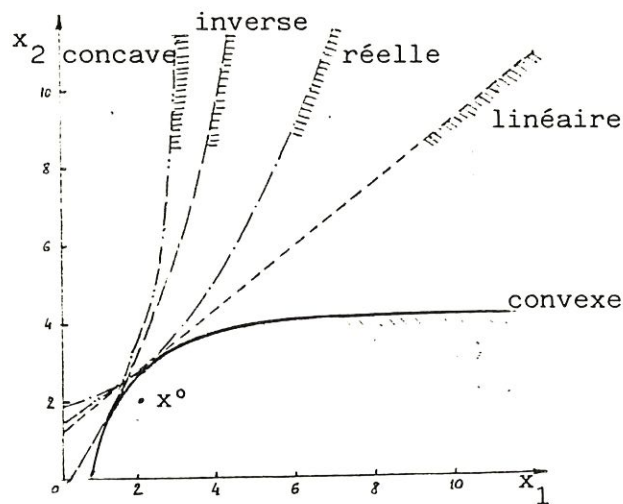
Quatre types de linéarisation mixte sont possibles:

linéaire : $5x_2 - 4x_1 \leq 6$

inverse : $-20/x_2 + 16/x_1 \leq 2$

concave : $-20x_2 - 4x_1 \leq -14$

convexe : $5x_2 + 16x_1 \leq 22$



Linéarisation mixte (fig 2.1)

La figure (2.1) montre que les domaines approximants sont emboîtés et que la linéarisation convexe est la plus conservative.

Cependant, il existe des cas où le domaine obtenu par linéarisation convexe n'est pas totalement inclus dans le domaine initial; toutefois, cette approximation est la plus conservatrice des linéarisations mixtes comme le montre l'exemple suivant:

$$h(x) = (x_1 - 4)^3 - x_2 \leq -2$$

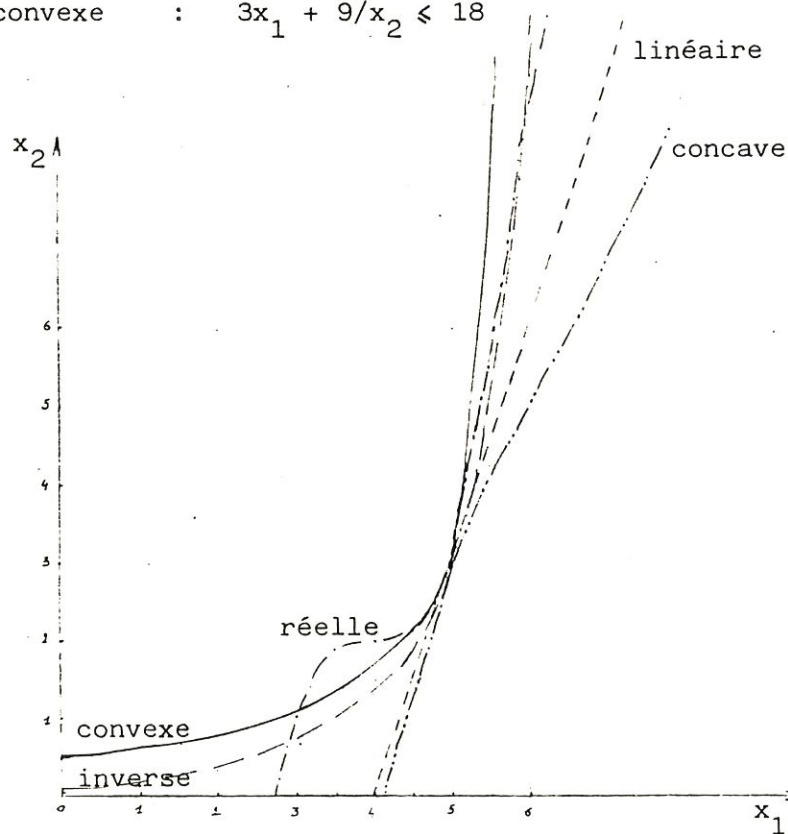
Les quatre linéarisations au point (5,3) sont:

linéaire : $3x_1 - x_2 \leq 12$

inverse : $-75/x_1 + 9/x_2 \leq -12$

concave : $-75/x_1 - x_2 \leq 18$

convexe : $3x_1 + 9/x_2 \leq 18$



Linéarisation mixte (fig.2.2)

CHAPITRE 3

METHODE DE LINEARISATION CONVEXE

3. Méthode de linéarisation convexe

3.1. Méthode

Rappelons brièvement la méthode : le problème considéré a la forme suivante:

$$\left\{ \begin{array}{ll} \min & f(x) \\ \text{s.c.} & h_j(x) \leq 0 \quad j=1, \dots, m \\ & 0 < \underline{x}_i \leq x_i \leq \bar{x}_i \quad i=1, \dots, n \end{array} \right. \quad (3.1)$$

avec f et h_j , fonctions de \mathbb{R}^n à valeurs dans \mathbb{R} , pour $j=1, \dots, m$.

La méthode consiste à engendrer une suite de sous-problèmes "linéarisés de manière convexe", la suite des solutions optimales associées devant converger vers l'optimum du problème (3.1). Nous construirons les sous-problèmes linéarisés de la façon suivante:

considérons un point de départ x^0

si $\left. \frac{\partial f}{\partial x_i} \right|_{x^0}$ est positif, nous linéarisons f en fonction de la variable

directe x_i .

si $\left. \frac{\partial f}{\partial x_i} \right|_{x^0}$ est négatif, nous posons $y_i = 1/x_i$ et nous linéarisons f en

fonction de la nouvelle variable y_i , ensuite, nous nous ramenons à l'ancienne variable x_i .

Dans le cas des contraintes, nous procéderons de la même manière; les contraintes de bornes, vu leur spécificité, resteront inchangées.

Rappelons que \underline{x}_i doit être strictement positif pour que le changement de variables $y_i = 1/x_i$ soit valable.

Nous résolvons le sous-problème $P(x^0)$ ainsi obtenu, sa solution optimale x^1 sera le nouveau point de linéarisation. En itérant le processus, nous engendrons une suite de sous-problèmes $P(x^0), P(x^1), \dots, P(x^k), \dots$. La suite des solutions associées $x^1, x^2, \dots, x^{k+1}, \dots$ convergera, sous certaines hypothèses, vers x^* , la solution du problème original (3.1).

3.2. Forme générale et propriétés d'un sous problème linéarisé

Le sous-problème linéarisé $P(x^k)$ s'écrit:

$$\left\{ \begin{array}{l} \min \quad \sum_{+} \frac{\partial f}{\partial x_i} \Big|_{x^k} x_i - \sum_{-} (x_i^k)^2 \frac{\partial f}{\partial x_i} \Big|_{x^k} \frac{1}{x_i} \\ \text{s.c.} \quad \sum_{+} \frac{\partial h_j}{\partial x_i} \Big|_{x^k} x_i - \sum_{-} (x_i^k)^2 \frac{\partial h_j}{\partial x_i} \Big|_{x^k} \frac{1}{x_i} + h_j(x^k) \\ \quad - \sum_{+} \frac{\partial h_j}{\partial x_i} \Big|_{x^k} x_i^k + \sum_{-} \frac{\partial h_j}{\partial x_i} \Big|_{x^k} x^k \leq 0 \quad j=1, \dots, m \\ \quad 0 \leq \underline{x}_i \leq x_i \leq \bar{x}_i \quad i=1, \dots, n \end{array} \right. \quad (3.2)$$

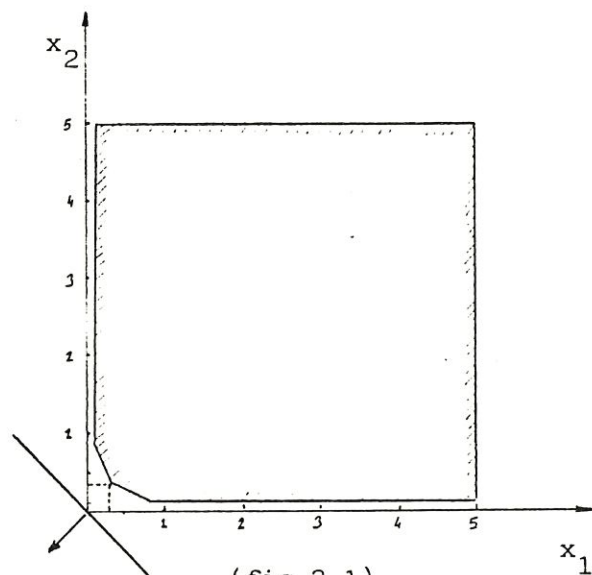
où \sum_{+} (\sum_{-}) désigne la somme sur les indices i tels que la dérivée de la fonction par rapport à la variable x_i au point x^k est positive (strictement négative).

Comme nous l'avons déjà signalé le sous-problème $P(x^k)$ est convexe, séparable et conservatif.

3.3. Illustration de la méthode

Illustrons à présent le procédé par l'exemple suivant (le détail des calculs de ce chapitre se trouve en annexe A 4)

$$\left\{ \begin{array}{l} \min \quad x_1 + x_2 \\ \text{s.c.} \quad -x_1 - 2x_2 \leq -1 \\ \quad \quad -2x_1 - x_2 \leq -1 \\ \quad \quad .1 \leq x_1 \leq 5 \\ \quad \quad .1 \leq x_2 \leq 5 \end{array} \right.$$



La solution optimale de ce problème se trouve en $x^* = (1/3, 1/3)$, à l'intersection des deux contraintes.

Le sous-problème linéarisé au point (a,b) s'écrit:

$$\left\{ \begin{array}{l} \min \quad x_1 + x_2 \\ \text{s.c.} \quad \frac{a^2}{x_1} + \frac{2b^2}{x_2} - 2a - 4b + 1 \leq 0 \\ \quad \quad \frac{2a^2}{x_1} + \frac{b^2}{x_2} - 4a - 2b + 1 \leq 0 \\ \quad \quad .1 \leq x_1 \leq 5 \\ \quad \quad .1 \leq x_2 \leq 5 \end{array} \right.$$

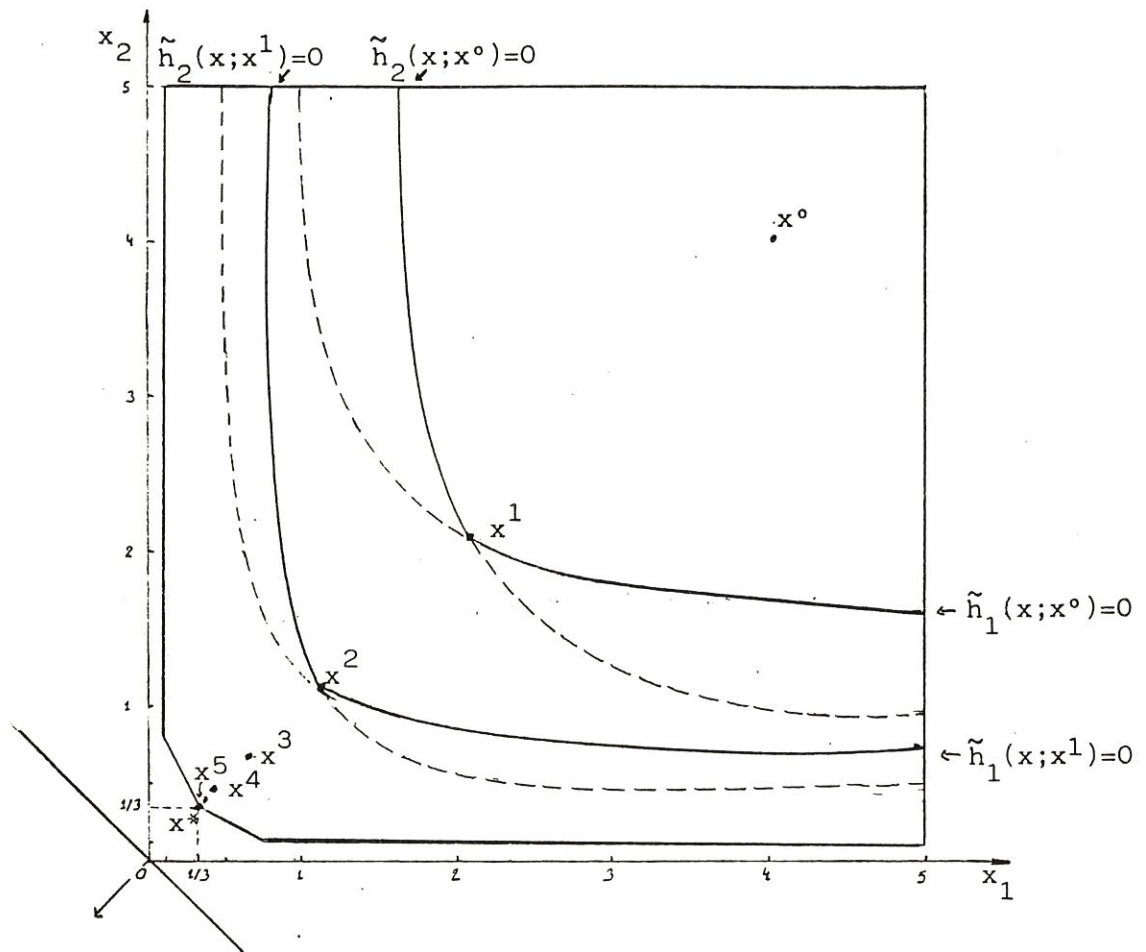
Pour des raisons de symétrie, il est judicieux de choisir $a = b$. En écrivant les conditions de KUHN et TUCKER, la solution du problème linéarisé au point (a,a) vaut $(3a^2/6a-1, 3a^2/6a-1)$. Remarquons que lorsque $a = b = 1/6$, le domaine du sous-problème linéarisé est vide; en effet, les contraintes sont impossibles à vérifier puisque $-2a - 4b + 1$ serait supérieur à zéro et $a^2/x_1 + 2b^2/x_2$ strictement supérieur à zéro.

En partant du point (x^0, x^0) , nous engendrons une suite de points (x^k, x^k) vérifiant la relation de récurrence

$$x^{k+1} = \frac{3(x^k)^2}{6x^k - 1}$$

et dont la limite est bien $(1/3, 1/3)$.

Graphiquement, partant du point (4,4), la suite des sous-problèmes se comporte de la manière suivante:



Application à un problème linéaire (fig. 3.2)

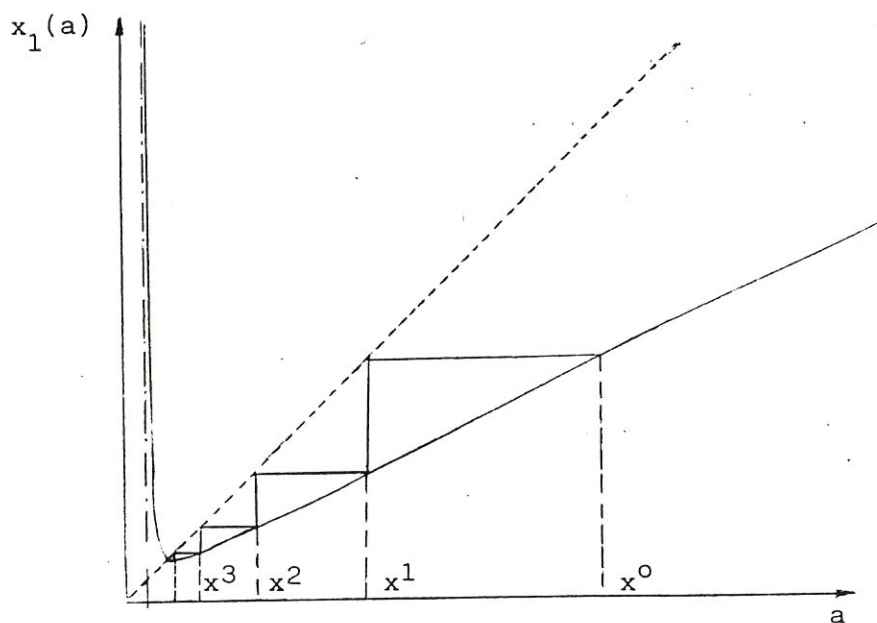
Cet exemple illustre bien la propriété de conservativité des sous-problèmes; en effet, les valeurs des contraintes approximées surestiment les valeurs des vraies contraintes, en d'autres termes, les domaines des sous-problèmes sont inclus dans le domaine du problème de départ.

La méthode n'entre évidemment pas en compétition avec le simplex, mais l'exemple linéaire proposé ci-dessus illustre déjà l'efficacité de la méthode pour les programmes linéaires.

Il est surprenant de constater que la vitesse de convergence de la méthode sur cet exemple est quadratique, ce résultat peut être obtenu en utilisant le reste de TAYLOR et se trouve également en annexe (annexe A7). Cet ordre de convergence peut s'observer numériquement dans beaucoup de cas même non linéaires.

Observons le graphe de x_1 en fonction de a (le graphe de x_2 en fonction de a est similaire en raison de la symétrie du problème).

$$x_1 = \frac{3a^2}{6a-1}$$



ordre de convergence (fig.3.3)

Ce graphique illustre bien que la convergence est assurée pour des valeurs de a strictement supérieures à $1/6$, par contre pour des valeurs de a inférieures à $1/6$, les domaines approximants sont vides. Nous verrons au chapitre 5 que dans certains cas il sera possible de remédier à ce problème en

relaxant les contraintes des sous-problèmes.

Remarquons également que la méthode converge même si le point de départ n'est pas admissible. Il est même curieux de constater que la méthode retrouve un point admissible à l'itération suivante, nous verrons au chapitre 6 que ce phénomène se produit dans le cas où les fonctions h_j sont concaves. Cependant, l'inverse peut arriver lorsque la conservativité n'est pas totale.

CHAPITRE 4

RESOLUTION D'UN SOUS-PROBLEME

PAR DUALITE

4. Résolution d'un sous-problème par dualité

Un des intérêts de la méthode est que le sous-problème linéarisé $P(x^k)$, grâce à ses propriétés de convexité et de séparabilité, est bien adapté à une méthode de résolution duale.

4.1. Normalisation du problème $P(x^k)$

Dans le but de simplifier les calculs de ce chapitre, nous allons normaliser le problème $P(x^k)$ et introduire de nouvelles notations.

Effectuons le changement de variables $x'_i = x_i / x_i^k$, nous avons par la formule de dérivation des fonctions composées

$$\frac{\partial f}{\partial x'_i} = \frac{\partial f}{\partial x_i} \frac{\partial x_i}{\partial x'_i} = \frac{\partial f}{\partial x_i} x_i^k$$

$$\frac{\partial h_j}{\partial x'_i} = \frac{\partial h_j}{\partial x_i} \frac{\partial x_i}{\partial x'_i} = \frac{\partial h_j}{\partial x_i} x_i^k$$

En notant

$$\left. \frac{\partial f}{\partial x'_i} \right|_1 \quad \text{par } f_i$$

$$\left. \frac{\partial h_j}{\partial x'_i} \right|_1 \quad \text{par } h_{ij}$$

le terme indépendant

$$h_j(x^k) = \sum_+ \left. \frac{\partial h_j}{\partial x'_i} \right|_{x^k} + \sum_- \left. \frac{\partial h_j}{\partial x'_i} \right|_{x^k} \quad \text{par } \bar{h}_j$$

et les bornes

$$\frac{x_i}{x_i^k} \text{ par } x_i'$$

$$\frac{\bar{x}_i}{x_i^k} \text{ par } \bar{x}_i'$$

le problème normalisé, en omettant le suscrit ' , s'écrit alors

$$\left\{ \begin{array}{ll} \min & \sum_+ f_i x_i - \sum_- f_i \frac{1}{x_i} \\ \text{s.c.} & \sum_+ h_{ij} x_i - \sum_- h_{ij} + \bar{h}_j \leq 0 & j=1, \dots, m \\ & 0 < x_i \leq \bar{x}_i & i=1, \dots, n \end{array} \right.$$

4.2. Résolution du problème dual

Le caractère séparable du problème $P(x^k)$ va permettre d'exprimer la fonction duale de manière explicite.

Le problème dual a la forme suivante:

$$\left\{ \begin{array}{ll} \max & l(\lambda) \\ \text{s.c.} & \lambda_j \geq 0 \end{array} \right. \quad j=1, \dots, m \quad (4.2)$$

avec

$$l(\lambda) = \min_{x_i \leq x_i \leq \bar{x}_i} \left\{ \sum_+ f_i x_i - \sum_- f_i \frac{1}{x_i} + \sum_j \lambda_j \left(\sum_+ h_{ij} x_i - \sum_- h_{ij} \frac{1}{x_i} + \bar{h}_j \right) \right\} \quad (4.3)$$

où encore

$$l(\lambda) = \min_{\underline{x}_i \leq x_i \leq \bar{x}_i} \sum_i L_i(x_i; \lambda) + \sum_j \lambda_j \bar{h}_j \quad (4.3)$$

avec

$$L_i(x_i; \lambda) = f_i x_i + \sum_{j^+} \lambda_j h_{ij} x_i - \sum_{j^-} \lambda_j h_{ij} \frac{1}{x_i} \quad \text{si } f_i \geq 0$$

$$L_i(x_i; \lambda) = -f_i \frac{1}{x_i} + \sum_{j^+} \lambda_j h_{ij} x_i - \sum_{j^-} \lambda_j h_{ij} \frac{1}{x_i} \quad \text{si } f_i < 0$$

où pour chaque indice i fixé \sum_j (\sum_{j^-}) désigne la somme sur les indices j tels que $h_{ij} \geq 0$ ($h_{ij} < 0$)

En notant

$$C_i = \sum_j \lambda_j h_{ij} \quad \text{constante positive pour } \lambda \text{ admissible}$$

$$D_i = \sum_j \lambda_j h_{ij} \quad \text{constante négative pour } \lambda \text{ admissible}$$

nous obtenons

$$L_i(x_i; \lambda) = f_i x_i + C_i x_i - D_i \frac{1}{x_i} \quad \text{si } f_i \geq 0$$

$$L_i(x_i; \lambda) = -f_i \frac{1}{x_i} + C_i x_i - D_i \frac{1}{x_i} \quad \text{si } f_i < 0$$

en vertu de la séparabilité, le problème (4.3) à n variables peut être décomposé en n sous-problèmes à une variable :

$$l(\lambda) = \sum_i \min_{\underline{x}_i \leq x_i \leq \bar{x}_i} L_i(x_i; \lambda) + \sum_j \lambda_j \bar{h}_j$$

La recherche du minimum de $L_i(x_i; \lambda)$ sur le domaine $[\underline{x}_i, \bar{x}_i]$ se trouve en annexe (A 8) et permet d'exprimer x_i en fonction de λ :

$$\begin{aligned}
 \text{Si } f_i > 0 \\
 x_i(\lambda) &= \left\{ -\frac{D_i}{f_i + C_i} \right\}^{\frac{1}{2}} & \text{si } x_i^{-2} \geq -\frac{D_i}{f_i + C_i} \geq x_i^{-2} \\
 x_i(\lambda) &= \bar{x}_i & \text{si } -\frac{D_i}{f_i + C_i} \geq x_i^{-2} \\
 x_i(\lambda) &= x_i & \text{si } -\frac{D_i}{f_i + C_i} \leq x_i^{-2}
 \end{aligned}
 \tag{4.4}$$

$$\begin{aligned}
 \text{Si } f_i < 0 \\
 x_i(\lambda) &= \left\{ -\frac{f_i + D_i}{C_i} \right\}^{\frac{1}{2}} & \text{si } x_i^{-2} \geq -\frac{f_i + D_i}{C_i} \geq x_i^{-2} \\
 x_i(\lambda) &= \bar{x}_i & \text{si } -\frac{f_i + D_i}{C_i} \geq x_i^{-2} \\
 x_i(\lambda) &= x_i & \text{si } -\frac{f_i + D_i}{C_i} \leq x_i^{-2}
 \end{aligned}$$

Nous avons ainsi pu exprimer les variables primales en fonction des variables duales. La fonction duale s'exprime explicitement en fonction des variables λ_j . Le problème (4.2) est un problème quasi-non-contraint qui peut être facilement résolu par une méthode de direction de descente légèrement modifiée pour tenir compte des contraintes de non-négativité sur les variables duales. Une telle méthode nécessite les dérivées premières de la fonction duale. Heureusement, une caractéristique intéressante de la formulation duale est que ces dérivées sont extrêmement simples à calculer puisqu'elles sont données par les contraintes primales (annexe A 11)

$$\frac{\partial l}{\partial \lambda_j} = \sum_+ h_{ij} x_i(\lambda) - \sum_- h_{ij} \frac{1}{x_i(\lambda)} + \bar{h}_j
 \tag{4.5}$$

Une méthode du type Newton nécessitant également les dérivées secondes de la fonction duale est particulièrement bien adaptée car leurs expressions analytiques peuvent être obtenues aisément (annexe A 12)

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 l}{\partial \lambda_k \partial \lambda_j} = & - \frac{1}{2} \sum_{I_1} \frac{h_{ij} h_{ik}}{C_i} x_i(\lambda) - \frac{1}{2} \sum_{I_2} \frac{h_{ij} h_{ik}}{f_i + C_i} x_i(\lambda) \\ & - \sum_{I_3} \frac{h_{ij} h_{ik}}{C_i} \frac{1}{x_i(\lambda)} - \sum_{I_4} \frac{h_{ij} h_{ik}}{f_i + C_i} \frac{1}{x_i(\lambda)} \\ & - \frac{1}{2} \sum_{I_5} \frac{h_{ij} h_{ik}}{C_i} \frac{1}{x_i(\lambda)^3} - \frac{1}{2} \sum_{I_6} \frac{h_{ij} h_{ik}}{f_i + C_i} \frac{1}{x_i(\lambda)^3} \end{aligned}$$

avec

$$\begin{aligned} I_1 &= \{ i \text{ tq } h_{ij} \geq 0, h_{ik} \geq 0, f_i < 0 \} \\ I_2 &= \{ i \text{ tq } h_{ij} \geq 0, h_{ik} \geq 0, f_i \geq 0 \} \\ I_3 &= \{ i \text{ tq } h_{ij} \cdot h_{ik} \leq 0, f_i < 0 \} \\ I_4 &= \{ i \text{ tq } h_{ij} \cdot h_{ik} \leq 0, f_i \geq 0 \} \\ I_5 &= \{ i \text{ tq } h_{ij} \leq 0, h_{ik} \geq 0, f_i < 0 \} \\ I_6 &= \{ i \text{ tq } h_{ij} \leq 0, h_{ik} \geq 0, f_i \geq 0 \} \end{aligned}$$

Signalons aussi que la méthode de linéarisation convexe peut être utilisée lorsque certaines des variables prennent des valeurs discrètes au lieu de varier continûment. Dans ce cas, la formulation duale reste très intéressante [15].

CHAPITRE 5

ALGORITHME

5. Algorithme

Comme nous l'avons vu au quatrième chapitre, une méthode de direction de descente du deuxième ordre peut être facilement employée pour résoudre le dual du problème linéarisé $P(x^k)$. Nous allons à présent décrire un algorithme possible basé sur la méthode de Newton.

5.1. Relaxation des contraintes primales

Il arrive parfois que le domaine admissible du sous-problème linéarisé soit vide parce que des contraintes sont incompatibles entre elles. Cette difficulté arrive souvent lorsque le point de linéarisation de départ est très éloigné du domaine admissible du problème initial. Le caractère conservatif de la linéarisation convexe accroît encore l'occurrence de ce phénomène. Il est nécessaire de remédier à cette difficulté par une procédure de relaxation du sous-problème explicite, pour éviter un arrêt prématuré de la méthode.

Le sous problème $P(x^k)$ normalisé et relaxé devient:

$$\left\{ \begin{array}{ll} \text{minimiser} & \delta \cdot \hat{f}(x; x^k) \\ \text{sous contraintes} & \hat{h}_j(x; x^k) \leq -\delta \cdot \bar{h}_j \\ & x_i \leq x_i \leq \bar{x}_i \\ & \delta \geq 1 \end{array} \right. \quad (5.1)$$

$$\text{où} \quad \hat{f}(x; x^k) = \sum_+ \frac{\partial f}{\partial x_i} \Big|_{x^k} x_i - \sum_- \frac{\partial f}{\partial x_i} \Big|_{x^k} \frac{1}{x_i}$$

$$\hat{h}_j(x; x^k) = \sum_+ \frac{\partial h_j}{\partial x_i} \Big|_{x^k} x_i - \sum_- \frac{\partial h_j}{\partial x_i} \Big|_{x^k} \frac{1}{x_i}$$

$$\bar{h}_j = h_j(x^k) - \sum_+ \frac{\partial h_j}{\partial x_i} \Big|_{x^k} x_i^k + \sum_- \frac{\partial h_j}{\partial x_i} \Big|_{x^k} x_i^k$$

Si \bar{h}_j est positif, la contrainte $\hat{h}_j(x; x^k) \leq -\delta \bar{h}_j$ n'est jamais satisfaite quel que soit δ strictement supérieur à 1 et pour x_i positif pour tout i . La relaxation n'envisage pas ce cas.

Interprétons le problème (5.1) dans le cas où \bar{h}_j est négatif: si la variable de relaxation δ atteint sa borne supérieure ($\delta = 1$), le problème linéaire est inchangé. Ceci arrive habituellement lorsque le point de linéarisation x^k est admissible ou presque admissible. D'autre part, si certaines contraintes sont incompatibles, l'algorithme trouvera une valeur de δ plus grande que l'unité, ce qui signifie que le domaine admissible linéarisé sera élargi artificiellement.

Pour résoudre le problème explicite (5.1), il suffit de lui appliquer la méthode de linéarisation convexe en augmentant de un le nombre de variables et en ajoutant aux définitions (4.1):

$$\begin{aligned} f_{n+1} &= \hat{f}(x^k; x^k); \\ h_{n+1,j} &= \bar{h}_j \quad j = 1, 2, \dots, m \end{aligned}$$

5.2. Résolution du dual

Intéressons-nous à présent à la phase la plus importante de l'algorithme: la résolution du problème linéarisé par dualité. Le problème dual sera résolu par une méthode de Newton tenant compte des contraintes de non négativité.

Le sous-problème considéré tient compte de la procédure de relaxation décrite au paragraphe (5.1).

étape 1 : Choix d'un point de départ admissible pour le problème dual.

étape 2 : Calcul des variables primales associées par les formules (4.4).

- étape 3 : Si la fonction objectif primale est strictement supérieure à la fonction objectif duale, alors le domaine admissible primal est vide malgré la relaxation (la fonction objectif primale doit toujours être inférieure ou égale à la fonction objectif duale) d'où arrêt de la procédure.
- étape 4 : Calcul du gradient de la fonction duale par rapport aux variables duales non nulles.
Rappelons que la $j^{\text{ème}}$ composante du gradient est égale à la $j^{\text{ème}}$ contrainte par (4.5).
- étape 5 : Si le gradient par rapport aux variables duales non nulles est non nul, alors il existe une contrainte primale j non nulle, associée à un multiplicateur de Lagrange non nul d'où la condition de complémentarité $\lambda_j \tilde{h}_j(x; x^k) = 0$ n'est pas vérifiée, par conséquent l'optimum n'est pas atteint, aller à l'étape 6 .
Si il est nul, calculer les composantes du gradient par rapport aux variables duales nulles.
*Si la plus grande de ces composantes est négative, alors toutes les composantes sont négatives, et donc toutes les contraintes primales sont satisfaites (4.5). Le point $x(\lambda)$ est donc admissible pour le problème primal. Les conditions de complémentarité étant satisfaites et le gradient du Lagrangien étant nul (car c'est en annulant ce gradient que nous trouvons x en fonction de λ (4.4)) $x(\lambda)$ est un point de Kuhn et Tucker et donc un minimum global puisque le problème est convexe, arrêt de la procédure.
*Si la plus grande de ces composantes est positive, elle correspond à la contrainte primale la plus violée qu'il faut introduire dans les contraintes actives (rendre non nulle la variable duale associée). Retourner à l'étape 2.
- étape 6 : Recherche de la direction de Newton.
Calcul de l'inverse de la matrice des dérivées secondes par rapport aux variables duales non nulles. (Travailler sur les variables

duales non nulles permet d'éviter de rendre négatives les variables duales nulles et présente l'avantage de réduire la dimension du problème, puisqu'en pratique le nombre de contraintes actives est relativement petit).

Si la matrice hessienne est inversible, prendre pour direction de montée la direction de Newton $d = -(\nabla^2 l)^{-1}(\nabla l)$. Sinon, il est possible de calculer un modèle hessien défini positif ou de faire appel à d'autres techniques comme celle du gradient projeté.

étape 7 : Recherche du pas optimal α par recherche linéaire tenant compte des contraintes de non négativité.

étape 8 : Calcul de la nouvelle variable duale $\lambda^* = \lambda + \alpha d$
Retourner à l'étape 2.

Synthèse de l'algorithme.

ALGO 1

étape 1 : Choix d'un point de départ admissible pour le dual.

étape 2 : Calcul des variables primales associées.

étape 3 : Si fonction primale $>$ fonction duale STOP.
(domaine admissible vide)

étape 4 : Calcul du gradient de la fonction duale par rapport aux variables duales non nulles.

étape 5 : S'il est nul, aller à l'étape 6.

Sinon, calculer le gradient par rapport aux variables duales nulles.

Si la plus grande de ses composantes est négative STOP.

(optimum atteint)

Sinon introduire la contrainte correspondante dans les contraintes actives et aller à l'étape 2.

étape 6 : Recherche de la direction de Newton $d = -(H^{-1}) \cdot (\nabla l)$ où H est la matrice hessienne ou un modèle hessien défini positif.

étape 7 : Recherche du pas optimal α

étape 8 : Calculer $\lambda^+ = \lambda + \alpha d$ et retourner à l'étape 2.

5.3. Algorithme général

L'algorithme décrit ci-dessus fait partie d'un algorithme plus général que nous décrivons à présent.

ALGO 2

étape 1 : Choix d'un point de départ x^0 pour le problème initial.

Poser $k = 0$.

étape 2 : Construction du problème $p(x^k)$ et normalisation.

étape 3 : ALGO 1.

étape 4 : Poser $k = k + 1$

$x^k = x$ où x est la solution du problème $p(x^k)$ donnée par ALGO 1.

étape 5 : Si le critère d'arrêt est satisfait STOP.

Sinon retourner à l'étape 2.

Remarques

a. Critère d'arrêt.

En général, un point optimal s'obtient après un nombre infini d'itérations et nous devons avoir recours à des règles pratiques pour arrêter la procédure itérative.

Pour les problèmes rencontrés au Laboratoire de Techniques Aéronautiques et Spatiales de l'Université de Liège, le nombre d'itérations est limité car chacune d'entre elles nécessite une analyse aux éléments finis très coûteuse. Dans d'autres cas où ce problème de coût ne se rencontre pas,

les tests d'arrêt suivants peuvent être utilisés:

$$1. \quad || x^{k+n} - x^k || < \epsilon$$

$$2. \quad \frac{|| x^{k+1} - x^k ||}{|| x^k ||} < \epsilon$$

$$3. \quad | f(x^k) - f(x^{k+n}) | < \epsilon$$

$$4. \quad \frac{| f(x^{k+1}) - f(x^k) |}{| f(x^k) |} < \epsilon$$

b. Choix du point de départ pour le dual.

Après un choix arbitraire ou heuristique (si l'utilisateur devine les contraintes actives) du premier point de départ λ^0 , il est judicieux, à l'itération k de choisir pour point de départ le multiplicateur optimal de l'itération $k - 1$.

CHAPITRE 6

QUANT A LA CONVERGENCE ...

6. Quant à la convergence ...

Pour les problèmes rencontrés au Laboratoire de Techniques Aéronautiques et Spatiales de l'Université de Liège, la méthode s'avère en pratique efficace. L'objectif principal de ce mémoire est de justifier cette constatation empirique, de voir si la méthode reste applicable pour des problèmes généraux d'optimisation et dans le cas contraire d'y apporter certaines modifications.

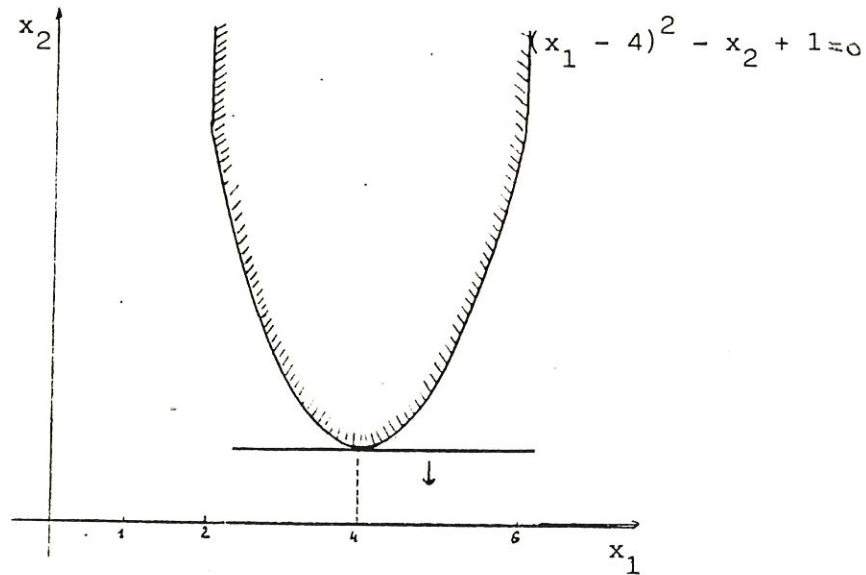
6.1. Cas de non convergence

Les approximations de la fonction objectif et des contraintes sont des approximations du premier ordre, cette imprécision entraîne des cas de non convergence. Illustrons ce fait par un exemple.

Considérons le problème à deux variables et une contrainte suivant:

$$\left\{ \begin{array}{l} \min \quad x_2 \\ \text{s.c.} \quad (x_1 - 4)^2 - x_2 + 1 \leq 0 \\ \quad \quad 2 \leq x_1 \leq 6 \end{array} \right. \quad (6.1)$$

Graphiquement, nous avons la situation suivante:



(fig.6.1)

Nous observons géométriquement que le point (4,1) est optimal.

Appliquons la méthode de linéarisation convexe à ce problème.

Le changement de signe de la dérivée de la contrainte nous oblige à discuter deux cas:

Soit x° le point de linéarisation

$$\frac{\partial f}{\partial x_1} \Big|_{x^\circ} = 0 \qquad \frac{\partial f}{\partial x_2} \Big|_{x^\circ} = 1$$

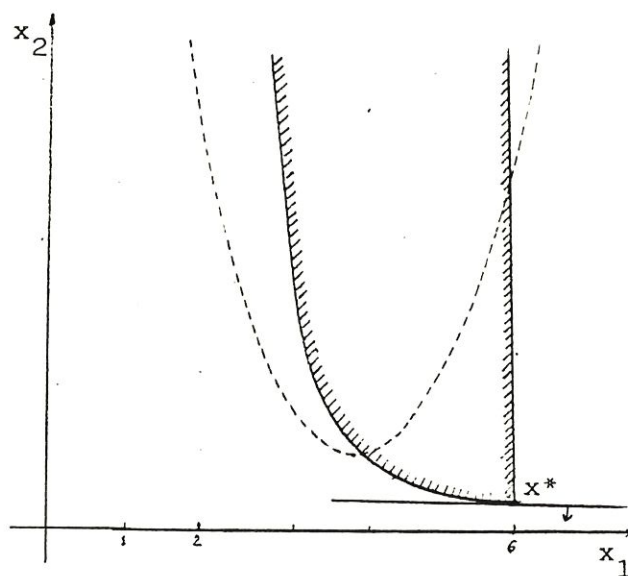
$$\frac{\partial h}{\partial x_1} \Big|_{x^\circ} = 2(x_1^\circ - 4) < 0 \quad \text{si } x_1^\circ < 4$$

$$\qquad \qquad \qquad \geq 0 \quad \text{si } x_1^\circ \geq 4$$

$$\frac{\partial h}{\partial x_2} \Big|_{x^\circ} = -1$$

* Si x_1^0 est inférieur ou égal à 4, le problème $P(x^0)$ s'écrit

$$\left\{ \begin{array}{l} \min \quad x_2 \\ \text{s.c.} \quad -2(x_1^0 - 4)(x_1^0)^2 \frac{1}{x_1} + (x_2^0)^2 \frac{1}{x_2} + 3(x_1^0)^2 - 16x_1 - \\ \quad 2x_2^0 + 17 \leq 0 \\ \quad 2 \leq x_1 \leq 6 \end{array} \right.$$

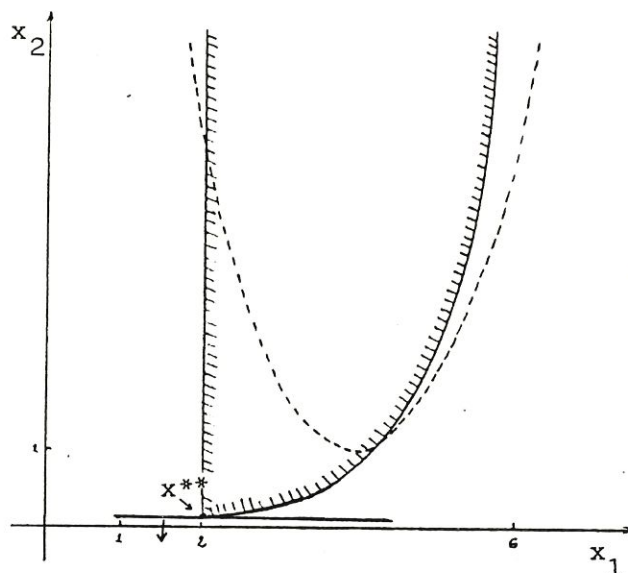


(fig.6.2)

Graphiquement, il est clair que le point optimal du problème se trouve en x^* dont la première composante est plus grande que 4 et atteint la borne supérieure 6.

* Envisageons maintenant le cas où x_1^0 est supérieur à 4, le problème linéarisé prend alors une tout autre forme:

$$\left\{ \begin{array}{l} \min \quad x_2 \\ \text{s.c.} \quad 2(x_1^0 - 4)x_1 + (x_2^0)^2 \frac{1}{x_2} - (x_1^0)^2 - 2x_2^0 + 17 \leq 0 \\ \quad \quad 2 \leq x_1 \leq 6 \end{array} \right.$$



(fig.6.3)

Dans ce cas, le point optimal se trouve en x^{**} dont la première composante est inférieure à 4 et atteint la borne inférieure 2. Nous nous trouvons à nouveau dans le cas précédent, par conséquent la première composante des itérés va osciller entre les deux bornes 2 et 6, les itérés ne convergeront donc pas vers l'optimum (4,1).

Remarquons que nous aurions les mêmes difficultés si nous considérons le problème équivalent:

$$\begin{cases} \min & (x_1 - 4)^2 + 1 \\ \text{s.c.} & 2 \leq x_1 \leq 6 \end{cases} \quad (6.2)$$

En effet, le problème (6.1) s'obtient à partir du problème (6.2) en ajoutant une variable x_2 , en introduisant la fonction objectif dans les contraintes: $(x_1 - 4)^2 + 1 \leq x_2$ et en minimisant x_2 . La représentation graphique du problème (6.2) est tout à fait équivalente: il suffit de considérer la frontière de la contrainte de (6.1) comme étant à présent la fonction objectif.

Par conséquent, nous constatons que lorsqu'une des dérivées partielles de la fonction objectif ou d'une contrainte change de signe à une itération, le problème linéarisé à l'itération suivante prend une forme tout à fait différente et il y a risque de cyclage.

En optimisation de structures, le risque de changements de signe dans les dérivées partielles est faible car les contraintes sont d'un type spécial: par exemple, en ce qui concerne les contraintes de déplacements, lorsque l'épaisseur des composantes de la structure (variable x_i) augmente, le déplacement diminue, et dans ce cas la dérivée de la contrainte est de signe constant. De plus, ces problèmes comportent beaucoup de contraintes ce qui diminue l'effet d'un changement de signe dans l'une d'entre elles. Nous avons d'ailleurs testé des exemples comportant plusieurs contraintes avec changements de signe qui cependant convergeaient.

6.2. Théorèmes de convergence

Nous nous intéressons à présent à la convergence de la méthode de linéarisation convexe pour le problème d'optimisation:

$$\left\{ \begin{array}{ll} \min & f(x) \\ \text{s.c.} & h_j(x) \leq 0 \quad j=1,2,\dots,m \\ & 0 < \underline{x}_i \leq x_i \leq \bar{x}_i \quad i=1,2,\dots,n \end{array} \right. \quad (6.3)$$

D'après le paragraphe précédent, il est clair que la méthode ne converge pas sous n'importe quelles hypothèses. Nous pouvons donc soit imposer des hypothèses restreignant la classe des problèmes pour lesquels la méthode est valide, soit modifier légèrement la méthode pour élargir le cadre d'application.

Dans un souci de continuité nous ne donnerons que les énoncés des théorèmes et un commentaire sur ceux-ci. Les démonstrations, représentant une partie essentielle de ce chapitre, se trouvent en annexe (A.13 à A.51)

6.2.1. Convergence de la méthode non modifiée

La difficulté essentielle vient de la possibilité qu'ont les itérés de sortir du domaine initial. En effet, malgré la propriété de conservativité le domaine linéarisé n'est pas toujours inclus dans le domaine initial (fig. 2.2). Or dans la littérature, il n'existe pas, à notre connaissance, de techniques de démonstration de convergence pour des méthodes par approximations successives permettant de sortir du domaine de départ et n'effectuant pas de recherche linéaire. Nous devons imposer des hypothèses pour que le domaine linéarisé reste dans le vrai domaine, ces hypothèses seront relativement fortes mais nous discuterons de leur pertinence par rapport au cas pratique.

**** Théorème 1

Sous les hypothèses suivantes:

fonction objectif f concave, continûment différentiable

contraintes h_j concaves, continûment différentiables

pour tout x , le problème linéarisé $P(x)$ vérifie la condition de Slater

l'ensemble $E_0 = \{x \text{ admissibles tels que } f(x) \leq f(x^0)\}$ est un compact

tout point d'accumulation de la suite x^k des itérés donnés par la méthode de linéarisation convexe est un point de KUHN et TUCKER du problème (6.3).

La démonstration du théorème 1 se trouve en annexe (A.21) et est basée sur le théorème de ZANGWILL [5] :

Soit un problème d'optimisation sur X et Ω l'ensemble des points satisfaisant une certaine condition nécessaire d'optimalité.

Soit $A : X \rightarrow Y$ une application multivoque (un algorithme) et considérons une suite x^k engendrée par l'algorithme, c'est-à-dire vérifiant $x^{k+1} \in A(x^k)$

Si les trois conditions suivantes sont vérifiées:

C_1 : les points x^k sont tous contenus dans un compact $K \subset X$

C_2 : il existe une fonction de descente z , c'est-à-dire une fonction continue possédant les propriétés suivantes:

$$i) \quad x \notin \Omega \Rightarrow z(y) < z(x) \quad \forall y \in A(x)$$

$$ii) \quad x \in \Omega \Rightarrow z(y) \leq z(x) \quad \forall y \in A(x) \quad \forall x \in X$$

C_3 : l'application multivoque A est fermée sur X/Ω et $\forall x \in X/\Omega \quad A(x) \neq \emptyset$

Alors, tout point d'accumulation de la suite x^k est un point de Ω .

Dans notre cas, l'application multivoque A est l'algorithme de linéarisation et donc associe au point x l'ensemble des solutions optimales du problème linéarisé en x . La vérification de l'hypothèse C_3 nécessite une démonstration technique, le caractère fermé de cette application est assuré sous la seule hypothèse que les fonctions impliquées soient continûment différentiables.

La condition C_2 assure l'amélioration des itérés au cours de l'algorithme. C'est pour vérifier cette condition, que le domaine linéarisé doit se trouver dans le domaine réel, ceci étant vrai dans le cas où les fonctions h_j sont concaves; en imposant en plus que la fonction objectif f soit également concave, nous pouvons montrer qu'elle répond à la définition de fonction de descente. Trouver une fonction de descente dans le cas où la conservativité n'est pas totale semble impossible: habituellement, dans les autres méthodes, les itérés restent toujours soit à l'intérieur du domaine (programmation géométrique [10] et [11]), soit à l'extérieur du domaine (plans sécants [8]) ou possèdent une recherche linéaire (ZOUTENDIJK, gradient projeté [8]). Les conditions imposées sur les contraintes semblent les plus larges pour garantir la conservativité totale.

Remarquons que la convergence des problèmes linéaires est assurée par le théorème 1. Le but n'est évidemment pas de concurrencer la méthode du simplexe, cependant, il est intéressant de constater que la méthode de linéarisation convexe est efficace pour des cas simples.

Nous démontrerons au paragraphe (6.2.2.1) la convergence de la méthode en conservant l'hypothèse de concavité sur les contraintes mais en supposant que la dérivée directionnelle de la fonction objectif est constante en signe pour toute direction donnée (corollaire 1).

Soulignons qu'en pratique, cette méthode est performante pour une classe plus large de problèmes. Pour la classe des problèmes dont la fonction objectif est concave ou vérifie l'hypothèse sur la dérivée directionnelle, nous pouvons tenter d'expliquer ce fait par le caractère conservatif de la linéarisation convexe (2.2.3): en effet, grâce à cette propriété, dans beaucoup de cas, les différents itérés restent dans le domaine de départ, seul point qui fait défaut dans la démonstration de ces cas généraux. Remarquons que tout problème d'optimisation (P) peut se ramener à un problème équivalent (PE) avec fonction linéaire en ajoutant une variable supplémentaire x_{n+1} , en introduisant la fonction objectif dans les contraintes, $f(x) \leq x_{n+1}$, et en minimisant la nouvelle fonction objectif x_{n+1} . Si ce nouveau problème est bien conservatif, nous comprenons de façon intuitive l'efficacité de la méthode pour une classe de problèmes plus large. Remarquons que demander que le problème (PE) soit bien conservatif est plus fort que demander la même propriété pour (P). Par exemple, le domaine du problème (6.5.1) est totalement conservé alors que celui du problème équivalent (6.1.1) ne l'est pas.

A la lumière des remarques précédentes, nous pouvons justifier l'intérêt de la méthode pour le Laboratoire de Techniques Aéronautiques et Spatiales de l'Université de Liège. En effet, les fonctions objectifs envisagées au Laboratoire sont du type: minimiser le poids de la structure, minimiser la tension, maximiser la fréquence naturelle fondamentale [1] : ce sont des fonctions qui souvent sont linéaires ou dont la dérivée directionnelle est constante en signe. Les problèmes s'avèrent d'ailleurs très conservatifs. De plus, l'objectif n'est pas de trouver exactement le minimum mais une structure meilleure que la structure de départ après un nombre restreint d'analyses aux éléments finis. Or dans ces deux théorèmes, la condition "si x^k n'est pas un point de KHUN-et TUCKER alors $f(x^k) < f(x^{k+1})$ " assure une amélioration stricte de la fonction objectif entre deux itérés pour autant que ceux-ci restent à l'intérieur du domaine, ce qui est souvent le cas pour ce type de problèmes.

6.2.2. Modification de la méthode

Pour rendre la méthode performante pour des problèmes généraux, il est nécessaire d'y apporter de légères modifications. Il sera toutefois intéressant de faire un lien avec la méthode non modifiée.

6.2.2.1. Recherche linéaire

Introduire une recherche linéaire permet de contrôler l'évolution des itérés et de relâcher l'hypothèse sur la fonction objectif. Dans certains cas, il sera possible d'éviter cette recherche linéaire et donc, de se ramener à la méthode non modifiée.

Considérons l'algorithme suivant:

MODIF1

étape 1 : choisir un point de départ x^0 admissible
poser $k = 0$

étape 2 : rechercher z^k , l'optimum du problème linéarisé $P(x^k)$.

étape 3 : si z^k est un point de KUHN et TUCKER du problème (6.3) STOP.

étape 4 : effectuer une recherche linéaire sur le segment $[x^k, z^k]$, prendre pour x^{k+1} , le point obtenu par cette recherche linéaire.
poser $k = k + 1$ et aller à l'étape 2.

Les recherches linéaires peuvent être soit sans contraintes, soit sous contraintes, nous démontrons un théorème de convergence avec recherche linéaire sans contraintes lorsque le domaine linéarisé est inclus dans le domaine initial. Dans le cas contraire, il faut considérer une recherche

linéaire sous contraintes et pour cela s'assurer que la direction de recherche $(z^k - x^k)$ est admissible, ce qui n'est vrai que sous des hypothèses relativement fortes.

Nous envisageons d'abord une recherche linéaire exacte sans contraintes, nous obtenons le résultat suivant:

**** Théorème 2

Sous les hypothèses suivantes:

fonction objectif f continûment différentiable
 contraintes h_j concaves, continûment différentiables
 pour tout x , le problème linéarisé $P(x)$ vérifie la condition de SLATER.
 l'ensemble des points admissibles $\{x \text{ tq } h_j(x) \leq 0, j=1, \dots, m, \underline{x}_i \leq x_i \leq \bar{x}_i\}$
 est compact

Tout point d'accumulation de la suite x^k des itérés donnés par l'algorithme MODIF1, muni de la recherche linéaire suivante:

chercher x tel que $x \in [x^k, z^k]$
 et $f(x) \leq f(y) \quad \forall y \in [x^k, z^k]$

est un point de KUHN et TUCKER du problème (6.3).

La démonstration de ce théorème est basée sur le théorème de HUARD [6] et [7] qui est une légère variante du théorème de ZANGWILL [5] (annexe A.24)

Une recherche linéaire exacte reste théorique, en pratique, elle n'est jamais utilisée, c'est pourquoi, nous allons nous intéresser à une recherche linéaire inexacte.

**** Théorème 3

Sous les hypothèses du théorème 2, tout point d'accumulation de la suite x^k des itérés donnés par l'algorithme MODIF1, muni de la recherche linéaire suivante:

$$\text{chercher } x \in D(x^k, z^k) = \{ x' \text{ tq } x' = x^k + 2^{-i}(z^k - x^k) \quad i \in \mathbb{N} \}$$

$$\text{tel que } f(x) \leq f(y) + \gamma \varepsilon \quad \forall y \in D(x^k, z^k) \quad , \gamma, \varepsilon > 0$$

est un point de KUHN et TUCKER du problème (6.3).

Cette recherche linéaire sur un ensemble discret n'est cependant pas implémentable puisqu'elle nécessite un nombre infini d'itérations. Il est cependant possible de se ramener à un nombre fini d'itérations en minimisant exactement f sur le sous-ensemble fini:

$$S_K = \{ x^k \} \cup \{ x' \text{ tq } x' = x^k + 2^{-i}(z^k - x^k) \quad i = 1, \dots, k \}$$

La démonstration du théorème 3 est également basée sur le théorème de HUARD [6] et [7] et se trouve, ainsi que la preuve de la remarque précédente en annexe (A.27)

La méthode modifiée concerne une classe plus large de problèmes puisque la fonction f doit seulement être continûment différentiable. Grâce au théorème 3, nous pouvons trouver un autre type d'hypothèse sur la fonction objectif qui assure la convergence de la méthode non modifiée:

**** Corollaire 1

Sous les hypothèses suivantes:

la dérivée directionnelle de la fonction objectif est constante en signe sur toute direction donnée, c'est-à-dire:

pour toute direction fixée d , pour tout x^0 fixé,

$$f'(\xi; d) \geq 0 \quad \forall \xi \in \{\xi' = x^0 + \lambda d, \lambda \in \mathbb{R}\}$$

ou

$$f'(\xi; d) \leq 0 \quad \forall \xi \in \{\xi' = x^0 + \lambda d, \lambda \in \mathbb{R}\}$$

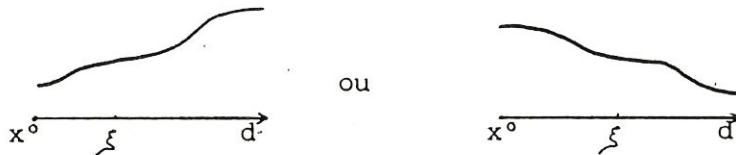
Les contraintes h_j sont des fonctions concaves

Pour tout x , le problème linéarisé $P(x)$ vérifie la condition de SLATER

L'ensemble $E_0 = \{x \text{ admissible tq } f(x) \leq f(x^0)\}$ est compact

Tout point d'accumulation de la suite x^k donnée par l'algorithme MODIF1 sans recherche linéaire, est un point de KUHN et TUCKER du problème (6.3).

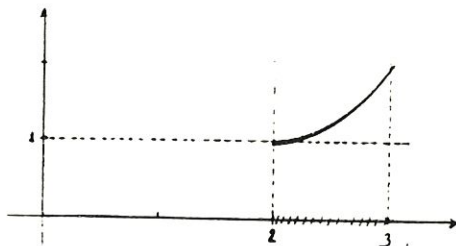
Interprétons la première condition du corollaire 1: pour chaque direction arbitraire fixée d , la fonction f est soit croissante, soit décroissante:



Nous pouvons démontrer que sous les hypothèses du théorème, la recherche linéaire sur le segment $[x^k, z^k]$ donnera toujours le point z^k , l'optimum du problème linéarisé $P(x^k)$, elle devient donc superflue (annexe A.32).

Il est important de remarquer que l'algorithme MODIF1 sans recherche linéaire est tout simplement l'algorithme de la méthode non modifiée auquel vient s'ajouter le test d'arrêt: "si z^k est point de KUHN et TUCKER alors STOP". Sans ce test, l'algorithme pourrait cycler, prenons l'exemple suivant:

$$\begin{cases} \min & (x - 2)^2 + 1 \\ \text{s.c.} & 2 \leq x \leq 3 \end{cases}$$



La solution optimale de ce problème est 2. Le problème linéarisé au point x^0 s'écrit:

$$\begin{cases} \min & 2(x^0 - 2)x + 1 \\ \text{s.c:} & 2 \leq x \leq 3 \end{cases}$$

Pour tout point $x^0 \neq 2$, il est clair que l'optimum de $P(x^0)$ est 2, par contre lorsque $x^0 = 2$, $\tilde{f}(x;2) = 1$ et l'ensemble des solutions optimales de $P(2)$ est le segment $[2,3]$. Par conséquent, si l'algorithme de résolution de $P(2)$ prend 3 comme point optimal, il y a cyclage entre le point 2 et le point 3 alors que le point d'accumulation 3 n'est pas point de KUHN et TUCKER pour le problème P.

Remarque:

Pour tenter de modifier les hypothèses sur les contraintes, nous pourrions envisager une recherche linéaire sous contraintes pour que les itérés donnés par l'algorithme MODIF1 restent dans le domaine initial. Dans ce cas, il faut s'assurer que la direction $(y^k - x^k)$ soit admissible; il suffit par exemple d'imposer les conditions suivantes (annexe A.34)

$$\left. \frac{\partial h_j}{\partial x_i} \right|_x < 0 \quad \text{pour } j \text{ et } x \text{ tels que } h_j(x) = 0, \text{ pour tout } i$$

Il est possible de démontrer la convergence de cet algorithme MODIF1 sous ces conditions en supposant en outre que la recherche linéaire se fasse strictement à l'intérieur du domaine initial. La technique de démonstration est analogue aux précédentes.

6.2.2.2. Modification de la fonction objectif du problème linéarisé

L'idée sous-jacente à cette modification est de contrôler le pas entre deux itérés par l'ajout d'un terme dans la fonction objectif du problème linéarisé. Cette nouvelle méthode nécessite une recherche linéaire mais celle-ci pourra être évitée pour un choix judicieux du terme ajouté.

Considérons le sous-problème approximant du problème (6.3) suivant:

$$P'(x) \begin{cases} \min & \tilde{f}(y;x) + \frac{1}{2} a \|y - x\|^2 \\ \text{s.c.} & \tilde{h}_j(y;x) \leq 0 & j \in J_\delta(x) \\ & \underline{y}_i \leq y_i \leq \bar{y}_i & i = 1, \dots, n \end{cases} \quad (6.4)$$

avec $J_\delta(x) = \{ j \in \{1, \dots, m\} \text{ tq } h_j(x) \geq H(x) - \delta \}$, $\delta \geq 0$

$$H(x) = \max_{j=1, m} (h_j(x); 0)$$

a constante strictement positive

$\tilde{f}(y;x), \tilde{h}_j(y;x)$, les linéarisations convexes de f et h_j

Ce nouveau sous-problème diffère seulement de l'ancien par l'ajout du terme $\frac{1}{2} a \|y - x\|^2$ dans la fonction objectif et de l'emploi de l'ensemble J_δ qui restreint le nombre de contraintes considérées dans l'approximation.

Remarquons que ce nouveau terme rend la fonction plus convexe.

Le nouvel algorithme sera:

MODIF2

étape 1 : choisir $0 < \epsilon < a$ et N, δ , constantes positives, x^0 point de départ
poser $k = 0$

étape 2 : trouver y^k , solution optimale du problème $P'(x^k)$

étape 3 : effectuer la recherche linéaire suivante :

$$\begin{aligned} & \text{trouver la première valeur } i \in \{0, 1, \dots\} \text{ telle que} \\ & f(x^k + (\frac{1}{2})^i (y^k - x^k)) + NH(x^k + (\frac{1}{2})^i (y^k - x^k)) \\ & \leq f(x^k) + NH(x^k) - (\frac{1}{2})^i \|y^k - x^k\| \end{aligned} \quad (6.5)$$

poser $\alpha = 2^{-i}$ et $x^{k+1} = x^k + \alpha(y^k - x^k)$

poser $k = k + 1$ et aller à l'étape 1

**** Théorème 4

Sous les hypothèses suivantes :

H1 : les gradients de f et h_j vérifient la condition de LIPSCHITZ.

H2 : $\Omega_N = \{x \text{ tq } f(x) + NH(x) \leq f(x^0) + NH(x^0), 0 \leq x_i \leq \bar{x}_i \text{ } i=1, \dots, n\}$

est borné pour N précisé plus bas.

H3 : $P'(x)$ admet une solution y et vérifie une condition de qualification de contraintes pour tout x dans Ω_N .

H4 : Il existe des multiplicateurs de LAGRANGE $u^j(x)$ tels que

$$\sum_{j \in J(x)} u^j(x) \leq N \quad \text{pour tout } x \text{ dans } \Omega_N.$$

Tout point d'accumulation de la suite x^k engendrée par l'algorithme MODIF2 est un point de KUHN et TUCKER du problème (6.3). Le choix du pas α_k s'obtient en un nombre fini de bipartitions. $H(x^k) \rightarrow 0$ lorsque $k \rightarrow \infty$, c'est-à-dire x^k satisfait toujours plus exactement aux contraintes.

La démonstration de ce théorème est une démonstration directe assez longue qui se trouve en annexe (A.35).

L'intérêt de ce théorème est qu'il s'applique à de nombreux problèmes d'optimisation puisque ses hypothèses sont très larges. Elle est particulièrement intéressante pour des problèmes convexes car les approximations sont convexes.

Comme nous l'avons dit de nombreuses fois, une recherche linéaire est parfois à proscrire en raison du coût des évaluations de fonctions. Le corollaire suivant donne des conditions sur a pour pouvoir l'éviter dans un voisinage de l'optimum.

**** Corollaire 2

En choisissant $a > (N + 1)L$

et

$$0 < \varepsilon \leq a - (N + 1)L$$

avec L , la plus grande des constantes de LIPSCHITZ associées aux gradients des fonctions f et h_j , N vérifiant l'hypothèse H4 du théorème 4, dans un voisinage de l'optimum la condition (6.5) est vérifiée pour $\alpha=1$.

La preuve de ce corollaire se trouve en annexe (A.50). Grâce à ce corollaire, nous pouvons assurer que pour un choix judicieux de a , la recherche linéaire peut être évitée; ce choix correspond, en quelque sorte, à une normalisation du pas.

Remarquons que dans le cas linéaire, il suffit de choisir $a > 0$ car les constantes de LIPSCHITZ sont nulles.

Lien avec la méthode de linéarisation convexe non modifiée

Il est intéressant de regarder la méthode non modifiée à la lumière de cette nouvelle méthode.

L'emploi de δ et de $J_\delta(x) = \{ j \text{ tq } h_j(x) \max \{ h_j(x); 0 \} - \delta \}$

permet de diminuer le nombre des contraintes considérées dans $P'(x)$, par conséquent, d'éviter que le domaine admissible du sous-problème soit vide. ($J_\delta(x)$ est l'ensemble des indices des contraintes les plus violées ou "les plus actives"). Lorsque δ est suffisamment grand, $J_\delta(x) = \{ 1, 2, \dots, m \}$. δ joue le même rôle que la relaxation de la méthode initiale.

Lorsque α est très petit, le terme prépondérant dans la fonction objectif approximante est la fonction objectif de la linéarisation convexe et la différence essentielle avec la méthode de départ est la recherche linéaire; nous avons programmé cette méthode et, dans les exemples numériques traités, il s'avère que lorsque α est petit, dans beaucoup de cas, le pas obtenu par la recherche linéaire vaut 1. En pratique, la recherche linéaire est souvent utile lorsqu'il y a des changements de signe dans les dérivées des fonctions considérées. D'autres commentaires à ce sujet seront donnés dans le chapitre 7 consacré aux résultats numériques.

Aspect numérique de la méthode

choix de N et de ϵ

Etant donné que la constante N n'est pas connue, il y a intérêt pour résoudre le sous-problème $P'(x)$ à obtenir les multiplicateurs de LAGRANGE $u^j(x)$ correspondants. Il sera par conséquent judicieux de résoudre le problème dual du problème séparable $P'(x)$. La connaissance de ces multiplicateurs permettra d'éclaircir le choix de la constante N . En la prenant trop grande, le pas α donné par la recherche linéaire risque d'être considérablement

petit (A.50.1). Il y a donc intérêt à l'évaluer en cours d'algorithme. Une manière de procéder serait de partir d'une valeur initiale N_0 et de modifier la valeur de N en cours d'itérations:

$$\begin{aligned} \text{si à l'itération } k, N_k \leq \sum_{J_\delta(x)} u^j(x) \\ \text{prendre } N_{k+1} = 2 \sum_{J_\delta(x)} u^j(x) \end{aligned} \quad (6.6)$$

Il est clair que si x^k est suffisamment proche d'un point limite, les multiplicateurs $u^j(x^k)$ sont, dans le cas régulier, voisins des multiplicateurs de LAGRANGE en x^* , solution optimale du problème et la formule (6.6) se justifie. La démonstration de la convergence reste d'ailleurs valable en indiquant N par k .

En ce qui concerne δ , il faut le réduire si le sous-problème $P'(x^k)$ se trouve impossible à l'itération k . δ trop petit risque cependant d'augmenter le nombre d'itérations dans la recherche linéaire (A.50.1)

choix de a et de ϵ

Nous avons vu au corollaire 2 que dans le voisinage de l'optimum, en choisissant a de manière adéquate, le pas α valait toujours 1 et la recherche linéaire pouvait être évitée. Cependant, ce choix dépend de N , borne des multiplicateurs de LAGRANGE, et de L , constante de LIPSCHITZ, constantes souvent inconnues. Choisir a trop grand risque d'augmenter le nombre d'itérations puisque la contribution du terme $\frac{1}{2} a \|y^k - x^k\|^2$ sera prépondérante dans la fonction objectif et le point y^k aura tendance à ne pas s'éloigner de manière excessive de x^k . Lorsque les fonctions sont coûteuses, comme au Laboratoire de Techniques Aéronautiques et Spatiales de LIEGE, il serait dommage de les évaluer uniquement pour faire une recherche linéaire. Dans cette optique, nous proposons une stratégie pour le choix de a :

départ : choisir a_0 petit $\zeta < a$, x^0 point de départ

itération k : trouver y^k , solution de $P'(x^k, a^k)$

si la recherche linéaire (6.5) est satisfaite pour

$\alpha = 1$, prendre $a_{k+1} = a_k$

sinon $a_{k+1} = 2a_k$

prendre $x^{k+1} = y^k$

Il est possible d'imaginer d'autres variantes de cette stratégie.

De cette manière, en étant suffisamment proche de l'optimum, la valeur de a s'ajustera de manière à assurer un pas normalisé. Pour éviter une recherche linéaire, il est judicieux de prendre ζ assez petit. Le rôle tenu par a est en quelque sorte similaire au rôle des "move-limits" utilisés dans d'autres méthodes, mais la manière de gérer a est plus simple.

CHAPITRE 7

ASPECT NUMERIQUE

7. Aspect numérique

Il nous a paru intéressant de comparer la méthode de linéarisation convexe initiale, une méthode d'optimisation classique (gradient réduit généralisé) et l'algorithme MODIF2 que nous avons programmé.

La comparaison porte sur le nombre d'itérations et sur le nombre d'évaluations de la fonction objectif. C'est surtout ce deuxième aspect qui est important pour le Laboratoire de Techniques Aéronautiques et Spatiales de LIEGE vu le coût élevé des analyses aux éléments finis. Nous n'avons pas retenu le temps C.P.U. car il est insignifiant par rapport au temps C.P.U. que demande une analyse aux éléments finis; de plus, il est possible d'envisager différents codes pour résoudre les sous-problèmes linéarisés.

Le travail de programmation et les tests ont été réalisés sur DEC 2060.

Les exemples tests sont tirés du recueil d'exemples de WILLI HOCK et KLAUS SCHITTOWSKI [12]. Les numéros entre parenthèses indiquent le numéro du problème correspondant dans ce livre. Certains de ces problèmes ont été légèrement modifiés pour assurer la validité du changement de variables (translation sur certaines variables)

Dans la suite de ce chapitre, LC désignera la méthode de linéarisation convexe initiale et GRG, la méthode de gradient réduit généralisé. Pour l'algorithme MODIF2, nous spécifierons la valeur de a , le poids affecté au terme ajouté à la fonction objectif, et la longueur du pas α obtenu dans la recherche linéaire. Nous noterons par f^* la valeur de la fonction objectif à l'optimum et par f^0 la valeur de la fonction objectif au point de départ.

Problème 1 (29)*** caractéristiques

variables : 3
 fonction objectif : non linéaire
 de dérivées constantes en signe
 contraintes : - nombre : 3
 - type : non linéaires
 de dérivées constantes en signe

contraintes de bornes
 $f^* = -22.62741$
 $f^0 = -1$

*** résultats

méthode	itérations	appels de fonctions	longueur du pas	valeur de la fonction objectif
GRG	8	97	-	-22.62740
LC	5	5	-	-22.62741
MODIF2 a=1	7	7	1	-22.62743

Problème 2 (34)*** caractéristiques

variables : 3
 fonction objectif : linéaire
 contraintes : - nombre : 2
 - type : fonctions exponentielles

contraintes de bornes
 $f^* = -1.83403$
 $f^0 = -1$

*** résultats

méthode	itérations	appels de fonctions	longueur du pas	valeur de la fonction objectif
GRG	7	108	-	-1.8340381
LC	5	5	-	-1.8340332
MODIF2 a=10 ⁻⁶	6	6	1	-1.8340361

Problème 3 (18)*** caractéristiques

variables : 2

fonction objectif : non linéaire
de dérivées constantes en signe

contraintes : - nombre : 2
- type : non linéaires
de dérivées constantes en signe

contraintes de bornes

f* = 5

f° = 404

*** résultats

méthode	itérations	appels de fonction	longueur du pas	valeur de la fonction objectif
GRG	3	41	-	5.0000002
LC	8	8	-	5.0000127
MODIF2 a=10 ⁻¹⁵	8	8	1	5.0000127
a=1	50	50	1	5.0089117

contraintes : - nombre : 1
 - type : non linéaire
 de dérivées constantes en signe

contraintes de bornes

$f^* = 0.9535288567$

$f^0 = 30.5$

*** résultats

méthode	itérations	appels de fonction	longueur du pas	valeur de la fonction objectif
GRG	6	61	-	0.953529162
LC	cyclage			
MODIF2				
a=10 ⁻³	13	27	≠ 1 pour 8 it.	0.95343037
a=0.5	13	23	≠ 1 pour 5 it.	0.95349712
a=1	10	16	≠ 1 pour 2 it.	0.95347977
a=3	12	12	1	0.95361844

Problème 6 (12)

*** caractéristiques

variables : 2

fonction objectif : non linéaire
 de dérivées non constantes en signe

contraintes : - nombre : 1
 - type : non linéaire
 de dérivées constantes en signe

contraintes de bornes

$f^* = -30$

$f^0 = -1.395$

*** résultats

méthode	itérations	appels de fonction	longueur du pas	valeur de la fonction objectif
GRG	8	104	-	-30.0000044
LC	cyclage			
MODIF2 a=0.01	8	8	1	-30.0000035

Problème 7 (118)*** caractéristiques

variables : 15
fonction objectif : non linéaire
de dérivées constantes en signe
contraintes : - nombre : 29
= type : linéaires
contraintes de bornes .
 $f^* = 665.01135$
 $f^\circ = 942.71625$

*** résultats

méthode	itérations	appels de fonction	longueur du pas	valeur de la fonction objectif
GRG	17	75	-	665.01135
LC	55	55	-	665.074

Remarque : après 12 itérations la fonction objectif vaut déjà
665.2
après 24 itérations, elle vaut 665.13

*** commentaires

Les algorithmes LC et MODIF2 se révèlent très intéressants en ce qui concerne le nombre d'appels de la fonction objectif, critère essentiel lorsque ces évaluations sont coûteuses.

D'après les problèmes 1, 2, 3 et 4, il apparaît que la méthode MODIF2 nécessite parfois un nombre d'itérations plus élevé que la méthode de linéarisation convexe initiale LC et cette augmentation est d'autant plus sensible que la valeur du poids a est grande; nous avons déjà expliqué ce fait à la page 6.19.

Lorsque a est petit et que la recherche linéaire n'est pas activée, MODIF2 est très semblable à LC, nous avons même pu constater que pour certains problèmes, les itérés étaient identiques.

Si a est trop petit, il y a risque d'activer la recherche linéaire et donc d'augmenter le nombre d'évaluations de la fonction objectif. Dans le problème 5, par exemple, pour une valeur de a de 10^{-3} , une recherche linéaire est nécessaire pour 8 itérations et la fonction objectif est évaluée 27 fois; en augmentant progressivement a , la recherche linéaire devient superflue pour un plus grand nombre d'itérations et la fonction objectif n'est plus évaluée que 12 fois. Remarquons aussi que dans cet exemple, le nombre d'itérations n'est pas augmenté avec a . Il est donc essentiel de choisir a judicieusement.

MODIF2 avec a petit rejoint plutôt les méthodes avec recherche linéaire et MODIF2 avec a grand s'apparente d'avantage aux méthodes de région de confiance, les itérés devant rester dans un certain voisinage déterminé par a .

Comme nous l'avions vu au début du chapitre 6, lorsqu'il y a des changements de signe dans les dérivées d'une fonction impliquée dans le

problème, LC risque de cycler, c'est le cas des problèmes 5. et 6. Par contre MODIF2, converge en 8 itérations sans effectuer de recherche linéaire, le terme $\frac{1}{2} a \|y^k - x^k\|^2$ jouant le rôle de " move-limits " et contrôlant l'évolution des itérés en les empêchant de s'éloigner trop les uns des autres.

D'une manière générale, la méthode LC s'avère intéressante lorsque les dérivées partielles des différentes fonctions restent constantes en signe.

L'exemple 7 montre la décroissance relativement rapide de la fonction objectif pour des problèmes de plus grande taille.

Conclusion

Nous avons prouvé la convergence de la nouvelle méthode proposée par le Laboratoire de Techniques Aéronautiques et Spatiales de l'Université de LIEGE pour des problèmes d'optimisation où la fonction objectif est concave ou de dérivées directionnelles constantes en signe et où les contraintes sont concaves. En pratique, elle converge pour une classe plus large de problèmes; le caractère conservatif de la linéarisation convexe nous a permis de justifier intuitivement ce fait et de comprendre l'efficacité de la méthode en optimisation de structures. Signalons qu'il est impossible de démontrer la convergence de cette méthode lorsqu'une des dérivées partielles d'une fonction impliquée dans le problème change de signe, nous avons d'ailleurs proposé un cas de non convergence.

Pour remédier à cette difficulté, nous avons d'abord introduit une recherche linéaire et ainsi nous avons pu prouver la convergence sous des hypothèses un peu plus larges.

Dans une deuxième approche, nous avons modifié légèrement la méthode en ajoutant un terme pondéré par un facteur a à la fonction objectif approximante et introduisant une recherche linéaire. Au voisinage de l'optimum, cette recherche linéaire peut être évitée pour un bon choix du facteur de pondération a . Nous avons démontré la convergence de cette méthode modifiée sous des hypothèses très larges (en particulier, pour des exemples qui posaient des problèmes pour la première méthode). Dans beaucoup d'exemples, même pour a petit, la recherche linéaire est satisfaite pour un pas de une unité, et dans ce cas, la méthode modifiée est très proche de celle de départ.

Nous avons constaté que ces deux méthodes étaient particulièrement avantageuses en ce qui concerne le nombre d'évaluations de fonctions; de plus, les sous-problèmes approximants ont des propriétés intéressantes pour une résolution duale.

ANNEXES

Annexes

**** Linéarisations mixte-directe-inverse

La linéarisation mixte consiste à linéariser une fonction $h(x)$ par rapport aux variables x_i pour i appartenant à I_1 et par rapport aux variables inverses $1/x_i$ pour i appartenant à I_2 . La linéarisation directe (inverse) n'est qu'un cas particulier de linéarisation mixte qui correspond au choix $I_1 = \{1, \dots, n\}$ et $I_2 = \emptyset$ ($I_1 = \emptyset$ et $I_2 = \{1, \dots, n\}$).

$$\text{En notant } \underline{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} \quad \underline{x} = (x_i)_{i \in I_1} \quad \underline{y} = (y_i)_{i \in I_2} \text{ ou } y_i = 1/x_i$$

nous pouvons réécrire h en terme des nouvelles variables \underline{x} et \underline{y}

$$h(x) = \hat{h}(\underline{x}, \underline{y})$$

Linéarisons \hat{h} au point $(\underline{x}^0, \underline{y}^0)$

$$\hat{h}(\underline{x}, \underline{y}) \approx \hat{h}(\underline{x}^0, \underline{y}^0) + \left(\left(\frac{\partial \hat{h}}{\partial x_i} \right)_{i \in I_1}, \left(\frac{\partial \hat{h}}{\partial y_i} \right)_{i \in I_2} \right) \Big|_{(\underline{x}^0, \underline{y}^0)} \begin{pmatrix} \underline{x} - \underline{x}^0 \\ \underline{y} - \underline{y}^0 \end{pmatrix}$$

$$\hat{h}(\underline{x}, \underline{y}) \approx \hat{h}(\underline{x}^0, \underline{y}^0) + \sum_{I_1} \frac{\partial \hat{h}}{\partial x_i} \Big|_{\underline{x}^0} (x_i - x_i^0) + \sum_{I_2} \frac{\partial \hat{h}}{\partial y_i} \Big|_{\underline{y}^0} (y_i - y_i^0)$$

En utilisant la formule de dérivation de fonctions composées.

$$\frac{\partial \hat{h}}{\partial y_i} = \frac{\partial \hat{h}}{\partial x_i} \frac{\partial x_i}{\partial y_i} = \frac{\partial \hat{h}}{\partial x_i} \left(-\frac{1}{y_i^2} \right)$$

nous avons encore

$$\hat{h}(\underline{x}, \underline{y}) \approx \hat{h}(\underline{x}^0, \underline{y}^0) + \sum_{I_1} \frac{\partial \hat{h}}{\partial x_i} \Big|_{\underline{x}^0} (x_i - x_i^0) - \sum_{I_2} \frac{\partial \hat{h}}{\partial x_i} \Big|_{\underline{x}^0} (y_i - y_i^0)$$

en revenant aux variables initiales

$$h(x) \approx \tilde{h}(x; x^0) = h(x^0) + \sum_i \frac{\partial h}{\partial x_i} \Big|_{x^0} (x_i - x_i^0) \\ - \sum_i (x_i^0)^2 \frac{\partial^2 h}{\partial x_i^2} \Big|_{x^0} \left(\frac{1}{x_i} - \frac{1}{x_i^0} \right)$$

Pour les cas particuliers de linéarisation directe et inverse, nous obtenons respectivement:

$$h(x) \approx \tilde{h}_d(x; x^0) = h(x^0) + \sum_i \frac{\partial h}{\partial x_i} \Big|_{x^0} (x_i - x_i^0) \\ h(x) \approx \tilde{h}_i(x; x^0) = h(x^0) - \sum_i \frac{\partial h}{\partial x_i} \Big|_{x^0} \left(\frac{x_i^0}{x_i} - x_i^0 \right)$$

**** Illustration de la méthode de linéarisation convexe

Le problème de départ est:

$$\left\{ \begin{array}{l} \min \quad x_1 + x_2 \\ \text{s.c.} \quad -x_1 - 2x_2 \leq -1 \\ \quad \quad -2x_1 - x_2 \leq -1 \\ \quad \quad .1 \leq x_1 \leq 5 \\ \quad \quad .1 \leq x_2 \leq 5 \end{array} \right.$$

Linéarisé en (a,a) pour des raisons de symétrie, il devient

$$\left\{ \begin{array}{l} \min \quad x_1 + x_2 \\ \text{s.c.} \quad \frac{a^2}{x_1} + \frac{2a^2}{x_2} - 6a + 1 \leq 0 \\ \quad \quad \frac{2a^2}{x_1} + \frac{a^2}{x_2} - 6a + 1 \leq 0 \\ \quad \quad .1 \leq x_1 \leq 5 \\ \quad \quad .1 \leq x_2 \leq 5 \end{array} \right.$$

Ecrivons les conditions d'optimalité de KUHN et TUCKER qui sont suffisantes car le sous-problème est convexe.

En désignant les multiplicateurs de LAGRANGE par λ_i , $i=1, \dots, 6$, le lagrangien s'écrit:

$$\begin{aligned}
L(x, \lambda) = & x_1 + x_2 + \lambda_1 \left(\frac{a^2}{x_1} + \frac{2a^2}{x_2} - 6a + 1 \right) \\
& + \lambda_2 \left(\frac{2a^2}{x_1} + \frac{a^2}{x_2} - 6a + 1 \right) \\
& + \lambda_3 (0.1 - x_1) + \lambda_4 (x_1 - 5) + \lambda_5 (0.1 - x_2) \\
& + \lambda_6 (x_2 - 5)
\end{aligned}$$

L'annulation du gradient du lagrangien fournit les 2 équations suivantes:

$$1 - \lambda_1 \frac{a^2}{x_1^2} + 2\lambda_2 \frac{a^2}{x_1^2} - \lambda_3 + \lambda_4 = 0$$

$$1 - 2\lambda_1 \frac{a^2}{x_2^2} - \lambda_2 \frac{a^2}{x_2^2} - \lambda_5 + \lambda_6 = 0$$

Les conditions de complémentarité s'écrivent:

$$\lambda_1 \left(\frac{a^2}{x_1} + \frac{2a^2}{x_2} - 6a + 1 \right) = 0$$

$$\lambda_2 \left(\frac{2a^2}{x_1} + \frac{a^2}{x_2} - 6a + 1 \right) = 0$$

$$\lambda_3 (x_1 - 0.1) = 0$$

$$\lambda_4 (5 - x_1) = 0$$

$$\lambda_5 (x_2 - 0.1) = 0$$

$$\lambda_6 (5 - x_2) = 0$$

Choisissons $\lambda_3 = \lambda_4 = \lambda_5 = \lambda_6 = 0$. Les deux premières équations sont équivalentes à:

$$x_1^2 = a^2 (\lambda_1 + 2\lambda_2)$$

$$x_2^2 = a^2 (\lambda_2 + 2\lambda_1)$$

$$\text{Posons } A^2 = (\lambda_1 + 2\lambda_2) \text{ et } B^2 = (2\lambda_1 + \lambda_2) \quad (\text{A.5.1})$$

ainsi, $x_1 = aA$ et $x_2 = aB$

Avec ces notations, les conditions de complémentarité deviennent:

$$\frac{a}{A} + \frac{2a}{B} - 6a + 1 = 0$$

$$\frac{2a}{A} + \frac{a}{B} - 6a + 1 = 0$$

La résolution de ce système d'équations en A et B donne:

$$A = B = \frac{3a}{6a-1}, \text{ ce qui impose } a \neq 1/6$$

De (A.5.1), il vient $\lambda_1 = \lambda_2 = \frac{1}{3} \cdot A^2$

Les multiplicateurs de LAGRANGE sont donc tous positifs et nous gé-
nérons ainsi une suite de points de KHUN et TUCKER des sous-problèmes
linéarisés

$$x_i^{k+1} = \frac{3(x_i^k)^2}{6x_i^k - 1} \quad \text{pour } i=1,2$$

dont la limite est $(\frac{1}{3}, \frac{1}{3})$ qui est bien l'optimum du problème de départ.

Montrons également que l'ordre de convergence de la méthode est quadratique, c'est-à-dire:

$$\lim \frac{x^{k+1} - 1/3}{|x^k - 1/3|^2} = C_2$$

En effet, posons $\varphi(x) = \frac{3x^2}{6x-1}$, $1/3$ est point fixe de φ

$$x^{k+1} - 1/3 = \varphi(x^k) - \varphi(1/3)$$

En développant en série de TAYLOR autour de $\frac{1}{3}$, nous obtenons

$$x^{k+1} - \frac{1}{3} = \varphi'(\frac{1}{3}) (x^k - \frac{1}{3}) + \frac{1}{2} \varphi''(\xi^k) (x^k - \frac{1}{3})^2$$

avec ξ^k entre x^k et $\frac{1}{3}$

$$\varphi'(\frac{1}{3}) = 0, \text{ d'où } \frac{x^{k+1} - 1/3}{|x^k - 1/3|^2} = \frac{1}{2} \varphi''(\xi^k)$$

et en passant à la limite,

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{x^{k+1} - 1/3}{|x^k - 1/3|^2} = \frac{1}{2} \varphi''(\frac{1}{3}) = 3$$

**** Résolution du problème dual

Le problème est de trouver x_i en fonction de λ en minimisant $L_i(x_i; \lambda)$ sur $[\underline{x}_i; \bar{x}_i]$ avec $\underline{x}_i > 0$ avec

$$L_i(x_i; \lambda) = f_i x_i + C_i x_i - D_i \frac{1}{x_i} \quad \text{si } f_i \geq 0$$

$$L_i(x_i; \lambda) = -f_i \frac{1}{x_i} + C_i x_i - D_i \frac{1}{x_i} \quad \text{si } f_i < 0$$

et

$$C_i = \sum_j \lambda_j h_{ij} \geq 0$$

$$D_i = \sum_j \lambda_j h_{ij} \leq 0$$

$$\text{si } f_i \geq 0 \quad \frac{\partial L_i}{\partial x_i} = f_i + C_i + \frac{D_i}{x_i^2}$$

$$\text{si } D_i = 0 \quad \frac{\partial L_i}{\partial x_i} = f_i + C_i \geq 0$$

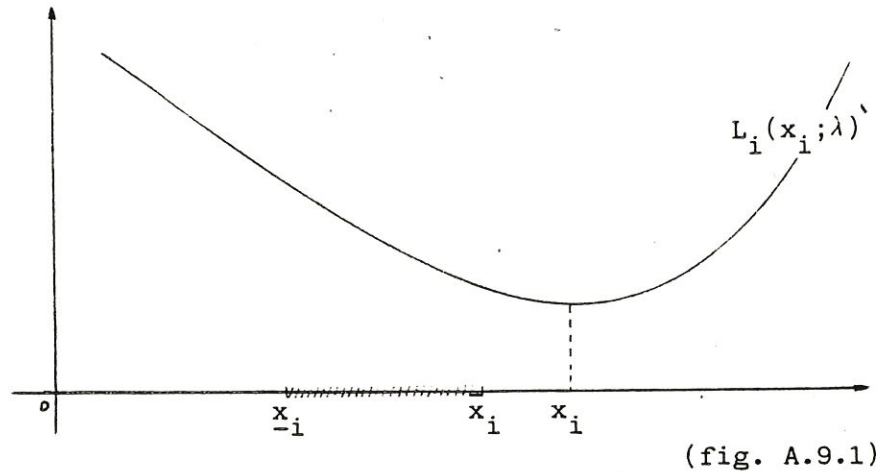
la fonction L_i est croissante en la variable x_i , son minimum est donc atteint en \underline{x}_i , la borne inférieure de l'intervalle considéré.

si $D_i \neq 0$, annuler la dérivée de L_i par rapport à x_i donne:

$$x_i^2 = \frac{-D_i}{f_i + C_i}$$

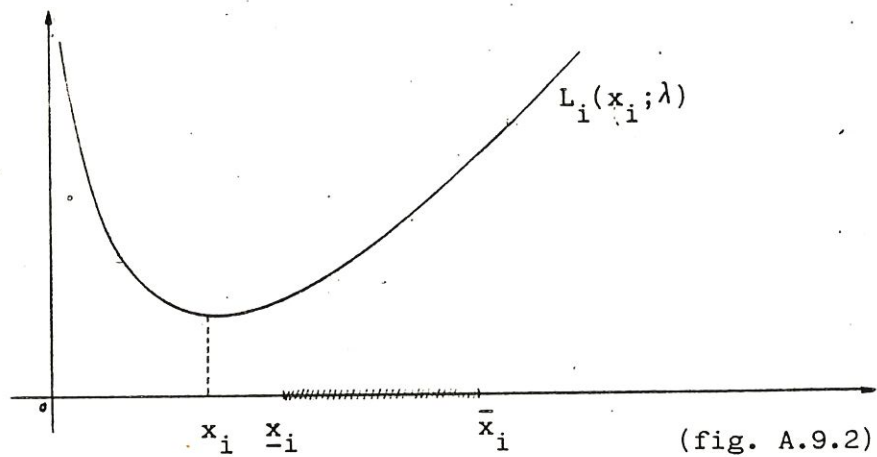
L_i est une fonction convexe pour $x_i > 0$ car $\frac{\partial^2 L_i}{\partial x_i^2} = \frac{-2D_i}{x_i^3} > 0$

si $x_i \geq \bar{x}_i$, nous avons la situation suivante:



Le minimum de L_i sur $[\underline{x}_i, \bar{x}_i]$ est donc en \bar{x}_i

- Si $x_i \leq \underline{x}_i$, nous avons la situation suivante:



Le minimum de L_i sur $[\underline{x}_i, \bar{x}_i]$ est donc x_i

* si $f_i < 0$

$$\frac{\partial L_i}{\partial x_i} = f_i \frac{1}{x_i^2} + C_i + \frac{D_i}{x_i^2}$$

. si $C_i = 0$

$$\frac{\partial L_i}{\partial x_i} = \frac{f_i + D_i}{x_i^2} < 0$$

La fonction L_i est strictement décroissante en la variable x_i d'où son minimum est en \bar{x}_i , la borne supérieure de l'intervalle considéré.

.Si $C_i \neq 0$, annuler la dérivée de L_i par rapport à x_i nous donne

$$x_i^2 = \frac{-f_i + D_i}{C_i}$$

L_i est une fonction convexe car $\frac{\partial^2 L_i}{\partial x_i^2} = \frac{-2(f_i + D_i)}{x_i^3} > 0$

donc si $x_i \geq \bar{x}_i$, comme dans la figure A.9.1, le minimum de L_i sur $[\underline{x}_i, \bar{x}_i]$ est en \bar{x}_i ; si $x_i \leq \underline{x}_i$, il se trouve en \underline{x}_i .

Récapitulons, en notant par $x_i(\lambda)$ le minimum de $L_i(x_i; \lambda)$ sur $[\underline{x}_i, \bar{x}_i]$:

$$\text{si } f_i \geq 0 \quad x_i(\lambda) = \left\{ \frac{-D_i}{f_i + C_i} \right\}^{\frac{1}{2}} \quad \text{si } \bar{x}_i^2 \geq \frac{-D_i}{f_i + C_i} \geq \underline{x}_i^2$$

$$x_i(\lambda) = \bar{x}_i \quad \text{si } \frac{-D_i}{f_i + C_i} \geq \bar{x}_i^2$$

$$x_i(\lambda) = \underline{x}_i \quad \text{si } \frac{-D_i}{f_i + C_i} \leq \underline{x}_i^2$$

$$\text{si } f_i < 0 \quad x_i(\lambda) = \left\{ \frac{-f_i - D_i}{C_i} \right\}^{\frac{1}{2}} \quad \text{si } \bar{x}_i^2 \geq \frac{-f_i - D_i}{C_i} \geq \underline{x}_i^2$$

$$x_i(\lambda) = \bar{x}_i \quad \text{si } \frac{-f_i - D_i}{C_i} \geq \bar{x}_i^2$$

$$x_i(\lambda) = \underline{x}_i \quad \text{si } \frac{-f_i - D_i}{C_i} \leq \underline{x}_i^2$$

**** Propriété du gradient de la fonction duale

La dérivée de la fonction duale par rapport au $j^{\text{ème}}$ multiplicateur de Lagrange est égale à la $j^{\text{ème}}$ contrainte primale.

$$\text{Soit le problème primal} \quad \begin{cases} \min & f(x) \\ \text{s.c.} & h_j(x) \leq 0 \quad j=1, \dots, m \end{cases}$$

$$\text{et le dual associé} \quad \begin{cases} \max & l(\lambda) \\ \text{s.c.} & \lambda \geq 0 \end{cases}$$

$$\text{avec } l(\lambda) = \min_{x \in \mathbb{R}^n} (f(x) + \sum_j \lambda_j h_j(x))$$

$$= f(x(\lambda)) + \sum_j \lambda_j h_j(x(\lambda))$$

$$\frac{\partial l}{\partial \lambda_k} = \sum_i \frac{\partial f}{\partial x_i} \frac{\partial x_i}{\partial \lambda_k} + \sum_j \lambda_j \frac{\partial h_j}{\partial x_i} \frac{\partial x_i}{\partial \lambda_k} + h_k(x(\lambda))$$

$$= \sum_i \frac{\partial x_i}{\partial \lambda_k} \left(\frac{\partial f}{\partial x_i} + \sum_j \lambda_j \frac{\partial h_j}{\partial x_i} \right) + h_k(x(\lambda))$$

$$= h_k(x(\lambda))$$

car $x(\lambda)$ est le minimum de $f(x) + \sum_j \lambda_j h_j(x)$ sur \mathbb{R}^n

**** Calcul du hessien de la fonction duale associée au sous-problème linéarisé

En employant la propriété précédente,

$$\frac{\partial l}{\partial \lambda_j} = \sum_i h_{ij} x_i(\lambda) - \sum_i h_{ij} \frac{1}{x_i(\lambda)} + \bar{h}_j$$

$$\frac{\partial^2 l}{\partial \lambda_k \partial \lambda_j} = \sum_i h_{ij} \frac{\partial x_i}{\partial \lambda_k} + \sum_i h_{ij} \frac{1}{x_i(\lambda)^2} \frac{\partial x_i}{\partial \lambda_k}$$

$$\text{Si } x_i = \bar{x}_i \text{ ou } x_i = \underline{x}_i \quad \frac{\partial x_i}{\partial \lambda_k} = 0$$

$$\text{Si } \underline{x}_i < x_i < \bar{x}_i$$

$$\text{si } f_i \geq 0 \text{ et } h_{ik} \geq 0 \quad \frac{\partial x_i}{\partial \lambda_k} = - \left[\frac{1}{2} \frac{h_{ik}}{f_i + G_i} \right] x_i(\lambda)$$

$$\text{si } f_i \geq 0 \text{ et } h_{ik} < 0 \quad \frac{\partial x_i}{\partial \lambda_k} = - \left[\frac{1}{2} \frac{h_{ik}}{f_i + C_i} \right] \frac{1}{x_i(\lambda)}$$

$$\text{si } f_i < 0 \text{ et } h_{ik} \geq 0 \quad \frac{\partial x_i}{\partial \lambda_k} = - \left[\frac{1}{2} \frac{h_{ik}}{C_i} \right] x_i(\lambda)$$

$$\text{si } f_i < 0 \text{ et } h_{ik} < 0 \quad \frac{\partial \bar{x}_i}{\partial \lambda_k} = - \left[\frac{1}{2} \frac{h_{ik}}{C_i} \right] \frac{1}{x_i(\lambda)}$$

En envisageant les différents cas, nous obtenons la formule de la page (4.5)

**** Démonstrations de convergence

L'objectif est de démontrer la convergence de la méthode de linéarisation convexe sous certaines hypothèses. Le problème considéré est:

$$\left\{ \begin{array}{ll} \min & f(x) \\ \text{s.c.} & h_j(x) \leq 0 \quad j=1, \dots, m \\ & 0 < \underline{x}_i \leq x_i \leq \bar{x}_i \quad i=1, \dots, n \end{array} \right.$$

avec f et h_j continûment différentiables pour $j=1, \dots, m$.

Le sous-problème approximant s'écrit

$$\left\{ \begin{array}{ll} \min & \tilde{f}(y;x) \\ \text{s.c.} & \tilde{h}_j(y;x) \leq 0 \quad j=1, \dots, m \\ & 0 < \underline{x}_i \leq y_i \leq \bar{x}_i \quad i=1, \dots, n \end{array} \right.$$

où x est le point de linéarisation, et avec

$$\tilde{f}(y;x) = \sum_i \left. \frac{\partial f}{\partial x_i} \right|_x y_i - \sum_i \left. \frac{\partial f}{\partial x_i} \right|_x (x_i)^2 \frac{1}{y_i} \quad (\text{A.13.1})$$

$$\begin{aligned} \tilde{h}_j(y;x) = & \sum_i \left. \frac{\partial h_j}{\partial x_i} \right|_x y_i - \sum_i \left. \frac{\partial h_j}{\partial x_i} \right|_x (x_i)^2 \frac{1}{y_i} \\ & + h_j(x) - \sum_i \left. \frac{\partial h_j}{\partial x_i} \right|_x x_i + \sum_i \left. \frac{\partial h_j}{\partial x_i} \right|_x x_i \end{aligned} \quad (\text{A.13.2})$$

Nous démontrons tout d'abord cinq lemmes qui seront utilisés dans les démonstrations proprement dites.

** Lemme 1 Propriétés de la linéarisation convexe

$$1) \tilde{h}(x;x) = h(x)$$

$$2) \nabla \tilde{h}(x;x) = \nabla h(x)$$

Preuve

$$\begin{aligned} 1) \tilde{h}(x;x) &= \sum_{+} \left. \frac{\partial h}{\partial x_i} \right|_x x_i - \sum_{-} \left. \frac{\partial h}{\partial x_i} \right|_x x_i^2 \frac{1}{x_i} \\ &\quad + h(x) - \sum_{+} \left. \frac{\partial h}{\partial x_i} \right|_x x_i + \sum_{-} \left. \frac{\partial h}{\partial x_i} \right|_x x_i \\ &= h(x) \end{aligned}$$

$$2) \nabla \tilde{h}(y;x) = \left(\left(\left. \frac{\partial h}{\partial x_i} \right|_x \right)_{i \in I^+}, \left(\left. \frac{\partial h}{\partial x_i} \right|_x x_i^2 \frac{1}{y_i} \right)_{i \in I^-} \right)^T$$

$$\text{où } I^+ = \left\{ i \text{ tq } \left. \frac{\partial h}{\partial x_i} \right|_x \geq 0 \right\}$$

$$I^- = \left\{ i \text{ tq } \left. \frac{\partial h}{\partial x_i} \right|_x < 0 \right\}$$

$$\text{donc } \nabla \tilde{h}(x;x) = \nabla h(x)$$

** Lemme 2

Si les fonctions h_j sont concaves alors le domaine linéarisé en x défini par $\tilde{h}_j(y;x) \leq 0$ est inclus dans le domaine initial défini par $h_j(y) \leq 0$ et cela quelque soit le point de linéarisation x .

Preuve

Il faut démontrer que si $\tilde{h}_j(y;x) \leq 0$ alors $h_j(y) \leq 0 \quad \forall x,y$
 et pour cela il suffit de démontrer que $h_j(y) \leq \tilde{h}_j(y;x)$

$$h_j(y) - \tilde{h}_j(y;x) \leq h_j(x) + \sum_i \left. \frac{\partial h_j}{\partial x_i} \right|_x (y_i - x_i) - \tilde{h}_j(y;x)$$

car h_j est concave,

$$\begin{aligned} h_j(y) - \tilde{h}_j(y;x) &\leq \sum_i \left. \frac{\partial h_j}{\partial x_i} \right|_x (y_i - x_i) - \sum_i \left. \frac{\partial h_j}{\partial x_i} \right|_x (y_i - x_i) \\ &\quad + \sum_i \left. \frac{\partial h_j}{\partial x_i} \right|_x (x_i)^2 \left(\frac{1}{y_i} - \frac{1}{x_i} \right) \\ &= \sum_i \left. \frac{\partial h_j}{\partial x_i} \right|_x (y_i - x_i + x_i^2 \frac{1}{y_i} - x_i) \\ &= \sum_i \left. \frac{\partial h_j}{\partial x_i} \right|_x \frac{1}{y_i} (y_i - x_i)^2 \\ &\leq 0 \end{aligned}$$

d'où $h_j(y) \leq \tilde{h}_j(y;x) \quad \forall x,y$

Remarquons que même si le point de linéarisation x est non admissible à la première itération, les points de linéarisation suivants seront admissibles.

**** Lemme 3**

Si x^* est optimum pour le sous-problème $P(x^*)$, alors x^* est point de KUHN et TUCKER pour le problème P lorsque $P(x^*)$ vérifie une condition de qualification de contraintes. La réciproque est également vraie.

Preuve

puisque le sous-problème $P(x^*)$ est convexe et vérifie une condition de qualification de contraintes, " x^* optimum de $P(x^*)$ " est équivalent à " x^* vérifie les conditions de KUHN et TUCKER de $P(x^*)$ " c'est-à-dire il existe $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_m \geq 0; w_1, w_2, \dots, w_n \geq 0$ et $v_1, v_2, \dots, v_n \geq 0$ tels que

$$\nabla \tilde{f}(x^*; x^*) + \sum_j \lambda_j \nabla \tilde{h}_j(x^*; x^*) - \sum_i w_i e_i + \sum_i v_i e_i = 0$$

$$\lambda_j \tilde{h}_j(x^*; x^*) = 0 \quad j=1, \dots, m$$

$$w_i (x_i^* - \underline{x}_i) = 0 \quad i=1, \dots, n$$

$$v_i (x_i^* - \bar{x}_i) = 0 \quad i=1, \dots, n$$

$$\tilde{h}_j(x^*; x^*) \leq 0 \quad j=1, \dots, m$$

$$\underline{x}_i \leq x_i^* \leq \bar{x}_i \quad i=1, \dots, n$$

où e_i est le $i^{\text{ème}}$ vecteur unité.

En utilisant le lemme 1, $\tilde{h}_j(x^*; x^*) = h_j(x^*)$; $\nabla \tilde{f}(x^*; x^*) = \nabla f(x^*)$, ces conditions sont les conditions de KUHN et TUCKER pour le problème P.

**** Lemme 4**

Soit un point x admissible pour P n'étant pas point de KUHN et TUCKER pour P, et y l'optimum de $P(x)$, $(y - x)$ est une direction de descente pour la fonction objectif f au point x , c'est-à-dire $\nabla f(x) (y-x) < 0$

Preuve

Par le lemme 1, $\tilde{h}_j(x; x) = h_j(x)$, comme x est admissible pour P, nous avons

$\tilde{h}_j(x;x) \leq 0$, c'est-à-dire x est admissible pour $P(x)$. Par conséquent, y étant l'optimum de $P(x)$,

$$\tilde{f}(y;x) \leq \tilde{f}(x;x)$$

Supposons que $\tilde{f}(y;x)$ soit égal à $\tilde{f}(x;x)$, dans ce cas, x est aussi solution optimale de $P(x)$ et par le lemme 3, x est point de KUHN et TUCKER de P , ce qui contredit l'hypothèse, d'où

$$\tilde{f}(y;x) < \tilde{f}(x;x)$$

La fonction f étant convexe,

$$\nabla \tilde{f}(x;x) (y - x) \leq \tilde{f}(y;x) - \tilde{f}(x;x) < 0$$

Par le lemme 1, $\nabla \tilde{f}(x;x) = \nabla f(x)$ d'où

$$\nabla f(x) (y - x) < 0$$

et donc $(y - x)$ est une direction de descente pour la fonction objectif f au point x .

** Lemme 5

Si le domaine de chaque problème linéarisé en x admet un point intérieur c'est-à-dire si

$$* x \in X, \exists w \text{ tq } \tilde{h}_j(w;x) \leq 0 \text{ pour } j=1, \dots, m \quad (\text{condition de SLATER})$$

l'application multivoque $A: X \longrightarrow \mathcal{G}(X)$

$$x \longmapsto A(x)$$

avec $y \in A(x)$ si et seulement si y est solution optimale pour $P(x)$, est fermée pour tout x appartenant à X

Preuve

Considérons une suite $x^k \rightarrow x$, et une suite $y^k \rightarrow y$ avec $y^k \in A(x^k)$ pour tout k . Montrons que $y \in A(x)$, c'est-à-dire que y est solution optimale de $P(x)$.

1) y est admissible pour $P(x)$

Démontrons d'abord la proposition suivante:

Proposition: Si $x^k \rightarrow x$, à partir d'un certain rang,

$$\frac{\partial h_j}{\partial x_i} \Big|_x \text{ est de même signe que } \frac{\partial h_j}{\partial x_i} \Big|_{x^k}$$

Il suffit de montrer qu'il existe k_0 tel que pour tout $k \geq k_0$, $\frac{\partial h_j}{\partial x_i} \Big|_{x^k} \cdot \frac{\partial h_j}{\partial x_i} \Big|_x \geq 0$

Supposons par l'absurde que pour tout k , il existe $n_k \geq k$ tel que

$$\frac{\partial h_j}{\partial x_i} \Big|_{x^{n_k}} \cdot \frac{\partial h_j}{\partial x_i} \Big|_x < 0$$

Si $\frac{\partial h_j}{\partial x_i} \Big|_x = 0$, l'hypothèse est absurde.

Si $\frac{\partial h_j}{\partial x_i} \Big|_x < 0$, alors pour tout k , il existe $n_k \geq k$ tel que $\frac{\partial h_j}{\partial x_i} \Big|_{x^{n_k}} > 0$, or

$$\frac{\partial h_j}{\partial x_i} \Big|_{x^{n_k}} \rightarrow \frac{\partial h_j}{\partial x_i} \Big|_x \quad \text{car } x^{n_k} \rightarrow x \text{ et } h_j \in C^1$$

ce qui est absurde puisque $\frac{\partial h_j}{\partial x_i} \Big|_x < 0$ et $\frac{\partial h_j}{\partial x_i} \Big|_{x^{n_k}} > 0$ pour tout k

Il en est de même dans le cas où $\frac{\partial h_j}{\partial x_i} \Big|_x > 0$, ce qui achève la preuve de la proposition.

Comme $y^k \in A(x^k)$ pour tout k , $\tilde{h}_j(y^k; x^k) \leq 0$, c'est-à-dire

$$\sum_+ \frac{\partial h_j}{\partial x_i} \Big|_{x^k} y_i^k - \sum_- \frac{\partial h_j}{\partial x_i} \Big|_{x^k} (x_i^k)^2 \frac{1}{y_i^k} + h_j(x^k) + \sum_+ \frac{\partial h_j}{\partial x_i} \Big|_{x^k} x_i^k - \sum_- \frac{\partial h_j}{\partial x_i} \Big|_{x^k} x_i^k \leq 0$$

Par la proposition précédente, pour k suffisamment grand, la \sum_+ et la \sum_- se font sur les mêmes indices, et comme h_j est de classe C^1 , en faisant tendre k vers l'infini, nous avons:

$$\sum_+ \frac{\partial h_j}{\partial x_i} \Big|_x y_i - \sum_- \frac{\partial h_j}{\partial x_i} \Big|_x x_i^2 \frac{1}{y_i} + h_j(x) - \sum_+ \frac{\partial h_j}{\partial x_i} \Big|_x x_i + \sum_- \frac{\partial h_j}{\partial x_i} \Big|_x x_i \leq 0$$

c'est-à-dire $\tilde{h}_j(y; x) \leq 0$, y est donc admissible pour le problème $P(x)$.

2) y est optimum de $P(x)$

Il suffit de montrer que $\tilde{f}(z; x) \geq \tilde{f}(y; x)$ pour tout point z admissible pour $P(x)$.

1^{er} cas: pour tout indice j , $\tilde{h}_j(z; x) = -\varepsilon_j < 0$

z est admissible pour $P(x^k)$ pour k suffisamment grand, c'est-à-dire qu'il existe k_0 tel que pour tout $k \geq k_0$, $\tilde{h}_j(z; x^k) \leq 0$. En effet, supposons le contraire:

pour tout k , il existe $n_k \geq k$ tel que $\tilde{h}_j(z; x^{n_k}) > 0$, considérons la sous-suite

$$\left(\tilde{h}_j(z; x^{n_k}) \right)_k$$

comme $\tilde{h}_j(z; x^{n_k}) \rightarrow \tilde{h}_j(z; x) = -\varepsilon_j < 0$,

$$\tilde{h}_j(z; x^{n_k}) \rightarrow -\varepsilon_j$$

ce qui est absurde puisque $\tilde{h}_j(z; x^{n_k}) > 0$ et $-c_j < 0$

Par conséquent, $\tilde{f}(z; x^k) \geq \tilde{f}(y^k; x^k)$ pour k suffisamment grand car y^k est l'optimum de $P(x^k)$; en passant à la limite

$$\tilde{f}(z; x) \geq \tilde{f}(y; x)$$

2^{ème} cas : il existe un indice j tel que $\tilde{h}_j(z; x) = 0$

Par hypothèse, il existe w tq $\tilde{h}_j(w; x) < 0$ pour tout j . Considérons la suite

$$z_n = \left(1 - \frac{1}{n}\right)z + \frac{1}{n}w$$

Il est clair que z_n converge vers z lorsque n tend vers l'infini. Comme $\tilde{h}_j(\cdot; x)$ est convexe pour tout j

$$\tilde{h}_j(z_n; x) \leq \left(1 - \frac{1}{n}\right)\tilde{h}_j(z; x) + \frac{1}{n}\tilde{h}_j(w; x)$$

Puisque z est admissible pour $P(x)$ et $\tilde{h}_j(w; x) < 0$

$$\tilde{h}_j(z_n; x) < 0 \text{ pour tout } j$$

comme dans le premier cas, nous pouvons montrer que z_n est encore admissible pour $P(x^k)$ pour k assez grand, c'est-à-dire: il existe k_n tel que

$$\forall k \geq k_n, \tilde{h}_j(z_n; x^k) \leq 0 \text{ pour tout } j$$

nous avons donc construit une suite de points z_n admissibles pour $P(x^k)$ qui converge vers z . Par conséquent,

$$\tilde{f}(z_n; x^k) \geq \tilde{f}(y^k; x^k) \text{ pour } k \text{ assez grand}$$

et en passant à la limite

$$\tilde{f}(z; x) \geq \tilde{f}(y; x)$$

y est donc optimum pour $P(x)$. Nous pouvons donc conclure que l'application multivoque A est fermée.

** Démonstration du théorème 1 (6.7)

Il s'agit de vérifier que les trois conditions du théorème de ZANGWILL sont remplies.

Définissons X : l'ensemble des points admissibles pour P ,

A : $X \rightarrow \mathcal{S}(X)$, l'application multivoque qui à un point admissible pour P fait correspondre les solutions optimales du sous-problème linéarisé en x , $P(x)$

Ω : l'ensemble des points de KUHN et TUCKER du problème initial P

Assurons nous d'abord que la définition de l'application multivoque A est correcte, c'est-à-dire que son image est bien dans l'ensemble des parties de X .

Par le lemme 2, si les fonctions h_j définissant les contraintes de P sont concaves, alors le domaine du sous-problème $P(x)$ est inclus dans X , le domaine de P , par conséquent, $A(x)$ est aussi un-sous ensemble de X .

Si nous définissions A sur un ensemble plus large que le domaine admissible initial, la condition C2 du théorème de ZANGWILL ne pourrait être démontrée; c'est à cause de cette difficulté et pour que la définition de A soit correcte qu'il faut que le domaine linéarisé soit inclus dans le domaine initial.

Envisageons d'abord le cas où x^0 est admissible, dans ce cas, la suite x^k engendrée par l'algorithme est incluse dans X .

Condition C1: les points de la suite x^k , avec
 x^0 donné,
 $x^{k+1} \in A(x^k)$
sont inclus dans un compact

Par la condition C2 et parce que les points de la suite sont tous admissibles,

$$f(x^k) \leq f(x^{k-1}) \quad \text{pour tout } k$$

Par conséquent, pour tout k , $x^k \in \{x \in X \text{ tq } f(x) \leq f(x^0)\}$ qui est compact par hypothèse.

Condition C2: La fonction objectif f satisfait à la définition de fonction de descente, c'est-à-dire que f est continue

$$\text{pour tout } x \in X, y \in A(x) \quad \begin{array}{ll} \text{i) } x \notin \Omega & f(y) < f(x) \\ \text{ii) } x \in \Omega & f(y) \leq f(x) \end{array}$$

i) Si $x \notin \Omega$, x étant admissible et $y \in A(x)$ par hypothèse, nous savons par le lemme 4 que $(y - x)$ est une direction de descente pour f en x , c'est-à-dire

$$\nabla f(x) (y - x) < 0$$

f est concave par hypothèse d'où

$$f(y) - f(x) \leq \nabla f(x) (y - x)$$

par conséquent $f(y) < f(x)$

ii) Si $x \in \Omega$ alors par le lemme 3, x est optimum pour $P(x)$ d'où

$$\tilde{f}(y;x) \geq \tilde{f}(x;x) \quad \text{car } y \text{ est admissible pour } P(x)$$

D'autre part, $y \in A(x)$ d'où, par définition de A

$$\tilde{f}(y;x) \leq \tilde{f}(x;x)$$

et donc

$$\tilde{f}(y;x) = \tilde{f}(x;x)$$

ce qui est encore équivalent à

$$\tilde{f}(y;x) - \sum \frac{\partial f}{\partial x_i} \Big|_x x_i + \sum \frac{\partial f}{\partial x_i} \Big|_x x_i = \tilde{f}(x;x) - \sum \frac{\partial f}{\partial x_i} \Big|_x x_i + \sum \frac{\partial f}{\partial x_i} \Big|_x x_i$$

par définition de $\tilde{f}(x;x)$

$$\tilde{f}(y;x) - \sum \frac{\partial f}{\partial x_i} \Big|_x x_i + \sum \frac{\partial f}{\partial x_i} \Big|_x x_i = f(x)$$

comme f est concave, par la même démonstration que pour le lemme 2 ,

$$f(y) \leq \tilde{f}(y;x) - \sum \frac{\partial f}{\partial x_i} \Big|_x x_i + \sum \frac{\partial f}{\partial x_i} \Big|_x x_i$$

d'où $f(y) \leq f(x)$

Condition C3: L'application multivoque A est fermée

Ceci est assuré par le lemme 5.

Supposons maintenant que x^0 ne soit pas admissible, dans ce cas, par le lemme 2, le domaine linéarisé est tout de même inclus dans X , le domaine initial. S'il n'est pas vide, le point suivant x^1 sera donc admissible pour P . En considérant la suite x^k , $k=1,2,\dots$ il est donc possible de répéter la démonstration ci-dessus.

Par conséquent, même si le point de départ x^0 est non admissible, mais que le domaine de $P(x^0)$ est non vide, tout point d'accumulation de la suite x^k , $k = 0,1,2,\dots$ engendrée par l'algorithme de linéarisation convexe est un point de KUHN et TUCKER du problème P .

** Démonstration du théorème 2 (6.11)

Le théorème 2 - méthode de linéarisation convexe avec recherche linéaire - est basé sur le théorème à deux étages de P.HUARD.

Théorème à deux étages

Soient $f: X \rightarrow R$, une fonction continue

X , un ensemble fermé

$x^0 \in X$, un point de départ

$E_0 = \{x \in X \text{ tq } f(x) \leq f(x_0)\}$, un ensemble compact

Ω , un ensemble donné

Le but est de trouver un point de Ω

Considérons $Y \in R^n$, un ensemble compact

H1) $A: X \rightarrow \mathcal{G}(Y)$, fonction multivoque fermée.

$M: X \times Y \rightarrow \mathcal{G}(X)$, fonction multivoque telle que

pour tout $x \in X$, $x \notin \Omega$, pour tout $z \in A(x)$

H2) M est fermée en (x, z)

H3) $x' \in M(x, z) \Rightarrow f(x') < f(x)$

Considérons la suite (x^k, z^k) engendrée par l'algorithme suivant:

Départ: $x^0 \in E_0$

Itération k: considérer $x^k \in E_0$

prendre $z^k \in A(x^k)$

si $z^k \notin \Omega$, prendre $x^{k+1} \in M(x^k, z^k)$

sinon STOP

Sous les hypothèses ci-dessus, tout point d'accumulation x^* de x^k est un point de Ω .

Définissons : $X = \{ x \text{ tq } h_j(x) \leq 0, j=1, \dots, m; 0 \leq \underline{x}_i \leq x_i \leq \bar{x}_i, i=1, \dots, n \}$

$\Omega = \{ x \text{ tq } x \text{ est point de KUHN et TUCKER de } P \}$,

$Y = X$

$A: X \rightarrow \mathcal{S}(X)$

$x \mapsto A(x)$ avec $y \in A(x) \Leftrightarrow y$ est optimum pour $P(x)$

$M: X \times X \rightarrow \mathcal{S}(X)$

$(x, z) \mapsto M(x, z)$ avec $x' \in M(x, z) \Leftrightarrow x' \in [x, z]$

et

$f(y) \geq f(x') \quad \forall y \in [x, z]$

(M est la recherche linéaire exacte sur le segment $[x, z]$)

Vérifions si les hypothèses du théorème à deux étages sont vérifiées:

f est continue et X est compact par hypothèse, par conséquent E_0 est également compact. En employant les mêmes arguments que dans la démonstration du théorème 1 (A.21), nous pouvons nous assurer que l'application A est correctement définie. De même, l'image du couple (x, y) par l'application M est bien un élément de $\mathcal{S}(X)$, puisque le segment $[x, y]$ est compris dans le domaine convexe du sous-problème $P(x)$ et que ce domaine est lui-même inclus dans X (lemme 2).

H1) L'application multivoque A est fermée en vertu du lemme 5.

H2) L'application multivoque M est fermée si $x \notin \Omega$ et $z \in A(x)$

c'est-à-dire: si $(x^k, z^k) \rightarrow (x, z)$ avec $x \notin \Omega$ et $z \in A(x)$
 $x'^k \rightarrow x'$ avec $x'^k \in M(x^k, z^k) \quad \forall k$

alors $x' \in M(x, z)$, ou encore

$x' \in [x, z]$ et $f(x') \leq f(y) \quad \forall y \in [x, z]$

Par hypothèse, $x^k \rightarrow x$ et $z^k \rightarrow z$

et pour tout k , $x'^k \in [x^k, z^k]$ d'où

$x'^k \geq x^k$ et $x'^k \leq z^k$,

en passant à la limite, $x' \geq x$ et $x' \leq z$ d'où $x' \in [x, z]$. Considérons y point arbitraire dans le segment $[x, z]$ et montrons que $f(x') \leq f(y)$
 $y \in [x, z] \Rightarrow$ il existe $\lambda \in [0, 1]$ tq $y = x + (1 - \lambda)z$. Construisons

$$y^k = \lambda x^k + (1 - \lambda)z^k$$

Il est clair que $y^k \rightarrow y$ puisque $z^k \rightarrow z$, de plus $y^k \in [x^k, z^k]$ et donc

$$f(y^k) \geq f(x'^k)$$

car $x'^k \in M(x^k, z^k) \forall k$, en passant à la limite

$$f(y) \geq f(x')$$

H3) Si $x \notin \Omega$ et $z \in A(x)$, $x' \in M(x, z) \Rightarrow f(x') < f(x)$

Si $x \notin \Omega$, x étant admissible et $z \in A(x)$ par hypothèse, nous savons par le lemme 4 que $(z - x)$ est une direction de descente, elle est admissible pour le problème initial puisque x et y appartiennent à un domaine convexe inclus dans le domaine de départ. Puisque $(z - x)$ est direction de descente pour f , il existe $\delta > 0$ tel que

$$f(x + \lambda(z - x)) < f(x), \quad \forall \lambda \in]0, \delta[$$

fixons $0 < \hat{\lambda} \leq \min \{1, \delta\}$ et $z' = x + \hat{\lambda}(z - x)$, $z' \in [x, z]$

comme $x' \in M(x, z)$ alors $f(x') \leq f(z') < f(x)$, d'où

$$f(x') < f(x)$$

Les hypothèses du théorème à deux étages sont satisfaites, le théorème est donc démontré.

** Démonstration du théorème 3 (6.12)

Le théorème 3 - méthode de linéarisation convexe avec recherche linéaire inexacte sur un ensemble discret - est basé sur le théorème à deux étages suivant:

Théorème à deux étages

Soient $f: X \rightarrow R$, une fonction continue

X , un ensemble fermé

$x^0 \in X$, un point de départ

$E_0 = \{ x \in X \text{ tq } f(x) \leq f(x^0) \}$ compact

Ω , un ensemble donné

$T = [0, \beta]$ $\beta \geq 0$

Le but est de trouver un point de Ω

Considérons $Y \in R^n$, un compact

H1) $A: X \rightarrow \mathcal{G}(Y)$, une fonction multivoque fermée

$M: X \times Y \times T \rightarrow \mathcal{G}(X)$, une fonction multivoque telle que pour tout $x \in X$, $x \notin \Omega$ pour tout $z \in A(x)$ et pour tout $\varepsilon \in T$

H2) M est fermée en $(x, y, 0)$

H3) si $x \notin M(x, y, \varepsilon)$ et $x' \in M(x, y, \varepsilon)$ alors $f(x') < f(x)$

H4) $x \notin M(x, y, 0)$

Considérons $(x^k, z^k, \varepsilon^k)$ engendrée par l'algorithme suivant:

Départ: $x^1 \in E_0$, $\varepsilon^1 \in T$

Itération k: considérer $x^k \in E_0$
 prendre $z^k \in A(x^k)$
 si $x^k \notin \Omega$ et $x^k \notin M(x^k, z^k, \varepsilon^k)$ prendre $x^{k+1} \in M(x^k, z^k, \varepsilon^k)$
 sinon prendre $x^{k+1} = x^k$; $z^{k+1} = z^k$
 prendre $\varepsilon^{k+1} \leq \varepsilon^k / 2$.

Sous les hypothèses précédentes, l'algorithme engendre une suite $(x^k)_k$ telle que

$$i) x^k \in E_0, \quad f(x^{k+1}) < f(x^k) \quad k \geq 1$$

ii) tout point d'accumulation x^* de la suite vérifie $x^* \in \Omega$

Définissons $X = \{x \text{ tq } h_j(x) \leq 0, j=1, \dots, m; 0, x_i \leq x_i \leq \bar{x}_i, i=1, \dots, n\}$

$\Omega = \{x \text{ tq } x \text{ est point de KUHN et TUCKER de } P\}$

$$Y = X$$

$$T = [0, \beta], \beta \text{ constante strictement positive}$$

$$A: X \longrightarrow \mathcal{G}(X)$$

$$x \longmapsto A(x) \quad \text{avec } y \in A(x) \iff y \text{ est optimum pour } P(x)$$

$$M: X \times X \times T \longrightarrow \mathcal{G}(X)$$

$$(x, z, \epsilon) \longmapsto M(x, z, \epsilon) \quad \text{avec } x' \in M(x, z, \epsilon)$$

$$x' \in D(x, z) = \{x\} \cup \{x' \text{ tq } x' = x + 2^{-i}(z-x), i \in \mathbb{N}\}$$

et

$$f(x') \leq f(y) + \gamma \epsilon \quad \forall y \in D(x, z)$$

(M est la recherche linéaire sur le segment $[x, z]$)

Sous les hypothèses du théorème 3, les conditions du théorème à deux étages sont vérifiées:

En ce qui concerne les définitions de l'ensemble X et des applications multivoques A et M, nous pouvons répéter le même raisonnement que dans la démonstration du théorème 2 (A.26). Les conditions H1, H2 et H3 sont également satisfaites:

H1) L'application multivoque A est fermée en vertu du lemme 5

H2) L'application multivoque M est fermée en $(x, z, 0)$, c'est-à-dire:

$$\text{si } (x^k, z^k, \epsilon^k) \longrightarrow (x, z, 0)$$

$$x'^k \longrightarrow x' \quad \text{avec } x'^k \in M(x^k, z^k, \epsilon^k)$$

$$\text{alors } x' \in M(x, z, 0)$$

$x' \in D(x, y)$ car $x'^k = x$ ou $x'^k = x^k + 2^{-i}(z^k - x^k)$, et en passant à la limite

$x' = x$ ou $x' = x + 2^{-i}(z - x)$

comme $x'^k \in M(x^k, z^k, \epsilon^k)$, $f(x'^k) \leq f(y) + \gamma \epsilon^k \quad \forall y \in D(x^k, z^k)$

ou encore
$$\begin{cases} f(x'^k) \leq f(x'^k) + \gamma \epsilon^k \\ \text{ou} \\ f(x'^k) \leq f(x^k + 2^{-i}(z^k - x^k)) + \gamma \epsilon^k \end{cases} \quad i=1, 2, \dots$$

et en passant à la limite

$$\begin{cases} f(x') \leq f(x') \\ \text{ou} \\ f(x') \leq f(x' + 2^{-i}(z - x)) \end{cases} \quad i=1, 2, \dots$$

c'est-à-dire

$$x' \in M(x, y, 0)$$

H3) Si $x \notin M(x, z, \epsilon)$

$$x' \in M(x, z, \epsilon)$$

alors $f(x') < f(x)$

En effet, $x \notin M(x, z, \epsilon) \Rightarrow$ il existe $\hat{y} \in D(x, z)$ tel que $f(x) > f(\hat{y}) + \gamma \epsilon$

$x' \in M(x, z, \epsilon) \Rightarrow$ pour tout $y \in D(x, z)$, $f(x') \leq f(y) + \gamma \epsilon$

en particulier, pour $y = \hat{y}$, d'où

$$f(x) > f(\hat{y}) + \gamma \epsilon \geq f(x')$$

H4) $x \notin M(x, z, 0)$

Supposons par l'absurde que $x \in M(x, z, 0)$, par définition de M ,

$$f(x) \leq f(y) + 0 \quad \forall y \in D(x, z) \quad (\text{A.29.1})$$

or, comme x est un point admissible n'appartenant pas à Ω et $z \in A(x)$, par le lemme 4, $(z - x)$ est direction de descente, par conséquent il existe $\delta > 0$ tel que $\forall \lambda \in]0, \delta[$, $f(x) > f(x + \lambda(z - x))$, en prenant i suffisamment grand pour que $2^{-i} \in]0, \delta[$ et en définissant $\hat{y} = x + 2^{-i}(z - x)$, nous avons

$$f(x) > f(\hat{y}) \text{ avec } \hat{y} \in D(x, z)$$

ce qui contredit (A.29.1)

Cette recherche linéaire sur un ensemble discret n'est cependant pas implémentable puisqu'elle nécessite un nombre infini d'itérations pour trouver x' appartenant à $M(x^k, z^k, \varepsilon^k)$. Il est cependant possible de se ramener à un nombre fini d'itérations dans la recherche linéaire.

Si f est quasi-convexe, il est possible de la maximiser exactement sur $D(x, z)$ en un nombre fini de calculs par examen des points de $D(x, z)$ en partant de y vers x et en s'arrêtant dès que la suite des valeurs croît.

Au point de vue pratique, dans le cas d'une fonction f de classe C^1 , il est possible de se ramener également à un nombre fini d'itérations en prenant $\varepsilon^1 = \frac{1}{2}$, $\varepsilon^{k+1} = \varepsilon^k/2$ dans l'algorithme et en minimisant exactement f sur le sous-ensemble fini S_k , avec

$$S_k = \{x^k\} \cup \{x' \text{ tq } x' = x^k + 2^{-i}(z^k - x^k) \text{ } i=1, \dots, k\}$$

En effet, considérons x^{k+1} le point de S_k qui minimise exactement f sur S_k . A l'itération k , $\varepsilon^k = 2^{-k}$ (cfr algorithme page A.27), et il est possible de montrer que $x^{k+1} \in M(x^k, z^k, 2^{-k})$. Notons x^{*k} le point qui minimise exactement f sur $D(x^k, z^k)$, c'est-à-dire

$$\text{pour tout } z \in D(x^k, z^k) \quad f(x^{*k}) \leq f(z)$$

Deux cas sont possibles:

1^{er} cas: $x^{*k} \in S_k$

Dans ce cas, $f(x^{*k}) \leq f(z) \leq f(z) + \gamma 2^{-k}$, $\forall z \in D(x^k, z^k)$, d'où $x^{*k} \in M(x^k, z^k, 2^{-k})$ et comme $x^{k+1} = x^{*k}$, il vient: $x^{k+1} \in M(x^k, z^k, 2^{-k})$

2^{ème} cas: $x^{*k} \notin S_k$

Dans ce cas, $0 \leq f(x^{k+1}) - f(x^{*k}) \leq f(x^k) - f(x^{*k})$ car $x^k \in S_k$ et x^{k+1} minimise f sur S_k

$$0 < f(x^{k+1}) - f(x^{*k}) \leq \nabla f(z) (x^k - x^{*k}) \quad \text{avec } z \in [x^k, x^{*k}]$$

$$\leq \| \nabla f(z) \| 2^{-k} \| z^k - x^k \| \quad \text{car } \| x^k - x^{*k} \| \leq 2^{-k} \| z^k - x^{*k} \|$$

$$\leq \gamma 2^{-k}$$

car $\nabla f(z)$ est borné sur un compact et z^k et x^k sont dans un compact

Par conséquent,

$$f(x^{k+1}) < f(x^{*k}) + \gamma 2^{-k} \leq f(y) + \gamma 2^{-k} \quad \forall z \in D(x^k, z^k)$$

car x^{*k} est minimum sur $D(x^k, z^k)$, d'où $x^{k+1} \in M(x^k, y^k, 2^{-k})$

Le nombre d'opérations pour trouver x^{k+1} est fini puisque S_k est fini.

** Démonstration du corollaire 1 (6.12)

Pour démontrer le corollaire 1, il suffit de montrer que la recherche linéaire du théorème 2 sur le segment $[x^k, z^k]$ où z^k est solution optimale du sous-problème $P(x^k)$ est toujours satisfaite par le point z^k et qu'il est possible de remplacer l'hypothèse du théorème 2 "l'ensemble des points admissibles de P est un compact" par l'hypothèse moins restrictive "l'ensemble $E_0 = \{x \text{ admissible tq } f(x) \leq f(x^0)\}$ est compact". Le corollaire 1 se déduira alors du théorème 2.

1) Si pour toute direction fixée d et pour tout x^0 fixé

$$f(\xi)d \geq 0 \quad \text{ou} \quad f(\xi)d \leq 0 \quad \forall \xi \in \{\xi' = x^0 + \lambda d, \lambda \in \mathbb{R}\}$$

le point z^k solution de $P(x^k)$ où x^k n'est pas un point de KUHN et TUCKER, satisfait la recherche linéaire du théorème 2, c'est-à-dire

$$f(z^k) \leq f(y) \quad \forall y \in [x^k, z^k]$$

En effet, comme x^k n'est pas point de KUHN et TUCKER, par le lemme 4, $(z^k - x^k)$ est direction de descente pour f en x^k , par conséquent:

$$\text{il existe } \delta > 0 \text{ tel que } \forall \lambda \in [0, \delta] \quad f(x^k + \lambda(z^k - x^k)) < f(x^k)$$

Considérons x^* le minimum de f sur $[x^k, z^k]$, puisque $(z^k - x^k)$ est direction de descente,

$$f(x^*) < f(x^k)$$

Supposons que $f(z^k) > f(x^*)$, par le théorème des accroissements finis,

$$0 < f(x^k) - f(x^*) = \nabla f(\xi_1) (x^k - x^*) \quad \text{avec } \xi_1 \in]x^*, x^k[\quad (\text{A.32.1})$$

$$0 > f(x^*) - f(z^k) = \nabla f(\xi_2) (x^* - z^k) \quad \text{avec } \xi_2 \in]x^*, z^k[\quad (\text{A.32.2})$$

puisque $x^* \in [x^k, z^k]$, il existe $\lambda^* \in [0, 1]$ tel que $x^* = \lambda^* x^k + (1 - \lambda^*) z^k$,
 (A.32.1) et (A.32.2) deviennent

$$0 < f(\xi_1) (1 - \lambda^*) (x^k - z^k)$$

$$0 > f(\xi_2) \lambda^* (x^k - z^k)$$

avec ξ_1 et $\xi_2 \in [x^k, z^k]$

Il existe donc ξ_1 et $\xi_2 \in [x^k, z^k]$ tels que

$$0 < f(\xi_1) (x^k - z^k)$$

$$0 > f(\xi_2) (x^k - z^k)$$

ce qui contredit l'hypothèse que pour toute direction fixée, la dérivée directionnelle est constante en signe.

2) En vertu du point précédent, il est possible de remplacer l'hypothèse sur le domaine admissible par l'hypothèse moins restrictive:

" $E_0 = \{x \text{ admissible tq } f(x) \leq f(x_0)\}$ est compact". En effet, il fallait supposer que le domaine admissible soit compact pour pouvoir trouver l'ensemble compact Y du théorème à deux étages. Nous pouvons maintenant prendre $X = E_0$ et $Y = E_0$, avec E_0 qui est compact par hypothèse. Dans ce cas, la définition de $A: E_0 \rightarrow \mathcal{P}(E_0)$

$$x \longmapsto A(x)$$

avec $y \in A(x) \Leftrightarrow y$ est solution optimale de $P(x)$

est correcte puisque si x appartient à E_0 alors y appartient à E_0 par le point précédent; dans la démonstration du théorème 2, y pouvait ne pas appartenir à E_0

** Condition d'admissibilité de la direction $(y - x)$ pour P (6.14)

Il faut s'assurer que la direction $(y - x)$, où y est la solution optimale du sous-problème $P(x)$, est une direction admissible pour le problème P sous l'hypothèse que les contraintes h_j vérifient:

$$\left. \frac{\partial h_j}{\partial x_i} \right|_x < 0 \quad \text{pour } j \text{ et } x \text{ tels que } h_j(x) = 0 \text{ et pour tout } i$$

Si $h_j(x) < 0$, toute direction est admissible

Si $h_j(x) = 0$, c'est-à-dire si le point de linéarisation se trouve sur la frontière du domaine admissible, il faut vérifier que la recherche linéaire peut trouver un point à l'intérieur du domaine ce qui revient à vérifier:

$$\nabla h_j(x) (y - x) < 0$$

Par définition de h_j et comme $h_j(x) = 0$ par hypothèse,

$$\tilde{h}_j(y;x) - \nabla h_j(x) (y - x) = -\sum \left. \frac{\partial h_j}{\partial x_i} \right|_x \frac{1}{y_i} (x_i - y_i)^2$$

En supposant que x n'est pas la solution optimale de P , c'est-à-dire, par le lemme 5 que $x \neq y$, d'où il existe un indice i tel que $x_i \neq y_i$

Par hypothèse, $\left. \frac{\partial h_j}{\partial x_i} \right|_x < 0$ pour tout i , donc

$$\tilde{h}_j(y;x) > \nabla h_j(x) (y - x)$$

et comme y est solution de $\tilde{P}(x)$ $\tilde{h}_j(y;x) \leq 0$, d'où $\nabla h_j(x) (y - x) < 0$

** Démonstration du théorème 4 (6.16)

Nous démontrons ici la convergence de la méthode de linéarisation convexe avec recherche linéaire et où la fonction objectif du sous-problème est augmentée du terme $\frac{1}{2} a \|y - x\|^2$; cette méthode est décrite par l'algorithme MODIF2.

Nous démontrons d'abord trois lemmes techniques, ensuite nous verrons que la recherche linéaire décrite dans MODIF2 peut s'effectuer en un nombre fini de bipartitions et enfin que les points d'accumulation de la suite fournie par l'algorithme sont des points de KUHN et TUCKER du problème P de départ.

* Lemme 6

$$\nabla f(x)(y - x) \leq \sum_{j \in J(x)} u^j(x) h_j(x) - a \|y - x\|^2$$

où x est point de linéarisation et y solution optimale du problème $P'(x)$ (6.2.2) qui vérifie une condition de qualification de contraintes

Preuve

y est solution optimale de $P'(x)$, qui vérifie une condition de qualification de contraintes, nous pouvons donc, grâce aux conditions de KUHN et TUCKER, écrire les quatre conditions suivantes:

$$\begin{aligned} \nabla \tilde{f}(y;x) + \sum_{j \in J(x)} u^j(x) \nabla \tilde{h}_j(y;x) + a(y - x) \\ + \sum_i w^i(x) e_i - \sum_i v^i(x) e_i = 0 \end{aligned} \quad (\text{A.35.1})$$

où e_i est le $i^{\text{ème}}$ vecteur unitaire

$$u^j(x) h_j(y;x) = 0 \quad j \in J_j(x)$$

$$w^i(x) (\bar{x}_i - y_i) = 0 \quad i = 1, \dots, n$$

$$v^i(x) (x_i - y_i) = 0 \quad i = 1, \dots, n$$

Exploitions la première condition

$$\nabla \tilde{f}(y; x) = \left(\left(\frac{\partial f}{\partial x_i} \Big|_x \right)_+ , \left(\frac{\partial f}{\partial x_i} \Big|_x \frac{x_i^2}{y_i} \right)_- \right)$$

d'où la première condition s'écrit:

$$\begin{aligned} g_i = \frac{\partial f}{\partial x_i} \Big|_x + \sum_{j \in I_1} u^j(x) \frac{\partial h_j}{\partial x_i} \Big|_x + \sum_{j \in I_2} u^j(x) \frac{\partial h_j}{\partial x_i} \Big|_x \frac{x_i^2}{y_i} + a(y_i - x_i) \\ + w^i(x) - v^i(x) = 0 \quad \text{pour } i \text{ tel que } \frac{\partial f}{\partial x_i} \Big|_x \geq 0 \end{aligned} \quad (\text{A.36.1})$$

$$\begin{aligned} g_i = \frac{\partial f}{\partial x_i} \Big|_x \frac{x_i^2}{y_i} + \sum_{j \in I_1} u^j(x) \frac{\partial h_j}{\partial x_i} \Big|_x + \sum_{j \in I_2} u^j(x) \frac{\partial h_j}{\partial x_i} \Big|_x \frac{x_i^2}{y_i} + a(y_i - x_i) \\ + w^i(x) - v^i(x) = 0 \quad \text{pour } i \text{ tel que } \frac{\partial f}{\partial x_i} \Big|_x < 0 \end{aligned}$$

Effectuons le produit scalaire s du vecteur g défini par (A.36.1) par le vecteur $(y - x)$, ce scalaire s est nul car g est nul

$$\begin{aligned} s = \sum_{\substack{\frac{\partial f}{\partial x_i} \geq 0 \\ i \in I_1}} (y_i - x_i) \left(\frac{\partial f}{\partial x_i} \Big|_x + \sum_{j \in I_1} u^j(x) \frac{\partial h_j}{\partial x_i} \Big|_x + \sum_{j \in I_2} u^j(x) \frac{\partial h_j}{\partial x_i} \Big|_x \frac{x_i^2}{y_i} \right. \\ \left. + a(y_i - x_i) + w^i(x) - v^i(x) \right) \\ + \sum_{\substack{\frac{\partial f}{\partial x_i} < 0 \\ i \in I_2}} (y_i - x_i) \left(\frac{x_i^2}{y_i} \frac{\partial f}{\partial x_i} \Big|_x + \sum_{j \in I_1} u^j(x) \frac{\partial h_j}{\partial x_i} \Big|_x + \sum_{j \in I_2} u^j(x) \frac{\partial h_j}{\partial x_i} \Big|_x \frac{x_i^2}{y_i} \right. \\ \left. + a(y_i - x_i) + w^i(x) - v^i(x) \right) = 0 \end{aligned}$$

Ce qui est équivalent à:

$$\begin{aligned}
& \sum_{+} \frac{\partial f}{\partial x_i} \Big|_x (y_i - x_i) + \sum_{-} \frac{\partial f}{\partial x_i} \Big|_x \frac{x_i^2}{y_i^2} (y_i - x_i) \\
& + \sum_{+} \sum_{\frac{4}{t_i}} u^j(x) \frac{\partial h^j}{\partial x_i} \Big|_x (y_i - x_i) + \sum_{-} \sum_{\frac{4}{t_i}} u^j(x) \frac{\partial h^j}{\partial x_i} \Big|_x \frac{x_i^2}{y_i^2} (y_i - x_i) \\
& + a \|y - x\|^2 + \sum_{+} (w^i(x) - v^i(x)) (y_i - x_i) = 0 \quad (\text{A.37.1})
\end{aligned}$$

Nous pouvons minorer la somme des deux premiers termes de (A.37.1) par $\nabla f(x) (y - x)$, en effet;

$$\nabla f(x) (y - x) \leq \sum_{+} \frac{\partial f}{\partial x_i} \Big|_x (y_i - x_i) + \sum_{-} \frac{\partial f}{\partial x_i} \Big|_x \frac{x_i^2}{y_i^2} (y_i - x_i)$$

car si $y_i \leq x_i$ alors $\frac{x_i^2}{y_i^2} \geq 1$ et $(y_i - x_i) \geq 0$

d'où $(y_i - x_i) \geq \frac{x_i^2}{y_i^2} (y_i - x_i)$

et si $y_i \geq x_i$ alors $\frac{x_i^2}{y_i^2} \leq 1$ et $(y_i - x_i) \geq 0$

d'où $(y_i - x_i) \geq \frac{x_i^2}{y_i^2} (y_i - x_i)$

par conséquent,

$$\frac{\partial f}{\partial x_i} \Big|_x (y_i - x_i) \leq \frac{\partial f}{\partial x_i} \Big|_x \frac{x_i^2}{y_i^2} (y_i - x_i) \quad \text{si} \quad \frac{\partial f}{\partial x_i} \Big|_x < 0$$

En sommant sur les indices i tels que $\frac{\partial f}{\partial x_i} \Big|_x < 0$ et en ajoutant aux deux membres de l'inégalité

$$\sum_{+} \frac{\partial f}{\partial x_i} \Big|_x (y_i - x_i)$$

nous obtenons

$$\sum_i \frac{\partial f}{\partial x_i} \Big|_x (y_i - x_i) \leq \sum_i \frac{\partial f}{\partial x_i} \Big|_x (y_i - x_i) + \sum_i \frac{\partial f}{\partial x_i} \Big|_x \frac{x_i^2}{y_i} (y_i - x_i)$$

L'expression (A.37.1) devient alors

$$\begin{aligned} \nabla f(x) (y - x) &\leq - \sum_i \sum_{j \in J_i} u^j(x) \frac{\partial h_j}{\partial x_i} \Big|_x (y_i - x_i) \\ &\quad - \sum_i \sum_{j \in J_i} u^j(x) \frac{\partial h_j}{\partial x_i} \Big|_x (y_i - x_i) \frac{x_i^2}{y_i} \\ &\quad - a \|y - x\|^2 - \sum_i (w^i(x) - v^i(x)) (y_i - x_i) \end{aligned} \quad (\text{A.38.1})$$

Exploitions à présent la deuxième condition

$$u^j(x) \tilde{h}_j(y; x) = 0 \quad j \in J_f(x)$$

est équivalent par définition de \tilde{h}_j à

$$u^j(x) \left(h_j(x) + \sum_i \frac{\partial h_j}{\partial x_i} \Big|_x (y_i - x_i) + \sum_i \frac{\partial h_j}{\partial x_i} \Big|_x \left(x_i - \frac{x_i^2}{y_i} \right) \right) = 0$$

c'est-à-dire

$$u^j(x) h_j(x) + u^j(x) \sum_i \frac{\partial h_j}{\partial x_i} \Big|_x \left(x_i - \frac{x_i^2}{y_i} \right) = - u^j(x) \sum_i \frac{\partial h_j}{\partial x_i} \Big|_x (y_i - x_i)$$

pour tout j dans $J_f(x)$

En sommant sur j dans $J_f(x)$, nous avons

$$\sum_{j \in J_f(x)} u^j(x) h_j(x) + \sum_{j \in J_f(x)} u^j(x) \sum_i \frac{\partial h_j}{\partial x_i} \Big|_x \left(x_i - \frac{x_i^2}{y_i} \right) = - \sum_{j \in J_f(x)} u^j(x) \sum_i \frac{\partial h_j}{\partial x_i} \Big|_x (y_i - x_i)$$

ou encore

$$\begin{aligned} & \sum_{j(i)} u^j(x) h_j(x) + \sum_i \sum_{j(i)} u^j(x) \left. \frac{\partial h_j}{\partial x_i} \right|_x \left(x_i - \frac{x_i^2}{y_i} \right) \\ &= - \sum_i \sum_{j(i)} u^j(x) \left. \frac{\partial h_j}{\partial x_i} \right|_x (y_i - x_i) \end{aligned} \quad (\text{A.39.1})$$

Remplaçons dans (A.38.1)

$$\begin{aligned} \nabla f(x) (y - x) &\leq \sum_{j(i)} u^j(x) h_j(x) + \sum_i \sum_{j(i)} u^j(x) \left. \frac{\partial h_j}{\partial x_i} \right|_x \left(x_i - \frac{2x_i^2}{y_i} + \frac{x_i^3}{y_i} \right) \\ &\quad - a \|y - x\|^2 = \sum_i (w^i(x) - v^i(x)) (y_i - x_i) \end{aligned}$$

$$\text{or, } x_i - \frac{2x_i^2}{y_i} + \frac{x_i^3}{y_i} = \frac{x_i}{y_i} (y_i^2 - 2x_i y_i + x_i^2) \geq 0$$

d'où le deuxième terme du membre de droite est négatif, par conséquent,

$$\nabla f(x) (y - x) \leq \sum_{j(i)} u^j(x) h_j(x) - a \|y - x\|^2 - \sum_i (w^i(x) - v^i(x)) (y_i - x_i) \quad (\text{A.39.2})$$

Il reste à minorer le dernier terme de (A.39.2) pour avoir la thèse du lemme,

$$\begin{aligned} - \sum_i (w^i(x) - v^i(x)) (y_i - x_i) &= - \sum_i w^i(x) (y_i - \bar{x}_i + \bar{x}_i - x_i) \\ &\quad + \sum_i v^i(x) (y_i - \underline{x}_i + \underline{x}_i - x_i) \\ &= \sum_i w^i(x) (\bar{x}_i - y_i) + \sum_i v^i(x) (y_i - \underline{x}_i) \\ &\quad - \sum_i w^i(x) (\bar{x}_i - x_i) + \sum_i v^i(x) (\underline{x}_i - x_i) \end{aligned} \quad (\text{A.39.3})$$

Or, par la troisième et la quatrième condition, les deux premiers termes de (A.39.3) sont nuls et comme $\underline{x}_i \leq x_i \leq \bar{x}_i$, les deux derniers termes sont négatifs, d'où

$$- \sum_i (w^i(x) - v^i(x))(y_i - x_i) \leq 0 \quad (\text{A.40.1})$$

Finalement, par (A.40.1) et (A.39.2)

$$\nabla f(x) (y - x) \leq \sum_{j \in J_f(x)} u^j(x) h_j(x) - a \|y - x\|^2$$

* Lemme 7

$$\nabla h_j(x) (y - x) \leq -h_j(x) \quad \text{pour } j \in J_f(x)$$

avec x point de linéarisation et solution optimale du problème $P'(x)$

Preuve

y est solution optimale de $P'(x)$ d'où

$$\tilde{h}_j(y; x) \leq 0 \quad \text{pour } j \in J_f(x) \quad (\text{A.40.2})$$

Par définition de \tilde{h}_j , ceci est équivalent à

$$h_j(x) + \sum \frac{\partial h_j}{\partial x_i} \Big|_x (y_i - x_i) + \sum \frac{\partial h_j}{\partial x_i} \Big|_x \left(x_i - \frac{x_i^2}{y_i} \right) \leq 0$$

d'où

$$\begin{aligned} \nabla h_j(x) (y - x) + h_j(x) - \tilde{h}_j(y; x) &= \sum \frac{\partial h_j}{\partial x_i} \Big|_x \left(y_i - 2x_i + \frac{x_i^2}{y_i} \right) \\ &= \sum \frac{\partial h_j}{\partial x_i} \frac{1}{y_i} (y_i - x_i)^2 \leq 0 \end{aligned}$$

et donc

$$\nabla h_j(x)(y - x) \leq -h_j(x) + \tilde{h}_j(y;x)$$

et par (A.40.2),

$$\nabla h_j(x)(y - x) \leq -h_j(x)$$

* Lemme 8

Pour que x soit point de KUHN et TUCKER du problème P il faut et il suffit que x soit point de KUHN et TUCKER du sous-problème $P'(x)$ (cette condition est équivalente à " x optimum de $P'(x)$ " si $P'(x)$ vérifie une condition de qualification de contraintes.)

Preuve

a) condition nécessaire

x est point de KUHN et TUCKER du problème P si et seulement si

$$\nabla f(x) + \sum_j u^j(x) \nabla h_j(x) + \sum_i w^i(x) e_i - \sum_i v^i(x) e_i = 0 \quad (\text{A.41.1})$$

$$u^j(x) h_j(x) = 0 \quad j = 1, \dots, m \quad (\text{A.41.2})$$

$$w^i(x) (x_i - \bar{x}_i) = 0 \quad i = 1, \dots, n \quad (\text{A.41.3})$$

$$v^i(x) (x_i - \underline{x}_i) = 0 \quad i = 1, \dots, n \quad (\text{A.41.4})$$

$$h_j(x) \leq 0 \quad (\text{A.41.5})$$

Par (A.41.5), $H(x) = \max_j (h_j(x), 0) = 0$

d'où $J_0(x) = \{j \text{ tq } h_j(x) \geq H(x) - 0\} = \{j \text{ tq } h_j(x) = 0\}$

si $h_j(x) < 0$, par (A.41.2) $u^j(x) = 0$, ce qui veut dire que si un indice j n'est pas dans $J_0(x)$ alors le multiplicateur associé est nul. Par définition de $J_\delta(x)$ et puisque $H(x) = 0$, il est clair que

$$J_0(x) \subseteq J_\delta(x) \quad \text{pour tout réel positif}$$

d'où, par ce qui précède, si $j \notin J_\delta(x)$ alors $u^j(x) = 0$. Les conditions (A.41.1) et (A.41.2) sont donc équivalentes aux suivantes:

$$\nabla f(x) + \sum_{j \in J_\delta(x)} u^j(x) \nabla h_j(x) + \sum_i w^i(x) e_i - \sum_i v^i(x) e_i = 0 \quad (\text{A.42.1})$$

$$u^j(x) h_j(x) = 0 \quad j \in J_\delta(x) \quad (\text{A.42.2})$$

comme $\tilde{h}_j(x; x) = h_j(x)$, $\nabla \tilde{f}(x; x) = \nabla f(x)$ et $\nabla \tilde{h}_j^i(x; x) = \nabla h_j(x)$ (par le lemme 1), les conditions (A.41.3) à (A.41.5) et les conditions (A.42.1) et (A.42.2) sont les conditions de KUHN et TUCKER du problème $P'(x)$ pour le point x .

b) condition suffisante

Supposons que x soit point de KUHN et TUCKER du problème $P'(x)$, alors,

$$h_j(x) \leq 0 \quad \text{si } j \in J_\delta(x) \quad (\text{A.42.3})$$

si $j \notin J_\delta(x)$ alors $h_j(x) < H(x) - \delta$, par définition de l'ensemble $J_\delta(x)$

Considérons $k \in J_\delta(x)$, par (A.42.3) et par définition de $J_\delta(x)$,

$$0 \geq h_k(x) \geq H(x) - \delta$$

d'où, par ce qui précède,

$$h_j(x) < 0 \quad \text{quel que soit } j \quad (\text{A.43.1})$$

Comme x est point de KUHN et TUCKER pour $P'(x)$, nous pouvons encore écrire

$$\nabla \tilde{f}(x;x) + \sum_j u^j(x) \tilde{h}_j(x;x) + \sum_i w^i(x) e_i - \sum_i v^i(x) e_i = 0 \quad (\text{A.43.2})$$

$$u^j(x) \tilde{h}_j(x;x) = 0 \quad \text{pour } j \in J_f(x) \quad (\text{A.43.3})$$

$$w^i(x) (\bar{x}_i - x_i) = 0 \quad \text{pour } i = 1, \dots, n \quad (\text{A.43.4})$$

$$v^i(x) (x_i - \underline{x}_i) = 0 \quad \text{pour } i = 1, \dots, n \quad (\text{A.43.5})$$

En prenant $u^j(x) = 0$ pour $j \notin J_f(x)$ et en utilisant à nouveau le lemme 1, les conditions (A.43.1) à (A.43.5) sont les conditions de KUHN et TUCKER du problème initial P.

Nous sommes à présent en mesure de démontrer le théorème 4 qui comporte deux parties.

* Première partie

Au cours de l'algorithme MODIF2, le choix du pas α_k s'effectue en un nombre fini de bipartitions.

Preuve

Remarquons que l'inégalité

$$\begin{aligned} & f(x^k + (\frac{1}{2})^i (y^k - x^k)) + NH(x^k + (\frac{1}{2})^i (y^k - x^k)) \\ & \leq f(x^k) + NH(x^k) - (\frac{1}{2})^i \|y^k - x^k\|^2 \end{aligned}$$

si x^k est l'optimum pour P, n'a de sens que si $x^k = y^k$

En effet, si ce n'est pas le cas, cette inégalité devient

$$f(x^k + (\frac{1}{2})^i (y^k - x^k)) < f(x^k)$$

ce qui contredit le fait que x^k est l'optimum pour P. Or, le lemme 8 nous assure que $y^k = x^k$ lorsque l'optimum pour P est atteint en x^k (P'(x) vérifie la condition de qualification de contraintes)

Evaluons la variation de toutes les fonctions du problème initial P lors d'un déplacement de x vers y où y est solution du sous-problème P'(x). pour alléger les écritures, nous abandonnons le suscrit k dans la suite de la démonstration.

Notons $(y - x)$ par p et envisageons tout d'abord la variation des contraintes, considérons un indice j dans $J_f(x)$. En développant au premier ordre,

$$h_j(x + \alpha p) = h_j(x) + \alpha \nabla h_j(x) p + \alpha (\nabla h_j(\theta) - \nabla h_j(x)) p$$

où $\theta = x + \alpha \xi p$ et $0 < \xi < 1$

Par le lemme 7 et par le théorème de CAUCHY-SCHWARTZ,

$$h_j(x + \alpha p) \leq h_j(x) - \alpha h_j(x) + \alpha \|\nabla h_j(\theta) - \nabla h_j(x)\| \|p\|$$

Par hypothèse, les dérivées premières de h_j sont Lipschitziennes, d'où

$$\|\nabla h_j(\theta) - \nabla h_j(x)\| \leq L_j \|\theta - x\| = \alpha \xi L_j \|p\| < \alpha L_j \|p\|$$

d'où si $\alpha \leq 1$ et en posant $L = \max\{L_j, j = 1, \dots, m\}$

$$h_j(x + \alpha p) \leq (1 - \alpha) h_j(x) + \alpha^2 L \|p\|^2$$

et par définition de $H(x) = \max(h_j(x), 0)$

$$h_j(x + \alpha p) \leq (1 - \alpha) H(x) + \alpha^2 L \|p\|^2$$

Considérons à présent un indice j qui n'appartient pas à $J_\delta(x)$. En développant au premier ordre

$$h_j(x + \alpha p) = h_j(x) + \alpha \nabla h_j(\theta) p$$

Par définition de $J_\delta(x)$, $h_j(x) < H(x) - \delta$, d'où, en employant à nouveau le théorème de CAUCHY-SCHWARTZ,

$$h_j(x + \alpha p) < H(x) - \delta + \alpha \| \nabla h_j(x) \| \| p \|$$

Les fonctions h_j et f étant continûment différentiables et Ω_N étant compact par hypothèse, nous pouvons poser

$$K = \max \{ \| \nabla h_j(x) \|, \| \nabla f(x) \|, j=1, \dots, m; x \in \Omega_N \}$$

et donc

$$h_j(x + \alpha p) < H(x) - \delta + \alpha K \| p \|$$

Choisissons α tel que $0 \leq \alpha \leq \frac{\delta}{H(x) + K \| p \|}$, pour un tel choix de α ,

il vient $\alpha K \| p \| \leq \delta - \alpha H(x)$, d'où

$$h_j(x + \alpha p) \leq (1 - \alpha) H(x) + \alpha^2 K \| p \|^2$$

Nous obtenons

$$h_j(x + \alpha p) \leq (1 - \alpha) H(x) + \alpha^2 \| p \|^2, \text{ quel que soit l'indice } j \quad (\text{A.45.1})$$

Envisageons à présent la variation de la fonction objectif:

De nouveau, par le développement de TAYLOR,

$$f(x + \alpha p) = f(x) + \alpha \nabla f(x)p + (\nabla f(\theta) - \nabla f(x))p$$

par le lemme 6 et par la condition de LIPSCHITZ,

$$f(x + \alpha p) \leq f(x) + \alpha \left(\sum_{j \in J(x)} u^j(x) h_j(x) - a \|p\|^2 \right) + \alpha^2 L \|p\|^2 \quad (\text{A.46.1})$$

Evaluons $f(x + \alpha p) + NH(x + \alpha p)$. Par (A.45.1) et (A.46.1),

$$\begin{aligned} f(x + \alpha p) + NH(x + \alpha p) &\leq f(x) + \alpha \sum_{j \in J(x)} u^j(x) h_j(x) - \alpha a \|p\|^2 \\ &\quad + \alpha^2 L \|p\|^2 + N((1 - \alpha)H(x) + \alpha^2 L \|p\|^2) \\ &\leq f(x) + NH(x) + \alpha \left(\sum_{j \in J(x)} u^j(x) h_j(x) - NH(x) \right) \\ &\quad - \alpha a \|p\|^2 + \alpha^2 (N + 1) L \|p\|^2 \end{aligned} \quad (\text{A.46.2})$$

par hypothèse $\sum_{j \in J(x)} u^j(x) \leq N$

$$\text{d'où } \sum_{j \in J(x)} u^j(x) h_j(x) \leq NH(x) \quad (\text{A.46.3})$$

Par (A.46.3), (A.46.2) devient

$$f(x + \alpha p) + NH(x + \alpha p) \leq f(x) + NH(x) - \alpha \|p\|^2 (a - \alpha(N + 1)L)$$

En prenant $0 \leq \alpha \leq \frac{a - \epsilon}{(N + 1)L}$, il vient

$$f(x + \alpha p) + NH(x + \alpha p) \leq f(x) + NH(x) - \alpha \epsilon \|p\|^2 \quad (\text{A.46.4})$$

qui est la condition définissant le pas dans la recherche linéaire de MODIF2.

En conclusion, en choisissant le pas tel que $0 \leq \alpha \leq \bar{\alpha}$ avec $\bar{\alpha} = \min \left\{ 1, \frac{\delta}{F(x) + K \|p\|}, \frac{a - \epsilon}{(N + 1)L} \right\}$, nous obtenons (A.46.4); et donc

le pas α vérifiant la recherche linéaire est obtenu après un nombre fini d'essais $\alpha = 2^{-i}$ $i = 0, 1, \dots$

et donc finalement,

$$\|y^k - x^k\| \longrightarrow 0 \quad (\text{A.48.1})$$

y^k étant la solution optimale de $P'(x^k)$, les conditions de KUHN et TUCKER permettent d'écrire

$$\begin{aligned} \nabla \tilde{f}(y^k; x^k) + \sum_{j \in J_g} u^j(x^k) \nabla \tilde{h}_j(y^k; x^k) + \sum_i w^i(x) e_i - \sum_i v^i(x) e_i \\ - a \|y^k - x^k\| = 0 \end{aligned} \quad (\text{A.48.2})$$

$$u^j(x^k) \tilde{h}_j(y^k; x^k) = 0 \quad j \in J_g(x^k) \quad (\text{A.48.3})$$

$$\tilde{h}_j(y^k; x^k) \leq 0 \quad j \in J_g(x^k) \quad (\text{A.48.4})$$

En posant $u^j(x^k) = 0$ pour $j \notin J_g(x^k)$, les conditions (A.48.2) et (A.48.3) s'écrivent

$$\begin{aligned} \nabla \tilde{f}(y^k; x^k) + \sum_{j=1}^m u^j(x^k) \nabla \tilde{h}_j(y^k; x^k) - a \|y^k - x^k\| \\ + \sum_i w^i(x) e_i - \sum_i v^i(x) e_i = 0 \end{aligned} \quad (\text{A.48.5})$$

$$u^j(x^k) \tilde{h}_j(y^k; x^k) = 0 \quad j = 1, \dots, m \quad (\text{A.48.6})$$

La suite x^k étant incluse dans un compact et la suite $u^j(x^k)$ étant bornée, il existe une sous-suite de $(x^k, u^j(x^k))$ qui converge vers un point $(x^*, u^j(x^*))$. Par (A.48.1), il est clair que la sous-suite des y correspondante converge également vers x^* , d'où les conditions (A.48.5) et (A.48.6); en employant le lemme 1 et en passant à la limite, sont équivalentes aux conditions suivantes:

$$\nabla f(x^*) + \sum_j u^j(x^*) \nabla h_j(x^*) + \sum_i w^i(x^*) e_i - \sum_i v^i(x^*) e_i = 0 \quad (\text{A.48.7})$$

$$u^j(x^*) h_j(x^*) = 0 \quad j = 1, \dots, m \quad (\text{A.48.8})$$

De plus, par le lemme 7,

$$-\nabla h_j(x^k) (y^k - x^k) \geq h_j(x^k) \quad \text{pour } j \in J_\delta(x^k)$$

ou encore

$$\begin{aligned} h_j(x^k) &\leq \| \nabla h_j(x^k) \| \| y^k - x^k \| \\ &\leq K \| y^k - x^k \| \end{aligned} \quad (\text{A.49.1})$$

par définition de la constante K, si $k \notin J_\delta(x^k)$

$$h_k(x^k) < H(x^k) - \delta \leq h_j(x^k) \leq K \| y^k - x^k \| \quad (\text{A.49.2})$$

car $j \in J_\delta(x^k)$ et par (A.49.1), d'où par (A.49.1) et (A.49.2)

$$h_j(x^k) \leq K \| y^k - x^k \| \quad \text{pour tout } j \quad (\text{A.49.3})$$

En passant à la limite,

$$h_j(x^*) \leq 0 \quad \text{pour tout } j \quad (\text{A.49.4})$$

Et donc par (A.48.7), (A.48.8) et (A.49.4), il est clair que les conditions de KUHN et TUCKER pour P sont satisfaites au point d'accumulation x^* de la suite x^k engendrée par l'algorithme.

** Démonstration du corollaire 2 (6.17)

Nous savons par la démonstration du théorème 4 que l'inégalité caractérisant la recherche linéaire de MODIF2:

$$\begin{aligned} & f(x^k + \alpha_k(y^k - x^k)) + NH(x^k + \alpha_k(y^k - x^k)) \\ & \leq f(x^k) + NH(x^k) - \alpha_k \varepsilon \|y^k - x^k\| \end{aligned}$$

est vérifiée pour α_k tel que $0 \leq \alpha_k \leq \bar{\alpha}_k$ où

$$\bar{\alpha}_k = \min \left\{ 1, \frac{\delta}{H(x^k) + K\|y^k - x^k\|}, \frac{a - \varepsilon}{(N + 1)L} \right\} \quad (\text{A.50.1})$$

avec L , la plus grande des constantes de LIPSCHITZ associées aux fonctions f et h_j , $j=1, \dots, m$, et $K = \max \{ \|\nabla h_j(x)\|, \|\nabla f(x)\|, j=1, \dots, m, x \in \Omega_N \}$

En choisissant $a > (N + 1)L$, comme $a - (N + 1)L > 0$, nous pouvons choisir $0 < \varepsilon < a - (N + 1)L$, et dans ce cas:

$$\frac{a - \varepsilon}{(N + 1)L} \geq 1$$

Par (A.49.3) dans la démonstration du théorème 4 ,

$$h_j(x^k) \leq K\|y^k - x^k\| \quad \text{pour } j = 1, \dots, m$$

d'où, par définition de $H(x^k)$,

$$H(x^k) \leq K\|y^k - x^k\|$$

En faisant tendre k vers l'infini, par (A.48.1), nous obtenons

$$H(x^*) \leq 0$$

comme par définition $H(x^*) \geq 0$, il est clair que

$$H(x^*) = 0$$

c'est-à-dire que la suite $H(x^k)$ s'approche de 0 lorsque k tend vers l'infini.

L'expression $\frac{\delta}{H(x^k) + K\|y^k - x^k\|}$ est donc supérieure ou égale à 1

pour k suffisamment grand puisque $H(x^k) \rightarrow 0$ et $\|y^k - x^k\| \rightarrow 0$,

Par conséquent, lorsque x^k est proche de l'optimum, (A.50.1) entraîne que $\bar{\alpha}_k = 1$ et donc un pas α_k unitaire convient pour la recherche linéaire.

Références

- [1] FLEURY C. and BRAIBANT V. , " Structural optimization. A new dual method using mixed variables ", Aerospace Laboratory of the University of LIEGE, report SA-115, march 1984.
- [2] FLEURY C. and BRAIBANT V. , " Shape optimal design. A performing C.A.D oriented formulation ", Aerospace Laboratory of the University of LIEGE, report SA-114, february 1984.
- [3] PRASAD B. , " Explicit constraint approximation forms in structural optimization, Part 1: Analyses and Projections ", Computer methods in applied mechanics and engineering, 1983, vol 40, pp 1-26.
- [4] MORRIS A.J, " Foundations of structural optimization : a unified approach, John WILEY and Sons, LONDON 1982.
- [5] ZANGWILL, " Non linear programming : a unified approach," , Prentice-Hall, Inc, Englewood Cliffs, N.J 1969.
- [6] HUARD P., " Un algorithme général de gradient réduit ", Equipe d'analyse numérique et d'optimisation de l' Université des Sciences et Techniques de LILLE.
- [7] HUARD P., " Une approche synthétique des recherches linéaires dans les méthodes de pente ", E.D.F, bulletin de la direction des études et recherches, série C, Mathématiques et Informatique, 1981, vol 2 pp 89-132.
- [8] AVRIEL M., " Non linear programming : analysis and methods ", Prentice-Hall, Inc, Englewood Cliffs, N:J, 1976.
- [9] PCHENITCHNY et DANILINE , " Méthodes numériques dans les problèmes d'extrémums ", Editions de MOSCOU.

- [10] AVRIEL and WILLIAMS A.C., " Complementary geometric programming ", SIAM J., Applied mathematics, 1970, vol 19, pp 125-141.
- [11] AVRIEL M., "Advances in geometric programming ", Plenum Press, NEW-YORK, 1980.
- [12] HOCK and SCHITTOWSKI, " Test examples for non linear programming codes ", Lecture notes in economics and mathematical systems, Spinger Verlag, Berlin Heidelberg, NEW-YORK, 1981.
- [13] PANIN V.M., " A second order method for the discrete min-max problem ", USSR Comput.Maths Math. Phys., 1980, vol 19, pp 90-100.
- [14] PANIN V.M., " Some methods of solving convex programming problems ", USSR Comput.Maths Math. Phys., 1981, vol 21, pp 57-72.
- [15] SCHMIT L.A. and FLEURY Cl., " Discrete-continuous variable structural synthesis using dual methods ", AIAA J., 1980, vol 18, N°12, pp 1515-1524.