Institutional Repository - Research Portal
Dépôt Institutionnel - Portail de la Recherche
researchportal.unamur.be
University of Namur

THESIS / THÈSE

MASTER EN SCIENCES MATHÉMATIQUES

Détermination du taux d'absorption de la lumière dans l'eau

HUSSON, Isabelle; MERNIER, Christine

Award date:
1988

Awarding institution:
Universite de Namur

Link to publication

General rights
Copyright and moral rights for the publications made accessible in the public portal are retained by the authors and/or other copyright owners and it is a condition of accessing publications that users recognise and abide by the legal requirements associated with these rights.

- Users may download and print one copy of any publication from the public portal for the purpose of private study or research.
- You may not further distribute the material or use it for any profit-making activity or commercial gain
- You may freely distribute the URL identifying the publication in the public portal ?

Take down policy
If you believe that this document breaches copyright please contact us providing details, and we will remove access to the work immediately and investigate your claim.

Download date: 02. May. 2026

FACULTÉS UNIVERSITAIRES N.D. DE LA PAIX
NAMUR
FACULTÉ DES SCIENCES

Détermination du taux d'absorption de la lumière dans l'eau

Promoteur : **J.-J. Strodiot**
Co-promoteur : **J.-P. Descy**

Mémoire présenté pour l'obtention du grade
de Licencié en Sciences
mathémathiques
par

Isabelle HUSSON
Christine MERNIER

Facultés Universitaires Notre-Dame de la Paix
Facultés des Sciences
rue de Bruxelles 61, B-5000 **NAMUR**
Tél. 081-22.90.61 Télex 59222 facnam-b 081-23.03.91

Détermination du taux d'absorption de la lumière dans l'eau

HUSSON Isabelle
MERNIER Christine

Résumé.

Dans ce mémoire, nous avons proposé un modèle mathématique déterminant le taux d'absorption de la lumière dans l'eau en fonction des mesures de la concentration de la matière en suspension et de la chlorophylle_A . Nous avons d'abord employé une approximation numérique utilisant les B_splines, pour ensuite déterminer une forme analytique adéquate .

Abstract.

In this work a mathematical model is proposed for computing the absorption rate of the light in water from the concentration of suspended matter and chlorophyll_A . First a numerical approximation of the model is obtained by using B_splines and then an analytic form of this approximation is presented .

Mémoire de licence en Sciences Mathématiques
Juin 1988
Département de Mathématiques Appliquées
Promoteur : J.-J. STRODIOT
Co-promoteur : J.-P. DESCY

Ce mémoire est le résultat d'une collaboration entre l'Unité d'Optimisation du Département de Mathématiques et l'Unité d'Ecologie des Eaux douces du Département de Biologie. Monsieur Jean-Jacques Strodiot a dirigé la partie mathématique du travail tandis que Monsieur Jean-Pierre Descy en a supervisé le côté biologique. Nous les remercions de leur soutien tout au long de ce mémoire, de leurs conseils judicieux et de leurs encouragements.

Nos remerciements s'adressent également au Département de Physique de l'Université de Liège et plus particulièrement à Messieurs Smitz et Everbecq qui nous ont fourni de nombreuses données et nous ont reçu plusieurs fois afin de discuter de nos résultats et nous proposer des suggestions bien utiles.

Nous exprimons notre reconnaissance à tous les membres du Département de Mathématiques qui nous ont aidées et plus particulièrement à Christian Merckx pour le grand intérêt qu'il a porté à notre travail et pour sa disponibilité au cours de cette année.

Christine Mornies

Husson Isabelle

CHAPITRE I

Introduction

L'objectif de ce mémoire est de proposer et ensuite de tester un modèle mathématique pour déterminer le taux d'absorption de la lumière dans l'eau, appelé coefficient d'extinction par les écologistes . Ce modèle devait être élaboré à partir de mesures effectuées dans la Meuse et la Sambre, et ensuite validé sur le canal Albert.

Le calcul du coefficient d'extinction s'inscrit dans un modèle biologique complexe déterminant le taux de croissance et la biomasse du phytoplancton dans un milieu fluvial, en fonction d'une part des variables internes du système aquatique, et d'autre part de variables externes, indépendantes du système.

Le coefficient d'extinction est une mesure de la transparence de l'eau, qui détermine la quantité de lumière pénétrant dans la colonne d'eau . C'est un paramètre fondamental en hydrologie, qui détermine principalement la *production primaire*, résultant, en majeure partie, de la photosynthèse des végétaux chlorophylliens (ou producteurs primaires) .

La production primaire correspond à la fabrication de molécules organiques, comportant principalement du carbone, à partir du carbone minéral,c'est-à-dire du CO2 (sous différentes formes), dissous dans l'eau : c'est la production d'énergie fondamentale de la grande majorité des écosystèmes aquatiques qui dépend avant tout de l'intensité lumineuse disponible dans la colonne d'eau, et donc des phénomènes d'absorption de la lumière dans l'eau .

Un écosystème comprend une biocénose (ensemble des organismes vivants) en interaction constante avec un milieu (terrestre ou aquatique) caractérisé par un ensemble de facteurs physiques et chimiques, décrits à la figure 1, dont les principales composantes sont la qualité de l'eau, le débit, la température et l'énergie lumineuse .

La lumière dans l'eau :

Une partie de la lumière est réflèchie par la surface. La réflexion dépend de l'angle d'incidence de la lumière : elle est maximale en lumière rasante et minimale à la perpendiculaire. La réflexion concerne surtout le rayonnement solaire direct; elle est nettement moindre pour le rayonnement solaire indirect (elle est donc différente entre temps clair et temps nuageux) .

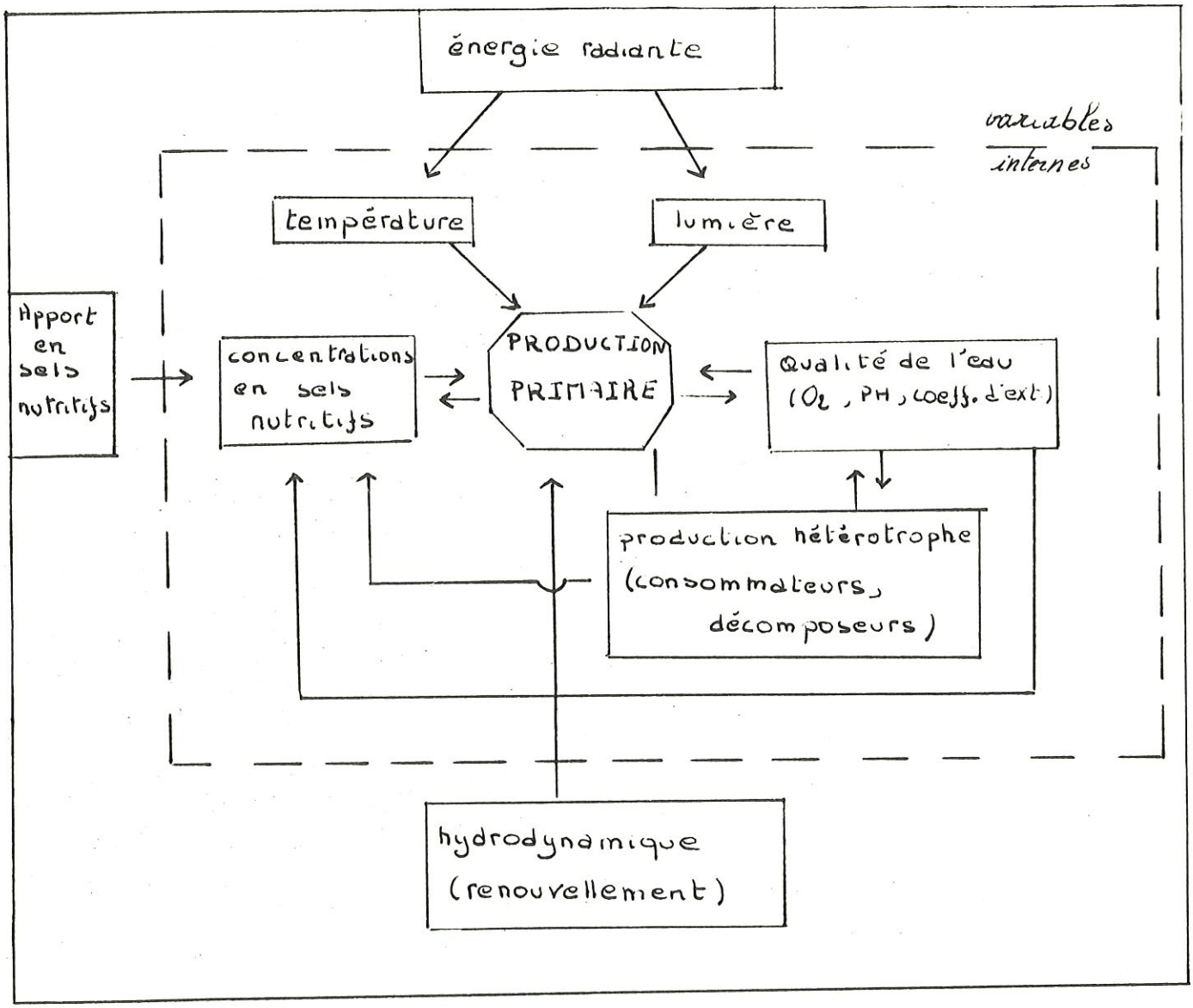


Figure 1

Schéma des facteurs de contrôle de la production primaire en milieu aquatique

La réflexion de la lumière dans l'eau augmente avec l'agitation de l'eau (vagues en surface) et elle est plus importante sur la glace . On considère que la lumière réfléchie par temps clair est de cinq à six pour cent du rayonnement incident (dix pour cent pendant l'hiver) . La variation qualitative en fonction de la longueur d'onde est faible (seul le rouge est réfléchi un peu plus que les autres longueurs d'ondes) .

La lumière pénétrant dans la colonne d'eau est *dispersée et absorbée* (dispersion + absorption = atténuation) . La **dispersion** correspond à une déflection des photons par les molécules d'eau, les substances dissoutes et les matières en suspension . C'est surtout la radiation bleue qui est dispersée. La radiation lumineuse est également **absorbée** par l'eau, les substances dissoutes et les matières en suspension :

le spectre d'absorption de l'eau pure :

l'absorption se fait principalement dans le rouge (absorption forte du rouge dans les zones de surface).

absorption par les substances dissoutes et les matières en suspension :

d'une façon générale, l'absorption est forte pour les courtes longueurs d'ondes et décroît vers les grands λ .

La transparence de l'eau dépend de l'intensité lumineuse absorbée dans la colonne d'eau . La fraction de lumière absorbée peut s'écrire (en pourcentage) de la façon suivante :

$$\frac{100\ (I_0 - I_z)}{I_0}$$

où I_0 : irradiance à la surface.

I_z : irradiance à la profondeur z.

L'absoption suit globalement la loi BEER-LAMBERT :

$$I_z = I_0\ e^{-\eta z}$$

z : profondeur en mètres.

η : coefficient d'extinstion en m^{-1}.

(équation 1)

Le coefficient d'extinction (η), peut donc se calculer par la relation :

$$\ln I_0 - \ln I_z = \eta\ z$$

$$\text{---> } \eta = \frac{\ln I_0 - \ln I_z}{z}$$

Le coefficient d'extinction résulte donc de tous les phénomènes d'atténuation de la lumière dans l'eau .

$$\eta = \eta_{eau} + \eta_{s.d.} + \eta_{s.s.}$$

où η_{eau} : atténuation par les molècules d'eau .

$\eta_{s.d.}$: atténuation par les substances dissoutes .

$\eta_{s.s.}$: atténuation par les matières en suspension.

Les autres facteurs de contrôle de la production primaire

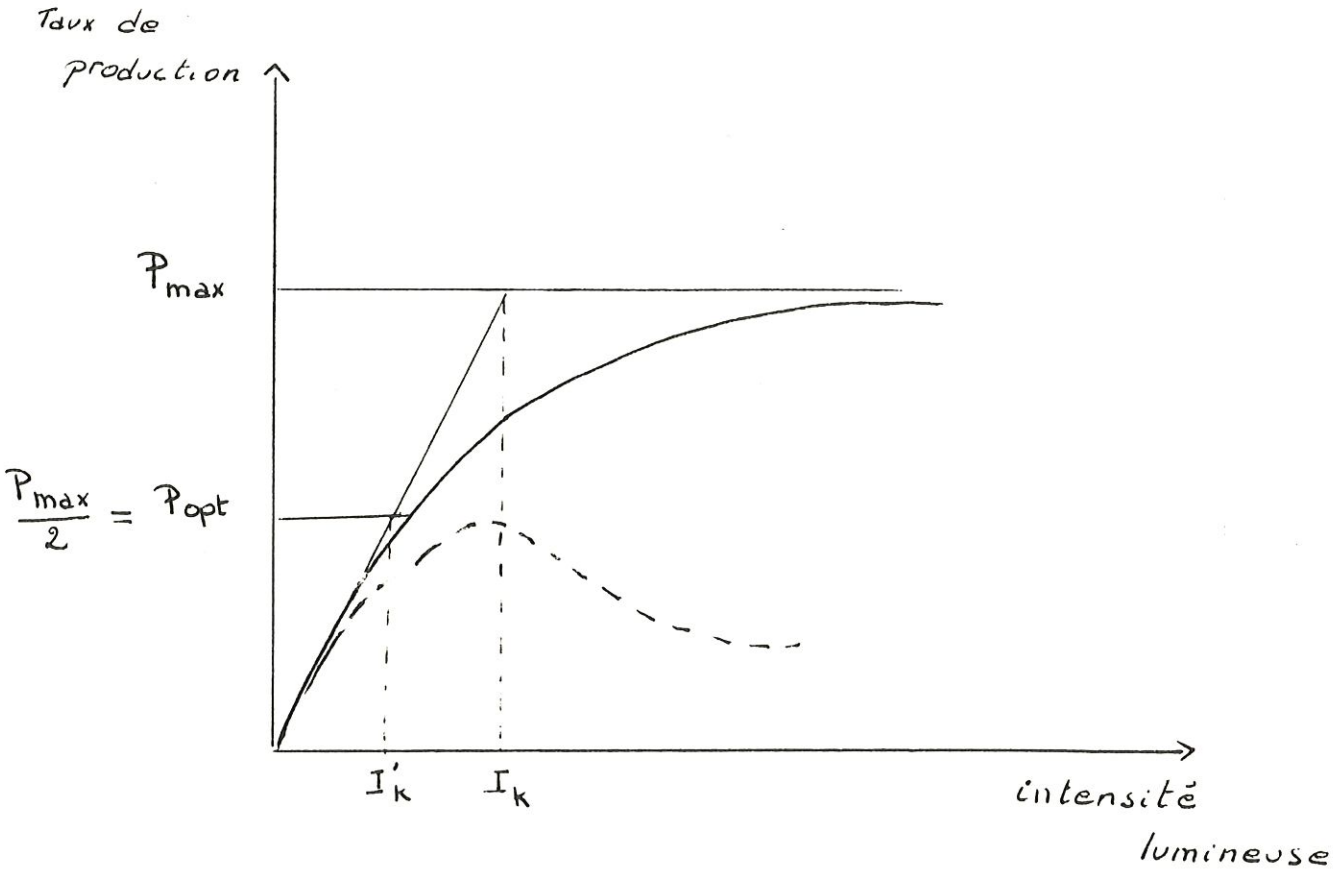
L'eau des rivières et des fleuves transporte une quantité variable de matières en suspension provenant de l'érosion des bassins versants . En période de débit faible, les particules en suspension peuvent sédimenter et constituer ainsi des dépôts sur le fond, partiellement remis en suspension lors des périodes de débits élevés . La présence de la matière en suspension accentue l'absorption du rayonnement solaire, déjà rapide dans l'eau .

La température de l'eau a pour source principale l'intensité lumineuse et influence, entre autre, la solubilisation de l'oxygène et le métabolisme des organismes (et donc, le taux de croissance algal) . Il y a évidemment une relation étroite entre l'activité photosynthétique et la température,dans la mesure où la photosynthèse comporte des réactions biochimiques (synthèse de molécules organiques simples à partir de CO2) .

Les eaux naturelles ont des concentrations en sels nutritifs dissous très variables . Les substances dissoutes les plus importantes sont les carbonates, les sulfates, puis les chlorures . L'azote et le phosphore sont deux éléments indispensables à la synthèse de la matière vivante et jouent de ce fait un rôle de facteur limitant dans la croissance des producteurs primaires s'ils sont présents en quantités insuffisantes.

Relation lumière-photosynthèse

Smith (1936) et Vollenweider (1965) ont formulé mathématiquement la relation photosynthèse-lumière, en tenant compte respectivement de la saturation et de la photo-inhibition pour des intensités élevées . Ces modèles décrivent une famille de courbes du type :



La courbe en trait plein se rapporte au modèle de Smith . Elle est croissante et atteint une intensité de saturation . L'autre courbe, due à Vollenweider est croissante jusqu'à une valeur maximale, et ensuite décroissante (photoinhibition).

Plus précisemment, dans le modèle de Smith, la production primaire locale et instantanée **P(z,t)** à la profondeur Z et à l'instant T est donné par la formule :

$$P(z,t) = P_{max} \frac{I(z,t) / I_k}{\left[1 + \left(I(z,t) / I_k\right)^2\right]^{1/2}}$$

(équation 2)

où P_{max} = production MAXIMALE à intensité saturante .

$I(z,t)$ = intensité lumineuse photosynthétique active reçue dans le milieu à la profondeur Z, à l'instant T .

I_K = Constante de saturation de la relation photosynthèse-lumière, traduisant l'efficience des phénomènes photochimiques; elle varie dans la mesure où le phytoplancton peut s'adapter à un "climat lumineux donné" .

La formule correspondante pour le modèle de Vollenweider :

$$P(z,t) = P_{opt} \frac{I(z,t) / I'_k}{\left[1 + (I / I'_k)^2\right]^{1/2}} \cdot F$$

$$F = \frac{1}{\left[1 + (A \cdot I/I'_k)^2\right]^{n/2}}$$

(équation 3)

Le terme F permet de décrire la photoinhibition .

où P_{opt} = Production optimale

$$I'_k = I_k \cdot \frac{P_{opt}}{P_{max}}$$

Le coefficient d'extinction intervient dans ces relations à deux niveaux . Il permet de calculer I(z,t) via la loi de BEER-LAMBERT (equ. 1) et donc de calculer P(z,t) suivant une relation du type de celles de SMITH ou de VOLLENWEIDER, à condition de connaître I_k . Ce dernier paramètre est généralement déterminé expérimentalement par des mesures d'activité photosynthétique à différentes profondeurs dans une colonne d'eau et par l'établissement d'une relation photosynthèse-lumière . Dans ce cas l'intensité lumineuse à chaque profondeur est déterminée par la loi de BEER-LAMBERT, connaissant la profondeur z, l'intensité incidente I_o et le coefficient d'extinction η . Ce coefficient intervient donc à deux niveaux dans le calcul de la production primaire intégrée; soit pour calculer I(z,t) soit pout estimer I_k . Il est donc très important de pouvoir déterminé ce coefficient d'extinction.

Avant de formaliser le problème, examinons les paramètres dont peut dépendre le coefficient d'extinction . Le système étant complexe, ceux-ci sont nombreux . Les plus souvent cités sont :

- La matière en suspension (notée **MES**) qui accentue l'absorption du rayonnement solaire .

- La chorophylle A (notée **CHLA**), présente dans tout phytoplancton, et étroitement liée à l'activité photosynthétique; elle constitue une estimation de la biomase du phytoplancton .

- Le débit , remettant en suspension des particules de grosseurs diverses,modifiant ainsi le taux d'absorption de l'énergie lumineuse .

- La température , influencant le taux de croissance algal .

- Le grassing , c'est-à-dire "broutage" des algues planctoniques principalement par le zooplancton (plancton animal constitué de crustacés ,de rotifères...) .

- La nature (et la diversité) des algues , favorisant, ou non, l'activité photosynthètique, et dont les complexes pigmentaires varient .

- Les saisons

- La pollution , apportant un surcroît de matières en suspension .

L'emploi d'un modèle mathématique se base sur la simplification et l'économie de moyens dans la description des phénomènes observés . Un compromis doit s'établir entre le gain de précision et l'accroissement de complexité du modèle, ce qui nous conduit à considérer le coefficient d'extinction uniquement comme fonction de la matière en suspension (MES),la chlorophylle_A (CHLA) et le débit, faisant, notamment, abstraction de la diversité algale .

Notre modèle a été établi à partir des mesures de la MES, la CHLA, DEBIT et du coefficient d'extinction effectuées dans la **Meuse** et la **Sambre** . Ces deux cours d'eau ont la particularité d'être semblables du point de vue de la production primaire . Les mesures utilisées dans le modèle ont été prises dans la Basse-Meuse durant les périodes 1983 [1] ,1984[1-12]et en 1986-87 [10], dans la Haute-Meuse en 1984 [12] et dans la Sambre en 1986-87 [10].

Une fois ce modèle établi, nous l'avons testé sur les données se rapportant au **Canal Albert** . Bien que celui-ci, de par son lit artificiel et la spécificité des régions qu'il dessert (charbonnages de Campine) diffère assez bien de la Meuse et de la Sambre, notamment par une variation des débits plus restreinte, les résultats obtenus se sont révélés meilleurs que ceux obtenus précédemment .

Le plan du mémoire est le suivant . Dans le chapitre deux, nous supposerons connues la fonction reliant le coefficient d'extinction aux variables MES, CHLA et DEBIT et nous indiquerons comment mettre le problème du calcul du coefficient d'extinction sous la forme d'un problème d'optimisation du type des moindres carrés non linéaire qui sera résolu au moyen du code MINPAC .

Le chapitre trois sera consacré à la recherche d'une expression analytique de la fonction ETA simulant le coefficient d'extinction à partir de la MES,CHLA et du DEBIT . Nous avons commencé par esssayer des fonctions du type logarithmiques basées sur l'intuition . Cette démarche très anarchique s'est révélée infructueuse car les lois obtenues, bien que relativement bonne du point de vue de l'optimisation, étaient trop complexes pour pouvoir en retirer des renseignements significatifs . Nous avons ensuite fait l'hypothèse que la fonction ETA (simulant le coefficient d'extinction) pouvait s'écrire comme une somme de trois fonctions ne dépendant que d'une seule variable . Afin d'avoir une bonne idée de la forme de chacune de ces trois fonctions, nous avons utilisé une approximation numérique donnée par les **B_splines** d'ordre trois . Sur base des courbes obtenues, nous avons proposé plusieurs formes analytiques pour la fonction ETA .

Dans le quatrième chapitre, le modèle décrit au chapitre précédent est testé sur les données du Canal Albert . Finalement, nous donnons comme conclusion quelques perspectives de recherche et dans un appendice, quelques rappels théoriques concernant la méthode de LEVENBERG-MARQUADT (utilisé pour résoudre le problème des moindres carrés), la théorie des SPLINES, ainsi que quelques constations que nous avons faites au sujet de la dépendance entre MES et DEBIT et entre CHLA et DEBIT. Vous pourrez également y trouver une approche plus TECHNIQUE concernant la manière dont les mesures ont été effectuées .

CHAPITRE II

Formulation mathématique du problème

Rappelons que notre objectif est de construire un modèle mathématique de la fonction , notée ETA, qui permet de calculer le coefficient d'extinction η à partir des mesures de la chorophylle_A (CHLA), de la matière en suspension (MES) et du débit (DEB). En effet ces trois variables ont été choisies, après analyse du système réel, comme étant les facteurs fondamentaux dans la détermination du coefficient d'extinction. Le modèle sera donc "idéal" car le coefficient d'extinction η dépend de bien d'autres éléments . Le coefficient d'extinction étant en fait la mesure du <u>taux</u> d'absorption de la lumière dans l'eau, on doit ajouter des hypothèses sur la fonction ETA : elle doit être positive (un taux est toujours $\geqslant 0$), de plus pour des valeurs voisines des variables CHLA, MES, DEB on doit obtenir des coefficients d'extinction proches : la fonction doit donc être continue et dérivable .

Pour pouvoir être traité efficacement sur ordinateur, le modèle de la fonction ETA ne doit contenir qu'un nombre *fini* de degrés de liberté . Mathématiquement cela se traduit par : la fontion ETA ne dépend que d'un nombre fini de paramètres ayant si possible une signification écologique . Ce modèle doit refléter aussi bien que possible la réalité, il sera donc construit à partir de mesures recueillies dans un milieu "typique", puis testé sur d'autres situations concrètes, plus ou moins similaires . Dans le cadre de ce mémoire, les données de base sont celles de la Meuse et de la Sambre, le test du modèle se fera, lui, sur les données du Canal Albert .

Les chapitres suivants donneront toute l'évolution qui s'est opérée dans l'élaboration du modèle, ainsi que les résultats obtenus. Nous allons maintenant préciser la façon dont le modèle va être testé, ainsi que le software choisi.

Comme nous l'avons dit précédemment, le modèle ne peut comporter qu'un nombre *fini de paramètres* (de degrés de liberté), ce nombre de paramètres est limité aussi par la quantité de mesures disponibles. Les fichiers de données utilisés comportant au minimum vingt et une mesures, nous avons fixé à cette valeur le nombre maximum de paramètres que l'on peut introduire dans l'optimisation.

Tester le modèle mathématique signifie comparer les valeurs du coefficient d'extinction mesurées à celles obtenues par évaluation de la fonction. Cependant, il ne faut pas confondre **vérification** et **validation.** La première option se base sur les données prises en compte pour l'élaboration du modèle, la seconde met en jeu des données "non encore exploitées". L'acceptation ou le rejet d'un modèle peut soit se baser sur une estimation qualitative (très usitée dans la pratique), soit sur une comparaison quantitative . Cette dernière possibilité semble plus objective que la première mais le choix des quantités comparées est, lui, toujours très subjectif. Cependant, un critère comparatif souvent utilisé et communément admis comme valable pour le type de problèmes qui nous occupe est celui des moindres carrés (somme des normes des erreurs au carré).

Dans le cadre de ce mémoire ,nous avons nous aussi employé une estimation sur base de la méthode des moindres carrés car non seulement c'est la plus usitée mais c'est aussi une méthode très bien adaptée au contexte écologique. Une fois l'option moindres carrés prise, il reste encore à déterminer le choix de la norme. Les différentes normes possibles sont les suivantes :

la norme infinie : $\text{maximum}_{i=1,\dots,n} \; | \text{eta}_i - \eta_i |$

la norme un : $\sum_{i=1,\dots,n} | \text{eta}_i - \eta_i |$

la norme deux : $\left(\sum_{i=1,\dots,n} (\text{eta}_i - \eta_i)^2 \right)^{1/2}$

où eta_i est la ième valeur calculée du coefficient d'extinction

η_i est la ième valeur mesurée du coefficient d'extinction

La principale différence entre ces trois normes est que la norme infinie, par sa définition, tient fortement compte des valeurs extrêmes tandis que la norme un, elle, n'en tient que relativement peu compte.Le choix d'une norme plutôt que d'une autre dépend donc de l'interprétation que l'on peut donner aux valeurs extrêmes: si ce sont toujours des erreurs de mesure alors le choix de la norme un s'impose . Dans notre cas, rien ne nous permet d'affirmer que les mesures supérieures à la moyenne sont des mesures erronées, nous avons donc opté pour une norme donnant une importance moyenne aux valeurs légèrement discordantes . La norme choisie est la norme deux définie plus haut .

Notre problème se formule donc de la manière suivante:

$$\text{MINIMISER}_{\ldots, P_i} \left(\| \text{ETA} - \eta \|_2 \right)$$

$$i \in 1, \ldots, n$$

où

P_i : paramètre de la minimisation;i1 1,...,n;n<=21

$\| \text{ETA} - \eta \|_2$: norme deux de la différence (voir définition page précédente)

ETA=ETA(Chla(k),Mes(k),Debit(k),P_1,.....,P_n)

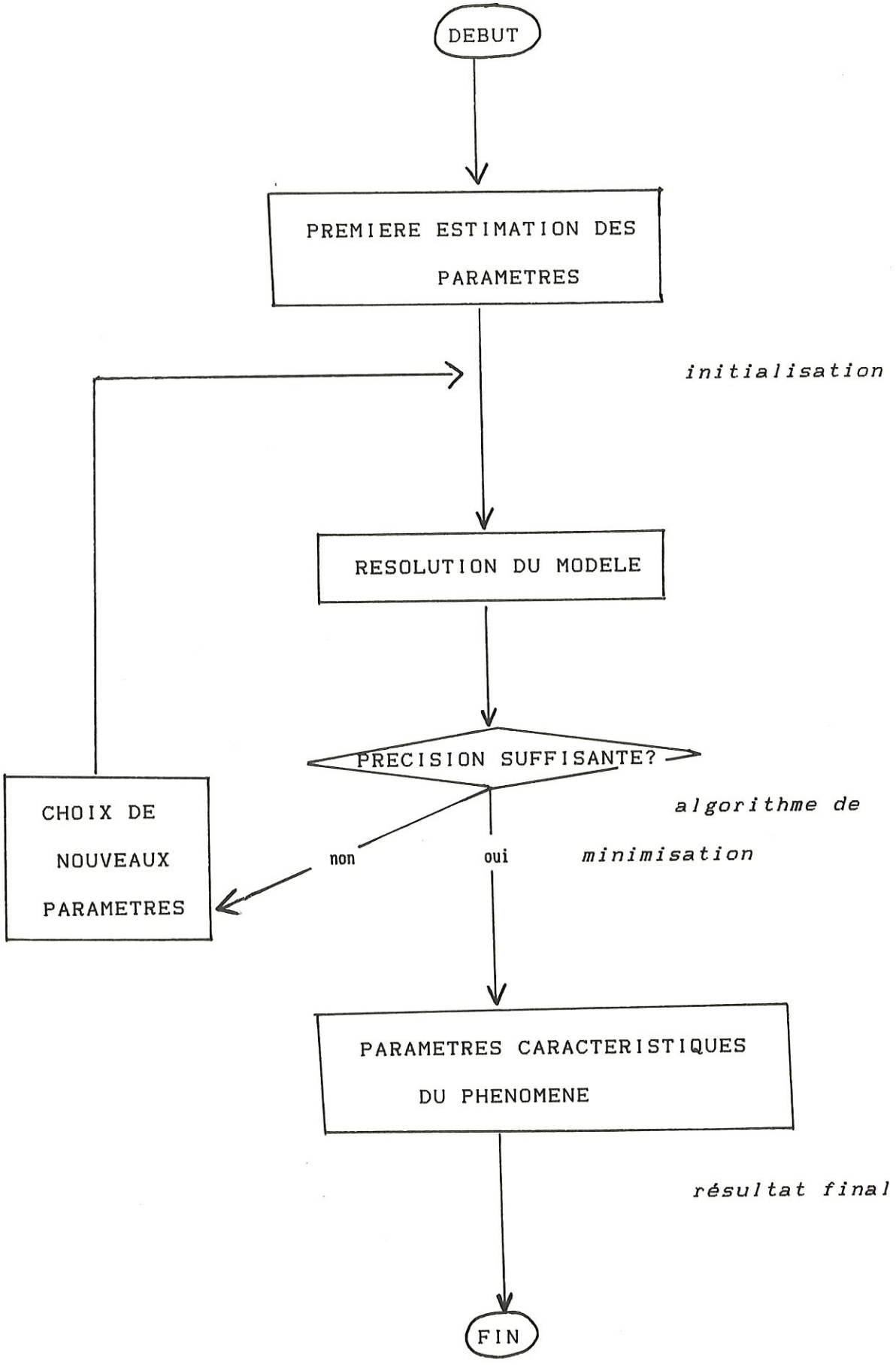
kième calcul du coefficient d'extinction

$k \in 1, \ldots,$ nombre de données

$\eta = \eta(k)$ kième mesure du coefficient d'extinction

$k \in 1, \ldots,$ nombre de données

Le problème revient donc à un problème <u>d'identification de paramètres</u> , qui s'insère dans la structure de base d'un modèle adaptatif,c'est-à-dire que l'optimisation est effectuée "automatiquement" par un algorithme implémenté sur ordinateur et décrit par le schéma de la figure 1 .


DEBUT
PREMIERE ESTIMATION DES PARAMETRES
initialisation
RESOLUTION DU MODELE
PRECISION SUFFISANTE?
algorithme de minimisation
non
oui
CHOIX DE NOUVEAUX PARAMETRES
PARAMETRES CARACTERISTIQUES DU PHENOMENE
résultat final
FIN

Il nous faut donc maintenant choisir un algorithme adapté au mieux à notre problème d'estimation des paramètres . Le choix de ce software dépend non seulement du problème posé, du critère de comparaison choisi, mais il doit aussi tenir compte des éventuels problèmes d'application pouvant apparaître en raison des informations requises . Nous devons donc nous référer aux possibilités de stockage, aux coûts d'évaluation de la fonction et de ses dérivées première et seconde .

Notre objectif étant de trouver une forme simple et comportant au plus vingt et un paramètres pour la fonction ETA, nous pouvons éliminer les problèmes de stockage et les coûts d'évaluation de la fonction . Nous avons choisi un software permettant l'approximation du jacobien (matrice des dérivées partielles du premier ordre) par différences finies, les avantages d'un tel choix sont :

. une diminution du risque d'erreur dans les ouvertures et fermetures de fichiers .

. la facilité d'adaptation du modèle, en effet lorqu'on veut changer la forme de la fonction ETA, il suffit de modifier une seule sous-routine .

De plus, l'erreur qui découle d'une telle approximation n'affecte pas la première décimale (seule décimale demandée comme précision) .

La régularité et la différentiabilité de la fonction objective ainsi que le nombre restreint de paramètres nous ont permis de choisir une méthode d'optimisation *QUASI-NEWTON*, plus précisément la méthode de LEVENBERG-MARQUARDT (un rappel de cette méthode est proposé en appendice) .

La sous-routine employée est l'algorithme LMDIF de la librairie MINPAC, les avantages de ce software sont :

. Impression du jacobien

. Impressions intermédiaires

. Calcul du jacobien par différences finies

. Scaling automatique (bien que la possibilité d'un scaling spécifique soit toujours offerte) .
Dans ce contexte, le scaling est une transformation des variables afin de les ramener à un même ordre de grandeur dans la région concernée, ce qui permet d'améliorer le comportement de la méthode d'optimisation.

. L'existence de plusieurs critères d'arrêt : ce qui permet de contrôler l'exécution du programme et de diminuer le risque de fausse convergence.

. Impression du code d'arrêt : permet de déterminer quel critère a été mis en défaut, ce qui donne une idée de la validité de la solution.

. Impression de la norme du résidu : donne à l'utilisateur une "validité quantitative" de la solution. Une norme du résidu faible dans un problème des moindres carrés indique que le modèle peut être accepté,

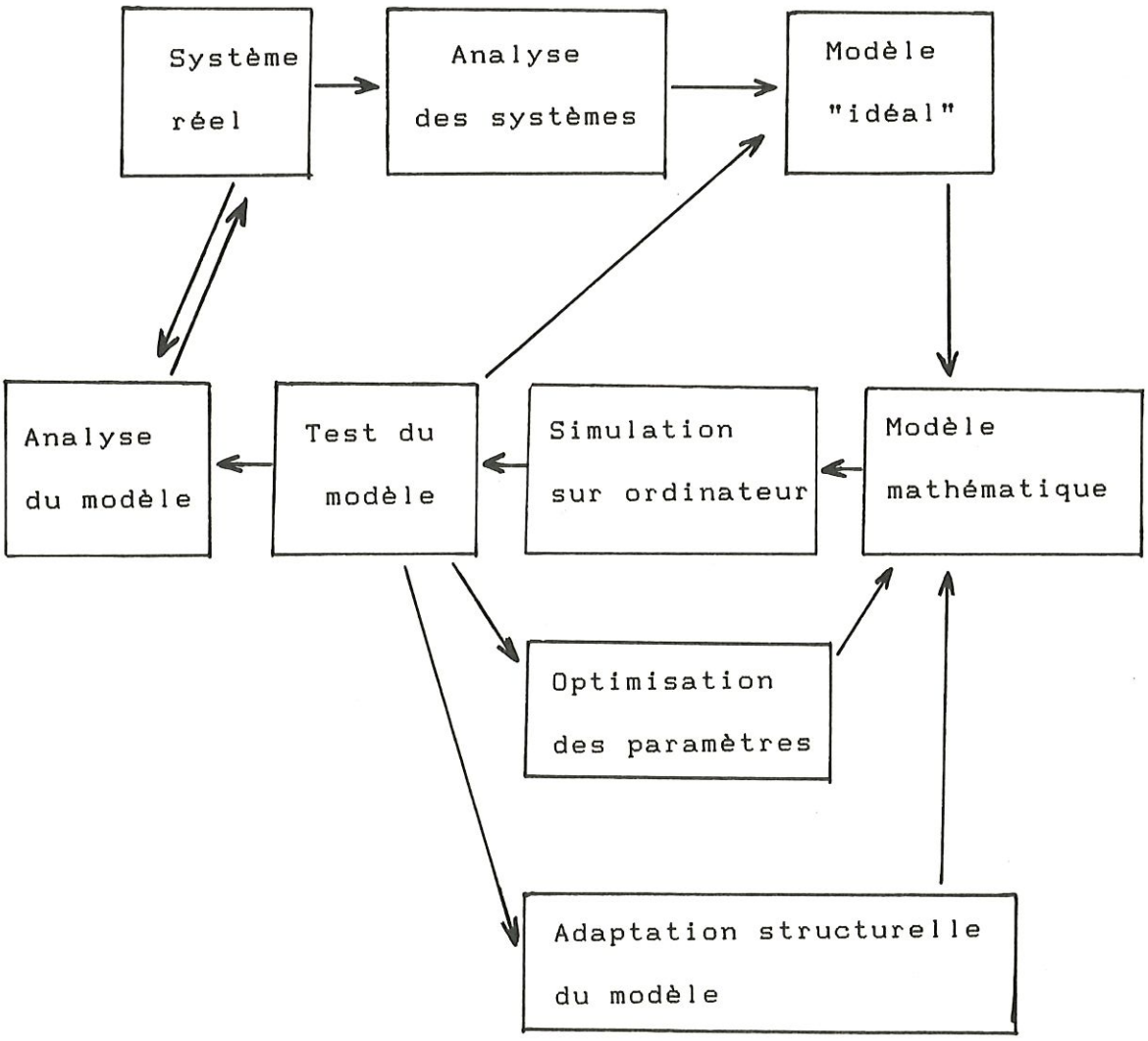
néanmoins une norme importante n'est pas une indication suffisante pour le rejet de la fonction car cette grande valeur de résidu peut être liée à un nombre élevé de données, un manque de fiabilité dans celles-ci ou tout simplement à une impossibilité de trouver une meilleure approximation.

CHAPITRE III

Elaboration du modèle

Dans le chapitre deux, nous avons donné la formulation mathématique du problème posé, c'est-à-dire l'élaboration d'un modèle de la fonction ETA estimant le mieux possible le coefficient d'extinction (taux d'absorption de la lumière dans l'eau) . Nous allons, dans ce chapitre, retracer toute l'évolution de la recherche de cette fonction ETA .

La démarche que nous avons adoptée est celle généralement utilisée dans un problème de ce type et qui est décrite dans le schéma suivant :

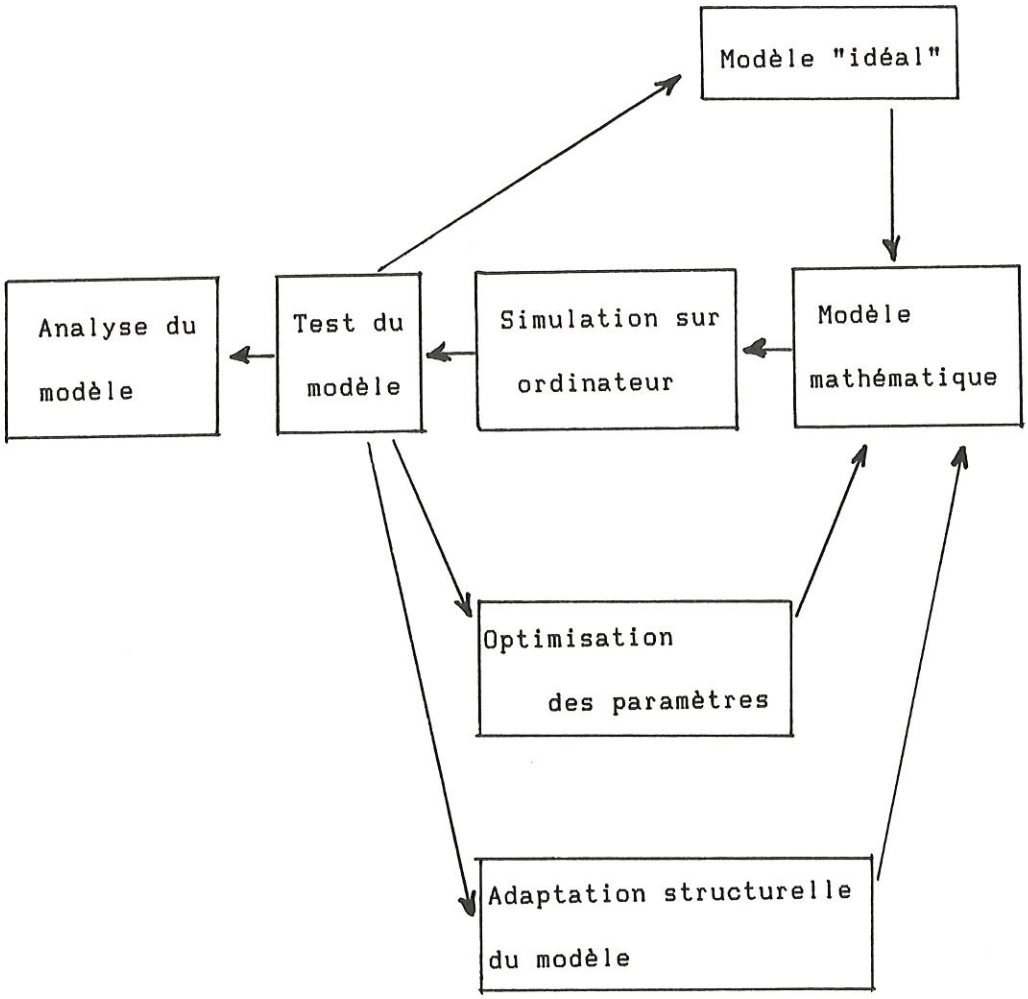


Dans l'introduction, nous avons décrit de façon sommaire le système réel, à savoir quelques facteurs physico-chimiques qui influencent le coefficient d'extinction, ainsi que le cadre général dans lequel celui-ci prend place . Ensuite, nous avons analysé quelles étaient les propriétés les plus substantielles du système réel . Nous nous sommes référés à la littérature pour sélectionner les facteurs les plus caractéristiques : CHLA, MES, DEBIT . Si on se réfère au schéma précédent, nous avons donc explicité, dans ce premier chapitre, le système réel et l'analyse des systèmes .

Au chapitre précédent, nous avons formalisé le problème en un modèle "idéal" . Dans celui-ci, nous choisirons une forme pour la fonction ETA, et nous simulerons sur ordinateur cette loi, via une optimisation des paramètres .

Nous nous baserons sur des critères de type quantitatifs pour tester le modèle, c'est-à-dire décider s'il est acceptable ou non . Dans ce dernier cas, une adaptation struturelle du modèle est nécessaire et une nouvelle forme de fonction est testée . Soulignons que le modèle "idéal" peut être modifié pour améliorer le précédent, ou pour apporter une nouvelle simplification de la complexité, sans perdre trop de précision .

Nous allons donc maintenant décrire toute l'évolution de l'élaboration du modèle mathématique final, c'est-à-dire que nous allons expliciter la partie du schéma suivante :



Ce chapitre comporte trois grandes parties, la première concerne les premiers essais basés sur l'intuition, la seconde partie développe l'emploi d'une méthode plus rigoureuse et les résultats obtenus, la dernière, enfin, décrit les lois analytiques que nous avons finalement utilisées .

1. APPROCHE INTUITIVE

Les premiers essais que nous avons faits se sont basés sur une approche purement *intuitive* . Nous avons choisi des lois en fonction de graphiques de données du coefficient d'extinction mesuré par rapport à la matière en suspension d'une part, et par rapport à la chlorophylle-A d'autre part . La répartition des données dans le plan nous suggérait l'emploi de fonctions logarithmiques . Quelques essais successifs nous ont amenés à considérer des fonctions relativement complexes, où la matière en suspension, la chlorophylle-A et le débit interagissaient les uns avec les autres . Nous nous contenterons de citer les lois proposées et d'analyser brièvement les résultats obtenus par cette approche, peu importante étant donnée la démarche suivie ultérieurement .

Choix 1 :

$$A * LN (B + MES) * \frac{MES}{CHLA * DEB} + C * LN (D + CHLA) + E$$

où

A, B, C, D, E sont des paramètres à optimiser

B et D sont POSITIFS

Choix 2 :

$$A * LN (B + MES) + \frac{MES}{CHLA * DEB} * C * LN (D + CHLA) + E$$

où

A, B, C, D, E sont des paramètres à optimiser

B et D sont POSITIFS

Choix 3 :

$$A * \frac{MES}{CHLA * DEB} + B * LN (C + CHLA) + D$$

où

A, B, C, D sont des paramètres à optimiser

C est POSITIF

Choix 4 :

$$A * LN (B + CHLA) + C$$

où

A, B, C sont des paramètres à optimiser

B est POSITIF

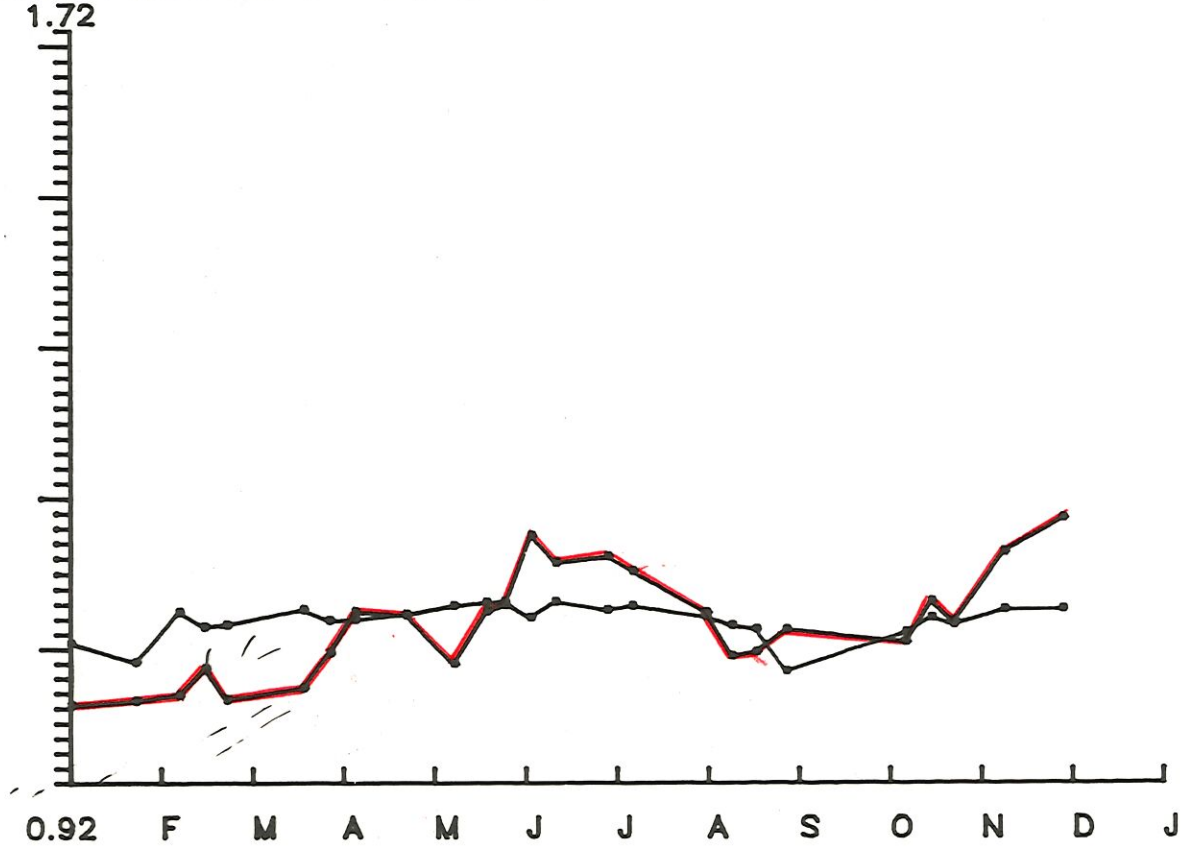
Afin de visualiser la qualité de ces lois, nous avons tracé des graphes de " fittings " représentant les coefficients d'extinction mesurés, ainsi que ceux reproduits par le modèle choisi ; les figures 2 et 3 représentent les choix 2 et 4 pour les données prises dans la Meuse en 1983 .

CALCUL DU COEFFICIENT D'EXTINCTION

NOM DU GRAPHE= eta832.cmc
LES ETA CALCULES SONT EN BLEU
LES ETA MESURES SONT EN ROUGE

0.9360991D+01 0.5099189D+02 −0.3636918D−02 0.2672123D+03 −0.7188978D+01

LE RESIDU FINAL= 0.1456656D+02



FICHIER DE DONNEES= meuse annee 1983

fig. 2

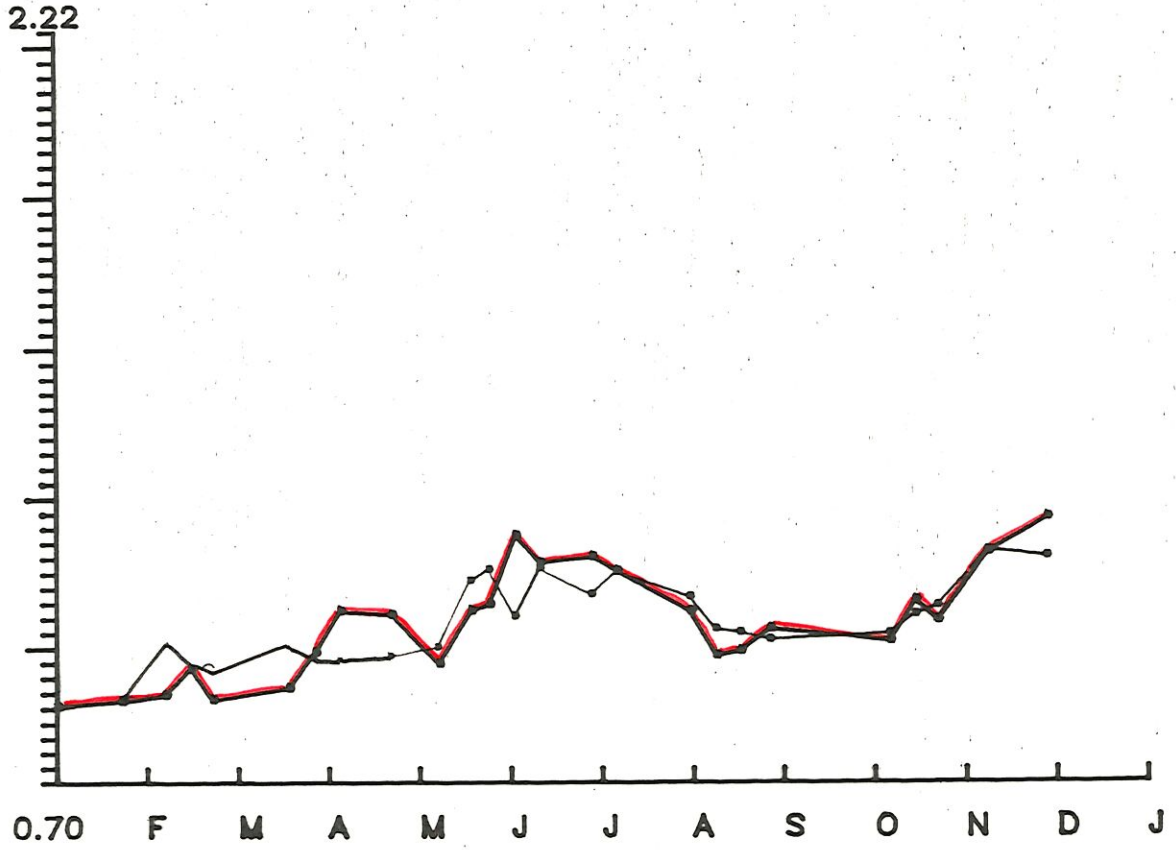
F(X)= a*ln(b+MES)+c*(MES/CHLA*DEB)*ln(d+CHLA) b,d>0

CALCUL DU COEFFICIENT D'EXTINCTION

NOM DU GRAPHE= eta834.cmc
LES ETA CALCULES SONT EN BLEU
LES ETA MESURES SONT EN ROUGE

FMAMJJASONDJ 0.4312215D+00 0.8409326D+00 0.1513039D+00

LE RESIDU FINAL= 0.6908141D+01



FICHIER DE DONNEES= meuse annee 1983

F(X)= a*ln(b*CHLA)+c b>0

fig. 3

Le graphique nous montre l'évolution du coefficient d'extinction en fonction du temps . L'axe des abscisses représente les différents mois de l'année, désignés par leur première lettre . L'axe des ordonnées représente le coefficient d'extinction . Nous ne disposons que de données discrètes, c'est-à-dire des points que nous avons reliés les uns aux autres afin de mieux voir si le modèle reproduit bien la réalité .

Les chiffres se trouvant au dessus du graphe sont les valeurs attribuées aux différents paramètres après l'optimisation (s'il y a plusieurs lignes de paramètres, les lire de gauche à droite, ligne par ligne) . Les deux informations se trouvant en dessous du graphique nous permettent de savoir quel a été le fichier de données employé et quelle a été la fonction choisie .

Comme nous l'avons déjà exprimé au chapitre précédent, le critère quantitatif de la somme des différences élevées au carré, appelé **résidu**, est souvent utilisé, et semble assez fiable . Nous vous proposons un tableau de résultats pour les choix 2 et 4, ensuite nous commenterons quelque peu les erreurs .

Tableau de résultats pour les choix 2 et 4 :

Fichier de données	Résidu Choix 2	Résidu Moyen Choix 2	Résidu Choix 4	Résidu Moyen Choix 4	Nombre de données
Haute Meuse 1983	14.57	0.463	6.65	0.313	68
Haute Meuse 1986	2.80	0.357	11.54	0.724	22
Sambre 1986	7.46	0.596	19.10	0.954	21
Haute Meuse 1984	57.57	0.704	123.35	1.031	116
Basse Meuse 1984	49.92	0.766	96.97	1.068	85

Remarques :

. Ce que nous appelons **erreur moyenne** est l'erreur qui sera commise en moyenne sur chaque donnée, c'est-à-dire

$$\sqrt{\text{résidu} \,/\, \text{nombre de données}}$$

. Les données de 1984 ont été obtenues ultérieurement pour ces modèles, et peuvent donc servir pour la validation .

Pour juger de la validité d'un modèle, il faut encore spécifier l'ordre de précision souhaitée sur chaque donnée . Vu l'utilisation ultérieure du coefficient d'extinction (variant généralement de 2 à 8) dans une exponentielle négative selon une loi du type LAMBERT-BEER (cfr équation 1), on acceptera une précision de l'ordre de 0.3 à 0.5 sur chaque donnée . Cette faible précision se justifie également par le manque de fiabilité des mesures de données, dont l'incertitude peut être de l'ordre de 40 % sur les moins bons fichiers de données . Ces imprécisions proviennent des difficultés techniques rencontrées sur le terrain : d'une part, les mesures du coefficient d'extinction, de la matière en suspension et de la chlorophylle-A ne peuvent se faire simultanément ; d'autre part, les échantillons de la matière en suspension et de la chlorophylle-A ne représentent pas exactement l'ensemble du milieu aquatique, bien que sur les cours d'eau étudiés on puisse considérer que la répartition du phytoplancton soit homogène . L'hétérogénéité vaut surtout pour les MES, sans doute à cause de la granulomètrie variable .

Nous pouvons donc constater que pour les lois "intuitives" (choix 2 et 4) les résultats sont relativement satisfaisants pour les données utilisées pour l'élaboration de ces premiers modèles (données sur la Meuse et la Sambre, années 1983, 1986), mais la validation sur les mesures effectuées en 1984 dans la Meuse est loin d'être concluante .

Les valeurs des paramètres d'optimisation sont des données très importantes dans l'analyse des résultats; en effet, dans le chapitre deux, lors de la formulation mathématique du problème idéal, nous avions spécifié que la fonction ETA, estimant le taux d'absorption de la lumière dans l'eau, devait être **positif** . Or ayant choisi un algorithme de minimisation des moindres carrés sans contrainte , on n'est pas assuré de la positivité de la fonction ETA . C'est pourquoi, nous donnons, ci-après, un tableau comportant les paramètres finaux d'optimisation; par exemple pour le choix 1. Pour juger de la positivité du modèle, il suffit de réintégrer dans la fontion déterminée par le choix la valeur des paramètres A, B, C, D, E donnée dans ce tableau .

Paramètres obtenus pour le choix 1 :

Fichiers de données	A	B	C	D	E
Haute Meuse 1983	0.0167	20.97	0.515	1.36	-0.255
Haute Meuse 1986	0.0174	140.89	0.2704	0.72	148
Sambre 1986	0.0074	169.52	59.76	3475.3	-0.4E-4
Haute Meuse 1984	-0.0071	3423.42	-0.203	37.136	3.67
Basse Meuse 1984	0.0046	296.18	-0.308	123.95	3.847

Nous constatons, tout de suite, que certains paramètres sont non acceptables car, pour de petites valeurs de la matière en suspension et de la chlorophylle_A, la fonction déterminée par le choix 1 donne un coefficient d'extinction négatif, ce qui est incompatible avec la définition de celui-ci .

Par ailleurs, on peut se demander quel est le sens de certains paramètres inclus dans l'argument du terme logarithmique (tels que B et D) lorsque ceux-ci atteignent de grandes valeurs .

Par exemple : Ln (11+3475.30)=8.15

Ln (100+3475.30)=8.18

ce qui signifie que, quelque soit la valeur de la chlorophylle-A, ce terme reste pratiquement constant .

Ces considérations nous amènent à rejeter, catégoriquement, le modèle de la fonction ETA déterminé par le choix 1 . De plus, même en faisant abstraction de cette éventuelle "non positivité" de la fonction, il apparaît que la méthode "intuitive" est non fiable tant le nombre de combinaisons entre matière en suspension, chlorophylle_A, débit est important, il n'est donc pas certain que l'on trouve une combinaison idéale .

Nous devons donc abandonner les premiers essais, pour nous tourner vers une méthode plus rigoureuse qui donnera des lois plus faciles à analyser et à généraliser . Nous avons opté pour une approche numérique de la fonction ETA, à savoir une approximation par des B-splines . C'est cette approche que nous développons dans le point suivant de ce chapitre.

2. APPROCHE NUMERIQUE

Au paragraphe précédent, nous avons essayé plusieurs fonctions, choisies d'une façon intuitive, mais nous nous sommes vite rendus compte de la nécessité d'adopter une attitude beaucoup plus rigoureuse . La méthode que nous avons employée consiste à trouver d'abord une solution numérique qui permettra par la suite de déterminer une forme analytique pour la fonction ETA, sur base des graphiques de cette solution numérique .

Pour approximer numériquement le modèle de la fonction ETA, nous avons utilisé une méthode polynomiale appelée *approximation par des B-splines* . Les B-splines , qui se différencient des splines naturelles principalement par leur stabilité numérique, et donc par leur intérêt pratique, permettent d'interpoler, par des polynômes, n points distincts (X_i , Y_i), i allant de 1 jusqu'à N, tel que :

X_i est un noeud (une abscisse dans l'intervalle (A, B))

Y_i est l'ordonnée (valeur du coefficient d'extinction mesuré en ces noeuds) .

D'une mamière imagée, nous pourrions dire que l'on impose à une latte mince de passer, non pas exactement mais près des points (X_i , Y_i) . De la sorte, on obtient les courbes les plus lisses, passant très près de ces points . Pour plus de précisions au sujet des B-splines, se référer à l'appendice .

Dans le cadre de ce mémoire, nous avons opté pour des polynômes CUBIQUES, la précision engendrée étant suffisante par rapport à la complexité que l'on introduirait (nombre de paramètres élevés) en utilisant des polynômes d'ordre supérieur. Nous nous sommes, également, limités à un seul intervalle (c'est-à-dire deux noeuds), il est évident qu'en définissant autant de noeuds qu'il y a de données on obtiendrait un résidu (norme des différences aux carrés) nul, mais l'analyse des graphiques serait très ardue et l'interpolation se ferait même aux points discordants (données erronées) . Nous ne pourrions tirer aucune conclusion des graphiques obtenus .

Pour des raisons de facilité d'implémentation et de représentation graphique, nous avons commencé par construire des B-splines d'une **seule** variable . Ce qui a pour conséquence principale de *séparer les contributions* de la matière en suspension, de la chlorophylle_A, et du débit . Chacune de ces variables a donc une contribution spécifique et explicite dans le calcul du coefficient d'extinction .

Par convention,nous noterons :

ETA_MES : La contribution de la MES dans le calcul du coefficient d'extinction

ETA_CHLA: La contribution de la CHLA dans le calcul du coefficient d'extinction

ETA_DEB : La contribution du débit dans le calcul du coefficient d'extinction

Nous ne considérons donc plus une fonction du type ETA(CHLA, MES, DEB) mais une combinaison linéaire de trois modèles ETA_MES, ETA_CHLA, ETA_DEB . Ce procédé a l'avantage d'assurer, à l'inverse de l'élaboration du modèle de la fonction ETA par une approche intuitive, un nombre ***fini de combinaisons*** possibles, à savoir :

(1) eta_chla

(2) eta_mes

(3) eta_deb

(4) eta_chla + eta_mes

(5) eta_chla + eta_deb

(6) eta_mes + eta_deb

(7) eta_chla + eta_mes + eta_deb

(8) eta_chla * eta_mes

(9) eta_chla * eta_deb

(10) eta_mes * eta_deb

(11) eta_chla * eta_mes * eta_deb

(12) eta_chla + eta_mes * eta_deb

(13) eta_mes + eta_chla * eta_deb

(14) eta_deb + eta_mes * eta_chla

Nous avons donc quatorze combinaisons de base, toute autre combinaison (par exemple la division de deux contributions) peut s'obtenir à partir de celles citées ci-dessus . Par ailleurs, l'analyse du système aquatique (par les biologistes) indique qu'il est impossible de retirer du calcul du coefficient d'extinction la contribution de la chlorophylle_A .

En effet, durant les périodes de faible débit, la matière en suspension est peu présente, c'est donc la chlorophylle_A qui est prédominante dans la détermination du coefficient d'extinction . Ceci nous permet de supprimer les possibilités 2, 3, 6, 10 .

Nous avons opté, tout d'abord, pour la somme des trois contributions, cette combinaison (numéro 7) étant l'une des plus simples au niveau de l'interprétation des résultats . En effet, définir le modèle de la fonction ETA comme étant la somme des fonctions ETA_MES, ETA_CHLA et ETA_DEB, suppose l'*indépendance* de ces différentes contributions . Il est évident que cette hypothèse est une forte simplification du modèle, les trois variables matière en suspension, chlorophylle_A, débit étant, dans la réalité, éminement liées .

Pour juger de la qualité de cette simplification, nous avons essayé le produit des trois contributions (combinaison numéro 11) et comparé les résidus obtenus par les deux méthodes. La combinaison du produit est un modèle qui ne suppose pas, à l'inverse de la somme, l'indépendance des contributions; si les résidus obtenus par cette méthode sont nettement inférieurs à ceux dus à la somme des trois fonctions, nous pouvons donc en déduire que l'hypothèse d'indépendance est non acceptable .

Voici un tableau de comparaison des résidus obtenus en considérant d'une part la somme des contributions, notée choix 5 et d'autre part leur produit, notée choix 6 . Comme pour les tableaux précédents le résidu moyen représente l'erreur moyenne sur chaque donnée .

Fichier de données	Résidu Choix 5	Résidu Moyen Choix 5	Résidu Choix 6	Résidu Moyen Choix 6	Nombre de données
Haute Meuse 1983	4.35	0.253	4.50	0.253	68
Haute Meuse 1986	1.81	0.287	1.60	0.269	22
Sambre 1986	1.92	0.302	1.83	0.293	21
Haute Meuse 1984	35.60	0.554	35.41	0.553	116
Basse Meuse 1984	39.27	0.679	37.80	0.667	85

On remarque que l'amélioration apportée par la suppression de l'hypothèse d'indépendance des contributions n'est pas très prononcée, compte tenu de la complexité qu'elle introduit dans l'interprétation des résultats . Nous pouvons donc, sans trop de scrupules, accepter l'hypothèse d'indépendance; ce qui réduit le problème à trouver trois fonctions analytiques donnant le coefficient d'extinction en fonction de la matière en suspension, de la chlorophylle_A et du débit .

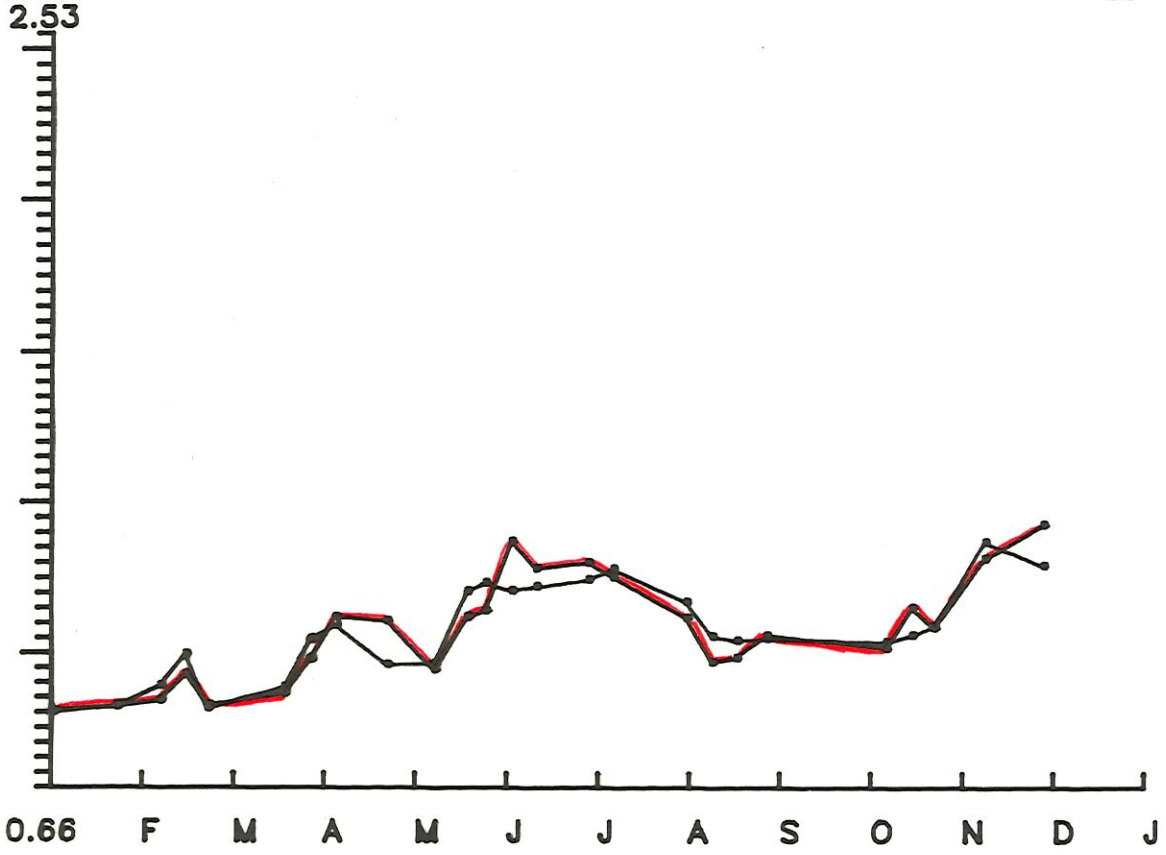
Pour mieux visualiser les résultats obtenus par la loi 5 ETA(CHLA, MES, DEB)=ETA_CHLA+ETA_MES+ETA_DEB, et par la loi 6 ETA(CHLA, MES, DEB)=ETA_CHLA*ETA_MES*ETA_DEB, nous donnons ci-après (figure 4 -->figure 9) les graphes de comparaison coefficients mesurés, coefficients calculés.

CALCUL DU COEFFICIENT D'EXTINCTION

NOM DU GRAPHE= ETA836.CMC
LES ETA CALCULES SONT EN BLEU
LES ETA MESURES SONT EN ROUGE

0.1000000D+01	0.1139034D+01	0.3171747D+01	0.7970367D+00	0.1000000D+01
0.2719144D+01	−0.4403239D+01	0.7771169D+01	−0.1394043D+01	−0.5248615D+0(
−0.5248615D+00	−0.9218992D+00	0.9429363D−01		

LE RESIDU FINAL= 0.4351129D+01



FICHIER DE DONNEES= meuse annee 1983

F(X)= ETA(CHLA,MES,DEB)=ETA CHLA+ETA MES+ETA DEB

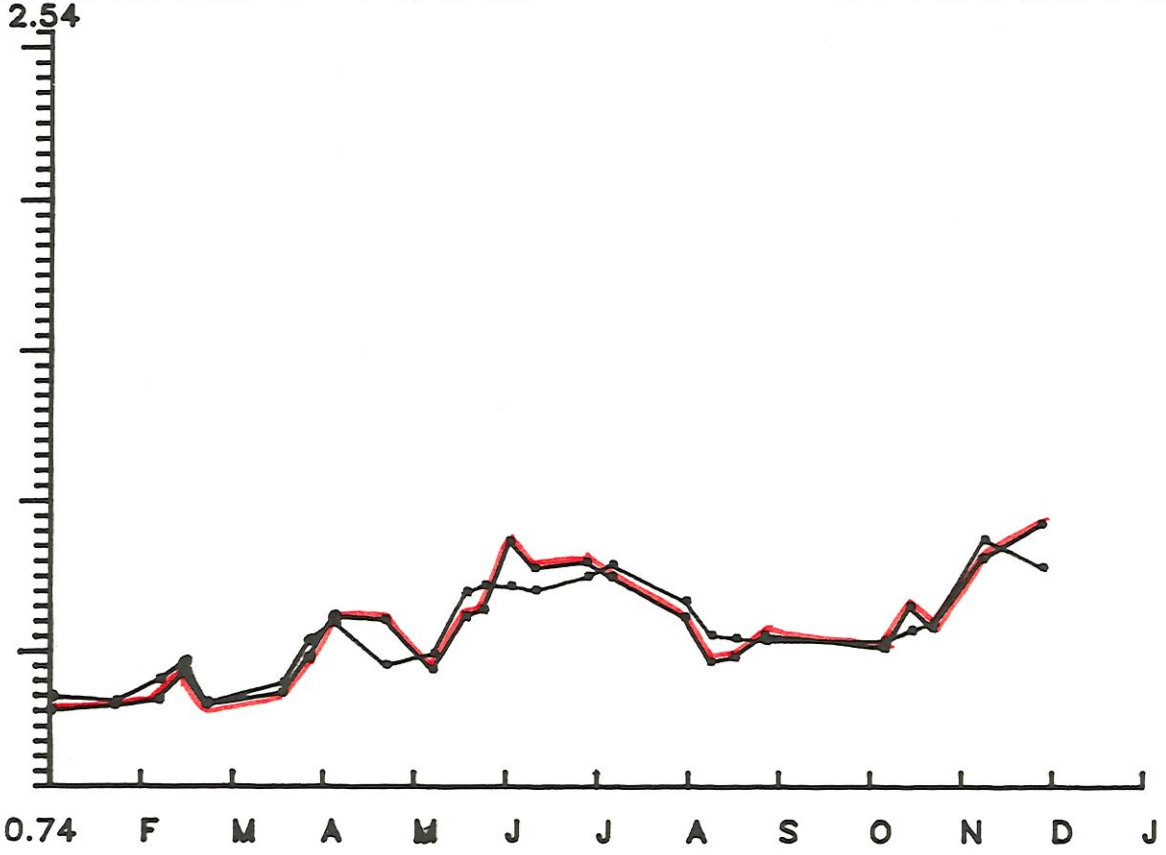
fig. 4

CALCUL DU COEFFICIENT D'EXTINCTION

NOM DU GRAPHE= ETA837.CMC
LES ETA CALCULES SONT EN BLEU
LES ETA MESURES SONT EN ROUGE

0.1034990D+01	0.6199785D+00	0.2828239D+01	0.6417679D+00	0.9835215D+00
0.2166302D+01	−0.2823732D+01	0.6007951D+01	0.8752631D+00	0.1712984D+01
0.1712984D+01	0.1221327D+01	0.2182166D+01		

LE RESIDU FINAL= 0.4508876D+01



FICHIER DE DONNEES= meuse annee 1983

F(X)= ETA(CHLA,MES,DEB)=ETA CHLA*ETA MES*ETA DEB

fig.5

CALCUL DU COEFFICIENT D'EXTINCTION

NOM DU GRAPHE= ETA846.CMC
LES ETA CALCULES SONT EN BLEU
LES ETA MESURES SONT EN ROUGE

0.1000000D+01	0.3303115D+01	−0.6570611D+00	0.6717403D+01	0.1000000D+01
−0.2196907D+01	0.1085348D+02	−0.1229656D+01	−0.1638390D+00	0.3728492D+00
0.3728492D+00	0.2586312D−01	0.1405974D+01		

LE RESIDU FINAL= 0.3559835D+02

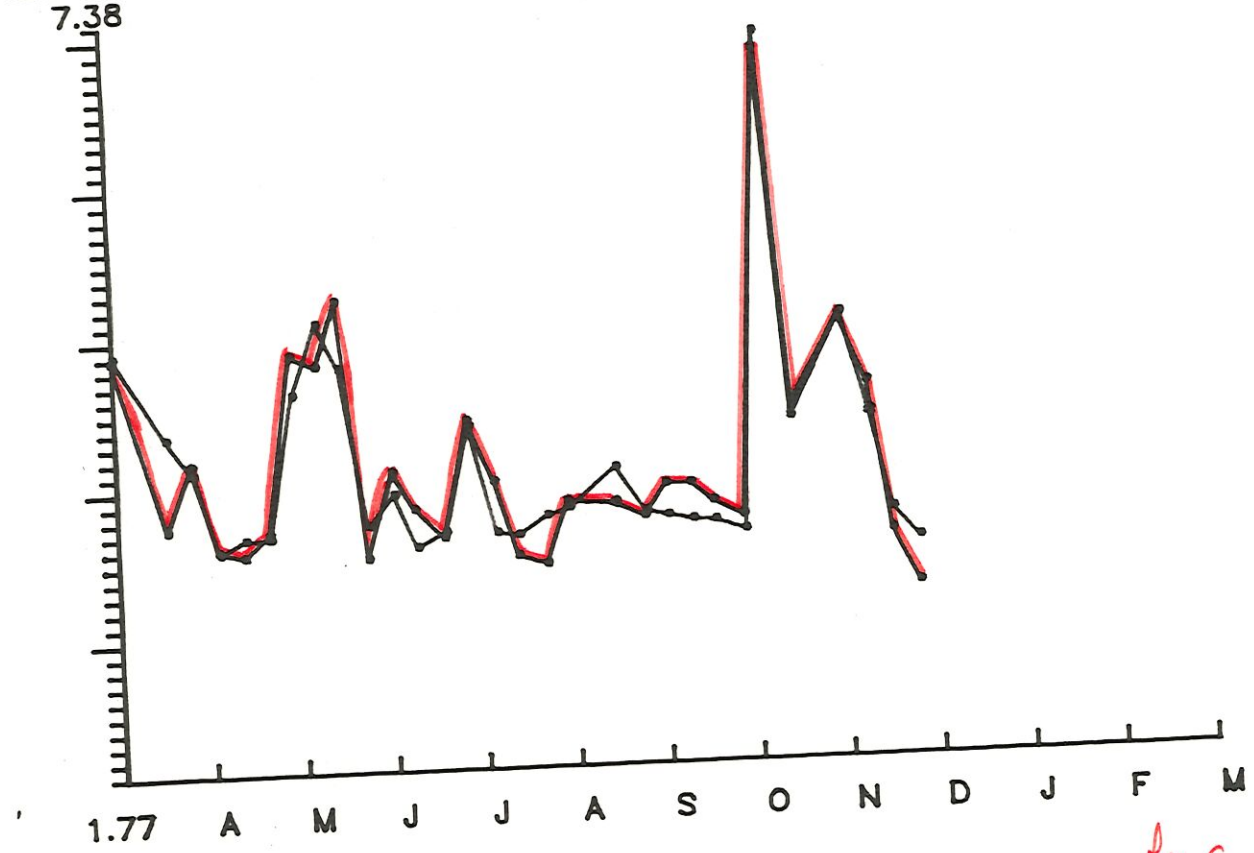


fig.6

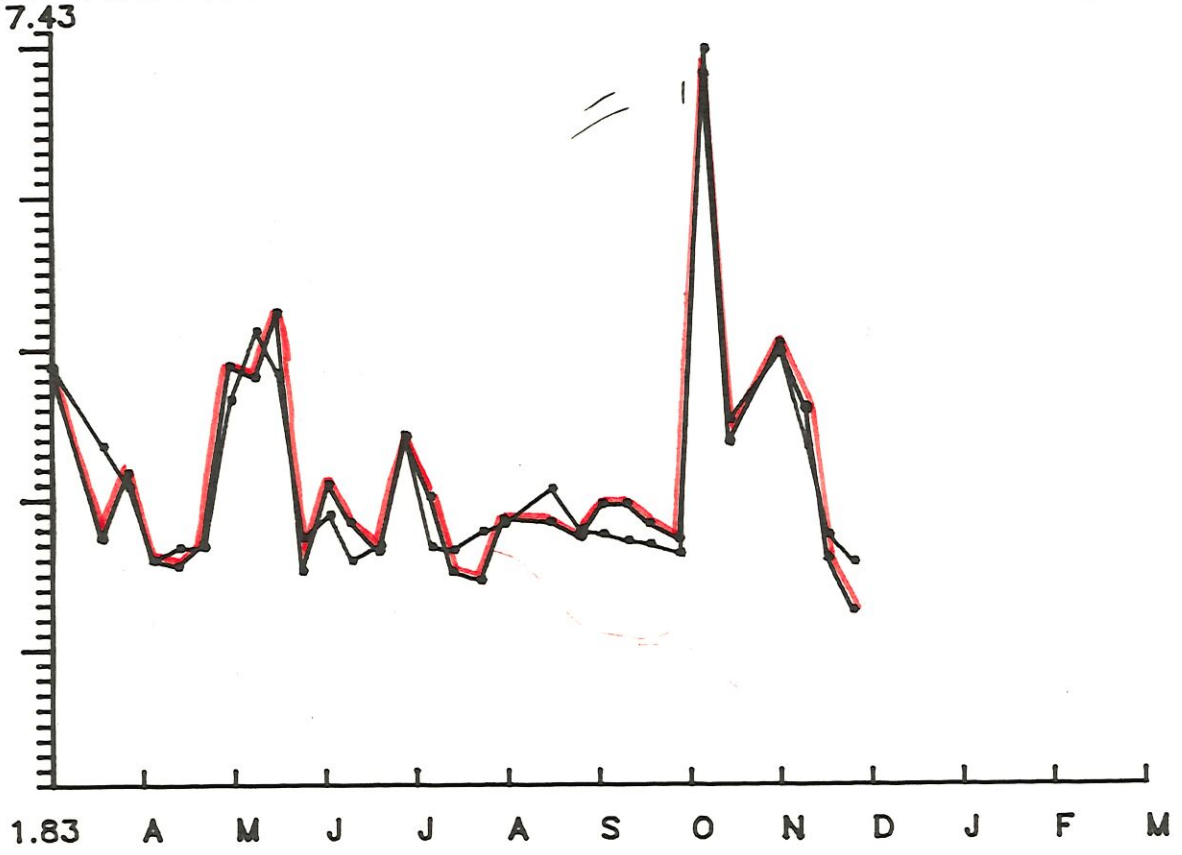
FICHIER DE DONNEES= meuse annee 1984
F(x)= ETAC(CHLA, MES, DEB)= ETA_CHLA + ETA_MES + ETA_DEB

CALCUL DU COEFFICIENT D'EXTINCTION

NOM DU GRAPHE= ETA847.CMC
LES ETA CALCULES SONT EN BLEU
LES ETA MESURES SONT EN ROUGE

0.1065996D+01	0.2321568D+01	0.3888595D+00	0.3752116D+01	0.1295171D+01
−0.2880797D+00	0.6470259D+01	−0.3158070D+01	0.1298502D+01	0.1789468D+01
0.1789468D+01	0.1179891D+01	0.2475237D+01		

LE RESIDU FINAL= 0.3541400D+02



FICHIER DE DONNEES= meuse annee 1984

F(X)= ETA(CHI A MES DER)=ETA CHI A*ETA MES*ETA DER

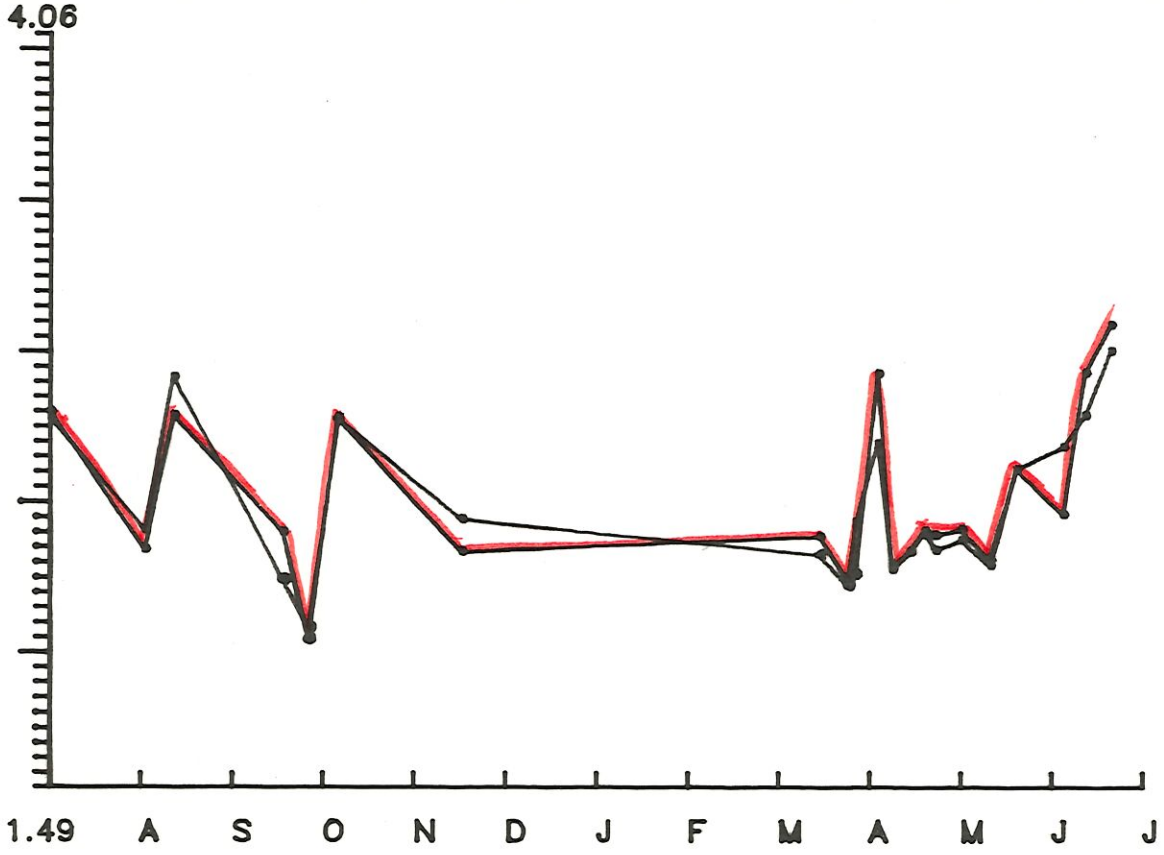
fig. 7

CALCUL DU COEFFICIENT D'EXTINCTION

NOM DU GRAPHE= eta866.cmc
LES ETA CALCULES SONT EN BLEU
LES ETA MESURES SONT EN ROUGE

0.1000000D+01 −0.1451927D+00 0.3929959D+01 0.2947110D+01 0.1000000D+01
0.1163306D+01 0.3419605D+01 0.1525877D+01 −0.1777634D+01 0.2083738D+01
0.2083738D+01 −0.1144268D+01 −0.2283453D+00

LE RESIDU FINAL= 0.1814458D+01



FICHIER DE DONNEES= meuse annee 1986

F(X)= ETA(CHLA,MES,DEB)=ETA CHLA+ETA MES+ETA DEB

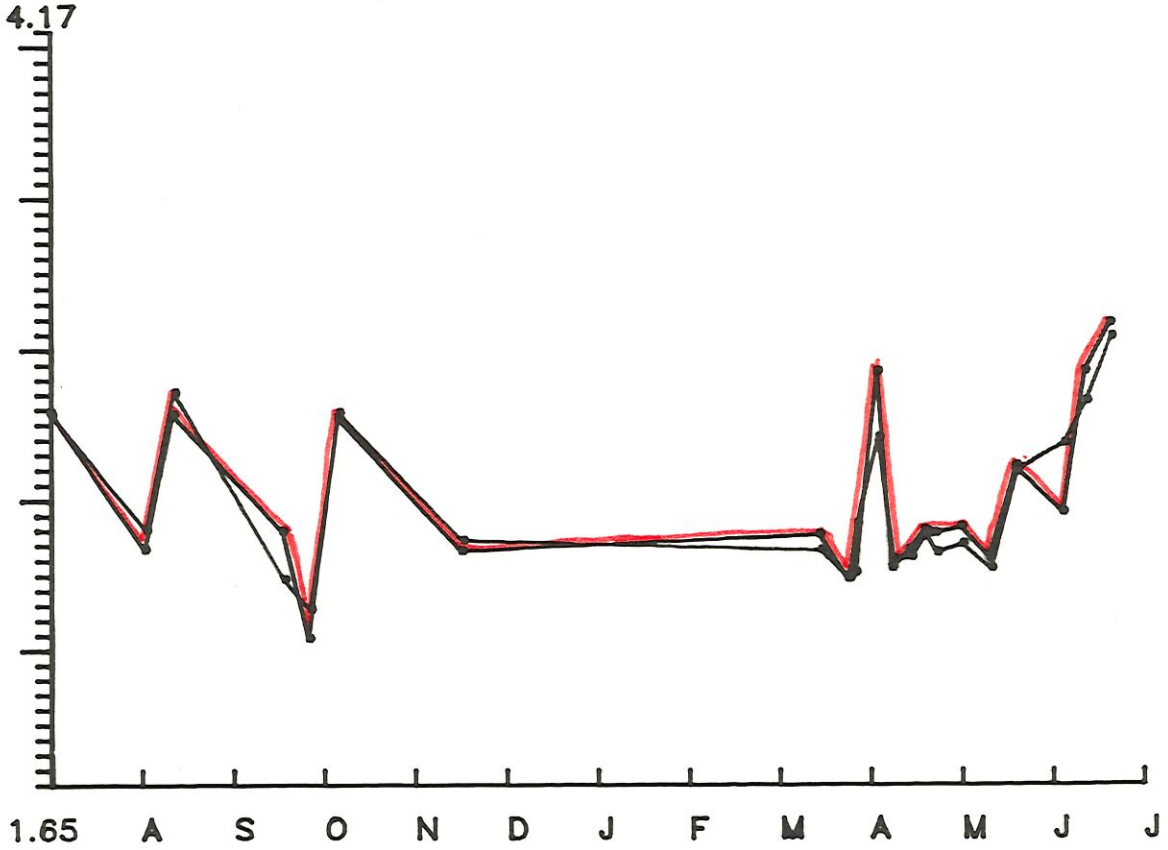
fig. 8

CALCUL DU COEFFICIENT D'EXTINCTION

NOM DU GRAPHE= ETA867.CMC
LES ETA CALCULES SONT EN BLEU
LES ETA MESURES SONT EN ROUGE

0.1561877D+01	0.5952905D+00	0.3472007D+01	0.2953372D+01	0.9828969D+00
0.1110947D+01	0.1664084D+01	0.2379568D+01	0.5755430D+00	0.2456361D+01
0.2456361D+01	0.6978531D+00	0.1335977D+01		

LE RESIDU FINAL= 0.1602389D+01



FICHIER DE DONNEES= meuse annee 1986

F(X)= ETA(CHLA,MES,DEB)=ETA CHLA*ETA MES*ETA DEB

fig. 9

Lors d'une discussion avec des "biologistes", ceux-ci ont émis une objection envers notre méthode . A savoir qu'il n'était pas souhaitable d'introduire directement la contribution du débit, celle-ci devant être moins importante que celles de la chlorophylle_A et de la matière en suspension . En effet, pour pouvoir généraliser notre modèle de la fonction ETA, il faut tenir compte du fait que certains cours d'eau, notamment les rivières à lits artificiels, ont un débit très peu variable, comparativement aux autres rivières . Ils nous ont donc proposé, de déterminer d'abord le coefficient d'extinction en fonction de la matière en suspension et de la chlorophylle_A, puis d'ajouter, si nécessaire, la contribution du débit dans ce calcul .

Le travail se décompose donc en deux phases :

i) La première consiste à considérer une fonction ne dépendant que de deux variables, à savoir la chlorophylle_A et la matière en suspension . Cette fonction peut s'exprimer comme suit

$$F(CHLA, MES) = ETA(CHLA) + ETA(MES)$$

où

ETA(CHLA) et ETA(MES) sont les contributions de la chlorophylle_A et de la matière en suspension .

ii) Lorsque F(CHLA, MES) est déterminée analytiquement, et que tous les paramètres de cette loi sont fixés, on passe alors à la seconde phase qui est de déterminer la contribution du débit .

Pour chaque phase, nous avons employé la stratégie utilisée jusqu'à présent, à savoir approximer, d'abord numériquement, pour ensuite rechercher une forme analytique sur base des graphiques des solutions numériques.

Remarques :

Nous avons choisi d'adopter la méthode des SPLINES, pour touver la solution du problème posé, car si l'on considère un nombre suffisant de sous-intervalles ou un degré assez élevé, on obtient la meilleure approximation et on peut donc prendre les résultats obtenus comme référence pour la suite .

3. APPROCHE ANALYTIQUE

Dans le deuxième paragraphe, nous avons donné la méthode employée pour résoudre notre problème : nous avons décidé d'approximer, d'abord numériquement le modèle de la fonction ETA, puis d'essayer, à partir des graphes, de trouver une forme analytique à cette fonction . Nous allons, dans ce paragraphe, montrer comment s'est faite cette recherche d'une forme analytique .

Lors de l'étude des graphes, donnant la contribution de la matière en suspension dans le calcul du coefficient d'extinction, nous avons remarqué (figure 16) une légère décroissance au début de la courbe . Cette constatation nous semblait difficilement explicable; en effet, plus il y a de matière en suspension, plus l'absorption doit être forte (du moins dans la zone de concentration où cette décroissance est apparente) . Les "biologistes", face à cette constatation, ont avancé l'hypothèse que cette anomalie était due à la redondance entre la matière en suspension et la chlorophylle_A . En effet, lors de la mesure du taux de concentration de la matière en suspension dans l'eau (voir appendice technique) , on retire aussi, en faible proportion, des algues produisant de la chlorophylle_A . Il existe donc une redondance entre les mesures de ces deux concentrations, c'est pourquoi les "biologistes" nous ont proposé de soustraire à la matière en suspension, environ 8 % de la chlorophylle_A .

Malgré cette élimination de la redondance entre le deux variables, il s'est avéré que certains graphes présentaient toujours cette anomalie . Nous avons néanmoins gardé cette transformation des données.

Etudions, maintenant, les graphiques représentant la contribution de la chlorophylle_A (figures 10 à 15) et celle de la matière en suspension (figure 16 à 19), dans la détermination du coefficient d'extinction . Rappelons que notre but est de trouver une forme analytique pour la fonction ETA, forme suffisamment générale dont les graphiques possibles seraient similaires à ceux obtenus pour les approximations numériques des différentes contributions . Afin, d'assurer les hypothèses émises au deuxième chapitre, lors de la formulation mathématique du problème, sur la positivité de la fonction ETA, nous avons choisi une forme analytique,somme de deux fonctions positives . De plus, nous pouvons remarquer, en étudiant les différents graphes, que la contribution de la matière en suspension et celle de la chlorophylle_A présentent des aspects graphiques similaires . Ce qui nous a amené à choisir une même forme analytique pour ces deux contributions . Cette simplification n'est pas dénuée de sens au point de vue physique; en effet, la chlorophylle_A (qui mesure la concentration en phytoplancton) et la matière en suspension sont toutes deux un ensemble de particules, on peut donc concevoir, au point de vue optique, qu'elles obéissent au même type de comportement .

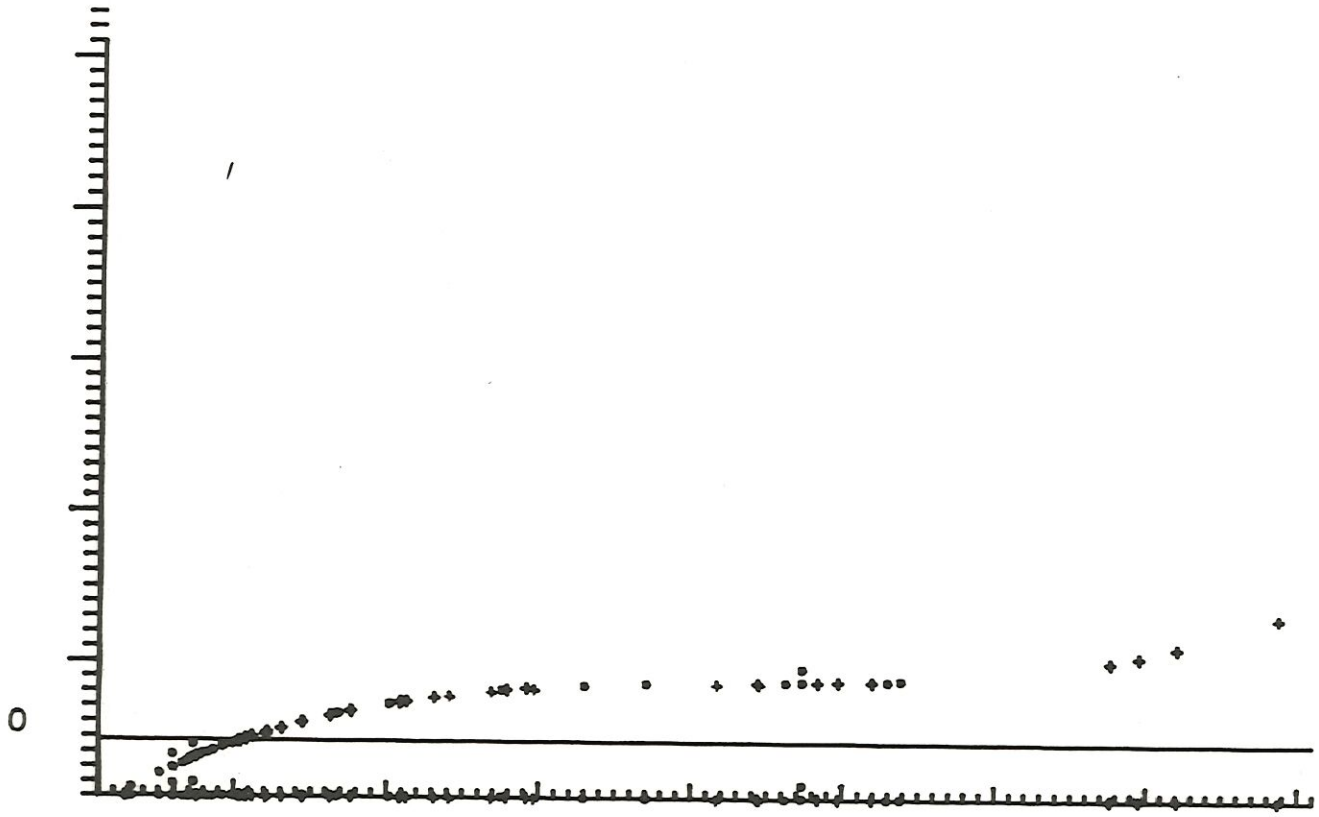
DESSIN DE LA FONCTION ETA CHLA

NOM DU GRAPHE= eta838.chla

.**** 1--->9 **** 10--->18 **** 19--->27 **** 28--->36

+ ++++ 37--->45 ++++ 46--->54 ++++ 55--->63 ++++ 64 --->72

-0.4702280D+00 0.2011214D+01 -0.5394311D-01 0.1780262D+01



YMIN= -0.40 YMAX= 8.10

XMIN= 0.00 XMAX= 125.00

FICHIER DE DONNEES= meuse annee 1983

fig. 10

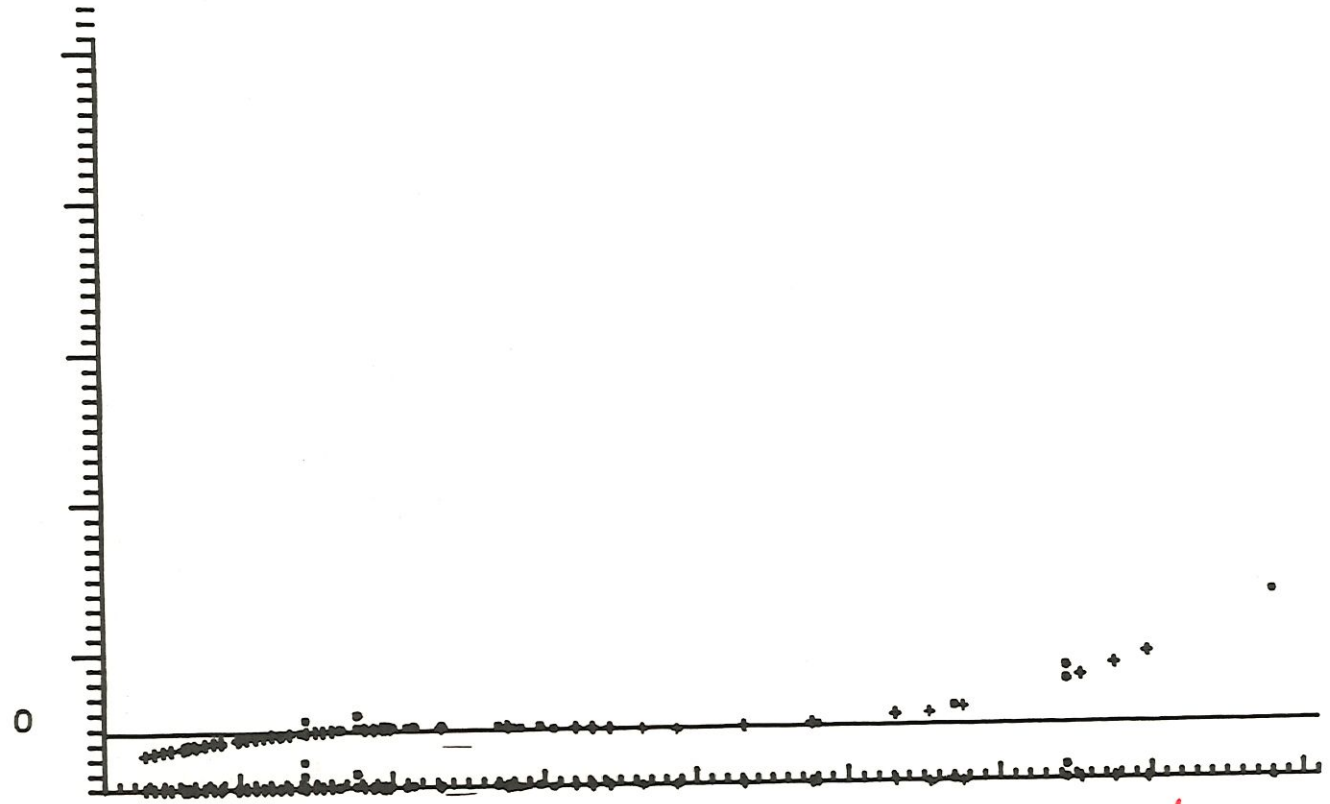
DESSIN DE LA FONCTION ETA CHLA

NOM DU GRAPHE= eta848.chla

**** 1--->9 **** 10--->18 **** 19--->27 **** 28--->36

++++ 37--->45 ++++ 46--->54 ++++ 55--->63 ++++ 64 --->72

-0.1130521D+00 0.1021994D+01 -0.1003618D+01 0.1978297D+01



YMIN= -0.40 YMAX= 6.10

XMIN= 0.00 XMAX= 125.00

FICHIER DE DONNEES= meuse annee 1984

fig. 11

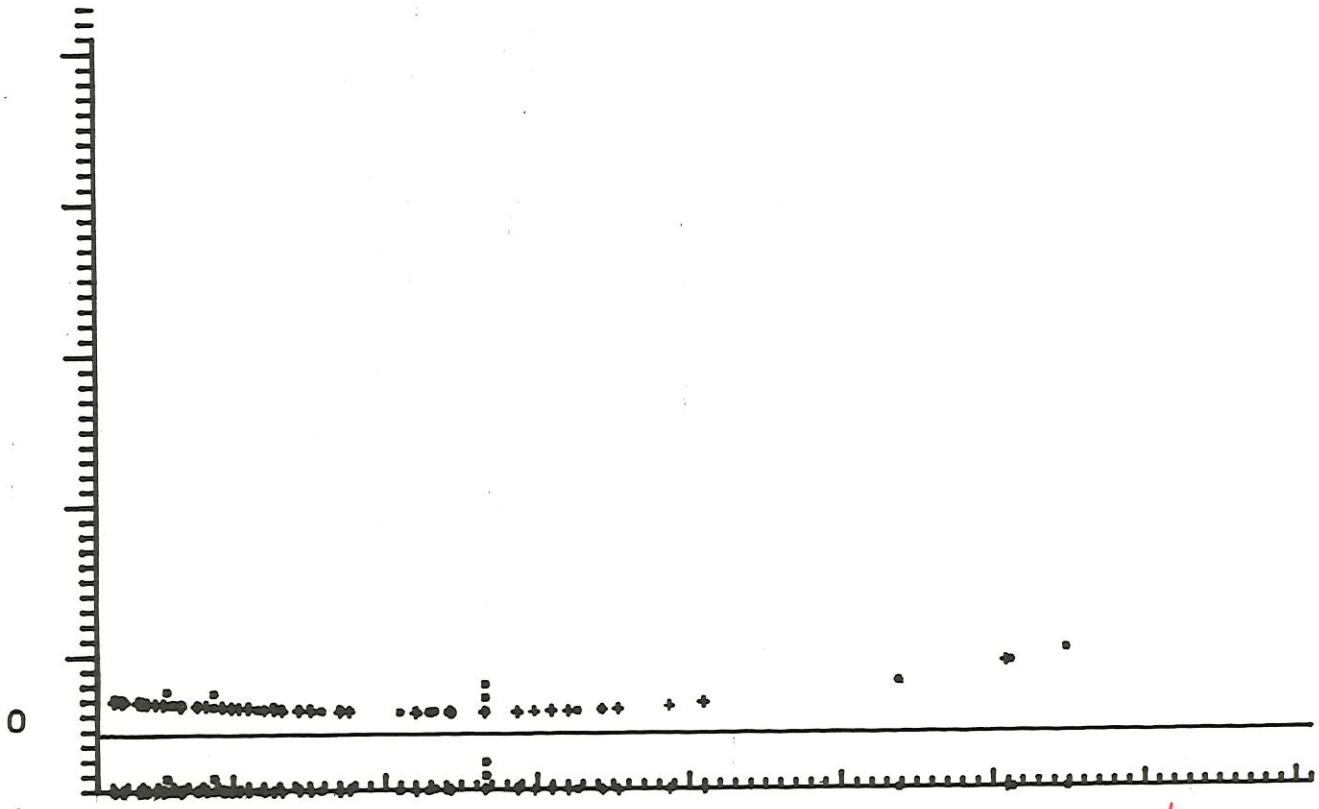
DESSIN DE LA FONCTION ETA CHLA

NOM DU GRAPHE= doneta848.chla

**** 1--->9 **** 10--->18 **** 19--->27 **** 28--->36

++++ 37--->45 ++++ 46--->54 ++++ 55--->63 ++++ 64 --->72

0.6290478D+00 0.3922476D+00 0.3499357D+00 0.1189330D+01



YMIN= -0.40 YMAX= 8.10

XMIN= 0.00 XMAX= 125.00

FICHIER DE DONNEES= basse meuse annee 1984

Fig. 12

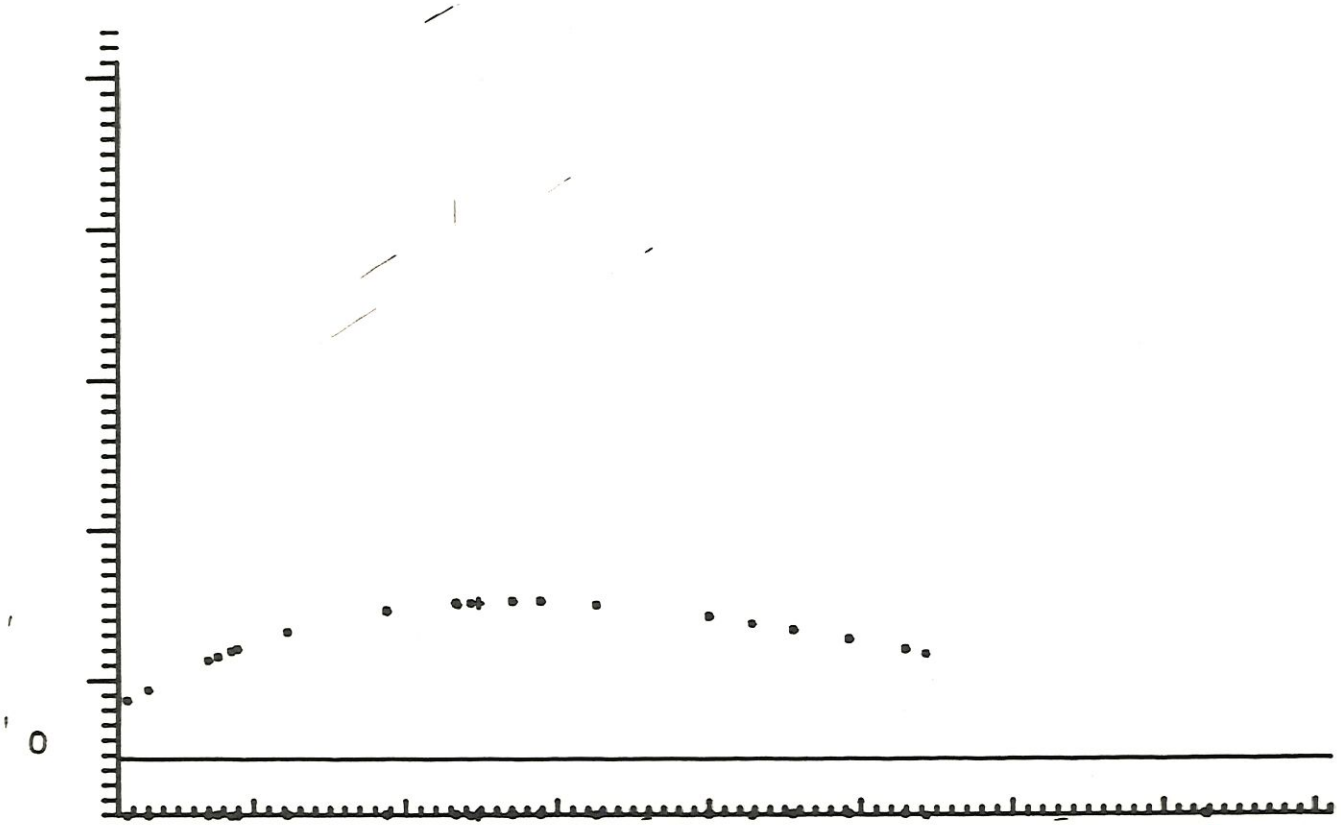
DESSIN DE LA FONCTION ETA CHLA

NOM DU GRAPHE= eta868.chla

.**** 1--->9 **** 10--->18 **** 19--->27 **** 28--->36

+++++ 37--->45 ++++ 46--->54 ++++ 55--->63 ++++ 64 --->72

0.8516568D+00 0.3356571D+01 0.1037252D+01 0.1021125D+01



YMIN= -0.40 YMAX= 8.10

XMIN= 0.00 XMAX= 125.00

FICHIER DE DONNEES= meuse annee 1986

fig 13

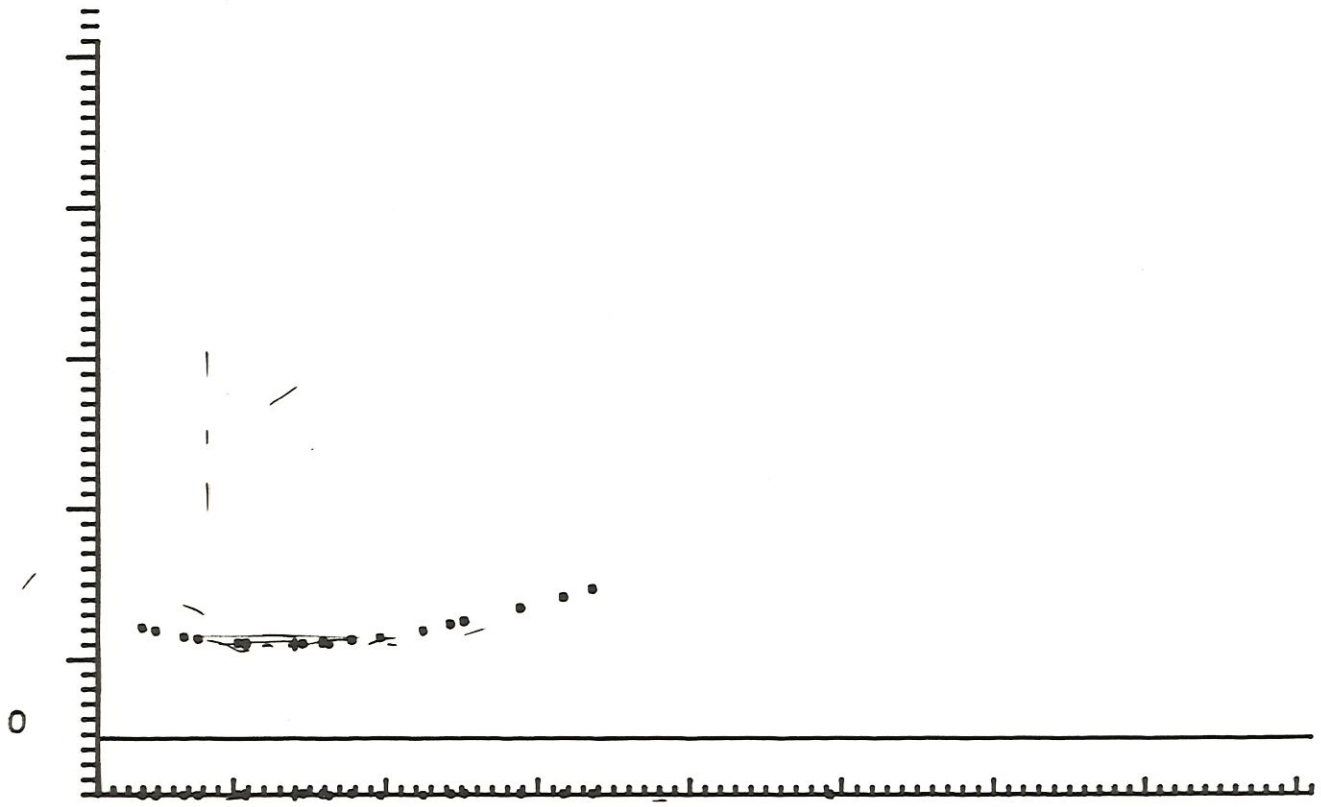
DESSIN DE LA FONCTION ETA CHLA

NOM DU GRAPHE= sameta8.chla

**** 1--->8 **** 10--->18 **** 19--->27 **** 28--->36

++++ 37--->45 ++++ 46--->54 ++++ 55--->63 ++++ 64 --->72

0.1516797D+01 0.7792605D+00 0.2193886D+01 0.2546779D+01



YMIN= -0.40 YMAX= 8.10

XMIN= 0.00 XMAX= 125.00

FICHIER DE DONNEES= sambre annee 1986

fig. 14

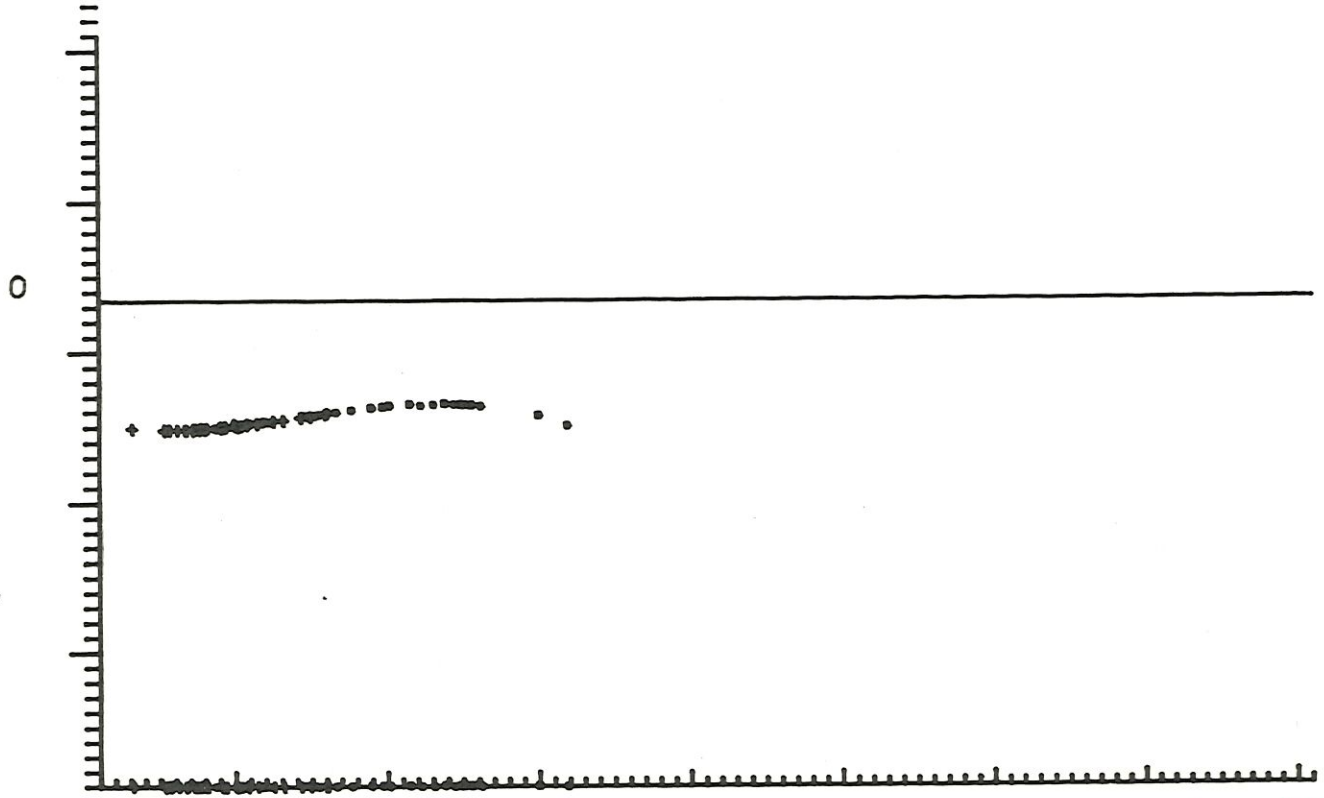
DESSIN DE LA FONCTION ETA MES

NOM DU GRAPHE= eta838.mes

**** 1--->9 **** 10--->18 **** 19--->27 **** 28--->36

++++ 37--->45 ++++ 46--->54 ++++ 55--->63 ++++ 64 --->72

0.1000000D+01 0.4579348D+00 0.2548226D+01 0.1253712D+00



YMIN= -5.10 YMAX= 7.50

XMIN= 0.00 XMAX= 70.00

FICHIER DE DONNEES= meuse annee 1983

fig. 15

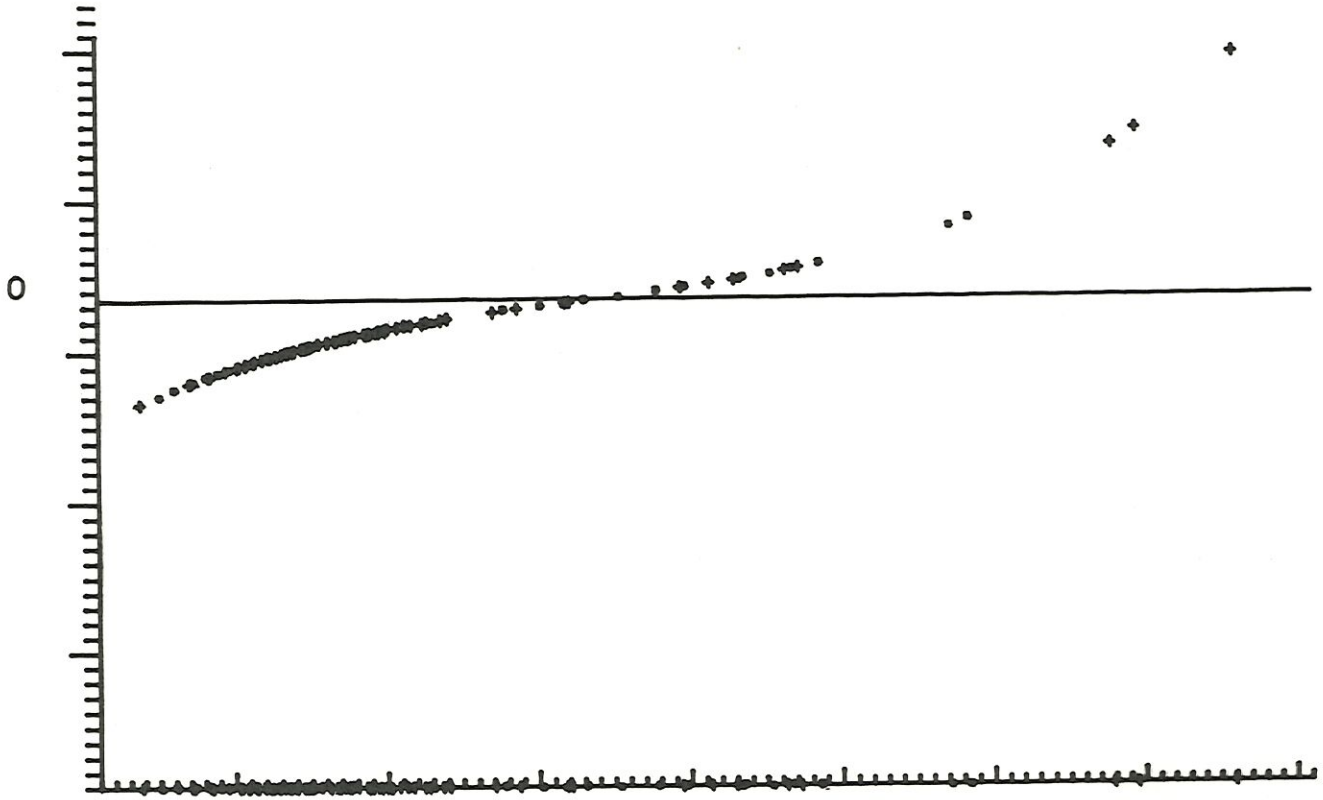
DESSIN DE LA FONCTION ETA MES

NOM DU GRAPHE= eta848.mes

**** 1--->9 **** 10--->18 **** 19--->27 **** 28--->36

+++++ 37--->45 ++++ 46--->54 ++++ 55--->63 ++++ 64 --->72

0.1000000D+01 0.4523518D+01 0.1142323D+01 0.8360849D+01



YMIN= -5.10 YMAX= 7.50

XMIN= 0.00 XMAX= 70.00

FICHIER DE DONNEES= meuse annee 1984

fig. 16

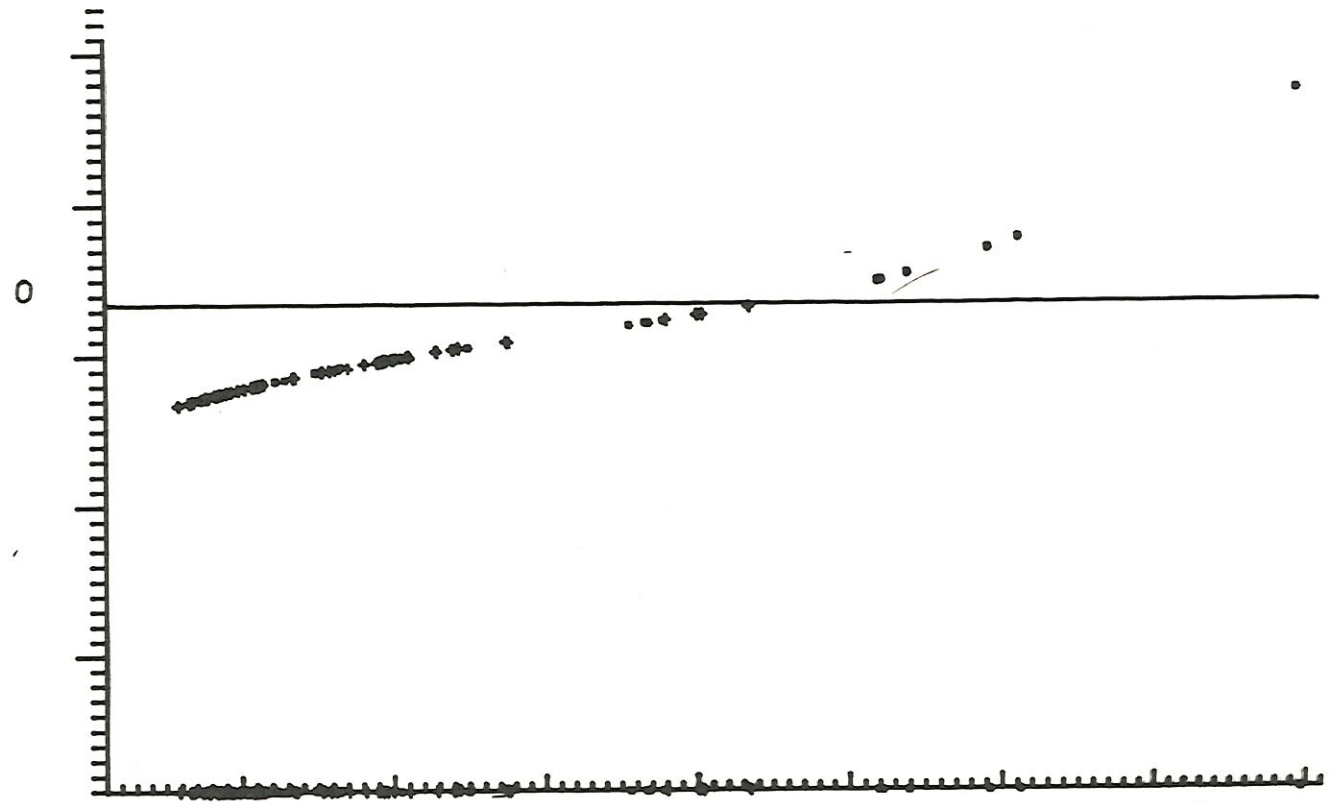
DESSIN DE LA FONCTION ETA MES

NOM DU GRAPHE= doneta848.mes

**** 1--->9 **** 10--->18 **** 19--->27 **** 28--->36

++++ 37--->45 ++++ 46--->54 ++++ 55--->63 ++++ 64 --->72

0.1000000D+01 0.3336911D+01 0.1826016D+01 0.6843298D+01



YMIN= -5.10 YMAX= 7.50

XMIN= 0.00 XMAX= 70.00

FICHIER DE DONNEES= basse meuse annee 1984

fig. 17

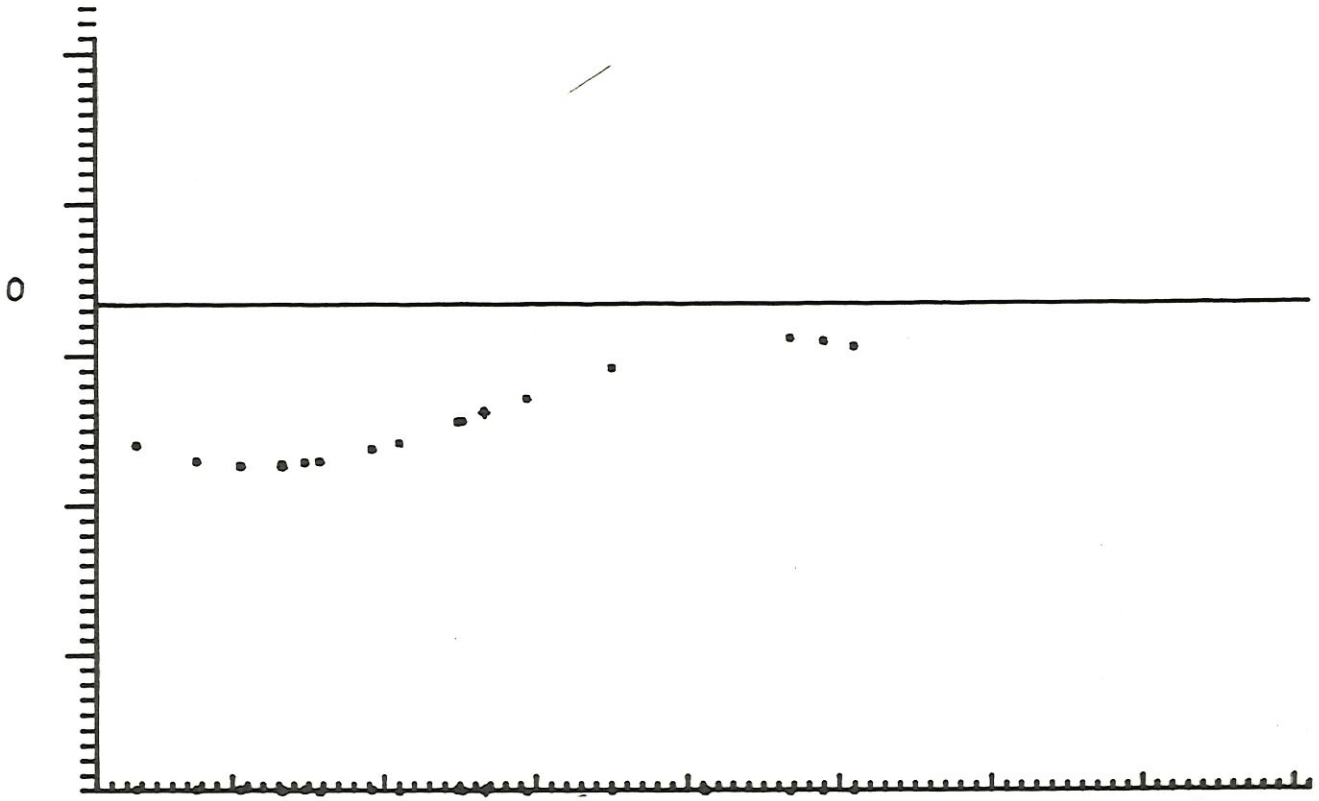
DESSIN DE LA FONCTION ETA MES

NOM DU GRAPHE= eta868.mes

**** 1--->9 **** 10--->18 **** 19--->27 **** 28--->36

++++ 37--->45 ++++ 46--->54 ++++ 55--->63 ++++ 64 --->72

0.1000000D+01 −0.1787059D+01 0.5472411D+01 0.1038350D+01



YMIN= −5.10 YMAX= 7.50

XMIN= 0.00 XMAX= 70.00

FICHIER DE DONNEES= meuse annee 1986

fig. 18

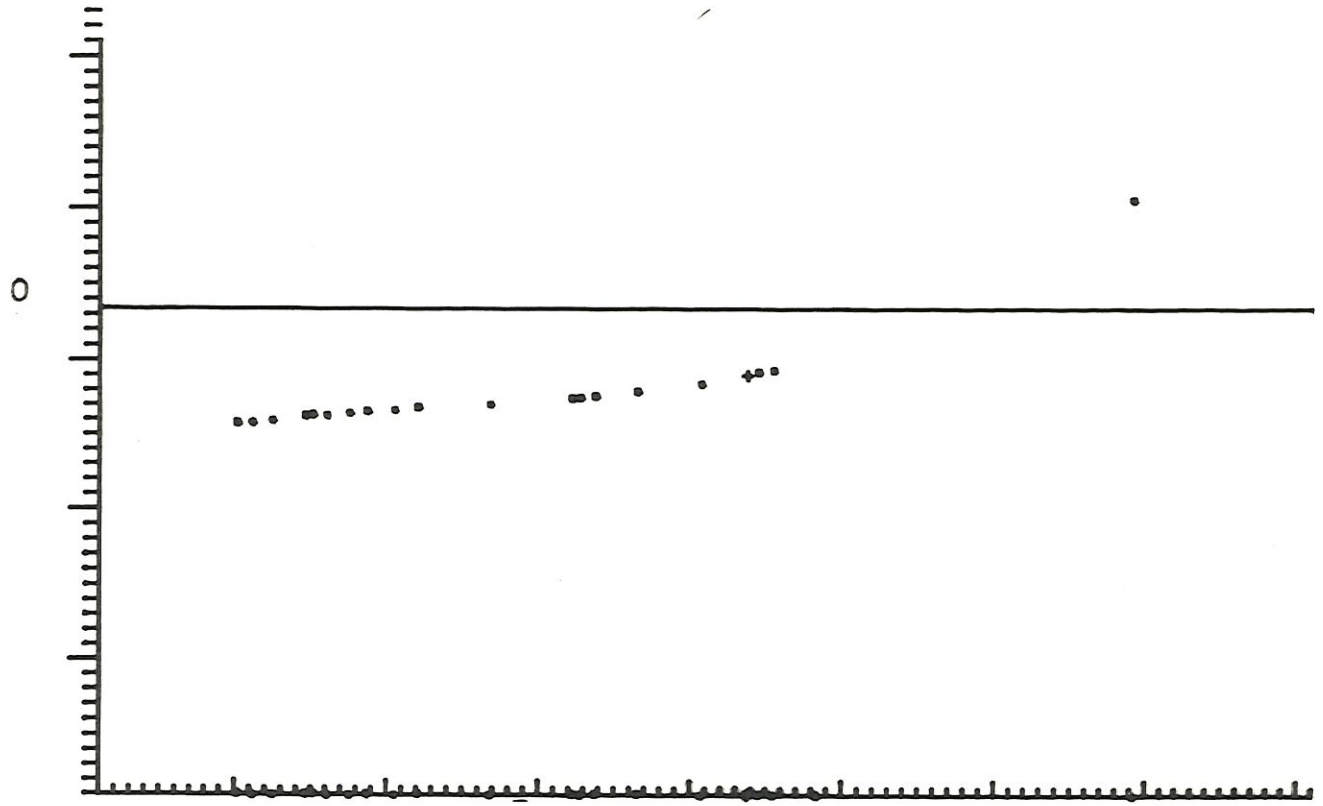
DESSIN DE LA FONCTION ETA MES

NOM DU GRAPHE= sameta8.mes

.**** 1---->9 **** 10---->18 **** 19---->27 **** 28---->36

+++++ 37---->45 ++++ 46---->54 ++++ 55---->63 ++++ 64 ---->72

0.1000000D+01 0.1942345D+01 0.5436777D+00 0.5997670D+01



YMIN= -5.10 YMAX= 7.50

XMIN= 0.00 XMAX= 70.00

FICHIER DE DONNEES= sambre annee 1986

fig. 19

Cependant, il ne faut pas s'attendre à ce que les paramètres s'ajustent de la même manière pour chacune des variables, la chlorophylle_A et la matière en suspension ayant leurs caractéristiques propres . En particulier, si le phytoplancton est composé de particules comme les MES non vivantes, son comportement optique doit être plus complexe du fait que les cellules algales contiennent des pigments photosynthètiques (chlorophylle_A et caraténodes principalement) qui absorbent la lumière sélectivement dans les parties bleue et rouge du spectre .

La forme analytique que nous avons adoptée, pour les deux contributions, est la suivante :

$$F(T,p(1)\ldots p(5)) = T^{p(1)} * e^{-p(2)*(T-p(3))} + e^{p(4)*(T-p(5))}$$

(équation 4)

où

T est la variable

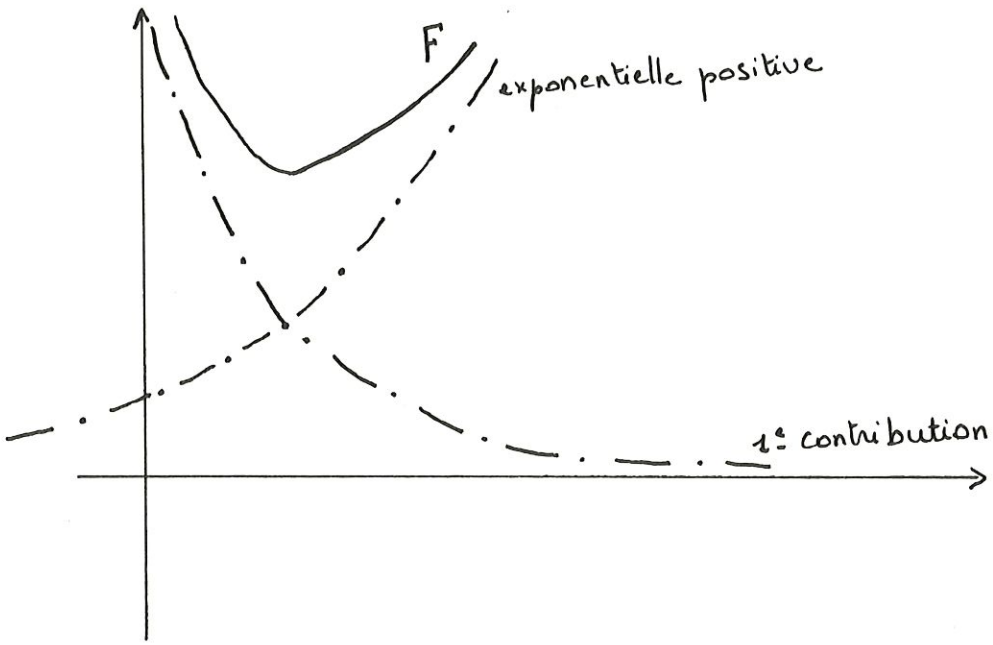
P(1)...P(5) sont les paramètres d'optimisation

P(2) et P(4) sont POSITIFS (pour assurer que la fonction soit une somme d'une exponentielle négative et d'une exponentielle positive)

Si l'on fait l'étude de cette fonction, on observe trois possibilités de graphes, selon la valeur de p(1) .

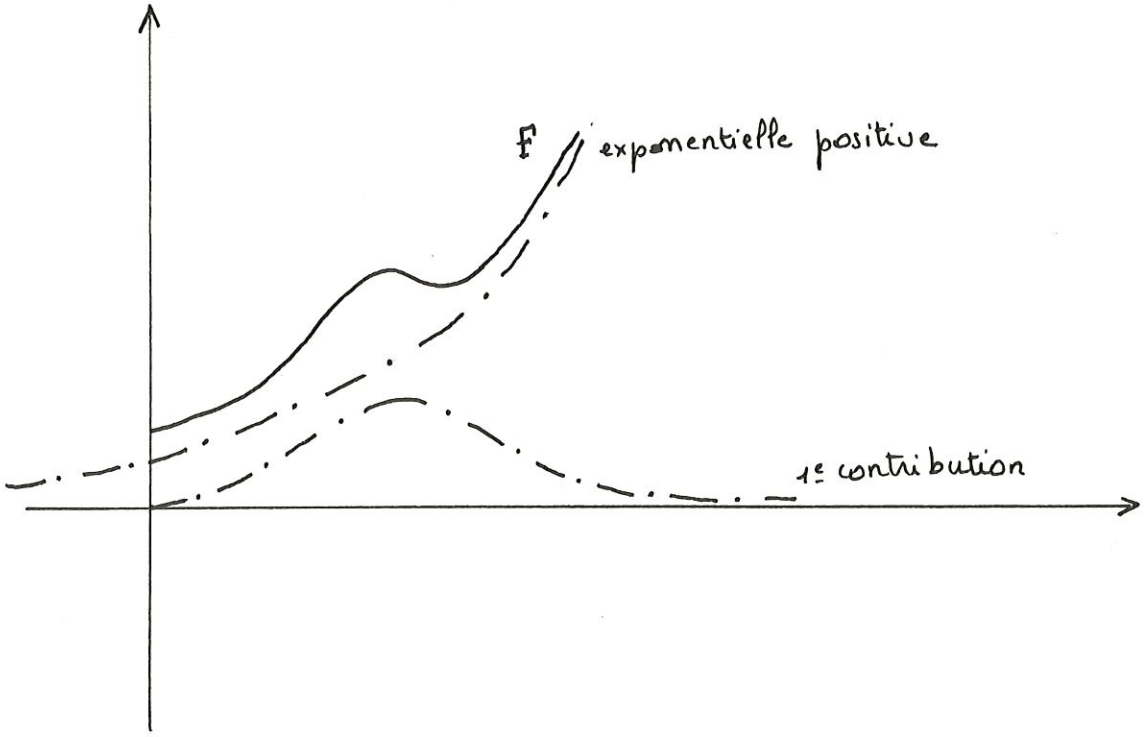
Cas 1

Si p(1) est négatif



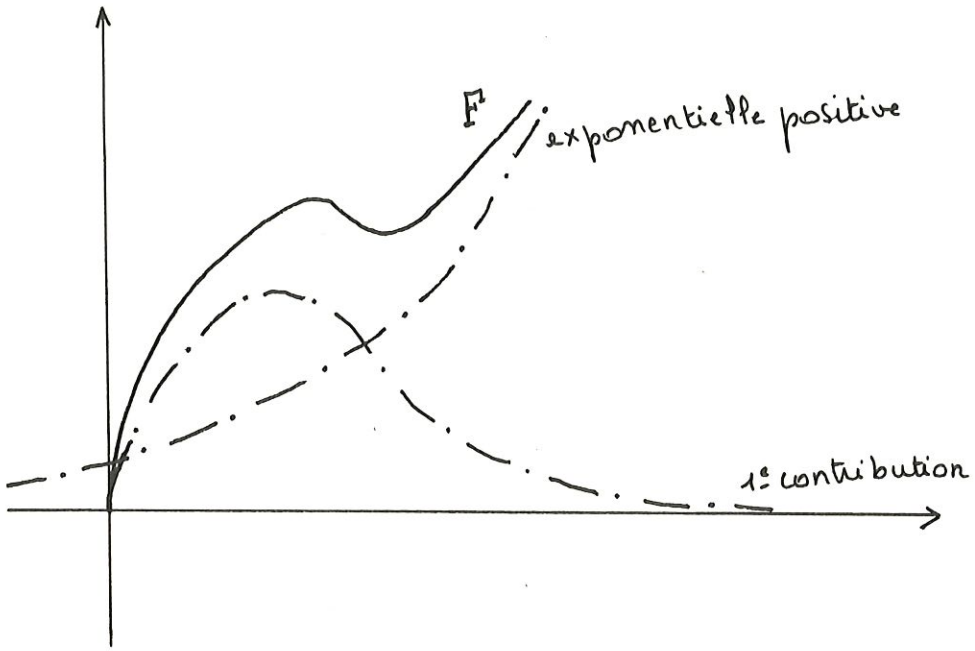
Cas 2

Si p(1) est supérieur à 1



Cas 3

Si p(1) est compris entre 0 et 1



Nous avons donc implémenté cette fonction sur ordinateur, en y ajoutant un terme indépendant, auquel nous ne pouvions pas encore donner de signification à cette étape . Le modèle de la fonction ETA est donc de la forme :

ETA=F(CHLA, P(1)...P(5)) + F(MES, P(6)...P(10)) + P(11)

tq

F est la fonction définie par l'équation 4

P(1)...P(11) sont les paramètres

(*Choix 7*)

Le nombre de paramètres est relativement élevé, nous essayerons, par la suite, de simplifier le modèle, pour réduire ce nombre .

Nous avons testé cette fonction par simulation, en modifiant les paramètres successivement afin de les ajuster au mieux . Comme nous l'avons dit précédemment, le critère quantitatif de rejet ou d'acceptation du modèle, est la comparaison entre la valeur du résidu obtenu par cette fonction et celle obtenue lorsque nous avons travaillé avec les B-splines : si les deux valeurs de résidu sont proches, alors nous ne rejettons pas le modèle .

Le tableau de résultats, ci-dessous, met en parallèle les résidus obtenus par la méthode des B-splines et ceux obtenus avec la loi analytique proposée ci-dessus .
Le résidu moyen est noté entre parenthèse !

Fichiers de données	Résidu "Splines" Choix 5	Résidu "analytique" Choix 7
Meuse 1983	4.8 (0.266)	7.34 (0.328)
Meuse 1986	2.54 (0.340)	2.47 (0.335)
Sambre 1986	3.89 (0.430)	3.88 (0.430)
Meuse 1984	45.45 (0.625)	50.07 (0.656)
Basse Meuse 1984	42.78 (0.709)	47.53 (0.748)

Nous remarquons que, selon les critères que nous nous sommes fixés, les résultats obtenus semblent satisfaisants. Afin de mieux visualiser ces résultats, nous vous proposons les graphes de "fittings" pour la Haute Meuse en 1986 et pour la Basse Meuse en 1984 (figures 20 et 21) .

Si nous nous référons, au plan de travail établi dans le paragraphe précédent, à savoir :

phase 1) trouver la forme analytique de ETA=F(CHLA,MES)

phase 2) ajouter à cette fonction la contribution du débit

nous venons de terminer la première phase, il nous reste donc, maintenant, à intégrer la variable débit dans le modèle . Pour l'élaboration de cette seconde phase, nous avons suivi la même démarche que précédemment, c'est-à-dire que nous avons, d'abord, approximé numériquement la contribution du débit dans le calcul du coefficient d'extinction, puis, à partir des graphes, nous avons essayé de trouver son expression analytique.

Nous devons donc trouver l'approximation numérique de la fonction ETA_DEB dans la loi

ETA(CHLA,MES,DEB)=F(CHLA,p(i))+F(MES,p(j))+ETA_DEB(DEB)+P(11)

où i=1...5

j=6..10

p(i) et p(j) sont des paramètres <u>fixés</u> dans la première phase

La fonction F est définie par l'équation 4

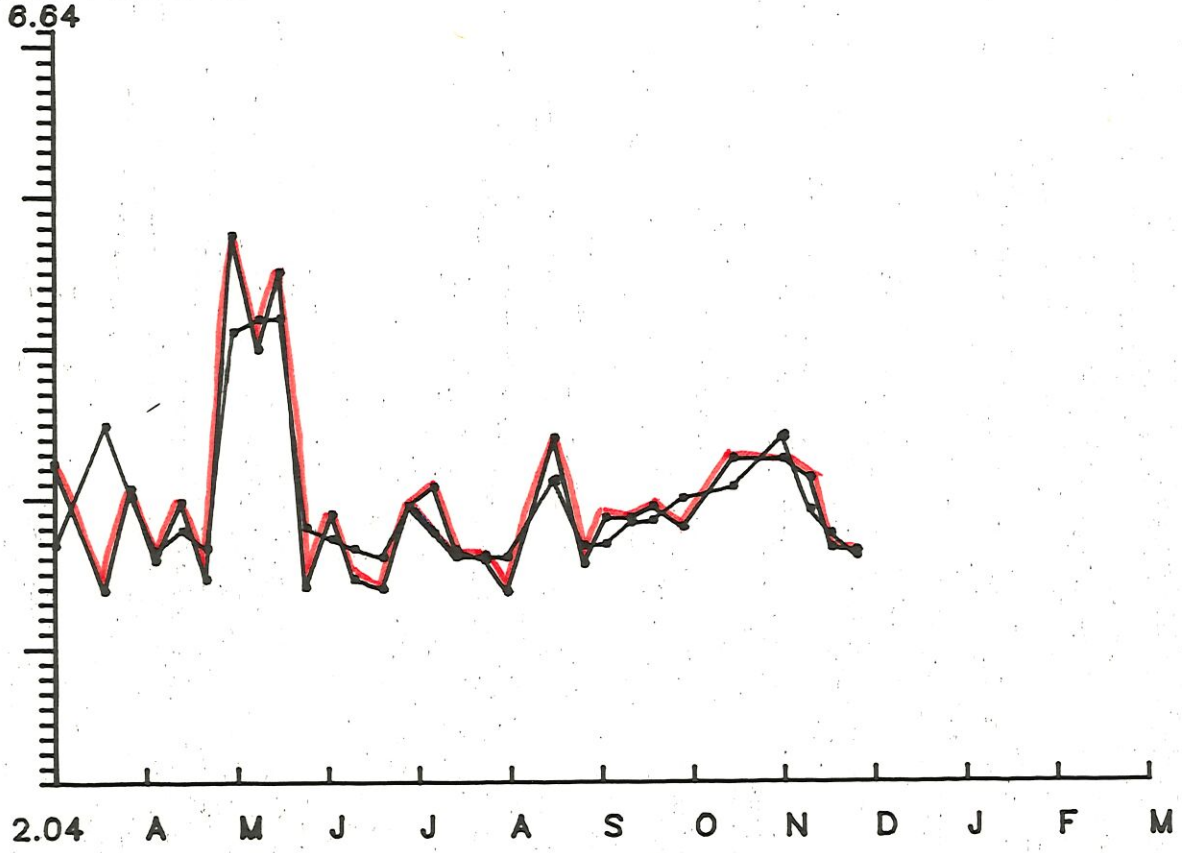
P(11) est le terme indépendant, composé d'un seul paramètre à déterminer

CALCUL DU COEFFICIENT D'EXTINCTION

NOM DU GRAPHE= doneta8422.cmc
LES ETA CALCULES SONT EN BLEU
LES ETA MESURES SONT EN ROUGE

0.3010995D+01 0.8363984D+01 0.1668895D+00 0.5143975D+00 −0.3206387D+01
0.1810352D+01 0.3115494D+00 0.2346656D+02 −0.5228728D+06 0.2021413D+06
0.2021413D+06 −0.4393720D+00

LE RESIDU FINAL= 0.4753265D+02



FICHIER DE DONNEES= basse meuse annee 1984

F(X)= ETA(CHLA,MES)=F(CHLA)+F(MES) F DEFINIE PAR

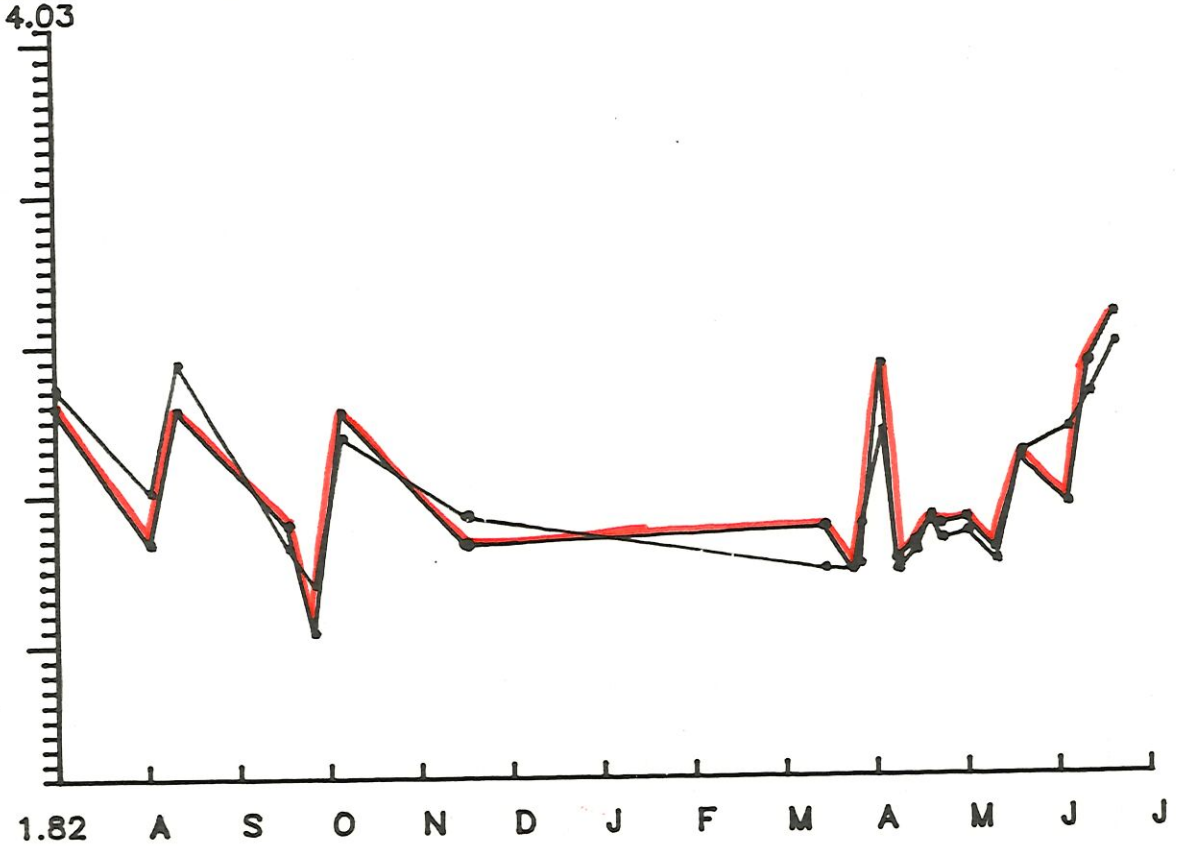
Fig. 20

CALCUL DU COEFFICIENT D'EXTINCTION

NOM DU GRAPHE= eta8622.cmc
LES ETA CALCULES SONT EN BLEU
LES ETA MESURES SONT EN ROUGE

0.1000763D+01 0.1654498D+01 0.8444262D+00 0.1014075D−04 0.1447644D+01
0.8730853D+01 0.4851925D+01 0.7709614D+00 −0.3254534D−01 0.1475689D+01
0.1475689D+01 −0.9513064D+00

LE RESIDU FINAL= 0.2477706D+01



FICHIER DE DONNEES= meuse annee 1986

F(X)= ETA(CHLA,MES)=F(CHLA)+F(MES) F DEFINIE PAR

fig. 21

Comparons les résultats obtenus en considérant la première phase uniquement, puis en intégrant l'approximation numérique de la contribution du débit .

Tableau de résultats :

Fichiers de données	Résidu phase 1	Résidu phase 2
Meuse 1983	7.34 (0.328)	5.42 (0.283)
Meuse 1986	2.45 (0.335)	2.19 (0.315)
Sambre 1986	3.88 (0.430)	3.70 (0.419)
Meuse 1984	50.07 (0.656)	47.12 (0.637)
Basse Meuse 1984	47.53 (0.748)	49.42 (0.762)

Nous pouvons constater,sur ce tableau, que les résultats ne sont pas fondamentalement meilleurs, compte tenu de la complexité (augmentation du nombre de paramètres) introduite . De plus, si nous étudions les courbes de la fonction ETA_DEB, sur les différents jeux de données (voir figures 27 jusque 31), on constate qu'il n'existe pas, à première vue, une forme analytique, *simple*, pouvant donner lieu à cette diversité de courbes . C'est pourquoi, nous avons décidé de modifier le modèle "idéal", en ne considérant plus que deux variables, à savoir la matière en suspension et la chlorophylle_A .

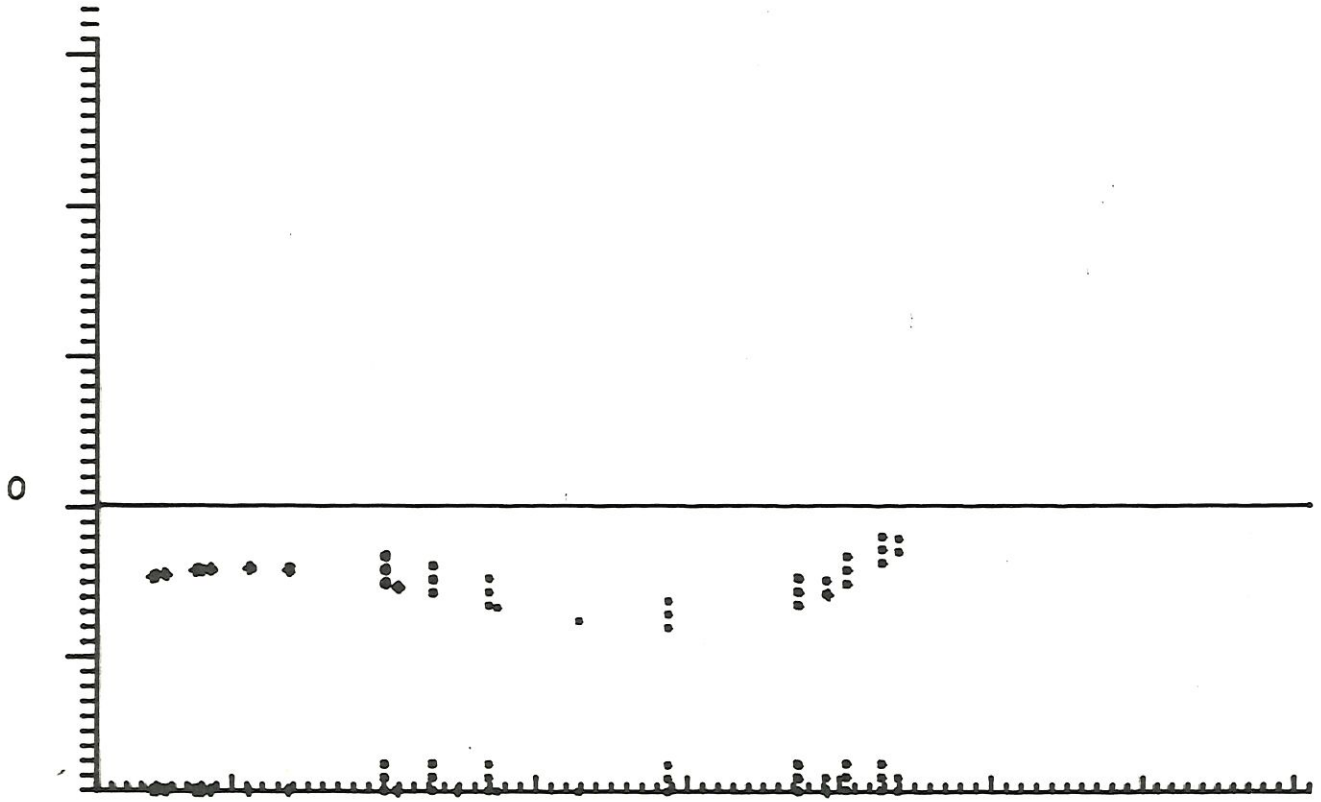
DESSIN DE LA FONCTION ETA DEB

NOM DU GRAPHE= ETA8318.DEB

**** 1--->9 **** 10--->18 **** 19--->27 **** 28--->36

++++ 37--->45 ++++ 46--->54 ++++ 55--->63 ++++ 64 --->72

−0.6522213D−01 0.8645790D+00 −0.3121822D+01 0.4756810D+01



YMIN= -1.10 YMAX= 3.50

XMIN= 0.00 XMAX= 0.50

FICHIER DE DONNEES= ETA83.DON

fig. 22

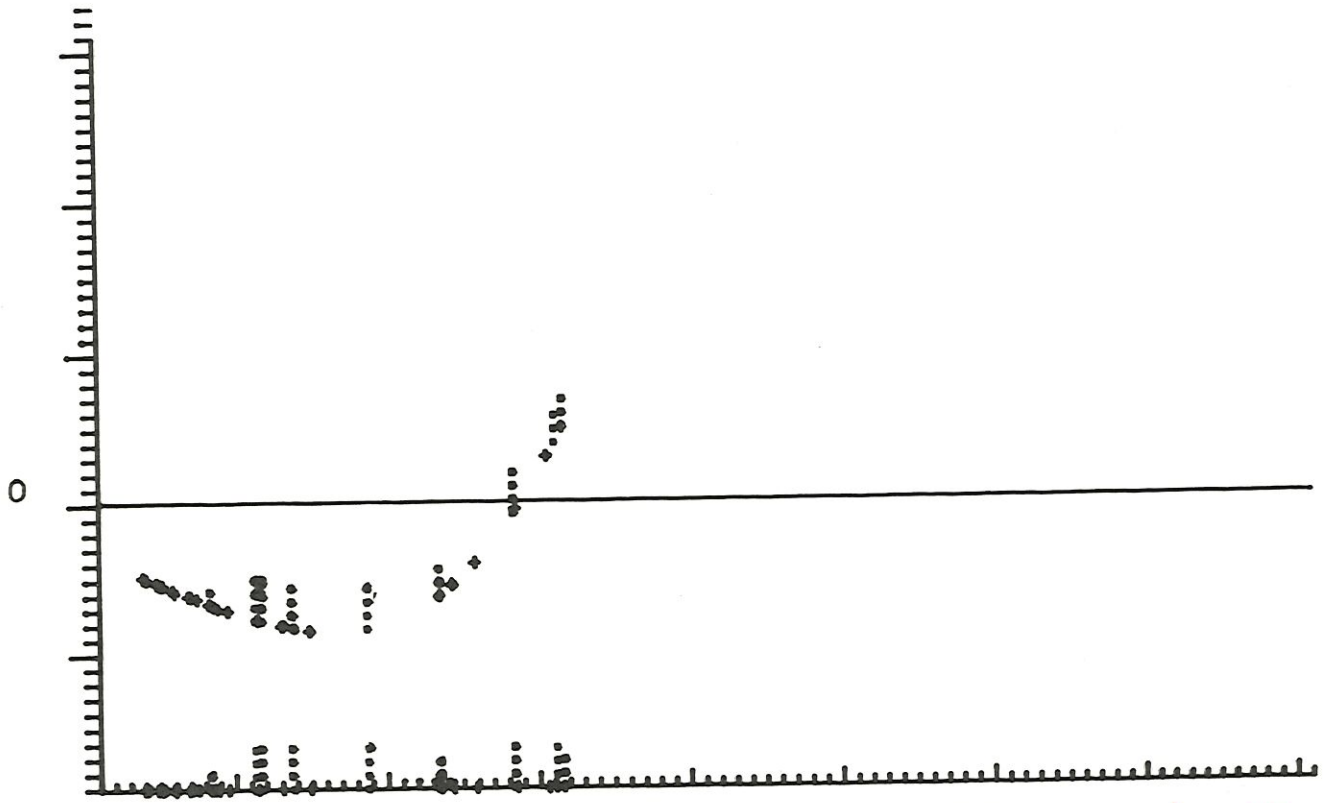
DESSIN DE LA FONCTION ETA DEB

NOM DU GRAPHE= ETA8418.DEB

**** 1--->9 **** 10--->18 **** 19--->27 **** 28--->36

++++ 37--->45 ++++ 46--->54 ++++ 55--->63 ++++ 64 --->72

0.1154487D+00 −0.6252036D+00 −0.5282142D+01 0.4675797D+02



YMIN= -1.10 YMAX= 3.50

XMIN= 0.00 XMAX= 0.50

FICHIER DE DONNEES= ETA84.DON

fig. 23

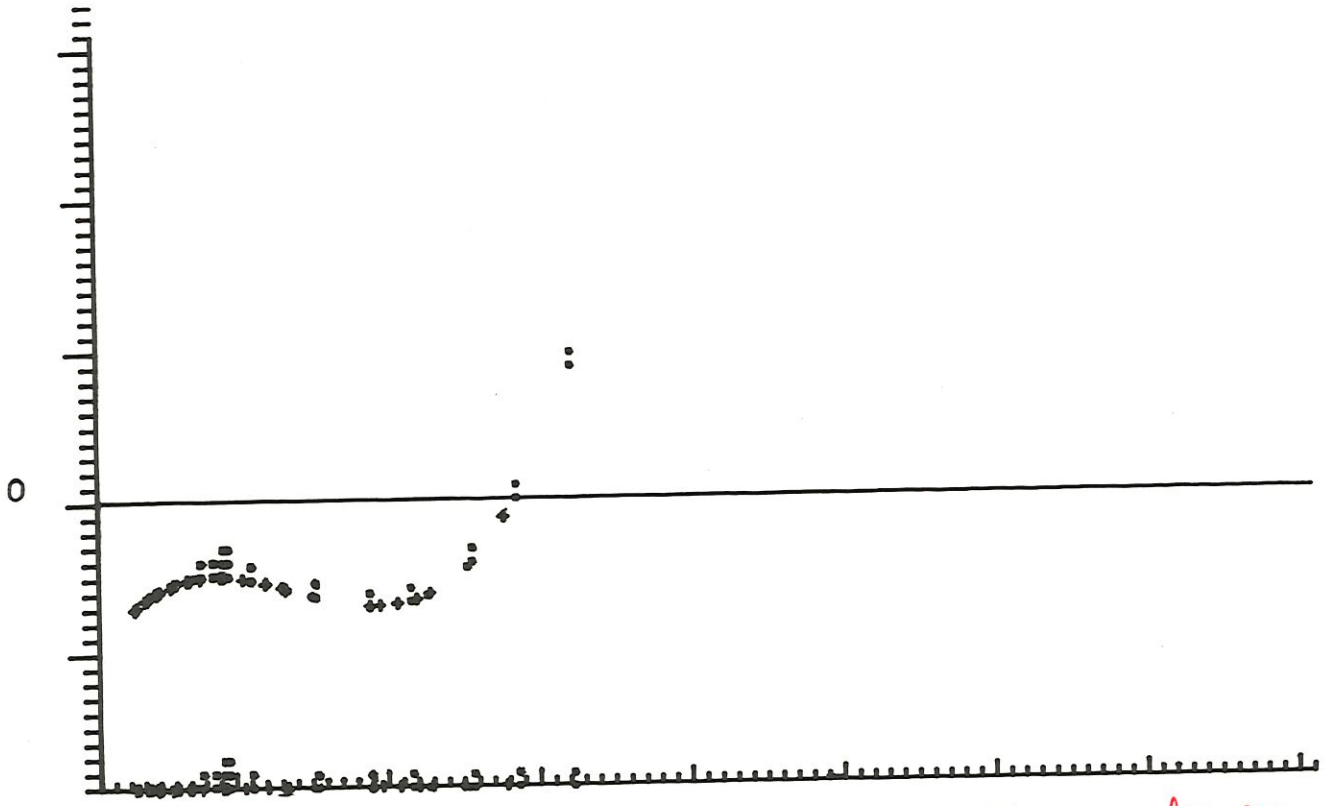
DESSIN DE LA FONCTION ETA DEB

NOM DU GRAPHE= DONETA8418.DEB

**** 1--->9 **** 10--->18 **** 19--->27 **** 28--->36

++++ 37--->45 ++++ 46--->54 ++++ 55--->63 ++++ 64 --->72

−0.4198923D+00 0.2356754D+01 −0.1114743D+02 0.3881252D+02



YMIN= -1.10 YMAX = 3.50

XMIN= 0.00 XMAX = 8.50

FICHIER DE DONNEES= DONETA84.DON

fig. 24

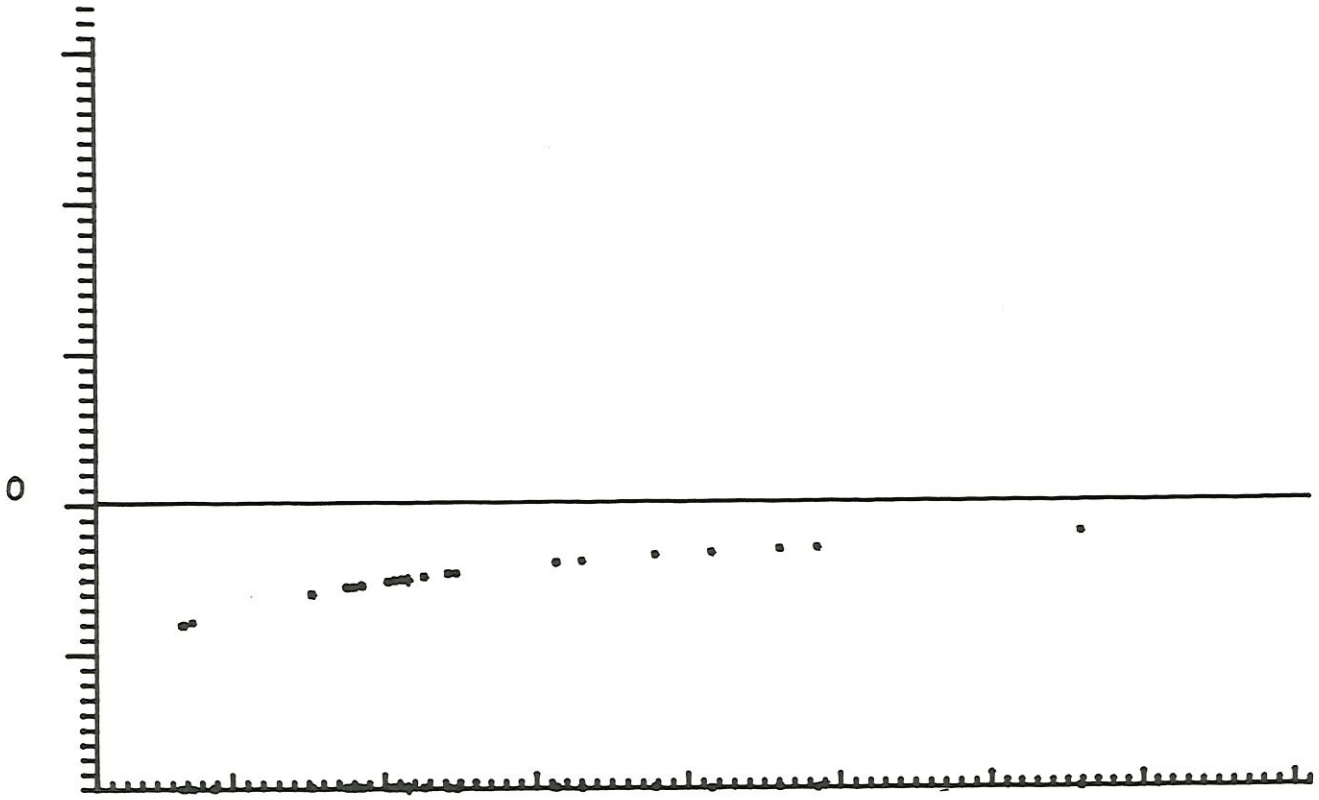
DESSIN DE LA FONCTION ETA DEB

NOM DU GRAPHE= ETA8618.DEB

.**** 1--->9 **** 10--->18 **** 19--->27 **** 28--->36

+ ++++ 37--->45 ++++ 46--->54 ++++ 55--->63 ++++ 64 --->72

-0.4312079D+00 0.3968177D+00 0.2196629D-01 0.4695199D+00



YMIN= -1.10 YMAX= 3.50

XMIN= 0.00 XMAX= 0.50

FICHIER DE DONNEES= ETA86.DON

fig. 25

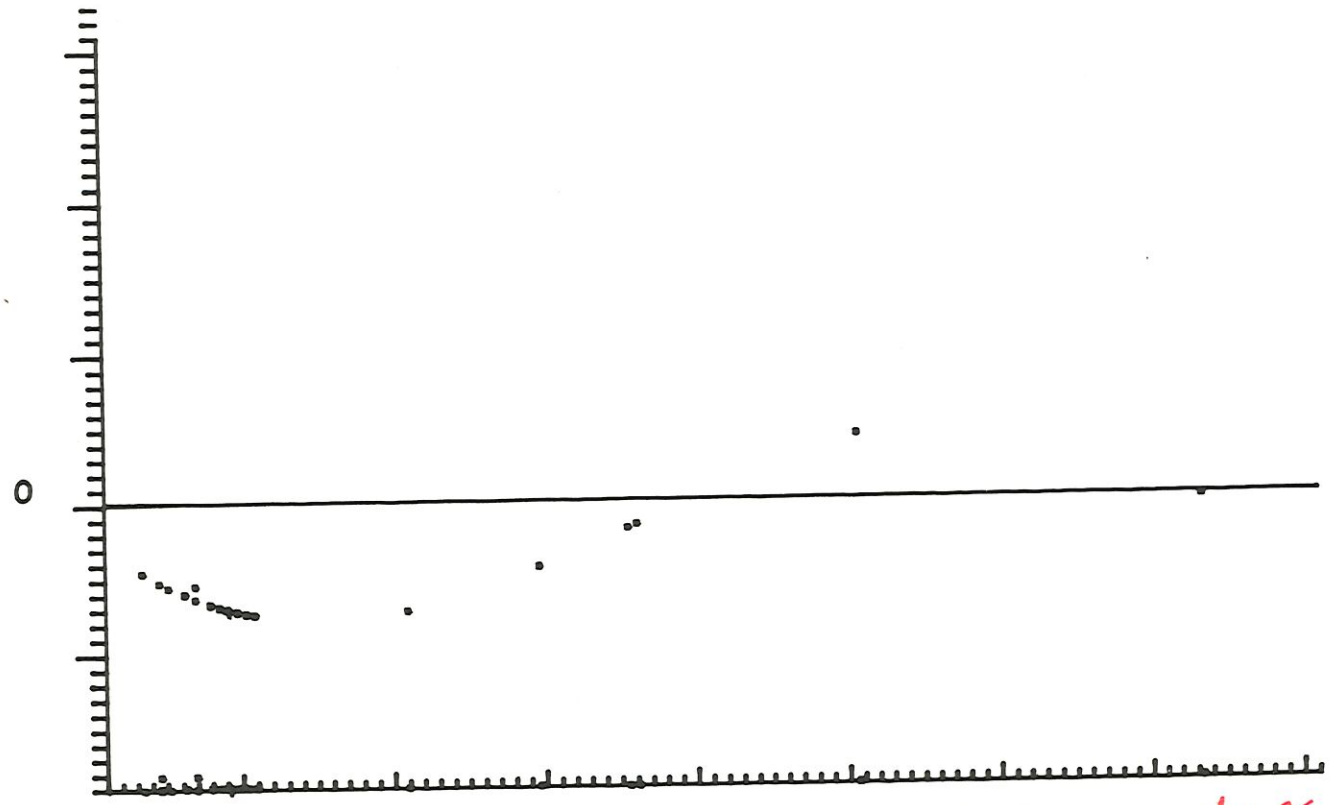
DESSIN DE LA FONCTION ETA DEB

NOM DU GRAPHE= SAMETA18.DEB

**** 1--->9 **** 10--->18 **** 19--->27 **** 28--->36

++++ 37--->45 ++++ 46--->54 ++++ 55--->63 ++++ 64 --->72

0.1971516D+00 −0.1679914D+01 0.3146145D+01 −0.3331957D+00



YMIN= −1.10 YMAX= 3.50

XMIN= 0.00 XMAX= 0.50

FICHIER DE DONNEES= SAMETA.DON

Fig. 26

Nous nous limitons, donc, à un modèle mathématique de la forme :

ETA(CHLA,MES)=F(CHLA,P(I))+F(MES,P(J))+P(11)

où

i=1..5

j=6..10

P(k) paramètres d'optimisation

F fonction définie par l'équation 4

Nous avons précédemment, à la phase 1, fixé la valeur des paramètres . Nous avons donc obtenu un modèle de la fonction ETA acceptable (selon les critères que nous nous sommes fixés) , mais le gros désavantage de ce modèle est qu'il comporte onze degrés de liberté, ce qui exige une nombre important de données, pour la simulation et pour assurer de la fiabilité de ce modèle. Nous avons donc essayé de simplifier, au maximum, cette fonction, pour diminuer le nombre de paramètres à optimiser .

Nous avons décidé de fixer quatres paramètres à la valeur un, réduisant ainsi la fonction à la forme :

ETA(CHLA, MES)=ETA_CHLA(CHLA)+ETA_MES(MES)+p(9)

Où ETA_CHLA(chla)=chla*e^(-p(1)*(chla-p(2))) + e^(p(3)*(chla-p(4)))

ETA_MES(mes)=mes*e^(-p(5)*(mes-p(6))) + e^(p(7)*(mes-p(8)))

p(i) sont des paramètres à optimiser (i=1..9)

p(1), p(3), p(5), p(7) sont positifs

(Choix 8)

Le tableau résultat, ci-dessous, permet de comparer la fonction analytique simplifiée à celle proposée initialement .

Fichiers de données	Résidu : choix analytique 7	Résidu : choix simplifié 8
Meuse 1983	7.34 (0.328)	5.96 (0.294)
Meuse 1986	2.47 (0.335)	3.42 (0.393)
Sambre 1986	3.88 (0.430)	4.21 (0.447)
Meuse 1984	50.07 (0.656)	50.30 (0.658)
Basse Meuse 1984	47.53 (0.748)	53.65 (0.794)

Ces résultats nous semblent satisfaisants, compte tenu de la simplicité recherchée dans le modèle . Néanmoins, afin de donner une signification physique au terme indépendant, nous avons reformulé la loi . En effet, en eau pure, le coefficient d'extinction n'est pas égal à zéro, bien que les concentrations en chlorophylle_A et en matière en suspension le soient . Le terme indépendant devrait donc être la contribution de l'eau dans le calcul du coefficient d'extinction . Si on se réfère au premier chapitre, nous avions la relation suivante :

le coefficient d'extinction $\eta = \eta_{eau} + \eta_{sd} + \eta_{mat}$

où

η_{eau} =contribution de l'eau

η_{sd} =contribution des sels minéraux

η_{mat} =contribution de la MES et du plancton(évalué par la CHLA)

La fonction ETA serait donc, en fait, l'approximation de la somme des contributions dues à l'eau et aux masses organiques :

$\eta = ETA(CHLA, MES, EAU) + \eta_{eau}$

Les "biologistes" estiment que la valeur de η_{eau} est, approximativement, comprise entre 0.3 et 0.5 (pour la Meuse) .

Afin de donner au terme indépendant cette signification, nous avons transformé la loi proposée en une loi équivalente, à un changement de variable près :

. la fonction ETA_CHLA ou ETA_MES donnée par le choix 8 devient

$$F(T, P(i)) = T * e^{-P(1)*(T-P(2))} + e^{-p(3)*p(4)} * (e^{p(3)*T} - 1)$$

$i = 1..4$

(*équation 5*)

.. la fonction ETA se transforme donc en :

ETA(CHLA, MES) = F(CHLA, P(i)) + F(MES, P(j)) + P(9)

Où i = 1..4

j = 5..8

P(i), P(j), P(9) sont les paramètres à optimiser

P(1), P(3), P(4), P(6) sont *positifs*

la fonction F étant donnée par l'équation 5

(*Choix 9*)

Nous avons effectué plusieurs essais, en modifiant à chaque fois la valeur du terme indépendant, le faisant varier entre 0.3 et 0.5 . Nous l'avons finalement fixé à cette dernière valeur .

Nous avons rassemblé ci-dessous les résultats mettant en parallèle les résidus obtenus sur base de la méthode des B-splines, et ceux obtenus par cette dernière fonction .

Fichiers de données	Résidu : choix B-splines 5	Résidu : choix anlytique 9
Meuse 1983	4.80 (0.266)	5.96 (0.294)
Meuse 1986	2.54 (0.340)	3.42 (0.393)
Sambre 1986	3.89 (0.430)	4.21 (0.447)
Meuse 1984	45.45 (0.625)	50.30 (0.658)
Basse Meuse 1984	42.78 (0.709)	53.65 (0.794)

Pour se faire plus clairement une idée de la valeur de cette loi, nous vous proposons le graphe des "fittings" sur les données MEUSE 1986 (figure 27).

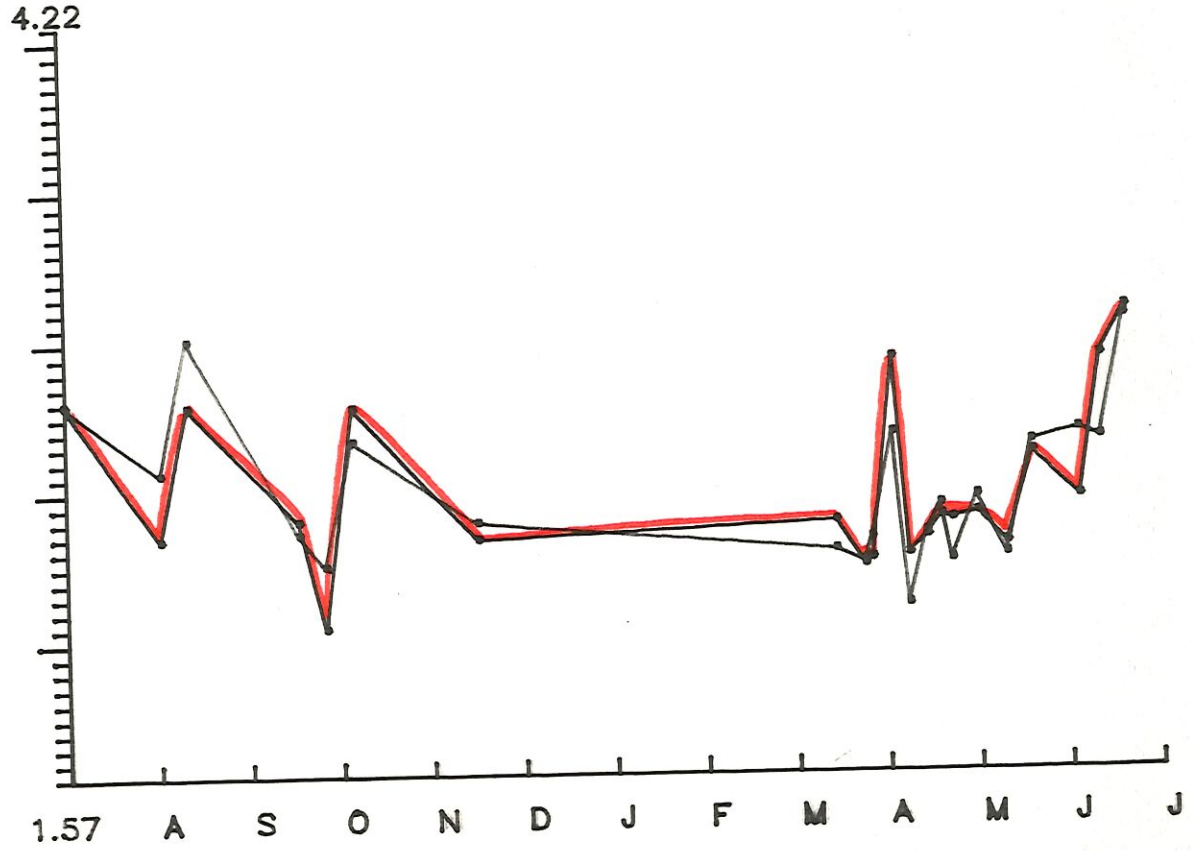
Nous n'avons pu trouver d'autres simplifications acceptables, il nous reste donc huit paramètres à optimiser . Nous avons essayé, en vain, en comparant la valeur de ces paramètres sur les différents jeux de données, de retrouver une constance . Nous avons donc adopté cette formulation pour la fonction ETA; la critique la plus importante que l'on peut faire à cette fonction, est la diversité des courbes possibles (compte tenu du nombre relativement élevé de degrés de liberté) . Nous n'avons malheureusement pas trouvé, dans le cadre de ce mémoire, de meilleur résultat .

CALCUL DU COEFFICIENT D'EXTINCTION

NOM DU GRAPHE= eta8628.cmc
LES ETA CALCULES SONT EN BLEU
LES ETA MESURES SONT EN ROUGE

0.1672622D+01 −0.8920855D+00 −0.2182523D+00 −0.3669987D+02 0.3904169D+00
0.3904169D+00 −0.1759890D+02 −0.1245954D−01 −0.3401693D+01

LE RESIDU FINAL= 0.3459201D+01



FICHIER DE DONNEES= meuse annee 1986

F(X)= f(chla)+f(mes) f(T)=T*exp(−a*(T−b))+exp(−c*d)*(exp(c*T)−1)

fig. 27

Dans le chapitre suivant, nous donnerons les résultats de la validation sur les données du canal Albert . Mais avant d'en venir à cette validation, nous allons comparer le modèle de la fonction ETA choisi, avec des fonctions plus simples proposées ou suggérées par les "biologistes"; ce sera le contenu du paragraphe suivant .

4. COMPARAISON AVEC DES FONCTIONS PROPOSEES PAR DES ECOLOGISTES

Le modèle proposé par l'université de Liège dans le rapport final de Juillet 1985 [1] était le suivant :

ETA(CHLA) = A * CHLA + B (*Choix 10*)

Où A, B sont des paramètres

Le tableau de résultats ci-dessous permet de se rendre compte de l'amélioration apportée par le modèle que nous avons développé dans le cadre de ce mémoire .

Fichiers de données	Résidu : loi proposée par dans le rapport (10)	Résidu : loi de notre modèle (Choix 9)
Meuse 1983	79.60 (1.08)	5.96 (0.294)
Meuse 1986	12.57 (0.75)	3.42 (0.393)
Sambre 1986	19.31 (0.96)	4.21 (0.447)
Meuse 1984	121.86 (1.02)	50.30 (0.658)
Basse Meuse 1984	95.79 (1.06)	53.65 (0.794)

Le graphique de "fittings" de la fonction ETA(CHLA) ci-joint montre qu'il était nécessaire d'améliorer les simulations du coefficient d'extinction (figure 28) .

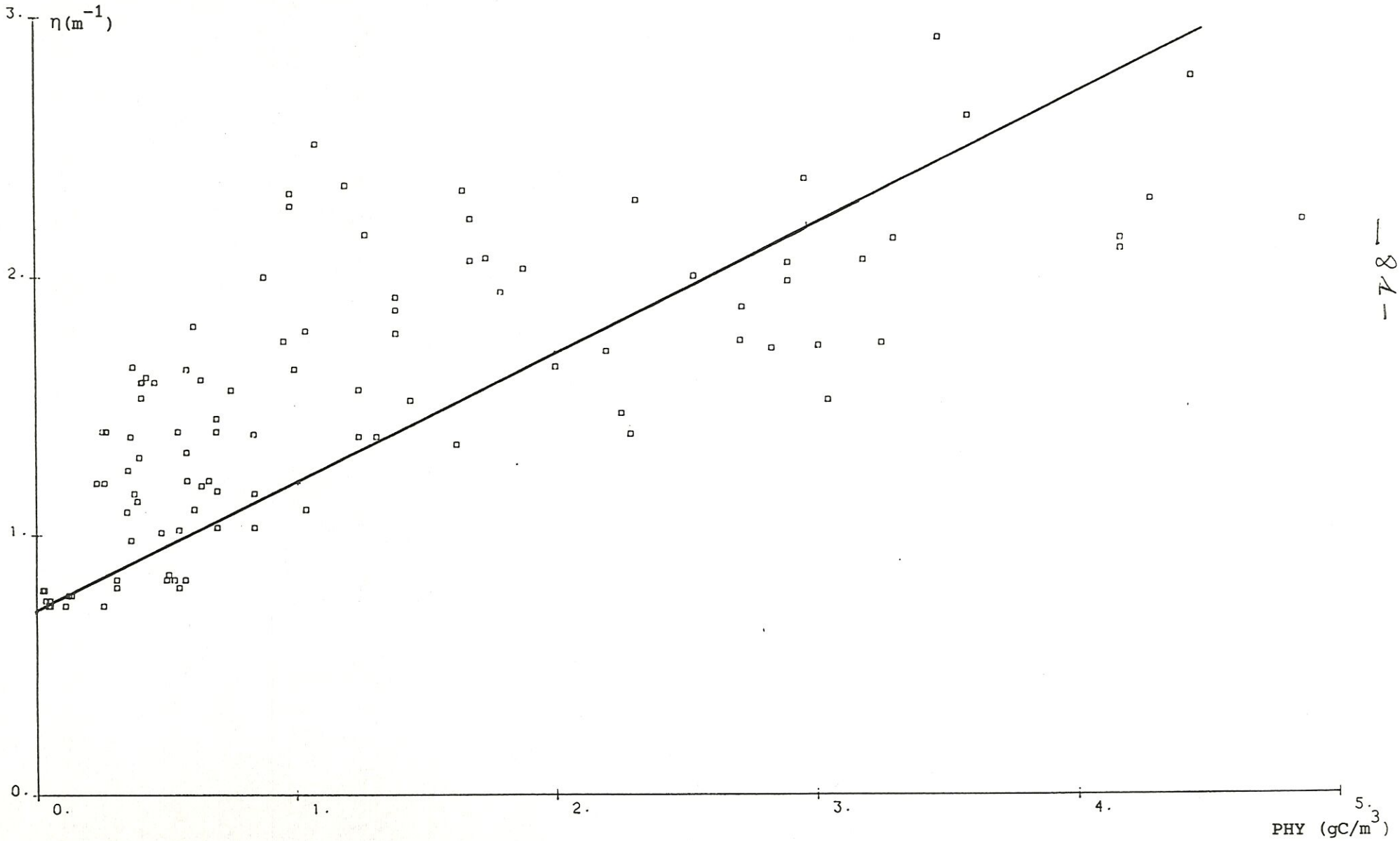


Fig. 28 : Relation coefficient d'extinction - concentration en phytoplancton

Dans le même lignée, nous avons formulé une fonction similaire, en ajoutant une contribution linéaire de la matière en suspension . La loi est de la forme :

ETA(CHLA, MES) = A * CHLA + B * MES +C (*Choix 11*)

Où A, B, C sont les paramètres à optimiser

Comme dans le cas précédent, cette fonction a l'avantage d'être linéaire et de comporter peu de paramètres, ce qui assure une optimisation rapide, ne nécessitant pas beaucoup de données .

Nous proposons un tableau de comparaison mettant en parallèle les lois 9 et 11.

Remarque : le tableau contient les résidus et les résidus moyens

Fichiers de données	Résidu : Loi linéaire (11)	Résidu : Loi analytique(9)
Meuse 1983	7.36 (0.329)	5.96 (0.294)
Meuse 1986	4.32 (0.443)	3.42 (0.393)
Sambre 1986	7.66 (0.604)	4.21 (0.447)
Meuse 1984	57.75 (0.705)	50.30 (0.658)
Basse Meuse 1984	69.81 (0.906)	53.65 (0.794)

Nous pouvons constater une forte amélioration, proportionnellement à la complexité introduite !

Le tableau suivant met en comparaison les résidus obtenus par la méthode des B-splines 5 et ceux obtenus par la loi 11 . Il est évident que les différences vont s'accroître sur les fichiers de données incluant une plus large gamme de valeurs pour le coefficient d'extinction .

Tableau de comparaison :

Fichiers de données	Résidu : Loi linéaire (11)	Résidu : "Splines" (5)
Meuse 1983	7.36 (0.329)	4.80 (0.266)
Meuse 1986	4.32 (0.443)	2.54 (0.340)
Sambre 1986	7.66 (0.604)	3.89 (0.430)
Meuse 1984	57.75 (0.705)	45.45 (0.625)
Basse Meuse 1984	69.81 (0.906)	42.78 (0.709)

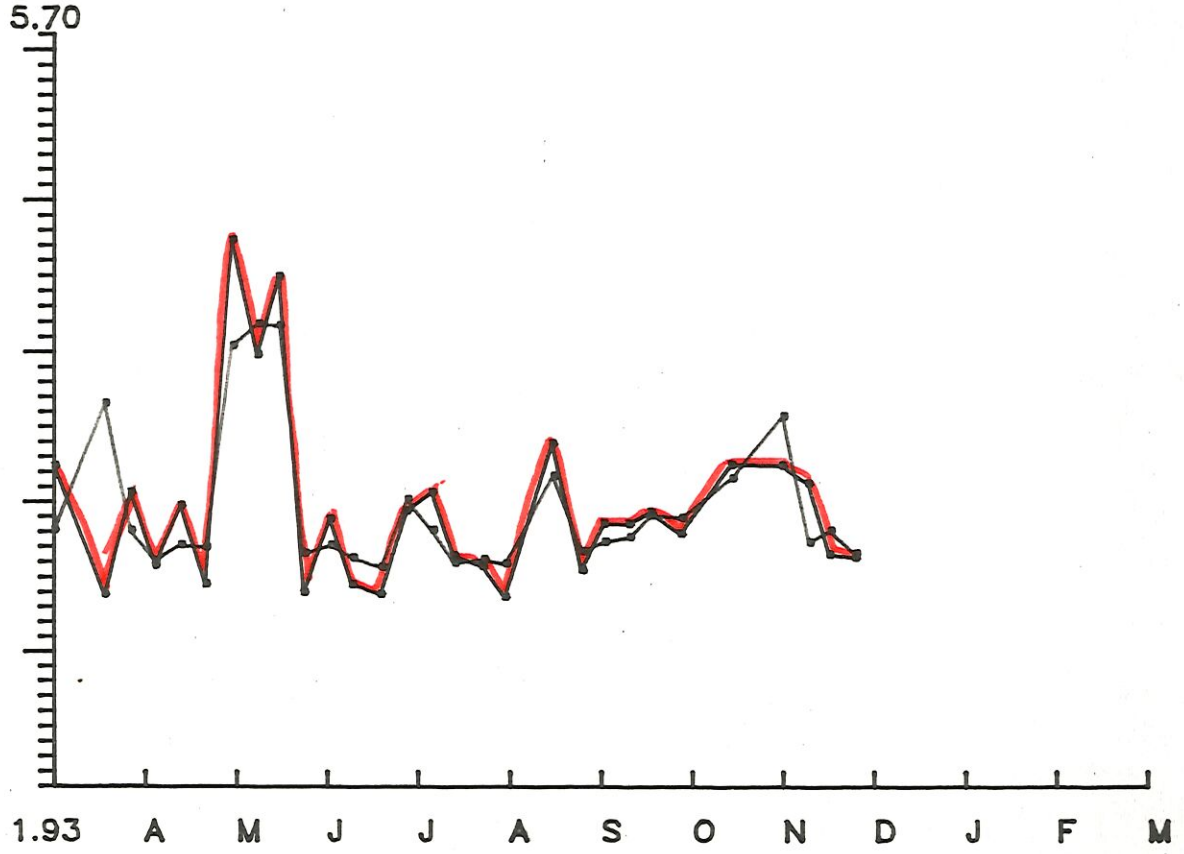
Les graphes des "fittings" que nous vous proposons se rapportent aux fichiers de données Basse Meuse 1984 et Sambre 1986 (figures 29 et 30) .

CALCUL DU COEFFICIENT D'EXTINCTION

NOM DU GRAPHE= doneta8424.cmc
LES ETA CALCULES SONT EN BLEU
LES ETA MESURES SONT EN ROUGE

0.2188534D-02 0.1675548D+01 0.5806063D-01

LE RESIDU FINAL= 0.4986373D+02



FICHIER DE DONNEES= basse meuse annee 1984

F(X)= a*CHLA+b*MES+c

fig. 29

CALCUL DU COEFFICIENT D'EXTINCTION

NOM DU GRAPHE= sameta24.cmc
LES ETA CALCULES SONT EN BLEU
LES ETA MESURES SONT EN ROUGE

0.7885421D-02 0.1595661D+01 0.5635236D-01

LE RESIDU FINAL= 0.7656808D+01

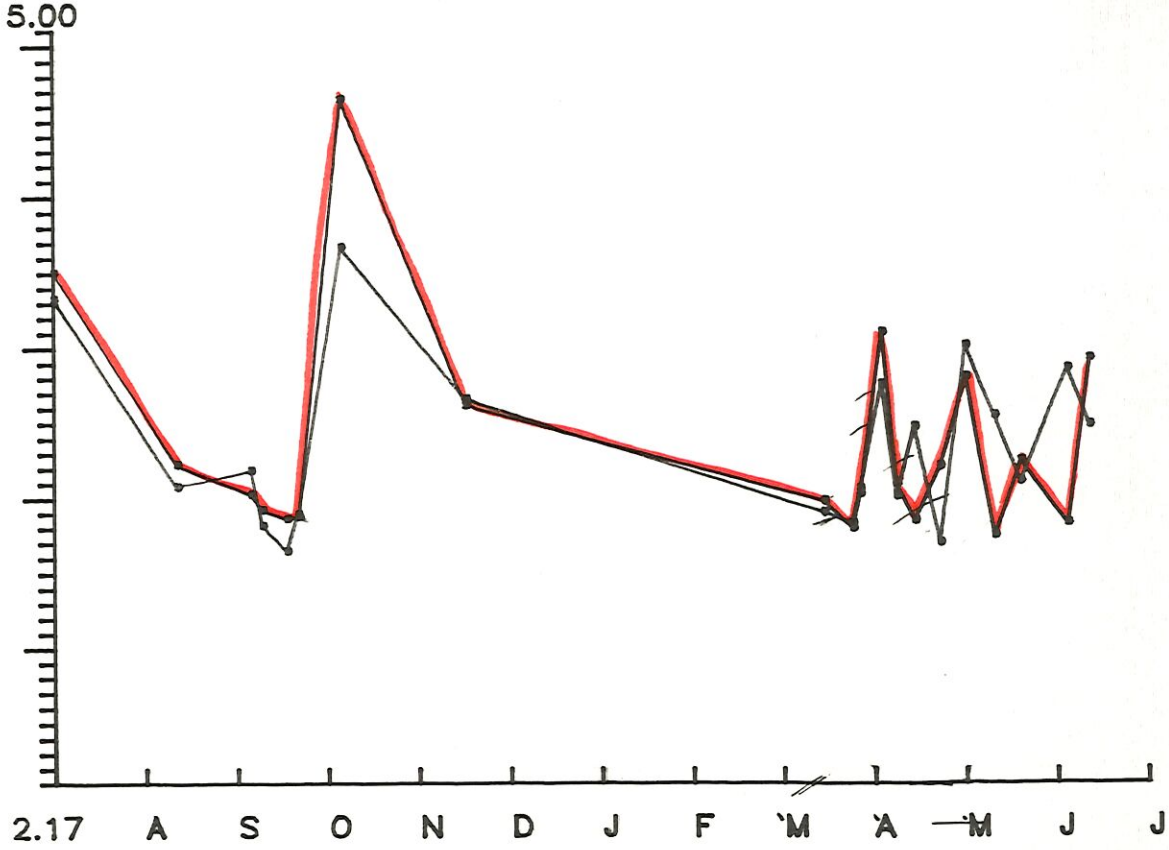


fig. 30

FICHIER DE DONNEES= sambre annee 1986

F(X)= a*CHLA+b*MES+c

La relation typique entre la chlorophylle_A et le coefficient d'extinction, ou entre ce dernier et la matière en suspension serait, pour les "biologistes", de forme exponentielle . En effet, l'absorption de lumière est d'autant plus forte qu'il y a de matière en suspension ou de chlorophylle_A dans l'eau, ce qui se conçoit facilement . La loi proposée est donc du type :

ETA(CHLA, MES) = H(CHLA, P(i)) + H(MES, P(j)) + P(5)

Où i = 1,2

j = 3,4

P(1)...P(5) sont des paramètres à optimiser

$$H(T,P(i)) = P(1).(E^{P(2).T} - 1) \qquad \textit{(choix 12)}$$

Nous proposons un tableau de résultats permettant de comparer cette loi avec la loi analytique (9)

Fichiers de données	Résidu : Loi exponent. (12)	Résidu : Loi analytique(9)
Meuse 1983	7.37 (0.329)	5.96 (0.294)
Meuse 1986	4.31 (0.443)	3.42 (0.393)
Sambre 1986	3.99 (0.436)	4.21 (0.447)
Meuse 1984	54.20 (0.705)	50.30 (0.658)
Basse Meuse 1984	57.39 (0.822)	53.65 (0.794)

Le graphique des "fittings" présenté ci-après porte sur le fichier de données Meuse 1983 (figure 31) .

Remarque : Toutes les fonctions que nous venons d'expliciter dans ce paragraphe vérifient les hypothèses que nous avons imposéee au chapitre II, à savoir, la positivité (quels que soient les paramètres), la continuité de la fonction et de la dérivée première .

On peut donc remarquer que les résultats obtenus par ces fonctions plus simples ne sont pas catastrophiques et peuvent même être valables sur certains jeux de données; cependant, ils ne savent pas reproduire toutes les évolutions du coefficient d'extinction, principalement lorsque celui-ci couvre une gamme de valeurs assez étendue .

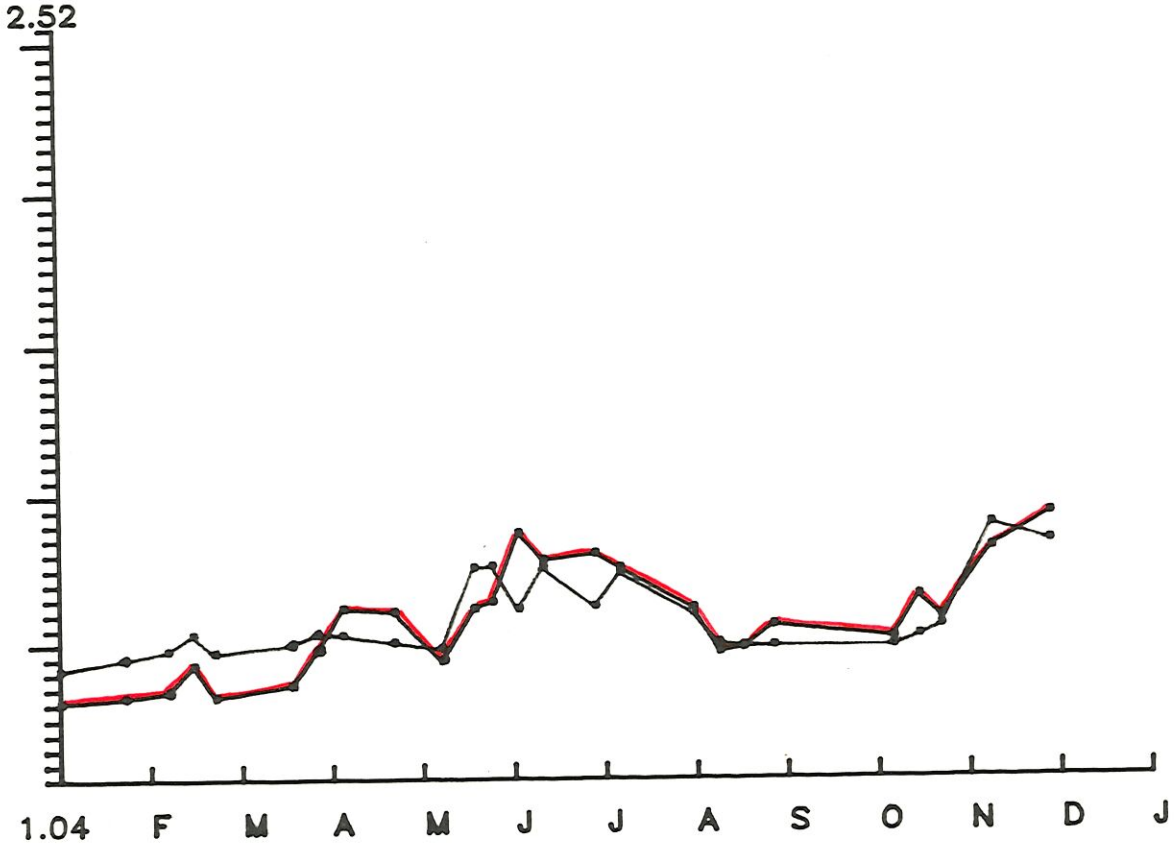
Le coefficient d'extinction est mieux identifié par la fonction 9, qui est plus complexe déjà rien que par son aspect non linéaire, et qui comporte plus de paramètres à optimiser . La préférence d'une fonction plutôt qu'une autre dépendra donc de la précision souhaitée, de la complexité acceptée, ainsi que du nombre de données disponibles, et éventuellement des sous-routines d'optimisation dont on dispose .

CALCUL DU COEFFICIENT D'EXTINCTION

NOM DU GRAPHE= eta8327.cmc
LES ETA CALCULES SONT EN BLEU
LES ETA MESURES SONT EN ROUGE

0.2557697D+04 0.2166351D-02 0.8791719D+03 0.4389384D-02 0.9421164D+00

LE RESIDU FINAL= 0.7364342D+01



FICHIER DE DONNEES= meuse annee 1983

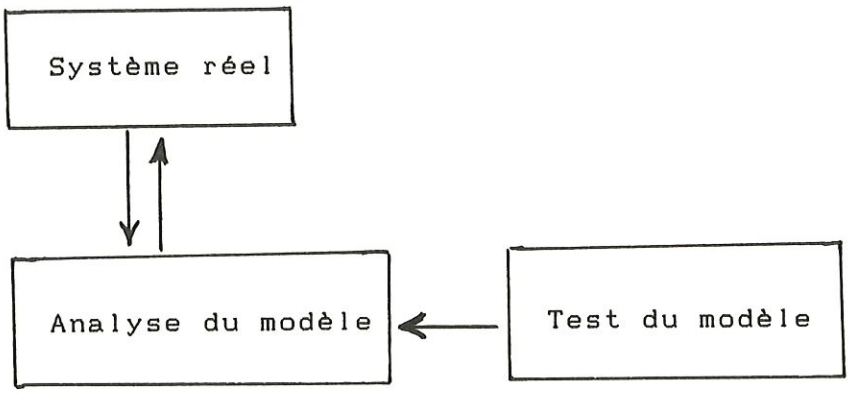
F(X)= a*(exp(b*CHLA)-1)+c*(exp(d*MES)-1)

fig. 31

CHAPITRE IV

Validation et Analyse du modèle par rapport au système réel

Au cours du chapitre précédent, nous avons établi plusieurs modèles acceptables, à savoir une loi analytique comportant huit paramètres (choix 9), une loi linéaire (choix 11), ainsi qu'une loi exponentielle (choix 12) . Il reste maintenant à essayer de valider ces modèles sur de nouveaux jeux de données. En effet, si on se réfère au schèma, proposé au début du troisième chapitre, décrivant la démarche adoptée, il nous reste à exploiter la dernière partie, à savoir :



Le test du modèle final, c'est la validation que nous avons établie sur base de données effectuées dans le Canal Albert en 1986 et en 1987 . Le nombre de données mises à notre disposition est très important, de l'ordre de 200 pour 1986 et de 155 pour 1987 .

Nous terminerons ce chapitre en commentant quelque peu la loi analytique 9 (celle comportant 8 paramètres) en fonction du système réel qu'elle devrait représenter .

VALIDATION

Nous avons testé les différents modèles acceptables, pour chacune des fonctions (choix 9, 11 et 12) sur le Canal Albert en 1986 et 1987 . Nous proposons des tableaux de résultats permettant de comparer les résidus obtenus sur base de la méthode des B-splines (choix 5) avec ceux du modèle retenu . Le résidu moyen, c'est-à-dire, l'erreur moyenne commise sur chaque donnée, permet de mieux apprécier la valeur du modèle, d'autant plus que le nombre de données est important .

Nous avons choisi la Meuse en 1984 comme fichier de référence, car c'est le seul fichier, utilisé pour l'élaboration du modèle, qui comportait un grand nombre de données (116) .

Etablissons tout d'abord la comparaison entre les résidus obtenus par la méthode des B-splines et ceux obtenus via la loi analytique :

Tableau de comparaison pour la fonction analytique (Choix 9)

Fichiers de données	Résidu (5)	Résidu moyen (5)	Résidu (9)	Résidu moyen (9)
Canal 86	174.97	0.93	177,66	0.94
Canal 87	70.49	0.67	74.21	0.69
Meuse 84	45.45	0.62	50.30	0.66

Les tableaux suivants établissent les comparaisons entre les résidus obtenus par les B-splines et ceux obtenus par les autres modèles proposés au chapitre trois (choix 11 et 12) .

Tableau de comparaison pour la fonction exponentielle (12)

Fichiers de données	Résidu (5)	Résidu moyen(5)	Résidu (12)	Résidu moyen (12)
Canal 86	174.97	0.93	175.0	0.93
Canal 87	70.49	0.67	71.68	0.68
Meuse 84	45.45	0.62	54.20	0.70

Tableau de comparaison pour la fonction linéaire (11)

Fichiers de données	Résidu (5)	Résidu moyen(5)	Résidu (11)	Résidu moyen (11)
Canal 86	174.97	0.93	182.63	0.95
Canal 87	70.49	0.67	80.91	0.72
Meuse 84	45.45	0.62	57.75	0.71

Nous constatons que pour les trois modèles les résidus et les erreurs moyennes sur chaque donnnée sont relativament élevés.

Une explication possible de ces grandes valeurs est la *non fiabilité* des mesures . En effet, une étude récente des AWW montre que des variations sur les mesures peuvent atteindre jusqu'à 40 % pour certaines stations du Canal Albert, selon que les échantillonnages sont fait à différentes profondeurs ou que l'emplacement des mesures est plus ou moins éloigné de la berge.

Exemple : Donnée 1 :matière en suspension 57.00
chlorophylle_A 40.30
coefficient d'extinction 1.38
Donnée 2 :matière en suspension 24.70
chlorophylle_A 29.20
coefficient d'extinction 2.53

Ces deux données sont incompatibles; en effet, plus il y a de chlorophylle_A ou plus il y a de matière en suspension, plus le coefficient d'extinction doit être élevé !

De plus si on compare les résidus obtenus par notre modèle et ceux obtenus par les B-splines, on peut remarquer que les différences ne sont pas très élevées . Ce qui tenterait à prouver que la validation, bien que peu satisfaisante sur le Canal Albert, ne nie pas la fiabilité du modèle (Existe-t-il un modèle meilleur ?) .

2. ANALYSE % AU SYSTEME REEL

Les lois exponentielle (choix 12) et linéaire (choix 11) sont des fonctions croissantes, respectant les conditions imposées au chapitre deux, c'est-à-dire la positivité, la continuité et la dérivabilité des fonctions, ce qui nous semble correspondre au système réel . Par contre, la loi analytique comportant huit paramètres (choix 9) vérifie également les conditions imposées au chapitre deux, mais ne présente la croissance que presque partout; en effet, on voit parfois apparaître une légère décroissance sur une petite gamme de valeurs de la chlorophylle_A et de la matière en suspension (cfr fig.33) . Or, nous avions dit précédemment que plus il y a de chlorophylle_A ou de matière en suspension, plus le coefficient d'extinction est élevé ... La seule justification qu'on nous a proposée serait un effet lié à la **granulométrie**, ce qui signifie que pour un même poids de matière en suspension, la transparence de l'eau peut différer fortement en raison de la GROSSEUR des particules . Imaginons deux cas extrêmes : D'une part, un bouchon flottant dans l'eau, altérant peu la transparence de celle-ci; d'autre part, ce même bouchon broyé en minuscules particules flottant à la surface de l'eau; la transparence est fortement diminuée par rapport au cas précédent! Il est donc possible qu'à un moment le débit, plus fort qu'à l'ordinaire, "arrache" de plus grosses particules du lit de la rivière pour les remettre en suspension ... Ce qui expliquerait la légère décroissance de la fonction ETA_CHLA ou ETA_MES, lorsque cette situation se présente .

Par ailleurs, le système réel est continu, tandis que le modèle n'a été établi que sur des données discrètes . Il est donc dangereux de généraliser la fonction (ayant ses paramètres fixés) pour n'importe quelle gamme de valeurs de la matière en suspension et de la chlorophylle_A; il faut se restreindre à la gamme de valeurs ayant servi à la détermination des paramètres ! A cet effet, nous vous proposons quelques courbes des fonctions ETA_CHLA (fig 32 et 33) et ETA_MES (fig 34 et 35), obtenues par simulation sur des données *continues*. En dessous de chaque courbe, nous avons tracé un **histographe** permettant de mieux se rendre compte des régions où la courbe est significative . Les petits rectangles positionnés sur la courbe représentent les classes où il y a des données .

calcul du coefficient d'extinction

fichier de donnee = meuse annee 1983
nom du graphe = ETA8328.HISTCHLA
nomb.de donnees= 68
nomb.de classes= 20
residu= 0.5981809D+01
f(x)= f(chla)+f(mes) f(T)=T*exp(-a*(T-b))+exp(-c*d)*(exp(c*T)-1)
xmin= 0 xmax= 124
ymin= 0.0000000D+00 ymax= 0.1920814D+01
0.1542016D+01 -0.1218039D+01 0.1264393D+01 0.8680459D+00

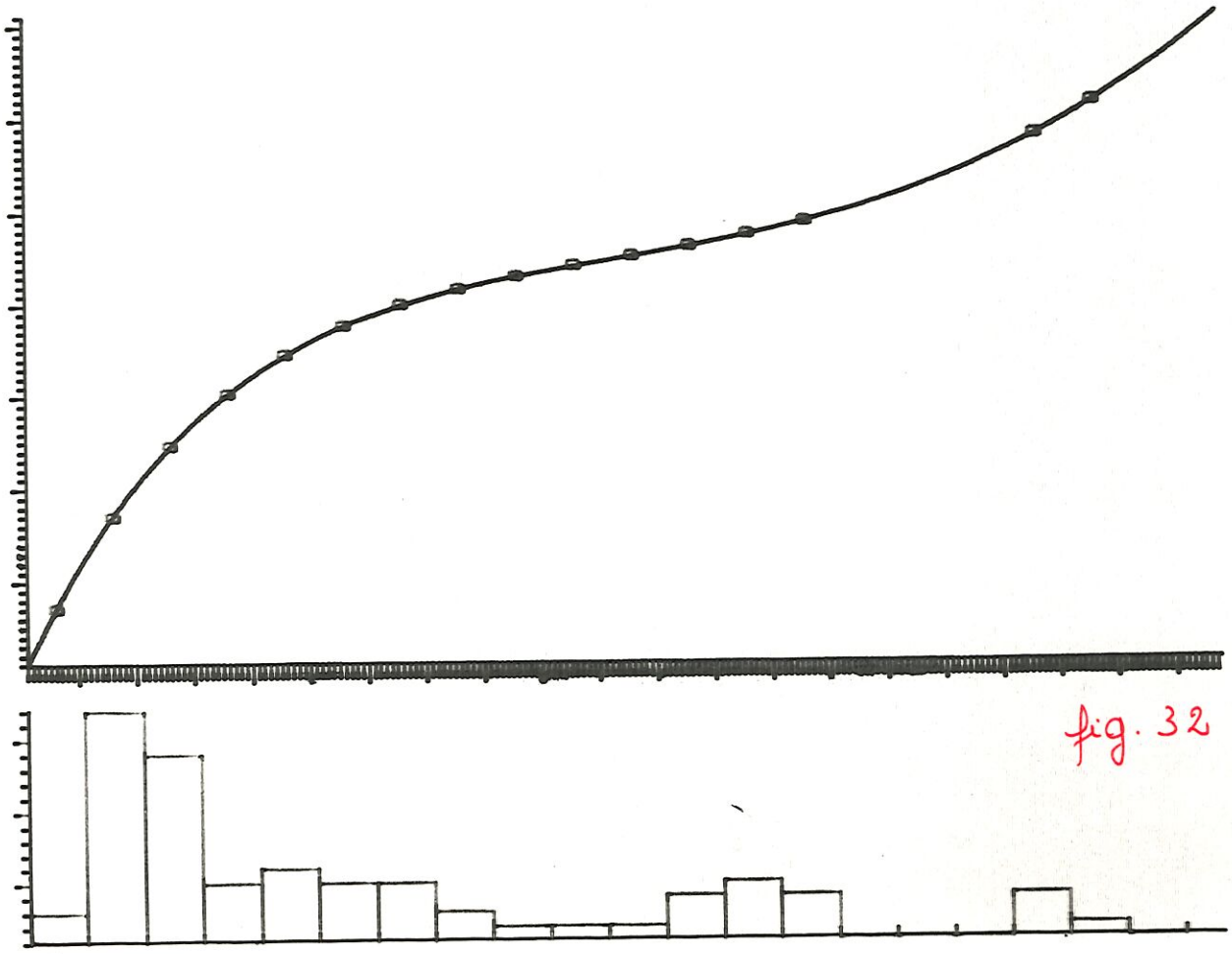


fig. 32

calcul du coefficient d'extinction

fichier de donnee = meuse annee 1984
nom du graphe = ETA8428.HISTCHLA
nomb.de donnees= 116
nomb.de classes= 20
residu= 0.5033293D+02
f(x)= f(chla)+f(mes) f(T)=T*exp(-a*(T-b))+exp(-c*d)*(exp(c*T)-1)
xmin= 0 xmax= 124
ymin= 0.0000000D+00 ymax= 0.2324301D+01
0.2257004D+01 -0.4271402D+00 -0.1354507D+01 0.7267415D+00

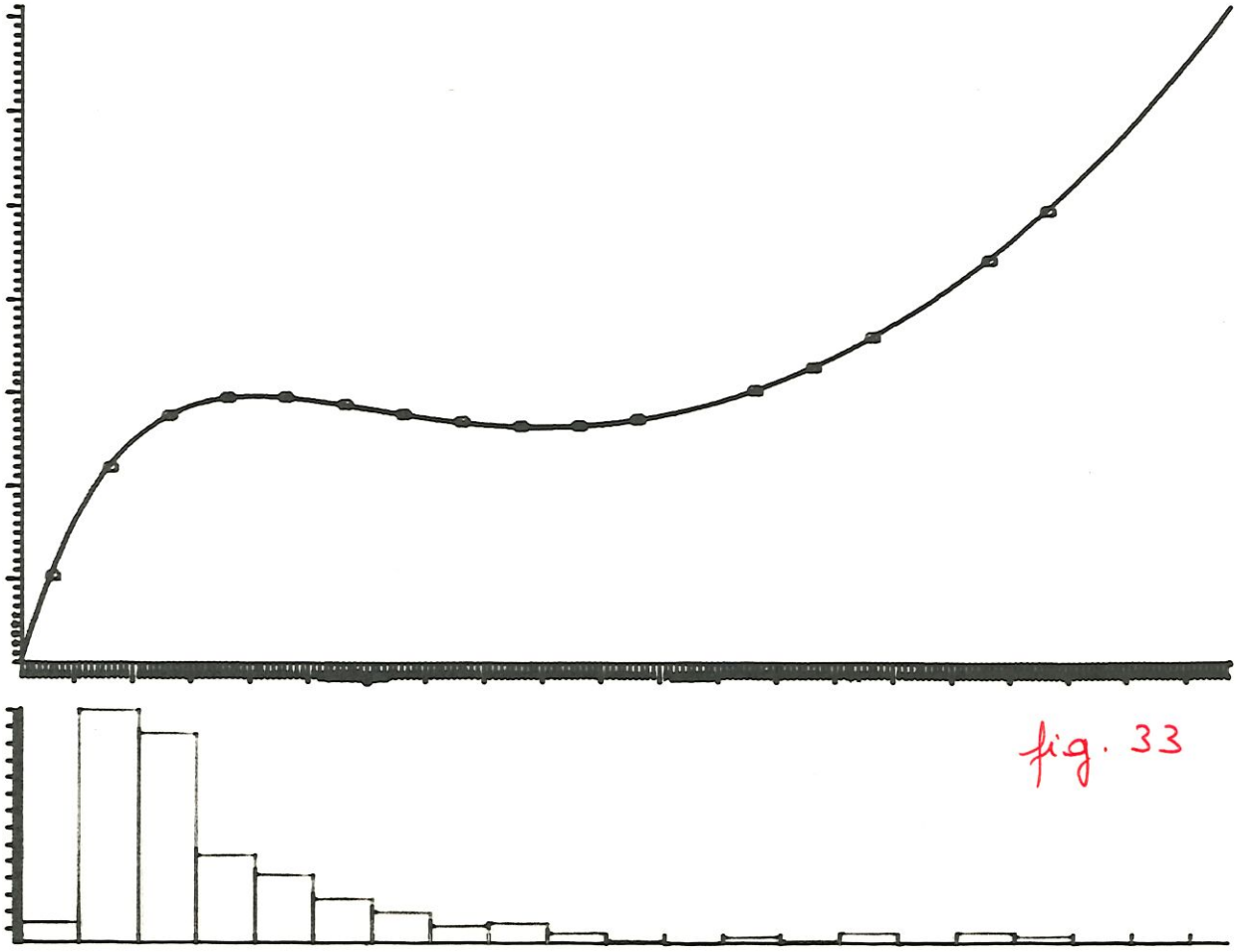


fig. 33

calcul du coefficient d'extinction

fichier de donnee = sambre annee 1986
nom du graphe = SAMETA28.HISTMES
nomb.de donnees= 21
nomb.de classes= 20
residu= 0.4234549D+01
f(x)= f(chla)+f(mes) f(T)=T*exp(-a*(T-b))+exp(-c*d)*(exp(c*T)-1)
xmin= 0 xmax= 148
ymin= 0.0000000D+00 ymax= 0.1747900D+01
0.2811587D+01 -0.1334352D+00 0.1939877D+01 0.1066248D+00

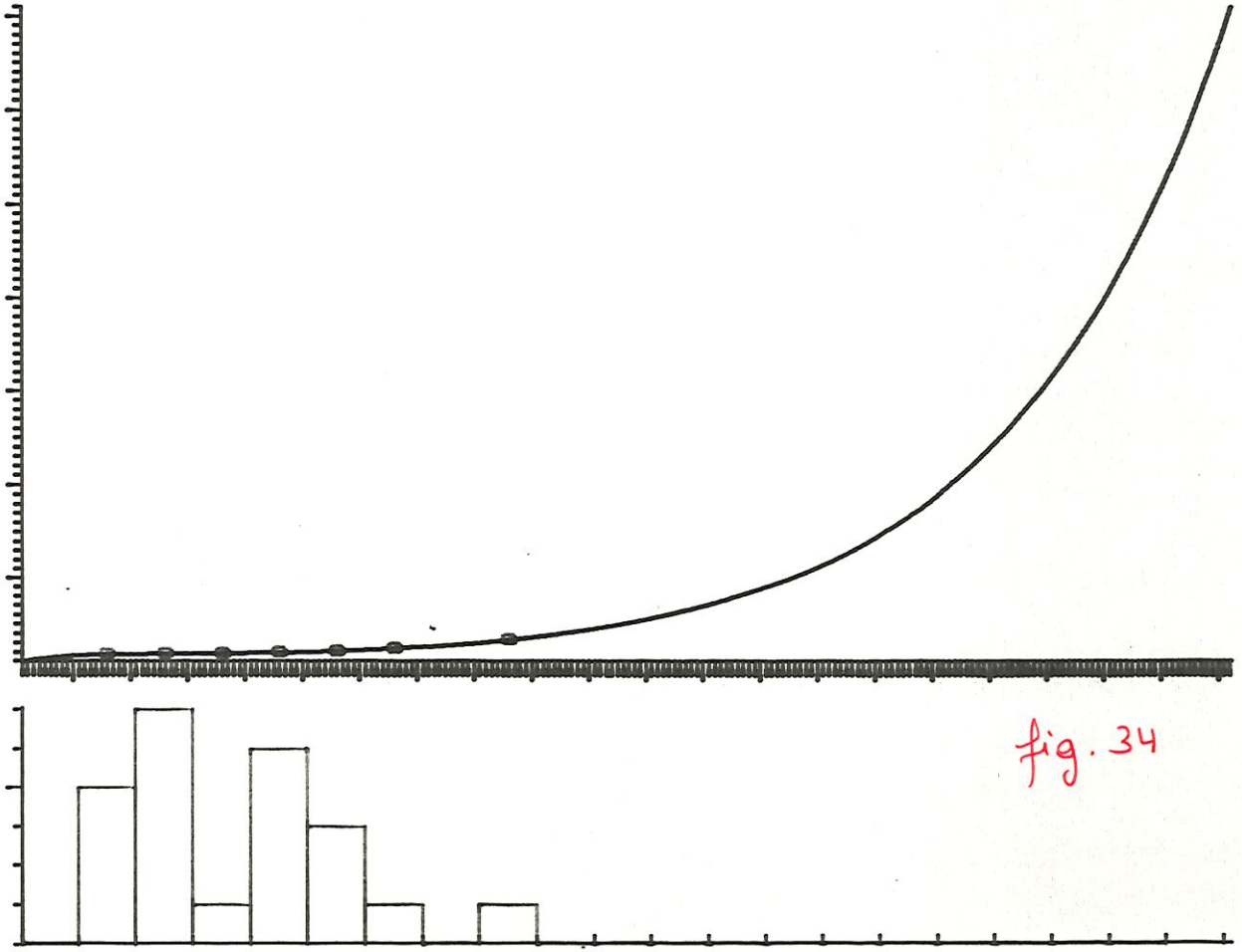


fig. 34

calcul du coefficient d'extinction

fichier de donnee = canal albert annee 1986
nom du graphe = CANAL8628.HISTMES
nomb.de donnees= 200
nomb.de classes= 20
residu= 0.1760887D+03
f(x)= f(chla)+f(mes) f(T)=T*exp(-a*(T-b))+exp(-c*d)*(exp(c*T)-1)
xmin= 0 xmax= 148
ymin= 0.0000000D+00 ymax= 0.5282683D+01
0.7044107D+00 -0.5236677D+01 -0.1134073D-01 -0.1005174D+01

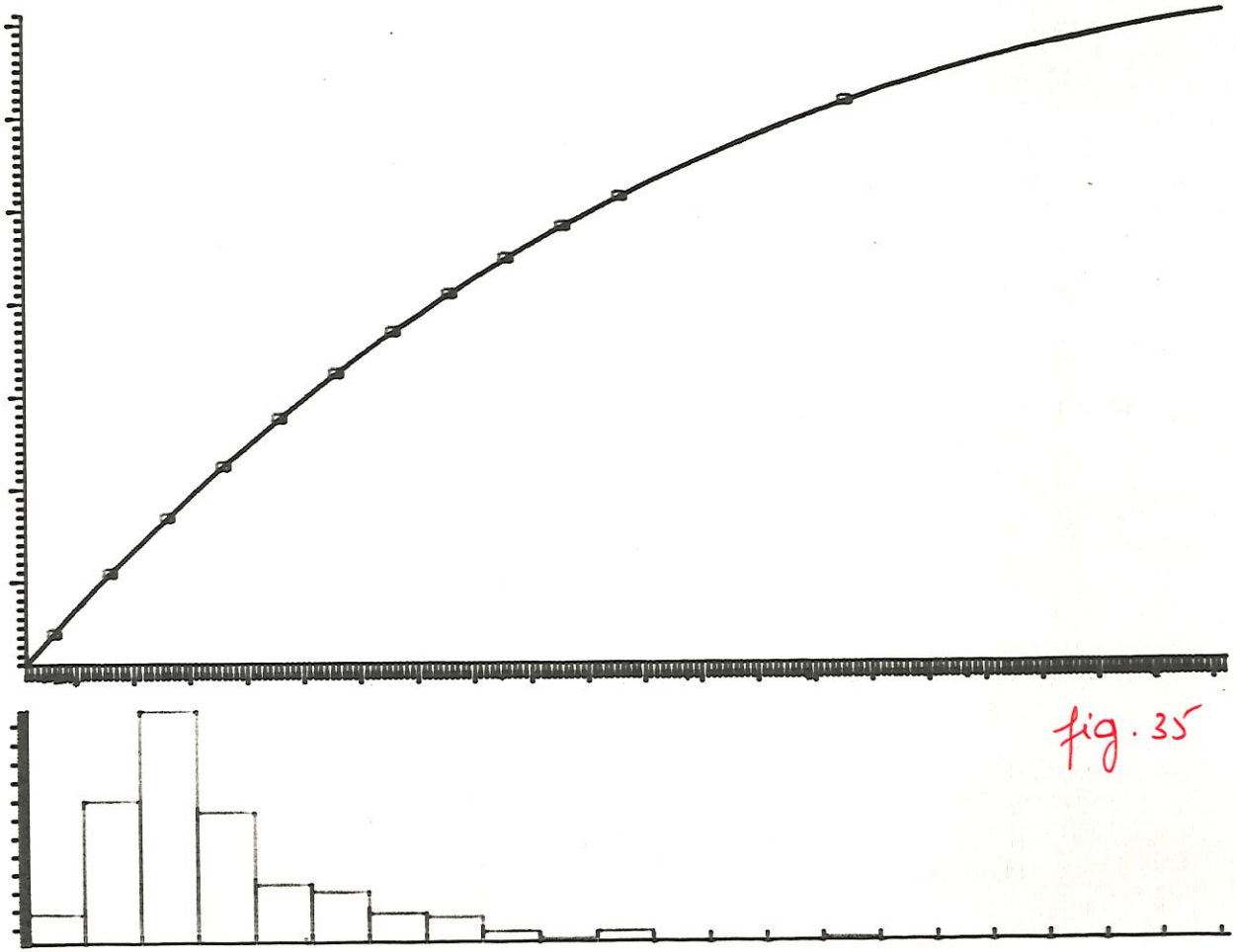


fig. 35

CHAPITRE V

Conclusion

Le modèle de la fonction déterminant le coefficient d'extinction (taux d'absorption de la lumière dans l'eau) que nous proposons est donc le suivant :

$$\eta = F(CHLA)+F(MES)+0.5$$

où

$$F(T)=T*e^{(-p(1)*(T-p(2)))}+e^{(-p(3)*p(4))}*(e^{(p(3)*T)}-1)$$

où

p(i) : paramètres d'optimisation déterminés en minimisant l'erreur commise par rapport aux coefficients d'extinction mesurés .

Nous avons donc obtenus un modèle mathématique comportant huit paramètres à optimiser, modèle établi sur base de données provenant de la Meuse (années 83,84,86 et 87), de la Sambre (années 86 et 87) et validé sur le Canal Albert (années 86 et 87) .

Ce mémoire est loin de s'être terminé sur une solution définitive, il n'est pas improbable que l'on puisse, en poursuivant cette étude, trouver une forme plus simple de la fonction ETA (déterminant le coefficient d'extinction) . Nous avons décidé de prendre le modèle ci-dessus comme étant la forme définitive de la fonction ETA, non seulement parce que l'on manquait de temps mais surtout parce que toute recherche de nouvelles simplifications par remaniement des termes de cette fonction nous semblait très hasardeuse et très peu rigoureuse .

La recherche d'un modèle mathématique moins complexe ou du moins d'une fonction ETA dont les paramètres à optimiser sont directement liés aux facteurs physico-chimiques, et la validation du modèle proposé sur d'autres jeux de données sont évidement des perspectives de continuation de ce mémoire, mais c'est loin d'être les seules .

Comme nous l'avons écrit au premier chapitre, le calcul du coefficient d'extinction s'inscrit dans un modèle complexe déterminant le taux de croissance de la biomasse du phytoplancton . On pourrait donc envisager d'améliorer ce modéle écologique tout entier, non seulement en "réinjectant le modéle de la fonction ETA en lieu et place de la mesure du coefficient d'extinction, mais en optimisant certaines relations intervenant dans cette détermination du taux de croissance de la biomasse. Par exemple, si on se réfère à la relation photosynthèse-lumière, nous avons cités, dans l'introduction, deux modèles possibles de cette relation (le modèle de Smith et le modèle de Vollenweider). Il existe dans la littérature d'autres modèles déterminant cette relation photosynthèse-lumière, on pourrait donc envisager l'utilisation d'une méthode d'optimisation pour établir le choix d'un modèle parmi tous ceux qui nous sont proposés .

Une quatrième perspective de ce mémoire est l'amélioration de la détermination du coefficient d'extinction en fonction de la matière en suspension et de la chlorophylle_A par un traitement statistique préalable des données mises à notre disposition .

En effet, nous avons pu constater que certains "accidents" (erreurs importantes entre la mesure et la valeur calculée) de notre modèle étaient le résultat d' incohèrences dans les données. Incohèrences dues soit à des erreurs de mesures, soit à des conditions (météorologiques ou autres) inhabituelles . Il nous semble très intéressant de pouvoir détecter et si possible éliminer ces incohèrences par un traitement préalable des données . Nous avons quelque peu éfleuré ce probléme par l'établissement d'histographes donnant une idée de la fiabilité du modèle sur les différents intervalles de valeurs . Mais ce problème étant du ressort des statistiques, nous n'avons pas entrepris plus loin cette recherche .

On peut donc remarquer que la détermination du coefficient d'extinction en fonction de la matière en suspension et de la chlorophylle_A peut être la base de nombreuses recherches visant soit une amélioration du modèle, soit l'utilisation de celui-ci afin d'améliorer un modèle écologique plus complexe .

Appendice :

ALGORITHME DE LEVENBERG-MARQUARDT

Le calcul du coefficient d'extinction en fonction de la matière en suspension et de la chlorophylle_A, s'écrit sous la forme d'un probléme de moindres carrés non linéaire (cfr chap. 2) . Dans cet appendice, nous explicitons l'idée générale de la méthode utilisée pour résoudre ce problème de moindre carré . La méthode choisie est celle de Levenberg-Marquardt [21]. Formellement, le problème consiste à rechercher $x^* \in \mathbb{R}^n$ solution de

$$(P) \begin{cases} \text{minimiser } 1/2 \sum_{i=1}^{m} r_i(x)^2 \\ \text{s.c.} \quad x \in \mathbb{R}^n \end{cases}$$

où $r_i : \mathbb{R}^n \dashrightarrow \mathbb{R}$ $i=1...m$ sont les m résidus (c'est-à-dire les différences entre les valeurs de n mesurées et celles prédites par le modèle aux différentes stations de mesures) .
Notons $R : \mathbb{R}^n \dashrightarrow \mathbb{R}^m$ la fonction définie par $R(x)=(r_1(x),...r_m(x))$ et notons $J(x)$ la matrice jacobienne de R au point x, c'est-à-dire la matrice dont l'élément d'ordre (i,j) est la dérivée partielle de r_i par rapport à x_j au point x .Comme R est non linéaire la méthode la plus simple consiste à linéariser R autour du point x^0 choisi et de remplacer le problème (P) par le problème suivant :

$$(PL^0) \begin{cases} \text{minimiser } 1/2 \|R(x^0)+J(x^0)(x-x^0)\|^2 \\ \text{s.c.} \quad x \in \mathbb{R}^n \end{cases}$$

qui est un problème de moindres carrés <u>linéaire</u> pour lequel il existe d'excellentes numériques de résolution .
Notons $x^1 \in \mathbb{R}^n$ la solution obtenue . On recommence le procédé en linéarisant au point x^1 pour obtenir x^2 et ainsi de suite. On engendre de la sorte une suite de points (x^k) qui converge vers la solution de (P) à condition de partir SUFFISAMMENT PRES

de cette solution (nous renvoyons au livre de Denis Schnabel pour un énoncé précis de ce théorème de convergence [20]. Cette méthode s'appelle méthode de Gauss-Newton .

Pour obtenir la convergence à partir de n'importe quel point de départ, il faut modifier cette méthode . Une façon de procéder est d'utiliser ce qu'on appelle une stratégie de région de confiance . Celle-ci consiste à ne "faire confiance" au modèle linéarisé NON plus sur $\mathbb{R}^n$ tout entier mais seulement sur un "voisinage" du point x^0 .

Le problème (PL^0) est remplacé par le problème :

$$(M^0)\begin{cases} \text{minimiser } 1/2\|R(x^0) + J(x^0)(x-x^0)\|^2 \\ \text{s.c. } \|x-x^0\| \leq \delta^0 \end{cases}$$

Si on pose $s=(x-x^0)$ et si on désigne par s la solution optimale de (M^0) et par μ le multiple de Lagrange associé à la contrainte $\|s\| \leq \delta^0$ on peut montrer que

$$s^* = -(J(x^0)^T J(x^0)+\mu)^{-1} J(x^0)^T R(x^0)$$

Par conséquent, si on connait μ alors on peut calculer facilement s^* et donc aussi $x^1 = x^0 + s^*$.

Pour connaitre μ il suffit de remarquer que si la solution du problème (PL^0) vérifie strictement la contrainte du problème (M^0) alors c'est aussi une solution de ce dernier problème et $\mu=0$, et que dans le cas contraire la solution du problème (M^0) se trouve sur le bord de la boule de centre x^0 et de rayon δ^0.

Si on note

$$s(\mu) = -\left(J(x^0)^T J(x^0)+\mu\right)^{-1} J(x^0)^T R(x^0)$$

μ sera obtenu en résolvant l'équation non linéaire $\|s(\mu)\| = \delta^0$. Hebden [22] a proposé une variante de la méthode de Newton pour résoudre cette équation .

Il reste à voir comment choisir le rayon de la région de confiance . Pour l'algorithme de Levenberg-Marquardt, cette mise à jour est fonction de la valeur d'un quantité notée $\rho(s)$ et calculée par la formule :

$$\rho(s) = \frac{\text{réduction effective}}{\text{réduction prédite}} = \frac{\|R(x)\|^2 - \|R(x+s)\|^2}{\|R(x)\|^2 - \|R(x)+J(x).s\|^2}$$

La mise à jour de la région de confiance se fait selon le critère suivant :

si $\rho(s) \geqslant 3/4$ alors on augmente le rayon de la région de confiance

$< 1/4$ alors on diminue le rayon de celle-ci

sinon on garde la même région de confiance .

Appendice : LES SPLINES

Dans cette appendice, nous allons parler, de façon très sommaire, de la thèorie des Splines utilisée lors de l'élaboration du modèle mathématique de la fonction ETA [2] , [3] [13] . Comme nous l'avons déjà dit au chapitre trois, cette théorie des Splines est un théorie d'approximation par des fonctions polynomiales par morceaux . Nous avions, à ce moment, comparé d'une façon imagée, une fonction spline à une latte mince devant passer près (ou par,selon les cas) des points (X_i, Y_i) où X_i est un noeud et Y_i est une valeur imposée: dans notre problème Y_i est le coefficient d'extinction mesuré pour une concentration X_i de matière en suspension ou de chlorophylle_A .

Nous allons maintenant donner une définition mathématique des fonctions splines . Dans un premier temps, nous parlerons des splines naturelles pour ensuite nous restreindre à une base de celles-ci, base dont les éléments, plus stables numériquement que les splines naturelles, sont appelés B-splines.

1. *Splines naturelles*

Considérons un intervalle $[A,B]$ et n points distincts $x_1, \ldots . x_n$ de celui-ci .

On peut supposer que $A<x_1<\ldots<x_n<B$

Définition : s est une **spline naturelle de degré q** SSI

i) $s \in P_{q-1}$ pour $A \leqslant X < X_1$ et $X_n < X \leqslant B$

ii) $s \in P_{2q-1}$ sur les autres sous-intervalles de $[A,B]$

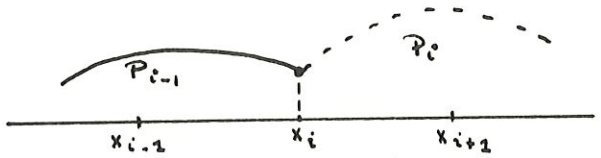
iii) $s \in C^{2q-1}[A,B]$

où

P_k est l'ensemble des polynômes de dégré k

C^k est l'ensemble des fonctions k fois continûment dérivables .

Cette dernière condition assure les "raccords" aux noeuds entre les différents morceaux de courbes .



Citons les propriétés qui nous semble les plus importantes :

1) Le théorème d'interpolation affirme l'**UNICITE** de la spline passant exactement par n ordonnées asociées aux n noeuds .

2) Le théorème d'optimalité exprime que la fonction spline est la plus **LISSE** parmi toutes les courbes passant par les couples d'interpolation .

<u>Rem</u> : Lorsqu'on travaille avec des splines CUBIQUES et si l'on impose à une latte mince de passer par les points (X_i, Y_i) i=1..n, la position d'équilibre qui minimise l'énergie de flexion correspond à la solution de notre problème .

3) Toute fonction peut être **APPROXIMEE AUSSI BIEN** que l'on veut par des splines dès que

. Soit le nombre de sous-intervalles est assez grand

. Soit le degré de la spline est suffisamment élevé

4) Les splines naturelles sont **INSTABLES** numériquement, ce qui leur confère un intérêt principalement théorique . Afin de travailler avec des éléments mieux conditionnés, nous nous sommes intéressés à une sous-classe de fonctions splines, à savoir les B-splines (qui forment une base des splines naturelles).

2. *B-SPLINES*

Nous introduisons donc les B-splines pour éviter des problèmes d'ordre numérique (c'est-à-dire des erreurs d'évaluation importante lorsque les noeuds ne sont pas équidistants les uns des autres, ainsi que des systèmes d'interpolation mal conditionnés) rencontrés lorsqu'on utilise les splines naturelles .

Pour définir une base mieux conditionnée, on introduit 2k noeuds supplémentaires, à savoir k abscisses à gauche de A et k abscisses à droite de B

$$X_{-k} \leqslant \ldots \leqslant X_{-1} \leqslant A < X_1 < \ldots < B \leqslant X_{n+1} \leqslant \ldots \leqslant X_{n+k}$$

La définition d'une B-spline est alors :

$$B_i(X) = (X_{i+(k+1)}) \left[X_i, \ldots X_{i+(k+1)}\right] (\xi - X)_+^k$$

où

ξ est à considérer dans $X_i, X_{i+(k+1)}$

$\left[X_i \ldots X_{i+(k+1)}\right] (\xi - X)_+^k$ représente la différence divisée d'ordre k+1 à la fonction de paramètre X .

Comme au paragraphe précédent, nous nous limitons à citer les propriétés les plus importantes en ce qui nous concerne :

1) La décomposition en B-splines assure la **STABILITE NUMERIQUE.**

2) Les B-splines constituent une **BASE** de S .

3) La **DIMENSION** de la B-spline n'est plus n comme pour les splines naturelles, MAIS n+k . De ce fait, les conditions d'interpolation ne sont plus exprimées aux noeuds uniquement !

4) Le théorème d'**EXISTENCE** et d'**UNICITE** exprime que le problème admet une solution unique SSI

$B_{l-k-1}(U_l) <> 0$ pour $1 \leqslant l \leqslant n+k$

Cette dernière propriété est très importante pour nous car cela signifie que lorsqu'on donne un point initial pour l'optimisation des paramètres, il ne peut comporter de composantes nulles!

```
=================================
I                               I
I  Appendice : REMARQUE         I
I        Dépendance MES et DEBIT  I
I        Dépendance CHLA et DEBIT I
I                               I
=================================
```

Cet appendice contient des constatations effectuées lors de l'élaboration du modèle de détermination du coefficient d'extinction, mais il ne nous a pas semblé utile de le signaler dans le chapitre trois (afin de ne pas le surcharger) .

Lors de l'étude du système réel, nous avons décidé de déterminer le coefficient d'extinction à partir de trois variables : la concentration en matière en suspension, la concentration de chlorophylle_A et le débit . Il est évident que les deux premières mesures dépendent implicitement de la troisième : comme nous l'avons dit au premier chapitre, en période de débit faible, les particules en suspension peuvent sédimenter et constituer ainsi des dépôts sur le fond, partiellement remis en suspension lors des périodes de débit élevé ...
Il serait évidement très intéressant de pouvoir calculer la matière en suspension et la chlorophylle_A à partir du débit; ce qui permettrait de déterminer le coefficient d'extinction en fonction d'un seule variable facilement appréhendable et disponible quotidiennement grâce à l'Office National de la Navigation ou d'autres organismes similaires .

Nous avons, au cours de l'élaboration du modèle de la fonction ETA (déterminant le coefficient d'extinction), essayé de trouver les fonctions reliant la mesure de la MES et de la CHLA à celle du débit .

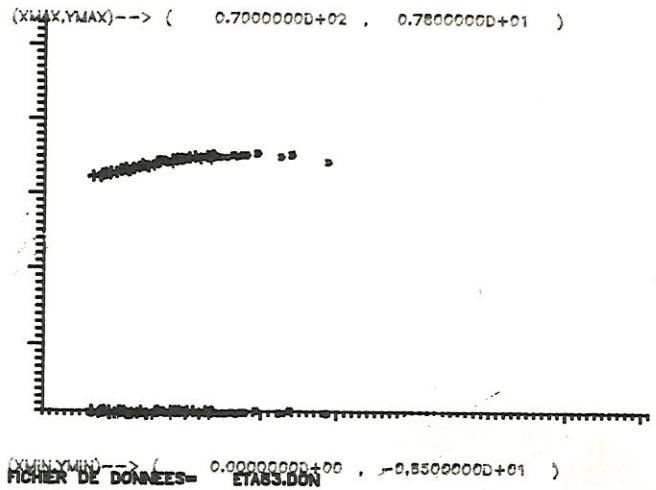
Notre but n'était pas de supprimer définitivement les deux premières variables mais plutôt de supprimer, si possible, la dépendance entre les trois variables . Nous avions en effet constaté, lors de l'étude des graphes des différentes contributions ETA-MES, ETA-CHLA et ETA-DEB, certains comportements "étranges" qui nous semblaient liés à la présence de cette dépendance implicite entre les trois mesures . Ainsi l'on peut constater sur les figures 36 et 37 que dans les deux graphiques les fonctions ont même courbure sur trois fichiers et une courbure inverse sur le quatrième . La figure 38 donne les contributions du débit au calcul du coefficient d'extinction .

Nous avons, pour trouver ces fonctions MES(DEB) et CHLA(DEB), choisi d'adopter la même méthode que pour le coefficient d'extinction : à savoir d'abord une approche numérique du problème, puis la recherche d'une forme analytique. Nous avons donc d'abord approximé numériquement la concentration de la matière en suspension, puis celle de la chlorophylle_A en fonction du débit en utilisant les B-splines .

Les graphiques 39 à 46 montrent les courbes numériques obtenues . Nous pouvons constater que les résultats, bien qu'en accord avec la réalité, c'est-à-dire la chlorophylle_A inversément proportionnelle et la matière en suspension croissante par rapport au débit, donnent une très mauvaise approximation des deux mesures . (fig 47-48)

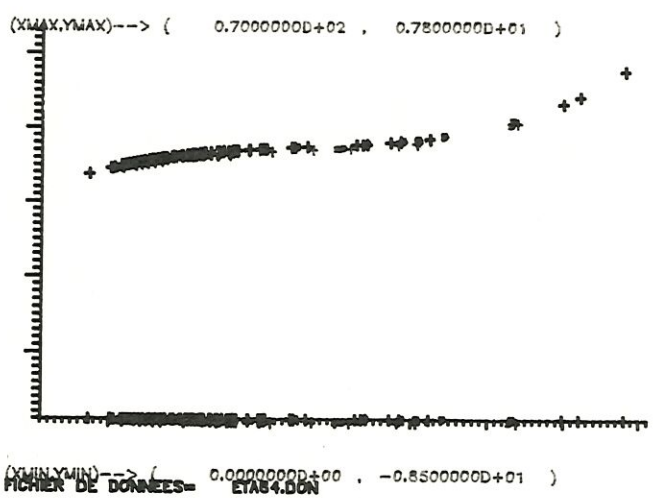
DESSIN DE LA FONCTION A MES

NOM DU GRAPHE= ETA836MES.MTF



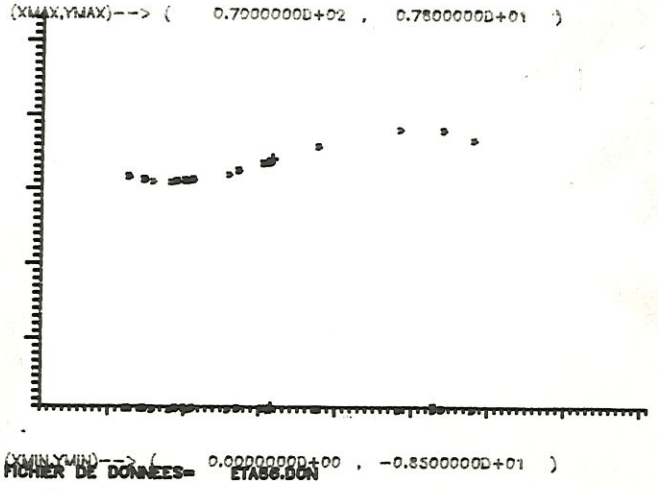
DESSIN DE LA FONCTION ETA MES

NOM DU GRAPHE= ETA846MES.MTF



DESSIN DE LA FONCTION ETA MES

NOM DU GRAPHE= ETA866MES.MTF



DESSIN DE LA FONCTION ETA MES

NOM DU GRAPHE= SAMETA6MES.MTF

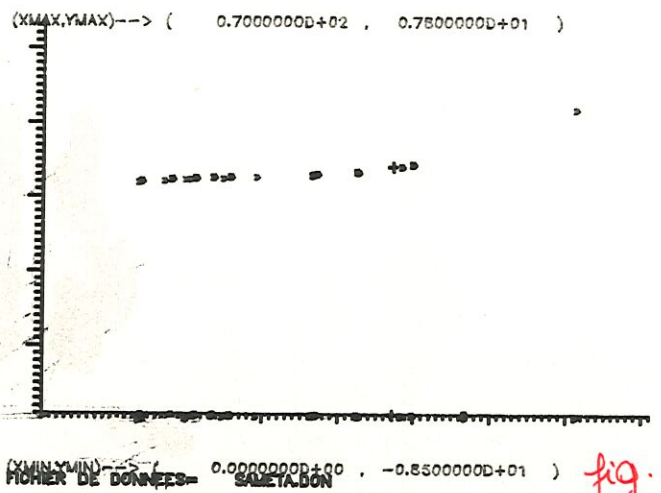
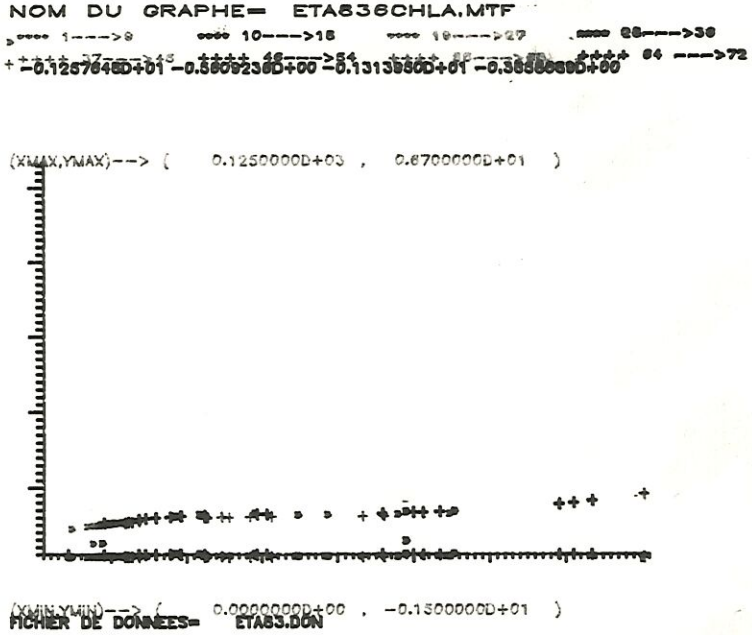


fig. 36

AR3

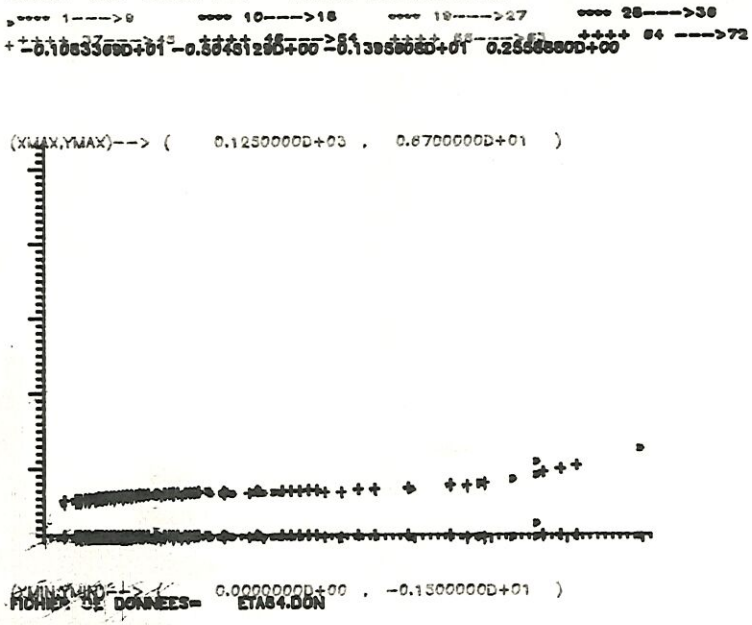
DESSIN DE LA FONCTION A CHLA

NOM DU GRAPHE= ETA836CHLA.MTF



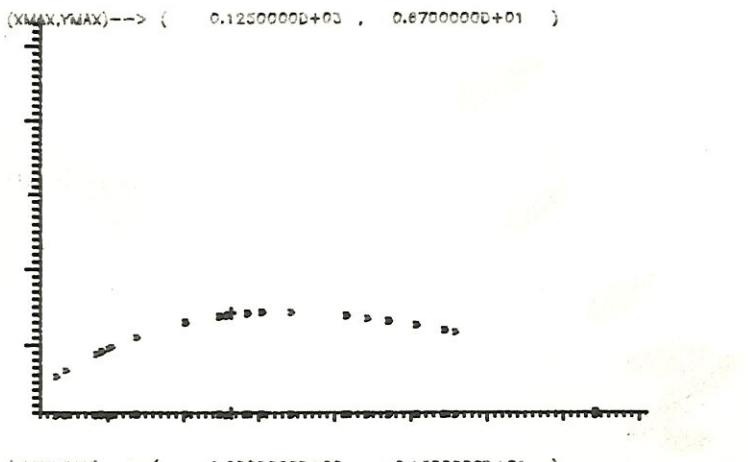
DESSIN DE LA FONCTION ETA CHLA

NOM DU GRAPHE= ETA846CHLA.MTF



DESSIN DE LA FONCTION ETA CHLA

NOM DU GRAPHE= ETA866CHLA.MTF



DESSIN DE LA FONCTION ETA CHLA

NOM DU GRAPHE= SAMETA6CHLA.MTF

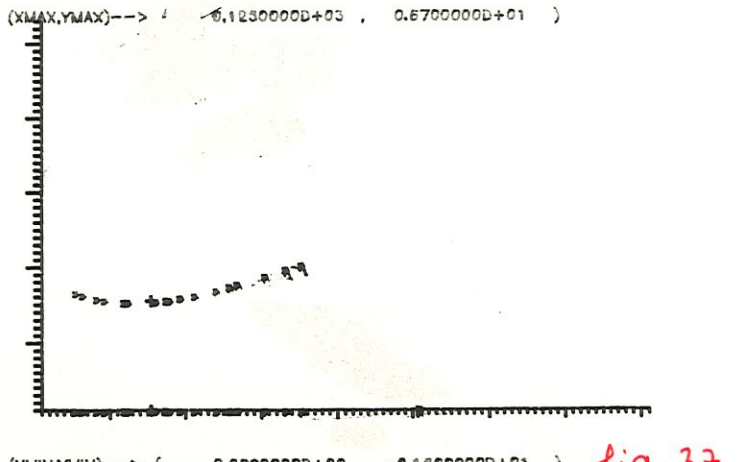
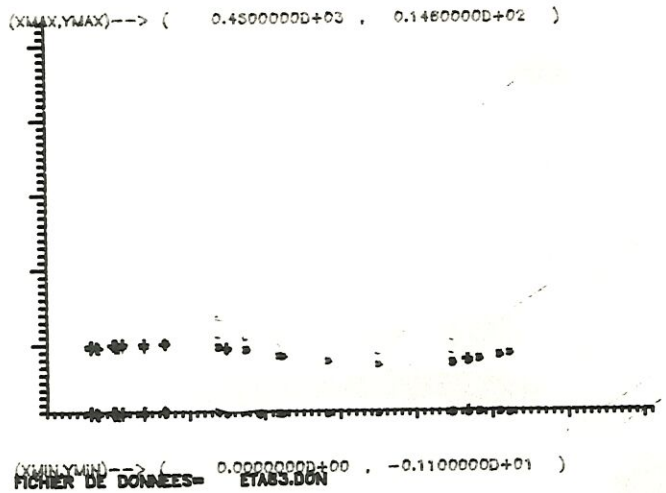


fig. 37

AR4

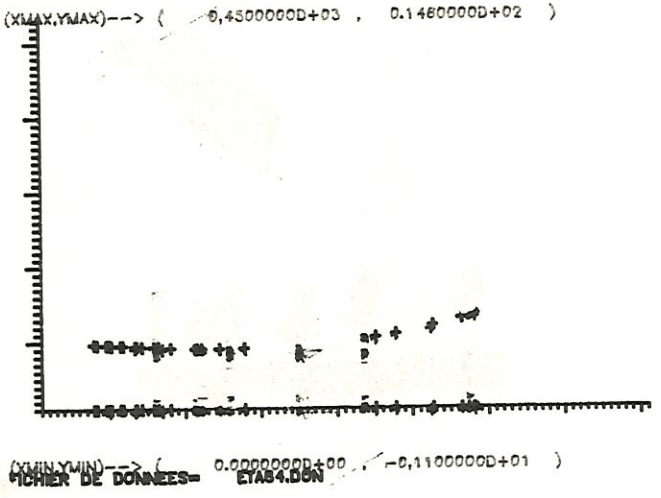
DESSIN DE LA FONCTION ETA DEB

NOM DU GRAPHE= ETA836DEB.MTF



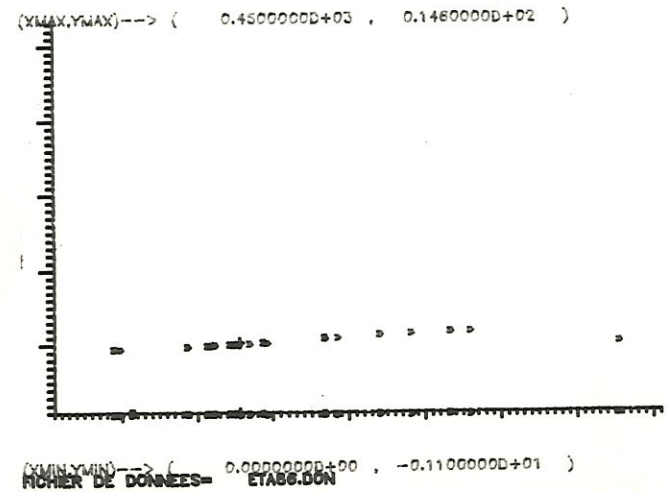
DESSIN DE LA FONCTION ETA DEB

NOM DU GRAPHE= ETA846DEB.MTF



DESSIN DE LA FONCTION ETA DEB

NOM DU GRAPHE= ETA866DEB.MTF



DESSIN DE LA FONCTION ETA DEB

NOM DU GRAPHE= SAMETA6DEB.MTF

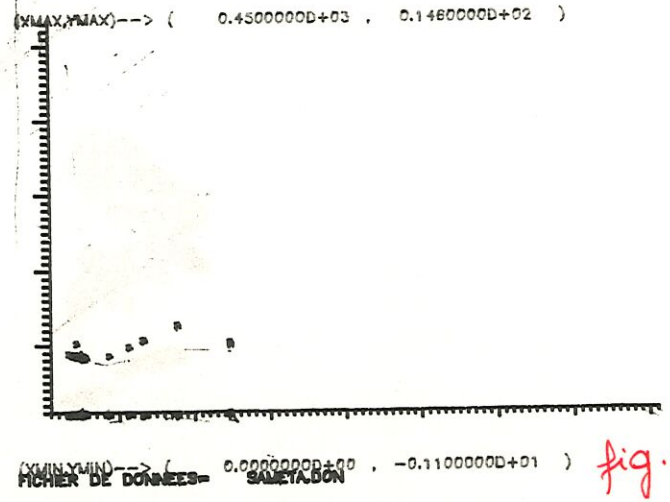


fig. 38

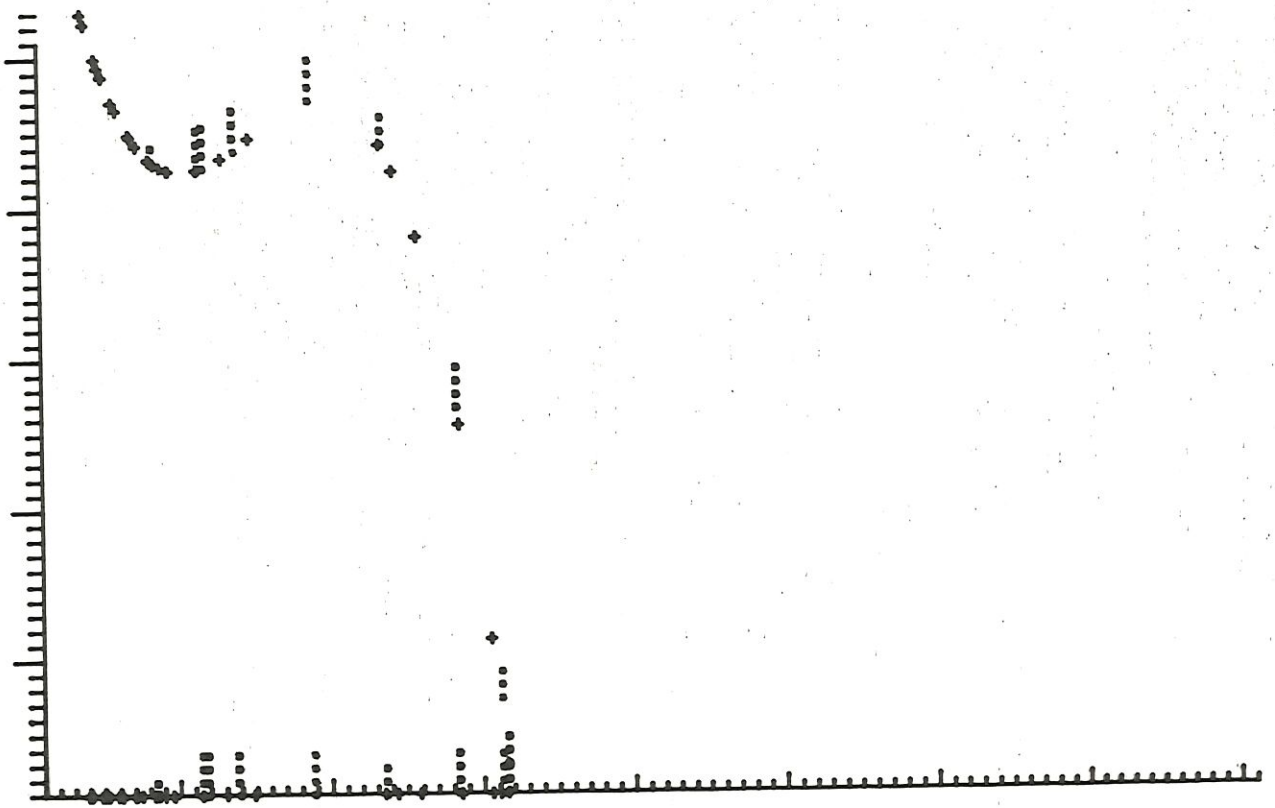
DESSIN DE LA FONCTION ETA DEB

NOM DU GRAPHE= ETA84CHLA.DEB

**** 1--->9 **** 10--->18 **** 19--->27 **** 28--->36

++++ 37--->45 ++++ 46--->54 ++++ 55--->63 ++++ 64 --->72

0.4198811D+02 -0.3944048D+02 0.3988825D+03 -0.1600121D+04



YMIN= 11.47 YMAX = 34.99

XMIN= 0.00 XMAX = 0.50

FICHIER DE DONNEES= ETA84.DON

fig. 39

ARG

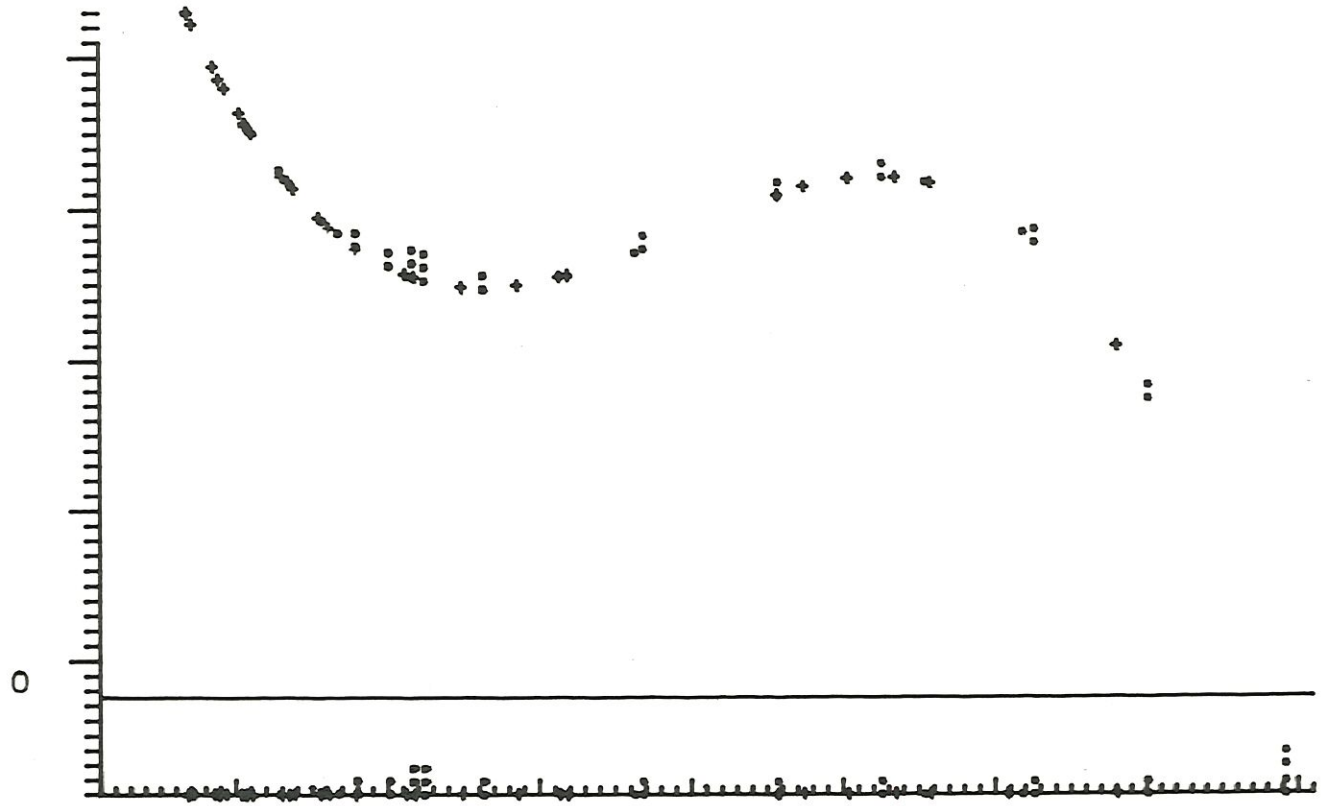
DESSIN DE LA FONCTION ETA DEB

NOM DU GRAPHE= DONETA84CHLA.DEB

**** 1---->9 **** 10---->18 **** 19---->27 **** 28---->36

++++ 37---->45 ++++ 46---->54 ++++ 55---->63 ++++ 64 --->72

0.4603959D+02 -0.1808816D+02 0.6927028D+02 -0.8225872D+01



YMIN= -3.07 YMAX= 34.31

XMIN= 0.00 XMAX= 0.20

FICHIER DE DONNEES= DONETA84.DON

fig. 4b

ART

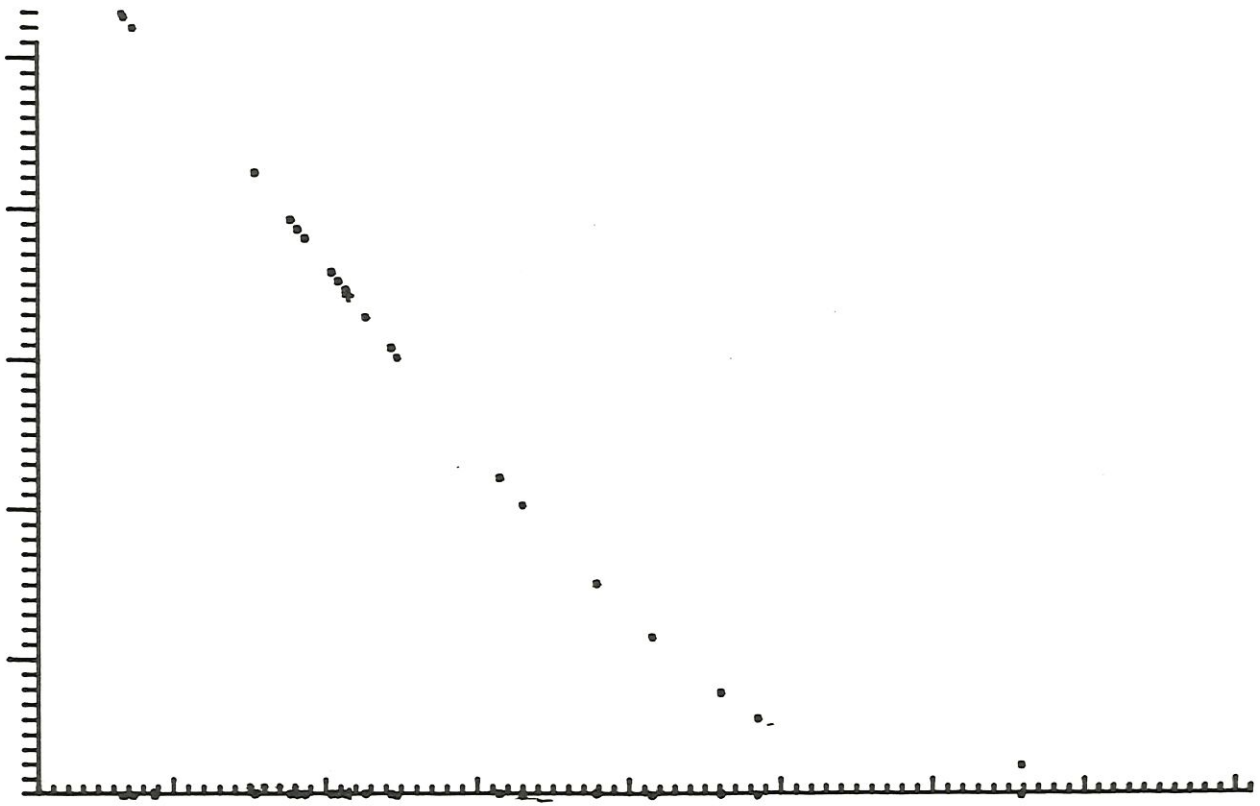
DESSIN DE LA FONCTION ETA DEB

NOM DU GRAPHE= ETA86CHLA.DEB

**** 1--->9 **** 10--->18 **** 19--->27 **** 28--->36

++++ 37--->45 ++++ 46--->54 ++++ 55--->63 ++++ 64 --->72

0.8418567D+02 0.4343313D+02 −0.3959506D+02 0.2249095D+02



YMIN= 1.54 YMAX= 75.18

XMIN= 0.00 XMAX= 3.50

FICHIER DE DONNEES= ETA86.DON

fig. 41

AR8

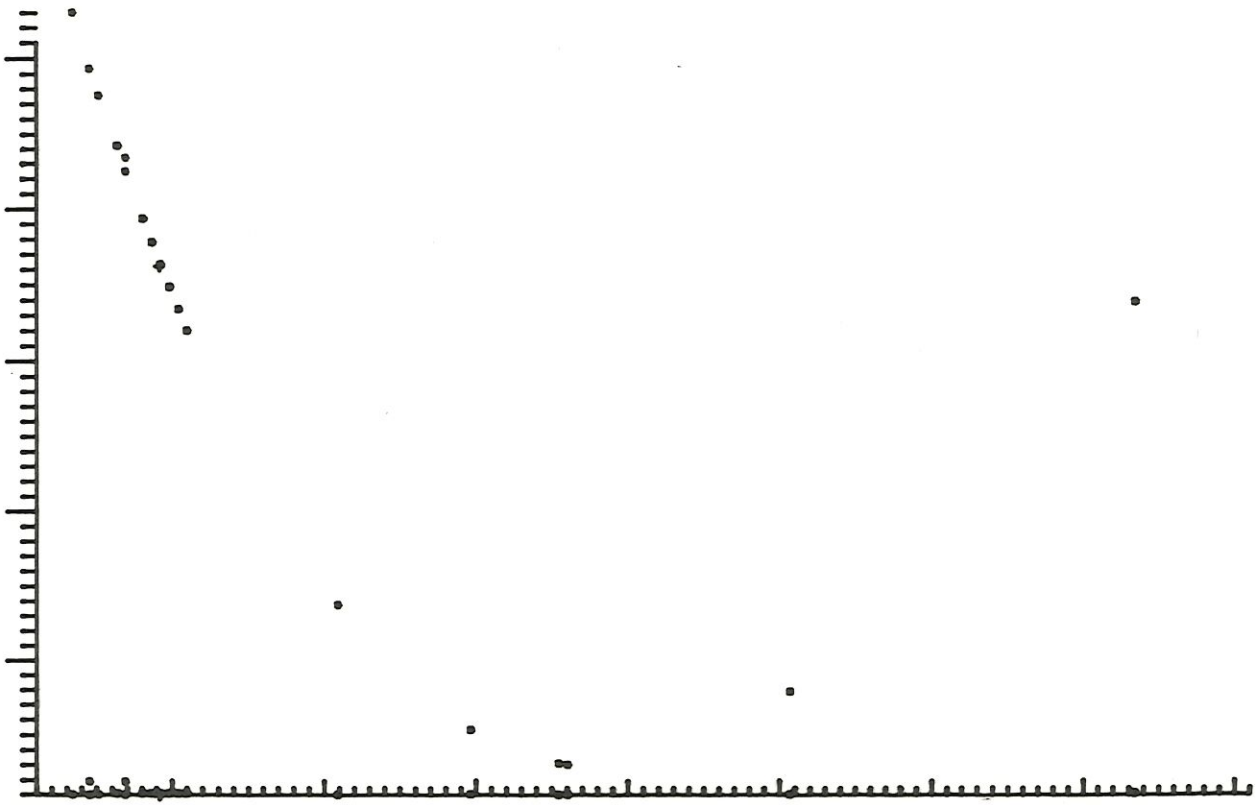
DESSIN DE LA FONCTION ETA DEB

NOM DU GRAPHE= SAMETACHLA.DEB

. **** 1---->9 **** 10--->18 **** 19--->27 **** 28--->36

+ ++++ 37--->45 ++++ 46--->54 ++++ 55--->63 ++++ 64 --->72

0.4126393D+02 -0.6274713D+01 0.1314753D+02 0.3315194D+02



YMIN= 11.76 YMAX= 37.27

XMIN= 0.00 XMAX= 0.50

FICHIER DE DONNEES= SAMETA.DON

fig. 42

AR3

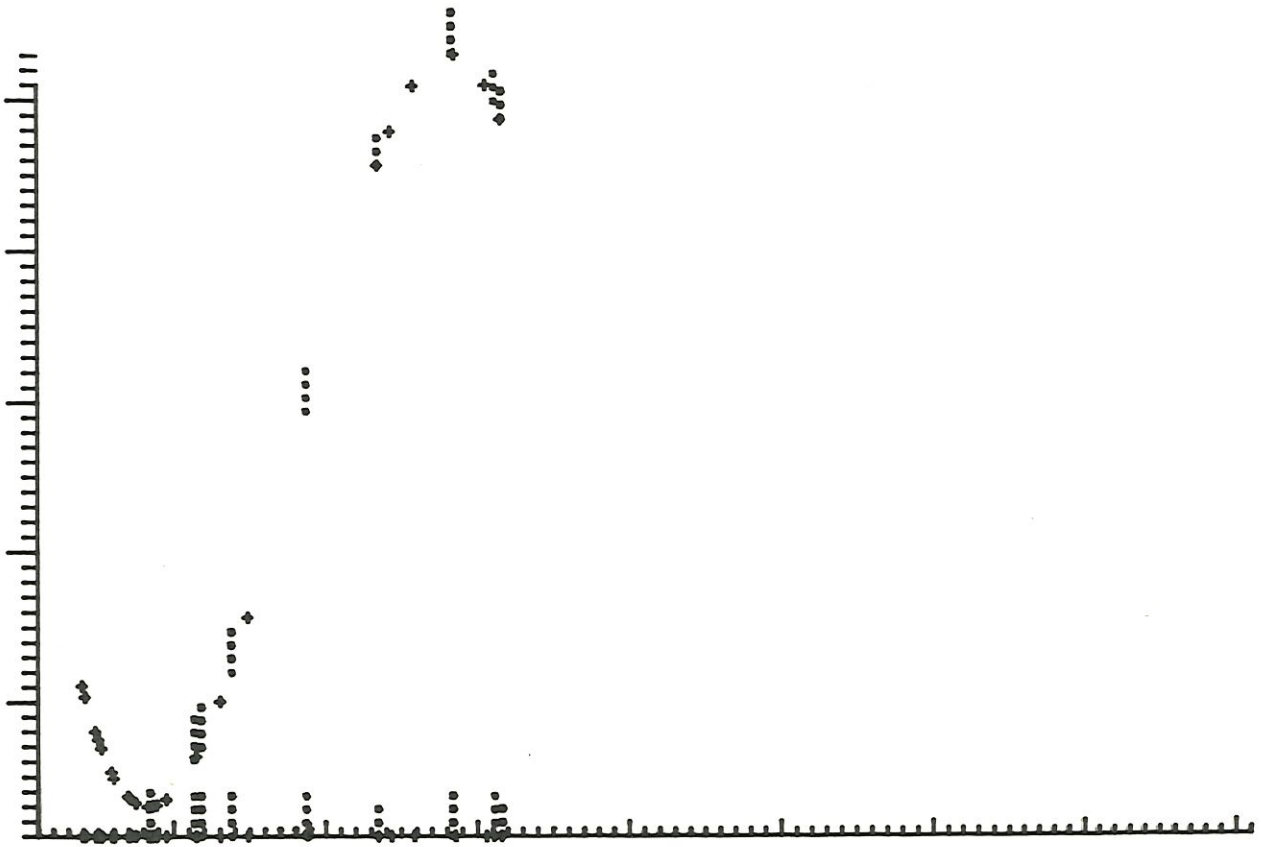
DESSIN DE LA FONCTION ETA DEB

NOM DU GRAPHE= ETA84MES.DEB

**** 1--->9 **** 10--->18 **** 19--->27 **** 28--->36

++++ 37--->45 ++++ 46--->54 ++++ 55--->63 ++++ 64 --->72

0.2186675D+02 -0.7172388D+02 0.4866911D+03 -0.1321272D+04



YMIN= 10.24 YMAX = 33.89

XMIN= 0.00 XMAX= 0.60

FICHIER DE DONNEES= ETA84.DON

fig. 43

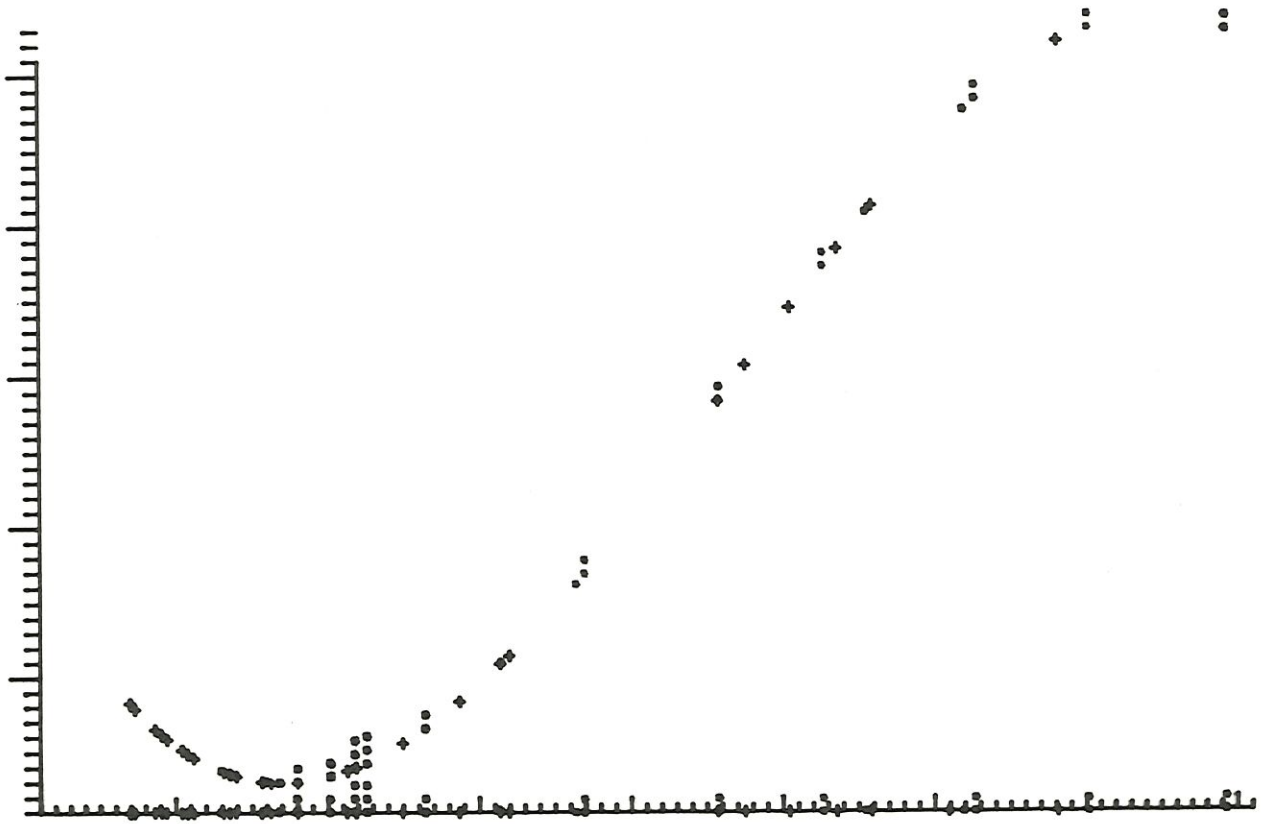
DESSIN DE LA FONCTION ETA DEB

NOM DU GRAPHE= DONETA84MES.DEB

**** 1--->9 **** 10--->18 **** 19--->27 **** 28--->36

++++ 37--->45 ++++ 46--->54 ++++ 55--->63 ++++ 64 --->72

0.1603673D+02 -0.9140208D+01 0.4247029D+02 0.3345243D+02



YMIN = 3.05 YMAX = 44.09

XMIN= 0.00 XMAX = 0.20

FICHIER DE DONNEES= DONETA84.DON

fig. 44

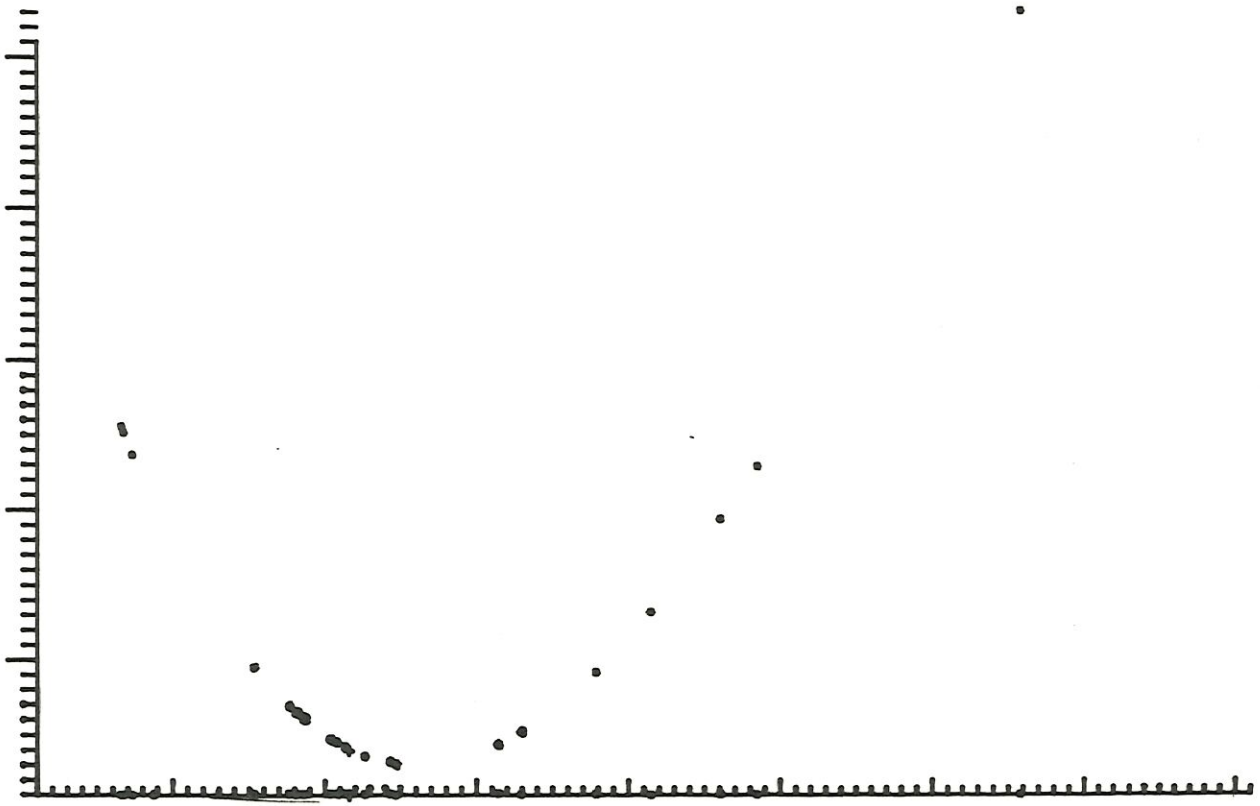
DESSIN DE LA FONCTION ETA DEB

NOM DU GRAPHE= ETA86MES.DEB

**** 1--->9 **** 10--->18 **** 19--->27 **** 28--->36

++++ 37--->45 ++++ 46--->54 ++++ 55--->63 ++++ 64 --->72

0.3467018D+02 -0.1237716D+02 0.3515857D+02 0.5291818D+02



YMIN= 14.53 YMAX= 40.44

XMIN= 0.00 XMAX= 0.50

FICHIER DE DONNEES= ETA86.DON

fig. 45

AR12

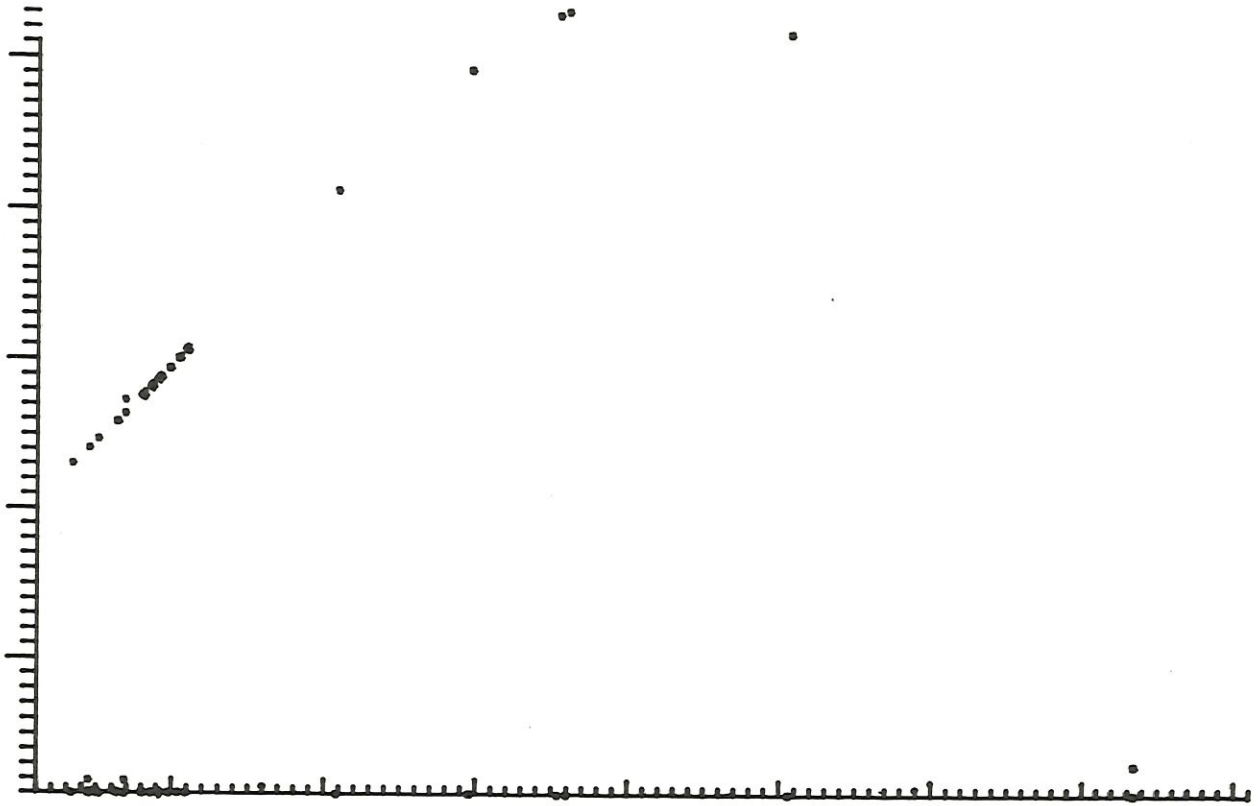
DESSIN DE LA FONCTION ETA DEB

NOM DU GRAPHE= SAMETAMES.DEB

.**** 1--->9 **** 10--->18 **** 19--->27 **** 28--->36

+++++ 37--->45 ++++ 46--->54 ++++ 55--->63 ++++ 64 --->72

0.1801112D+02 0.3211587D+02 0.7196286D+02 -0.1526662D+02



YMIN= 6.45 YMAX= 38.51

XMIN= 0.00 XMAX= 0.50

FICHIER DE DONNEES= SAMETA.DON

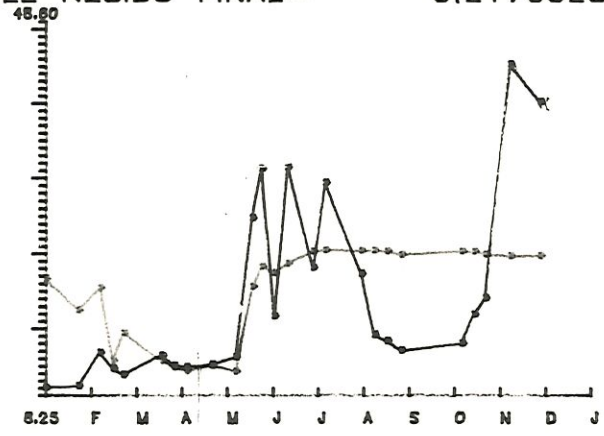
fig.46

DEPENDANCE DE LA CHLA PAR % AU DEB

NOM DU GRAPHE= eta83chladeb.mtf
LES CHLA CALCULEES SONT EN BLEU
LES CHLA MESUREES SONT EN ROUGE

0.4251364D+02 0.7865366D+02 −0.6402986D+02 0.5915556D+02

LE RESIDU FINAL= 0.2176023D+03



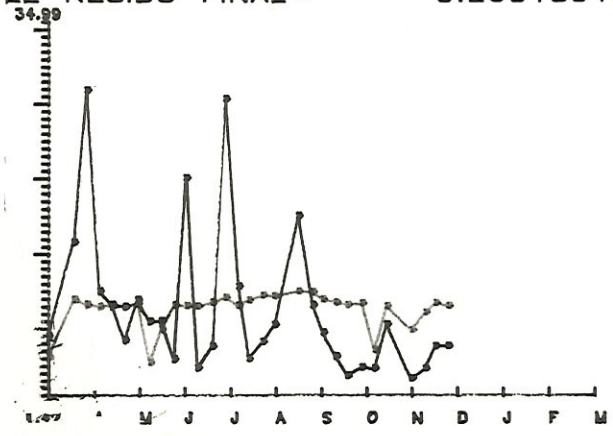
FICHIER DE DONNEES= eta83.don
GRAPHE DE LA DEPENDANCE CHLA-DEB

DEPENDANCE DE LA CHLA PAR % AU DEB

NOM DU GRAPHE= eta84chladeb.mtf
LES CHLA CALCULEES SONT EN BLEU
LES CHLA MESUREES SONT EN ROUGE

0.4196610D+02 −0.8259235D+01 0.1394036D+03 −0.2096427D+03

LE RESIDU FINAL= 0.2691301D+03



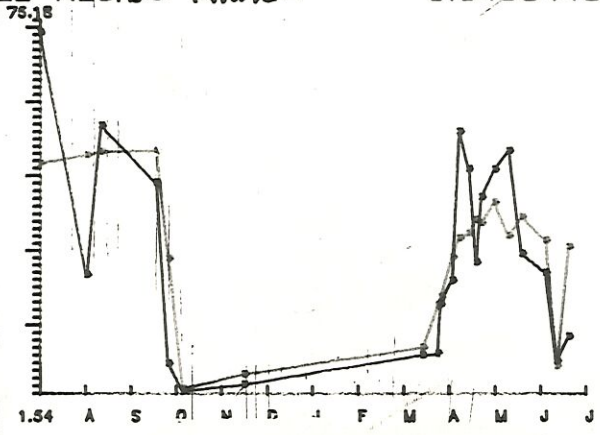
FICHIER DE DONNEES= eta84.don
GRAPHE DE LA DEPENDANCE CHLA-DEB

DEPENDANCE DE LA CHLA PAR % AU DEB

NOM DU GRAPHE= eta86chladeb.mtf
LES CHLA CALCULEES SONT EN BLEU
LES CHLA MESUREES SONT EN ROUGE

0.5418567D+02 0.4343313D+02 −0.3959506D+02 0.2249095D+02

LE RESIDU FINAL= 0.9495448D+02



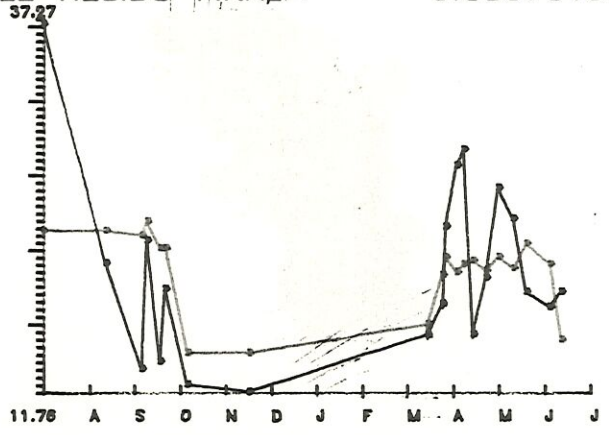
FICHIER DE DONNEES= eta86.don
GRAPHE DE LA DEPENDANCE CHLA-DEB

DEPENDANCE DE LA CHLA PAR % AU DEB

NOM DU GRAPHE= sametachladeb.mtf
LES CHLA CALCULEES SONT EN BLEU
LES CHLA MESUREES SONT EN ROUGE

0.4126393D+02 −0.1041247D+03 0.6019316D+03 −0.1084006D+04

LE RESIDU FINAL= 0.6807019D+02



FICHIER DE DONNEES= sameta.don
GRAPHE DE LA DEPENDANCE CHLA-DEB

fig. 47

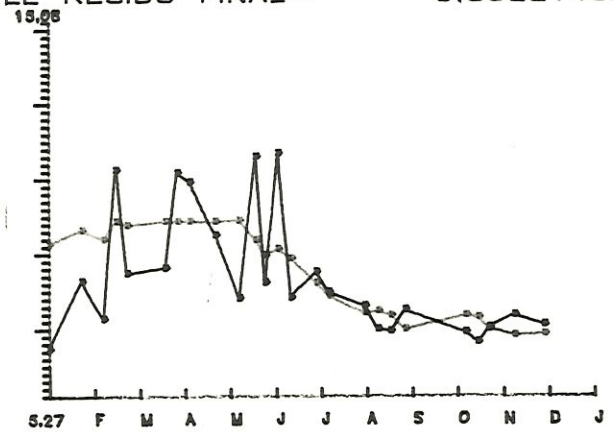
AR 14

DEPENDANCE DE LA MES PAR % AU DEB

NOM DU GRAPHE= eta83mesdeb.mtf
LES MES CALCULEES SONT EN BLEU
LES MES MESUREES SONT EN ROUGE

0.2764559D+01 0.2161659D+02 0.1118927D+02 0.1757512D+02

LE RESIDU FINAL= 0.3522146D+02



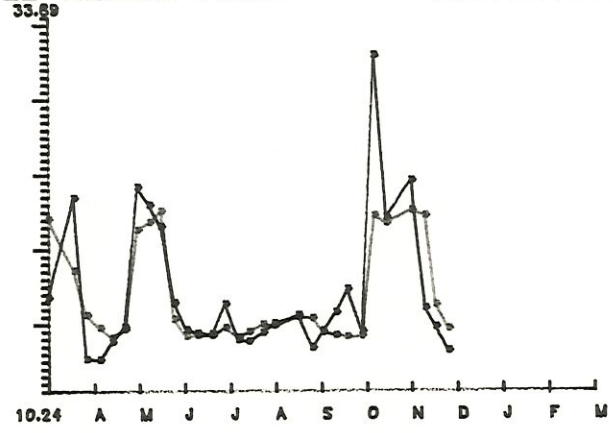
FICHIER DE DONNEES= eta83.don
GRAPHE DE LA DEPENDANCE MES-DEB

DEPENDANCE DE LA MES PAR % AU DEB

NOM DU GRAPHE= eta84mesdeb.mtf
LES MES CALCULEES SONT EN BLEU
LES MES MESUREES SONT EN ROUGE

0.2186675D+02 -0.3588549D+02 0.1546324D+03 -0.1158048D+03

LE RESIDU FINAL= 0.9173491D+02



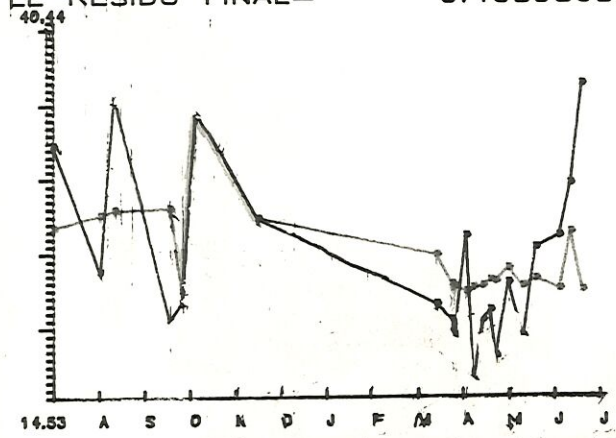
FICHIER DE DONNEES= eta84.don
GRAPHE DE LA DEPENDANCE MES-DEB

DEPENDANCE DE LA MES PAR % AU DEB

NOM DU GRAPHE= eta86mesdeb.mtf
LES MES CALCULEES SONT EN BLEU
LES MES MESUREES SONT EN ROUGE

0.3467015D+02 -0.1237716D+02 0.3515857D+02 0.5291516D+02

LE RESIDU FINAL= 0.4689865D+02



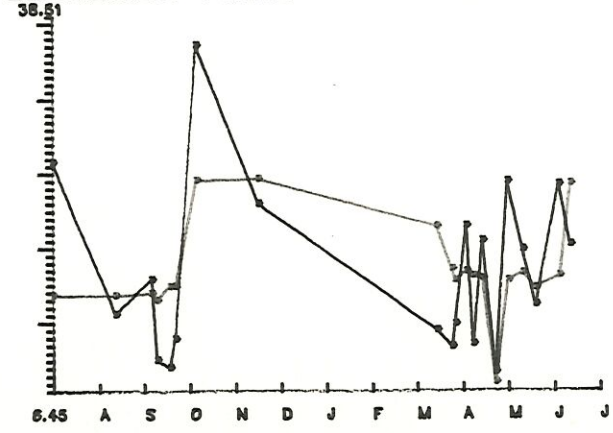
FICHIER DE DONNEES= eta86.don
GRAPHE DE LA DEPENDANCE MES-DEB

DEPENDANCE DE LA MES PAR % AU DEB

NOM DU GRAPHE= sametamesdeb.mtf
LES MES CALCULEES SONT EN BLEU
LES MES MESUREES SONT EN ROUGE

0.1601112D+02 0.7004908D+02 0.4724801D+03 -0.8449027D+04

LE RESIDU FINAL= 0.5006251D+02



FICHIER DE DONNEES= sameta.don
GRAPHE DE LA DEPENDANCE MES-DEB

fig. 48

PHILIPS

AR 15

Il ne semble donc pas possible (du moins facile) d'approximer la matière en suspension et la chlorophylle_A en fonction de la mesure du débit . Cette conclusion semble logique si on dresse la liste de toutes les composantes pouvant influencer la concentration en MES et en CHLA . Nous n'avons donc pas poussé plus loin cette recherche .

Appendice technique : METHODOLOGIE

La détermination du coefficient d'extinction était basée sur des mesures expérimantales . Nous donnons, dans cet appendice, les méthodes des mesures utilisées ainsi que les stations où elles ont été effectuées .

1) Données

Les différentes données proviennent de la **Sambre** (au niveau du barrage de Salzinne) et de la **Meuse** . Pour ce dernier cours d'eau, les stations utilisées sont :

.Le site nucléaires de Chooz

. Hastière

. Waulsort

. Anseremme

. Houx

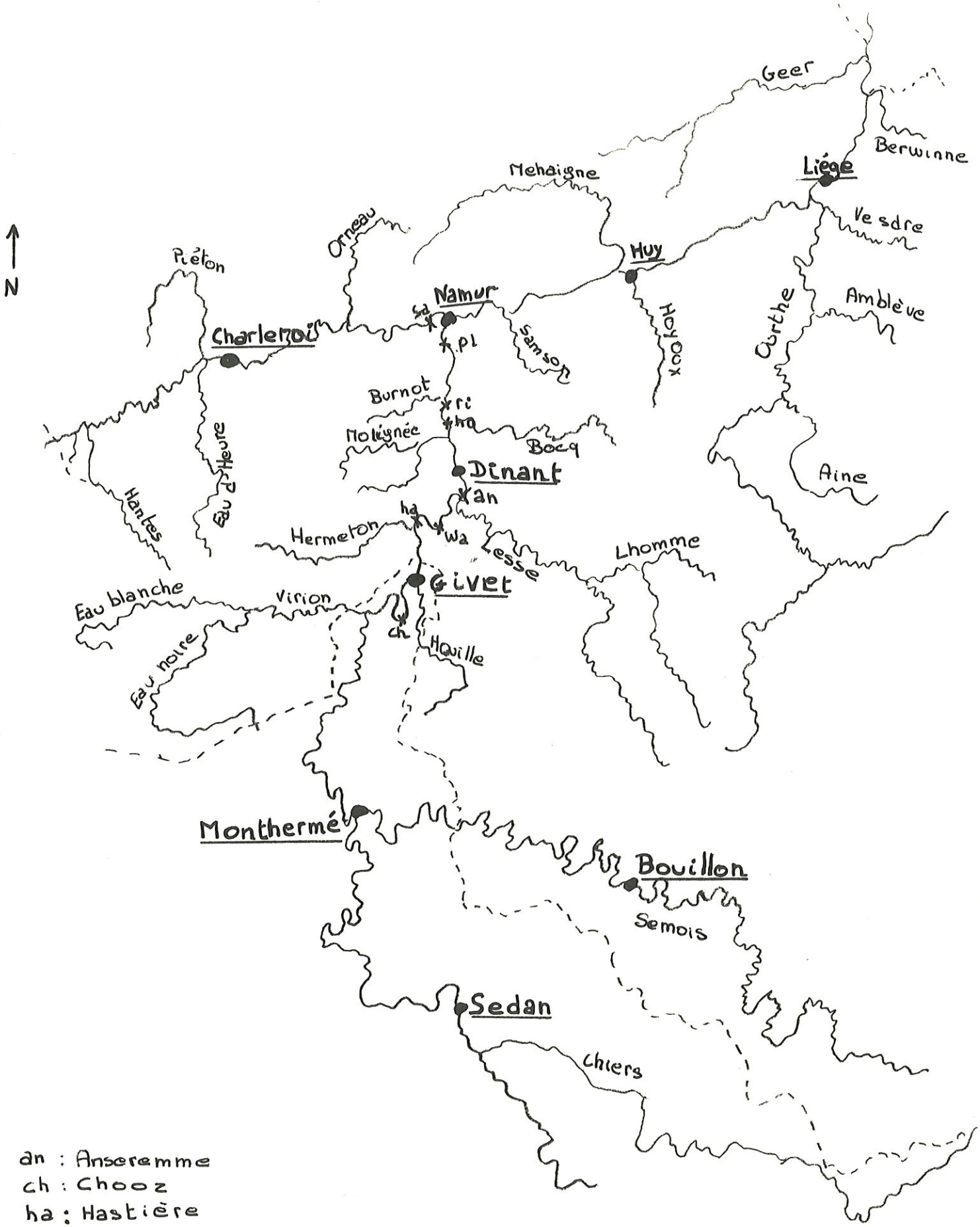
. Rivière

. La Plante

Pour situer géographiquement ces différentes stations, nous avons reproduit, de façon sommaire, le tracé de ces deux cours d'eau (voir figure ap4.1) .

Nous avons aussi testé le modèle mathématique du coefficient d'extinction sur le **Canal Albert**, mais il serait fastidieux de citer toutes les stations se trouvant sur le tronçon étudié .

Appendice technique : méthodologie



an : Anseremme
ch : Chooz
ha : Hastière
ho : Houx
pl : La Plante
ri : Rivière
sa : Salzinne
wa : Waulsort

figure ap4.1

2) Paramètres physico-chimiques
matériel et méthodes d'évaluation

Débits :

Les débits utilisés sont ceux communiqués par la C.I.B.E. à Tailfer en ce qui concerne la Meuse Belge, par l'office de la Navigation pour la Sambre . Pour la Meuse Française, les mesures journalières du débit sont effectuées au limigraphe de Chooz . Elles sont communiquées par l'exploitant de la centrale de Sena . En ce qui concerne le Canal Albert, les mesures du débit ne nous étaient plus nécessaires pour la validation du modèle .

Prélèvements et conservation :

On récolte l'échantillon d'eau à analyser au laboratoire à l'aide d'un récipient de dix litres que l'on enfonce progressivement dans l'eau en évitant les films d'hydrocarbures et les diverses impuretés flottant sur la surface . L'eau est ainsi recueillie sur une profondeur de cinquante centimètres .De ce récipient, on prélève trois flacons. Deux d'un demi-litre seront congelés et stockés pour analyses . Le troisième (de deux litres) est stabilisé au lugol en vue d'examens microscopiques éventuels .

Méthodes et mesures :

.) Transparence de l'eau : sur le terrain, les intensités relatives ont été mesurées au moyen de deux cellules photoélectriques équipées d'un filtre vert, d'un filtre rouge et d'un filtre bleu . Une cellule est maintenue en surface pour servir de référence tandis que l'autre est plongée successivement aux profondeurs de 0.10 m - 0.25 m - 0.50 m - 0.75 m - 1,0 m - 1,50 m - 2,0 m - 2,50 m .
L'utilisation de ces trois gammes de couleurs permet de déterminer l'extinction de la lumière dans trois partie du spectre . Pour chaque gamme de longueur d'onde, le coefficient d'extinction est obtenu par régression du logarithme népérien de l'intensité relative en fonction de la profondeur (loi de LAMBERT-BEER equ.1) . On détermine le coefficient d'extinction moyen, en calculant la moyenne des coefficients obtenus pour chaque filtre :

$$\eta_{moyen} = (\eta_{vert} + \eta_{rouge} + \eta_{bleu}) / 3$$

..)MES : un litre d'eau ramené au laboratoire est filtré sur un filtre *Whatman GF/C*; ce filtre est pesé, puis mis à l'étuve 100 pendant vingt-quatre heures et pesé à nouveau. La quantité de MES est mesurée par la différence de poids existant entre les deux pesées .

Evaluation de la biomasse algale par la concentration en chlorophylle_A : deux litres d'eau sont filtrés sur un filtre *Wathman GF/C*, l'extraction des pigments est réalisée à l'aide d'un solvant (acétone ou méthanol) . La mesure des pigments chlorophyliens est établie au moyen d'un spectrophotomètre *BAUSCH-LOMB*, à la longueur d'onde de 665 Nm sur laquelle deux mesures de densité optique sont lues, la première (DB) directement, la seconde (DA) après acidification .
La quantité de chlorophylle_A (µg/l) est donnée par la formule suivante :

$$CHLA = \frac{(DB-DA)\ 2.43\ 11.9}{V} \cdot \frac{v}{l}$$

où v : volume de l'acétone nécessaire à l'extraction

V : volume d'eau filtrée en litre

l : longeur du trajet optique dans la cuvette (1 cm)

Bibliographie

[1] G.BILLEN, J.-P.DESCY, E.EVERBERCQ, P.SERVAIS, J.SMITZ, *"Etude Ecologique de la Haute Meuse et modélisation du fonctionnement de l'écosystème aquatique . Evolution de l'impact écologique des centrales nucléaires de Chooz"*, rapport final, (1985) .

[2] K.BOHMER, *"Spline-Funktionen, Theorie und Anwendungen"*, Ed. B.G. Teubner Stuttgart, (1974) .

[3] C.de BOOR, *"A Pratical Guide to Splines"*, Applied Mathematical Sciences, volume 27, Ed. Springer-Verlag Inc., AMS classification 65Dxx,41A15, (1978) .

[4] J.DAGET, *"Les modèles mathèmatiques en écologie"*, collection d'écologie volume 8, Ed. Masson, (1979) .

[5] R.DAJOZ, *"Précis d'écologie"*, Ed. Durant, (1972) .

[6] J.-P.DESCY, *"L'Eutrophisation en rivière"*, Conférence au 25e congrés des Sciences, PROBIO, (1987) .

[7] J.P.DESCY, P.SERVAIS, J.-S.SMITZ, G.BILLEN,E.EVERBERG, *"Phytoplankton biomass and production in the river Meuse (Belgium)"*, MS 334, (1987) .

[8] J.-P.DESCY, *"Phytoplancton composition and dynamics in the river Meuse (Belgium)"*, Arch.Hydrobiol. Suppl. 78,2,225, Stuggart, (1987) .

[9] P.-E.GILL,W.MURRAY,N.-M.WRIGHT, *"Pratical Optimization"*, Ed. Academic Press, (1981), p. 261-349 .

[10] M.-F.HENRIETTE, *"Etude de la production primaire dans la Haute Meuse (secteur Anseremme Namur) et dans la Sambre"*, Mémoire présenté pour l'obtention du grade de licencié en Sciences biologiques, Facultés Universitaires N.D. de la Paix Namur, (1987) .

[11] J.N.-R.JEFFERS, *"Modelling"*, Outline Studies in écology, (1982) .

[12] JEUNIAUX, LAMBINON, MICHA, NIHOUL, WOLLAST, *"Surveillance écologique de la Meuse en aval du site de Tihange"*, rapport de synthèse, Ministère de la région Wallonne pour l'eau, l'environnement et la vie rurale, (1984) .

[13] G.-I.MARCHUK, *"Method of numerical mathematics"*, Springer-verlag Inc., (1975), p.71-88 .

[14] T.PLATT, *"Physiological bases of phytoplancton Ecology"*, Canadian Bulletin of Fischeries and Aquatic Sciences,(1981).

[15] R.POURRIOT, J.CAPBLANCQ, P.CHAMP, J.-A.MEYER, *"Ecologie du plancton des eaux continentales"*, Collection d'écologie volume 16, ED. Masson, (1982) .

[16] M.STRASKRABA et A.GNAUCK, *"Freshwater Ecosystems Modelling and Simulation"*, Developpements in Environmental modelling volume 8, (1985) .

[17] J.-F.TALLING, *"Photosynthetic characteristics if some freshwater plankton diatoms in relation to underwater radiation"*, New Phytol. 57,29-50, (1957) .

[18] J.-P.THIRAN, notes de cours "théorie de l'approximation", deuxième licence mathématique .

[19] R.-A.VOLLENWEIDER, *"Calculation models of phytosynthesis-depth curves and some implications regarding day rate estimates in primary production measurements"*, Proceding of the I.B.P. Symposium on **Primary Productivity in Aquatic Environments**, Pallanza, (1965) .

[20] J.-E.DENNIS et R.-B.SCHANBEL, *"Numerical Method for Unconstrained Optimization and Nonlinear Equations"*, Prentice Hall, N.J., (1983)

[21] J.-J. MORE, *"The Levenberg-Marquardt algorithm : implementation and treory"*, in Numerical Analysis, G.-A. Waton, Ed. Lecture Notes in Mathematics 630, Springer Verlag berlin, (1977), p. 105-116

[22] M.-D. HEBDEN, *"An algoritm for minimization using exact second derivatives"*, Rept. TP 515, A.E.R.E.,Harwell, (1973) .

Table des matières

Chapitre I - INTRODUCTION 01

Chapitre II - FORMULATION MATHEMATIQUE DU PROBLEME 14

Chapitre III - ELABORATION DU MODELE 22

1. Approche intuitive 25
2. Approche numérique 35
3. Approche analytique 49
4. Comparaison avec des fonctions proposées par des écologistes 80

Chapitre IV - VALIDATION ET ANALYSE DU MODELE PAR RAPPORT AU SYSTEME REEL 89

1. Validation 90
2. Analyse par rapport au système réel 93

Chapitre V - CONCLUSION 99

APPENDICES

1. Levenberg-Marquadt APL1
2. Fonctions Splines AS1
3. Remarques : Dépendance chlorophylle_A et débit
   Dépendance matière en suspension et débit AR1
4. Méthodologie AT1

Bibliographie BL1