MASTER EN SCIENCES MATHÉMATIQUES

Recherche polynomiale de compensateurs d'asservissement stabilisants propres de systèmes strictement propres

JOCAILLE, Julie

Award date:
2001

Awarding institution:
Universite de Namur

Recherche polynomiale de compensateurs d'asservissement stabilisants propres de systèmes strictement propres

Mémoire présenté pour l'obtention
du grade de
Licencié en Sciences Mathématiques
par

Promoteur : F.M. CALLIER

Julie JOCAILLE

Année académique 2000-2001

Remerciements :

Je remercie Monsieur Callier de m'avoir bien aiguillé dans mes recherches et dans ma rédaction tout au long de l'année et d'avoir adapté le cours de systèmes optimaux asservis en fonction de mon mémoire. Je remercie aussi Monsieur Winkin, Anne – Catherine, Emmanuelle et Julie d'avoir assisté à mes séminaires ainsi que ma famille et mes amis pour leur soutien.

Recherche polynomiale de compensateurs d'asservissement stabilisants propres de systèmes strictement propres

Résumé :

Ce mémoire concerne des systèmes linéaires-constants décrits par des matrices de transfert rationnelles propres. On y étudie des compensateurs propres stabilisant pour un système asservi strictement propre. Les matrices de transfert sont représentées par des fractions de matrices polynomiales. Pour atteindre l'objectif, on mettra en place l'équation polynomiale du compensateur. Cette équation est conditionnée par la matrice caractéristique du système en boucle fermée qui implique la stabilité du système asservi en boucle fermée. Ses solutions sont en termes de numérateur et dénominateur d'un compensateur stabilisant représenté par une fraction gauche de matrices polynomiales, si elle existe. Par un contrôle approprié du degré des éléments des matrices polynomiales impliquées, on obtient tous les compensateurs propres stabilisants dont les degrés-lignes du dénominateur sont prescrits. Un exemple d'illustration est donné.

Abstract :

This work handles linear time–invariant systems described by their proper rational transfer matrices. One studies here proper stabilizing compensators for a given strictly proper system under unity feedback. Transfer matrices are represented as polynomial matrix fractions. The objective is met by setting up the polynomial matrix compensator equation, which is conditioned by the choice of a closed-loop characteristic matrix implying closed-loop stability. The solutions are in terms of the numerator and denominator of a stabilizing compensator represented by a left polynomial matrix fraction if it exists. By appropriate degree control of the elements of the polynomial matrices involved, one obtains all proper stabilizing compensators with preassigned denominator row – degrees. An example is given.

Table des matières :

Introduction

Dans ce mémoire, nous considérons un système strictement propre qui n'est pas nécessairement stable, ce qui est le cas de nombreux systèmes. Nous voulons améliorer le comportement de ce système. C'est pourquoi, nous allons l'asservir en le rendant stable à l'aide d'un compensateur propre. Le système résultant, composé du système à asservir et du compensateur sera appelé système asservi en boucle fermée, dont on espère un meilleur comportement. Nous allons donc chercher la classe des compensateurs propres qui stabilisent un système strictement propre donné. Cette recherche s'effectuera dans le cadre de systèmes linéaires-constants décrits par leurs matrices de transfert sous forme de fractions de matrices polynomiales. Pour réaliser ce travail, l'article [1] a servi de fil conducteur. Nous nous sommes basés également sur le cours de systèmes optimaux asservis [2] pour étudier la stabilité du système asservi en boucle fermée. De nombreux résultats, algorithmes et définitions de l'ouvrage de F.M. Callier et C.A. Desoer [3] nous ont aussi été très utiles.

Dans un premier temps, nous mettrons en place l'équation du compensateur (chapitre 1). Nous étudierons, tout d'abord, la stabilité du système asservi en boucle fermée à l'aide de son polynôme caractéristique. Nous définirons ensuite une matrice particulière, appelée matrice caractéristique du système en boucle fermée. On verra que le placement des zéros du déterminant de cette matrice détermine la stabilité du système asservi, c'est-à-dire que le système asservi en boucle fermée sera stable si et seulement s'ils sont dans le demi-plan ouvert gauche. Nous terminerons ce chapitre par un théorème donnant toutes les solutions stables de l'équation du compensateur. Ces solutions comprennent les numérateurs et dénominateurs des matrices de transfert des compensateurs stabilisants.

Il faudra déterminer parmi ces solutions, celles qui mènent à des compensateurs propres. Pour cela, il faudra contrôler le degré des matrices polynomiales (chapitre 2). En faisant l'hypothèse que le dénominateur d'une fraction de matrices polynomiales est réduit-ligne ou réduit-colonne, selon que la fraction est droite ou gauche, on obtiendra une condition nécessaire et suffisante pour que cette fraction de matrices soit propre. Nous définirons ensuite une notion très importante pour la suite, celle de matrice réduit-ligne-colonne. Grâce à la forme de Smith, on verra que beaucoup de matrices peuvent être rendues réduit-lignes-colonnes. Nous terminerons le chapitre en montrant qu'une matrice dont la diagonale est monique avec des degrés dominants est un choix facile de matrice réduit-ligne-colonne.

Trois théorèmes importants suivront reprenant parmi leurs hypothèses que la matrice caractéristique du système en boucle fermée est réduit-ligne-colonne. Le dernier donnera une paramétrisation complète des compensateurs propres stabilisants sous forme de fractions de matrices polynomiales dont les degrés-lignes du dénominateur sont prescrits (chapitre 3).

Afin de pouvoir appliquer ces théorèmes à un exemple (chapitre 6), il faudra mettre en place deux algorithmes, le premier pour diviser un vecteur ligne polynomial par une matrice polynomiale (chapitre 4) et le second pour extraire un plus grand commun diviseur droit de deux matrices polynomiales (chapitre 5).

Chapitre 1.

Equation du compensateur

Dans ce chapitre, nous allons mettre en place l'équation du compensateur. Un des objectifs qu'on s'est fixés est d'obtenir un compensateur stabilisant. C'est autour de cette hypothèse que va se construire cette équation. Nous terminerons par un théorème donnant les solutions de cette équation.

Dans l'annexe A, on trouve les définitions et les résultats principaux concernant les matrices polynomiales et rationnelles. Afin de ne pas alourdir les écritures, de nombreux termes sont abrévиés, on trouve une liste de ces abréviations en fin d'ouvrage .

1.1. Cadre de travail

Nous travaillons avec des systèmes linéaires-constants (on retrouve la définition et la description détaillée d'un système linéaire-constant dans [6, chap III §3 et chap IV §3]) décrits par des matrices de transfert (définition dans [6, p 4.31]) rationnelles propres.
Considérons le système S(P, C) représenté à la figure 1, constitué d'un système à asservir et d'un compensateur.

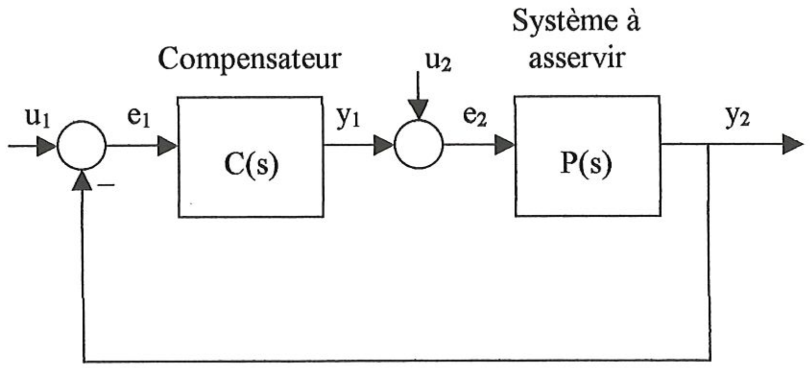


Figure 1 : le système asservi en boucle fermée

Soient C(s) et P(s) les matrices de transfert du compensateur et du système à asservir respectivement. On suppose que C, matrice propre, admet une réalisation $[A_1, B_1, C_1, D_1]$ observable et stabilisable et P, matrice strictement propre, admet une réalisation $[A_2, B_2, C_2,$

0] minimale (pour plus de détails sur les réalisations minimales, stabilisables et détectables , voir cours [2, chap1 p14,30,31] et sur les réalisations observables et contrôlables, voir cours [6, chap VI §2]).

1.2. Stabilité du système S(P, C)

Nous voulons que le système S(P, C) soit internement et externement stable (définition, voir [2, p1]). Sous les hypothèses que P est strictement propre et admet une réalisation minimale, que C admet une réalisation observable et stabilisable donc minimale (voir [2, conséquence Th1 p17]), le théorème 1.2.1. nous indique que la stabilité interne est équivalente à la stabilité externe. Nous nous limiterons donc à déterminer la stabilité interne du système c'est-à-dire que nous imposerons que les zéros du polynôme caractéristique du système soient dans le demi-plan ouvert gauche ($\mathring{\mathbb{C}}_-$). Le théorème 1.2.2. nous donne ce polynôme caractéristique.

1.2.1. **Théorème[**stabilité de S(P, C)**]** [2,Th2 p55]

Considérons la description d'état R_c = [A, B, C, D] du système S(P, C) avec R_1 description du compensateur de R_2 description du système à asservir.

On admet que det[I + C(∞) P(∞)] ≠ 0

R_1 et R_2 stabilisables et détectables i.e minimales

Alors, sont équivalents :

a) R_c int. exp.stable i.e. Re $\lambda(A) < 0$

b) R_c ext. exp. stable i.e. $P[\hat{H}_{yu}] \subset \mathring{\mathbb{C}}_-$

c) $P[\hat{H}_{eu}] \subset \mathring{\mathbb{C}}_-$..

où P[H] est l'ensemble des pôles d'une matrice de transfert rationnelle H.

$\hat{H}_{eu}$ et $\hat{H}_{yu}$ sont les matrices de transfert entrée-erreur et entrée-sortie du système S(P, C), voir [2, p50].

Ici P(s) est strict. propre d'où det[I + C(∞) P(∞)] = det[I] = 1 est toujours ≠ 0.

1.2.2. **Théorème**[polynôme caractéristique] [2, Th1 p50]

Considérons la description d'état R_c = [A, B, C, D] de S(P, C) sous l'hypothèse

$$\det[\, I + C(\infty)\, P(\infty)\,] \neq 0.$$

Alors le polynôme caractéristique $\chi_A = \det(sI-A)$ de R_c est donné par

$$\chi_A(s) = \chi_{A_1}(s)\,\chi_{A_2}(s)\,\frac{\det[\,I + C(s)\,P(s)]}{\det[I + C(\infty)\,P(\infty)]}.$$

Le polynôme caractéristique de R_c est donc

$$\chi_A(s) = \chi_{A_1}(s)\,\chi_{A_2}(s)\,\det[I + P(s)\,C(s)].$$

1.3. Equation du compensateur

On ne connaît pas à priori le polynôme caractéristique de S(P, C), on va donc établir une relation entre celui-ci et les matrices de transfert du compensateur et du système à asservir. Le théorème 1.3.1 lie le polynôme caractéristique et la matrice de transfert du système à asservir et le théorème 1.3.2. lie le polynôme caractéristique et la matrice de transfert du compensateur.

1.3.1. **Théorème** [2, Matrices rationnelles Th5 p7]

Soit $\hat{G}(s) \in \mathbb{R}(s)^{p\times m}$ une matrice de transfert et Σ = [A, B, C, D] une réalisation minimale de $\hat{G}$.

Alors

1. Toute conversion de la f.p.d. $C\,(s\,I - A)^{-1}$ en f.p.g.

   i.e. $C\,(s\,I - A)^{-1} = D_l^{-1} N_l$

   fournit une f.p.g. de $\hat{G}$ par

   $$\hat{G}(s) = C\,(s\,I - A)^{-1}\,B + D = D_l^{-1}\,[N_l\,B + D_l\,D]$$

   et $\det(s\,I - A) \sim \det D_l$

2. Toute conversion de la f.p.g. $(s\,I - A)^{-1} B$ en f.p.d.

   i.e. $(s\,I - A)^{-1} B = N_r D_r^{-1}$

   fournit une f.p.d. de $\hat{G}$ par

   $\hat{G}(s) = C\,(s\,I - A)^{-1} B + D$

   $\qquad = [C\,N_r + D\,D_r]\; D_r^{-1}$

   et det $(s\,I - A) \sim$ det Dr

3. Si $\hat{G}$ admet une f.p.d. ou une f.p.g. i.e.

   $\hat{G} = \overline{N}_r \overline{D}_r^{-1} = \overline{D}_l^{-1} \overline{N}_l$

   Alors

   le polynôme caractéristique d'une réalisation minimale $\sim$ det $\overline{D}_r \sim$ det $\overline{D}_l$.

Par les points 1) et 2) de ce théorème il apparaît que P peut être représentée par une f.p.d. ou une f.p.g., soient $N_r D_r^{-1}$ et $D_l^{-1} N_l$ ces fractions premières. Par le point 3), on obtient que le polynôme caractéristique du système à asservir, $\chi_{A_2} \sim$ det $D_r \sim$ det D_l.

1.3.2. **Théorème** [2, Matrices rationnelles Cor1 p13]

Soient $\hat{G}(s) \in \mathbb{R}(s)^{p\times m}$ une matrice de transfert et χ le polynôme caractéristique d'une réalisation minimale de $\hat{G}$.

Alors

1. Soit $\Sigma = [A, B, C, D]$ une réalisation observable et stabilisable de $\hat{G}$.

   Alors

   Toute conversion de la f.p.d. $C\,(s\,I - A)^{-1}$ en f.p.g.

   i.e. $C\,(s\,I - A)^{-1} = D_l^{-1} N_l$

   fournit une f.g. de $\hat{G}$ par

   $\hat{G}(s) = C\,(s\,I - A)^{-1} B + D$

   $$= D_l^{-1}\,[N_l\,B + D_l\,D] \qquad (1.1)$$

   tq $\chi_A \sim$ det D_l

En outre, D_l et $N_l B + D_l D$ admettent un p.g.c.d. g L stable tq

Det $D_l \sim \det L . \chi$.

Avec $Z[\det D_l] = \{\lambda \in \mathbb{C} : rg[\lambda I - A \;\; B] < n \} \subset \overset{\circ}{\mathbb{C}}_{-}$.

Ainsi la fraction (1.1) est première ssi (A, B) est c.c. .

2. Soit $\Sigma = [A, B, C, D]$ une réalisation contrôlable et détectable de $\hat{G}$.

Alors

Toute conversion de la f.p.g. $(s I - A)^{-1} B$ en f.p.d.

i.e. $(s I - A)^{-1} B = N_r D_r^{-1}$

fournit une f.d. de $\hat{G}$ par

$$\hat{G}(s) = C (s I - A)^{-1} B + D$$
$$= [C N_r + D D_r] D_r^{-1} \tag{1.2}$$

tq $\chi_A \sim \det Dr$

En outre, D_r et $C N_r + D D_r$ admettent un p.g.c.d. g R stable tq

Det $D_r \sim \det R . \chi$.

Avec $Z[\det R] = \{\lambda \in \mathbb{C} : rg\begin{bmatrix} \lambda I - A \\ C \end{bmatrix} < n \} \subset \overset{\circ}{\mathbb{C}}_{-}$.

où Z[p] représente l'ensemble des zéros du polynôme p.

Ainsi la fraction (1.2) est première ssi (C, A) est c.o.

Par le point 1) de ce théorème, il suit que C peut être représentée par une f .g., soit $X_l^{-1} Y_l$ cette fraction et alors det $X_l \sim \chi_{A_1}$.

A la suite du théorème 1.2.2, on a obtenu

$$\chi_A = \chi_{A_1} \; \chi_{A_2} \det[I + P\, C]$$

or,

$$\det [I + C P] = \det [I + X_l^{-1} Y_l N_r D_r^{-1}]$$
$$= \det (X_l^{-1} [X_l D_r + Y_l N_r] \; D_r^{-1})$$

$$= \frac{\det[X_l D_r + Y_l N_r]}{\det[X_l] \det[D_r]}$$

avec $\chi_{A_2} \sim \det D_r$ et $\det X_l \sim \chi_{A_1}$,

on obtient $\chi_A \sim \det[X_l D_r + Y_l N_r]$.

D'où χ_A est stable ssi $\det[X_l D_r + Y_l N_r]$ est stable, $\det[X_l D_r + Y_l N_r]$ est un décideur de stabilité (interne et externe) du système S(P, C).

Posons $D_k := X_l D_r + Y_l N_r$.

D_r et N_r sont données, en choisissant la matrice D_k tq $Z[\det D_k(s)] \subset \mathbb{C}_-^{\circ}$ pour que le système S(P, C) soit stable, on obtient une équation dite équation du compensateur

$$X_l D_r + Y_l N_r = D_k \qquad \text{(comp)}$$

Le couple (X_l, Y_l) est l'inconnue de cette équation, il correspond à la matrice de transfert $C = X_l^{-1} Y_l$. Le théorème suivant donne toutes les solutions polynomiales de (comp), donc tous les compensateurs stabilisants mais pas nécessairement propres.

1.3.3. **Théorème[**solutions polynomiales de l'équation du compensateur**]** [3, Th39 p185-187]

Considérons (comp) où $P = N_r D_r^{-1}$ est une f.p.d.

Alors,

Le couple $(X_l, Y_l) \in \mathbb{R}[s]^{m\times m} \times \mathbb{R}[s]^{m\times n}$ est solution de (comp)

$\Leftrightarrow$

$$\exists\, N_k \in \mathbb{R}[s]^{m\times m} \text{ tq } X_l = X_{lp} - N_k N_l \qquad (1.3)$$

$$Y_l = Y_{lp} + N_k D_l \qquad (1.4)$$

Où (X_{lp}, Y_{lp}) est la solution particulière de (comp) donnée par

$$X_{lp} = D_k V_r$$

$$Y_{lp} = D_k U_r$$

Et U_r, V_r, D_l, N_l sont des éléments de l'identité de Bezout généralisée.

Rappelons d'abord l'identité de Bezout généralisée (dont une preuve se trouve dans l'annexe B) :

1.3.4. **Théorème** [3,Th25 p60-62]

Soit $H \in \mathbb{R}(s)^{n\times m}$ représenté par une f.p.d. $N_r D_r^{-1}$.

Alors il existe six matrices $\in$ Mat($\mathbb{R}[s]$) $U_r, V_r, N_l, D_l, U_l, V_l$

tq

$$WW^{-1} := \left[\begin{array}{c|c} V_r & U_r \\ \hline -N_l & D_l \end{array}\right] \left[\begin{array}{c|c} D_r & -U_l \\ \hline N_r & V_l \end{array}\right] = \left[\begin{array}{c|c} I_m & 0 \\ \hline 0 & I_n \end{array}\right]$$

De plus, $D_l^{-1} N_l$ est une f.p.g. de H.

1.3.5. **Preuve du théorème 1.3.3**

a) La condition est suffisante :

En substituant (1.3) et (1.4) dans (comp), on obtient

$$(X_{lp} - N_k N_l) D_r + (Y_{lp} + N_k D_l) N_r = D_k$$

si cette égalité est vérifiée, alors (X_l, Y_l) est solution de (comp).

Le membre de gauche peut se réécrire comme

$$(X_{lp} D_r - N_k N_l D_r) + (Y_{lp} N_r + N_k D_l N_r)$$

càd

$$(X_{lp} D_r + Y_{lp} N_r) + N_k (-N_l D_r + D_l N_r)$$

Puisque (X_{lp}, Y_{lp}) est une solution particulière de (comp), la première parenthèse vaut D_k,

par l'identité de Bezout généralisée, la seconde parenthèse est nulle.

Le membre de gauche vaut donc D_k et l'égalité est vérifiée.

b) La condition est nécessaire :

Par l'identité de Bezout généralisée, on a

$$V_r D_r + U_r N_r = I_m .$$

En prémultipliant cette égalité par D_k, on obtient :

$$D_k V_r D_r + D_k U_r N_r = D_k$$

D'où $(D_k V_r, D_k U_r)$ est une solution particulière de (comp).

Recherchons une solution générale de l'équation homogène

$$X_l D_r + Y_l N_r = 0$$

Par l'identité de Bezout généralisée, on a

$$- N_l D_r + D_l N_r = 0$$

càd

$$N_r D_r^{-1} = D_l^{-1} N_l \qquad (1.5)$$

Pour chaque solution (X_{lh}, Y_{lh}) de l'équation homogène, posons

$$N_k = Y_{lh} D_l^{-1} \qquad (1.6)$$

Comme (X_{lh}, Y_{lh}) est solution de l'équation homogène, on a

$$X_{lh} D_r + Y_{lh} N_r = 0$$

Càd

$$X_{lh} = - Y_{lh} N_r D_r^{-1}$$

$$= - Y_{lh} D_l^{-1} N_l \quad \text{par } (1.5)$$

$$= - N_k N_l \quad \text{par } (1.6)$$

D'où chaque solution de l'équation homogène est de la forme

$$X_{lh} = - N_k N_l \text{ et } Y_{lh} = N_k D_l$$

N_k est polynomiale car

$$N_k = N_k (N_l U_l + D_l V_l) \text{ par l'identité de Bezout généralisée}$$

$$= - X_{lh} U_l + Y_{lh} V_l \in \mathrm{Mat}(\mathbb{R}[s]).$$

En sommant la solution particulière de (comp) et la solution générale de l'équation homogène, on obtient la solution générale de (comp) □

Toutes ces solutions ne correspondent pas à des compensateurs propres, on a besoin de contrôler le degré des matrices intervenant dans l'équation du compensateur pour arriver à une solution propre.

Chapitre 2.

Contrôle du degré des matrices polynomiales

Notre but est d'obtenir des solutions propres à l'équation du compensateur.

Nous allons voir qu'il est important d'imposer certaines conditions sur le degré des éléments d'une fraction de matrices polynomiales pour que cette fraction soit propre ou strictement propre.

Dans ce chapitre, nous allons donc étudier les notions de matrices réduits-lignes, réduits-colonnes, ainsi que leurs relations avec les matrices propre et strictement propre. Nous définirons aussi réduit-ligne-colonne et nous évoquerons la forme de Smith et son importance. Nous verrons que les matrices dont la diagonale est monique avec des degrés dominants sont des matrices réduits-lignes-colonnes.

2.1. Degrés des matrices polynomiales [3, §2.4.3]

2.1.1. **Définition**

Soit $m \in \mathbb{R}[s]^n$ un vecteur polynomial.

On appelle *degré de m*, noté $\partial[m]$, le plus haut des degrés de toutes les entrées de m

i.e. $$\partial[m] = \max_{i \in \underline{n}} \partial[m_i]$$

Si le vecteur m est la ligne i d'une matrice polynomiale $M \in \mathbb{R}[s]^{m\times n}$ alors son degré est appelé i$^{\text{ème}}$ *degré–ligne* et est noté $\partial_{l_i}[M]$.

Si le vecteur m est la colonne j d'une matrice polynomiale $M \in \mathbb{R}[s]^{n\times m}$ alors son degré est appelé j$^{\text{ème}}$ *degré–colonne* et est noté $\partial_{c_j}[M]$.

On a la convention suivante :

m est le vecteur nul $\Leftrightarrow \partial[m] = -\infty$.

Nous remarquons que le maximum des degrés-lignes de M est le plus grand degré de tous les éléments de M, c'est donc aussi le maximum des degrés-colonnes de M.

L'assertion suivante donne une condition nécessaire pour qu'une matrice soit propre (respectivement stictement propre).

2.1.2. **Assertion** [3, Ass4 p68]

Soit $H \in \mathbb{R}_p(s)^{n\times m}$ (resp. $\mathbb{R}_{p,o}(s)^{n\times m}$) tq $H = N_r D_r^{-1}$ f.d.

Alors

$$\forall\, j \in \underline{m} \quad \partial_{cj}[N_r] \leq \partial_{cj}[D_r]$$

$$(\text{resp. } \forall\, j \in \underline{m} \quad \partial_{cj}[N_r] < \partial_{cj}[D_r]).$$

<u>Preuve</u>

On omet les sous-scripts r.

$H = N\,D^{-1}$ ce qui revient à dire que $N = H\,D$

En notant n_{ij} les éléments de N et d_{ij} ceux de D, on peut réécrire cette dernière égalité comme

$$N_{ij} = \sum_{k=1}^{m} h_{ik}\, d_{kj} \qquad \forall\, i \in \underline{m},\ \forall\, j \in \underline{m}$$

Posons $\partial_{cj}[D] = k_j$ et post-multiplions chaque membre de l'égalité précédente par s^{-k_j}

On obtient

$$N_{ij}(s)\ s^{-k_j} = \sum_{k=1}^{m} h_{ik}(s)\, d_{kj}(s)\, s^{-k_j}$$

Or $\lim\limits_{s\to\infty} h_{ik}(s)$ est finie puisque $H \in \mathbb{R}_p(s)$ et

$\lim\limits_{s\to\infty} d_{kj}(s)\, s^{-k_j}$ est finie car $\partial[d_{kj}] \leq k_j = \partial_{cj}[D]$ par définition de degré-colonne.

D'où $\lim\limits_{s\to\infty} N_{ij}(s)\, s^{-k_j}$ est finie et donc $\partial[n_{ij}] \leq \partial_{cj}[D]$.

Dès lors $\partial_{cj}[N] = \max\limits_{i} \partial[n_{ij}] \leq \partial_{cj}[D]$ □

La condition est nécessaire. En imposant que D_r est réduit-colonne, la condition sera aussi suffisante. Définissons donc la notion de réduit-colonne.

2.2. <u>Matrices polynomiales réduit-ligne et réduit-colonne</u> [3, §2.4.3]

2.2.1. **Définitions**

Soit $D \in \mathbb{R}[s]^{n\times n}$ une matrice polynomiale non singulière.

On dit que D est *réduit-colonne* (r-c) ssi $\partial[\det D] = \sum_{j=1}^{n} \partial_{c_j}[D]$.

De même, on dit que D est *réduit-ligne* (r-l) ssi $\partial[\det D] = \sum_{i=1}^{n} \partial_{l_i}[D]$.

On peut toujours supposer dans la f.p.d. $P = N_rD_r^{-1}$ que D_r est r-c. En effet, en appliquant des opérations colonnes élémentaires (sous forme de la matrice unimodulaire R), on peut rendre D_r r-c et $P = N_rD_r^{-1} = N_r R(D_r R)^{-1}$ avec D_rR r-c . Par un raisonnement similaire, on peut supposer que $C = X_l^{-1}Y_l$ avec X_l r-l .

Posons $k_j = \partial_{c_j}[D] \quad \forall j \in \underline{n}$ et

$r_i = \partial_{l_i}[D] \quad \forall i \in \underline{n}$

On appelle *matrice des coefficients des plus hauts degrés-colonnes* de D, la matrice D_h définie par

$$\lim_{s\to\infty} D(s)\,(\mathrm{diag}\{s^{-k_j}, j \in \underline{n}\}) =: D_h \in \mathbb{R}^{n\times n}.$$

On note $D(s)\,(\mathrm{diag}\{s^{-k_j}, j \in \underline{n}\}) := D_-(s)$.

Et on appelle *matrice des coefficients des plus hauts degrés-lignes* de D, la matrice D_h définie par

$$\lim_{s\to\infty} (\mathrm{diag}\{s^{-r_i}, i \in \underline{n}\})\,D(s) =: D_h \in \mathbb{R}^{n\times n}.$$

On note $(\mathrm{diag}\{s^{-r_i}, i \in \underline{n}\})\,D(s) := D_-(s)$.

Remarque : Si D est r-l où r-c, $D_-(\infty) = D_h$

D'où D_h est non singulière

$\Leftrightarrow$ $D_-(s)$ est bipropre.

2.2.2. **Exemple**

Considérons la matrice

$$D = \begin{bmatrix} s^2 & s^4 \\ 0 & s \end{bmatrix}$$

Elle n'est pas r-c car $\partial[\det] = 3 \neq \partial_{c_1}[D] + \partial_{c_2}[D] = 2 + 4$.

En lui appliquant l'opération colonne élémentaire

$$\gamma_2 \leftarrow \gamma_2 - s^2\gamma_1$$

on obtient

$$D_2 = \begin{bmatrix} s^2 & 0 \\ 0 & s \end{bmatrix}$$

qui est r-c .

En pratique, il est plus facile d'utiliser la condition nécessaire et suffisante suivante pour vérifier si une matrice est r-c ou non.

2.2.3. **Assertion** [3, Ass21 p70]

Soit $D \in \mathbb{R}[s]^{n\times n}$ une matrice polynomiale non singulière avec des degrés-colonnes k_j et sa matrice des coefficients des plus hauts degrés-colonnes $D_h \in \mathbb{R}^{n\times n}$

Alors,

D est r-c

$\Leftrightarrow$

D_h est non singulière.

2.2.4. **Exemple**

Reprenons la matrice D de l'exemple 2.2.2. Sa matrice des coefficients des plus hauts degrés-colonnes est

$$D_h = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Elle est singulière, ce qu'on savait déjà puisque D n'est pas r-c.

Par contre

$$D_{2h} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

est non singulière, ce qui confirme que D_2 est r-c.

Voici maintenant, la condition nécessaire et suffisante pour avoir une matrice r-c.

2.2.5. **Théorème** [3, Th25 p70-71]

Soit $H \in \mathbb{R}(s)^{n\times m}$ représentée par la f.d. $H = N_r D_r^{-1}$ avec D_r r-c.

Alors

$H \in \mathbb{R}_p(s)^{n\times m}$ $\quad$ ($H \in \mathbb{R}_{p,o}(s)^{n\times m}$)

$\Leftrightarrow$

$\forall\, j \in \underline{m}\ \ \partial_{cj}[N_r] \leq \partial_{cj}[D_r]$

(resp. $\forall\, j \in \underline{m}\ \ \partial_{cj}[N_r] < \partial_{cj}[D_r]$).

Preuve

La nécessité de la condition tient par l'assertion 2.1.2.

Il reste à montrer que la condition est suffisante.

Pour alléger les écritures, on omet les sous-scripts r.

Par hypothèse, on a que D est r-c d'où par l'assertion 2.2.3,

$$D_h = \lim_{s \to \infty} D(s)\,(\mathrm{diag}\{s^{-k_j}, j \in \underline{m}\}) \in \mathbb{R}^{m \times m} \text{ est non singulière.}$$

On a aussi

$$\partial_{cj}[N_r] \leq \partial_{cj}[D_r] \ \forall\, j \in \underline{m}$$

d'où

$$\lim_{s \to \infty} N(s)\,(\mathrm{diag}\{s^{-k_j}, j \in \underline{m}\}) \in \mathbb{R}^{n \times m}$$

notons N_h cette limite.

Dès lors,

$$\begin{aligned} H(s) &= N(s)\, D^{-1}(s) \\ &= [N(s)\,(\mathrm{diag}\{s^{-k_j}, j \in \underline{m}\})]\ \ [D(s)\,(\mathrm{diag}\{s^{-k_j}, j \in \underline{m}\})]^{-1} \end{aligned}$$

et en faisant tendre $s \to \infty$

$$\lim_{s \to \infty} H(s) = N_r D_r^{-1} \in \mathbb{R}^{n \times m}$$

d'où $H(s) \in \mathbb{R}_p(s)^{n \times m}$ □

Une hypothèse importante pour obtenir des solutions propres de l'équation du compensateur sera que la matrice caractéristique en boucle fermée est réduit-ligne-colonne.

2.3. Matrice polynomiale réduit-ligne-colonne [3, §3.3.1]

2.3.1. **Définition**

Soit $D \in \mathbb{R}[s]^{m \times m}$ une matrice polynomiale non singulière.

On dit que D est *réduit-ligne-colonne* (r-l-c) ssi

Il existe des entiers $r_i \geq 0$, $i \in \underline{m}$ et $k_j \geq 0$, $j \in \underline{m}$ tq

$$\lim_{s \to \infty} \mathrm{diag}\{s^{-r_i}, i \in \underline{m}\}\ D(s)\ \mathrm{diag}\{s^{-k_j}, j \in \underline{m}\} = D_h \in \mathbb{R}^{m \times m} \text{ non singulière.}$$

Les entiers r_i et k_j sont appelés *puissances-lignes* et *puissances-colonnes*.

D_h est appelée *matrice des coefficients des plus hauts degrés* de D.

Notons $D_-(s) = \text{diag}\{s^{-r_i}, i \in \underline{m}\} D(s) \,\text{diag}\{s^{-k_j}, j \in \underline{m}\}$.

Alors,

D est r-l-c

$\Leftrightarrow$

$D_-(s)$ est bipropre.

On remarque que si D est r-l-c, $D_-(\infty) = D_h$.

Les puissances-lignes et les puissances-colonnes permettent de contrôler bilatéralement le degré des entrées de D. Ceci sera utilisé dans le théorème 3.1.2. où on imposera une borne inférieure aux puissances-lignes de D_k.

2.3.2. **Exemple**

Considérons la matrice suivante :

$$D = \begin{bmatrix} s^3+s^2+1 & s & s^3 \\ 0 & s^2 & 2s^2+1 \\ 3s^2+2s & s-1 & s^5-1 \end{bmatrix}$$

D est r-l-c avec $r_1 = 2$, $r_2 = 1$, $r_3 = 3$,

$k_1 = 1$, $k_2 = 1$, $k_3 = 2$.

et $D_h = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ est non singulière.

Le résultat qui suit donne une condition nécessaire et suffisante pour avoir une matrice r-l-c avec une matrice des coefficients des plus hauts degrés diagonale. Il nous sera utile pour démontrer l'assertion 2.5.3.

2.3.3. **Assertion** [3, Ass65 p116-117]

Soit $D \in \mathbb{R}[s]^{m\times m}$ une matrice polynomiale non singulière avec des entrées $d_{ij} \in \mathbb{R}[s]$ où $i,j \in \underline{m}$.

Alors,

D est r-l-c avec des puissances-lignes $r_i \geq 0,\ \ i \in \underline{m}$,

des puissances-colonnes $k_j \geq 0,\ \ j \in \underline{m}$ et

D_h diagonale

$\Leftrightarrow$

$\forall\, i \in \underline{m}\ \partial[d_{ii}] = r_i + k_i$

$\forall i,j \in \underline{m}$ avec $i \neq j\ \partial[d_{ij}] < r_i + k_j$.

Preuve

$$D_{-}(s) = \mathrm{diag}\{s^{-r_i}, i \in \underline{m}\}\ D(s)\ \mathrm{diag}\{s^{-k_j}, j \in \underline{m}\}$$

Remarquer que, dans cette expression, la $i^{\text{ème}}$ ligne de D est divisée par s^{r_i} et la $j^{\text{ème}}$ colonne de D est divisée par s^{k_j} .

D'où l'entrée d_{ij} est divisée par $s^{r_i+k_j}$.

Dès lors,

$D_h = D_{-}(\infty)$ est diagonale et non singulière (donc D r-l-c)

$\Leftrightarrow$

$$\lim_{s\to\infty} \frac{d_{ii}}{s^{r_i+k_i}} = q \neq 0 \in \mathbb{R} \quad \forall i \in \underline{m} \text{ et}$$

$$\lim_{s\to\infty} \frac{d_{ii}}{s^{r_i+k_j}} = 0 \quad \forall\, i,j \in m, \text{ avec } i \neq j$$

$\Leftrightarrow$

$\partial[d_{ii}] = r_i + k_i \quad \forall i \in \underline{m}$ et

$\partial[d_{ij}] < r_i + k_j \quad \forall\, i,j \in m$, avec $i \neq j$ □

2.4. Forme de Smith d'une matrice polynomiale

On va voir dans ce paragraphe que toute matrice polynomiale est équivalente à une matrice de forme particulière, appelée forme de Smith (théorème 2.4.1). Cette matrice est intéressante car elle est équivalente à un matrice r-l-c non singulière de puissances-lignes et colonnes bien choisies (théorème 2.4.2.).

2.4.1. **Théorème** [2, Matrices rationnelles Lem1 p1]

Soit $M(s) \in \mathbb{R}[s]^{m\times n}$

Alors il existe des matrices unimodulaires $L \in \mathbb{R}[s]^{m\times m}$ et $R \in \mathbb{R}[s]^{n\times n}$

tq

$$S = LMR = \left[\begin{array}{ccc|c} \varphi_1 & & 0 & \\ & \ddots & & 0 \\ 0 & & \varphi_r & \\ \hline & 0 & & 0 \end{array}\right] \in \mathbb{R}[s]^{m\times n}$$

S est la forme de Smith de M

Et $r = \text{rang } M = \text{rang } S \leq \min(m,n)$

Et $\varphi_i \in \mathbb{R}[s]$, $i \in \underline{r}$ sont définis uniquement par M et vérifient $\varphi_i \mid \varphi_{i+1}$, $i \in \underline{r-1}$.

Donc toute matrice polynomiale et par conséquent aussi toute matrice polynomiale non singulière, peut être réduite à sa forme de Smith S par opérations élémentaires lignes et colonnes. Il est important de mentionner ici :

2.4.2. **Assertion** [7, Lem1 p840-841]

Noter la forme de Smith $S = \text{diag}\{\varphi_i, i \in \underline{m}\}$ tq

$$\deg[\varphi_1] \geq \deg[\varphi_2] \geq \ldots \geq \deg[\varphi_m]$$

Considérer m entiers non négatifs r_i tq $r_1 \geq r_2 \geq \ldots \geq r_m$ et

m entiers non négatifs k_j tq $k_1 \geq k_2 \geq \ldots \geq k_m$

Alors

Il existe une matrice D polynomiale non singulière r-l-c ayant la forme de smith S et ayant des puissances-lignes r_i et des puissances-colonnes k_j et $D_h = I$

$\Leftrightarrow$

pour $k \in \underline{m}$ $\sum_{i=1}^{k} \deg[\varphi_i] \geq \sum_{i=1}^{k} r_i + k_i$

avec égalité pour $k = m$.

Donc, les matrices polynomiales non singulières peuvent être rendues r-l-c par des opérations élémentaires. Il suffit de passer de la matrice à sa forme de Smith puis à la matrice r-l-c qui lui correspond.

i.e. $S = L_1 M R_1$ avec L_1 et R_1 unimodulaires

$D = L_2 S R_2$ avec L_2 et R_2 unimodulaires

$= L_2 L_1 M R_1 R_2$ où $L_2 L_1$ et $R_1 R_2$ unimodulaires.

Mais les opérations élémentaires utilisées pour démontrer l'assertion 2.4.2 sont compliquées (voir preuve dans [7, Lem1 p840-841]). D'où, il est nécessaire de trouver une méthode plus raisonnable pour obtenir une matrice r-l-c. C'est l'objet du paragraphe 2.5 dans lequel on considère une matrice polynomiale facile à construire : une matrice de type DMDD.

2.5. Matrice polynomiale de type DMDD [1, §3]

2.5.1. **Définition**

Une matrice D polynomiale non singulière $m \times m$ admet une *diagonale monique et de degrés dominants* (on dit que D est de type DMDD) avec des degrés diagonaux γ_i ($i \in \underline{m}$) si chaque entrée de la diagonale de D est monique et

pour tout $(i, j) \in \underline{m} \times \underline{m}$ avec $i \neq j$ et $\gamma_i := \partial_{ii}[D]$,

$\partial_{ij}[D] < \min(\gamma_i, \gamma_j)$.

2.5.2. **Exemple**

Considérons la matrice suivante :

$$D = \begin{bmatrix} s^3+s^2+1 & s & s^2 \\ 0 & s^2 & s+1 \\ s^2+2s & s-1 & s^5-1 \end{bmatrix}$$

D est de type DMDD avec $\gamma_1 = 3$, $\gamma_2 = 2$ et $\gamma_3 = 5$.

L' assertion 2.5.3. montre l'équivalence entre une matrice r-l-c et une matrice de type DMDD. Pour construire facilement un matrice r-l-c, on prendra donc une matrice de type DMDD.

2.5.3. **Assertion** [1, Ass3.2]

Soit D une matrice polynomiale non singulière $m \times m$.

Considérons m entiers non négatifs entiers γ_i tq $\gamma_1 \geq \gamma_2 \geq \ldots \geq \gamma_m$

Alors, sont équivalentes :

a) D est r-c avec des degrés-colonnes γ_i et $D_h = I$ et

D est r-l avec des degrés-lignes γ_i et $D_h = I$

b) D est de type DMDD avec des degrés diagonaux γ_i ($i \in \underline{m}$)

c) D est r-l-c avec des puissances-lignes r_i, des puissances-colonnes k_j et $D_h = I$

pour toutes paires de m–uples d'entiers non négatifs r_i et k_j tq

$$r_1 \geq r_2 \geq \ldots \geq r_m \quad \text{et}$$

$$k_1 \geq k_2 \geq \ldots \geq k_m \quad \text{et}$$

$$\gamma_i = r_i + k_i \quad \forall\, i \in \underline{m}.$$

Preuve

On démontre a) => b) => c) => a) .

soient d_{ii} les éléments de D

1) a) => b)

Par hypothèse, on a

$$\lim_{s\to\infty} D(s)\, \mathrm{diag}\{s^{-\gamma_i}, i \in \underline{n}\} = I$$

$$\lim_{s\to\infty} \mathrm{diag}\{s^{-\gamma_i}, i \in \underline{n}\}\, D(s) = I$$

d'où d_{ii} est monique et $\deg[d_{ii}] = \gamma_i$

$$\forall\, j \neq i \quad \deg[d_{ij}] < \gamma_i \quad \text{et}$$

$$\deg[d_{ij}] < \gamma_j$$

donc b) tient.

2) b) => c)

On a

$$\forall\, i > j \quad \deg[d_{ij}] < \gamma_i = r_i + k_i \leq r_i + k_j$$

$$\forall\, j > i \quad \deg[d_{ij}] < \gamma_j = r_j + k_j \leq r_i + k_j$$

$$\forall\, i = j \quad \deg[d_{ii}] = \gamma_i = r_i + k_i$$

d'où par l'assertion 2.3.3 et en tenant compte que d_{ii} est monique, c) tient.

3) c) => a)

Dans c),

en prenant $r_i = 0$, on obtient que D est r-c avec des degrés-colonnes $k_i = \gamma_i$ et $D_h = I$ et

en prenant $k_j = 0$, on obtient que D est r-l avec des degrés-lignes $r_i = \gamma_i$ et $D_h = I$ □

Chapitre 3.

Classe de compensateurs propres

Dans ce chapitre, nous allons mettre en place trois théorèmes importants donnant les solutions propres de l'équation du compensateur. Le théorème 3.1.1 donne une condition nécessaire et suffisante pour qu'une solution soit propre mais il ne garantit pas l'existence d'une telle solution. Le théorème 3.1.2 donne une condition suffisante pour qu'une solution propre existe. Et enfin, le théorème 3.1.3 donne toutes les solutions propres de l'équation du compensateur sous forme de fractions de matrices polynomiales dont le dénominateur possède des degrés-lignes suffisamment larges. Cette paramétrisation n'est pas unique, il en existe d'autres, voir par exemple [4].

3.1.1. **Théorème** [3, Th61 p187-188]

Considérons la f.p.d. $P(s) = N_r(s)\,D_r^{-1}(s) \in \mathbb{R}_{p,o}(s)^{m\times n}$

Où D_r est r-c avec des degrés-colonnes k_j et soit D_h sa matrice des coefficients des plus hauts degrés-colonnes.

Soit $D_k(s) \in \mathbb{R}[s]^{m\times m}$ non singulière.

Considérons $X_l\, D_r + Y_l\, N_r = D_k$ (comp)

Alors (comp) a une solution (X_l, Y_l) tq

1) X_l est r-l avec des degrés-lignes r_i et X_{lh} sa matrice des coefficients des plus hauts degrés-lignes.
2) $C(s) = X_l^{-1}(s)\,Y_l(s) \in \mathbb{R}_p(s)^{m\times n}$

$\Leftrightarrow$

a) D_k est r-l-c avec des puissances-lignes r_i et des puissances-colonnes k_j
b) $\partial_{r_i}[Y_l] \leq r_i \;\; \forall\, i \in \underline{m}$.

De plus, sous les conditions a) et b), $D_{kh} = X_{lh}\, D_{rh}$.

Remarque : spdg, on peut considérer que X_l est r-l (voir commentaire suivant les définitions 2.2.1).

Preuve

Remarquer que les hypothèses peuvent se réécrire comme suit :

D_r est r-c

$\Leftrightarrow$ $D_r = D_{r-}\, \mathrm{diag}\,[s^{k_j}]$ où D_{r-} est bipropre.

et $N_r D_r^{-1}$ strictement propre

$\Leftrightarrow$ $\partial_{cj}[N_r] < \partial_{cj}[D_r] = k_j \quad \forall\, j \in \underline{m}$

$\Leftrightarrow$ $N_r\, \mathrm{diag}\,[s^{-k_j}]$ strictement propre.

1) La condition est nécessaire.

On a,

X_l est r-l

$\Leftrightarrow$ $X_l = \mathrm{diag}\,[s^{r_i}]\, X_{l-}$ avec X_{l-} bipropre

et $X_l^{-1} Y_l$ est propre

$\Leftrightarrow$ $\partial_{r_i}[Y_l] \le r_i \; \forall\, i \in \underline{m}$

$\Leftrightarrow$ $\mathrm{diag}[s^{-r_i}]\, Y_l$ propre

et donc b) tient.

Considérons maintenant :

$$\begin{aligned} D_{k-} &= \mathrm{diag}[s^{-r_i}]\, D_k\, \mathrm{diag}[s^{-k_j}] \\ &= \mathrm{diag}[s^{-r_i}]\, \{X_l D_r + Y_l N_r\}\, \mathrm{diag}[s^{-k_j}] \\ &= \mathrm{diag}[s^{-r_i}]\, X_l D_r\, \mathrm{diag}[s^{-k_j}] + \mathrm{diag}[s^{-r_i}]\, Y_l N_r\, \mathrm{diag}[s^{-k_j}] \\ &= X_{l-} D_{r-} + \mathrm{diag}[s^{-r_i}]\, Y_l \quad N_r\, \mathrm{diag}[s^{-k_j}] \end{aligned}$$

où le premier terme est bipropre car c'est le produit de facteurs bipropres

le second terme est strictement propre car c'est le produit d'un facteur propre et d'un facteur strictement propre.

Donc D_{k-} est bipropre, d'où D_k est r-l-c et a) tient.

Et $D_{kh} = D_{k-}(\infty) = X_{l-}(\infty)\, D_{r-}(\infty) = X_{lh}\, D_{rh}$.

2) La condition est suffisante.

Considérons :

$$\begin{aligned} \mathrm{Diag}[s^{r_i}]\, D_{k-}\, \mathrm{diag}[s^{k_j}] = D_k & \\ &= X_l D_r + Y_l N_r \\ &= X_l D_{r-}\, \mathrm{diag}[s^{k_j}] + Y_l N_r \end{aligned}$$

En prémultipliant par $\mathrm{diag}[s^{-r_i}]$, on obtient

$$D_{k-}\,\mathrm{diag}[s^{k_j}] = \mathrm{diag}[s^{-r_i}]\,X_l\,D_{r-}\,\mathrm{diag}[s^{k_j}] + \mathrm{diag}[s^{-r_i}]\,Y_l\,N_r$$

i.e. $\mathrm{diag}[s^{-r_i}]\,X_l\,D_{r-}\,\mathrm{diag}[s^{k_j}] = D_{k-}\,\mathrm{diag}[s^{k_j}] - \mathrm{diag}[s^{-r_i}]\,Y_l\,N_r$

En post-multipliant par $\mathrm{diag}[s^{-k_j}]$, on obtient

$$\mathrm{diag}[s^{-r_i}]\,X_l\,D_{r-} = D_{k-} - \mathrm{diag}[s^{-r_i}]\,Y_l\,N_r\,\mathrm{diag}[s^{-k_j}]$$

Post-multiplions aussi par D_{r-}^{-1},

$$\mathrm{diag}[s^{-r_i}]\,X_l = \{D_{k-} - \mathrm{diag}[s^{-r_i}]\,Y_l\,N_r\,\mathrm{diag}[s^{-k_j}]\}\;D_{r-}^{-1}$$

où D_{k-} est bipropre car D_k est r-l-c

$\mathrm{diag}[s^{-r_i}]\,Y_l$ propre car $\partial_{r_i}[Y_l] \leq r_i$

$N_r\,\mathrm{diag}[s^{-k_j}]$ strictement propre

D_{r-}^{-1} est bipropre puisque D_{r-} l'est

d'où $X_{l-} = \mathrm{diag}[s^{-r_i}]\,X_l$ est bipropre.

Il suit que X_l est r-l avec des degrés-lignes r_i, donc 1) tient et

$X_l^{-1}Y_l = X_{l-}^{-1}\,\mathrm{diag}[s^{-r_i}]\,Y_l$ est propre d'où 2) est vraie □

3.1.2. **Théorème[**existence de solutions propres**]** [1, Th4.2]

Soit $P(s) \in \mathbb{R}_{p,o}(s)^{n\times m}$

$$P(s) = N_r(s)\,D_r^{-1}(s) \;\; \text{f.p.d}$$

$$= D_l^{-1}(s)\,N_l(s) \;\; \text{f.p.g.}$$

avec D_r r-c avec des degrés-colonnes k_j

et D_l r-l avec des degrés-lignes μ_i

Soit $\mu = \max\limits_{i\in \underline{n}} \mu_i$

Soit

a) $D_k \in \mathbb{R}[s]^{m\times m}$ r-l-c avec des puissances-lignes r_i

et des puissances-colonnes k_j

b) $r_i \geq \mu\text{-}1\;\; \forall\, i \in \underline{m}$

Alors,

l'équation du compensateur (comp) a une solution (X_l, Y_l) tq

$$\partial_{r_i}[Y_l] \leq r_i \;\;\; \forall\, i \in \underline{m}$$

d'où par le th 3.1.1, X_l est r-l avec des degrés-lignes r_i et

$$C(s) = X_l^{-1}(s)\,Y_l(s) \in \mathbb{R}_p(s)^{m\times n}.$$

Preuve

Toutes les solutions (X_l, Y_l) de (comp) sont données par

$X_l = X_{lp} - N_k N_l$

$Y_l = Y_{lp} + N_k D_l$

Où N_k est un paramètre libre.

La seconde équation peut se réécrire comme

$Y_{lp} = - N_k D_l + Y_l$

On considère $- N_k$ et Y_l comme le quotient et le reste de la division à droite de Y_{lp} par D_l.

Alors $Y_l D_l^{-1}$ est strictement propre et donc $\partial_{cj}[Y_l] < \partial_{cj}[D_l]$ $\forall j \in \underline{n}$.

D'où, $\forall$ i $\in \underline{m}$

$$\begin{aligned}\partial_{r_i}[Y_l] &\leq \max_{i\in\underline{m}} \partial_{r_i}[Y_l] \\ &= \max_{j\in\underline{n}} \partial_{cj}[Y_l] \\ &< \max_{j\in\underline{n}} \partial_{cj}[D_l] \\ &= \max_{i\in\underline{n}} \partial_{r_i}[D_l] := \mu\end{aligned}$$

Dès lors, $\forall$ i $\in \underline{m}$, on a $\partial_{r_i}[Y_l] \leq \mu\text{-}1 \leq r_i$ □

3.1.3. **Théorème** [1, Th4.3]

Supposons que les hypothèses du théorème 3.1.2 tiennent et appelons (X_{lo}, Y_{lo}) la solution particulière de l'équation du compensateur (comp) obtenue par ce théorème.

Alors pour ces puissances-lignes r_i, toutes les solutions (X_l, Y_l) de l'équation du compensateur (comp) tq X_l est r-l avec des degrés-lignes r_i et $C = X_l^{-1}Y_l \in \mathbb{R}_p(s)^{m\times n}$ sont données par

$X_l = X_{lo} - N_k N_l$

$Y_l = X_{lo} + N_k D_l$

où $N_k \in \mathbb{R}[s]^{m\times n}$ est tq

$\forall$ i $\in \underline{m}$, $\forall$ j $\in \underline{n}$, $\partial_{ij}[N_k] \leq r_i - \mu_j = r_i - \partial_{r_j}[D_l]$. (3.1)

Preuve

Définissons $\Delta_\mu(s) := \mathrm{diag}\{s^{\mu_i}, i \in \underline{n}\}$

et $\Delta_r(s) := \mathrm{diag}\{s^{r_i}, i \in \underline{m}\}$

Par le théorème 3.1.2 : $C_o = X_{lo}^{-1}Y_{lo}$ est propre et X_{lo} r-l avec des degrés-lignes r_i.

donc $\Delta_r^{-1}Y_{lo}$ est propre.

La condition a) du théorème 3.1.1 tient par hypothèse.

La condition b) est équivalente à $\Delta_r^{-1} Y_l$ propre.

D_l est r-l avec des degrés μ_i donc $D_l = \Delta_\mu D_{l-}$ avec D_{l-} bipropre.

D'où

$$Y_l = Y_{lo} + N_k \Delta_\mu D_{l-}$$

En prémultipliant par Δ_r^{-1} :

$$\Delta_r^{-1} Y_l = \Delta_r^{-1} Y_{lo} + \Delta_r^{-1} N_k \Delta_\mu D_{l-}$$

puisque $\Delta_r^{-1} Y_{lo}$ est propre et D_{l-} est bipropre,

$\Delta_r^{-1} Y_l$ est propre

$\Leftrightarrow$ $\Delta_r^{-1} N_k \Delta_\mu$ est propre

$\Leftrightarrow$ $\partial_{ij}[N_k] \leq r_i - \mu_j \quad \forall\, i \in \underline{m}, \forall\, j \in \underline{n}$

La condition b) est vérifiée ssi la condition (3.1) du théorème est satisfaite.

Dès lors, par le théorème 3.1.3,

on obtient tout X_l r-l avec des degrés-lignes r_i et $C(s) = X_l^{-1}(s)\, Y_l(s) \in \mathbb{R}_p(s)^{m \times n}$ □

Chapitre 4.
Division de matrices

Dans le théorème 3.1.3, il apparaît que pour avoir toutes les solutions propres de l'équation du compensateur, on a besoin de connaître la solution particulière obtenue par le théorème 3.1.2. Dans la preuve de ce théorème, on avait considéré les matrices polynomiales $-N_k$ et Y_l comme quotient et reste de la division à droite de Y_{lp} par D_l. Ce chapitre indique comment effectuer la division à droite d'une matrice polynomiale par une autre, de façons théorique et pratique.

4.1. Aspect théorique

Montrons tout d'abord qu'on peut diviser à droite toute matrice polynomiale par une matrice polynomiale non singulière et que les matrices polynomiales quotient et reste sont uniques sous une certaine condition.

4.1.1. **Théorème de division** [3, Th37 p71-72]

Soit $D_r \in \mathbb{R}[s]^{m\times m}$ une matrice polynomiale non singulière.

Alors $\forall\ N_r \in \mathbb{R}[s]^{n\times m}\ \ \exists\ !\ Q_r$ et $R_r \in \mathbb{R}[s]^{n\times m}$ tq

$$N_r = Q_r D_r + R_r \quad \text{avec } R_r D_r^{-1} \in \mathbb{R}_{p,o}(s)^{n\times m} \tag{4.1}$$

De plus, si D_r est r-c, alors l'unicité de Q_r et R_r sera aussi assurée ssi

$$\partial_{cj}[R_r] < \partial_{cj}[D_r] \quad \forall\ j \in \underline{m}\ .$$

Preuve

Posons $H := N_r D_r^{-1} \in \mathbb{R}(s)^{n\times m}$

D'où $\forall\ i \in n, \forall\ j \in m\ \ h_{ij} := n_{ij} / d_{ij} \in \mathbb{R}(s)$

où n_{ij} et d_{ij} sont des polynômes premiers.

Dès lors, par l'algorithme d'Euclide,

$\forall\ i \in \underline{n}, \forall\ j \in \underline{m}\ \ \exists\ !\ q_{ij}$ et r_{ij} tq

$n_{ij} = d_{ij}\, q_{ij} + r_{ij}$ avec $r_{ij} / d_{ij} \in \mathbb{R}_{p,o}(s)$

D'où $\forall\, i \in \underline{n}, \forall\, j \in \underline{m} \quad h_{ij} = q_{ij} + r_{ij} / d_{ij}$.

Posons $Q_r := [q_{ij}] \in \mathbb{R}[s]^{n\times m}$ et

$H_{sp} := [r_{ij} / d_{ij}] \in \mathbb{R}_{p,o}(s)^{n\times m}$

On a $N_r D_r^{-1} = H = Q_r + H_{sp}$

Posons aussi $R_r := N_r - Q_r D_r \in \mathbb{R}[s]^{n\times m}$

Alors $R_r D_r^{-1} = N_r D_r^{-1} - Q_r = Q_r + H_{sp} - Q_r = H_{sp} \in \mathbb{R}_{p,o}(s)^{n\times m}$

Montrons maintenant l'unicité de Q_r et R_r.

Soit $\overline{Q_r}$ et $\overline{R_r}$ vérifiant également (4.1)

Alors $N_r = Q_r D_r + R_r = \overline{Q_r}\, D_r + \overline{R_r}$

On a donc $Q_r - \overline{Q_r} = (\overline{R_r} - R_r) D_r^{-1}$

Or le membre de gauche $\in \mathbb{R}[s]^{n\times m}$ et le membre de droite $\in \mathbb{R}_{p,o}(s)^{n\times m}$

Puisque $\mathbb{R}[s]^{n\times m} \cap \mathbb{R}_{p,o}(s)^{n\times m} = \{0\}$,

les deux membres sont nuls et $Q_r = \overline{Q_r}$ et $R_r = \overline{R_r}$ □

A partir de cette preuve, on peut tirer l'algorithme suivant :

4.1.2. **Algorithme** [division à droite d'une matrice polynomiale par une matrice polynomiale]

1. calculer $N_r D_r^{-1} = H$
2. calculer $Q_r := \pi_1[H]$

   où $\pi_1 : \mathbb{R}(s) \rightarrow \mathbb{R}[s]$

   $p \rightarrow \pi_1 p$

   avec $\pi_1 p$ partie polynomiale de p.
3. comme $N_r = Q_r D_r + R_r$

   calculer $R_r = N_r - Q_r D_r$.

En pratique, appliquer cet algorithme est un travail fastidieux. Il faut donc trouver une autre méthode. Ce qui suit met en place un algorithme plus " pratiquable ".

4.2. Division du vecteur ligne polynomial n par une matrice polynomiale D [3, appendix C]

Tous les vecteurs de cette section seront des vecteurs lignes et nous noterons par $\mathbb{R}[s]^{n*}$ ($\mathbb{R}_{p,o}(s)^{n*}$) l'espace des vecteurs polynomiaux (respectivement rationnels strictement propres) lignes de dimension n.

Soient $n(s) \in \mathbb{R}[s]^{n*}$ et

$D(s) \in \mathbb{R}[s]^{n\times n}$ r-c et $D_h = I$

Alors $D(s) = \mathrm{diag}\{s^{k_i}, i \in \underline{n}\} + D_l(s)$

Où $k_i = \partial_{c_i}[D(s)]$

$D_l(s) \in \mathbb{R}[s]^{n\times n}$ contient les termes de degrés inférieurs à k_i .

Avant de mettre en place un théorème donnant le quotient et le reste de la division à droite d'un vecteur ligne polynomial par une matrice polynomiale, on a besoin de deux lemmes, les lemmes 4.2.1 et 4.2.2.

4.2.1. **Lemme** [3, Lem20 p255-256]

Soit $D(s) \in \mathbb{R}[s]^{n\times n}$ r-c et $D_h = I$ et

soit $\mathbb{R}_D = \{x(s) \in \mathbb{R}[s]^{n*} : x(s)D^{-1}(s) \in \mathbb{R}_{p,o}(s)^{n*}\}$

Alors

(a) $\mathbb{R}_D$ est un espace $\mathbb{R}$-linéaire

(b) $x \in \mathbb{R}_D$ ssi $x(s) = (\, x_i(s)\,)_{i \in \underline{n}}$

où $x_i(s) = x_{i1}\, s^{k_i-1} + x_{i2}\, s^{k_i-2} + \ldots + x_{ik_i} \in \mathbb{R}[s] \quad \forall i \in \underline{n}$.

<u>Preuve de (b)</u>

Si $x(s) \in \mathbb{R}_D$ alors $\partial[x_i(s)] < \partial_{c_i}[D(s)] = k_i$

$x_i(s)$ est donc un polynôme de degré k_{i-1} □

Nous savons, par le théorème 4.1.1, que

$\forall\, x \in \mathbb{R}[s]^{n*}$, $\exists$ des vecteurs q et $r \in \mathbb{R}[s]^{n*}$ uniques tq

$x = q\,D + r$ et $r\,D^{-1} \in \mathbb{R}_{p,o}(s)^{n*}$

Définissons alors les opérateurs quotient et reste de la division à droite d'un vecteur ligne polynomial x par la matrice polynomiale D.

$q : \mathbb{R}[s]^{n*} \rightarrow \mathbb{R}[s]^{n*} : x \rightarrow q(x)$ et

$r : \mathbb{R}[s]^{n*} \rightarrow \mathbb{R}_D : x \rightarrow r(x)$

où $x = q(x)\,D + r(x)$

on a

(a) q et r sont des opérateurs $\mathbb{R}$-linéaires

(b) $\forall\, x(s) \in \mathbb{R}[s]^{n*}$ $r\,(s\,x(s)) = r(s\,r(x(s))\,)$ (4.2)

Preuve de (b)

$$\begin{aligned} s\,x(s) &= s\,[q(x(s))\,D + r(x(s))] \\ &= s\,q(x(s))\,D + s\,r(x(s)) \\ &= s\,q(x(s))\,D + q(s\,r(x(s))\,)\,D + r(s\,r(x(s))\,) \\ &= [s\,q(x(s)) + q(s\,r(x(s))\,)]\,D + r(s\,r(x(s))\,) \end{aligned}$$

or $s\,x(s) = q(s\,x(s))\,D + r(s\,x(s))$

d'où, par unicité du quotient et du reste

$$r(s\,r(x(s))\,) = r(s\,x(s)) \;\square$$

4.2.2. **Lemme** [3, Lem35 p257]

Soit $D(s) \in \mathbb{R}[s]^{n\times n}$ r-c et $D_h = I$ et

Soit $x(s) \in \mathbb{R}_D$

Alors

$$sx(s) = q(s\,x(s))\,D(s) + r(s\,x(s))$$

où $q(s\,x(s)) = (x_{i1})_{i\in\underline{n}}$

et $r(s\,x(s))\,D(s)^{-1} \in \mathbb{R}_{p,o}(s)^{n*}$

Preuve

Pour alléger les écritures, on notera

$q(s)$ au lieu de $q(s\,x(s))$ et

$r(s)$ au lieu de $r(s\,x(s))$

Partons de

$$s\,x(s) = q(s)\,D(s) + r(s)$$

et post-multiplions par $\mathrm{diag}\{s^{-k_i}, i\in\underline{n}\}$:

$$s\,x(s)\,\mathrm{diag}\{s^{-k_i}, i\in\underline{n}\} = q(s)\,D(s)\,\mathrm{diag}\{s^{-k_i}, i\in\underline{n}\} + r(s)\,\mathrm{diag}\{s^{-k_i}, i\in\underline{n}\}$$

or $D(s)$ est r-c avec des degrés-colonnes k_i et $D_h = I$ donc $\lim\limits_{s\to\infty} D(s)\,\mathrm{diag}\{s^{-k_i}, i\in\underline{n}\} = I$,

$\lim\limits_{s\to\infty} r(s)\,\mathrm{diag}\{s^{-k_i}, i\in\underline{n}\} = 0$ puisque $r(s) \in \mathbb{R}_D$ et

$\lim\limits_{s\to\infty} s\,x(s)\,\mathrm{diag}\{s^{-k_i}, i\in\underline{n}\} = (x_{i1})_{i\in\underline{n}}$ puisque $x(s) \in \mathbb{R}_D$

Dès lors,

$$q(s) = (x_{i1})_{i\in\underline{n}} \;\square$$

4.2.3. **Théorème** [division à droite d'un vecteur ligne polynomial par une matrice polynomiale] [3, Th45 p257-259]

Soit $n(s) \in \mathbb{R}[s]^{n*}$ donné par $n(s) = n_o s^k + n_1 s^{k-1} + \ldots + n_k$

où $n_i \in \mathbb{R}^{n*} \quad \forall i \in \underline{k}$

Considérons

$$x_{i+1}(s) = r(s\, x_i(s)) + n_i \tag{4.3}$$

$$y_{i+1} = q(s\, x_i(s)) \qquad i \in \underline{k} \tag{4.4}$$

$$x_o(s) = 0 \in \mathbb{R}_D \tag{4.5}$$

Alors

(a) $\forall i \in \underline{k+1} \quad x_i(s) \in \mathbb{R}_D$ et $y_i \in \mathbb{R}^{n*}$ (4.6)

(b) $r(n(s)) = x_{k+1}(s) \in \mathbb{R}_D$ (4.7)

$$q(n(s)) = \sum_{i=1}^{k} y_{i+1}\, s^{k-i} \in \mathbb{R}[s]^{n*} \tag{4.8}$$

Preuve

(a) r est une fonction à valeurs dans $\mathbb{R}_D$ et $n_i \in \mathbb{R}_D$ par le lemme 4.2.1.

Puisque $\mathbb{R}_D$ est un espace $\mathbb{R}$-linéaire, $x_i(s) \in \mathbb{R}_D \ \forall i \in \underline{k+1}$.

$y_i \in \mathbb{R}^{n*}$ vient du lemme 4.2.2 .

(b) On montre par récurrence que

$$\forall i \in \underline{k+1} \quad x_i(s) = r(s^{i-1} n_o + s^{i-2} n_1 + \ldots + n_{i-1}) \tag{4.9}$$

Rappelons que q et r sont des opérateurs $\mathbb{R}$-linéaires.

(4.9) est vraie pour $i = 0$:

$$x_1(s) = n_o = r(n_o)$$

Supposons que (4.9) est vraie pour i et montrons qu'elle est vraie pour i+1

$$\begin{aligned} x_{i+1}(s) &= r(s\, x_i(s)) + n_i \\ &= r(s\, r(s^{i-1} n_o + s^{i-2} n_1 + \ldots + n_{i-1})) + n_i \\ &= r(s\,(s^{i-1} n_o + s^{i-2} n_1 + \ldots + n_{i-1})) + r(n_i) \qquad \text{par (4.2)} \\ &= r(s^i n_o + s^{i-1} n_1 + \ldots + s\, n_{i-1} + n_i) \end{aligned}$$

d'où (4.9) tient et donc

$$\begin{aligned} x_{k+1} &= r(s^k n_o + s^{k-1} n_1 + \ldots + s\, n_{k-1} + n_k) \\ &= r(n(s)) \end{aligned}$$

i.e. (4.7) est vérifiée.

Maintenant, montrons par récurrence que

$$\forall\, i \in \underline{k} \quad \sum_{j=0}^{i} s^{i-j}\, n_j = \left(\sum_{j=1}^{i} \; y_{j+1} \; s^{i-j}\right) D(s) + x_{i+1}(s) \qquad (4.10)$$

(4.10) est vraie pour i = 1

$$s\, n_o + n_1 = q(s\, n_o + n_1)\, D(s) + r(s\, n_o + n_1)$$

$$= q(s\, x_1(s)\,)\, D(s) + r(s\, n_o + n_1) \quad \text{car } q(n_1) = 0 \text{ et par (4.3)}$$

$$= y_2\, D(s) + x_2(s) \quad \text{par (4.4) et (4.3)}$$

Supposons que (4.10) est vraie pour i et montrons qu'elle est vraie pour i+1

$$\sum_{j=0}^{i+1} s^{i+1-j}\, n_j = s\,(s^i\, n_o + s^{i-1}\, n_1 + \ldots + s\, n_{i-1} + n_i) + n_{i+1}$$

$$= s\,[(y_2\, s^{i-1} + \ldots + y_{i+1})\, D(s) + x_{i+1}(s)] + n_{i+1}$$

$$= (y_2\, s^i + \ldots + s\, y_{i+1})\, D(s) + [s\, x_{i+1}(s) + n_{i+1}]$$

$$= (y_2\, s^i + \ldots + s\, y_{i+1})\, D(s) + q(\, s\, x_{i+1}(s) + n_{i+1})D(s) + r(s\, x_{i+1}(s) + n_{i+1})$$

$$= (y_2\, s^i + \ldots + s\, y_{i+1})\, D(s) + y_{i+2}\, D(s) + x_{i+2}(s) \text{ car } q(n_{i+1}) = 0 \text{ et par (4.4)}$$

$$= \left(\sum_{j=1}^{i+1} \; y_{j+1} \; s^{i+1-j}\right) D(s) + x_{i+2}(s)$$

Dès lors,

$$n(s) = q(\, n(s)\,)\, D(s) + r(\, n(s)\,)$$

$$= \sum_{j=0}^{k} s^{k-j}\, n_j \quad \text{par définition de } n(s)$$

$$= \left(\sum_{j=1}^{k} \; y_{j+1} \; s^{k-j}\right) D(s) + x_{i+1}(s) \quad \text{par (4.10)}$$

et donc, on a par unicité du quotient et du reste :

$$q(\, n(s)\,) = \sum_{j=1}^{k} \; y_{j+1} \; s^{k-j} \; \square$$

Ce théorème donne la marche à suivre pour diviser à droite un vecteur ligne polynomial par une matrice polynomiale. Celle - ci est reprise dans l'algorithme suivant :

4.2.4. **Algorithme** [division à droite de $n(s) \in \mathbb{R}[s]^{n*}$ par $D(s) \in \mathbb{R}[s]^{n\times n}$]

1. Décomposer n(s) en $n_o s^k + n_1 s^{k-1} + \ldots + n_k$

   Poser $x_o = 0$ d'où $x_1 = n_o$ et $y_1 = 0$

2. Pour $i = 1, \ldots, k$

   $[y_{i+1}]_j$ = coefficient de s^{k_j} du polynôme $[s\, x_i(s)]_j \;\; \forall j \in \underline{n}$ (4.11)

   $x_{i+1}(s) = (s\, x_i(s) - y_{i+1} D(s)) + n_i$ (4.12)

3. $q(\, n(s)\,) = \sum_{i=1}^{k} y_{i+1}\, s^{k-i} \in \mathbb{R}[s]^{n*}$ et

   $r(s) = x_{k+1}(s) \in \mathbb{R}_D$ □

Remarque : la notation $[.]_j$ signifie $j^{\text{ième}}$ composante.

Justification de (4.11) et (4.12) :

Comme $s\, x_i(s) = q(s\, x_i(s)\,)\, D(s) + r(s\, x_i(s)\,)$

par le lemme 4.2.2, $[q(s\, x_i(s))]_j$ = coefficient de s^{k_j} de $[s\, x_i(s)]_j$

et $x_{i+1}(s) = r(s\, x_i(s)\,) + n_i$

$= (s\, x_i(s) - y_{i+1} D(s)) + n_i$ □

Pour diviser à droite une matrice polynomiale par une autre, on effectue la division ligne par ligne.

Il existe d'autres façons de procéder à la division d'une matrice par une autre, la réalisation de Furhmann en inspire une autre. Pour plus de détail voir [5, p 615-617].

Cet algorithme sera appliqué au chapitre 6.

Chapitre 5.

Plus grand commun diviseur droit

La recherche de la solution de l'équation du compensateur passe par la solution particulière donnée par $X_l = D_k\, V_r$ et $Y_l = D_k\, U_r$. Ce chapitre indique comment trouver les matrices V_r et U_r. Celles-ci sont issues de l'algorithme d'extraction d'un plus grand commun diviseur droit. Cet algorithme sera mis en place à partir de la forme ligne d'Hermite. Le plus grand commun diviseur droit (p.g.c.d. d) est défini à l'annexe A, §2.

5.1. Forme ligne d'Hermite [3, §2.3.4]

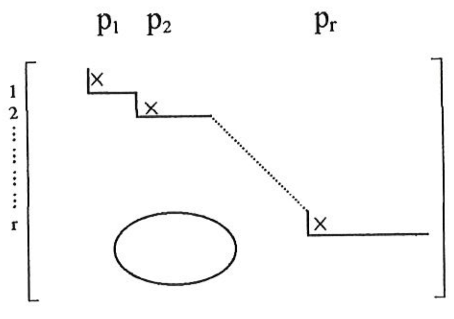
Dans le théorème qui suit, on définit, pour toute matrice polynomiale, sa forme ligne d'Hermite.

5.1.1. **Théorème**[Forme ligne d'Hermite] [3,Th1 p33-35]

Soit $M(s) \in \mathbb{R}[s]^{m\times n}$

Alors, il existe une matrice unimodulaire $L(s) \in \mathbb{R}[s]^{m\times m}$ telle que

L M = H =



H est la forme ligne d'Hermite de M.

Il existe un entier r, $0 \leq r \leq \min(m,n)$ avec rang H = rang M = r

tel que

a) $\forall i \in \underline{r}$, λ_i ($i^{ème}$ ligne)a un polynôme de tête non nul monique $h_{i p_i}$ appelé *entrée de tête* tel que

$$1 \leq p_1 < p_2 < \ldots < p_r \leq n$$

b) $\forall i \in \underline{r}$,

si $h_{ip_i} = 1$ alors $h_{jp_i} = 0 \ \forall j < i$

" Tous les éléments au-dessus d'une entrée de tête qui vaut un sont nuls. "

si $h_{ip_i} \neq 1$ alors $\partial[h_{jp_i}] < \partial[h_{ip_i}] \ \ \forall j < i$ tq $h_{jp_i} \neq 0$

" Tous les polynômes non nuls au-dessus de l'entrée de tête sont de degré inférieur à celui-ci. "

c) $\forall \gamma_j$ ($j^{\text{ième}}$ colonne) tq $j < p_1$, $\gamma_j = 0$

" Les colonnes avant p_1 sont nulles. "

$\forall \gamma_j$ tq $p_i \leq j < p_{i+1}$ avec $i \in \underline{r-1}$ alors les m-i dernières entrées de γ_j sont nulles.

" Dans chaque bande i sauf la dernière, les m-i derniers éléments des colonnes sont nuls. "

$\forall \gamma_j$ tq $j \geq p_r$, les m-r dernières entrées de γ_j sont nulles.

" Dans la dernière bande les m-r derniers éléments des colonnes sont nuls. "

5.1.2. **Algorithme de réduction à la forme ligne d'Hermite** [3, Alg5 p34]

Pour i = 1,2, …

ETAPE 1

Rechercher pour γ_{p_i}, la première colonne de gauche qui est non nulle sous λ_{i-1}.

Si une telle colonne n'existe pas ou si i = m+1 ou si $p_{i-1} = n$ alors STOP.

ETAPE 2

Choisir parmi les entrées non nulles de γ_{p_i} sous λ_{i-1} une entrée de plus petit degré et par une permutation de lignes, la placer en position (i , p_i).

ETAPE 3

Multiplier λ_i par une constante non nulle pour rendre l'entrée (i , p_i) monique.

ETAPE 4

Utiliser l'algorithme d'Euclide et additionner les multiples polynomiaux adéquats de λ_i pour réduire les entrées non nulles de γ_{p_i} en-dessous de λ_i à leurs restes après division par l'entrée (i , p_i).

ETAPE 5

Si les restes dans γ_{p_i} sous λ_i sont tous nuls → aller à l'ETAPE 6.

Sinon répéter 2 → 4 jusqu'à ce que tous les restes soient nuls.

ETAPE 6

Si i = 1, passer l'ETAPE 6.

Sinon utiliser l'algorithme d'Euclide et additionner les multiples polynomiaux adéquats de λ_i pour réduire les entrées non nulles de γ_{p_i} au-dessus de λ_i à leurs restes après division par l'entrée (i , p_i).

5.1.3. **Preuve du théorème 5.1.1**

Montrons d'abord que l'algorithme 5.1.2 se termine :

A l'étape 5 , les entrées non nulles de γ_{pi} sous λ_i ont été remplacées par leurs restes après division par l'entrée (i , p_i), leurs degrés sont donc plus petits que celui de l'entrée (i , p_i).
D'où, en répétant les étapes 2 à 4, les degrés sont décroissants et des restes nuls sont finalement obtenus : l'étape 6 sera atteinte après un nombre fini de passages de 2 à 4.
Puisque M a un nombre fini d'entrées, l'algorithme se terminera à l'étape 1 pour une valeur finie de i = r+1 et la matrice aura une forme en escalier avec exactement r 'marches'.

Rang H = rang M = r car
Seules des opérations élémentaires - lignes ont été appliquées à M pour obtenir H, leurs rangs sont donc égaux sur $\mathbb{R}[s]$ et le rang de H sur $\mathbb{R}[s]$ est égal au rang de H sur $\mathbb{R}(s)$ qui vaut r. (Définition et propriétés du rang : voir Annexe A §5)

Les propriétés de la matrice tiennent par construction □

Illustrons maintenant l'algorithme 5.1.2 par un exemple.

5.1.4. **Exemple**

Considérons la matrice suivante :

$$M = \begin{bmatrix} 0 & 0 & s^2 \\ s+1 & 0 & s^2 \\ s+2 & 0 & -s^2 \\ s+1 & 0 & -s^2 \end{bmatrix}$$

\# 1 <u>i = 1</u>

<u>étape 1</u> $\gamma_{p_1} = 1^{\text{ère}}$ colonne d'où $p_1 = 1$

<u>étape 2</u> placer s+1 en position $(1 , p_1) = (1 , 1)$

$$\lambda_1 \leftrightarrow \lambda_2$$

$$\begin{bmatrix} s+1 & 0 & s^2 \\ 0 & 0 & s^2 \\ s+2 & 0 & -s^2 \\ s+1 & 0 & -s^2 \end{bmatrix}$$

<u>étape 3</u> l'entrée $(1 , p_1)$ est déjà monique

<u>étape 4</u> $s+2 = (s+1)\times 1+1$ d'où $\lambda_3 \leftarrow \lambda_3 - \lambda_1$

$$\lambda_4 \leftarrow \lambda_4 - \lambda_1$$

$$\begin{bmatrix} s+1 & 0 & s^2 \\ 0 & 0 & s^2 \\ 1 & 0 & -2s^2 \\ 0 & 0 & -2s^2 \end{bmatrix}$$

<u>étape</u> 5 toutes les entrées sous s+1 ne sont pas nulles → étape 2

<u>étape 2</u> placer 1 en position $(1 , p_1) = (1 , 1)$

$$\lambda_1 \leftrightarrow \lambda_3$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & -2s^2 \\ 0 & 0 & s^2 \\ s+1 & 0 & s^2 \\ 0 & 0 & -2s^2 \end{bmatrix}$$

étape 3 1 est déjà monique

étape 4 $\lambda_3 \leftarrow \lambda_3 - (s+1)\,\lambda_1$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & -2s^2 \\ 0 & 0 & s^2 \\ 0 & 0 & 2s^3+3s^2 \\ 0 & 0 & -2s^2 \end{bmatrix}$$

étape 5 toutes les entrées sous 1 sont nulles → étape 6

étape 6 i = 1, on passe l'étape 6

2 i = 2

étape 1 $\gamma_{p_2} = 3^{ème}$ colonne , d'où $p_2 = 3$

étape 2 un polynôme de plus petit degré est déjà placé en $(2\,,\,p_2) = (2\,,\,3)$: s^2

étape 3 s^2 est déjà monique

étape 4 $\lambda_3 \leftarrow \lambda_3 - (2s+3)\,\lambda_2$

$\lambda_4 \leftarrow \lambda_4 + 2\,\lambda_2$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & -2s^2 \\ 0 & 0 & s^2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

étape 5 toutes les entrées sous s^2 sont nulles → étape 6

étape 6 $\lambda_1 \leftarrow \lambda_1 + 2\,\lambda_2$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & s^2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

3 i = 3

étape 1 $p_{i-1} = p_2 = 3 = n$ → STOP

Dans l'algorithme d'extraction d'un p.g.c.d. d, on va utiliser un cas particulier de la forme ligne d'Hermite, celui où sa partie supérieure est une matrice triangulaire supérieure. Le corollaire suivant nous indique que cette forme ligne d'Hermite particulière est celle d'une matrice de rang colonne plein.

5.1.5. **Corollaire [**forme ligne d'Hermite d'une matrice de rang colonne plein**]** [3, Cor9 p35]

Supposons que, dans le théorème 5.1.1, $M(s) \in \mathbb{R}[s]^{m\times n}$ possède un rang colonne plein sur $\mathbb{R}[s]$ i.e. rang $M = n$, $m \geq n$.

Alors, il existe une matrice unimodulaire $L(s) \in \mathbb{R}[s]^{m\times n}$ tq

$$LM = H = \begin{bmatrix} R \\ \cdots \\ 0 \end{bmatrix}$$

Avec $R(s) \in \mathbb{R}[s]^{n\times n}$ triangulaire supérieure et non singulière, i.e. H la forme ligne d'Hermite de M est triangulaire supérieure.

Et H satisfait a), b), c) du théorème 5.1.1 avec $p_i = i$, $\forall\, i \in \underline{n}$.

<u>Preuve</u>

Par le théorème 5.1.1, r = rang H est le nombre de 'marches' de la forme ligne d'Hermite .

Par hypothèse rang M = n d'où r = rang H = rang M = n et donc la matrice $H(s) \in \mathbb{R}[s]^{m\times n}$ a exactement n 'marches'$_\square$

5.2. <u>Plus grand commun diviseur droit</u> [3, §2.3.6]

Voici la marche à suivre pour extraire un p.g.c.d. d.

5.2.1. **Algorithme d'extraction d'un p.g.c.d. droit** [3, Alg1 p51]

Soit $\overline{N}_r(s) \in \mathbb{R}[s]^{n\times m}$ et $\overline{D}_r(s) \in \mathbb{R}[s]^{m\times m}$ avec $\overline{D}_r$ non singulière.

<u>*ETAPE 1*</u>

$$\text{Poser } M := \begin{bmatrix} \overline{D}_r \\ \\ \overline{N}_r \end{bmatrix} \in \mathrm{Mat}(\mathbb{R}[s])$$

Et observer que M est de rang plein sur $\mathbb{R}[s]$.

ETAPE 2

Utiliser l'algorithme 5.1.2 (l'étape 6 n'est pas nécessaire) et obtenir une matrice triangulaire supérieure.

5.2.2. **Conséquence**

On obtient des matrices unimodulaires W et $W^{-1} \in Mat(\mathbb{R}[s])$ avec

$$W := \left[\begin{array}{c|c} V_r & U_r \\ \hline -N_l & D_l \end{array}\right] \quad \text{et} \quad W^{-1} := \left[\begin{array}{c|c} D_r & -U_l \\ \hline N_r & V_l \end{array}\right]$$

tq

$$WM = \left[\begin{array}{c|c} V_r & U_r \\ \hline -N_l & D_l \end{array}\right] \left[\begin{array}{c} \overline{D}_r \\ \hline \overline{N}_r \end{array}\right] = \left[\begin{array}{c} R \\ \hline 0 \end{array}\right]$$

Où R est triangulaire supérieure et non singulière.

W est en fait une copie des opérations élémentaires effectuées sur M au cours de l'algo 5.1.2, appliquées à la matrice identité.

L'algorithme 5.2.1 produit une matrice triangulaire supérieure qui est un p.g.c.d. d de $\overline{N}_r$ et $\overline{D}_r$.

5.2.3. **Assertion** [3, Ass10 p52-53]

Soit $\overline{N}_r \in \mathbb{R}[s]^{n\times m}$ et $\overline{D}_r \in \mathbb{R}[s]^{m\times m}$ avec $\overline{D}_r$ non singulière et appliquer l'algorithme 5.2.1. Alors la matrice R triangulaire supérieure est un p.g.c.d. d de $\overline{N}_r$ et $\overline{D}_r$.

<u>Preuve</u>

On a

$$W^{-1} \begin{bmatrix} R \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \overline{D}_r \\ \overline{N}_r \end{bmatrix}$$

On obtient $D_r R = \overline{D}_r$ et $N_r R = \overline{N}_r$

D'où R est d.c.d. de $\overline{N}_r$ et $\overline{D}_r$. (5.1)

On a

$$V_r\,\overline{D}_r + U_r\,\overline{N}_r = R$$

D'où chaque d.c.d. de $\overline{N}_r$ et $\overline{D}_r$ est un d.d. de R. (5.2)

Par (5.1) et (5.2), R est un p.g.c.d. d de $\overline{N}_r$ et $\overline{D}_r$ □

L'algorithme 5.2.1 sera appliqué au chapitre 6.

Chapitre 6.

Exemple

Nous allons maintenant illustrer le théorème 3.1.3 par un exemple.

6.1. Données

Considérons $P(s) = N_r(s)\, D_r^{-1}(s)$

Où $N_r(s) = \begin{bmatrix} s+1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$ et

$$D_r(s) = \begin{bmatrix} s(s-2) & 0 \\ 1 & s-1 \end{bmatrix}$$

Le p.g.c.d. d. de N_r et D_r est I (voir 6.2.1), donc $P(s) = N_r(s)\, D_r^{-1}(s)$ est une f.p.d.

D_r est r-c avec $k_1 = 2$ et $k_2 = 1$

$D_r^{-1}(s)$ vaut:

$$D_r^{-1}(s) = \begin{bmatrix} \dfrac{1}{s(s-2)} & 0 \\ -\dfrac{1}{s(s-2)(s-1)} & \dfrac{1}{s-1} \end{bmatrix}$$

Dès lors,

$$P(s) = \begin{bmatrix} s+1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dfrac{1}{s(s-2)} & 0 \\ -\dfrac{1}{s(s-2)(s-1)} & \dfrac{1}{s-1} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \dfrac{s+1}{s(s-2)} & 0 \\ \dfrac{1}{s(s-1)} & \dfrac{1}{s-1} \end{bmatrix} \in \mathbb{R}_{p,o}(s)^{2\times 2}$$

Ses pôles sont 0, 1 et 2 $\in \mathbb{C}_+$, d'où le système à asservir est instable.

Prenons

$$D_k(s) = \begin{bmatrix} (s+4)(s^2+4s+8) & 0 \\ 0 & (s+6)(s+8) \end{bmatrix}$$

$D_k(s)$ est r-l-c avec $r_1 = 1$, $r_2 = 1$

$k_1 = 2$, $k_2 = 1$

Les zéros de son déterminant sont : $-2 + 2j$, $-2 - 2j$, -4 , -6 et $-8 \in \overset{\circ}{\mathbb{C}}_{-}$.

D'où le système S(P,C) est stable.

6.2. Solutions

On doit trouver un compensateur propre stabilisant sous forme d'une fraction polynomiale gauche. Pour cela, il faut résoudre l'équation du compensateur $X_l D_r + Y_l N_r = D_k$. Les solutions de cette équation sont données par le théorème 3.1.3. mais ce théorème utilise une solution particulière : celle donnée par le théorème 3.1.2.

6.2.1. **Solution du théorème 3.1.2**

Notons (X_{lo}, Y_{lo}) la solution donnée par le théorème 3.1.2.

$X_{lo} = X_{lp} - N_k N_l$

$Y_{lo} = Y_{lp} + N_k D_l$

Où $X_{lp} = D_k V_r$ et $Y_{lp} = D_k U_r$

1) Calcul de V_r et U_r

Appliquons l'algorithme 5.2.1 d'extraction d'un p.g.c.d. droit à $\begin{bmatrix} D_r \\ N_r \end{bmatrix}$ et à I

pour obtenir $W \begin{bmatrix} D_r \\ N_r \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I \\ 0 \end{bmatrix}$

où $W = \begin{bmatrix} V_r & U_r \\ -N_l & D_l \end{bmatrix}$

$$\begin{bmatrix} D_r \\ N_r \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} s(s-2) & 0 \\ 1 & s-1 \\ s+1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{et} \quad I = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

#1 $\lambda_1 \leftrightarrow \lambda_4$

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & s-1 \\ s+1 & 0 \\ s(s-2) & 0 \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

#2 $\lambda_2 \leftarrow \lambda_2 - \lambda_1$

$\lambda_3 \leftarrow \lambda_3 - (s+1)\,\lambda_1$

$\lambda_4 \leftarrow \lambda_4 - s(s\text{-}2)\,\lambda_1$

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & s-2 \\ 0 & -(s+1) \\ 0 & -s(s-2) \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -(s+1) \\ 1 & 0 & 0 & -s(s-2) \end{bmatrix}$$

#3 $\lambda_3 \leftarrow \lambda_3 + \lambda_2$

$\lambda_4 \leftarrow \lambda_4 + s\,\lambda_2$

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & s-2 \\ 0 & -3 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & -s-2 \\ 1 & s & 0 & -s^2+s \end{bmatrix}$$

#4 $\lambda_2 \leftarrow\!\rightarrow \lambda_3$

$\lambda_2 \leftarrow -1/3\,\lambda_2$

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \\ 0 & s-2 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1/3 & -1/3 & 1/3\,(s+2) \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 1 & s & 0 & -s^2+s \end{bmatrix}$$

#5 $\lambda_1 \leftarrow \lambda_1 - \lambda_2$

$\lambda_3 \leftarrow \lambda_3 - (s\text{-}2)\,\lambda_2$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} 0 & 1/3 & 1/3 & 1/3\,(1-s) \\ 0 & -1/3 & -1/3 & 1/3\,(s+2) \\ 0 & 1/3\,(s+1) & 1/3\,(s-2) & -1/3\,(s^2-1) \\ 1 & s & 0 & -s^2+s \end{bmatrix}$$

Pour le point 2), on a besoin que D_l soit r-c avec $D_{lh} = I$, on va donc modifier les deux dernières lignes pour que D_l ait cette forme.

#6 $\lambda_3 \leftarrow 3\,\lambda_3$

$\lambda_4 \leftarrow -\,\lambda_4$

$$\begin{bmatrix} 0 & 1/3 & 1/3 & 1/3\,(1-s) \\ 0 & -1/3 & -1/3 & 1/3\,(s+2) \\ 0 & s+1 & s-2 & 1-s^2 \\ -1 & -s & 0 & s^2-s \end{bmatrix}$$

#7 $\lambda_3 \leftarrow \lambda_3 + \lambda_4$

$$\left[\begin{array}{cc:cc} 0 & 1/3 & 1/3 & 1/3\,(1-s) \\ 0 & -1/3 & -1/3 & 1/3\,(s+2) \\ \hdashline -1 & 1 & s-2 & 1-s \\ -1 & -s & 0 & s^2-s \end{array}\right]$$

$$V_r = \frac{1}{3}\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \quad U_r = \frac{1}{3}\begin{bmatrix} 1 & 1-s \\ -1 & s+2 \end{bmatrix}$$

$$N_l = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & s \end{bmatrix} \quad D_l = \begin{bmatrix} s-2 & 1-s \\ 0 & s^2-s \end{bmatrix}$$

$\partial_{c_1}[D_l] = 1$ $\partial_{c_2}[D_l] = 2$ D_l est r-c et $D_{lh} = I$

les degrés-lignes de D_l sont $\mu_1 = 1$ et $\mu_2 = 2$, $D_{lh} = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ non singulière

d'où D_l est r-l.

$D_l^{-1}(s)\, N_l(s)$ est une f.p.g. par le théorème 1.3.4.

$\mu = \max\{1, 2\} = 2$

L'hypothèse b) du théorème 3.1.2 est vérifiée :

$r_1 = 1 \geq \mu\text{-}1 = 1$ et $r_2 = 1 \geq \mu\text{-}1 = 1$

On peut maintenant calculer X_{lp} et Y_{lp} :

$$3\,X_{lp} = D_k\, V_r = \begin{bmatrix} 0 & (s+4)\,(s^2-4s+8) \\ 0 & -(s+6)\,(s+8) \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 0 & s^3+8s^2+24s+32 \\ 0 & -s^2-14s-48 \end{bmatrix}$$

$$3\,Y_{lp} = D_k\, U_r = \begin{bmatrix} (s+4)\,(s^2+4s+8) & (1-s)\,(s+4)\,(s^2+4s+8) \\ -(s+6)\,(s+8) & (s+2)\,(s+6)\,(s+8) \end{bmatrix}$$

$$3\,Y_{lp} = \begin{bmatrix} s^3+8s^2+24s+32 & -s^4-7s^3-16s^2-8s+32 \\ -s^2-14s-48 & s^3+16s^2+76s+96 \end{bmatrix}$$

2) Calcul de N_k et Y_{lo}

$Y_{lp} = -N_k D_l + Y_{lo}$ où $D_l = \begin{bmatrix} s-2 & 1-s \\ 0 & s^2-s \end{bmatrix}$ avec $\partial c_1[D_l] = 1$ et $\partial c_2[D_2] = 2$

On va appliquer l'algorithme 4.2.4. de division à droite d'un vecteur ligne polynomial par une matrice polynomiale

- Division à droite de $[s^3+8s^2+24s+32 \quad -s^4-7s^3-16s^2-8s+32]$ par D_l

$$\underbrace{[0 \quad -1]}_{n_o} s^4 + \underbrace{[1 \quad -7]}_{n_1} s^3 + \underbrace{[8 \quad -16]}_{n_2} s^2 + \underbrace{[24 \quad -8]}_{n_3} s + \underbrace{[32 \quad 32]}_{n_4}$$

$x_1(s) = [0 \quad -1]$

#1 $[0 \quad -s] = y_2\, D_l + r$

$y_2 = [0 \quad 0]$

$x_2(s) = [0 \quad -s] - [0 \quad 0]\, D_l + [1 \quad -7]$

$= [1 \quad -s-7]$

#2 $[s \quad -s^2-7s] = y_3\, D_l + r$

$y_3 = [1 \quad -1]$

$x_3(s) = [s \quad -s^2-7s] - [1 \quad -1]\, D_l + [8 \quad -16]$

$= [s \quad -s^2-7s] - [s-2 \quad 1-s^2] + [8 \quad -16]$

$= [10 \quad -7s-17]$

#3 $[10s \quad -7s^2-17s] = y_4\, D_l + r$

$y_4 = [10 \quad -7]$

$x_4(s) = [10s \quad -7s^2-17s] - [10 \quad -7]\, D_l + [24 \quad -8]$

$= [10s \quad -7s^2-17s] - [10s-20 \quad -7s^2-3s+10] + [24 \quad -8]$

$= [44 \quad -14s-18]$

#4 $[44s \quad -14s^2-18s] = y_5\, D_l + r$

$y_5 = [44 \quad -14]$

$x_5(s) = [44s \quad -14s^2-18s] - [44 \quad -14]\, D_l + [32 \quad 32]$

$= [44s \quad -14s^2-18s] - [44s-88 \quad -14s^2-30s+44] + [32 \quad 32]$

$= [120 \quad 12s-12]$

D'où $r(s) = [120 \quad 12s-12]$

Et $q(s) = [s^2+10s+44 \quad -s^2-7s-14]$

- Division à droite de $[-s^2-14s-48 \quad s^3+16s^2+76s+96]$ par D_l

$$\underbrace{[0 \quad 1]}_{n_o} s^3 + \underbrace{[-1 \quad 16]}_{n_1} s^2 + \underbrace{[-14 \quad 76]}_{n_2} s + \underbrace{[-48 \quad 96]}_{n_3}$$

$x_1(s) = [0 \quad 1]$

#1 $[0 \quad s] = y_2\, D_l + r$

$y_2 = [0 \quad 0]$

$x_2(s) = [0 \quad s] - [0 \quad 0]\, D_l + [-1 \quad 16]$

$= [-1 \quad s+16]$

#2 $[-s \quad s^2+16s] = y_3\, D_l + r$

$y_3 = [-1 \quad 1]$

$x_3(s) = [-s \quad s^2+16s] - [-1 \quad 1]\, D_l + [-14 \quad 76]$

$= [-s \quad s^2+16s] - [-s+2 \quad s^2-1] + [-14 \quad 76]$

$= [-16 \quad 16s+77]$

#3 $[-16s \quad 16s^2+77s] = y_4\, D_l + r$

$y_4 = [-16 \quad 16]$

$x_4(s) = [-16s \quad 16s^2+77s] - [-16 \quad 16]\, D_l + [-48 \quad 96]$

$= [-16s \quad 16s^2+77s] - [-16s+32 \quad 16s^2-16] + [-48 \quad 96]$

$= [-80 \quad 77s+112]$

D'où $r(s) = [-80 \quad 77s+112]$

Et $q(s) = [-s-16 \quad s+16]$

Dès lors,

$$-3\, N_k = \begin{bmatrix} s^2+10s+44 & -s^2-7s-14 \\ -s-16 & s+16 \end{bmatrix}$$

Et $$3\, Y_{lo} = \begin{bmatrix} 120 & 12s-12 \\ -80 & 77s+112 \end{bmatrix}$$

On a bien $\partial_{r_1}[Y_{lo}] = 1 \leq r_1 = 1$

et $\partial_{r_2}[Y_{lo}] = 1 \leq r_2 = 1$

$X_{lo} = X_{lp} - N_k\, N_l$

$$3\,X_{lo} = \begin{bmatrix} 0 & s^3+8s+24s+32 \\ 0 & -s^2-14s-48 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 3s+30 & -s^3-8s^2-24s-44 \\ 0 & s^2+17s+16 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 3s+30 & -12 \\ 0 & 3s-32 \end{bmatrix}$$

6.2.2. **Solutions données par le théorème 3.1.3**

Toutes les hypothèses du théorème 3.1.2 tiennent et donc celles du théorème 3.1.3 aussi.

Rappelons que $\mu_1 = 1$ et $\mu_2 = 2$, $r_1 = 1$ et $r_2 = 2$.

Alors

$X_l = X_{lo} - N_k\, N_l$

$Y_l = Y_{lo} + N_k\, D_l$

Où $\partial_{11}[N_k] \leq r_1 - \mu_1 = 0$ donc $n_{11} \in \mathbb{R}$

$\partial_{12}[N_k] \leq r_1 - \mu_2 = -1$ donc $n_{12} = 0$

$\partial_{21}[N_k] \leq r_2 - \mu_1 = 0$ donc $n_{21} \in \mathbb{R}$

$\partial_{22}[N_k] \leq r_2 - \mu_2 = -1$ donc $n_{22} = 0$

Dès lors,

$$3\,N_k = \begin{bmatrix} n_{11} & 0 \\ n_{21} & 0 \end{bmatrix}$$

$$3\,X_l = \begin{bmatrix} 3s+30 & -12 \\ 0 & 3s-32 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} n_{11} & 0 \\ n_{21} & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & s \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 3\,s + (30 - n_{11}) & n_{11} \\ -\,n_{21} & 3\,s + (n_{21} - 32) \end{bmatrix}$$

et $$3\,Y_l = \begin{bmatrix} 120 & 12s-12 \\ -80 & 77s+112 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} n_{11} & 0 \\ n_{21} & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} s-2 & 1-s \\ 0 & s^2-s \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} n_{11}\,s + (120 - 2\,n_{11}) & (12 - n_{11})\,s + (n_{11} - 12) \\ n_{21}\,s - (2\,n_{21} + 80) & (77 - n_{21})\,s + (n_{21} + 112) \end{bmatrix}$$

On vérifie que :

X_l est r-l avec des degrés-lignes $r_1 = 1$ et $r_2 = 1$ et

$\partial_{l_1}[Y_l] = 1 \leq r_1$, $\partial_{l_2}[Y_l] = 1 \leq r_2$

d'où par le théorème 2.2.5 (version gauche), on a bien que $C = X_l^{-1} Y_l$ est propre □

Conclusion

Au terme du chapitre 3, nous voyons que si la matrice caractéristique en boucle fermée est réduit-ligne-colonne avec des puissances-lignes suffisamment larges, on obtient tous les compensateurs propres stabilisants (sous forme de fractions de matrices polynomiales dont les degrés-lignes du dénominateur sont prescrits) qui asservissent un système strictement propre. Le choix de la matrice caractéristique en boucle fermée est donc déterminant pour cette raison mais aussi pour le placement des zéros de son déterminant qui implique la stabilité du système en boucle fermée. Par facilité, on prendra cette matrice de type DMDD avec des degrés appropriés (c'est-à-dire suffisamment larges) et les zéros de son déterminant dans le demi-plan ouvert gauche.

Dans la pratique, obtenir la classe de tous les compensateurs propres stabilisants peut être un travail fastidieux. En effet, au chapitre 6, nous avons appliqué le théorème 3.1.3. à un exemple. Cela a nécessité l'utilisation de deux algorithmes. Nous avons travaillé avec des matrices de dimension deux et le nombre de calculs était déjà important. Si la dimension des matrices est très grande, il n'est pas possible d'appliquer ces algorithmes à la main. Dans ce cas, il existe des fonctions dans la "polynomial toolbox" de Matlab nous facilitant la tâche, mais les résultats obtenus à la main et par Matlab peuvent différer s'ils ne sont pas uniques.

On pourrait compléter ce mémoire par la conception d'un compensateur régulant. La démarche est tout à fait similaire à celle que nous venons d'effectuer, on met en place l'équation du compensateur régulant, puis on retrouve des théorèmes donnant les solutions de cette équation qui sont très proches des théorèmes 1.3.3, 3.1.1 et 3.1.2, voir [3, chap 7].

Nous avons travaillé avec les matrices de transfert des systèmes, on peut étendre l'analyse en étudiant la PMD (description du système par des matrices polynomiales) du système asservi. En parcourant [3], on retrouve des informations utiles d'interprétation dynamique temporelle.

Enfin, nous sommes partis d'un système à asservir donné par une fraction droite mais on aurait pu partir d'une fraction gauche, dans ce cas tous les résultats qu'on a vus peuvent être dualisés.

Annexe A :

Matrices polynomiales et matrices rationnelles

Cette annexe reprend les définitions et résultats principaux concernant les matrices polynomiales et rationnelles.

Comme son nom l'indique, une *matrice polynomiale* est une matrice dont les éléments sont des polynômes. Une *matrice rationnelle* est, elle, composée de fractions de polynômes. Il existe des types particuliers de matrices polynomiales et rationnelles comme les matrices polynomiales unimodulaires, les matrices rationnelles propres et strictement propres.

1. Opérations élémentaires [2,Matrices polynomiales p19-20]

1. **Définitions**

On note par $\mathbb{R}[s]$ l'anneau des polynômes, $\mathbb{R}(s)$ le champs des fonctions rationnelles et par Mat($\mathbb{R}[s]$) l'ensemble des matrices polynomiales.

Soit une matrice polynomiale $D(s) \in$ Mat($\mathbb{R}[s]$),

$D(s)$ est *unimodulaire* ssi $\det D(s) \equiv k \neq 0$ ($k \in \mathbb{R}$).

D'où, une matrice polynomiale est unimodulaire si et seulement si son inverse est une matrice polynomiale.

Il existe trois sortes *d'opérations élémentaires – lignes* (o.e.l.) sur $D(s)$:

1) Interchanger deux lignes : $\lambda_i \leftrightarrow \lambda_j$
2) Multiplier une ligne par une constante k non nulle : $\lambda_i \leftarrow k\,\lambda_i$
3) Pour $j \neq i$, ajouter à la ligne i une autre ligne j multipliée par r : $\lambda_i \leftarrow \lambda_i + r\,\lambda_j$

Les o.e.l. sont équivalentes à prémultiplier $D(s)$ par une matrice élémentaire gauche obtenue en copiant sur la matrice unité l'opération.

De même, il existe trois sortes *d'opérations élémentaires – colonnes* (o.e.c.) sur $D(s)$:

1) Interchanger deux colonnes : $\gamma_i \leftrightarrow \gamma_j$
2) Multiplier une colonne par une constante k non nulle : $\gamma_i \leftarrow k\,\gamma_i$
3) Pour $j \neq i$, ajouter à la colonne i une autre colonne j multipliée par r : $\gamma_i \leftarrow \gamma_i + r\,\lambda_j$

Les o.e.c. sont équivalentes à postmultiplier D(s) par une matrice élémentaire droite obtenue en copiant sur la matrice unité l'opération.

2. **Exemple**

Soit la matrice

$$D(s) = \begin{bmatrix} 1 & s+1 \\ 1 & s \end{bmatrix}$$

Cette matrice est unimodulaire car det D(s) = -1

Appliquons-lui l'opération élémentaire – ligne $\lambda_1 \leftarrow \lambda_1 - 2\,\lambda_2$ ou prémultiplions-la par la matrice

$$\begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

on obtient la matrice

$$\begin{bmatrix} -1 & -s+1 \\ 1 & s \end{bmatrix}.$$

3. **Assertion** [3, Ex7 p28]

Chaque opération élémentaire est inversible, d'où chaque matrice élémentaire est unimodulaire.

4. **Théorème** [2, Matrices polynomiales p20]

Toute matrice unimodulaire est produit de matrices élémentaires.

5. **Définition**

Soient A et B $\in \mathbb{R}[s]^{m\times n}$,

alors A et B sont *équivalentes,* ssi

(*équivalentes à gauche*)

(*équivalentes à droite*)

Il existe des matrices unimodulaires $L \in \mathbb{R}[s]^{m\times m}$ et $R \in \mathbb{R}[s]^{n\times n}$ tq

A = LBR

(A = LB)

(A = BR)

Les opérations élémentaires sont intéressantes car elles permettent de réduire les matrices à des formes particulières comme, par exemple, la forme d'Hermite ou la forme de Smith.

2. Multiples et diviseurs [3, §2.3.1]

1. **Définitions**

a. Soient les matrices polynomiales R(s), D(s), L(s) $\in$ Mat($\mathbb{R}[s]$), avec D(s) = L(s) R(s) alors,

R(s) est un *diviseur droit* (d.d.) de D(s) et
D(s) est un *multiple gauche* (m.g.) de R(s).

L(s) est un *diviseur gauche* (d.g.) de D(s) et
D(s) est un *multiple droit* (m.d.) de L(s).

b. Soient les matrices polynomiales N(s) et D(s) $\in$ Mat($\mathbb{R}[s]$),

on dit que R(s) $\in$ Mat($\mathbb{R}[s]$) est un *diviseur commun droit* (d.c.d.) de N(s) et D(s) ssi

$N(s) = \overline{N}(s)\,R(s)$ et $D(s) = \overline{D}(s)\,R(s)$

où $\overline{N}(s)$ et $\overline{D}(s) \in$ Mat($\mathbb{R}[s]$)

on dit que L(s) $\in$ Mat($\mathbb{R}[s]$) est un *diviseur commun gauche* (d.c.g.) de N(s) et D(s) ssi

$N(s) = L(s)\,\overline{N}(s)$ et $D(s) = L(s)\,\overline{D}(s)$

où $\overline{N}(s)$ et $\overline{D}(s) \in$ Mat($\mathbb{R}[s]$)

c. Un *plus grand commun diviseur droit* (p.g.c.d. d) est un d.c.d. qui est multiple à gauche de tout d.c.d.

Un *plus grand commun diviseur gauche* (p.g.c.d. g) est un d.c.g. qui est multiple à droite de tout d.c.g.

d. Soient les matrices polynomiales N(s) et D(s) $\in$ Mat($\mathbb{R}[s]$),

N(s) et D(s) sont *premières à droite* (p.d.) ssi

Elles admettent un p.g.c.d. d unimodulaire.

$N(s)$ et $D(s)$ sont *premières à gauche* (p.g.) ssi

elles admettent un p.g.c.d. g unimodulaire.

3. Fractions de matrices [3, §2.4.1]

1. **Définitions**

Soit $H \in \mathbb{R}(s)^{n\times m}$.

Soient $N_r \in \mathbb{R}[s]^{n\times m}$ et $D_r \in \mathbb{R}[s]^{m\times m}$

on dit que $N_r\ D_r^{-1}$ est une *fraction droite* (f.d.) de H ssi

a) $\det Dr \neq 0$ et

b) $H = N_r\ D_r^{-1}$

De plus, si N_r et D_r sont p.d. alors $N_r\ D_r^{-1}$ est une *fraction première droite* (f.p.d.) de H.

De même, on dit que $D_l^{-1}\ N_l$ est une *fraction gauche* (f.g.) de H ssi

a) $\det D_l \neq 0$ et

b) $H = D_l^{-1}\ N_l$

De plus, si N_l et D_l sont p.g. alors $D_l^{-1}\ N_l$ est une *fraction première gauche* (f.p.g.) de H.

2. **Assertion** [3, Ass8 p58]

Chaque $H \in \mathbb{R}(s)^{n\times m}$ a une f.p.d $N_r\ D_r^{-1}$ et une f.p.g. $D_l^{-1}\ N_l$.

4. Matrices rationnelles propre et strictement propre [3, §2.4.3]

1. **Définitions**

Soit $H \in \mathbb{R}(s)^{n\times m}$.

Alors

on dit que H est *propre* ssi $\lim\limits_{s\to\infty} H(s) = H(\infty) \in \mathbb{C}^{n\times m}$ et

on dit que H est *strictement propre* ssi $\lim\limits_{s\to\infty} H(s) = H(\infty) = 0$.

On notera par $\mathbb{R}_p(s)$ ($\mathbb{R}_{p,o}(s)$) l'anneau des fonctions rationnelles propres (respectivement strictement propres) à coefficients dans $\mathbb{R}$.

On dit que H est *bipropre* ssi H et H^{-1} sont propres.

2. **Exemples**

- La matrice

$$H(s) = \begin{bmatrix} \frac{s^2+1}{s^2} & 2 \\ 1 & \frac{(s+1)^3}{s^3+1} \end{bmatrix}$$

est propre car

$$H(\infty) = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

- La matrice

$$K(s) = \begin{bmatrix} \frac{s^2+1}{s^3} & 0 \\ 0 & \frac{(s+1)^2}{s^3+1} \end{bmatrix}$$

est strictement propre car $K(\infty) = 0$.

- La matrice

$$L(s) = \begin{bmatrix} \frac{s}{s+1} & 0 \\ 0 & \frac{s^2-1}{s^2} \end{bmatrix}$$

est bipropre car elle est propre et

$$L^{-1}(s) = \begin{bmatrix} \frac{s+1}{s} & 0 \\ 0 & \frac{s^2}{s^2-1} \end{bmatrix}$$

est également propre.

5. Rang des matrices polynomiales et rationnelles [3, §2.3.1]

1. **Définitions**

Soit $D \in \mathbb{R}[s]^{m\times n}$ et soit r un entier tq $0 \le r \le \min(m,n)$.

On dit que D a un *rang normal* r (on dit aussi que D a un rang r sur $\mathbb{R}[s]$) ssi il existe au moins un mineur $r\times r$ qui n'est pas le zéro polynomial et $\forall$ $s > r$, chaque mineur $s\times s$ est le zéro polynomial.

Le *rang normal colonne* de D est le nombre maximum de ses colonnes qui sont linéairement indépendantes dans $(\mathbb{R}[s]^m, \mathbb{R}[s])$.

Le *rang normal ligne* de D est le nombre maximum de ses lignes qui sont linéairement indépendantes dans ($\mathbb{R}[s]^n$, $\mathbb{R}[s]$).

Si $D \in \mathbb{R}(s)^{m\times n}$, son rang normal est défini sur le champ $\mathbb{R}(s)$.

2. **Théorème** [3, Th10 p25]

Soit $D \in \mathbb{R}[s]^{m\times n}$, alors son rang normal est égal à son rang normal colonne et à son rang normal ligne.

3. **Théorème** [3, Th15 p26]

Soit $D \in \mathbb{R}[s]^{m\times n}$, alors le rang de D sur $\mathbb{R}[s]$ est égal au rang de D sur $\mathbb{R}(s)$.

4. **Théorème** [3, Th8 p28]

Chaque opération élémentaire sur une matrice polynomiale laisse le rang normal inchangé.

Annexe B :

Identité de Bezout généralisée

Avant de prouver le théorème 1.3.4, nous donnons quelques résultats qui nous seront utiles.

Assertion 1 [3, Ass11 p53]

Soit $\overline{N}_r \in \mathbb{R}[s]^{n\times m}$ et $\overline{D}_r \in \mathbb{R}[s]^{m\times m}$ avec $\overline{D}_r$ non singulière.

Alors tous les p.g.c.d. d de $\overline{N}_r$ et $\overline{D}_r$ sont équivalents à gauche.

<u>Preuve</u>

Nous savons par le théorème 5.2.3, que la matrice triangulaire supérieure non singulière R est un p.g.c.d. d de $\overline{N}_r$ et $\overline{D}_r$. Puisque l'équivalence à gauche est une relation d'équivalence, il suffit de montrer que pour tout p.g.c.d. d R' de $\overline{N}_r$ et $\overline{D}_r$, R et R' sont équivalents à gauche.

Puisque R et R' sont des p.g.c.d. d de $\overline{N}_r$ et $\overline{D}_r$, ils sont aussi d.c.d. de $\overline{N}_r$ et $\overline{D}_r$.

D'où, par définition d'un p.g.c.d. d,

$$\exists \text{ L et L'} \in \text{Mat}(\mathbb{R}[s]) \quad \text{tq} \qquad \text{R'} = \text{L'R} \text{ et } \text{R} = \text{LR'}.$$

Dès lors,

$$\text{R} = \text{LL'R} \quad \text{où R non singulière.}$$

On doit donc avoir $I = LL'$ i.e. $L' = L^{-1} \in \text{Mat}(\mathbb{R}[s])$.

L et L' sont donc unimodulaires et R et R' sont équivalents à gauche □

D'où le p.g.c.d. d est unique à un facteur unimodulaire gauche près.

Assertion 2 [3, Ass15 p53]

Soit $\overline{N}_r \in \mathbb{R}[s]^{n\times m}$ et $\overline{D}_r \in \mathbb{R}[s]^{m\times m}$ avec $\overline{D}_r$ non singulière.

Alors

$\overline{N}_r$ et $\overline{D}_r$ sont p.d.

$\Leftrightarrow$

Tous les p.g.c.d. d de $\overline{N}_r$ et $\overline{D}_r$ sont unimodulaires.

Preuve

Par l'assertion 1 si un p.g.c.d. d est unimodulaire alors tous les p.g.c.d. d sont unimodulaires □

Théorème 3[Identité de Bezout] [3, Th16 p54]

Soit $\overline{N}_r \in \mathbb{R}[s]^{n\times m}$ et $\overline{D}_r \in \mathbb{R}[s]^{m\times m}$ avec $\overline{D}_r$ non singulière.

Alors

$$\overline{N}_r \text{ et } \overline{D}_r \text{ sont p.d.}$$

$\Leftrightarrow$

$$\exists\ \overline{U}_r \text{ et } \overline{V}_r \in \mathrm{MAT}(\mathbb{R}[s]) \quad \text{t.q.} \quad \overline{U}_r\ \overline{N}_r + \overline{V}_r\ \overline{D}_r = I_m \quad . \qquad (1)$$

Preuve

$\Rightarrow$: Par la conséquence 5.2.2 de l'algorithme d'extraction d'un p.g.c.d. d, on obtient

$$U_r\overline{N}_r + V_r\overline{D}_r = R \quad \text{avec R un p.g.c.d. d de } \overline{N}_r \text{ et } \overline{D}_r \text{ et} \qquad (2)$$
$$U_r \text{ et } D_r \in \mathrm{Mat}(\ \mathbb{R}[s]\ )$$

Or $\overline{N}_r$ et $\overline{D}_r$ sont p.d.

D'où par l'assertion 2, R doit être unimodulaire.

Dès lors, en prémultipliant (2) par R^{-1}on obtient

$$\overline{U}_r\ \overline{N}_r + \overline{V}_r\ \overline{D}_r = I_m$$

où $\overline{U}_r = R^{-1}U_r$ et $\overline{V}_r = R^{-1}V_r \in \mathrm{Mat}(\ \mathbb{R}[s]\ )$.

$\Leftarrow$: Soit R un p.g.c.d. d, donc un d.c.d., de $\overline{N}_r$ et $\overline{D}_r$.

i.e. $\quad \overline{N}_r = N_r\,R \quad$ et $\quad \overline{D}_r = D_r\,R \quad$ avec N_r et $D_r \in \mathrm{Mat}(\ \mathbb{R}[s]\ )$

Alors par (1)

$$\overline{U}_r N_r R + \overline{V}_r D_r R\ = I_m$$

i.e. $\quad (\overline{U}_r N_r + \overline{V}_r D_r\ )\ R\ = I_m$

i.e. $\quad R^{-1} = \overline{U}_r N_r + \overline{V}_r D_r\ \in \mathrm{Mat}(\ \mathbb{R}[s]\ )$

D'où R est unimodulaire.

Alors chaque p.g.c.d. d de $\overline{N}_r$ et $\overline{D}_r$ est unimodulaire et donc par l'assertion 2, $\overline{N}_r$ et $\overline{D}_r$ sont p.d. □

Théorème 1.3.4

Soit $H \in \mathbb{R}(s)^{n\times m}$ représenté par une f.p.d. $N_r\, D_r^{-1}$.

Alors il existe six matrices $\in$ Mat($\mathbb{R}[s]$) U_r, V_r, N_l, D_l, U_l, V_l

tq

$$WW^{-1} := \left[\begin{array}{c|c} V_r & U_r \\ \hline -N_l & D_l \end{array}\right] \left[\begin{array}{c|c} D_r & -U_l \\ \hline N_r & V_l \end{array}\right] = \left[\begin{array}{c|c} I_m & 0 \\ \hline 0 & I_n \end{array}\right]$$

De plus, $D_l^{-1} N_l$ est une f.p.g. de H.

<u>Preuve</u>

Appliquer l'algorithme 5.2.1 à D_r et N_r.

On obtient

$$WM = \left[\begin{array}{c|c} V_r & U_r \\ \hline -N_l & D_l \end{array}\right] \left[\begin{array}{c} D_r \\ \hline N_r \end{array}\right] = \left[\begin{array}{c} R \\ \hline 0 \end{array}\right]$$

Où R est un p.g.c.d. d de D_r et N_r, il est unimodulaire car D_r et N_r sont p.d.

s.p.d.g. $R = I_m$

sinon multiplier le premier bloc - ligne de W par R^{-1} et on obtient

$R^{-1} V_r D_r + R^{-1} U_r N_r = I_m$.

Soit $D_l^{-1} N_l$ une f.p.g. de H dont l'existence est garantie par l'assertion 2 de l'annexe A §3.

par le théorème 3 (version gauche), $\exists\ \overline{U_l}$, $\overline{V_l}$ $\in$ Mat($\mathbb{R}[s]$) tq $N_l \overline{U_l} + D_l \overline{V_l} = I_n$.

On obtient

$$\left[\begin{array}{c|c} V_r & U_r \\ \hline -N_l & D_l \end{array}\right] \left[\begin{array}{c|c} D_r & -\overline{U_l} \\ \hline N_r & \overline{V_l} \end{array}\right] = \left[\begin{array}{c|c} I_m & Q \\ \hline 0 & I_n \end{array}\right]$$

où $\quad Q = -V_r \overline{U_l} + U_r \overline{V_l}$.

En appliquant simultanément les opérations bloc - colonnes :

(bloc γ_2) $\leftarrow$ (bloc γ_2) - (bloc γ_1) Q

à $$\left[\begin{array}{c|c} D_r & -\overline{U_1} \\ \hline N_r & \overline{V_1} \end{array}\right] \text{ et } \left[\begin{array}{c|c} I_m & Q \\ \hline 0 & I_n \end{array}\right]$$

on obtient

$$\left[\begin{array}{c|c} D_r & -\overline{U_1} - D_rQ \\ \hline N_r & \overline{V_1} - N_rQ \end{array}\right] \text{ et } \left[\begin{array}{c|c} I_m & 0 \\ \hline 0 & I_n \end{array}\right]$$

posons $-U_1 := -\overline{U_1} - D_r\,Q$ et $V_1 := \overline{V_1} - N_r\,Q$.

ce qui donne

$$\left[\begin{array}{c|c} V_r & U_r \\ \hline -N_l & D_l \end{array}\right] \left[\begin{array}{c|c} D_r & -U_l \\ \hline N_r & V_l \end{array}\right] = \left[\begin{array}{c|c} I_m & 0 \\ \hline 0 & I_n \end{array}\right] \square$$

Notations

m.g.	multiple gauche
m.d.	multiple droit
d.g.	diviseur gauche
d.d.	diviseur droit
d.c.g.	diviseur commun gauche
d.c.d.	diviseur commun droit
p.g.c.d. g	plus grand commun diviseur gauche
p.g.c.d. d	plus grand commun diviseur droit
p.g.	premiers à gauche
p.d.	premiers à droite
f.g.	fraction gauche
f.d.	fraction droite
f.p.g.	fraction première gauche
f.p.d.	fraction première droite
r-l	réduit-ligne
r-c	réduit-colonne
r-l-c	réduit-ligne-colonne
type DMDD	possède une diagonale monique et de degrés dominants
$\mathbb{C}^{\circ}_{-}$	demi – plan ouvert gauche de $\mathbb{C}$
$\mathbb{C}_{+}$	demi –plan fermé droit de $\mathbb{C}$
$\mathbb{R}[s]$	anneau des polynômes
$\mathbb{R}(s)$	champ des fonctions rationnelles
$\mathbb{R}_p(s)$	anneau des fonctions rationnelles propres
$\mathbb{R}_{p,o}(s)$	anneau des fonctions rationnelles strictement propres
$\mathbb{R}[s]^{n*}$	espace des vecteurs lignes polynomiaux de dimension n
$\mathbb{R}_{p,o}(s)^{n*}$	espace des vecteurs lignes rationnels strictement propres de dimension n

Mat(E)	ensemble des matrices dont les éléments appartiennent à E
$i \in \underline{n}$	l'indice i prend la valeur 1 (ou 0) jusqu'à la valeur n
c.c.	complètement contrôlable (ou contrôlable par abus de langage)
c.o.	complètement observable (ou observable par abus de langage)

Bibliographie

[1] F.M. Callier, " Proper feedback compensators for a strictly proper plant by solving polynomial equations ", Proceedings of the MMAR 2000 Symposium, Miedzyzdroje (Poland), August 28-31 2000 Vol I, pp. 55-59.

[2] F.M. Callier, " Systèmes asservis optimaux ", cours de deuxième licence en sciences mathématiques, 2000-2001.

[3] F.M. Callier and C.A. Desoer, " Multivariable feedback systems ", Springer-Verlag, New York, 1982.

[4] V. Kucera and P. Zagalak, " Proper solutions of polynomial equations ", Preprints 14th IFAC World Congress Beijing 1999, Vol.D, pp. 357-362.

[5] E. Emre, " The polynomial equation $QQ_c + RP_c = \Phi$ with applications to dynamic feedback ", SIAM Jour. Control and Optimization 1980, Vol. 18, pp 611-620.

[6] F.M. Callier, " Contrôle optimal ", cours de première licence en sciences mathématiques, 1999-2000.

[7] H.H. Rosenbrock and G.E. Hayton, " The general problem of pole assignment ", International J. Control 1978, Vol 27, pp 837-852.

Errata

Cet errata concerne le mémoire de Julie Jocaille, “Recherche polynomiale de compensateurs d’asservissement stabilisants propres de systèmes strictement propres. ”

- §1.2 Stabilité du système S(P,C), page 8

Remplacer la deuxième phrase par la phrase : “Sous les hypothèses que P est strictement propre et admet une réalisation minimale donc stabilisable et détectable, que C admet une réalisation observable et stabilisable donc stabilisable et détectable, le théorème 1.2.1 nous indique que la stabilité interne est équivalente à la stabilité externe. ”

- Théorème 1.2.1., page 8

Dans la deuxième hypothèse, supprimer “i.e. minimales” :
“R_1 et R_2 stabilisables et détectables”

- Théorème 1.3.4., pages 13 et 63

Accord du mot “représentée” :
“Soit $H \in \mathbb{R}(s)^{n\times m}$ représentée par une f.p.d. $N_r\, D_r^{-1}$. ”

- Pied de page du chapitre 2

Orthographe du mot “degré” :
“Chapitre 2 : Contrôle du degré des matrices polynomiales”

- Preuve assertion 2.1.2., page 16

Dans la quatrième ligne, remplacer “ $\forall\, i \in \underline{m}$ ” par “ $\forall\, i \in \underline{n}$ ” :

“ $N_{ij} = \sum_{k=1}^{m} h_{ik}\, d_{kj} \qquad \forall\, i \in \underline{n},\ \forall\, j \in \underline{m}$ ”

- Remarque, milieu de la page17

Orthographe du mot “ou” :
“Si D est r-l ou r-c”

- Preuve assertion 2.3.3., page 21

Dans la huitième et dixième ligne, souligner les "m" :

" $\lim_{s\to\infty} \frac{d_{ii}}{s^{r_i+k_j}} = 0 \quad \forall\, i,j \in \underline{m}$, avec $i \neq j$ " et

"$\partial[d_{ij}] < r_i + k_j \quad \forall\, i,j \in \underline{m}$, avec $i \neq j$ "

- Assertion 2.5.3., page 24

Dans la deuxième ligne, supprimer le second mot "entiers" :

" Considérons m entiers non négatifs γ_i tq $\gamma_1 \geq \gamma_2 \geq \ldots \geq \gamma_m$ "

- Preuve théorème de division 4.1.1., page 31

Dans la deuxième ligne, souligner le "n" et le "m" :

" D'où $\forall\, i \in \underline{n}, \forall\, j \in \underline{m}\ \ h_{ij} := n_{ij} / d_{ij} \in \mathbb{R}(s)$ "

- Avant-dernière phrase de la page 37

Accord du mot "détail" :

"Pour plus de détails voir [5, p615-617]. "

- Annexe A, §1 Opérations élémentaires, page 55

Dans la première ligne, orthographe du mot "champ" :

"$\mathbb{R}(s)$ le champ des fonctions rationnelles "

- Annexe A, §1 Opérations élémentaires, page 55

Dans les définitions de la troisième opération élémentaire – ligne et de la troisième opération élémentaire – colonne, ajouter $r \in \mathbb{R}[s]$:

3) Pour $j \neq i$, ajouter à la ligne i une autre ligne j multipliée par $r \in \mathbb{R}[s]$: $\lambda_i \leftarrow \lambda_i + r\,\lambda_j$

3) Pour $j \neq i$, ajouter à la colonne i une autre colonne j multipliée par $r \in \mathbb{R}[s]$: $\gamma_i \leftarrow \gamma_i + r\,\lambda_j$