



## THESIS / THÈSE

### MASTER EN SCIENCES MATHÉMATIQUES

#### Estimation statistique de formes planes compactes, connexes et identiques à leur fermeture morphologique par un disque de rayon inconnu

Goffin, Valérie

*Award date:*  
1999

[Link to publication](#)

#### General rights

Copyright and moral rights for the publications made accessible in the public portal are retained by the authors and/or other copyright owners and it is a condition of accessing publications that users recognise and abide by the legal requirements associated with these rights.

- Users may download and print one copy of any publication from the public portal for the purpose of private study or research.
- You may not further distribute the material or use it for any profit-making activity or commercial gain
- You may freely distribute the URL identifying the publication in the public portal ?

#### Take down policy

If you believe that this document breaches copyright please contact us providing details, and we will remove access to the work immediately and investigate your claim.



Facultés Universitaires Notre-Dame de la Paix  
Namur  
Faculté des Sciences - Département de Mathématique

---

**Estimation statistique de formes planes  
compactes, connexes et identiques  
à leur fermeture morphologique  
par un disque de rayon inconnu**

Mémoire présenté pour l'obtention du grade  
de Licencié en Sciences  
mathématiques  
par

**Promoteur : J.-P. RASSON**

**Valérie GOFFIN**

Année académique : 1998-1999

Je remercie en premier lieu Monsieur Jean-Paul Rasson, pour m'avoir fait confiance tout au long de ce mémoire, pour son implication, son soutien et sa bonne humeur.

Un grand merci également à Monsieur Didier Jacquemin, pour ses judicieux conseils et sa totale disponibilité.

Et enfin, je n'oublie pas mes parents, pour leurs encouragements et leur soutien.

# Estimation statistique de formes planes, connexes et identiques à leur fermeture morphologique par un disque de rayon inconnu

## Résumé

Le mémoire suggère une solution au problème suivant : “on suppose qu’une réalisation d’un processus de Poisson dans le plan ait été mutilée de telle façon que nous ne puissions observer que les points intérieurs à un domaine  $K$  compact, connexe et identique à sa fermeture morphologique de rayon  $r$  inconnu. Trouver  $K$  en utilisant des méthodes d’inférence statistique.”

L’utilisation des estimateurs est justifiée par les principes d’estimation équivariante appliquée à la recherche d’estimateurs optimaux.

La notion d’ $\alpha$ -hull, empruntée à la théorie de morphologie mathématique, est utilisée afin d’obtenir un estimateur exhaustif du domaine. Enfin, les paramètres de nuisance ( $\alpha$  et la forme de  $K$ ) sont remplacés par leur estimateur de maximum de vraisemblance.

## Abstract

This report solves the following problem : “Suppose that a realization of a Poisson process occurs in the plane. We can only observe the points located in a compact domain  $K$ , connected and morphologically identical to its closing (of unknown radius  $r$ ). Find  $K$  using statistical inference methods”.

The choice of estimates is made according to equivariance estimation principles, applied to the optimal estimates’ search.

The  $\alpha$ -hull notion, provided by mathematical morphology, is used in order to get a sufficient statistic for the domain. Finally, the noise parameters ( $\alpha$  and the shape of  $K$ ) are replaced by their maximal likelihood estimate.

# Table des matières

<b>I</b>	<b>Estimation statistique de formes planes compactes, connexes et identiques à leur fermeture morphologique par un disque de rayon inconnu</b>	<b>1</b>
<b>1</b>	<b>Théorie statistique</b>	<b>2</b>
1.1	L'exhaustivité . . . . .	2
1.2	L'invariance et l'équivariance . . . . .	3
1.2.1	Définitions . . . . .	3
1.2.2	Les paramètres de nuisance pour l'estimation équivariante	5
1.2.3	Estimation d'un paramètre de position . . . . .	5
1.3	Processus ponctuels . . . . .	6
1.3.1	Définitions . . . . .	6
1.3.2	Caractérisation du processus de Poisson . . . . .	8
<b>2</b>	<b>Morphologie mathématique</b>	<b>9</b>
2.1	Notions élémentaires . . . . .	9
2.2	Théorie des $\alpha$ -shapes . . . . .	12
<b>3</b>	<b>Le problème unidimensionnel</b>	<b>16</b>
3.1	Adaptation des définitions au cas unidimensionnel . . . . .	16
3.2	Formulation du problème . . . . .	18
3.3	Modèle . . . . .	18
3.4	Estimation équivariante de la position de $L$ . . . . .	19
3.5	Estimation équivariante de la forme unitaire du domaine $L$ . . . . .	20
3.6	Estimation de la longueur du domaine $L$ . . . . .	22
<b>4</b>	<b>Le problème dans le plan</b>	<b>23</b>
4.1	Formulation initiale du problème . . . . .	23
4.2	Recherche d'une statistique exhaustive pour $K$ . . . . .	23
4.3	Nouvelle formulation du problème . . . . .	24
4.4	Modèle . . . . .	25
4.5	Estimation équivariante de la position du domaine $K$ . . . . .	25
4.6	Estimation équivariante de la forme unitaire du domaine $K$ . . . . .	27
4.6.1	Conditions nécessaires d'optimalité de $K$ . . . . .	28

4.6.2	Décomposition de $K \boxminus F$ . . . . .	31
4.6.3	Recherche de la forme optimale de $K$ . . . . .	36
4.6.4	Le problème d'optimisation . . . . .	39
4.7	Estimation de la forme de $K$ selon la méthode de Kendall . . . . .	44
4.8	Retour à l'estimation de la position du domaine $K$ . . . . .	44
4.9	Estimation de la surface du domaine $K$ . . . . .	45
<b>II</b>	<b>Annexes</b>	<b>46</b>
<b>A</b>	<b>Notations utilisées dans les démonstrations des annexes</b>	<b>47</b>
<b>B</b>	<b>Lemmes techniques</b>	<b>48</b>
<b>C</b>	<b>Première tentative en fixant la mesure de l'enveloppe convexe de <math>K</math></b>	<b>51</b>
C.1	Introduction . . . . .	51
C.2	Théorème C.1 et proposition C.1 . . . . .	51
<b>D</b>	<b>Deuxième tentative en fixant la mesure de <math>K</math></b>	<b>57</b>
D.1	Introduction . . . . .	57
D.2	Essai de démonstration de l'intuition . . . . .	58
<b>E</b>	<b>Troisième tentative</b>	<b>75</b>
E.1	Introduction . . . . .	75
E.2	Le problème . . . . .	75
E.3	Etape 1 . . . . .	77
E.4	Etape 2 . . . . .	77
E.5	Etape 3 . . . . .	78
<b>F</b>	<b>Quatrième tentative</b>	<b>85</b>
F.1	Introduction . . . . .	85
F.2	Le problème . . . . .	85
F.3	Etape 1 . . . . .	85
F.4	Etape 2 . . . . .	86
F.5	Etape 3 . . . . .	86
<b>G</b>	<b>Cinquième tentative</b>	<b>95</b>

## Première partie

Estimation statistique de formes  
planes compactes, connexes et  
identiques à leur fermeture  
morphologique par un disque de  
rayon inconnu

# Chapitre 1

## Théorie statistique

Nous introduisons tout d'abord la théorie nécessaire au modèle statistique que nous utilisons dans ce mémoire.

### 1.1 L'exhaustivité

Soit un vecteur aléatoire  $X = (X_1, \dots, X_N)$ . La distribution de  $X$  est donnée par  $P_\theta$ , où  $\theta$  est un paramètre inconnu appartenant à  $\Theta$ , l'espace des paramètres.

Toute statistique  $T(X)$ , fonction de  $X$  est elle-même une variable aléatoire et sa distribution dépend aussi de  $\theta$ .

La statistique  $T$  est dite EXHAUSTIVE pour  $\theta$  (en accord avec  $P_\theta$ ) si toute l'information concernant  $\theta$  dans  $X$  est contenue dans  $T$ .

Formellement, cela s'exprime comme

**Définition 1.1** *La statistique  $T$  est dite EXHAUSTIVE pour  $\theta$  (en accord avec  $P_\theta$ ) si la distribution conditionnelle  $P(X | T)$  de  $X$  étant donné  $T$  selon  $P_\theta$  est indépendante de  $\theta$ .*

Cette définition est assez difficile à appliquer. Le théorème suivant donne une caractérisation d'une statistique exhaustive.

**Théorème 1.1** *Théorème de factorisation*

*Une statistique  $T$  est exhaustive pour  $\theta$  selon  $P_\theta$  si et seulement si*

*i. lorsque la variable aléatoire  $X$  est discrète*

$$P_\theta(X = x) = g_\theta(T(x)) \cdot h(x),$$

ii. lorsque la variable aléatoire  $X$  est continue

$$f(x | \theta) = g_{\theta}(T(x)).h(x)$$

où  $f(x | \theta)$  est la fonction de densité de  $X$ .

**Définition 1.2** Une statistique est dite exhaustive MINIMALE si elle est exhaustive et qu'elle ne contient d'information que sur  $\theta$ .

Le théorème suivant permet de démontrer qu'une statistique est exhaustive minimale.

**Théorème 1.2** Une statistique  $T$  est exhaustive minimale pour  $\theta$  selon  $P_{\theta}$  si et seulement si

$$\forall x, x' \quad T(x) = T(x') \iff \text{le rapport } \frac{P_{\theta}(X = x)}{P_{\theta}(X = x')} \text{ est indépendant de } \theta.$$

## 1.2 L'invariance et l'équivariance

### 1.2.1 Définitions

Considérons

$(\Omega, \mathcal{A}, P_{\theta})$  un espace probabilisé,

$x \in \mathcal{X}$  une réalisation d'une variable aléatoire  $X$ ,

$P_{\theta}$  une famille de lois indicées par le paramètre  $\theta$  appartenant à  $\Theta$ ,

$G$  un groupe sur  $\Omega$  et

$\tilde{G}$  un groupe sur  $\Theta$  tel que

$$\forall g \in G \quad \exists! \tilde{g} \in \tilde{G} \quad P_{\theta}(E) = P_{\tilde{g}(\theta)}(g(E))$$

avec  $E \subseteq \Omega$ .

**Définition 1.3** Une statistique  $T$  est INVARIANTE pour le groupe  $G$  si et seulement si

$$\forall g \in G \quad T \circ g = T.$$

**Définition 1.4** L'ORBITE d'un point  $x_0 \in \mathcal{X}$  sous l'action du groupe  $G$  est l'ensemble

$$\text{orb}(x_0) = \{x \in \mathcal{X} \mid \exists g \in G \quad g(x_0) = x\}.$$

**Définition 1.5** Une statistique  $T$  est invariante MAXIMALE pour  $G$  si et seulement si

i. elle est invariante :

$$x_1 = gx_2 \implies Tx_1 = Tx_2,$$

ii. elle prend une valeur différente sur chaque orbite :

$$Tx_1 = Tx_2 \implies \exists g \in G \quad x_2 = gx_1.$$

**Définition 1.6** Une statistique  $T$  est ÉQUIVARIANTE pour le groupe  $G$  si et seulement si

$$T(g(x)) = \tilde{g}(T(x)) \quad \forall g \in G \quad \forall x \in \mathcal{X}.$$

**Définition 1.7** Une fonction  $v : \Theta \rightarrow \Theta$  est dite INVARIANTE MAXIMALE sous  $\tilde{G}$  si et seulement si

i.  $v(\tilde{g}\theta) = v(\theta) \quad \forall \theta \in \Theta \quad \forall \tilde{g} \in \tilde{G},$

ii.  $v(\theta_1) = v(\theta_2) \implies \exists \tilde{g} \in \tilde{G} \uparrow \theta_1 = \tilde{g}\theta_2.$

**Définition 1.8** L'ORBITE de  $\theta_0 \in \Theta$  est l'ensemble

$$\{\theta \in \Theta \uparrow \exists \tilde{g} \in \tilde{G} \quad \tilde{g}(\theta_0) = \theta\}.$$

**Définition 1.9** Si on note  $\mathcal{D}$  l'ensemble des estimateurs de  $\theta$ , le problème de la recherche d'estimateurs minimisant le risque quadratique moyen est invariant pour  $\tilde{G}$  si et seulement si

$$(\theta - d(x))^2 = (\tilde{g}\theta - \tilde{g}d(x))^2 \quad \forall d \in \mathcal{D} \quad \forall \tilde{g} \in \tilde{G}.$$

**Théorème 1.3** Soit  $T(x)$  un invariant maximal pour le groupe  $G$ .  $\phi$  est invariant si et seulement s'il dépend de  $x$  uniquement à travers  $T$ , c'est-à-dire

$$\exists h \uparrow \forall x \in \mathcal{X} \quad \phi(x) = h(T(x)).$$

**Théorème 1.4** Si  $T(X)$  est invariant pour le groupe  $G$  et si  $v(\theta)$  est un invariant maximal par rapport au groupe induit  $\tilde{G}$ , alors la distribution de  $T(X)$  dépend uniquement de  $v(\theta)$ .

### 1.2.2 Les paramètres de nuisance pour l'estimation équivariante

Soit  $(X_1, \dots, X_N)$  un échantillon de  $N$  variables aléatoires indépendantes de distribution commune  $f_\theta$ , et  $G$  un groupe de transformations sur  $\mathcal{X}$ . Supposons qu'il existe une partition du paramètre  $\theta$  en  $(\theta_1, \theta_2)$  telle que  $\theta_2$  soit invariante maximale pour  $\tilde{G}$ .

Si  $U(X_1, \dots, X_N)$  est une statistique invariante maximale pour  $\tilde{G}$ , la distribution de  $U$  ne dépend pas de  $\theta_1$ . Mais, puisque  $\theta_2$  est invariante maximale pour  $\tilde{G}$ , cette distribution dépend généralement de  $\theta_2$  (par le théorème 1.4). On la désigne par  $h_{\theta_2}(u)$ .

Si on note

$$(X_1, \dots, X_N) \stackrel{\text{déf}}{=} (T(X_1, \dots, X_N), U(X_1, \dots, X_N))$$

la décomposition de la statistique, alors la distribution de  $T$  étant donné  $U = u$ , dépend généralement de  $\theta_1$  et de  $\theta_2$ . On la note  $p_{\theta_1, \theta_2}(t | U)$ .

On peut montrer que, si  $d(X)$  est un estimateur équivariant de  $\theta_1$ , son risque quadratique moyen ne dépend que de  $\theta_2$  et de l'orbite particulière à laquelle appartient  $\theta_1$ .

Supposons, de plus, que si  $\theta_2$  est connu, il existe un estimateur équivariant qui minimise uniformément le risque quadratique moyen. Puisque ce risque varie en fonction de  $\theta_2$ , ce résultat n'est généralement plus vrai si  $\theta_2$  est inconnu. Dans ce cas,  $\theta_2$  est appelé un paramètre de NUISANCE.

### 1.2.3 Estimation d'un paramètre de position

Considérons un problème statistique dont le seul paramètre inconnu est un paramètre de position, ceci signifiant que la densité  $f_\theta(x)$  de chacune des variables aléatoires de l'échantillon s'écrit  $f(x - \theta)$ .  $G$  est alors le groupe des translations sur  $\mathcal{X}$ . Nous recherchons  $d$ , un estimateur équivariant de  $\theta$  qui minimise le risque quadratique moyen  $E_\theta(\theta - d)^2$ .

Si  $X = (T(X), U(x))$  est la décomposition adoptée au point précédent, la solution du problème conditionnel, à savoir la recherche de la constante  $\phi(u)$  qui minimise

$$E_\theta[(\theta - (T(X) + \phi(u)))^2 | U = u]$$

est donnée par  $\phi(u) = -E_0[T \mid U = u]$  et la solution optimale du problème est donc

$$d(X) = T(X) - E_0[T(X) \mid U(X)].$$

De plus,  $d(X)$  est également la solution du problème original non conditionnel et possède la propriété supplémentaire d'être un estimateur sans biais de  $\theta$ .

## 1.3 Processus ponctuels

### 1.3.1 Définitions

**Définition 1.10** *Un PROCESSUS STOCHASTIQUE est une collection de variables aléatoires*

$$\{N(t) \mid t \in T\}$$

*indexée par un ensemble  $T$ .*

$T$  peut être l'ensemble des naturels  $\mathbb{N}$ , l'ensemble des réels positifs  $\mathbb{R}^+$ , etc.

**Définition 1.11** *Un PROCESSUS PONCTUEL est un processus stochastique dont les réalisations sont des ensembles finis ou dénombrables de points d'un espace  $E$  tels que seul un nombre fini d'entre eux est réparti dans tout ensemble borné.*

Dans la suite, on considère  $E = \mathbb{R}^N$ .

Un processus ponctuel peut être décrit de la façon suivante :

$$N(x) = \begin{cases} 1 & \text{s'il y a un point en } x \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Cette première façon de décrire un processus ponctuel n'est pas très utile car, pour presque tout  $x$ ,  $P(N(x) = 1) = 0$ .

C'est la raison pour laquelle on indexe en général un processus, non pas par des points, mais par des ensembles, de la façon suivante :

$$\forall A \subset E \quad N(A) = \text{card}(A)$$

où  $\text{card}(A)$  est le nombre de points dans l'ensemble  $A$ .

Nous pouvons remarquer les points suivants :

1. De par la définition du processus ponctuel, si  $A$  est borné,  $N(A)$  est fini.
2. Le processus ponctuel de base est le processus de Poisson.

**Définition 1.12**  $N$  est un PROCESSUS DE POISSON sur  $E \subset \mathbb{R}^N$  si et seulement si

- i.  $\forall A_1, A_2, \dots, A_k \subset E$ , disjoints deux à deux, les variables aléatoires

$$N(A_1), N(A_2), \dots, N(A_k)$$

sont indépendantes,

- ii.  $\forall A \subset E$  et  $\forall k \geq 0$ ,

$$P(N(A) = k) = e^{-\mu(A)} \frac{(\mu(A))^k}{k!}.$$

Ce que l'on peut encore exprimer de la manière suivante :  
 $N$  est un processus de Poisson sur  $E \subset \mathbb{R}^N$  si et seulement si

- i.  $N$  a des incréments indépendants,
- ii.  $\forall A \subset E$ ,  $N(A)$  a une distribution de Poisson de paramètre  $\mu(A)$ , où  $\mu$  est une mesure donnant une masse finie à tout ensemble borné.

**Définition 1.13**  $N$  est un processus de Poisson HOMOGENÈME ou STATIONNAIRE sur  $E \subset \mathbb{R}^N$  si et seulement si

- i.  $N$  est un processus de Poisson sur  $E$ ,
- ii.  $\mu(A) = \rho m(A)$  où
  - $\rho \in \mathbb{R}_0^+$  est appelé TAUX ou INTENSITÉ du processus et représente le nombre moyen de points par unité de volume (vu que l'espérance d'une loi de Poisson est son paramètre),
  - $m(A)$  est la mesure de Lebesgue de  $A$ .

**Définition 1.14**  $N$  est processus de Poisson NON HOMOGENÈME sur  $E \subset \mathbb{R}^N$  si et seulement si

- i.  $N$  est un processus de Poisson sur  $E$ ,
- ii.  $\mu(A) = \int_A \rho(x) m(dx)$ , où  $m$  est la mesure de Lebesgue.

### 1.3.2 Caractérisation du processus de Poisson

A. Le processus de Poisson homogène est caractérisé par les deux propriétés fondamentales suivantes :

- i.  $N(A)$ , le nombre de réalisations dans n'importe quel ensemble borné a une distribution de Poisson de moyenne  $\rho m(A)$ .
- ii. Propriété d'uniformité conditionnelle  
Si  $N(A) = n$ , alors les  $n$  réalisations sont indépendantes et forment un échantillon aléatoire d'une distribution uniforme sur  $A$ .

B. Pour le processus de Poisson non homogène, l'intensité  $\rho$  est une fonction variable  $\rho(x)$ . On a donc

- i.  $N(A)$  suit une loi de Poisson de paramètre  $\int_A \rho(x) m(dx)$ , i.e.

$$N(A) \sim p_o \left( \int_A \rho(x) m(dx) \right).$$

- ii. Propriété conditionnelle  
Si  $N(A) = n$ , alors les  $n$  réalisations sont indépendantes et forment un échantillon aléatoire dont la distribution est proportionnelle à  $\rho(x)$ .

# Chapitre 2

## Morphologie mathématique

Pour pouvoir caractériser et manipuler des formes, nous devons encore introduire quelques notions de morphologie mathématique.

### 2.1 Notions élémentaires

Soient  $A$  et  $B$  deux parties de  $\mathbb{R}^2$ .

**Définition 2.1** L'ENVELOPPE CONVEXE de  $A$  est l'ensemble

$$H(A) \stackrel{\text{déf}}{=} \left\{ x \mid x = \sum_{i=1}^n \lambda_i \cdot a_i, \quad n \in \mathbb{N}, \quad a_i \in A, \quad \lambda_i \geq 0, \quad \forall i, \quad \sum_{i=1}^n \lambda_i = 1 \right\}.$$

**Définition 2.2** L'HOMOTHÉTIE de  $A$  de coefficient  $\lambda \in \mathbb{R}$  est l'ensemble

$$\lambda A \stackrel{\text{déf}}{=} \{ \lambda x \mid x \in A \}.$$

**Définition 2.3** Le TRANSLATÉ de  $A$  en  $u$  est l'ensemble

$$A_u \stackrel{\text{déf}}{=} \{ u + a \mid a \in A \}.$$

**Définition 2.4** La SYMÉTRIQUE de  $A$  par rapport à l'origine est l'ensemble

$$\check{A} \stackrel{\text{not}}{=} -A \stackrel{\text{déf}}{=} \{ -a \mid a \in A \}.$$

**Définition 2.5** L'ADDITION DE MINKOWSKI de  $A$  et de  $B$  est l'ensemble

$$A \oplus B \stackrel{\text{déf}}{=} \{ a + b \mid a \in A, b \in B \}.$$

**Définition 2.6** La DILATATION de  $A$  par  $B$  est l'ensemble

$$A \boxplus B \stackrel{\text{not}}{=} A \oplus \check{B} \stackrel{\text{déf}}{=} \{ a - b \mid a \in A, b \in B \} = \{ u \mid B_u \cap A \neq \emptyset \}.$$

La dernière égalité vient du fait que

$$\begin{aligned} B_u \cap A \neq \phi &\iff \exists a \in A, \exists b \in B, a = b + u \\ &\iff \exists a \in A, \exists b \in B, u = a - b \end{aligned}$$

et donc  $\{u \mid B_u \cap A \neq \phi\} = \{a - b \mid a \in A, b \in B\}$ .

La dilatation de  $A$  par  $B$  est l'ensemble des positions  $u$  pour lesquelles  $B_u$ , translaté de  $B$  en  $u$  coupe  $A$ .

Voici une autre formule ensembliste donnant la dilatation

$$\begin{aligned} A \boxplus B &= \{u \mid B_u \cap A \neq \phi\} \\ &= \{u \mid \exists b \in B, b + u \in A\} \\ &= \{u \mid \exists b \in \check{B}, u \in A_b\} \\ &= \bigcup_{b \in \check{B}} A_b. \end{aligned}$$

**Définition 2.7** La SOUSTRACTION DE MINKOWSKI de  $A$  par  $B$  est l'ensemble

$$A \ominus B \stackrel{\text{déf}}{=} \{x \mid \forall b \in B, x - b \in A\}.$$

**Définition 2.8** L'ÉROSION de  $A$  par  $B$  est l'ensemble

$$A \boxminus B \stackrel{\text{not}}{=} A \ominus \check{B} \stackrel{\text{déf}}{=} (A^c \boxplus \check{B})^c.$$

L'érosion correspond à la relation

$$\begin{aligned} A \boxminus B &= \{u \mid A^c \cap B_u \neq \phi\}^c \\ &= \{u \mid A^c \cap B_u = \phi\} \\ &= \{u \mid B_u \subseteq A\}. \end{aligned}$$

Donc l'érosion de  $A$  par  $B$  est l'ensemble des positions  $u$  pour lesquelles  $B_u$ , translaté de  $B$  en  $u$  est à l'intérieur de  $A$ .

On peut encore écrire

$$A \boxminus B = (A^c \boxplus B)^c = \left( \bigcup_{b \in \check{B}} A_b^c \right)^c = \bigcap_{b \in \check{B}} A_b.$$

**Définition 2.9** L'OUVERTURE MORPHOLOGIQUE de  $A$  par  $B$  est l'ensemble

$$A_B \stackrel{\text{not}}{=} (A \boxminus B) \boxplus B.$$

L'ouverture morphologique s'écrit sous forme ensembliste

$$\begin{aligned}
(A \boxplus B) \oplus B &= \{u \dagger (A \boxplus B) \cap \check{B}_u \neq \phi\} \\
&= \{u \dagger \exists v \in A \boxplus B \text{ et } v \in \check{B}_u\} \\
&= \{u \dagger \exists v, B_v \subseteq A \text{ et } u \in B_v\} \\
&= \bigcup_u \{B_u \dagger B_u \subseteq A\}.
\end{aligned}$$

Cet ensemble est donc l'espace des points recouverts par les translatés de  $B$  contenus dans  $A$ .

**Définition 2.10** La FERMETURE MORPHOLOGIQUE de  $A$  par  $B$  est l'ensemble

$$A^B \stackrel{\text{not}}{=} (A \boxplus B) \ominus B.$$

On peut écrire de manière équivalente

$$\begin{aligned}
(A \boxplus B) \ominus B &= ((A \boxplus B)^c \oplus B)^c \\
&= (((A^c)^c \oplus \check{B})^c \oplus B)^c \\
&= ((A^c \boxplus B) \oplus B)^c \\
&= ((A^c)_B)^c \\
&= (\bigcup_u \{B_u \dagger B_u \subseteq A^c\})^c.
\end{aligned}$$

On peut donc dire que la fermeture morphologique de  $A$  par  $B$  est le complémentaire de l'ensemble de tous les points de  $A^c$  recouverts par les translatés de  $B$  qui sont à l'intérieur de  $A^c$ .

**Propriété 2.1** Les quatre propriétés élémentaires de l'ouverture et de la fermeture morphologiques.

Si  $X, Y$  et  $B$  sont des parties de  $\mathbb{R}^2$ .

1. La croissance

$$X \subset Y \implies X_B \subset Y_B \text{ et } X^B \subset Y^B.$$

2. L'anti-extensivité pour l'ouverture et l'extensivité de la fermeture

$$X_B \subset X \text{ et } X^B \supset X.$$

3. L'idempotence

$$(X_B)_B = X_B \text{ et } (X^B)^B = X^B.$$

4. La commutation avec les translations en  $x$

$$(X_B)_x = (X_x)_B \text{ et } (X^B)_x = (X_x)^B.$$

**Propriété 2.2** Si  $A$  et  $B$  sont deux parties de  $\mathbb{R}^2$ , on a

$$A \oplus B \boxminus B = A.$$

En effet,

$$\begin{aligned} (A \oplus B) \boxminus B &= \{x \dagger \forall b \in \check{B}, x - b \in A \oplus B\} \\ &= \{x \dagger \forall b \in \check{B}, x - b \in \{a + b \dagger a \in A, b \in B\}\} \\ &= \{x \dagger \forall b \in -B, x - b \in \{a + b \dagger a \in A, b \in B\}\} \\ &= \{x \dagger \forall -b \in B, x + (-b) \in \{a + b \dagger a \in A, b \in B\}\} \\ &= \{a \in A\} = A. \end{aligned}$$

**Définition 2.11** La FERMETURE MORPHOLOGIQUE de  $A$  PAR UN DISQUE DE RAYON  $r$  est l'ensemble  $A^{B_r}$  où  $B_r$  est le disque centré à l'origine et de rayon  $r$ .

**Définition 2.12** Un ensemble est dit IFMD (pour IDENTIQUE À SA FERMETURE MORPHOLOGIQUE PAR UN DISQUE), s'il est identique à sa fermeture morphologique par un disque d'un certain rayon.

Soit  $m$ , la mesure de Lebesgue sur  $\mathbb{R}^2$  muni de sa tribu borélienne et soit  $A$  un borélien de  $\mathbb{R}^2$ , on note

- $g(A)$  le centre de gravité de  $A$  par rapport à  $m$ .
- $s(A) \stackrel{\text{déf}}{=} A - g(A)$  la forme de  $A$ .

**Définition 2.13** L'ENSEMBLE DES PARTIES IFMD COMPACTES DE  $\mathbb{R}^2$  est

$$\mathcal{K} = \bigcup_{r>0} \mathcal{K}_r$$

où  $\mathcal{K}_r \stackrel{\text{déf}}{=} \{K \text{ partie IFMD compacte de } \mathbb{R}^2 \dagger \max\{t > 0 \dagger K^{B_t} = K\} = r\}$ .

## 2.2 Théorie des $\alpha$ -shapes

Nous nous intéressons aux  $\alpha$ -shapes dans le cadre de ce mémoire car

- l' $\alpha$ -shape d'un ensemble fini de points, pour une valeur réelle arbitraire de  $\alpha$ , est une généralisation naturelle de l'enveloppe convexe de cet ensemble,
- l' $\alpha$ -shape rencontre bien la notion intuitive de la "forme" d'un ensemble fini de points,
- il existe des algorithmes optimaux pour la construction des  $\alpha$ -shapes (voir [1] et [8]).

2

Soit  $P$  un ensemble de  $n$  points du plan ( $n$  étant un entier positif).

L'enveloppe convexe de  $P$  peut être définie comme l'intersection de tous les demi-plans fermés contenant tous les points de  $P$ . Cette définition peut être généralisée par la notion d' $\alpha$ -hull.

**Définition 2.14** Soit  $\alpha$  un réel POSITIF suffisamment petit. L' $\alpha$ -HULL de  $P$  est l'intersection de tous les disques de rayon  $\frac{1}{\alpha}$  qui contiennent tous les points de  $P$ , i.e.

$$\alpha_H(P) \stackrel{\text{d\'ef}}{=} \bigcap_{x \uparrow P \subset B(x, \frac{1}{\alpha})} B(x, \frac{1}{\alpha}).$$

Pour que cette définition ait un sens, il faut que  $\alpha$  soit tel qu'il existe au moins un disque de rayon  $\frac{1}{\alpha}$  qui contienne tous les points de  $P$ . Cela implique que la plus petite valeur possible pour  $\frac{1}{\alpha}$  est égale au rayon du cercle circonscrit à  $P$ , c'est-à-dire le diamètre de  $P$ .

En réalité, une valeur de  $\frac{1}{\alpha}$  plus grande que  $\frac{1}{\sqrt{3}}$  fois le diamètre de  $P$  suffit, et cela indépendamment de la distribution des points. ?

Il faut remarquer que lorsque  $\alpha$  tend vers zéro, l' $\alpha$ -hull approxime l'enveloppe convexe habituelle de  $P$ .

**Définition 2.15** Soit  $\alpha$  un réel NÉGATIF. L' $\alpha$ -HULL de  $P$  est l'intersection des parties du plan

- i. qui sont des complémentaires fermés de disques de rayon  $-\frac{1}{\alpha}$  et
- ii. qui contiennent tous les points de  $P$ ,

i.e.

$$\alpha_H(P) \stackrel{\text{d\'ef}}{=} \bigcap_{x \uparrow P \subset B(x, -\frac{1}{\alpha})^c} B(x, -\frac{1}{\alpha})^c.$$

Par convention, on définit le 0-hull de  $P$  comme étant l'enveloppe convexe habituelle de  $P$  et on définit l'intersection d'un ensemble vide de disque comme étant le plan tout entier.

Pour donner une définition générale d' $\alpha$ -hull, on introduit la notion de disque généralisé.

**Définition 2.16** Un DISQUE GÉNÉRALISÉ de rayon  $\frac{1}{\alpha}$  est

- i. un disque de rayon  $\frac{1}{\alpha}$  si  $\alpha > 0$ ,
- ii. un disque de rayon  $-\frac{1}{\alpha}$  si  $\alpha < 0$ ,
- iii. un demi-plan si  $\alpha = 0$ .

On peut alors donner la définition générale suivante.

**Définition 2.17** Pour un réel arbitraire  $\alpha$  et  $P$  un ensemble fini de points du plan, l' $\alpha$ -hull de  $P$  est l'intersection de tous les disques généralisés de rayon  $\frac{1}{\alpha}$  qui contiennent tous les points de  $P$ .

On a donc une famille d' $\alpha$ -hulls indicés par  $\alpha \in [-\infty, \infty]$ . Tous les membres de cette famille vérifient la propriété suivante.

**Propriété 2.3** Si  $\alpha_1 \leq \alpha_2$ , alors l' $\alpha_1$ -hull d'un ensemble fini de points est inclus dans l' $\alpha_2$ -hull du même ensemble de points.

Avant de définir les  $\alpha$ -shapes, nous avons encore besoin de quelques autres définitions.

**Définition 2.18** Un point  $p$  de l'ensemble  $P$  est dit  $\alpha$ -EXTRÊME dans  $P$  s'il existe un disque généralisé fermé de rayon  $\frac{1}{\alpha}$ , tel que  $p$  se trouve sur sa frontière et qu'il contienne tous les points de  $P$ . On définit

$$\alpha_E(P) \stackrel{\text{déf}}{=} \{p \in P \mid p \text{ est } \alpha\text{-extrême}\}.$$

**Définition 2.19** Si pour deux points  $\alpha$ -extrêmes  $p$  et  $q$  il existe un disque généralisé fermé de rayon  $\frac{1}{\alpha}$  tel que  $p$  et  $q$  se trouvent sur sa frontière et qu'il contienne tous les points de  $P$ , alors  $p$  et  $q$  sont dits  $\alpha$ -VOISINS.

Dans les définitions suivantes, nous supposons que  $P$  ne possède pas de quadruplet de points cocirculaires ni de triplet de points colinéaires.

Cette hypothèse n'est pas trop restrictive. En effet, dans la suite du travail nous considérerons une réalisation d'un processus de Poisson et pour une telle réalisation, la probabilité que quatre points soient cocirculaires et que trois points soient colinéaires est nulle.

**Définition 2.20** Soit  $P$  un ensemble de points du plan et  $\alpha$  un réel arbitraire. L' $\alpha$ -SHAPE de  $P$  est le GRAPHE où les sommets sont les points  $\alpha$ -extrêmes dans  $P$  et où des segments de droites relient tous les couples  $\alpha$ -voisins, c'est-à-dire,

si on note  $\alpha_V(P) = \{\text{segment } (p_i, p_j) \mid p_i \text{ et } p_j \text{ sont } \alpha\text{-voisins}\}$  l'ensemble des arêtes du graphe, l' $\alpha$ -shape de  $P$  est

$$\alpha_S(P) \stackrel{\text{def}}{=} \text{graphe}(\alpha_E(P), \alpha_V(P)).$$

**Propriété 2.4** Si  $\alpha_1 \leq \alpha_2$ , alors l'ensemble des points  $\alpha_1$ -extrêmes de  $P$  est inclus dans l'ensemble des points  $\alpha_2$ -extrêmes de  $P$ .

L' $\alpha$ -shape est définie comme un graphe de segments de droites. Dans certaines applications, la notion intuitive de "forme" d'un ensemble de points du plan n'est pas aussi bien approchée par un ensemble de segments de droites que par une aire qui se détache de son complémentaire. Cette approche en deux dimensions peut quand même être obtenue à l'aide des  $\alpha$ -shapes en distinguant les "côtés" extérieurs et intérieurs.

**Définition 2.21** Soit  $P$  un ensemble de points du plan et  $\alpha \neq 0$ . Soit  $F$  une face de l' $\alpha$ -shape de  $P$  et  $a$  une arête de la frontière de  $F$ .

i. Pour  $\alpha > 0$ , l'arête  $a$  est dite arête POSITIVE de  $F$  si le disque fermé de rayon  $\frac{1}{\alpha}$  contenant les extrémités de  $a$  sur sa frontière et ayant son centre strictement du même côté que  $F$  par rapport à  $a$ , contient tous les points de  $P$ .  
Sinon,  $a$  est dite arête NÉGATIVE de  $F$ .

ii. Pour  $\alpha < 0$ ,  $a$  est dite arête POSITIVE de  $F$  si le disque ouvert de rayon  $-\frac{1}{\alpha}$  contenant les extrémités de  $a$  sur sa frontière et ayant son centre strictement du même côté que  $F$  par rapport à  $a$ , contient au moins un point de  $P$ .  
Sinon,  $a$  est dite arête NÉGATIVE de  $F$ .

**Définition 2.22** Soit  $P$  un ensemble fini de points du plan.

- i. Pour  $\alpha \neq 0$ , une face  $F$  de l' $\alpha$ -shape d'un ensemble  $P$  de points du plan est dite INTÉRIEURE si l'une des arêtes de sa frontière est positive et dite EXTÉRIEURE si l'une des arêtes de sa frontière est négative.
- ii. Pour  $\alpha = 0$ , la face bornée de la 0-shape de  $P$ , c'est-à-dire de l'enveloppe convexe de  $P$  est la seule face intérieure et la face non bornée est la seule face extérieure.

Intuitivement, une valeur de  $\alpha$  grande produit une forme assez "brute", tandis que plus la valeur de  $\alpha$  est petite, plus l' $\alpha$ -shape révélera des détails. A la limite, quand  $\alpha = -\infty$ , l' $\alpha$ -shape est l'ensemble des points isolés de  $P$ .

# Chapitre 3

## Le problème unidimensionnel

Nous traitons tout d'abord le problème pour le cas unidimensionnel. Le seul objectif de ce chapitre est d'introduire les "intuitions" nécessaires pour comprendre la suite du travail.

### 3.1 Adaptation des définitions au cas unidimensionnel

Définissons tout d'abord  $\mathcal{U}$ , l'ensemble des parties de  $\mathbb{R}$  qui s'expriment comme des unions disjointes finies d'intervalles fermés bornés de la droite réelle, i.e.

$$\mathcal{U} = \{U \subset \mathbb{R} \mid U = \bigcup_{j=1}^s [a_j, b_j], s \in \mathbb{N}_0, -\infty < a_1 < b_1 < \dots < a_s < b_s < \infty\}.$$

Dans le cas unidimensionnel, le disque centré à l'origine de rayon  $r$  n'est rien d'autre que l'intervalle  $(-r, r)$ . On va donc réexprimer les définitions 2.11, 2.12 et 2.13 pour le cas unidimensionnel.

Soit  $U \in \mathcal{U}$ .

**Définition 3.1** La FERMETURE MORPHOLOGIQUE de  $U$  PAR UN INTERVALLE DE LONGUEUR  $2r$  est le complémentaire de tous les points de  $U^c$  recouverts par les translatés de  $(-r, r)$  qui sont à l'intérieur de  $U^c$ , on le note

$$U^{(-r,r)}.$$

**Définition 3.2**  $U$  est dit IFMI (pour Identique à sa Fermeture Morphologique par un Intervalle), s'il est identique à sa fermeture morphologique par un intervalle  $(-r, r)$ ,  $r$  fixé.

Remarquons que le fait que  $U$  soit identique à sa fermeture morphologique par l'intervalle  $(-r, r)$  signifie que  $\forall j = 1, \dots, s-1$ , la longueur de l'intervalle  $(b_j, a_{j+1})$  est plus grande ou égale à  $2r$ , c'est-à-dire,  $\forall j = 1, \dots, s-1$ ,  $a_{j+1} - b_j \geq 2r$ .

**Définition 3.3** L'ENSEMBLE DES PARTIES DE  $\mathbb{R}$  BORNÉES IFMI est

$$\mathcal{L} = \bigcup_{r>0} \mathcal{L}_r$$

où

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_r &\stackrel{\text{déf}}{=} \{L \in \mathcal{U}, \text{ partie IFMI } \dagger \max\{t > 0 \dagger L^{(-t,t)} = L\} = r\} \\ &= \{L \subset \mathbb{R} \dagger L = \bigcup_{j=1}^s [a_j, b_j], s \in \mathbb{N}_0, -\infty < a_1 < b_1 < \dots < a_s < b_s < \infty, \\ &\quad \forall j = 1, \dots, s-1, a_{j+1} - b_j \geq 2r\}. \end{aligned}$$

Nous pouvons également réexprimer la définition 2.15.

Soit  $P$  un ensemble de  $n$  points de la droite réelle.

**Définition 3.4** Soit  $\alpha$  un réel NÉGATIF. L' $\alpha$ -INTERVALLE de  $P$  est l'intersection de toutes les parties de la droite réelle

- i. qui sont des complémentaires fermés d'intervalles  $(x + \frac{1}{\alpha}, x - \frac{1}{\alpha})$  et
- ii. qui contiennent tous les points de  $P$ ,

i.e.

$$\alpha_I(P) \stackrel{\text{déf}}{=} \bigcap_{x \dagger PC(x + \frac{1}{\alpha}, x - \frac{1}{\alpha})^c} (x + \frac{1}{\alpha}, x - \frac{1}{\alpha})^c.$$

Par convention, on définit le 0-intervalle de  $P$  comme étant le plus petit intervalle contenant  $P$  et l'on définit l'intersection d'un ensemble vide d'intervalles comme étant la droite réelle toute entière.

La définition 2.14 devient la suivante.

**Définition 3.5** Soit  $\alpha$  un réel POSITIF suffisamment petit. L' $\alpha$ -INTERVALLE de  $P$  est l'intersection de tous les intervalles  $[-\frac{1}{\alpha}, \frac{1}{\alpha}]$  qui contiennent tous les points de  $P$ , i.e.

$$\alpha_I(P) \stackrel{\text{déf}}{=} \bigcap_{x \dagger PC[x - \frac{1}{\alpha}, x + \frac{1}{\alpha}]} [x - \frac{1}{\alpha}, x + \frac{1}{\alpha}]$$

qui n'est rien d'autre que le plus petit intervalle qui contient  $P$ .

Il faut encore réexprimer la définition 2.18.

**Définition 3.6** Soit  $\alpha$  un réel négatif. Un point  $p$  de l'ensemble  $P$  est dit  $\alpha$ -EXTRÊME dans  $P$

s'il existe un intervalle  $(x + \frac{1}{\alpha}, x - \frac{1}{\alpha})$ , tel que  $p$  se trouve sur sa frontière et que cet intervalle ne contient aucun point de  $P$ , c'est-à-dire si  $p$  appartient à  $\alpha_I(P)$  et n'appartient pas à son ouverture (au sens habituel).

Enfin, nous noterons  $l(L)$ , la longueur de Lebesgue de l'intervalle  $L$ .

La propriété suivante nous permettra de trouver une statistique exhaustive minimale de  $L$ .

**Propriété 3.1** Soit  $L \in \mathcal{L}_r$ , c'est-à-dire  $L$  est une partie de  $\mathbb{R}$  bornée et identique à sa fermeture morphologique par l'intervalle  $(-r, r)$ . Si  $P$  est un ensemble fini de points de  $L$ , alors l' $\alpha$ -intervalle de  $P$  avec  $\alpha = -\frac{1}{r}$  est inclus dans  $L$ .

## 3.2 Formulation du problème

Supposons qu'une réalisation d'un processus de Poisson sur la droite réelle ait été mutilée de telle façon que nous ne puissions observer que les points intérieurs de  $L$ , partie de  $\mathbb{R}$ , bornée et identique à sa fermeture morphologique par un intervalle  $(-r, r)$  où  $r$  est CONNU.

Trouver  $L$  en utilisant des méthodes d'inférence statistique.

## 3.3 Modèle

Soit  $X = (X_1 \dots X_N)$  un vecteur aléatoire où les  $X_i$  sont des variables aléatoires indépendantes et identiquement distribuées de densité uniforme sur  $L \in \mathcal{L}$ .

Par la propriété 3.1, la statistique  $\alpha_I(X)$  où  $\alpha = -\frac{1}{r}$  est une statistique exhaustive minimale pour  $L$ .

On peut alors écrire la fonction de densité du vecteur aléatoire  $X$  comme

$$f_X(x) = \prod_{i=1}^N f_{X_i}(x_i) = \frac{1}{[l(L)]^N} \prod_{i=1}^N \mathbb{1}_L(x_i) = \frac{1}{[l(L)]^N} \mathbb{1}_L[\alpha_I(x)].$$

### 3.4 Estimation équivariante de la position de $L$

On décompose la statistique  $\alpha_I(X)$  en deux composantes, son centre de gravité  $g(\alpha_I(X))$  et sa forme  $s(\alpha_I(X))$ , on considère le couple

$$(g(\alpha_I(X)), s(\alpha_I(X))).$$

On note

$$(g(\alpha_I(X)), s(\alpha_I(X))) \stackrel{\text{not}}{=} (T(X), U(X))$$

où  $U(X)$  est une statistique invariante maximale pour  $G = \tilde{G}$  groupe des translations.

On décompose  $L$  en

$$(\theta_1, \theta_2) \stackrel{\text{not}}{=} (g(L), s(L))$$

où on a  $s(L)$  invariante pour  $G = \tilde{G}$ .

Si le seul paramètre inconnu est le paramètre de position (i.e. si on suppose  $\theta_2$  connu),  $d$  l'estimateur équivariant de  $\theta_1$  qui minimise le risque quadratique moyen  $E_{\theta_1}(\theta_1 - d)^2$  est donné par  $d(X) = T(X) - E_0(T(X) | U(X))$  qui est de plus un estimateur sans biais de  $\theta_1$ .  $d(X)$  est donc un estimateur sans biais de variance uniformément minimale (UMVU).

La densité jointe de  $T(U)$  et de  $U(X)$  s'écrit

$$f_{\theta_1, \theta_2}(t(x), u(x)) = \mathbb{1}_{[\theta_1 + (\theta_2 \boxplus u(x))]} t(x) \frac{N(N-1) \cdots (N - (2V_N + 1))}{[l(\theta_2)]^N} [l(u(x))]^{N-2V_N}$$

où  $2V_N$  est le nombre de points  $\alpha$ -extrêmes.

Rappelons que  $(\theta_2 \boxplus u(x))$  est l'ensemble de positions  $z$  pour lesquelles le translaté de  $u(x)$  (la forme de  $\alpha_I(x)$ ) en  $z$  est contenu dans  $\theta_2$  (la forme de  $L$ ).

La densité marginale de  $U(X)$  est donc

$$h_{\theta_2}(u(x)) = l(\theta_2 \boxplus u(x)) [l(\theta_2)]^{-N} l(u(x))^{N-2V_N} N(N-1) \cdots (N - (2V_N + 1)).$$

La densité conditionnelle de  $T(X)$  est

$$p_{\theta_1, \theta_2}(t(x) | u(x)) = \frac{1}{l(\theta_2 \boxplus u(x))} \mathbb{1}_{[\theta_1 + (\theta_2 \boxplus u(x))]} t(x).$$

En  $\theta_1 = 0$ , on a

$$p_{0, \theta_2}(t(x) | u(x)) = \frac{1}{l(\theta_2 \boxplus u(x))} \mathbb{1}_{[\theta_2 \boxplus u(x)]} t(x),$$

donc

$$E_0(T(X) | U(X)) = g(\theta_2 \boxplus U(X)).$$

L'estimateur optimal de  $\theta_1$  sera donc

$$d(X) = g(\alpha_I(X)) - g(s(L) \boxplus s(\alpha_I(X)))$$

Si  $s(L)$  est connu, cet estimateur est uniformément optimal, mais, lorsque  $s(L)$  est inconnu, cette propriété n'est plus vraie. Il s'agit dans ce cas d'un paramètre de nuisance.

### 3.5 Estimation équivariante de la forme unitaire du domaine $L$

En suivant le même raisonnement que dans Rasson [6], toute estimation équivariante de  $s(L)$  se fera sur base de la densité marginale de  $s(\alpha_I(X))$ . Pour ce paramètre  $s(L)$  de dimension infinie, il semble logique d'utiliser l'estimateur de maximum de vraisemblance.

Considérons la partition

$$s(L) = \left( m(L), \frac{s(L)}{l(L)} \right).$$

On attribuera à l'un des paramètres de la décomposition la valeur qui rend maximale la vraisemblance lorsque l'autre reste fixé. Ici, supposons  $l(L)$  fixé.

Le problème est donc le suivant.

Soit  $a > 0$  fixé. Trouver parmi les parties de  $\mathbb{R}$  appartenant à  $\mathcal{L}$  et de longueur  $a$ , celle qui maximise la vraisemblance marginale de  $U(X)$

$$h_{\theta_2}(u(x)) = l(\theta_2 \boxplus u(x)) [l(\theta_2)]^{-N} l(u(x))^{N-2V_N} N(N-1) \cdots (N - (2V_N + 1)),$$

c'est-à-dire celle dont l'érosion par  $s(\alpha_I(x))$  est de longueur maximale, i.e.

$$L^* = \operatorname{argmax}_{\substack{l \in \mathcal{L} \\ \uparrow L(l) = a}} l(L \boxplus s(\alpha_I(x))).$$

Notons tout d'abord  $X_{(1)} < X_{(2)} < \cdots < X_{(2V_N-1)} < X_{(2V_N)}$  les points  $\alpha$ -extrêmes de  $s(\alpha_I(X))$ . On peut alors écrire  $\alpha_I(x)$  sous la forme

$$\alpha_I(x) = \bigcup_{i=1}^{V_N} [x_{(2i-1)}, x_{(2i)}].$$

Considérons  $L \in \mathcal{L}$  tel que  $l(L) = a$  et  $L \supset s(\alpha_I(x))$ .

On peut écrire  $L$  sous la forme  $L = \cup_{j=1}^s [a_j, b_j]$  où les  $[a_j, b_j]$  sont disjoints.

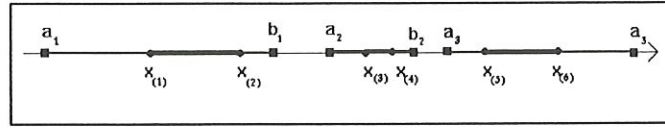


Figure 3.1

Comme  $L \supset s(\alpha_I(x))$ , alors

$$\forall i = 1, \dots, V_N \exists ! j_i \in \{1, \dots, s\} \dagger [x_{(2i-1)}, x_{(2i)}] \subset [a_{j_i}, b_{j_i}].$$

Voir figure 3.1.

Bien sûr, on peut avoir  $j_i = j_k$  pour  $j \neq k$ .

En dimension un,  $l(L \boxplus s(\alpha_I(X)))$  se calcule facilement.

$$l(L \boxplus s(\alpha_I(X))) = \min_{i=1, \dots, V_N} \{(x_{(2i-1)} - a_{j_i})\} + \min_{i=1, \dots, V_N} \{(b_{j_i} - x_{(2i)})\}.$$

On peut encore obtenir le même résultat en considérant l'expression suivante

$$L \boxplus s(\alpha_I(X)) = \bigcap_{i=1}^{V_N} \{[a_{j_i}, b_{j_i}] \boxplus [x_{(2i-1)}, x_{(2i)}]\}.$$

Cette expression vient du fait que lorsque  $s(\alpha_I(x))$  se déplace dans  $L$ ,

- ▷ il est bloqué dans ses translations positives dès qu'un des  $x_{(2i)}$  atteint le  $b_{j_i}$  correspondant,
- ▷ il est bloqué dans ses translations négatives dès qu'un des  $x_{(2i-1)}$  atteint le  $a_{j_i}$  correspondant.

CETTE IDÉE EST GÉNÉRALISÉE EN DIMENSION DEUX DANS LA SECTION 4.6.2.

On obtient l'argument maximum en choisissant

$$L = \cup_{j=1}^s [a_j, b_j] \in \mathcal{L}, \text{ vérifiant } l(L) = a \text{ et } L \supset s(\alpha_I(x)),$$

tel que  $\exists t > 0$ ,

- ◊  $(x_{(1)} - a_{j_1}) = t$  et  $(b_{j_{V_N}} - x_{(2V_N)}) = t$ ,
- ◊  $\forall i = 1, \dots, V_N - 1$ ,
  - soit  $(b_{j_i} - x_{(2i)}) = (x_{(2(i+1)-1)} - a_{j_{(i+1)}}) = t$ ,
  - soit  $x_{(2(i+1)-1)} - x_{(2i)} \leq 2t$ .

$L^*$  s'écrit donc

$$L^* = \bigcup_{i=1}^{V_N} [x_{(2i-1)} - t, x_{(2i)} + t]$$

et  $l(L^* \boxminus s(\alpha_I(x))) = 2t$ .

### 3.6 Estimation de la longueur du domaine $L$

Il ne reste plus qu'à trouver un estimateur sans biais de  $l(L)$ , qui conjointement avec la solution de l'estimation de la forme unitaire de  $L$ , donnera l'estimation complète de  $s(L)$ .

Soit  $\bar{x}_N = (x_1, \dots, x_N)$  une réalisation d'un processus de Poisson homogène sur  $L$ . Les points  $x_1, \dots, x_N$  sont donc uniformément distribués sur  $L$ . Soit  $2V_N = U_N$  le nombre de points  $\alpha$ -extrêmes de  $\alpha_I(\bar{x})$ .

Supposons qu'un autre point  $x_{N+1}$  soit distribué uniformément sur  $L$ , indépendamment de  $\bar{x}$ . Alors,

$$\begin{aligned} & \mathbb{P}[x_{N+1} \text{ est un point } \alpha\text{-extrême de } \alpha_I((x_1, \dots, x_{N+1})) \mid \bar{x}_N] \\ &= 1 - \mathbb{P}[x_{N+1} \in \alpha_I(\bar{x}_N) \mid \bar{x}_N] \\ &= 1 - \frac{l(\alpha_I(\bar{x}_N))}{l(L)}. \end{aligned}$$

En se servant de la symétrie des indices,

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[U_{N+1}] &= \sum_{i=1}^{N+1} \mathbb{P}[x_i \text{ est un point } \alpha\text{-extrême de } \alpha_I((x_1, \dots, x_{N+1}))] \\ &= (N+1) \left[ 1 - \frac{\mathbb{E}[l(\alpha_I(\bar{x}_N))]}{l(L)} \right], \end{aligned}$$

et donc

$$\frac{\mathbb{E}[l(\alpha_I(\bar{x}_N))]}{l(L)} = 1 - \frac{\mathbb{E}[U_{N+1}]}{N+1}.$$

Dans le chapitre suivant, nous tentons de résoudre le problème, qui en dimension un est très simple mais, qui en dimension deux se révèle fort complexe.

# Chapitre 4

## Le problème dans le plan

### 4.1 Formulation initiale du problème

*Supposons qu'une réalisation d'un processus de Poisson dans le plan ait été mutilée de telle façon que nous ne puissions observer que les points intérieurs à un domaine  $K$  compact et IFMD de rayon  $r$ .*

*Trouver  $K$  en utilisant des méthodes d'inférence statistique.*

### 4.2 Recherche d'une statistique exhaustive pour $K$

Soit  $X = (X_1, \dots, X_N)$ , une réalisation d'un processus de Poisson homogène à l'intérieur de  $K$ . Nous cherchons une statistique exhaustive pour  $K$ .

1. Supposons le rayon  $r$  connu. L' $\alpha$ -hull correspondante, c'est-à-dire avec  $\alpha = -\frac{1}{r}$ , est une statistique exhaustive minimale pour  $K$ . Remarquons que cette  $\alpha$ -hull n'est pas nécessairement connexe.
2. Le problème le plus "réaliste" est celui où ce rayon n'est pas forcément connu. Il apparaîtra comme un paramètre de nuisance. Sans hypothèse supplémentaire, il n'y a aucune façon de trouver le  $r$  optimal, à part la valeur triviale  $r = 0$ , qui correspond au maximum de vraisemblance. Notons par ailleurs que, même si c'était le cas, la "forme" présentée par les  $\alpha$ -hulls serait très difficile à manipuler lors de la recherche des surfaces de translations à l'intérieur de  $K$ .

Nous pensons donc à considérer l'hypothèse supplémentaire de connexité du domaine  $K$ . Ceci nous amène à une nouvelle formulation du problème.

### 4.3 Nouvelle formulation du problème

*Supposons qu'une réalisation d'un processus de Poisson dans le plan ait été mutilée de telle façon que nous ne puissions observer que les points intérieurs à un domaine  $K$  compact, CONNEXE et IFMD de rayon  $r$  inconnu.*

*Trouver  $K$  en utilisant des méthodes d'inférence statistique.*

Soit  $X = (X_1, \dots, X_N)$ , la réalisation d'un processus de Poisson homogène à l'intérieur de  $K$ .

Appelons  $\alpha_H^*(X)$  l' $\alpha$ -hull de  $X$  avec  $\alpha^* = \min\{\alpha \mid \alpha_H(X) \text{ est connexe}\}$ . Par abus de langage, nous parlerons de l' $\alpha$ -hull optimale.

La valeur de  $\alpha^*$  est bien définie. En effet, il existe un algorithme permettant de la déterminer (voir [8]).

Nous considérons la statistique  $\alpha_E^*(X)$ , l'ensemble des points  $\alpha$ -extrêmes de l' $\alpha$ -hull optimal  $\alpha_H^*(X)$ .

$\alpha = -\frac{1}{r}$  —où  $r$  est considéré comme un paramètre de nuisance— est remplacé par son estimation qui maximise la vraisemblance de  $K$ ,  $\alpha^* = \min\{\alpha \mid \alpha_H(x) \text{ est connexe}\}$ . Si  $\alpha^*$  est la valeur vraie de  $\alpha$ , la statistique  $\alpha_E^*(X)$  est exhaustive pour  $K$ .

Pour estimer le domaine  $K$  au moyen d'une fonction de la statistique  $\alpha_E^*(X)$ , il faut "relier" les points de la statistique  $\alpha_E^*(X)$ . Etant donné que l' $\alpha$ -hull de ces points est une union d'arcs de cercle, ce qui n'est pas manipulable, nous considérons l' $\alpha$ -shape correspondant à l' $\alpha$ -hull de ces points, qui est évidemment connexe et nous utiliserons l'union des faces intérieures de cet  $\alpha$ -shape. Il faut remarquer que nous devons utiliser l'union des faces intérieures de l' $\alpha$ -shape car un  $\alpha$ -shape est un graphe et nous voulons estimer une surface. Cet  $\alpha$ -shape correspondant à un  $\alpha$ -hull connexe ne possède pas de parties de mesure nulle (des segments de droite) ce qui est fort appréciable.

La figure 4.1 donne un exemple de réalisation d'un processus de Poisson homogène dans un domaine  $K$  inconnu et la figure 4.2 montre l'union des faces intérieures de l' $\alpha$ -shape correspondant à l' $\alpha$ -hull optimal de ces points.

Les problèmes rencontrés lors de la formulation initiale du problème ont maintenant disparu.

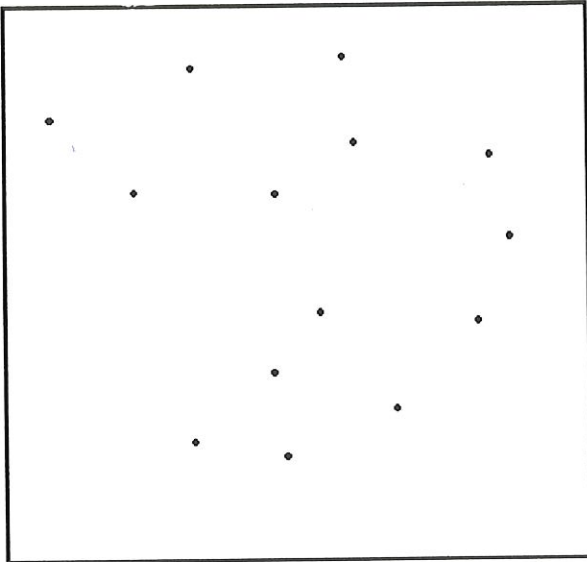


Figure 4.1

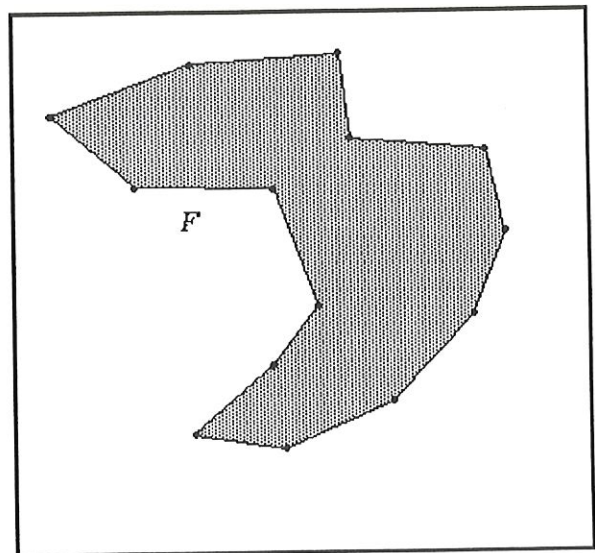


Figure 4.2

## 4.4 Modèle

Soit  $X = (X_1, \dots, X_N)$  un vecteur aléatoire où les  $X_i$  sont des variables aléatoires indépendantes et identiquement distribuées de densité uniforme sur  $K \in \mathcal{K}_r$ , où  $r$  est inconnu.

Soit  $x = (x_1, \dots, x_N)$  une réalisation de ce vecteur aléatoire.

$\alpha = -\frac{1}{r}$  —où  $r$  est considéré comme un paramètre de nuisance— est remplacé par son estimation  $\alpha^* = \min\{\alpha \mid \alpha_H(x) \text{ est connexe}\}$ .

Soit la statistique  $\alpha_E^*(X)$ , ensemble des points  $\alpha$ -extrêmes de  $\alpha_H^*(X)$ , l' $\alpha$ -hull optimale de  $X$ . On peut écrire la vraisemblance

$$f_X(x) = \prod_{i=1}^N f_{X_i}(x_i) = \frac{1}{[m(K)]^N} \prod_{i=1}^N \mathbb{1}_K(x_i) = \frac{1}{[m(K)]^N} \mathbb{1}_K[\alpha_E^*(X)].$$

## 4.5 Estimation équivariante de la position du domaine $K$

On décompose la statistique  $\alpha_H^*(X)$  en deux composantes, son centre de gravité  $g(\alpha_H^*(X))$  et sa forme  $s(\alpha_H^*(X))$ , i.e.

$$(g(\alpha_H^*(X)), s(\alpha_H^*(X))).$$

On note

$$(g(\alpha_H^*(X)), s(\alpha_H^*(X))) \stackrel{\text{not}}{=} (T(X), U(X))$$

où  $U(X)$  est une statistique invariante maximale pour  $G = \tilde{G}$  groupe des translations.

On décompose également  $K$  en deux composantes, son centre de gravité et sa forme

$$(\theta_1, \theta_2) \stackrel{\text{not}}{=} (g(K), s(K))$$

où on a  $s(K)$  invariante pour  $G = \tilde{G}$ .

Si le seul paramètre inconnu est le paramètre de position (i.e. si on suppose  $\theta_2$  connu),  $d$  l'estimateur équivariant de  $\theta_1$  qui minimise le risque quadratique moyen  $E_{\theta_1}(\theta_1 - d)^2$  est donné par  $d(X) = T(X) - E_0(T(X) | U(X))$  qui est de plus un estimateur sans biais de  $\theta_1$ .  $d(X)$  est donc un estimateur sans biais de variance uniformément minimale (UMVU) (voir le point 2.3 du chapitre 1).

La densité jointe de  $T(U)$  et de  $U(X)$  s'écrit

$$f_{\theta_1, \theta_2}(t(x), u(x)) = \mathbb{1}_{[\theta_1 + (\theta_2 \boxplus u(x))]} t(x) \frac{N(N-1) \cdots (N - (V_N + 1))}{[m(\theta_2)]^N} [m(u(x))]^{N-V_N}$$

où  $V_N$  est le nombre de points de  $\alpha_E^*(x)$ .

Rappelons que  $(\theta_2 \boxplus u(x))$  est l'ensemble des positions  $z$  telles que le translaté de  $u(x) = s(\alpha_H^*(x))$  en  $z$  est inclus dans  $\theta_2 = s(K)$ .

L'indicatrice  $\mathbb{1}_{[\theta_1 + (\theta_2 \boxplus u(x))]} t(x)$  prend donc la valeur 1 si  $t(x) = g(\alpha_H^*(x))$ , le centre de gravité de  $\alpha_H^*(x)$  est une position pour laquelle  $u(x) = s(\alpha_H^*(x))$  est inclus dans  $K = g(K) + s(K) = \theta_1 + \theta_2$  et 0 sinon.

La densité marginale de  $U(X)$  est donc

$$h_{\theta_2}(u(x)) = m(\theta_2 \boxplus u(x)) [m(\theta_2)]^{-N} m(u(x))^{N-V_N} N(N-1) \cdots (N - (V_N + 1)).$$

La densité conditionnelle de  $T(X)$  est

$$p_{\theta_1, \theta_2}(t(x) | u(x)) = \frac{1}{m(\theta_2 \boxplus u(x))} \mathbb{1}_{[\theta_1 + (\theta_2 \boxplus u(x))]} t(x).$$

En  $\theta_1 = 0$ , on a

$$p_{0, \theta_2}(t(x) | u(x)) = \frac{1}{m(\theta_2 \boxplus u(x))} \mathbb{1}_{[\theta_2 \boxplus u(x)]} t(x),$$

donc

$$E_0(T(X) | U(X)) = g(\theta_2 \boxplus U(X)).$$

X

L'estimateur optimal de  $\theta_1$  sera donc

$$d(X) = g(\alpha_H^*(X)) - g(s(K) \boxplus s(\alpha_H^*(X))).$$

Si  $s(K)$  est connu, cet estimateur est uniformément optimal, mais, lorsque  $s(K)$  est inconnu, cette propriété n'est plus vraie. Il s'agit dans ce cas d'un paramètre de nuisance.

## 4.6 Estimation équivariante de la forme unitaire du domaine $K$

En suivant le même raisonnement que dans Rasson [6], toute estimation équivariante de  $s(K)$  se fera sur base de la densité marginale de  $s(\alpha_H^*(X))$ . Pour ce paramètre  $s(K)$  de dimension infinie, on utilisera l'estimateur de maximum de vraisemblance.

La solution globale en termes de vraisemblance marginale de  $s(K)$  n'a pu être obtenue. Considérons donc la partition ] pourquoi?

$$s(K) = \left( m(K), \frac{s(K)}{m(K)} \right).$$

On attribuera à l'un des paramètres de la décomposition la valeur qui rend maximale la vraisemblance lorsque l'autre reste fixé. C'est la technique du "Maximum relative likelihood", voir Rasson [6]. Ici, supposons  $m(K)$  fixé. ] réf. ←

Nous devons donc trouver une estimation de  $K$  qui s'exprime comme une fonction de la statistique exhaustive  $\alpha_E^*(X)$ . Dès le point 4.5, nous avons décidé de prendre l' $\alpha$ -hull. Cependant, comme nous l'avons déjà dit, l' $\alpha$ -hull de cet ensemble de point  $\alpha_E^*(x)$  est une union d'arcs de cercle, ce qui n'est pas pratique. Nous allons alors considérer l' $\alpha$ -shape de  $\alpha_E^*(x)$ . Nous avons vu que l' $\alpha$ -shape est un graphe, alors qu'il nous faut estimer  $K$  par une surface. Nous considérons enfin l'union des faces intérieures de l' $\alpha$ -shape de  $\alpha_E^*(x)$ .

Si nous notons  $F$  cette union des faces intérieures de  $\alpha_S(\alpha_E^*(x))$  et si  $a$  est une valeur réelle positive fixée, le problème que nous devons donc résoudre à cette étape est de trouver

$$\max_{K \in \mathcal{K} \uparrow m(K)=a} m(K \boxplus F).$$

Cinq tentatives infructueuses de résolution du problème se trouvent dans les annexes C, D, E, F et G.

Les points suivants proposent une solution dans le cas général où  $F$  est un POLYGÔNE CONNEXE SANS PARTIES DE MESURE NULLE (segments de droite).

Remarquons que lorsque l'on parle dans la suite d'intérieur et d'extérieur, il faut lire intérieur et extérieur intuitifs.

#### 4.6.1 Conditions nécessaires d'optimalité de $K$

Pour que  $K$  soit optimal, il faut nécessairement que  $K$  vérifie les caractéristiques suivantes.

- i. A chaque côté de  $F$  dont les deux angles intérieurs adjacents sont inférieurs à  $\pi$  doit correspondre une partie de la frontière de  $K$  qui soit un translaté de ce côté de longueur au moins égale.
- ii. Aux autres côtés doit correspondre une partie de la frontière de  $K$  qui soit un translaté de ce côté de longueur au plus égale.
- iii. Les translatés des côtés de  $F$  se présentent dans le même ordre sur la frontière de  $K$  que sur celle de  $F$ .

La figure 4.3 illustre les conditions nécessaires d'optimalité de  $K$  pour l'ensemble de points considérés à la figure 4.1.

#### Preuve

Notons  $\Gamma_1$  la courbe fermée de  $\partial F$  telle que la surface bornée par  $\Gamma_1$  notée  $I(\Gamma_1)$  soit telle que  $I(\Gamma_1) \cup \Gamma_1 \supseteq F$ . Et notons  $\Gamma_i, i = 2, \dots, s$  les courbes fermées de  $\partial F$  telles que  $(I(\Gamma_i))^c \supseteq F, i = 2, \dots, s$ . Intuitivement,  $\Gamma_1$  est la frontière la plus extérieure.

Soient  $y_{i,1}, \dots, y_{i,n_i}$  les  $n_i$  côtés de  $F$  appartenant à  $\Gamma_i$  numérotés de manière à ce que si l'on donne un sens de parcours de  $\Gamma_i$ , on rencontre les côtés  $y_{i,1}, \dots, y_{i,n_i}$  dans cet ordre, avec  $y_{i,1}$  choisi arbitrairement,  $i = 1, \dots, s$ .

Notons  $s_{i,j,j+1}$  le sommet de  $F$  commun aux côtés  $y_{i,j}$  et  $y_{i,j+1}, i = 1, \dots, s, j = 1, \dots, n_i$ , avec  $s_{i,n_i,n_i+1} = s_{i,n_i,1}$ .

Notons  $y_{i,j}^\perp$ , le vecteur unitaire normal de  $y_{i,j}$ , pointant vers l'extérieur intuitif de la face de  $F$  à laquelle appartient le côté  $y_{i,j}, i = 1, \dots, s$ .

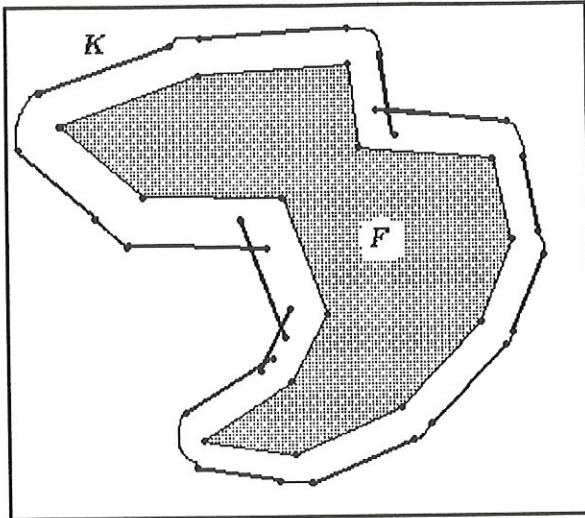


Figure 4.3

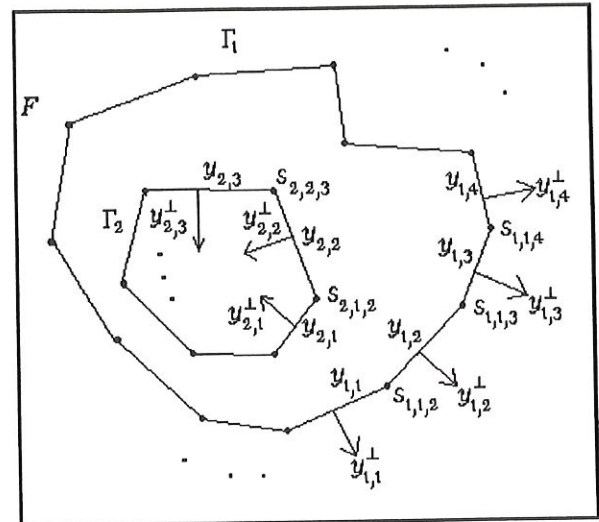


Figure 4.4

Voir figure 4.4 où l'on a considéré un autre ensemble de points afin de montrer à quoi correspondent toutes les notations.

Considérons les côtés de  $F$  appartenant à  $\Gamma_i$ ,  $i = 1, \dots, s$ .

$\forall j = 1, \dots, n_i, \exists c_{i,j}$  un vecteur dont la projection sur  $y_{i,j}^\perp$  est plus grande ou égale aux projections de tous les vecteurs  $c$  vérifiant  $F + c \subseteq K$ , i.e.

$$\langle c_{i,j}, y_{i,j}^\perp \rangle = \max_{c \uparrow F + c \subseteq K} \langle c, y_{i,j}^\perp \rangle.$$

Voir figure 4.5.

Pour tout couple de côtés adjacents  $y_{i,j}$  et  $y_{i,j+1}$ ,  $j = 1, \dots, n_i$ , avec  $y_{i,n_i+1} = y_{i,1}$ , deux situations sont possibles :

1.  $(y_{i,j} + c_{i,j})$  et  $(y_{i,j+1} + c_{i,j+1})$  ne se coupent pas,
2.  $(y_{i,j} + c_{i,j})$  et  $(y_{i,j+1} + c_{i,j+1})$  se coupent en  $e_{i,j,j+1}$ .

Considérons le côté  $y_{i,j}$ . Les situations suivantes peuvent se présenter :

1. Quand les deux angles intérieurs adjacents à  $y_{i,j}$  sont supérieurs à  $\pi$ ,  $y_{i,j-1} + c_{i,j-1}$  et  $y_{i,j} + c_{i,j}$  ne se coupent pas et  $y_{i,j} + c_{i,j}$  et  $y_{i,j+1} + c_{i,j+1}$  ne se coupent pas non plus.

$y_{i,j} + c_{i,j}$ , qui sera noté  $u_{i,j}$ , appartient alors à  $\partial K$ .

Voir figure 4.6.

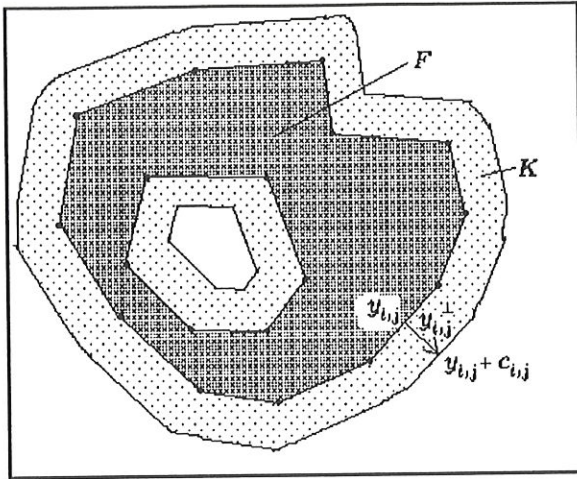


Figure 4.5

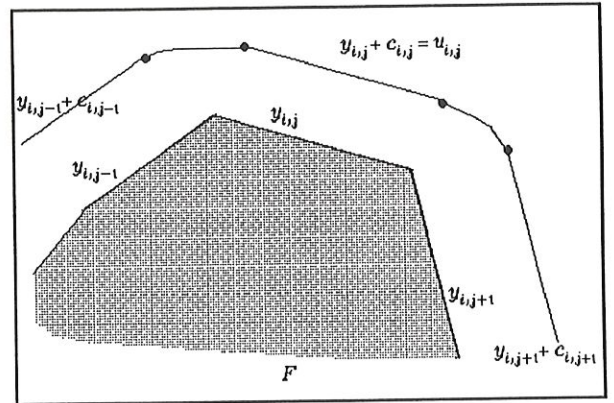


Figure 4.6

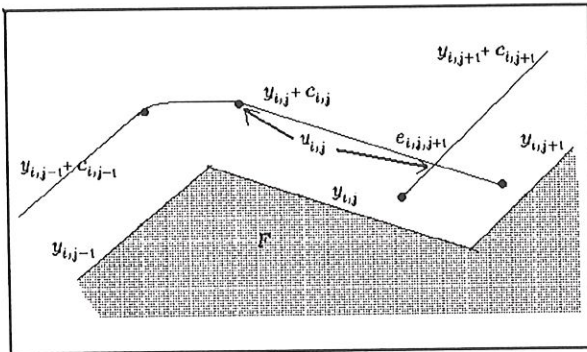


Figure 4.7

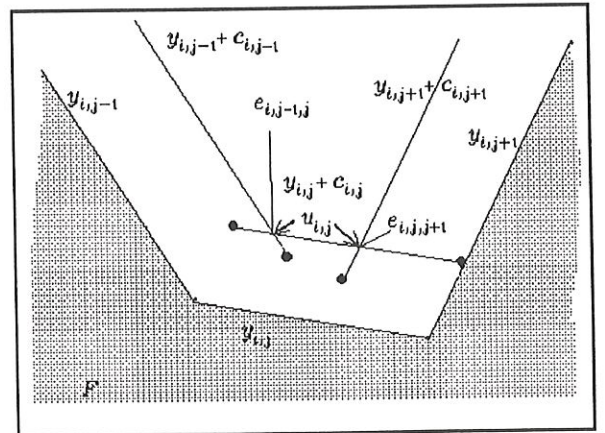


Figure 4.8

2. Quand un des angles adjacents à  $y_{i,j}$  est inférieur à  $\pi$  et l'autre supérieur à  $\pi$ ,  $y_{i,j-1} + c_{i,j-1}$  et  $y_{i,j} + c_{i,j}$  ne se coupent pas et  $y_{i,j} + c_{i,j}$  et  $y_{i,j+1} + c_{i,j+1}$  se coupent en  $e_{i,j,j+1}$ .

(respectivement  $y_{i,j-1} + c_{i,j-1}$  et  $y_{i,j} + c_{i,j}$  se coupent en  $e_{i,j-1,j}$  et  $y_{i,j} + c_{i,j}$  et  $y_{i,j+1} + c_{i,j+1}$  ne se coupent pas.)

Le segment d'extrémités  $x_{i,j-1,j} + c_{i,j}$  et  $e_{i,j,j+1}$  (respectivement  $e_{i,j-1,j}$  et  $x_{i,j,j+1} + c_{i,j+1}$ ), qui sera noté  $u_{i,j}$ , appartient alors à  $\partial K$ .

Voir figure 4.7.

3. Quand les deux angles adjacents à  $y_{i,j}$  sont supérieurs à  $\pi$ ,  $y_{i,j-1} + c_{i,j-1}$  et  $y_{i,j} + c_{i,j}$  se coupent en  $e_{i,j-1,j}$  et  $y_{i,j} + c_{i,j}$  et  $y_{i,j+1} + c_{i,j+1}$  se coupent en  $e_{i,j,j+1}$ .

Le segment d'extrémités  $e_{i,j-1,j}$  et  $e_{i,j,j+1}$ , qui sera noté  $u_{i,j}$ , appartient alors à  $\partial K$ .

Voir figure 4.8.

Les segments  $u_{i,j}$  se présentent dans le même ordre que les côtés de  $F$  sur  $\Gamma_i$ .

□

## 4.6.2 Décomposition de $K \boxminus F$

Soit  $K$  vérifiant les propriétés nécessaires d'optimalité données au point précédent.

Pour décomposer  $K \boxminus F$ , procédons par induction.

1. Initialisation

- $k \leftarrow 0$
- $I_0 \leftarrow F$  et  $E_0 \leftarrow K$

[ $I_k$  est la forme "intérieure" qui se déplace dans la forme "extérieure"  $E_k$ ].

2. Itération générale

### DÉCOMPOSITION DE LA FRONTIÈRE DE $I_k$

Considérons tous les côtés de  $I_k$ .

Notons  $I_k^+$  l'ensemble des côtés de  $I_k$  qui sont également côtés de son enveloppe convexe  $H(I_k)$ . Les côtés de  $I_k$  peuvent bien entendu ne pas être adjacents.

Considérons tous les autres côtés de  $I_k$  qui ne sont pas côtés de son enveloppe convexe. On va en définir une partition  $(I_k^-)_{i=1, \dots, s_k}$ , telle que chaque élément  $(I_k^-)_i$ ,  $i = 1, \dots, s_k$ , de cette partition vérifie les propriétés suivantes.

- i.  $\forall i = 1, \dots, s_k$ ,  $(I_k^-)_i$  vérifie que pour tout couple  $(y_l, y_m)$  de côtés de  $(I_k^-)_i$ , il existe dans  $(I_k^-)_i$  un chemin de côtés deux à deux adjacents reliant  $y_l$  à  $y_m$ , i.e.

$$\forall (y_l, y_m) \in (I_k^-)_i, \exists y_{k_1}, y_{k_2}, \dots, y_{k_r} \in (I_k^-)_i, r \in \mathbb{N}^+$$

- $y_{k_1}$  est adjacent à  $y_l$  et à  $y_{k_2}$ ,
- $y_{k_i}$  est adjacent à  $y_{k_{i-1}}$  et à  $y_{k_{i+1}}$ ,  $i = 2, \dots, r-1$  et
- $y_{k_r}$  est adjacent à  $y_{k_{r-1}}$  et à  $y_m$ .

- ii.  $\forall i, j \in \{1, \dots, s_k\}$ ,  $i \neq j$ , il n'existe aucun chemin de côtés deux à deux adjacents reliant un côté de  $(I_k^-)_i$  à un côté de  $(I_k^-)_j$ .

On a donc décomposé la frontière de  $I_k$  en

- $I_k^+$  l'ensemble des côtés de  $I_k$  qui sont également côtés de  $H(I_k)$  et
- $(I_k^-)_i$ ,  $i = 1, \dots, s_k$ , le  $i$ ème ensemble des côtés de  $I_k$  qui ne sont pas côtés de  $H(I_k)$  et tel que ses éléments forment un graphe connexe maximal.

Pour la simplification des schémas et des notations, considérons que  $s_k = 1$  (la partition ne comporte qu'un élément) et notons  $(I_k^-)_1 = I_k^-$ . Voir figure 4.9.

#### DÉCOMPOSITION DE LA FRONTIÈRE DE $E_k$

Considérons la partition suivante de la frontière de  $E_k$  notée  $\partial E_k$ .

- $E_k^+$  la partie de la frontière de  $E_k$  qui est atteinte par au moins un translate d'un point de  $I_k^+$  quand  $F$  se déplace dans  $K$ , c'est-à-dire

$$E_k^+ = \{x \in \partial E_k \mid \exists y \in (E_k \boxminus I_k), \exists z \in I_k^+ \ x = y + z\}.$$

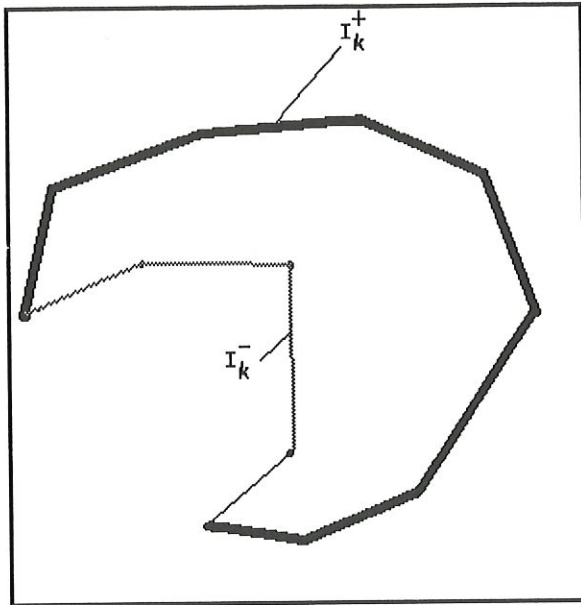


Figure 4.9

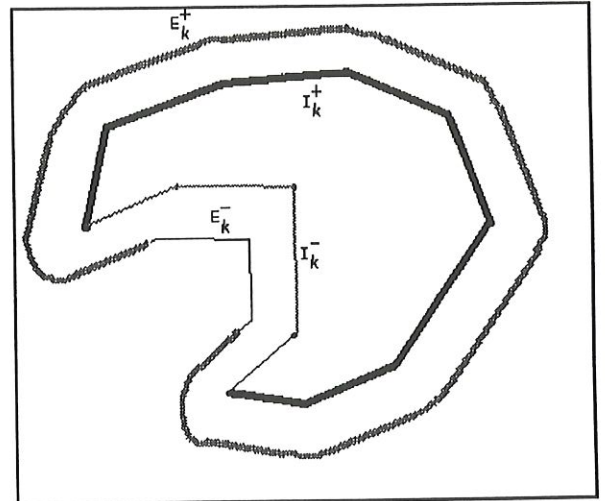


Figure 4.10

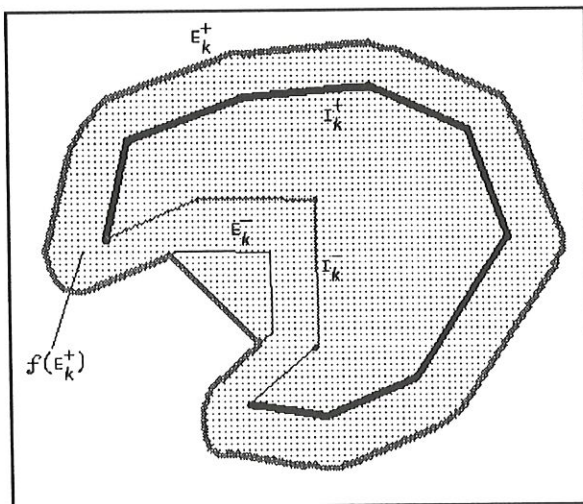


Figure 4.11

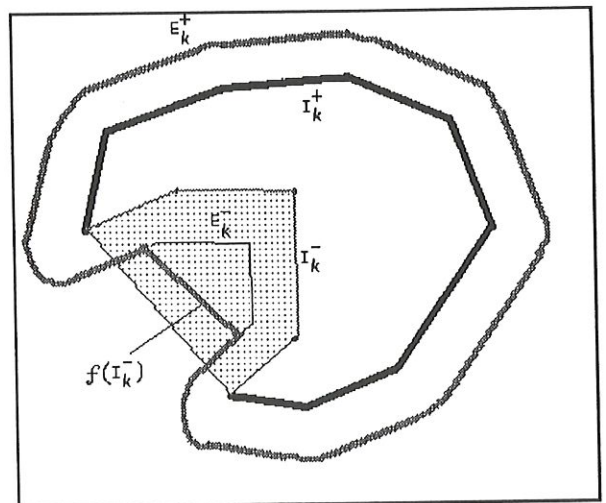


Figure 4.12

- $E_k^-$ , la partie de la frontière de  $E_k$  qui n'appartient pas à  $E_k^+$  et qui est constituée de côtés translattés correspondant aux côtés de  $I_k^-$ , i.e.

$$E_k^- = \partial E_k \setminus E_k^+.$$

Voir figure 4.10.

Fermons la courbe  $E_k^+$  en reliant les points extrêmes par un segment de droite et fermons la courbe  $I_k^-$  en reliant les points extrêmes par un segment de droite. Appelons les surfaces ainsi délimitées  $f(E_k^+)$  et  $f(I_k^-)$  respectivement.

Voir figures 4.11 et 4.12.

DÉCOMPOSITION DE  $E_k \boxplus I_k$

$E_k \boxplus I_k$  peut être obtenu en considérant  $f(E_k^+) \boxplus I_k^+$  et  $[-(f(I_k^-) \boxplus E_k^-)]$  puis en prenant l'intersection des deux, c'est-à-dire

$$E_k \boxplus I_k = [f(E_k^+) \boxplus I_k^+] \cap [-(f(I_k^-) \boxplus E_k^-)].$$

### Preuve

De par la définition de  $E_k^+$  et de  $E_k^-$ , lorsque  $I_k$  se déplace dans  $E_k$ ,

- $I_k^+$  se déplace dans  $f(E_k^+)$  et
- $f(I_k^-)$  se déplace autour de  $E_k^-$ ,

c'est-à-dire que toute translation possible de  $I_k$  dans  $E_k$  est une translation possible de  $I_k^+$  dans  $f(E_k^+)$  et de  $f(I_k^-)$  autour de  $E_k^-$ .

Cela s'écrit donc

$$E_k \boxplus I_k \supseteq [f(E_k^+) \boxplus I_k^+]$$

et

$$E_k \boxplus I_k \supseteq [-(f(I_k^-) \boxplus E_k^-)].$$

Ou encore

$$E_k \boxplus I_k \supseteq [f(E_k^+) \boxplus I_k^+] \cap [-(f(I_k^-) \boxplus E_k^-)].$$

L'inclusion inverse vient du fait que si une translation est possible aussi bien pour  $I_k^+$  dans  $f(E_k^+)$  que pour  $f(I_k^-)$  autour de  $E_k^-$ , alors cette translation est nécessairement possible pour  $I_k$  dans  $E_k$ .

En effet, si  $z$  est tel que  $z + I_k^+$  appartient à  $f(E_k^+)$  et que  $z + f(I_k^-)$  contient  $E_k^-$ , alors  $z + (I_k^+ \cup I_k^-) = z + I_k$  appartient à  $E_k$ .

□

Si  $E_k^-$  est non vide, la recherche de  $f(I_k^-) \boxminus E_k^-$  peut se faire inductivement en réinitialisant

- $E_{k+1} \leftarrow f(I_k^-)$ ,
- $I_{k+1} \leftarrow f(E_k^-)$ ,  
 $[f(E_k^-) = I_{k+1}$  est bien la forme "intérieure" qui se déplace dans la forme "extérieure"  $f(I_k^-) = E_{k+1}]$ ,
- $k \leftarrow k + 1$  et
- recommencer l'itération générale. Nous vérifions toujours les hypothèses d'application de la décomposition car  $I_k$  est bien un polygône connexe sans parties de mesure nulle et  $E_k$  vérifie bien les propriétés d'optimalité.

Si  $E_k^-$  est vide,  $f(I_k^-) \boxminus E_k^- = f(I_k^-) \boxminus \phi$  est trivial (car égal au plan tout entier) et on s'arrête.

#### DÉCOMPOSITION DE $K \boxminus F$

Quand la décomposition de  $K \boxminus F$  est terminée (l'itération  $r = 2s$ ), c'est-à-dire que  $E_r^- = \phi$  donc  $f(I_r^-) \boxminus E_r^- = \mathbb{R}^2$ , on a

$$K \boxminus F = E_0 \boxminus I_0 = [f(E_0^+) \boxminus I_0^+] \cap [-(f(I_0^-) \boxminus E_0^-)]$$

où

$$f(I_0^-) \boxminus E_0^- = E_1 \boxminus I_1 = [f(E_1^+) \boxminus I_1^+] \cap [-(f(I_1^-) \boxminus E_1^-)],$$

donc,

$$K \boxminus F = [f(E_0^+) \boxminus I_0^+] \cap [-(f(E_1^+) \boxminus I_1^+)] \cap [f(I_1^-) \boxminus E_1^-],$$

où

$$f(I_1^-) \boxminus E_1^-$$

est calculé inductivement.

Finalement,

$$K \boxminus F = \bigcap_{i=0}^s [f(E_{2i}^+) \boxminus I_{2i}^+] \bigcap_{i=0}^{r-1} [-(f(E_{2i+1}^+) \boxminus I_{2i+1}^+)].$$

#### Remarque A

On peut remarquer  $f(E_0^+) \boxminus I_0^+$  est une érosion par le convexe  $I_{2i}^+$  mais n'est

pas nécessairement convexe. Par contre, toutes les autres érosions sont des érosions d'un convexe par un convexe, le résultat de ces érosions est donc convexe (cette remarque sera très importante pour la suite). Cette expression permet de calculer  $K \boxminus F$  facilement car l'érosion par un convexe est simple à déterminer.

### 4.6.3 Recherche de la forme optimale de $K$

Pour simplifier les notations, supposons que la décomposition de  $K \boxminus F$  se termine à l'itération  $r = 2$ , pour le cas général, les mêmes arguments peuvent être utilisés.

Modifions  $K$  de telle sorte qu'il soit de la forme optimale.

Ici,  $E_0$  est noté  $K$  et  $I_0$  est noté  $F$ . Appliquons la décomposition de  $K \boxminus F$  à notre cas

$$K \boxminus F = (f(K^+) \boxminus F^+) \cap [-(f(F^-) \boxminus K^-)].$$

Etant donné que nous avons supposé que la décomposition de  $K \boxminus F$  se termine à l'itération  $r = 2$  et par la remarque A, nous constatons que  $(f(F^-) \boxminus K^-)$  est l'érosion d'un convexe  $f(F^-)$  par un convexe  $K^-$  dont les côtés sont parallèles à ceux de  $f(F^-)$  (par la décomposition de  $K \boxminus F$ ). Cette érosion est alors une forme aux côtés parallèles à ceux de  $f(F^-)$  et donc son symétrique par rapport à l'origine  $-(f(F^-) \boxminus K^-)$  a également les côtés parallèles à ceux de  $f(F^-)$ .

Prolongeons tous les côtés de  $K$  qui sont des translatés de côtés de  $F$  dont au moins un angle intérieur adjacent est inférieur à  $\pi$ . Notons  $K'$  la forme obtenue. Voir figure 4.13. Etudions l'effet d'un prolongement (i.e. le prolongement de deux côtés de  $K$  parallèles à deux côtés adjacents de  $F$  et dont l'angle intérieur est inférieur à  $\pi$ ).

Ce prolongement ne modifie que  $K^+$  et non  $K^-$ . Donc  $f(K^+) \boxminus F^+$  est modifié et devient  $f(K'^+ \boxminus F^+)$ . Par contre  $[-(f(F^-) \boxminus K^-)]$  n'est pas modifié, donc  $[-(f(F^-) \boxminus K'^-)] = [-(f(F^-) \boxminus K^-)]$ .

Or si on applique la décomposition à  $K' \boxminus F$ , on a

$$K' \boxminus F = (f(K'^+) \boxminus F^+) \cap [-(f(F^-) \boxminus K'^-)],$$

et donc,

$$K' \boxminus F = (f(K'^+) \boxminus F^+) \cap [-(f(F^-) \boxminus K^-)].$$

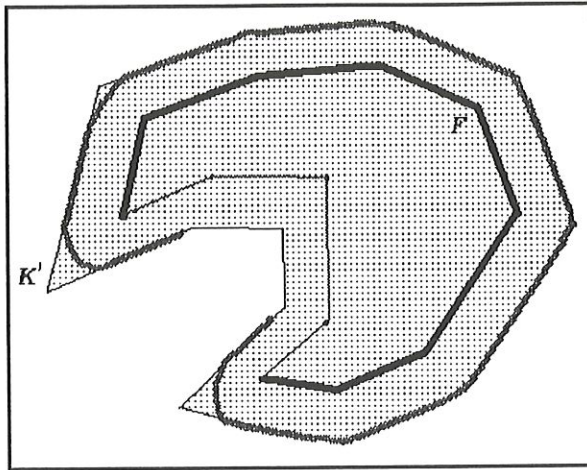


Figure 4.13

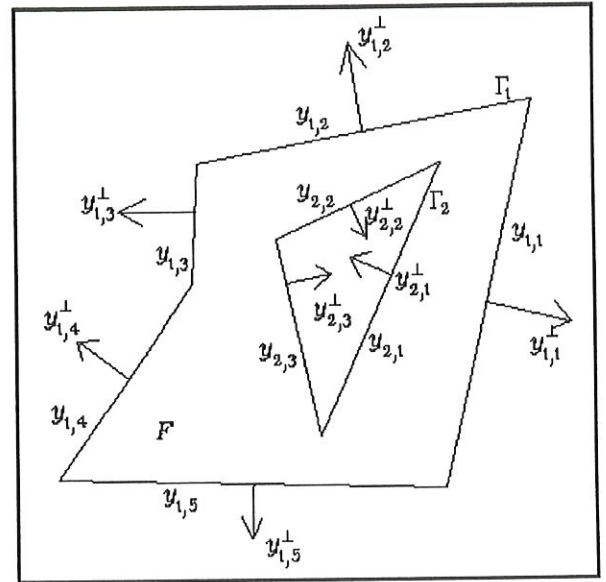


Figure 4.14

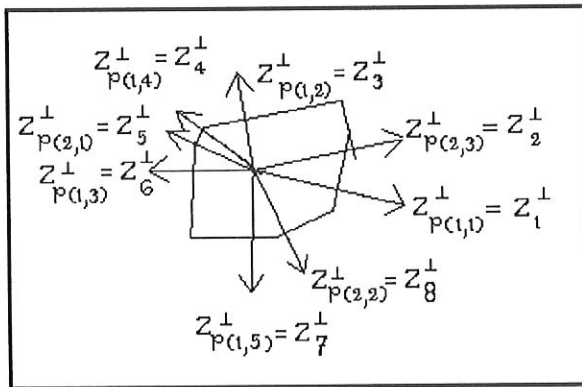


Figure 4.15

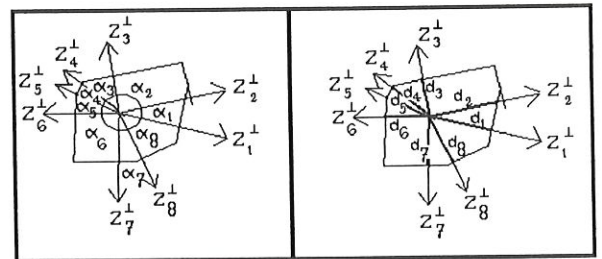


Figure 4.16

Seule une partie de la variation de  $f(K^+) \boxminus F^+$  appartient à  $[-(f(F^-) \boxminus K^-)]$ . Donc, quand  $F$  se déplace dans  $K'$ , certaines parties de  $K'$  ne peuvent jamais être atteintes. Cela est dû au fait que  $K^-$  peut “bloquer” le déplacement de  $F$  vers ces parties. Voir figures de l'annexe G. Les côtés prolongés doivent donc être “coupés” par des côtés parallèles à des côtés de  $F^-$  vu que  $-(f(F^-) \boxminus K^-)$  a des côtés parallèles à ceux de  $f(F^-)$ . Ce qui revient à ne considérer que la variation de  $f(K^+) \boxminus F^+$  qui appartient à  $[-(f(F^-) \boxminus K^-)]$ .

La mesure de la variation de  $K \boxminus F$  est donc égale à la mesure de la variation de  $K$ .

Translatons vers l'intérieur un des côtés de  $K$  qui est parallèle à l'un des côtés de  $F$ .  $F$  ne pourra plus bouger aussi librement qu'auparavant dans  $K$ .  $F$  ne pourra plus atteindre tous les côtés de  $K$ . Donc, traduire un côté de  $K$  vers l'intérieur est équivalent à traduire tous les côtés de  $K$  que  $F$  ne sait plus atteindre. L'aire perdue par  $K$  est alors l'aire perdue par  $K \boxminus F$  plus l'aire entre les deux traduits de tous les côtés concernés par la translation.

Si l'aire ajoutée à  $K$  lors du “prolongement” est égale à l'aire retirée lors de la translation de tous les côtés concernés par la translation vers l'intérieur, on a :

l'aire ajoutée à  $K \boxminus F$  par le prolongement (notée  $\Delta_{\boxminus}^+$ ) est égale à l'aire ajoutée à  $K$  (notée  $\Delta_K^+$ ) qu'on décide égale à l'aire retirée à  $K$  lors de la translation vers l'intérieur des côtés concernés par la translation (notée  $\Delta_K^-$ ), qui n'est rien d'autre que l'aire retirée à  $K \boxminus F$  (notée  $\Delta_{\boxminus}^-$ ) additionnée de l'aire entre les deux traduits de tous les côtés concernés par la translation (notée  $\Delta_t^-$ ), i.e.  $\Delta_{\boxminus}^+ = \Delta_K^+ = \Delta_K^- = \Delta_{\boxminus}^- + \Delta_t^-$ , donc l'aire de  $K \boxminus F$  est devenue plus grande qu'au départ.

On suit le même raisonnement pour tous les prolongements possibles des côtés de  $K$  suivis d'une translation des côtés de  $K$  pour maintenir la mesure de  $K$  constante. Finalement, quand tous les prolongements possibles auront été faits, lors de la décomposition de  $K \boxminus F$ , la seule érosion  $f(E_0^+) \boxminus I_0^+$  qui pouvait ne pas donner un résultat convexe (voir remarque A) est maintenant convexe de par les prolongements effectués.

Finalement, la figure  $K$  obtenue est composée uniquement de côtés parallèles à ceux de  $F$  avec les mêmes vecteurs normaux vers l'extérieur. Et donc  $K \boxminus F$  est un convexe dont les côtés sont des côtés parallèles à ceux de  $F$  avec les mêmes vecteurs normaux vers l'extérieur.

#### 4.6.4 Le problème d'optimisation

De par les notations introduites précédemment,  $F$  a  $n_1 + n_2 + n_3 + \dots + n_s$  côtés. Pour la facilité, notons  $n_1 + n_2 + n_3 + \dots + n_s \stackrel{\text{not}}{=} n$ .

De par la construction au point précédent,  $K \boxplus F$  pour  $K$  optimal est un polygône convexe dont chaque côté est parallèle à un côté de  $F$  et de même vecteur normal vers l'extérieur que celui-ci. La figure 4.14 montre un polygône  $F$  et la figure 4.15 montre le "type" de forme que doit avoir  $K \boxplus F$  quand  $K$  est optimal.

Notons  $z_1, z_2, \dots, z_n$  les côtés de  $K \boxplus F$  considérés dans le sens anti-horlogique et  $z_1^\perp, z_2^\perp, \dots, z_n^\perp$  leurs vecteurs normaux vers l'extérieur respectivement. Il existe en fait une application  $p$  qui fait correspondre un côté de  $F$  au côté de  $K \boxplus F$  parallèle et de même vecteur normal vers l'extérieur. Au côté  $y_{i,j}$  de  $F$ , correspond le côté  $z_{p(i,j)}$ .

On a

1. l'angle entre  $z_i^\perp$  et  $z_{i+1}^\perp$  vaut  $\alpha_i \geq 0$ ,  $i = 1, 2, \dots, n$ , où  $z_{n+1}^\perp = z_1^\perp$ ,
2.  $\sum_{i=1}^n \alpha_i = 2\pi$ .

Voir figure 4.16.

Considérons  $G$ , le centre de gravité de  $K \boxplus F$ . Notons  $d_i$ , la distance entre  $G$  et le côté  $z_i$  de  $K \boxplus F$ ,  $i = 1, \dots, n$ .

Notons  $A_i$ , le sommet commun aux côtés  $z_i$  et  $z_{i+1}$ ,  $i = 1, \dots, n$ , où  $z_{n+1} = z_1$  et notons  $H_i$  le pied de la hauteur passant par  $G$  du triangle  $GA_{i-1}A_i$ ,  $i = 1, \dots, n$ , où  $A_0 = A_n$ .

Définissons les valeurs  $a_{i,1}, a_{i,2}$ ,  $i = 1, \dots, n$  comme étant la longueur des segments  $A_{i-1}H_i$  et  $H_iA_i$  respectivement (elles peuvent être négatives).

Voir figure 4.17.

Nous sommes maintenant capables d'écrire la mesure de  $K \boxplus F$  sous forme d'équation.

La mesure de  $K \boxplus F$  n'est rien d'autre que la somme des triangles rectangles dont les côtés adjacents à l'angle droit sont  $d_i$  et  $a_{i,j}$ ,  $i = 1, \dots, n$  et  $j = 1, 2$ , i.e.

$$m(K \boxplus F) = \sum_{i=1}^n \frac{1}{2} [d_i (a_{i,1} + a_{i,2})]$$

où  $d_i, a_{i,1}, a_{i,2}$ ,  $i = 1, \dots, n$  sont les  $3n$  inconnues.

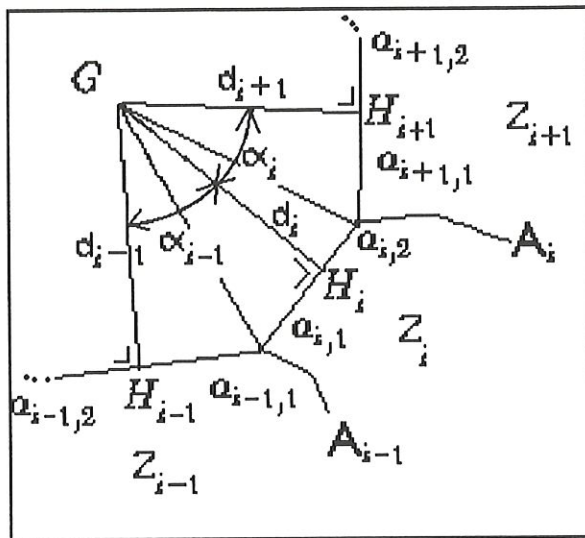


Figure 4.17

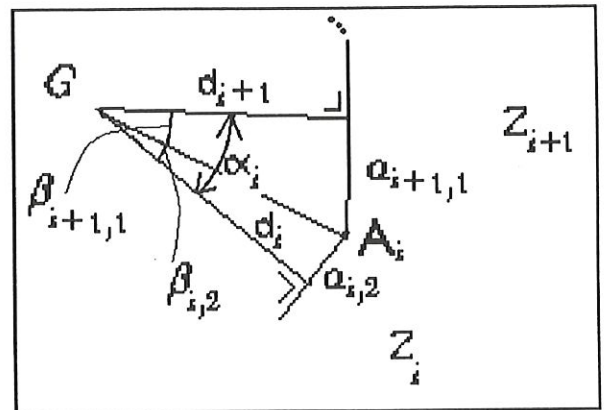


Figure 4.18

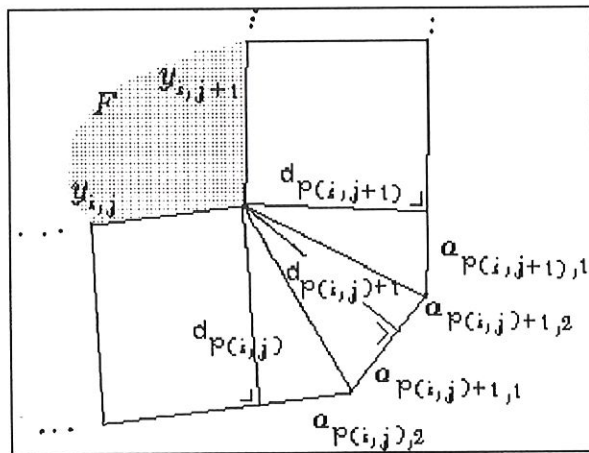


Figure 4.19

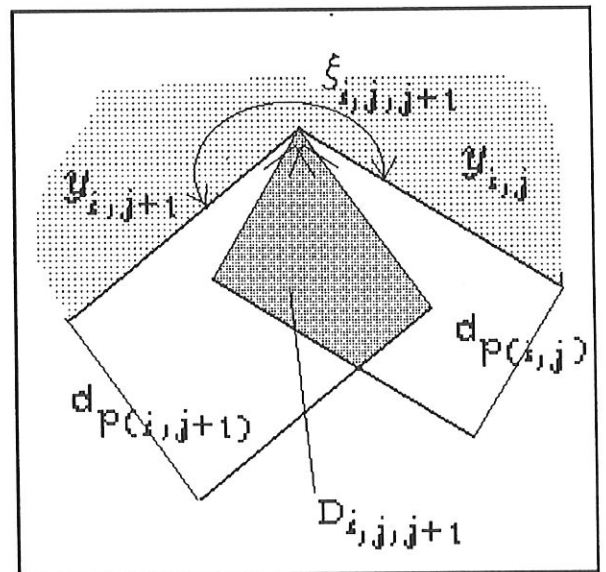


Figure 4.20

On peut se ramener à une équation ne dépendant que de  $d_1, a_{i,2}, i = 1, \dots, n$ , c'est-à-dire de  $n+1$  inconnues. En effet, nous pouvons écrire les relations suivantes pour  $i = 1, \dots, n$

$$\begin{aligned}\frac{a_{i,2}}{d_i} &= \tan \beta_{i,2}, \text{ où } d_i \neq 0, \\ \beta_{i+1,1} &= \alpha_i - \beta_{i,2} = \alpha_i - \arctan \frac{a_{i,2}}{d_i}, \\ GA_i &= (d_i^2 + a_{i,2}^2)^{1/2}, \\ a_{i+1,1} &= GA_i \sin \beta_{i+1,1}, \\ d_{i+1} &= ((GA_i)^2 - a_{i+1,1}^2)^{1/2}.\end{aligned}$$

On a donc (voir figure 4.18)

$$\begin{aligned}a_{i+1,1} &= (d_i^2 + a_{i,2}^2)^{1/2} \sin(\alpha_i - \arctan \frac{a_{i,2}}{d_i}), \quad i = 1, \dots, n, \text{ avec } a_{n+1,1} = a_{1,1}, \\ d_{i+1} &= ((d_i^2 + a_{i,2}^2) - a_{i+1,1}^2)^{1/2}, \quad i = 1, \dots, n-1.\end{aligned}$$

Nous allons maintenant écrire la mesure de  $K \setminus F$ .

Notons  $\xi_{i,j,j+1}$  la valeur de l'angle intérieur entre les côtés  $y_{i,j}$  et  $y_{i,j+1}$  de  $F$ . Définissons  $\eta_{i,j,j+1}$  comme prenant la valeur 1 si  $\xi_{i,j,j+1}$  est inférieur à  $\pi$  et prenant la valeur 0 sinon. Dans la suite, nous considérons  $\bar{y}_{i,j}$  comme étant la longueur du côté  $y_{i,j}$ .

On a

$$m(K \setminus F) = \sum_{i=1}^s \sum_{j=1}^{n_i} \{ \bar{y}_{i,j} d_{p(i,j)} + \eta_{i,j,j+1} C_{i,j,j+1} - (1 - \eta_{i,j,j+1}) D_{i,j,j+1} \}$$

où (voir figure 4.19)

$$C_{i,j,j+1} = \frac{1}{2} a_{p(i,j),2} d_{p(i,j)} + \left( \sum_{k=p(i,j)+1}^{p(i,j+1)-1} \frac{1}{2} d_k (a_{k,1} + a_{k,2}) \right) + \frac{1}{2} a_{p(i,j+1),1} d_{p(i,j+1)},$$

et

$$\begin{aligned}D_{i,j,j+1} &= \frac{1}{2} d_{p(i,j)} \frac{d_{p(i,j+1)} - d_{p(i,j)} \cos(\xi_{i,j,j+1} - \pi)}{\sin(\xi_{i,j,j+1})} \\ &\quad + \frac{1}{2} d_{i,j+1} \left\{ \left[ d_{p(i,j)}^2 + \left( \frac{d_{p(i,j+1)} - d_{p(i,j)} \cos(\xi_{i,j,j+1} - \pi)}{\sin(\xi_{i,j,j+1})} \right)^2 \right] - d_{p(i,j+1)}^2 \right\}^{1/2}.\end{aligned}$$

Voir figures 4.20, 4.21 et 4.22.

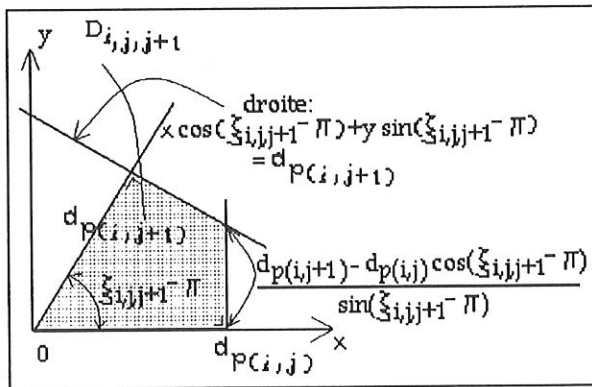


Figure 4.21

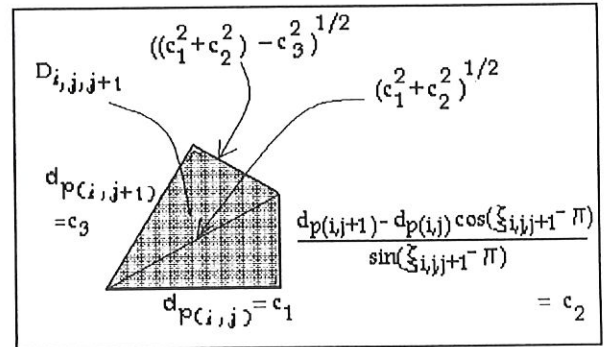


Figure 4.22

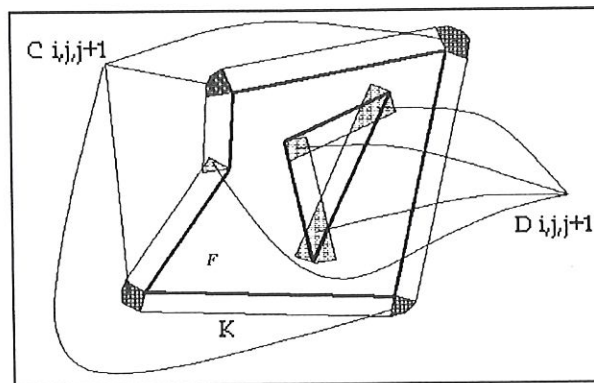


Figure 4.23

Les  $\bar{y}_{i,j}$   $d_{p(i,j)}$  sont les "rectangles" de longueur  $\bar{y}_{i,j}$  et de largeur  $d_{p(i,j)} > 0$ , c'est-à-dire la distance à laquelle le translaté de  $y_{i,j}$  se trouve sur la frontière de  $K$ . Les  $C_{i,j,j+1}$  sont les "coins" qu'il faut ajouter entre les rectangles quand l'angle intérieur est inférieur à  $\pi$  et les  $D_{i,j,j+1}$  sont les parties qu'il faut retirer quand l'angle intérieur est supérieur à  $\pi$ . Voir figure 4.23.

La solution optimale  $K^*$  est donc caractérisée par les valeurs de  $d_i, a_{i,1}, a_{i,2}$ ,  $i = 1, \dots, n$  solutions du problème d'optimisation suivant. Ce problème a  $3n$  inconnues  $d_i, a_{i,1}, a_{i,2}$ ,  $i = 1, \dots, n$  et  $n + (n-1) + 1 + n = 3n$  contraintes.

$$\max \sum_{i=1}^n \frac{1}{2} [d_i (a_{i,1} + a_{i,2})]$$

sous contraintes

$$\left\{ \begin{array}{l} a_{i+1,1} = (d_i^2 + a_{i,2}^2)^{1/2} \sin(\alpha_i - \arctan \frac{a_{i,2}}{d_i}), \\ \quad \quad \quad i = 1, \dots, n \text{ avec } a_{n+1,1} = a_{1,1}, \\ \\ d_{i+1} = ((d_i^2 + a_{i,2}^2) - a_{i+1,1}^2)^{1/2}, \quad i = 1, \dots, n-1, \\ \\ a - m(F) = \sum_{i=1}^s \sum_{j=1}^{n_i} \{ \bar{y}_{i,j} d_{p(i,j)} + \eta_{i,j,j+1} C_{i,j,j+1} \\ \quad \quad \quad + (1 - \eta_{i,j,j+1})(-1) D_{i,j,j+1} \}, \\ \\ d_i > 0, \quad i = 1, \dots, n, \end{array} \right.$$

où

$$C_{i,j,j+1} = \frac{1}{2} a_{p(i,j),2} d_{p(i,j)} + \left( \sum_{k=p(i,j)+1}^{p(i,j+1)-1} \frac{1}{2} d_k (a_{k,1} + a_{k,2}) \right) + \frac{1}{2} a_{p(i,j+1),1} d_{p(i,j+1)},$$

et

$$D_{i,j,j+1} = \frac{1}{2} d_{p(i,j)} \frac{d_{p(i,j+1)} - d_{p(i,j)} \cos(\xi_{i,j,j+1} - \pi)}{\sin(\xi_{i,j,j+1})} + \frac{1}{2} d_{i,j+1} \left\{ \left[ d_{p(i,j)}^2 + \left( \frac{d_{p(i,j+1)} - d_{p(i,j)} \cos(\xi_{i,j,j+1} - \pi)}{\sin(\xi_{i,j,j+1})} \right)^2 \right] - d_{p(i,j+1)}^2 \right\}^{1/2}.$$

## 4.7 Estimation de la forme de $K$ selon la méthode de Kendall

Dans le cas où le domaine à estimer est convexe, KENDALL propose une méthode pour obtenir l'estimation de ce domaine.

- i. Considérer des disques d'un certain rayon  $z$ , centrés aux sommets de l'enveloppe convexe de la réalisation considérée à l'intérieur du domaine.
- ii. Prendre l'enveloppe convexe des disques ainsi obtenus.

Il est possible de choisir le rayon  $z$  des disques de façon à ce que la mesure de l'enveloppe convexe de l'union des disques soit égale à la mesure estimée du domaine.

Cette méthode proposée par Kendall n'a jamais été appliquée bien qu'elle donne une estimation du domaine très proche de l'estimation obtenue par la méthode du maximum de vraisemblance et moins anguleuse que cette dernière.

La méthode de Kendall peut très bien être généralisée à notre cas. La méthode devient la suivante.

- i. Considérer les disques d'un certain rayon  $z$ , centrés en chaque point de  $\alpha_E^*(x)$ .*
- ii. Prendre l'union des faces intérieures de l' $\alpha^*$ -shape de l'union des disques ainsi obtenus.*

*Il est possible de choisir le rayon  $z$  des disques afin que la mesure de l'union des faces intérieures de l' $\alpha^*$ -shape des disques soit égale à la mesure estimée de  $K$ . Cette mesure est estimée au point 4.9.*

## 4.8 Retour à l'estimation de la position du domaine $K$

Si dans la formule de l'estimateur optimal de  $g(K)$ ,

$$d(X) = g(\alpha_H^*(X)) - g(s(K) \boxminus s(\alpha_H^*(X))),$$

nous remplaçons la forme unitaire inconnue  $\frac{s(K)}{m(K)}$  par sa valeur estimée, nous obtenons un estimateur optimal de la position du domaine  $K$ .

## 4.9 Estimation de la surface du domaine $K$

Nous cherchons un estimateur de  $m(K)$ , qui nous fournira, conjointement avec la solution de l'estimation de la forme la forme unitaire de  $K$ , l'estimation complète de la forme de  $K$ .

Soit  $\bar{x}_N = (x_1, \dots, x_N)$  une réalisation d'un processus de Poisson homogène sur  $K$ . Les points  $x_1, \dots, x_N$  sont donc uniformément distribués sur  $K$ . Supposons qu'un autre point  $x_{N+1}$  soit distribué uniformément sur  $K$ , indépendamment de  $\bar{x}_N$ . Alors,

$$\begin{aligned} & \text{P}[x_{N+1} \text{ est un point de } \alpha_H^*((x_1, \dots, x_{N+1})) \mid \bar{x}_N] \\ &= 1 - \text{P}[x_{N+1} \in \alpha_H^*(\bar{x}_N) \mid \bar{x}_N] \\ &= 1 - \frac{m[\alpha_H^*(\bar{x}_N)]}{m(K)}. \end{aligned}$$

En se servant de la symétrie des indices,

$$\begin{aligned} \text{E}[V_{N+1}] &= \sum_{i=1}^{N+1} \text{P}[x_i \text{ est un point de } \alpha_H^*(x_1, \dots, x_{N+1})] \\ &= (N+1) \left[ 1 - \frac{\text{E}[m(\alpha_H^*(x_1, \dots, x_N))]}{m(K)} \right], \end{aligned}$$

et donc

$$\boxed{\frac{\text{E}[m(\alpha_H^*(x_1, \dots, x_N))]}{m(K)} = 1 - \frac{\text{E}[V_{N+1}]}{N+1}.}$$

## Deuxième partie

### Annexes

## Annexe A

### Notations utilisées dans les démonstrations des annexes

$\mathcal{H}_x, x > 0$  est l'ensemble des parties compactes du plan telles que leur enveloppe convexe est de mesure  $x$ .

$\mathcal{K}_r$  est l'ensemble des parties compactes du plan identiques à leur fermeture morphologique par un disque de rayon  $r$ .

$\mathcal{M}_x, x > 0$  est l'ensemble des parties compactes du plan de mesure  $x$ .

$\mathcal{O}_F$  où  $F$  est une partie compacte du plan, est l'ensemble des parties compactes du plan identiques à leur ouverture par la partie  $F$ .

# Annexe B

## Lemmes techniques

**Lemme B.1** Soient  $F$  et  $D$  deux parties compactes de  $\mathbb{R}^2$  telles que

$$m(D) \geq m(H(F)).$$

Si  $D$  est convexe, alors  $D \boxminus F = D \boxminus H(F)$ .

### Commentaire

Le lemme B.1 nous dit que l'érosion d'un convexe par une partie compacte quelconque n'est rien d'autre que l'érosion de ce convexe par l'enveloppe convexe de la partie compacte.

### Preuve du lemme B.1

- L'érosion de  $D$  par  $H(F)$  est l'ensemble des positions  $u$  pour lesquelles  $H(F) + u$ , translaté de  $H(F)$  en  $u$  est à l'intérieur de  $D$ , i.e.

$$D \boxminus H(F) = \{u \dagger H(F) + u \subseteq D\}.$$

Comme  $F$  est incluse dans son enveloppe convexe, toute position  $u$  pour laquelle  $H(F) + u$  est incluse dans  $D$  est une position pour laquelle  $F + u$  est incluse dans  $D$ , i.e.

$$\forall u \dagger H(F) + u \stackrel{\text{d\u00e9f}}{=} \{h + u \dagger h \in H(F)\} \subseteq D,$$

on a

$$\begin{aligned} F + u &\stackrel{\text{d\u00e9f}}{=} \{f + u \dagger f \in F\} \\ &\subseteq \{f + u \dagger f \in F\} \cup \{h + u \dagger h \in H(F) \setminus F\} \\ &= H(F) + u \subseteq D. \end{aligned}$$

Donc, si  $u \in D \boxminus H(F)$  alors  $u \in D \boxminus F$ .

L'érosion de  $D$  par  $H(F)$  est dès lors incluse dans l'érosion de  $D$  par  $F$ , i.e.

$$D \boxminus H(F) \subseteq D \boxminus F.$$

► Montrons maintenant  $D \boxplus F \subseteq D \boxplus H(F)$ .

Prenons  $u$  dans  $D \boxplus F$ .

Par la définition de  $D \boxplus F$ ,  $u$  est une position pour laquelle  $F + u$  est incluse dans  $D$ , i.e.

$$F + u \subseteq D.$$

Comme l'enveloppe convexe est une opération qui conserve l'inclusion, l'enveloppe convexe de  $F + u$  est incluse dans l'enveloppe convexe de  $D$ , i.e.

$$H(F + u) \subseteq H(D).$$

Par hypothèse,  $D$  est convexe, donc identique à son enveloppe convexe, i.e.

$$D = H(D).$$

De plus l'enveloppe convexe du translaté  $F + u$  est identique au translaté en  $u$  de l'enveloppe convexe de  $F$

$$\begin{aligned} H(F + u) &= \{x \uparrow x = \sum_{i=1}^n \lambda_i (f_i + u), n \in \mathbb{N}, f_i + u \in F + u \forall i, \sum_{i=1}^n \lambda_i = 1\} \\ &= \{x \uparrow x = \sum_{i=1}^n \lambda_i f_i + \sum_{i=1}^n \lambda_i u, n \in \mathbb{N}, f_i \in F \forall i, \sum_{i=1}^n \lambda_i = 1\} \\ &= \{x \uparrow x = \sum_{i=1}^n \lambda_i f_i + u, n \in \mathbb{N}, f_i \in F \forall i, \sum_{i=1}^n \lambda_i = 1\} \\ &= u + \{x \uparrow x = \sum_{i=1}^n \lambda_i \cdot f_i, n \in \mathbb{N}, f_i \in F \forall i, \sum_{i=1}^n \lambda_i = 1\} \\ &= u + H(F). \end{aligned}$$

On a donc

$$H(F) + u = H(F + u) \subseteq H(D) = D.$$

Cela revient à dire que  $u \in D \boxplus H(F)$ .

► Par les deux points précédents, on a l'égalité

$$D \boxplus F = D \boxplus H(F).$$

□

**Lemme B.2** Soient  $F$  et  $D$  deux parties compactes de  $\mathbb{R}^2$ .  
Si  $D$  est convexe, alors  $H(D \oplus F) = D \oplus H(F)$ .

### Preuve du lemme B.2

On a

$$\begin{aligned} H(D \oplus F) &= \{x \uparrow x = \sum_{i=1}^n \lambda_i (d_i + f_i), n \in \mathbb{N}, d_i \in D, f_i \in F, \sum_{i=1}^n \lambda_i = 1\} \\ &= \{x \uparrow x = \sum_{i=1}^n \lambda_i d_i + \sum_{i=1}^n \lambda_i f_i, n \in \mathbb{N}, d_i \in D, f_i \in F, \sum_{i=1}^n \lambda_i = 1\} \\ &= \{x \uparrow x = d + f, d \in H(D), f \in H(F)\} \\ &= H(D) \oplus H(F) = D \oplus H(F) \text{ car } D = H(D). \end{aligned}$$

□

**Lemme B.3** Soient  $D$  une partie compacte de  $\mathbb{R}^2$  et  $a, b$  des réels positifs. Si  $D$  est convexe, alors  $aD \oplus bD = (a+b)D$ .

### Preuve du lemme B.3

On a

$$\begin{aligned} aD \oplus bD &= \{x \uparrow x = ad_1 + bd_2, d_1, d_2 \in D\} \\ &= \{x \uparrow x = a \frac{ad_1 + bd_2}{a+b} + b \frac{ad_1 + bd_2}{a+b}, d_1, d_2 \in D\} \\ &= \{x \uparrow x = ad + bd, d = \frac{ad_1 + bd_2}{a+b}, d_1, d_2 \in D\}. \end{aligned}$$

Or, si  $d_1, d_2 \in D$ , alors  $d = \frac{ad_1 + bd_2}{a+b} \in D$  car  $\frac{a}{a+b} + \frac{b}{a+b} = 1$  et  $D$  est convexe, donc

$$\begin{aligned} aD \oplus bD &= \{x \uparrow x = ad + bd, d \in D\} \\ &= (a+b)D \end{aligned}$$

□

# Annexe C

## Première tentative en fixant la mesure de l'enveloppe convexe de $K$

### C.1 Introduction

Notre première idée consista à chercher l'estimateur de maximum de vraisemblance en fixant la mesure de l'enveloppe convexe de  $K$ , c'est-à-dire si  $b$  est une valeur réelle positive fixée, trouver

$$\max_{K \in \mathcal{K} \mid m(H(K))=b} m(K \boxplus F).$$

La solution optimale de ce problème est alors donnée par

$$K^* = \left\{ \left[ \left[ \frac{b}{m(H(F))} \right]^{1/2} H(F) \boxplus F \right] \oplus F \right\}^{B_r}.$$

Cette solution est toujours valable quand  $F$  est une partie compacte quelconque de  $\mathbb{R}^2$  (théorème C.1).

Cette piste n'a pu être poursuivie plus loin car nous n'avons pas trouvé de justification statistique au fait de fixer la mesure de l'enveloppe convexe de  $K$ .

### C.2 Théorème C.1 et proposition C.1

**Théorème C.1** Soient  $r > 0$  et  $b > 0$  fixés.

Si  $F$  est une partie compacte de  $\mathbb{R}^2$ , tel que  $0 < m(H(F)) < b$ , alors  $m(K \boxplus F)$  est maximisé sur l'ensemble

$$\{K \mid K \in \mathcal{K}_r, m(H(K)) = b\} = \mathcal{H}_b \cap \mathcal{K}_r$$

par

$$K = \left\{ \left[ \left[ \frac{b}{m(H(F))} \right]^{1/2} H(F) \boxminus F \right] \oplus F \right\}^{B_r}.$$

**Proposition C.1** Soit  $b > 0$  fixé.

Si  $F$  est une partie compacte de  $\mathbb{R}^2$ , telle que  $0 < m(H(F)) < b$ , alors  $m(K \boxminus F)$  est maximisé sur l'ensemble  $\mathcal{H}_b$  par

$$K = \left[ \left[ \frac{b}{m(H(F))} \right]^{1/2} H(F) \boxminus F \right] \oplus F.$$

### Preuve de la proposition C.1

a)  $\forall K$  compact tel que  $m(H(K)) = b$ , le théorème d'estimation de la forme unitaire pour le cas convexe donne

$$m(H(K) \boxminus H(F)) \leq m(cH(F) \boxminus H(F)) \quad (\text{C.1})$$

$$\text{où } c = \left[ \frac{b}{m(H(F))} \right]^{1/2}.$$

On a donc

$$\begin{aligned} m(K \boxminus F) &\leq m(H(K) \boxminus F) && K \subseteq H(K) \\ &= m(H(K) \boxminus H(F)) && \text{par le lemme B.1} \\ &\leq m(cH(F) \boxminus H(F)) && \text{par l'équation (C.1)} \\ &= m(cH(F) \boxminus F) && \text{par le lemme B.1.} \end{aligned}$$

Donc  $\forall K$  compact de  $\mathbb{R}^2$  tel que  $m(H(K)) = b$ , on a

$$m(K \boxminus F) \leq m(cH(F) \boxminus F)$$

$$\text{où } c = \left[ \frac{b}{m(H(F))} \right]^{1/2}.$$

De plus,  $cH(F)$  appartient à  $\mathcal{H}_b$  vu que  $m(cH(F)) = c^2 m(H(F)) = \frac{b}{m(H(F))} m(H(F)) = b$ .

b) A l'optimum, on a nécessairement que

$$K = K \boxminus F \oplus F \stackrel{\text{déf}}{=} K_F.$$

En effet, supposons que  $K_F \neq K$ , comme l'inclusion  $K_F \subseteq K$  est toujours vraie, cela revient à supposer  $K_F \subsetneq K$ .

On a alors

$$\begin{aligned} m(K \boxminus F) &= m(K_F \boxminus F) && \text{par la définition de } K_F \\ &< r^2 m(K_F \boxminus F) && \text{avec } r^2 = \frac{m(K)}{m(K_F)} > 1 \\ &= m(r(K_F \boxminus F)) \\ &= m(rK_F \boxminus F). \end{aligned}$$

On obtient un résultat strictement meilleur en remplaçant  $K$  par  $rK_F$ . Donc  $K$  n'est pas l'argument maximum, ce qui est absurde.

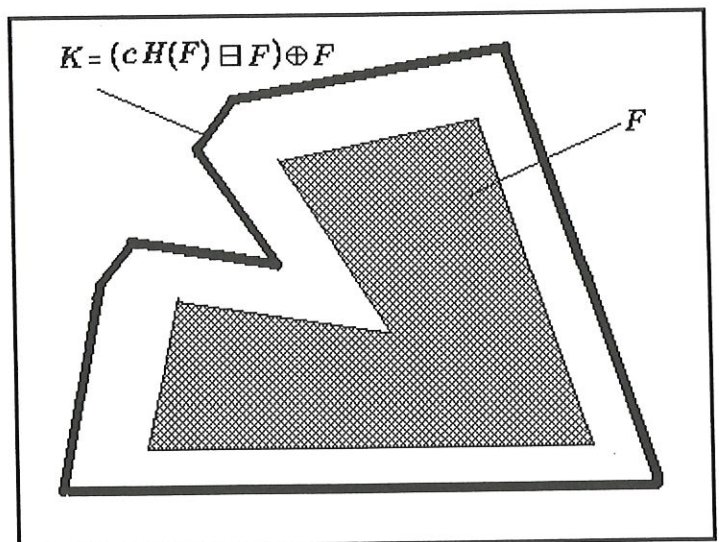
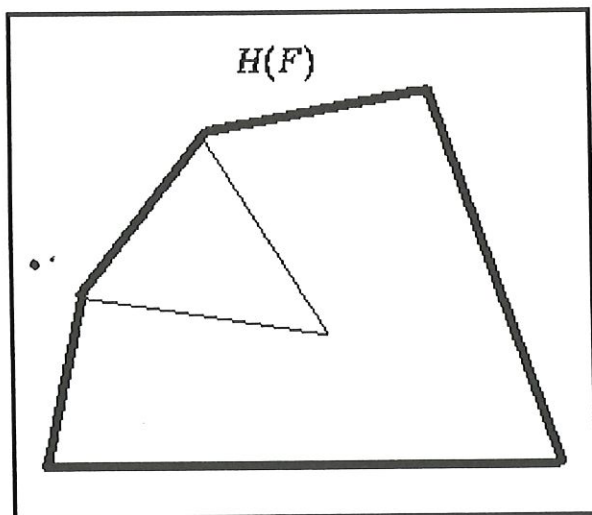
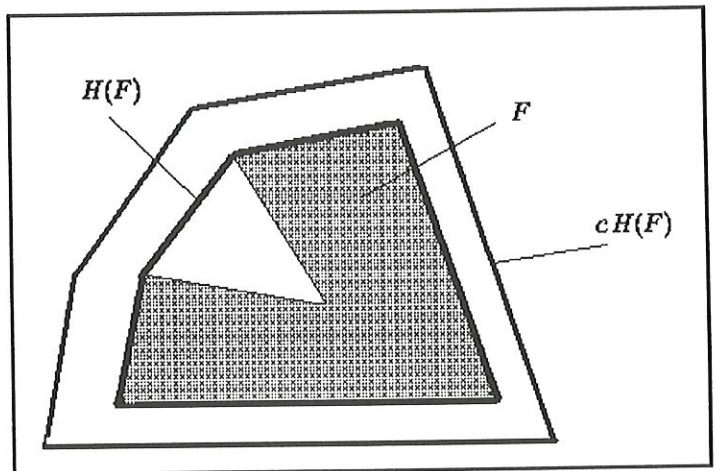
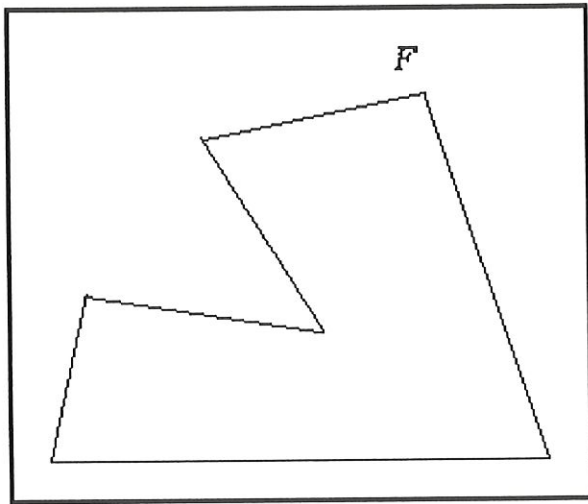
c) Par les deux points précédents, à l'optimum, on a

$$\begin{cases} K \boxminus F = cH(F) \boxminus F \\ K = K_F \stackrel{\text{dét}}{=} K \boxminus F \oplus F. \end{cases} \quad (\text{C.2})$$

Donc

$$\begin{aligned} K &= (K \boxminus F) \oplus F && \text{par la deuxième équation de (C.2)} \\ &= (cH(F) \boxminus F) \oplus F && \text{par la première équation de (C.2)}. \end{aligned}$$

□



Figures C 1-4 : illustration de la proposition C.1

### Preuve du théorème C.1

Montrons que si  $F \in \mathcal{K}_r$  tel que  $0 < m(H(F)) < b$ , alors

$$\left( \operatorname{argmax}_{K \dagger K \in \mathcal{H}_b \cap \mathcal{K}_r} m(K \boxplus F) \right) = \left( \operatorname{argmax}_{K \dagger K \in \mathcal{H}_b} m(K \boxplus F) \right)^{B_r}.$$

On a

$$\forall K \in \mathcal{H}_b, K^{B_r} \in \mathcal{H}_b \cap \mathcal{K}_r, \quad (\text{C.3})$$

vu que si  $m(H(K)) = b$  alors  $m(H(K^{B_r})) = b$ .

En effet,

$$K \subseteq K^{B_r} \subseteq H(K),$$

donc en considérant l'enveloppe convexe de tous les membres de l'inclusion

$$H(K) \subseteq H(K^{B_r}) \subseteq H(H(K)) = H(K),$$

ce qui est implique

$$H(K) = H(K^{B_r}).$$

De plus, on a

$$\max_{K \dagger K \in \mathcal{H}_b \cap \mathcal{K}_r} m(K \boxplus F) \leq \max_{K \dagger K \in \mathcal{H}_b} m(K \boxplus F),$$

étant donné que  $\mathcal{H}_b \cap \mathcal{K}_r \subseteq \mathcal{H}_b$ .

Si on note l'argmax  $\{m(K \boxplus F) \dagger K \in \mathcal{H}_b\} \stackrel{\text{not}}{=} K_1$ , on a  $K_1^{B_r} \in \mathcal{H}_b \cap \mathcal{K}_r$  par l'équation (C.3).

On a d'une part

$$m(K_1^{B_r} \boxplus F) \leq \max_{K \dagger K \in \mathcal{H}_b \cap \mathcal{K}_r} m(K \boxplus F) \leq \max_{K \dagger K \in \mathcal{H}_b} m(K \boxplus F) = m(K_1 \boxplus F), \quad (\text{C.4})$$

la première inégalité provenant de la définition de maximum.

D'autre part, on a  $K_1^{B_r} \supseteq K_1$  et donc

$$K_1^{B_r} \boxplus F \supseteq K_1 \boxplus F,$$

ce qui implique

$$m((K_1^{B_r} \boxminus F)) \geq m(K_1 \boxminus F). \quad (\text{C.5})$$

Ce qui signifie que l'on a l'égalité partout en rassemblant les équations C.4 et C.5, c'est-à-dire

$$\begin{aligned} m(K_1^{B_r} \boxminus F) &= \max_{K \dagger K \in \mathcal{H}_b \cap \mathcal{K}_r} m(K \boxminus F) = \max_{K \dagger K \in \mathcal{H}_b} m(K \boxminus F) \\ &= m(K_1 \boxminus F). \end{aligned}$$

Donc

$$\left( \operatorname{argmax}_{K \dagger K \in \mathcal{H}_b \cap \mathcal{K}_r} m(K \boxminus F) \right) = K_1^{B_r} = \left( \operatorname{argmax}_{K \dagger K \in \mathcal{H}_b} m(K \boxminus F) \right)^{B_r}$$

Par la proposition C.1, on a la thèse.

□

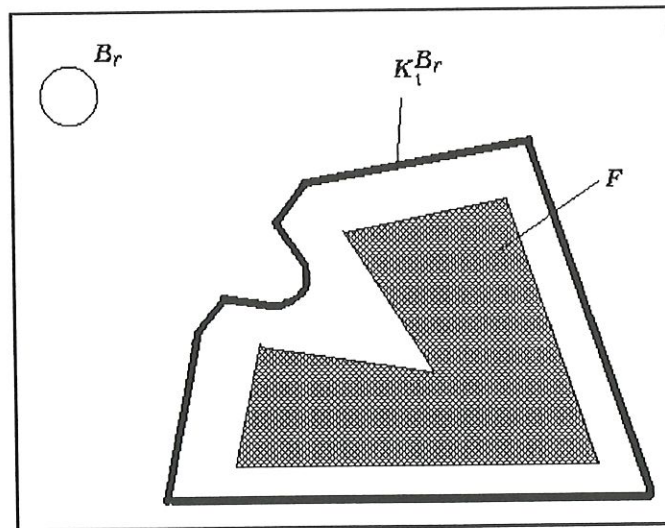


Figure C.5 : illustration du théorème C.1

# Annexe D

## Deuxième tentative en fixant la mesure de $K$

### D.1 Introduction

Etant donné que nous n'avons trouvé aucune justification statistique au fait de fixer la mesure de l'enveloppe convexe  $K$  (voir annexe C), nous avons essayé de démontrer qu'il existait un rapport biunivoque entre la mesure  $a$  de l'argument optimum du problème

$$\max_{K \in \mathcal{K} \mid m(K) = a} m(K \boxminus F)$$

et la mesure de son enveloppe convexe.

Nous n'y sommes pas arrivé. Nous voulions montrer l'intuition suivante.

Soit  $a > 0$  fixé.

Si  $F$  est l'union des faces intérieures de  $\alpha_S(\alpha_E^*(x))$  telle que  $0 \leq m(F) < a$  et  $m(H(F)) > 0$  alors  $m(K \boxminus F)$  est maximisé sur l'ensemble  $\mathcal{M}_a$  par

$$K_a = \left[ \left[ \frac{b_a}{m(H(F))} \right]^{1/2} H(F) \boxminus F \right] \oplus F$$

où  $b_a$  est l'image réciproque de  $a$  par la bijection

$$T : \mathbb{R}^+ \longrightarrow \mathbb{R}^+ : x \rightsquigarrow m \left\{ \left[ \left[ \frac{x}{m(H(F))} \right]^{1/2} H(F) \boxminus F \right] \oplus F \right\}.$$

## D.2 Essai de démonstration de l'intuition

1. Comme dans l'annexe C.1b, nous montrons que toute partie compacte  $K$  de mesure  $a$  qui maximise  $m(K \boxplus F)$  est nécessairement identique à son ouverture par  $F$ , i.e.

si  $K$  maximise  $m(K \boxplus F)$  sur  $\mathcal{M}_a$  alors  $K = K_F$ .

Supposons que  $K$  maximise  $m(K \boxplus F)$  sur l'ensemble  $\mathcal{M}_a$  et que  $K \neq K_F$ .  
On a toujours  $K_F \subseteq K$ , vu que l'ouverture d'une partie est toujours incluse dans la partie. L'hypothèse absurde revient donc à supposer que  $K_F \not\subseteq K$ .

On va alors montrer qu'en remplaçant  $K$  par une homothétie de son ouverture  $K_F$ , ayant même mesure  $a$ , on obtient une valeur de  $m(K \boxplus F)$  strictement supérieure, ce qui est bien entendu absurde.

Vu que par l'hypothèse absurde,  $K_F$  est strictement inclus dans  $K$ , on a  $m(K_F) < m(K)$  et donc

$$r^2 \stackrel{\text{not}}{=} \frac{m(K)}{m(K_F)} > 1.$$

On a donc

$$\begin{aligned} m(K \boxplus F) &= m(K_F \boxplus F) && \text{par notation de } K_F \stackrel{\text{not}}{=} K \boxplus F \oplus F \\ &< r^2 m(K_F \boxplus F) && \text{et par la propriété 2.2} \\ &= m(r(K_F \boxplus F)) && \text{en multipliant par } r^2 = \frac{m(K)}{m(K_F)} > 1 \\ &= m(rK_F \boxplus F). \end{aligned}$$

La dernière égalité vient du fait que

$$\begin{aligned} rK_F \boxplus F &= \{v \dagger F_v \in rK_F\} \\ &= \{v \dagger F_v \in K_F\} \\ &= \{ru \dagger F_u \in K_F\} \\ &= r\{u \dagger F_u \in K_F\} \\ &= r(K_F \boxplus F) \end{aligned}$$

Comme on a

$$m(rK_F) = r^2 m(K_F) = \frac{m(K)}{m(K_F)} m(K_F) = m(K) = a,$$

alors  $(rK_F) \in \mathcal{M}_a$ .

On obtient donc un résultat strictement meilleur en remplaçant  $K$  par  $rK_F$ .  $K$  n'est pas un argument maximum, ce qui est absurde.

2. Le point précédent montre que tout argument qui maximise  $m(K \boxplus F)$  sur  $\mathcal{M}_a$  est nécessairement identique à son ouverture par  $F$ .

Donc, chercher le maximum de  $m(K \boxplus F)$  sur l'ensemble des parties compactes de mesure  $a$  équivaut à rechercher le maximum de  $m(K \boxplus F)$  sur l'ensemble des parties compactes de mesure  $a$  IDENTIQUES À LEUR OUVERTURE PAR  $F$ , i.e., puisque nous avons noté  $\mathcal{O}_F = \{K \text{ compact } \dagger K_F = K\}$ ,

$$\max_{K \in \mathcal{M}_a} m(K \boxplus F) \equiv \max_{K \in \mathcal{M}_a \cap \mathcal{O}_F} m(K \boxplus F).$$

Nous devons donc résoudre le problème suivant

$$\max_{K \in \mathcal{M}_a \cap \mathcal{O}_F} m(K \boxminus F).$$

3. Nous allons maintenant partitionner l'ensemble des parties compactes de mesure  $a$  identiques à leur ouverture par  $F$  en fonction de la mesure de l'enveloppe convexe de chaque partie.

Nous avons défini  $\forall b \geq 0$ ,  $\mathcal{H}_b = \{K \text{ compact} \mid m(H(K)) = b\}$ .

$(\mathcal{H}_b)_{b \geq 0}$  forme une partition de l'ensemble des parties compactes de  $\mathbb{R}^2$ .

En effet

- i. si  $b \neq b'$  alors  $\mathcal{H}_b \cap \mathcal{H}_{b'} = \emptyset$  vu que si  $K \in \mathcal{H}_b$ , c'est-à-dire  $m(H(K)) = b$ , alors  $m(H(K)) = b \neq b'$  et donc  $K \notin \mathcal{H}_{b'}$ .
- ii.  $\forall K$  partie compacte de  $\mathbb{R}^2$ ,  $\exists b \geq 0$  tel que  $m(H(K)) = b$ .

On peut donc écrire la partition de l'ensemble des parties compactes de mesure  $a$  identiques à leur ouverture par  $F$  :

$$\mathcal{M}_a \cap \mathcal{O}_F = \bigcup_{b \geq 0} (\mathcal{M}_a \cap \mathcal{O}_F \cap \mathcal{H}_b).$$

Donc, maximiser  $m(K \boxminus F)$  sur  $\mathcal{M}_a \cap \mathcal{O}_F$ , ensemble des parties compactes de mesure  $a$  identiques à leur ouverture par  $F$ , est équivalent à maximiser  $m(K \boxminus F)$  sur chaque élément de la partition donnée précédemment de  $\mathcal{M}_a \cap \mathcal{O}_F$ , c'est-à-dire, sur chaque ensemble de parties compactes de mesure  $a$  identiques à leur fermeture par  $F$  et D'ENVELOPPE CONVEXE DE MESURE  $b \geq 0$ , puis de prendre le maximum des maxima obtenus sur chaque élément de la partition.

On a donc

$$\max_{K \in \mathcal{M}_a \cap \mathcal{O}_F} m(K \boxminus F) = \max_{b \geq 0} \left[ \max_{K \in \mathcal{M}_a \cap \mathcal{O}_F \cap \mathcal{H}_b} m(K \boxminus F) \right].$$

4. Les points suivants tentent de montrer

(a) qu'il existe une et une seule valeur de  $b$ , notée  $b_a$  telle que

$$\max_{K \in \mathcal{M}_a \cap \mathcal{O}_F \cap \mathcal{H}_{b_a}} m(K \boxminus F) = \max_{K \in \mathcal{O}_F \cap \mathcal{H}_{b_a}} m(K \boxminus F),$$

(b) que la valeur

$$\max_{K \in \mathcal{M}_a \cap \mathcal{O}_F \cap \mathcal{H}_{b_a}} m(K \boxminus F)$$

est supérieure ou égale à toutes les autres valeurs

$$\max_{K \in \mathcal{M}_a \cap \mathcal{O}_F \cap \mathcal{H}_b} m(K \boxminus F),$$

$$b \geq 0.$$

5. Nous allons montrer (nous le montrons effectivement) que le maximum de  $m(K \boxminus F)$  sur l'ensemble des parties compactes de mesure quelconque, identiques à leur ouverture par  $F$  et d'enveloppe convexe de mesure  $b$  fixée est l'ouverture par  $F$  de l'homothétie de l'enveloppe convexe de  $F$  de mesure  $b$ , i.e.  $\forall b \geq m(H(F))$ ,

$$\max_{K \in \mathcal{O}_F \cap \mathcal{H}_b} m(K \boxminus F)$$

est atteint en

$$K^b = \left[ \left[ \frac{b}{m(H(F))} \right]^{1/2} H(F) \boxminus F \right] \oplus F.$$

Le théorème d'estimation de la forme unitaire pour le cas convexe dit

si  $H(F)$  est un polygône convexe tel que  $0 < m(H(F)) < b$ , alors  $m(H(K) \boxminus H(F))$  est maximisé sur l'ensemble  $\mathcal{H}_b$  par

$$H(K) = \left[ \frac{b}{m(H(F))} \right]^{1/2} H(F),$$

i.e.

$$\forall K \in \mathcal{H}_b$$

$$m(H(K) \boxminus H(F)) \leq m(cH(F) \boxminus H(F)) \quad (\text{D.1})$$

$$\text{où } c = \left[ \frac{b}{m(H(F))} \right]^{1/2}.$$

On a donc

$\forall K \in \mathcal{H}_b$

$$\begin{aligned} m(K \boxminus F) &\leq m(H(K) \boxminus F) && \text{car } K \subseteq H(K) \\ &= m(H(K) \boxminus H(F)) && \text{par lemme B.1} \\ &\leq m(cH(F) \boxminus H(F)) && \text{avec } m(H(K)) \geq m(H(F)) \\ &= m(cH(F) \boxminus F) && \text{par l'équation (D.1)} \\ & && \text{par le lemme B.1 et avec} \\ & && m(cH(F)) = \frac{b}{m(H(F))} m(H(F)) = b \geq m(H(F)). \end{aligned}$$

On remarque de plus que  $m(cH(F)) = \frac{b}{m(H(F))} m(H(F)) = b$ .

Donc

$$\max_{K \in \mathcal{H}_b} m(K \boxminus F)$$

est atteint

$$\forall K \in \mathcal{H}_b \uparrow K \boxminus F = cH(F) \boxminus F$$

$$\text{où } c = \left[ \frac{b}{m(H(F))} \right]^{1/2}.$$

C'est-à-dire que tout argument qui maximise  $m(K \boxminus F)$  sur l'ensemble des parties compactes d'enveloppe convexe de mesure  $b$  a nécessairement une érosion par  $F$  identique à l'érosion par  $F$  de l'homothétie (de coefficient  $c$ ) de l'enveloppe convexe de  $F$  de mesure  $b$ .

Si l'un de ces arguments maximum est identique à son ouverture par  $F$ , alors cet argument maximise  $m(K \boxminus F)$  sur l'ensemble des parties compactes d'enveloppe convexe de mesure  $b$  et identiques à leur ouverture par  $F$ , i.e.

si  $\exists K^b \in \{K \in \mathcal{H}_b \uparrow K \boxminus F = cH(F) \boxminus F\} \cap \mathcal{O}_F$  alors  $K^b$  maximise  $m(K \boxminus F)$  sur  $\mathcal{H}_b \cap \mathcal{O}_F$ .

Voyons donc s'il existe un  $K$  tel que

$$\begin{cases} K \boxminus F = cH(F) \boxminus F \\ K = K \boxminus F \oplus F \end{cases}$$

$$\text{où } c = \left[ \frac{b}{m(H(F))} \right]^{1/2},$$

c'est-à-dire

$$K = (K \boxminus F) \oplus F = (cH(F) \boxminus F) \oplus F.$$

$$K^b = (cH(F) \boxminus F) \oplus F \text{ où } c = \left[ \frac{b}{m(H(F))} \right]^{1/2} \text{ convient.}$$

6. On va maintenant considérer l'application qui associe à chacune des valeurs possibles  $b$  pour l'enveloppe convexe, la mesure de l'argument maximal obtenu au point précédent, c'est-à-dire, la mesure de l'argument qui maximise  $m(K \boxminus F)$  sur l'ensemble des parties compactes identiques à leur fermeture par  $F$  et d'enveloppe convexe de mesure  $b$ .

Donc, définissons l'application qui à chaque valeur  $x$  associe la mesure de l'argument qui maximise  $\{m(K \boxminus F) \mid K \in \mathcal{O}_F \cap \mathcal{H}_x\}$ .

$$\begin{aligned} T : [m(H(F)), \infty[ &\longrightarrow [m(F), \infty[ \\ x &\rightsquigarrow m \left( \left[ \left[ \frac{x}{m(H(F))} \right]^{1/2} H(F) \boxminus F \right] \oplus F \right) \\ &= m \left( \left[ \left[ \frac{x}{m(H(F))} \right]^{1/2} - 1 \right] H(F) \oplus F \right). \end{aligned}$$

L'égalité vient du fait que

$$m \left( \left[ \left[ \frac{x}{m(H(F))} \right]^{1/2} H(F) \boxminus F \right] \oplus F \right) = m \left( \left[ \left[ \frac{x}{m(H(F))} \right]^{1/2} H(F) \boxminus H(F) \right] \oplus F \right)$$

$$\text{par le lemme B.1 avec } m \left( \left( \frac{x}{m(H(F))} \right)^{1/2} H(F) \right) = \frac{x}{m(H(F))} m(H(F))$$

$$= x \geq m(H(F)),$$

donc,

$$m \left( \left[ \left[ \frac{x}{m(H(F))} \right]^{1/2} H(F) \boxminus F \right] \oplus F \right) = m \left( \left[ \left[ \frac{x}{m(H(F))} \right]^{1/2} - 1 \right] H(F) \oplus F \right).$$

Comme nous voulons prouver qu'il existe une et une seule valeur de  $b$ , notée  $b_a$  telle que  $m \left( \left[ \left[ \frac{b_a}{m(H(F))} \right]^{1/2} H(F) \boxminus F \right] \oplus F \right) = a$ , nous aurions aimé montrer que l'application  $T$  est inversible.

$T$  est strictement croissante et continue :

- (a) Croissance stricte

Soient  $b, b'$  tels que  $m(H(F)) \leq b < b'$ ,

$$\text{alors } 0 \leq \left[ \frac{b}{m(H(F))} \right]^{1/2} - 1 < \left[ \frac{b'}{m(H(F))} \right]^{1/2} - 1$$

$$\text{et donc } \left\{ \left[ \frac{b}{m(H(F))} \right]^{1/2} - 1 \right\} H(F) \subsetneq \left\{ \left[ \frac{b'}{m(H(F))} \right]^{1/2} - 1 \right\} H(F)$$

$$\text{et enfin } \left\{ \left[ \frac{b}{m(H(F))} \right]^{1/2} - 1 \right\} H(F) \oplus F \subsetneq \left\{ \left[ \frac{b'}{m(H(F))} \right]^{1/2} - 1 \right\} H(F) \oplus F.$$

L'inclusion vient de la définition de somme de Minkowski.

En effet, soit  $A \subsetneq A'$  et  $B$ , des parties de  $\mathbb{R}^2$ .

$$\begin{aligned} A' \oplus B &\stackrel{\text{déf}}{=} \{a' + b \mid a' \in A', b \in B\} \\ &= \{a' + b \mid a' \in A, b \in B\} \cup \{a' + b \mid a' \in A' \setminus A, b \in B\} \\ &\stackrel{\text{déf}}{=} A \oplus B \cup (A' \setminus A) \oplus B \supseteq A \oplus B. \end{aligned}$$

L'inclusion est stricte. En effet, supposons

$$\left\{ \left[ \frac{b}{m(H(F))} \right]^{1/2} - 1 \right\} H(F) \oplus F = \left\{ \left[ \frac{b'}{m(H(F))} \right]^{1/2} - 1 \right\} H(F) \oplus F$$

alors

$$\begin{aligned} H \left[ \left\{ \left[ \frac{b}{m(H(F))} \right]^{1/2} - 1 \right\} H(F) \oplus F \right] \\ = H \left[ \left\{ \left[ \frac{b'}{m(H(F))} \right]^{1/2} - 1 \right\} H(F) \oplus F \right]. \end{aligned}$$

Par le lemme B.2, cela revient à

$$\begin{aligned} \left\{ \left[ \frac{b}{m(H(F))} \right]^{1/2} - 1 \right\} H(F) \oplus H(F) \\ = \left\{ \left[ \frac{b'}{m(H(F))} \right]^{1/2} - 1 \right\} H(F) \oplus H(F), \end{aligned}$$

ce qui, grâce au lemme B.3, est équivalent à

$$\left[ \frac{b}{m(H(F))} \right]^{1/2} H(F) = \left[ \frac{b'}{m(H(F))} \right]^{1/2} H(F),$$

ce qui est faux vu que  $b < b'$ .

(b) Continuité

Nous n'avons pas trouvé de démonstration.

Nous aurions voulu montrer que  $T$  est strictement croissante et continue, afin d'avoir  $\forall y \in [m(F), \infty[$ ,

$$\exists! x \in [m(H(F)), \infty[ \uparrow m \left[ \left\{ \left[ \frac{x}{m(H(F))} \right]^{1/2} - 1 \right\} H(F) \oplus F \right] = y.$$

7. Le point précédent tentait de montrer qu'il existe une seule valeur  $b_a$  telle que l'argument maximum de  $m(K \boxminus F)$  sur l'ensemble des parties compactes identiques à leur ouverture par  $F$  et d'enveloppe convexe  $b_a$ , soit de mesure exactement égale à  $a$ , i.e.

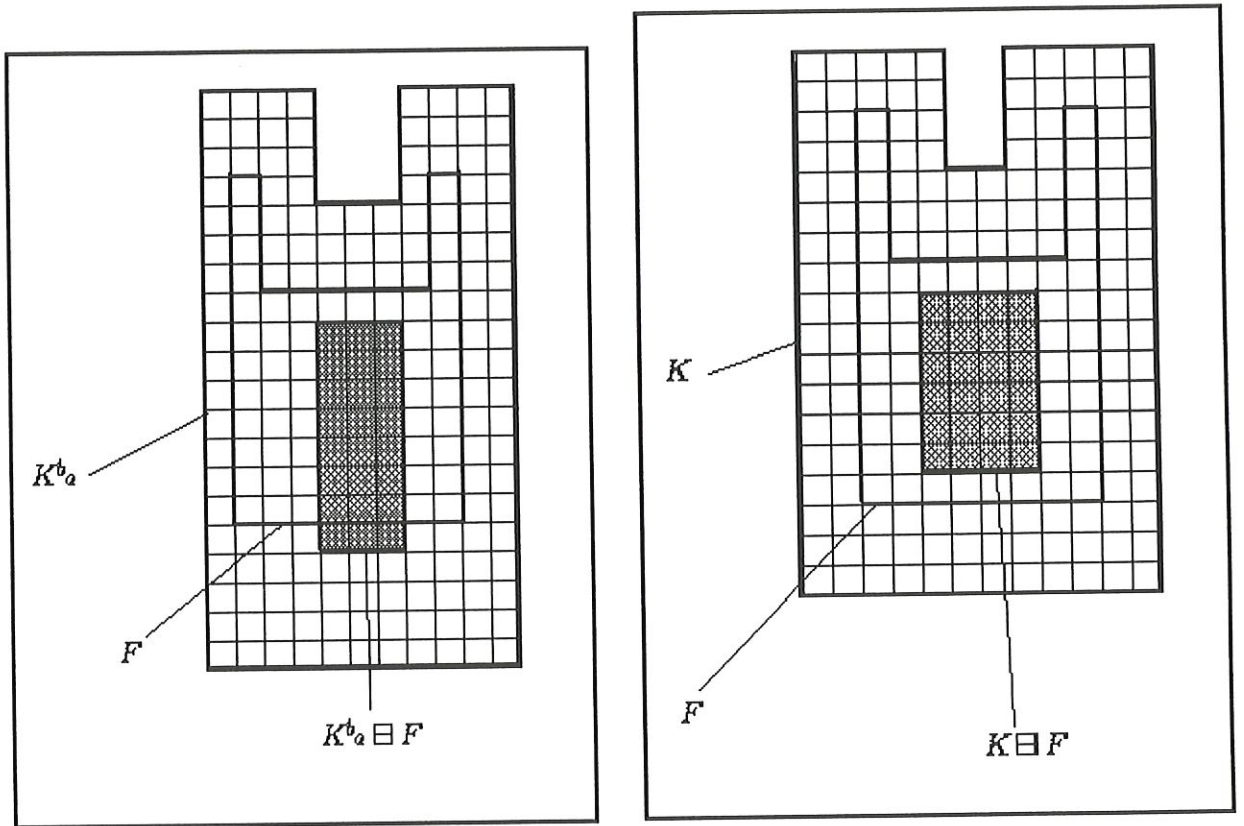
$$\exists! b_a \uparrow K^{b_a} = \operatorname{argmax}_{K \in \mathcal{H}_{b_a} \cap \mathcal{O}_F} m(K \boxminus F) \in \mathcal{M}_a \cap \mathcal{O}_F.$$

Donc, maximiser  $m(K \boxminus F)$  sur l'ensemble des parties compactes identiques à leur ouverture par  $F$  et d'enveloppe convexe de mesure  $b_a$  est équivalent à maximiser  $m(K \boxminus F)$  sur l'ensemble des parties compactes de mesure  $a$ , identiques à leur ouverture par  $F$  et d'enveloppe convexe de mesure  $b_a$ , étant donné que l'argument maximum de la première formulation est de mesure  $a$ , i.e.

$$\max_{K \in \mathcal{H}_{b_a} \cap \mathcal{O}_F} m(K \boxminus F) \equiv \max_{K \in \mathcal{M}_a \cap \mathcal{O}_F \cap \mathcal{H}_{b_a}} m(K \boxminus F).$$

8. Les points suivants tenteront de montrer que  $K^{b_a}$  est un argument maximum de  $m(K \boxminus F)$  sur l'ensemble des parties compactes de mesure  $a$ , identiques à leur ouverture par  $F$ , i.e.

$\forall K \in \mathcal{O}_F \cap \mathcal{M}_a$  tel que  $K \neq K^{b_a}$ , on a  $m(K \boxminus F) \leq m(K^{b_a} \boxminus F)$   
(on a une inégalité large ici car il peut y avoir non unicité de la solution optimale de par la nature du problème). Voir figures D.1a-b.



Figures D.1a-b

On sait que  $(\mathcal{H}_b \cap \mathcal{O}_F \cap \mathcal{M}_a)_{b \geq 0}$  est une partition de  $\mathcal{O}_F \cap \mathcal{M}_a$ , ensemble des parties compactes de mesure  $a$ , identiques à leur ouverture par  $F$ , donc en passant en revue chaque  $\mathcal{H}_b \cap \mathcal{O}_F \cap \mathcal{M}_a$ ,  $b \geq 0$  on aura considéré tout  $(\mathcal{O}_F \cap \mathcal{M}_a)$ .

9. Montrons que pour toute partie compacte  $K$  de mesure  $a$ , identique à son ouverture par  $F$  et d'enveloppe convexe de mesure  $b < b_a$ ,  $m(K \boxminus F)$  est strictement inférieur à  $m(K^{b_a} \boxminus F)$ .

Soit  $b < b_a$ ,  $\forall K \in \mathcal{M}_a \cap \mathcal{O}_F \cap \mathcal{H}_b$ , on a

$$\begin{aligned}
 m(K \boxminus F) &\leq \max_{K \in \mathcal{M}_a \cap \mathcal{O}_F \cap \mathcal{H}_b} m(K \boxminus F) \\
 &\leq \max_{K \in \mathcal{O}_F \cap \mathcal{H}_b} m(K \boxminus F) \text{ car } \mathcal{O}_F \cap \mathcal{H}_b \supseteq \mathcal{M}_a \cap \mathcal{O}_F \cap \mathcal{H}_b \\
 &= m\left(\left[\frac{b}{m(H(F))}\right]^{1/2} H(F) \boxminus F\right) \text{ par le point 5 et par la propriété 2.2}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&< m \left( \left[ \frac{b_a}{m(H(F))} \right]^{1/2} H(F) \boxminus F \right) \text{ car } T \text{ est strictement croissante} \\
&= m(K^{b_a} \boxminus F).
\end{aligned}$$

Il n'est donc pas possible de trouver une partie compacte de mesure  $a$ , identique à son ouverture par  $F$  et d'enveloppe convexe de mesure inférieure à  $b_a$  qui pourrait donner un meilleur résultat que  $m(K^{b_a} \boxminus F)$ . Il ne faut alors considérer que les parties compactes dont la mesure de l'enveloppe convexe est supérieure à  $b_a$ .

10. Les développements concernant les parties compactes d'enveloppe convexe de mesure strictement supérieure à  $b_a$  utilisent le fait suivant :

si  $K^*$  maximise  $m(K \boxminus F)$  sur  $\mathcal{O}_F \cap \mathcal{M}_a$  alors  $K^* \boxminus F = H(K^*) \boxminus F$ .

Nous n'avons pas trouvé de preuve de ce fait à ce moment, mais cela fut démontré dans le point 4.6.3.

Il faut remarquer que

$$K^* \boxminus F = H(K^*) \boxminus F \implies K^* \boxminus F \text{ est convexe.}$$

En effet, supposons que  $K^* \boxminus F$  soit non convexe, donc

$$K^* \boxminus F \not\subseteq H(K^* \boxminus F).$$

De plus,  $K^* \boxminus F \subseteq H(K^*) \boxminus F = H(K^*) \boxminus H(F)$  par le lemme B.1 avec  $m(H(K^*)) = b \geq m(H(F))$ .

Considérons l'enveloppe convexe de chaque terme

$$H(K^* \boxminus F) \subseteq H(H(K^*) \boxminus H(F)) = H(K^*) \boxminus H(F),$$

la dernière égalité venant du fait que  $H(K^*) \boxminus H(F)$  est convexe (l'érosion d'un convexe par un convexe est convexe). On a alors

$$K^* \boxminus F \not\subseteq H(K^*) \boxminus H(F) = H(K^*) \boxminus F,$$

ce qui est absurde.

11. Idée générale de la suite.

On fixe une valeur pour la mesure de l'enveloppe convexe  $b > b_a$ . On va supposer qu'il existe une partie compacte  $K$  de mesure  $a$ , identique à son

ouverture par  $F$  et d'enveloppe convexe de mesure  $b$  qui maximise  $m(K \boxminus F)$  sur l'ensemble des parties compactes de mesure  $a$  identiques à leur ouverture par  $F$ , i.e.

$$\exists K \in \mathcal{M}_a \cap \mathcal{O}_F \cap \mathcal{H}_b \text{ tel que } K = \arg \max_{\mathcal{M}_a \cap \mathcal{O}_F} m(K \boxminus F).$$

On considère  $K^b$ , l'argument qui maximise  $m(K \boxminus F)$  sur l'ensemble des parties compactes identiques à leur fermeture par  $F$  et d'enveloppe convexe de mesure  $b$ , i.e.

$$K^b = \arg \max_{\mathcal{O}_F \cap \mathcal{H}_b} m(K \boxminus F).$$

On peut exprimer  $H(K)$  comme la partie compacte obtenue à partir de  $H(K^b)$  après avoir retranché la surface qui appartient à  $H(K^b)$  mais pas à  $H(K)$ , puis ajouté la surface qui n'appartient pas à  $H(K^b)$  mais bien à  $H(K)$ . Les deux surfaces (retranchée et ajoutée) sont nécessairement de même mesure puisque l'enveloppe convexe de  $K$  est de même mesure que l'enveloppe convexe de  $K^b$ .

Si  $K$  est un argument maximum du problème initial, alors la surface retranchée à  $H(K^b)$  doit faire diminuer au minimum la valeur de  $m(K^b \boxminus F)$  et la surface ajoutée à  $H(K^b)$  doit faire augmenter au maximum la valeur de  $m(K^b \boxminus F)$ . On va montrer que pour satisfaire ces conditions, les côtés de  $H(K)$  devront être des translatés des côtés de  $H(K^b)$ .

On tentera de montrer que toute partie compacte de mesure  $a$ , identique à son ouverture par  $F$ , d'enveloppe convexe de mesure  $b$  et satisfaisant à la condition que les côtés de son enveloppe convexe soient des translatés des côtés de  $H(K^b)$ , donne une valeur à  $m(K \boxminus F)$  inférieure à  $m(K^{b_a} \boxminus F)$ . Et donc l'hypothèse absurde est fausse.

12. Soit  $b > b_a$ . Supposons qu'il existe  $K \in \mathcal{M}_a \cap \mathcal{O}_F \cap \mathcal{H}_b$  qui soit un argument optimum de  $m(K \boxminus F)$  sur  $\mathcal{M}_a \cap \mathcal{O}_F$ . Par le point 10, on a nécessairement que  $K \boxminus F = H(K) \boxminus F$ .

- (a)  $H(K)$  peut être considérée comme le résultat de  $H(K^b) \setminus \Delta^- \cup \Delta^+$  où  $\Delta^- \subseteq H(K^b)$ , tel que  $H(K^b) \setminus \Delta^-$  est convexe,  $\Delta^+ \subseteq (H(K^b))^c$ , tel que  $H(K^b) \setminus \Delta^- \cup \Delta^+$  est convexe et  $m(\Delta^-) = m(\Delta^+)$ .

(Pour l'unicité, il suffit de considérer  $H(K)$  et  $H(K^b)$  centrés en leur centre de gravité). Voir figure D.2 pour avoir un exemple.

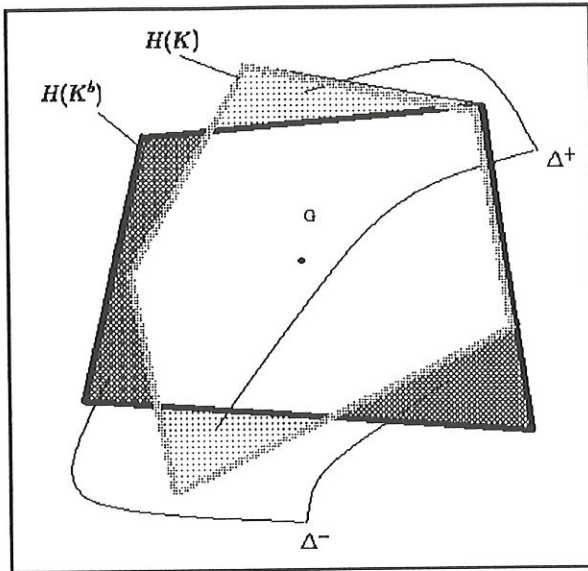


Figure D.2

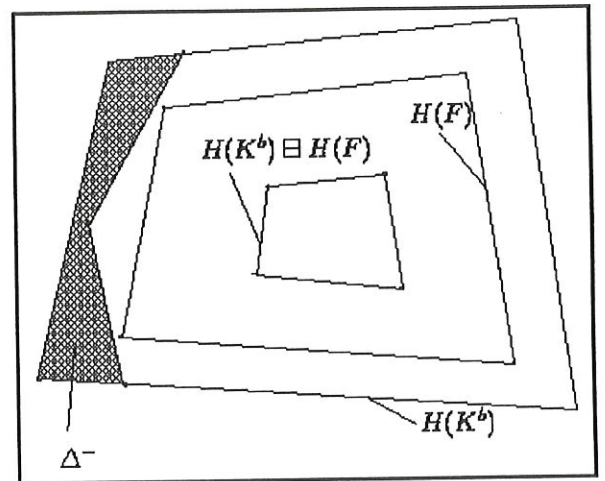


Figure D.3

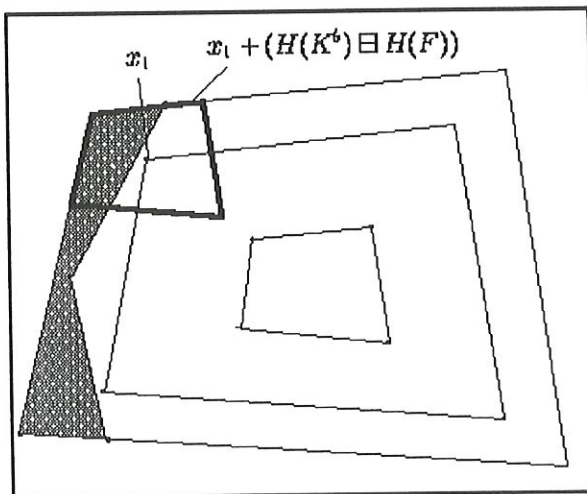


Figure D.4

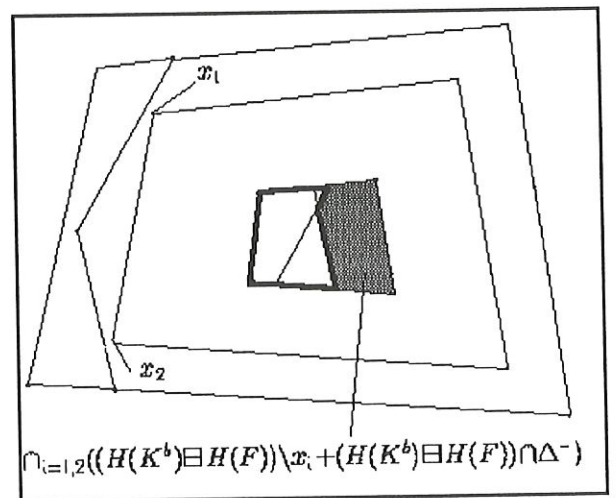


Figure D.5

- (b) Regardons ce que devient  $H(K^b) \boxminus F$ , qui n'est rien d'autre que  $H(K^b) \boxminus H(F)$  par le lemme B.1 avec  $m(H(K^b)) = b \geq m(H(F))$ , quand on retranche  $\Delta^-$  à  $H(K^b)$ . Voir figure D.3.

Considérons le sommet  $x_1$  de  $H(F)$ . Avant qu'on ne retranche  $\Delta^-$ ,  $x_1$  pouvait se déplacer dans  $x_1 + (H(K^b) \boxminus H(F))$ . Après avoir retranché  $\Delta^-$ , il ne peut plus se déplacer que dans

$$[x_1 + (H(K^b) \boxminus H(F))] \setminus [\Delta^- \cap (x_1 + (H(K^b) \boxminus H(F)))].$$

(“ $x_1$  peut se déplacer” doit être lu “quand on déplace  $F$ ,  $x_1$  se déplace”) Voir figure D.4.

On suit le même raisonnement pour les autres sommets  $(x_i)_{i=1, \dots, r}$  de  $H(F)$ .  $H(K^b) \boxminus H(F)$  devient  $(H(K^b) \setminus \Delta^-) \boxminus H(F)$

$$= \bigcap_{i=1}^r \{ [H(K^b) \boxminus H(F)] \setminus [\Delta^- \cap (x_i + (H(K^b) \boxminus H(F)))]] \}.$$

Voir figure D.5.

Il ne faut considérer que les déplacements des sommets de  $H(F)$  car  $\forall x \in H(F)$  tel que  $x$  n'est pas sommet de  $H(F)$ ,

$$\begin{aligned} & [H(K^b) \boxminus H(F)] \setminus [\Delta^- \cap (x + (H(K^b) \boxminus H(F)))] \\ & \supseteq \bigcap_{i=1}^r \{ [H(K^b) \boxminus H(F)] \setminus [\Delta^- \cap (x_i + (H(K^b) \boxminus H(F)))] \} \end{aligned}$$

car  $H(K^b) \setminus \Delta^-$  est convexe.

Donc, pour que  $m(H(K^b) \boxminus H(F))$  diminue le moins possible lorsqu'on retranche  $\Delta^-$  de  $H(K^b)$ , avec  $m(\Delta^-)$  fixé, il faut que  $\Delta^-$  soit tel que  $H(K^b) \setminus \Delta^-$  ait le même nombre de côtés que  $H(K^b)$  et que chaque côté de  $H(K^b) \setminus \Delta^-$  soit parallèle au côté correspondant de  $H(K^b)$ .

On ne considère donc que les  $\Delta^-$  tels que  $H(K^b) \setminus \Delta^-$  est convexe et dont les côtés sont des translatés des côtés correspondants de  $H(K^b)$ . Voir figure D.6.

- (c) On a

$$\Delta^+ = \Delta_1^+ \cup \Delta_2^+ \cup \dots \cup \Delta_k^+$$

où les  $\Delta_i^+$  sont deux à deux disjoints. Voir figure D.7.

Pour que  $(H(K^b) \setminus \Delta^-) \cup \Delta^+$  soit convexe, il faut que chaque  $\Delta_i^+$  ait un côté en commun avec  $H(K^b) \setminus \Delta^-$ . Soit  $c_i$  ce côté.

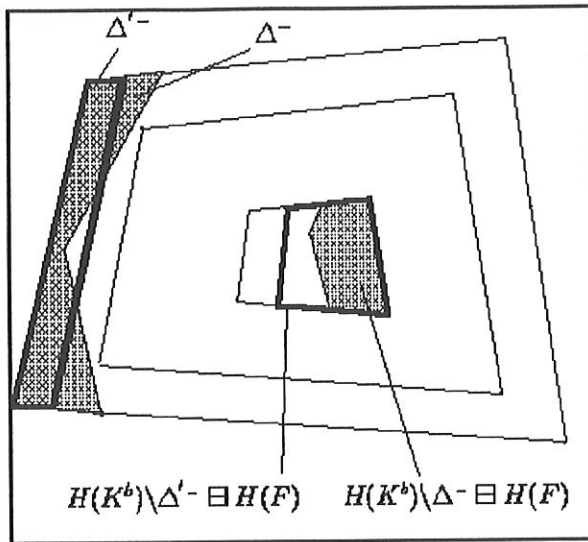


Figure D.6

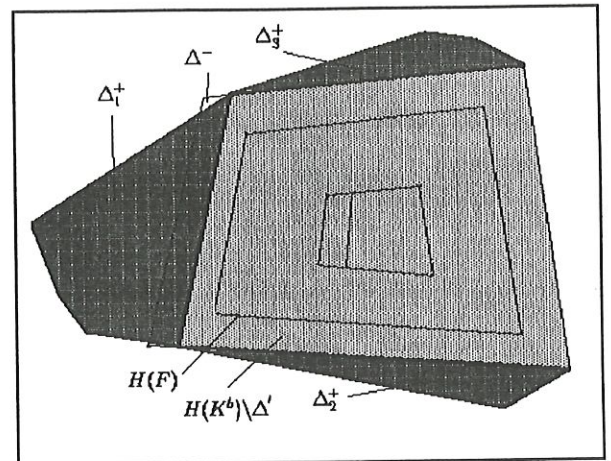


Figure D.7

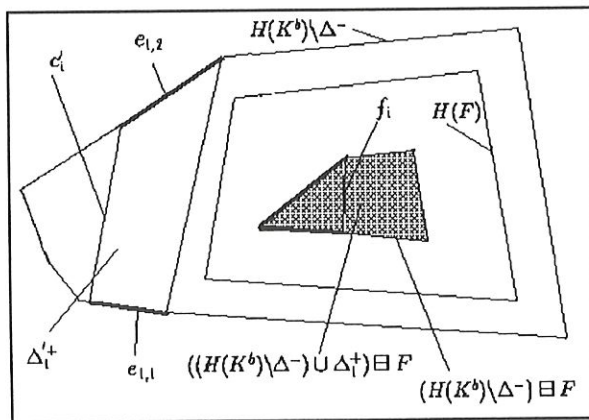


Figure D.8

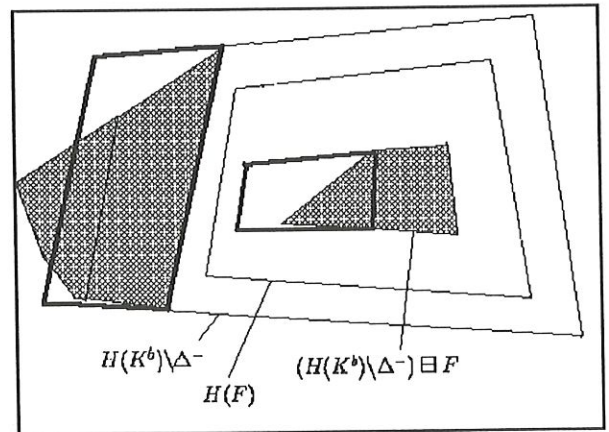


Figure D.9

Soit  $f_i$  le côté de  $H(F)$  parallèle correspondant à  $c_i$ .

Soit  $c'_i$  un segment parallèle à  $f_i$ , de longueur égale à la longueur de  $f_i$  tel que  $c'_i \subset \Delta_i^+$  et tel que la distance entre  $c_i$  et  $c'_i$  soit maximale.

Soit  $\Delta_i^{+'}$  l'ensemble des points de  $\Delta_i^+$  dont la distance à  $c_i$  est plus petite ou égale à la distance entre  $c_i$  et  $c'_i$ .

Soient  $e_{i,1}, e_{i,2}, \dots, e_{i,k}$  les côtés de  $\Delta_i^{+'}$  différents de  $c_i$  et de  $c'_i$ , considérés dans l'ordre horlogique.

Translatons  $e_{i,1}, e_{i,2}, \dots, e_{i,k}$  (en gardant les longueurs identiques et le même ordre) de manière à ce qu'ils forment un convexe avec  $(H(K^b) \setminus \Delta^-) \boxplus H(F)$ . Voir figure D.8.

Le convexe obtenu est bien  $((H(K^b) \setminus \Delta^-) \cup \Delta_i^{+'}) \boxplus F$ .

On fait la même chose  $\forall i = 1, \dots, k$ .

On obtient  $((H(K^b) \setminus \Delta^-) \cup \Delta^+) \boxplus H(F)$ .

Donc, pour que  $m(H(K^b) \setminus \Delta^-) \boxplus F$  augmente le plus possible lorsqu'on ajoute  $\Delta^+$  à  $(H(K^b) \setminus \Delta^-)$  avec  $m(\Delta^+)$  fixé, il faut que  $\Delta^+$  soit tel que la propriété suivante (A) soit vérifiée :

(A.i)  $(H(K^b) \setminus \Delta^-) \cup \Delta^+$  ait le même nombre de côtés que  $(H(K^b) \setminus \Delta^-)$  c'est-à-dire que  $H(K^b)$  et

(A.ii) que chaque côté soit parallèle au côté correspondant de  $H(K^b) \setminus \Delta^-$ .

Voir figure D.9.

Conclusion.

Pour que toute variation de  $H(K^b)$  apporte, soit une diminution minimale, soit une augmentation maximale, à  $m(H(K^b) \boxplus H(F))$ , on ne considère que les  $H(K)$  qui ont même nombre de côtés que  $H(K^b)$

(d) On peut écrire l'équation suivante

$$m(H(K)) - m(H(K^b)) = 0$$

sous la forme

$$\sum_{i=1 \uparrow R_i > 1}^r \frac{a_i + R_i \cdot a_i}{2} (l_i \cdot R_i - l_i) + \sum_{i=1 \uparrow R_i < 1}^r \frac{a_i + R_i \cdot a_i}{2} (l_i \cdot R_i - l_i) - \sum_{i=1}^{r-1} m(E_{i,i+1}) = 0 \quad (\text{D.2})$$

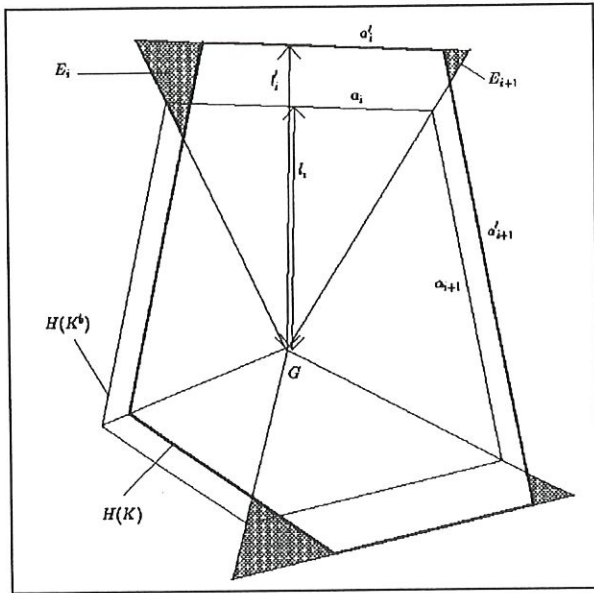


Figure D.10

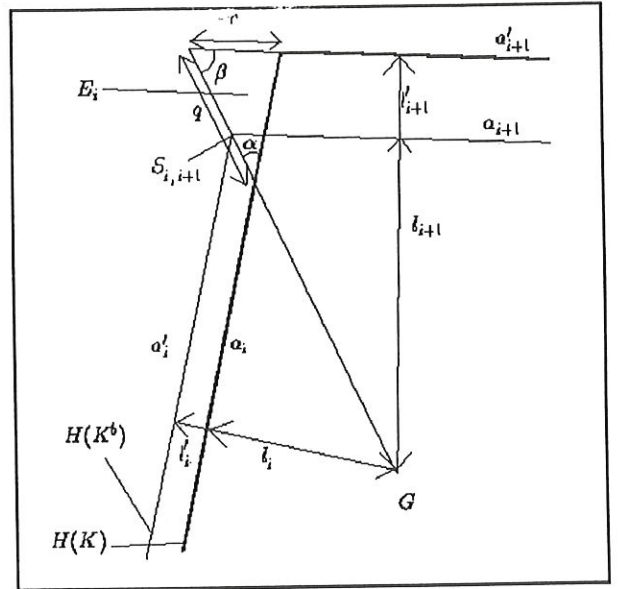


Figure D.11

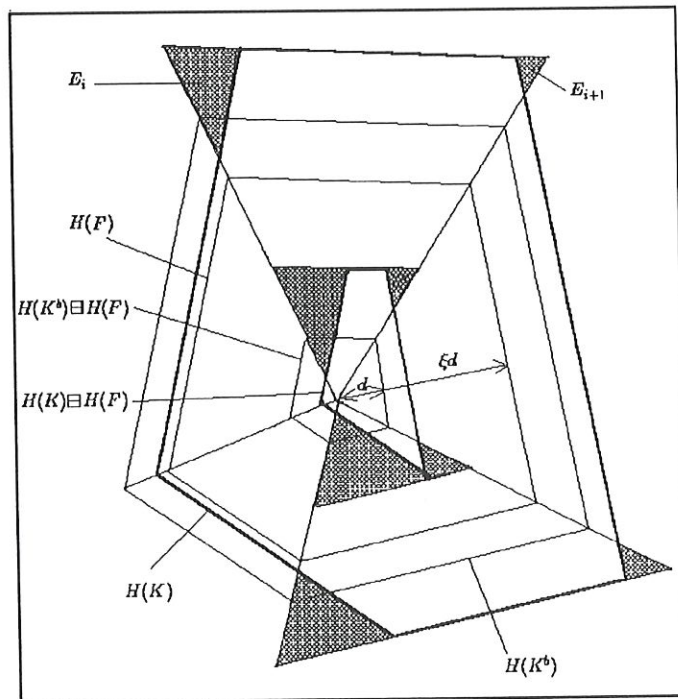


Figure D.12

où

$a_i$  est la longueur du  $i$ ème côté de  $K^b$ ,

$l_i$  est la distance du  $i$ ème côté de  $K^b$  à son centre de gravité  $G$ ,

$R_i \cdot a_i$  est la longueur du  $i$ ème côté de  $K$  correspondant au  $i$ ème côté de  $K_b$ ,

$R_i \cdot l_i$  est la distance du  $i$ ème côté de  $K$  au centre de gravité  $G$ .

Voir figure D.10.

Les deux premières sommes correspondent aux aires des trapèzes de bases  $a_i$  et  $R_i \cdot a_i$  et la dernière somme correspond aux aires des triangles touchant les côtés  $a_i$  et  $a_{i+1}$ .

Si l'on note

$G$  le centre de gravité de  $K^b$ ,

$S_{i,i+1}$  le sommet commun au  $i$  et au  $i + 1$ èmes côtés de  $K^b$ ,

$\alpha$  l'angle de  $E_{i,i+1}$  défini par  $GS_{i,i+1}$  et le  $i$ ème côté de  $K^b$ ,

$\beta$  l'angle de  $E_{i,i+1}$  défini par  $GS_{i,i+1}$  et le  $i + 1$ ème côté de  $K^b$ ,

$m(E_{i,i+1})$  est calculé comme suit. Voir figure D.11.

$\overline{GS}_{i,i+1} = \sin \frac{\pi}{2} \cdot \frac{l_i}{\sin \beta}$  par la règle des sinus dans les triangles.

$$q = \begin{cases} \left| \frac{l_i}{\sin \beta} (1 - R_i) \right| + \left| \frac{l_i}{\sin \beta} (1 - R_{i+1}) \right| & \text{si } R_i > 1 \text{ et } R_{i+1} < 1 \\ & \text{ou } R_i < 1 \text{ et } R_{i+1} > 1 \\ \left| \left| \frac{l_i}{\sin \beta} (1 - R_i) \right| - \left| \frac{l_i}{\sin \beta} (1 - R_{i+1}) \right| \right| & \text{si } R_i \text{ et } R_{i+1} > 1 \\ & \text{ou } R_i \text{ et } R_{i+1} < 1. \end{cases}$$

Par la règle des sinus, on a

$$\frac{q}{\sin(\pi - \alpha - \beta)} = \frac{r}{\sin \alpha} \implies r = \frac{\sin \alpha}{\sin(\pi - \alpha - \beta)} \cdot q$$

et on peut calculer  $m(E_{i,i+1}) = \frac{q \cdot r \cdot \sin \beta}{2}$ .

On note

$$\xi^2 = \frac{m \left( \left[ \left[ \frac{b}{m(H(F))} \right]^{1/2} - 1 \right] H(F) \right)}{b} = \frac{(b^{1/2} - m(H(F))^{1/2})^2}{b}.$$

Voir figure D.12.

On peut exprimer, grâce aux constructions expliquées aux deux points précédents,  $m(H(K) \boxplus F) - m(H(K^b) \boxplus F)$  par

$$\begin{aligned} \mathcal{F}((R_i)_{i=1,\dots,r}) &= \sum_{i=1 \uparrow R_i > 1}^r \frac{\xi \cdot a_i + R_i \cdot \xi \cdot a_i}{2} (l_i \cdot R_i - l_i) \\ &\quad + \sum_{i=1 \uparrow R_i < 1}^r \frac{\xi \cdot a_i + R_i \cdot \xi \cdot a_i}{2} (l_i \cdot R_i - l_i) - \sum_{i=1}^{r-1} m(E_{i,i+1}) \\ &= 0 + (\xi - 1) \sum_{i=1}^{r-1} m(E_{i,i+1}) \text{ par l'équation (D.2)} \\ &< 0 \end{aligned}$$

La dernière inégalité venant du fait que

$$\xi^2 = \frac{m \left( \left[ \left[ \frac{b}{m(H(F))} \right]^{1/2} - 1 \right] H(F) \right)}{b} = \frac{(b^{1/2} - m(H(F))^{1/2})^2}{b}$$

donc

$$\xi = 1 - \frac{m(H(F))^{1/2}}{b^{1/2}}.$$

On peut également exprimer

$$\begin{aligned} m(K^{b_a} \boxplus F) - m(K^b \boxplus F) &= (b_a - b) \left( 1 - \frac{m(H(F))^{1/2}}{b^{1/2}} \right) \\ &= (b_a - b)\xi < 0. \end{aligned}$$

Pour obtenir une absurdité, on voudrait que

$$\mathcal{F}((R_i)_{i=1,\dots,r}) < m(K^{b_a} \boxplus F) - m(K^b \boxplus F), \text{ i.e.}$$

$$m(K^{b_a} \boxplus F) - m(K^b \boxplus F) < m(K^{b_a} \boxplus F) - m(K^b \boxplus F)$$

c'est-à-dire que la variation négative de  $m(K \boxplus F)$  soit plus grande, en valeur absolue, lorsque l'on passe de  $K^b$  à  $K$  que lorsque l'on passe de  $K^{b_a}$  à  $K^b$ , et donc  $m(H(K) \boxplus F) < m(K^{b_a} \boxplus F)$  ce qui est absurde.

Il faut donc voir si  $(1 - \xi) \sum_{i=1}^{r-1} m(E_{i,i+1}) > (b - b_a)\xi$ , i.e.

$$\frac{\sum_{i=1}^{r-1} m(E_{i,i+1})}{(b - b_a)} > \frac{\xi}{1 - \xi} = \frac{b^{1/2}}{m(H(F))^{1/2}} - 1.$$

Nous n'avons pas trouvé de suite à cette démonstration.

# Annexe E

## Troisième tentative

### E.1 Introduction

Cette annexe donne la forme de l'argument optimum du problème

$$\max_{K \in \mathcal{K} \mid m(K) = a} m(K \boxminus F)$$

quand  $F$  est de la forme “un convexe moins des convexes” et quand on suppose que l'érosion de  $K$  par  $F$  est convexe. Nous l'avons montré pour  $F$  un polygône connexe quelconque.

Ces restrictions sont évidemment trop fortes pour être utilisées dans des développements ultérieurs. Nous avons donc abandonné cette piste.

### E.2 Le problème

Soit  $F$  un polygône connexe de  $\mathbb{R}^2$ . Supposons que  $F$  vérifie la propriété suivante. Sa frontière,  $\partial F$ , est une union disjointe de courbes fermées simples (sans boucle)  $\Gamma_i$ ,  $i = 1, \dots, s$ , telles que pour tout  $i = 1, \dots, s$ ,  $I(\Gamma_i)$ , la surface bornée ayant pour frontière  $\Gamma_i$  est convexe.

Supposons que  $\operatorname{argmax}_{K \in \mathcal{M}_a} m(K \boxminus F) = K^*$  vérifie  $K^* \boxminus F$  est convexe.

La figure E.1 montre un polygône vérifiant les deux propriétés précitées, tandis que les figures E.2a et 2b ne vérifient pas soit la propriété de courbe simple (figure E.2a), soit le fait que la surface ayant pour frontière  $\Gamma_i$  soit convexe (figure E.2b).

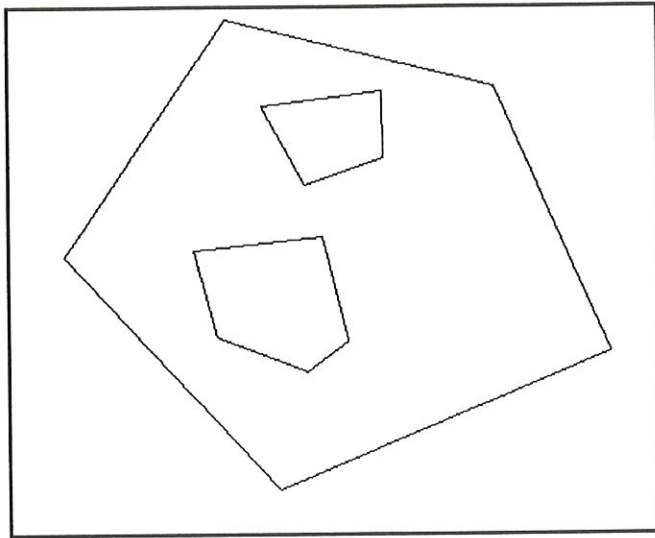


Figure E.1

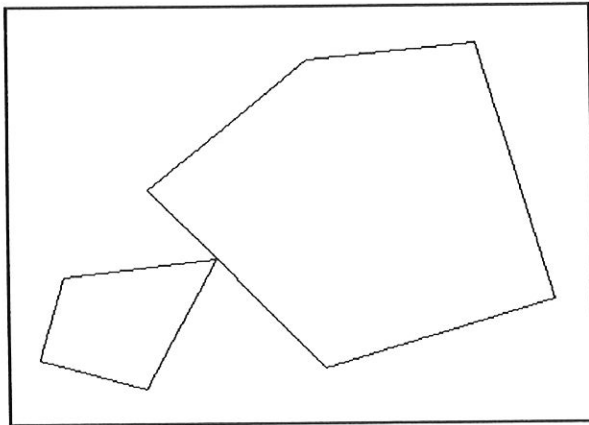


Figure E.2a

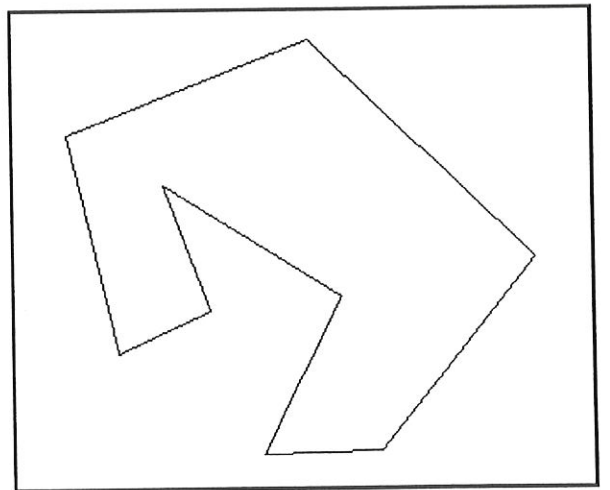


Figure E.2b

### E.3 Etape 1

Considérons la partie compacte suivante

$$K = (c * H(F)) \boxminus F \oplus F$$

avec  $c \geq 1$  tel que  $m(K) = a$ .

On a nécessairement  $c \neq 1$  sinon

$$m(K) = m(1 * H(F) \boxminus F \oplus F) = m(F)$$

vu que  $H(F) \boxminus F$  est réduit au centre de gravité de  $F$ .

Or, par hypothèse,  $m(F) < a$ , ce qui est absurde.

Nous avons donc

$$\begin{aligned} m(K \boxminus F) &= m(c * H(F) \boxminus F) \\ &< m(c * H(F) \boxminus H(F)) \quad \text{par le lemme B.1 avec } c > 1 \\ &= m((c-1)H(F)) \\ &= (c-1)^2 m(H(F)). \end{aligned}$$

où  $(c-1)^2 > 0$  et  $m(H(F)) > 0$ .

Il suffit donc de limiter notre recherche de l'argument maximum parmi les parties compactes  $K$  de mesure  $a$  et telles que  $m(K \boxminus F) > 0$ .

Nous allons transformer une telle partie compacte  $K$  en plusieurs étapes, augmentant  $m(K \boxminus F)$  à chacune d'elles, pour obtenir finalement la forme  $K^*$  optimale. L'accroissement total sera strictement positif, sauf si  $K$  possède déjà la forme solution.

Soit une partie compacte  $K$  de mesure  $a$  telle que  $m(K \boxminus F) > 0$ .

### E.4 Etape 2

Si  $K \neq K_F$ , on a  $K_F \subsetneq K$  (l'ouverture d'un corps est inclus dans le corps) et donc  $m(K_F) < m(K)$ .

Par la définition de l'ouverture et par la propriété 2.2,  $K \boxminus F = K_F \boxminus F$ , et donc  $m(K \boxminus F) = m(K_F \boxminus F)$ . C'est-à-dire,  $K_F$  est un compact de mesure strictement inférieure à celle de  $K$  et l'espace des translations de  $F$  dans  $K_F$  est le même que

celui de  $F$  dans  $K$ .

Il est donc possible de trouver un espace de translation  $T \supseteq K_F \boxminus F$  tel que  $m(F \oplus T) = a$ . On a alors  $T$  tel que  $m(T) > m(K_F \boxminus F) = m(K \boxminus F)$  et  $m(F \oplus T) = m(K) = a$ .

Donc en remplaçant  $K$  par  $(F \oplus T)$ , on obtient un résultat strictement meilleur.

Le problème

$$\max_{K \uparrow m(K)=a} m(K \boxminus F)$$

peut donc s'écrire

$$\boxed{\max_{T \uparrow m(F \oplus T)=a} m(T).}$$

## E.5 Etape 3

Soit  $T$  un convexe compact dans  $\mathbb{R}^2$  tel que  $m(F \oplus T) = a$ .

On appelle  $\mathcal{U}(\cdot)$  l'application qui à chaque polygône associe l'ensemble des vecteurs unitaires normaux vers l'extérieur aux côtés de ce polygône.

Montrons que si  $\mathcal{U}(T)$  n'est pas un sous-ensemble de  $\mathcal{U}(F)$ , alors il existe un polygône convexe compact  $P$  tel que  $\mathcal{U}(P) \subseteq \mathcal{U}(F)$ ,  $m(P) > m(T)$  et  $m(F \oplus P) = a$ .

Considérons  $T$  tel que  $\mathcal{U}(T)$  n'est pas un sous-ensemble de  $\mathcal{U}(F)$ .

### 1. Notation

Notons  $\Gamma_1$  la courbe fermée simple de  $\partial F$  telle que  $I(\Gamma_1) \supseteq F$  (sous les hypothèses imposées sur  $F$ ,  $I(\Gamma_1) = H(F)$ ) et  $\Gamma_2, \dots, \Gamma_s$  les autres.

Soient  $y_{i,1}, \dots, y_{i,r_i}$  les  $r_i$  côtés de  $F$  appartenant à  $\Gamma_i$  et considérés dans le sens anti-horlogique par exemple, avec  $y_{i,1}$  choisi arbitrairement,  $i = 1, \dots, s$ .

Notons  $y_{i,1}^\perp, \dots, y_{i,r_i}^\perp$  les vecteurs unitaires normaux vers l'extérieur aux côtés  $y_{i,1}, \dots, y_{i,r_i}$ ,  $i = 1, \dots, s$  respectivement.

Voir figure E.3.

### 2. Construction de $F \oplus T$ .

- (a) Considérons tout d'abord les côtés de  $F$  appartenant à  $\Gamma_1$ , c'est-à-dire les côtés de l'enveloppe convexe de  $F$ , vu que sous les hypothèses imposées à  $F$ ,  $I(\Gamma_1) = H(F)$ .

$\forall j = 1, \dots, r_1, \exists c_{1,j}$  un point de  $T$  dont la projection sur  $y_{1,j}^\perp$  est maximale, i.e.

$$\langle c_{1,j}, y_{1,j}^\perp \rangle = \max_{c \in T} \langle c, y_{1,j}^\perp \rangle.$$

Alors  $y_{1,j} + c_{1,j} \subset \partial(F \oplus T)$  car aucun point de  $F \oplus T$  ne peut avoir sur  $y_{1,j}^\perp$  une projection plus grande que celle d'un point de  $y_{1,j} + c_{1,j}$ .

Puisque  $I(\Gamma_1)$  est convexe, les translatés  $y_{1,j} + c_{1,j}$  des côtés de  $I(\Gamma_1)$  se présentent dans le même ordre sur  $\partial F$ .

Appellons  $B_j$  l'arc de  $\partial F$  joignant  $(y_{1,j} + c_{1,j})$  à  $(y_{1,j+1} + c_{1,j+1})$ ,  $j = 1, \dots, r_1$  où  $y_{1,r_1+1} + c_{1,r_1+1} = y_{1,1} + c_{1,1}$ .

Considérons  $s_{1,1}$  le sommet de  $\Gamma_1$  qui est le point commun à  $y_{1,1}$  et  $y_{1,2}$ . L'ensemble des points que celui-ci peut atteindre lorsque  $F$  est translaté à l'intérieur de  $F \oplus T$ , est borné par  $B_1$  et la courbe fermée complétée par les translatés des arcs  $B_2, \dots, B_{r_1}$  (éventuellement dégénérés) dans l'ordre. Cette courbe fermée n'est rien d'autre qu'un translaté de  $T$  en  $s_{1,1}$ . Voir figure E.4.

- (b) Considérons maintenant la courbe fermée simple  $\Gamma_i$ ,  $i \in \{2, \dots, s\}$ . Nous voulons déterminer la forme  $(I(\Gamma_i))^c \oplus T$  pour déterminer  $F \oplus T$ .

$(I(\Gamma_i))^c$  peut s'exprimer de la manière suivante. Notons  $D^+(y_{i,j})$  le demi-plan déterminé par  $d_{i,j}$ , la droite contenant le côté  $y_{i,j}$  et tel que  $D^+(y_{i,j})$  soit inclus dans  $(I(\Gamma_i))^c$ .

On peut écrire  $(I(\Gamma_i))^c = \bigcup_{j=1}^{r_i} D^+(y_{i,j})$ .

Et donc  $(I(\Gamma_i))^c \oplus T = (\bigcup_{j=1}^{r_i} D^+(y_{i,j})) \oplus T = \bigcup_{j=1}^{r_i} (D^+(y_{i,j}) \oplus T)$ . Voir figures E.5a-b.

$\forall j = 1, \dots, r_i, \exists c_{i,j}$  un point de  $T$  dont la projection sur  $y_{i,j}^\perp$  est maximale. Alors aucun point de  $D^+(y_{i,j}) \oplus T$  ne peut avoir sur  $y_{i,j}^\perp$

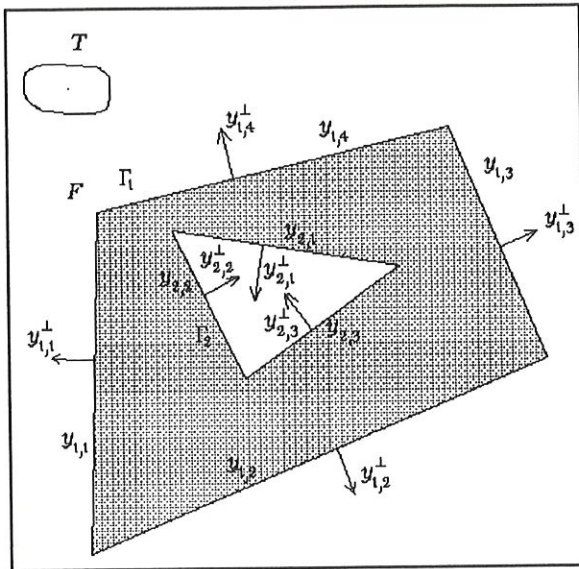


Figure E.3

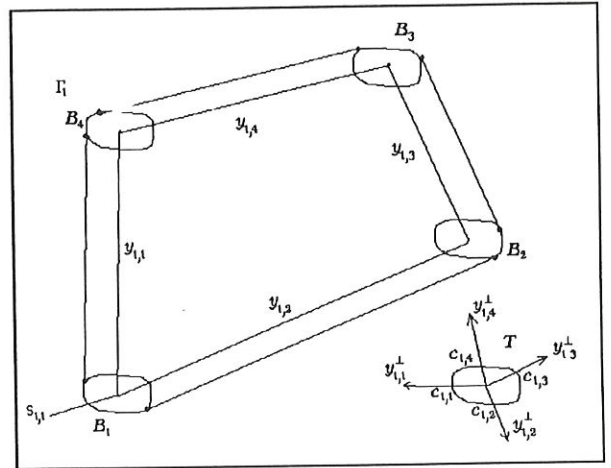


Figure E.4

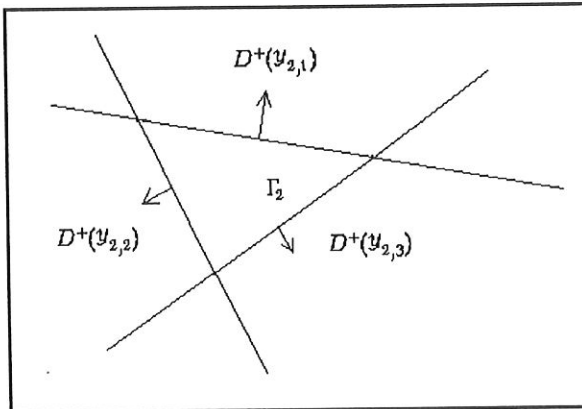


Figure E.5a

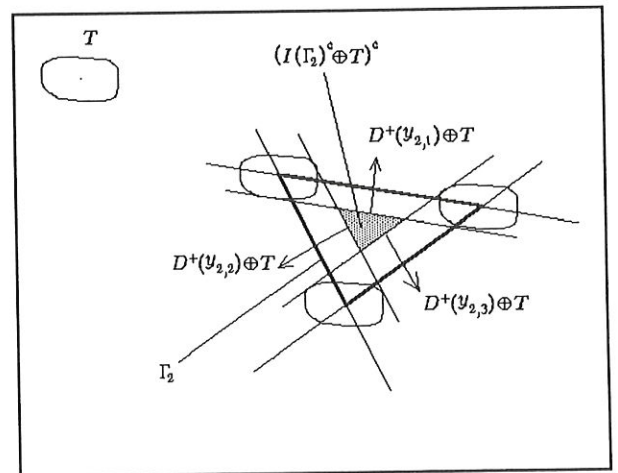


Figure E.5b

une projection plus grande que celle d'un point de  $d_{i,j} + c_{i,j}$ . Donc  $D^+(y_{i,j}) \oplus T = D^+(y_{i,j} + c_{i,j})$ .

On peut exprimer  $(I(\Gamma_i))^c \oplus T = \bigcup_{j=1}^{r_i} D^+(y_{i,j} + c_{i,j})$ .

(c) Nous pouvons alors donner une expression de  $F \oplus T$  qui rappelle la manière dont on peut le construire :

$$F \oplus T = (I(\Gamma_1) \oplus T) \setminus \left[ \bigcup_{i=2}^s ((I(\Gamma_i))^c \oplus T)^c \right].$$

Voir figure E.6.

### 3. Modification de $T$ .

Notons  $E^+(c_{i,j})$  le demi-plan caractérisé par la droite passant par  $c_{i,j}$  et de vecteur normal  $y_{i,j}^\perp$  et tel que  $E^+(c_{i,j})$  comprenne  $T$ ,  $i = 1, \dots, s$  et  $j = 1, \dots, r_i$ .

Appelons  $T'$  le polygône convexe obtenu en prenant l'intersection de tous les demi-plans  $E^+(c_{i,j})$ ,  $i = 1, \dots, s$  et  $j = 1, \dots, r_i$ , i.e.

$$T' = \bigcap_{i=1}^s \bigcap_{j=1}^{r_i} E^+(c_{i,j}).$$

Par hypothèse,  $T \neq T'$ , vu que nous avons supposé que  $T$  est tel que  $\mathcal{U}(T)$  n'est pas un sous-ensemble de  $\mathcal{U}(F)$ . Voir figure E.7.

La construction de  $F \oplus T'$  se fait de la même manière que celle de  $F \oplus T$ . De par la construction de  $T'$ , tout  $c'_{i,j}$ , point de  $T'$  dont la projection sur  $y_{i,j}^\perp$  est maximale n'est rien d'autre que  $c_{i,j}$ . Si on note  $B'_j$ ,  $j = 1, \dots, r_1$ , l'arc de  $\partial(F \oplus T')$  reliant  $y_{1,j} + c'_{1,j}$  à  $y_{1,j+1} + c'_{1,j+1}$ ,  $j = 1, \dots, r_1$  où  $y_{1,r_1+1} + c'_{1,r_1+1} = y_{1,1} + c'_{1,1}$ , la différence entre  $F \oplus T'$  et  $F \oplus T$  est la suivante : l'ensemble des points que  $s_{1,1}$  peut atteindre quand  $F$  se translate à l'intérieur de  $F \oplus T'$  est bornée par  $B'_1$  et la courbe fermée complétée par les translatés des arcs  $B'_2, \dots, B'_{r_1}$ . L'intérieur de cette courbe fermée n'est rien d'autre que  $T'$ . Voir figure E.8.

Donc

$$m(F \oplus T') - m(F \oplus T) = m(T') - m(T).$$

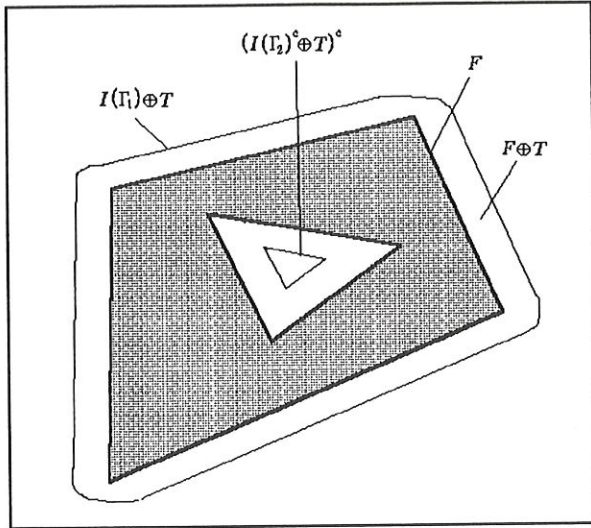


Figure E.6

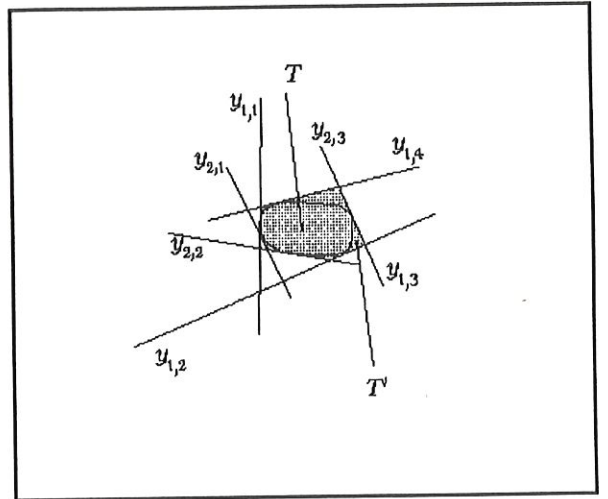


Figure E.7

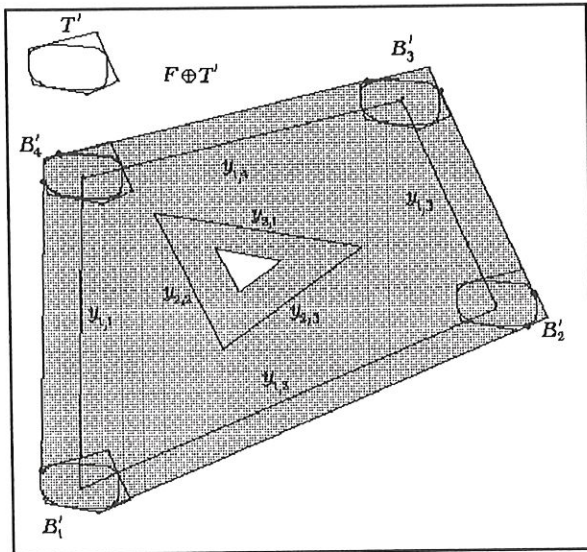


Figure E.8

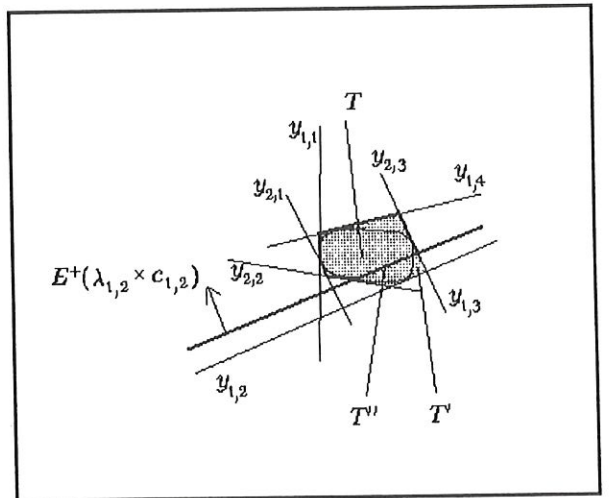


Figure E.9

#### 4. Modifications de $T'$ .

Soit  $j^\bullet$  un indice particulier entre 1 et  $r_1$ .

Considérons  $E^+(\lambda_{1,j^\bullet} * c_{1,j^\bullet})$  avec  $0 < \lambda_{1,j^\bullet} < 1$  et  $T'(\lambda_{1,j^\bullet}) = T' \cap E^+(\lambda_{1,j^\bullet} * c_{1,j^\bullet})$ . On note pour la facilité  $T'(\lambda_{1,j^\bullet}) = T''$  et tout ce qui se rapporte à  $T''$  sera muni d'une double apostrophe ( $''$ ). Voir figure E.9.

Construisons  $F \oplus T''$  de la même manière que  $F \oplus T$  et  $F \oplus T'$ . On a  $c''_{i,j} \leq c'_{i,j} = c_{i,j}$ ,  $i = 1, \dots, s$  et  $j = 1, \dots, r_i$  (on a une inégalité car un point  $c'_{i,j}$  de  $T'$  peut ne plus appartenir à  $T''$  et donc  $c''_{i,j}$  est plus petit que  $c'_{i,j}$ ) et en particulier  $c''_{1,j^\bullet} = \lambda_{1,j^\bullet} * c'_{1,j^\bullet} = \lambda_{1,j^\bullet} \cdot c_{1,j^\bullet}$ . De plus, l'ensemble des points que  $s_{1,1}$  peut atteindre quand  $F$  se translate à l'intérieur de  $F \oplus T''$  est bornée par  $B''_1$  et la courbe fermée complétée par les translatés des arcs  $B''_2, \dots, B''_{r_1}$ . L'intérieur de cette courbe fermée n'est rien d'autre que  $T''$ . Voir figure E.10.

Donc si l'on note  $\text{Par}(\gamma, \epsilon)$ , le parallélogramme de bases  $\gamma$  et  $\epsilon$ ,

$$m(F \oplus T'') - m(F \oplus T') \leq m(T'') - m(T') \\ - m(\text{Par}(y_{1,j^\bullet} + c'_{1,j^\bullet}, y_{1,j^\bullet} + c''_{1,j^\bullet})).$$

On a aussi une inégalité car il se peut qu'il existe un  $i$  et un  $j$  pour lesquels  $c''_{i,j} < c'_{i,j} = c_{i,j}$  pour les raisons invoquées précédemment.

Donc,

$$m(T'') \geq m(F \oplus T'') - m(F \oplus T') + m(T') \\ + m(\text{Par}(y_{1,j^\bullet} + c'_{1,j^\bullet}, y_{1,j^\bullet} + c''_{1,j^\bullet}))$$

ou encore grâce au fait que  $m(F \oplus T') - m(F \oplus T) = m(T') - m(T)$ ,  $m(T'') \geq m(F \oplus T'') - m(F \oplus T) + m(T) + m(\text{Par}(y_{1,j^\bullet} + c'_{1,j^\bullet}, y_{1,j^\bullet} + c''_{1,j^\bullet}))$ .

Le raisonnement est le même lorsque l'on modifie tous les  $c_{1,j}$  en les multipliant par  $\lambda_{1,j} < 1$ ,  $j = 1, \dots, r_1$  respectivement.

On peut donc choisir des  $\lambda_{1,j} < 1$ ,  $j = 1, \dots, r_1$  de manière à ce que

$$m(F \oplus T'(\lambda_{1,j})_{j=1, \dots, r_1}) = m(F \oplus T) = a$$

et comme on vient de montrer que

$$m(T'(\lambda_{1,j})_{j=1, \dots, r_1}) \geq m(F \oplus T'(\lambda_{1,j})_{j=1, \dots, r_1}) - m(F \oplus T) + m(T) \\ + \sum_{j=1}^{r_1} m(\text{Par}(y_{1,j} + c'_{1,j}, y_{1,j} + \lambda_{1,j} \cdot c'_{1,j})),$$

on a alors

$m(T'(\lambda_{1,j})_{j=1,\dots,r_1}) \geq m(T) + \sum_{j=1}^{r_1} m(\text{Par}(y_{1,j} + c'_{1,j}, y_{1,j} + \lambda_{i,j} \cdot c'_{1,j})),$   
 donc en prenant  $P = T'(\lambda_{1,j})_{j=1,\dots,r_1}$  on a  $m(F \oplus P) = m(F \oplus T) = a$  et  
 $m(P) > m(T)$  et l'ensemble des vecteurs unitaires normaux vers l'extérieur  
 aux côtés de  $P$  est inclus dans l'ensemble des vecteurs unitaires normaux  
 vers l'extérieur aux côtés de  $F$ .

Dans la recherche de l'argument qui maximise  $\max_{T \uparrow m(F \oplus T) = a} m(T)$ , on peut se  
 contenter de ne considérer que les  $T$  tels que l'ensemble des vecteurs unitaires  
 normaux vers l'extérieur de ses côtés soit inclus dans l'ensemble des vecteurs uni-  
 taires normaux vers l'extérieur des côtés de  $F$ . On notera  $\mathcal{T}$  l'ensemble des  $T$   
 vérifiant cette propriété.

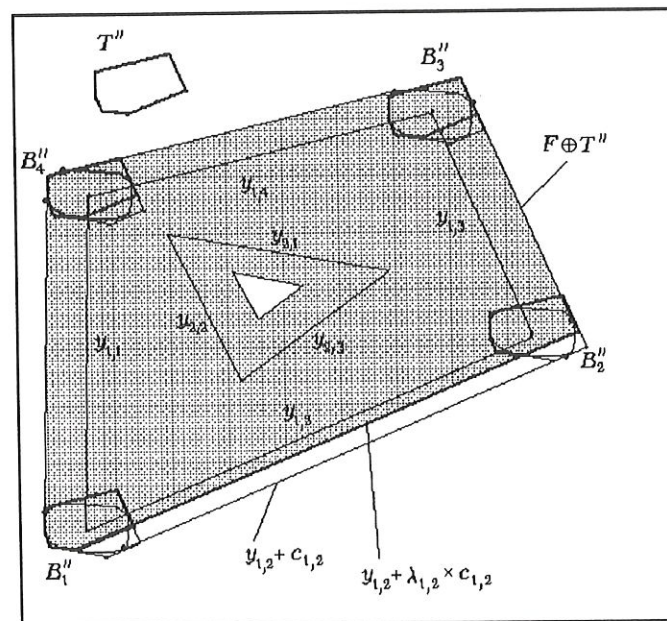


Figure E.10

# Annexe F

## Quatrième tentative

### F.1 Introduction

Cette annexe donne la forme de l'argument optimum du problème

$$\max_{K \in \mathcal{K} \mid m(K) = a} m(K \boxminus F)$$

quand on suppose que l'érosion de  $K$  par  $F$  est convexe.

Encore une fois, nous avons dû abandonner cette piste car nous ne pouvions justifier le fait que l'érosion de l'argument optimum par  $F$  soit nécessairement convexe.

### F.2 Le problème

Soit  $F$  l'union des faces intérieures de  $\alpha_S(\alpha_E^*(x))$ , (l' $\alpha$ -shape des points  $\alpha$ -extrêmes de l' $\alpha$ -hull optimale de la réalisation  $x$ ), telle que  $0 \leq m(F) < a$  et  $m(H(F)) > 0$ . Soit  $a > 0$  et  $\mathcal{M}_a$  l'ensemble des parties compactes du plan de mesure  $a$ .

On recherche l'argument  $K^*$  qui maximise

$$\max_{K \in \mathcal{M}_a} m(K \boxminus F).$$

Les deux premières étapes sont les mêmes que les deux premières étapes de l'annexe E, nous les réécrivons ici pour plus de clarté.

### F.3 Etape 1

Considérons la partie compacte suivante

$$K = (c * H(F)) \boxminus F \oplus F$$

avec  $c$  tel que  $m(K) = a$ .

On a nécessairement  $c \neq 1$  sinon

$$m(K) = m(1 * H(F) \boxminus F \oplus F) = m(F).$$

Or, par hypothèse,  $m(F) < a$ , ce qui est absurde.

Nous avons donc

$$\begin{aligned} m(K \boxminus F) &= m(c * H(F) \boxminus F) \\ &< m(c * H(F) \boxminus H(F)) \quad \text{par le lemme B.1} \\ &= m((c-1)H(F)) \\ &= (c-1)^2 m(H(F)). \end{aligned}$$

où  $(c-1)^2 > 0$  et  $m(H(F)) > 0$ .

Il suffit donc de limiter notre recherche de l'argument maximum parmi les parties compactes  $K$  de mesure  $a$  et telles que  $m(K \boxminus F) > 0$ .

Nous tenterons de transformer une telle partie compacte  $K$  en plusieurs étapes, augmentant  $m(K \boxminus F)$  à chacune d'elles, pour obtenir finalement la forme  $K^*$  optimale. L'accroissement total sera strictement positif, sauf si  $K$  possède déjà la forme solution.

## F.4 Etape 2

Soit une partie compacte  $K$  de mesure  $a$  telle que  $m(K \boxminus F) > 0$ .

Si  $K \neq K_F$ , on a  $K_F \subsetneq K$  (l'ouverture d'un corps est inclus dans le corps) et donc  $m(K_F) < m(K)$ .

Par la définition de l'ouverture,  $K \boxminus F = K_F \boxminus F$ , et donc  $m(K \boxminus F) = m(K_F \boxminus F)$ . C'est-à-dire,  $K_F$  est un compact de mesure strictement inférieure à celle de  $K$  et l'espace des translations de  $F$  dans  $K_F$  est le même que celui de  $F$  dans  $K$ .

Il est donc possible de trouver  $T \supsetneq (K_F \boxminus F)$  tel que  $m(F \oplus T) = a$ . On a alors  $T$  tel que  $m(T) > m(K_F \boxminus F) = m(K \boxminus F)$  et  $m(F \oplus T) = m(K) = a$ .

Donc en remplaçant  $K$  par  $(F \oplus T)$ , on obtient un résultat strictement meilleur.

Le problème

$$\max_{K \uparrow m(K)=a} m(K \boxminus F)$$

peut donc s'écrire

$$\boxed{\max_{T \uparrow m(F \oplus T)=a} m(T)}.$$

## F.5 Etape 3

Soit  $T$  une partie compacte de  $\mathbb{R}^2$  tel que  $m(F \oplus T) = a$ .

On appelle  $\mathcal{U}(\cdot)$  l'application qui à chaque polygône associe l'ensemble des vecteurs unitaires normaux vers l'extérieur aux côtés de ce polygône.

Montrons que si  $\mathcal{U}(T)$  n'est pas un sous-ensemble de  $\mathcal{U}(F)$ , alors il existe un polygône convexe compact  $P$  tel que  $\mathcal{U}(P) \subseteq \mathcal{U}(F)$ ,  $m(P) > m(T)$  et  $m(F \oplus P) = a$ .

Considérons  $T$  tel que  $\mathcal{U}(T)$  n'est pas un sous-ensemble de  $\mathcal{U}(F)$ .

### 1. Notation

Notons  $\Gamma_1$  la courbe fermée de  $\partial F$  telle que la surface bornée par  $\Gamma_1$ , notée  $I(\Gamma_1)$ , soit telle que  $I(\Gamma_1) \cup \Gamma_1 \supseteq F$ . Et notons  $\Gamma_i$ ,  $i = 2, \dots, s$  les courbes fermées de  $\partial F$  telles  $(I(\Gamma_i))^c \supseteq F$ ,  $i = 2, \dots, s$ .

Soient  $y_{i,1}, \dots, y_{i,n_i}$  les  $n_i$  côtés de  $F$  appartenant à  $\Gamma_i$  numérotés de manière à ce que si l'on donne un sens de parcours de  $\Gamma_i$ , on rencontre les côtés  $y_{i,1}, \dots, y_{i,n_i}$  dans cet ordre, avec  $y_{i,1}$  choisi arbitrairement,  $i = 1, \dots, s$ .

Notons  $x_{i,j,j+1}$  le sommet de  $F$  commun aux côtés  $y_{i,j}$  et  $y_{i,j+1}$ ,  $i = 1, \dots, s$ ,  $j = 1, \dots, n_i$ , avec  $x_{i,n_i,n_i+1} = x_{i,n_i,1}$ .

Notons  $y_{i,1}^\perp, \dots, y_{i,n_i}^\perp$  les vecteurs unitaires normaux vers l'extérieur aux côtés  $y_{i,1}, \dots, y_{i,n_i}$ ,  $i = 1, \dots, s$  respectivement.

### 2. Construction de $F \oplus T$ .

Considérons tout d'abord les côtés  $y_{i,j}$ ,  $j = 1, \dots, n_i$  de  $F$  appartenant à  $\Gamma_i$ ,  $i = 1, \dots, s$ .

$\forall j = 1, \dots, n_i$ ,  $\exists c_{i,j}$  un point de  $T$  dont la projection sur  $y_{i,j}^\perp$  est maximale, i.e.

$$\langle c_{i,j}, y_{i,j}^\perp \rangle = \max_{c \in T} \langle c, y_{i,j}^\perp \rangle.$$

Considérons tous les points  $c_{i,j}$ ,  $i = 1, \dots, s$  et  $j = 1, \dots, n_i$  (qui sont en fait des points qui appartiennent à la frontière de  $T$ ). Rebaptisons ces points  $t_l$ ,  $l = 1, \dots, n$  avec  $n = \sum_{i=1}^s n_i$ , de telle manière que  $t_1 = c_{1,1}$  et que lorsque l'on parcourt la frontière de  $T$  dans le même sens que la frontière de  $F$ , on rencontre les points  $t_l$ ,  $l = 1, \dots, n$  dans cet ordre.

Dans la suite, nous utilisons soit la formulation  $c_{i,j}$  quand nous voulons utiliser l'ordre de rencontre des côtés de  $F$  sur la courbe  $\Gamma_i$ , soit la formulation  $t_l$  quand nous voulons utiliser l'ordre de rencontre de ces points sur la frontière de  $T$ .

Grâce à ces notations, la frontière de  $T$  peut être partitionnée en

$$\partial T = \bigcup_{l=1}^n B_{l,l+1}$$

où  $B_{l,l+1}$  relie les points  $t_l$  et  $t_{l+1}$ , où  $t_{n+1} = t_1$ . Voir figure F.1.

Pour tout couple de côtés adjacents  $y_{i,j}$  et  $y_{i,j+1}$ ,  $j = 1, \dots, n_i$ , avec  $y_{i,n_i+1} = y_{i,1}$ , deux situations sont possibles :

- a)  $(y_{i,j} + c_{i,j})$  et  $(y_{i,j+1} + c_{i,j+1})$  ne se coupent pas,
- b)  $(y_{i,j} + c_{i,j})$  et  $(y_{i,j+1} + c_{i,j+1})$  se coupent en  $e_{i,j,j+1}$ .

Considérons le côté  $y_{i,j}$ . Les situations suivantes peuvent se présenter :

- A.  $y_{i,j-1} + c_{i,j-1}$  et  $y_{i,j} + c_{i,j}$  ne se coupent pas et  $y_{i,j} + c_{i,j}$  et  $y_{i,j+1} + c_{i,j+1}$  ne se coupent pas non plus.  
 $y_{i,j} + c_{i,j}$ , qui sera noté  $u_{i,j}$ , appartient alors à  $\partial(F \oplus T)$ .  
 Voir figure F.2.

- B.  $y_{i,j-1} + c_{i,j-1}$  et  $y_{i,j} + c_{i,j}$  ne se coupent pas et  $y_{i,j} + c_{i,j}$  et  $y_{i,j+1} + c_{i,j+1}$  se coupent en  $e_{i,j,j+1}$ .  
 (respectivement  $y_{i,j-1} + c_{i,j-1}$  et  $y_{i,j} + c_{i,j}$  se coupent en  $e_{i,j-1,j}$  et  $y_{i,j} + c_{i,j}$  et  $y_{i,j+1} + c_{i,j+1}$  ne se coupent pas.)

Le segment d'extrémités  $x_{i,j-1,j} + c_{i,j}$  et  $e_{i,j,j+1}$  (respectivement  $e_{i,j-1,j}$  et  $x_{i,j,j+1} + c_{i,j+1}$ ), qui sera noté  $u_{i,j}$ , appartient alors à  $\partial(F \oplus T)$ . Voir figure F.3.

- C.  $y_{i,j-1} + c_{i,j-1}$  et  $y_{i,j} + c_{i,j}$  se coupent en  $e_{i,j-1,j}$  et  $y_{i,j} + c_{i,j}$  et  $y_{i,j+1} + c_{i,j+1}$  se coupent en  $e_{i,j,j+1}$ .  
 Le segment d'extrémités  $e_{i,j-1,j}$  et  $e_{i,j,j+1}$ , qui sera noté  $u_{i,j}$ , appartient alors à  $\partial(F \oplus T)$ . Voir figure F.4.

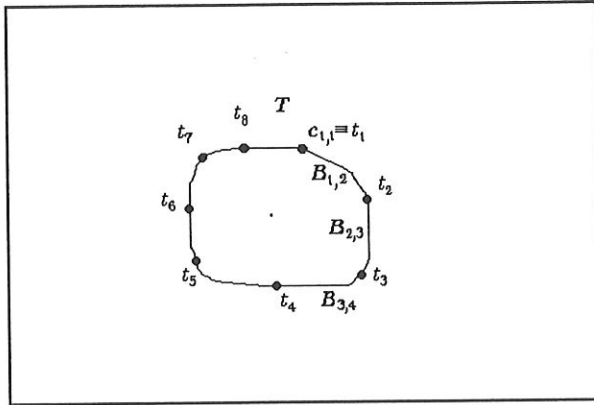


Figure F.1

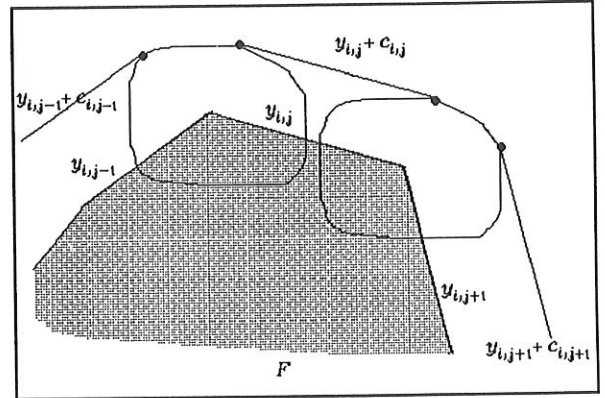


Figure F.2

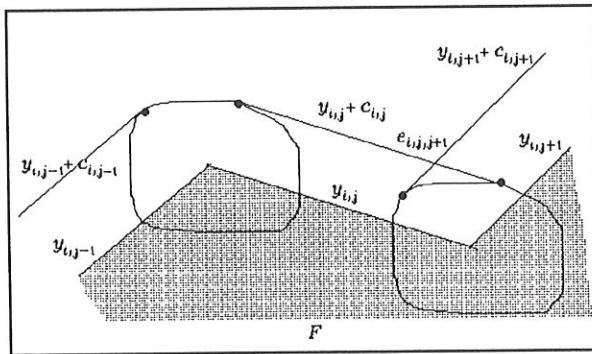


Figure F.3

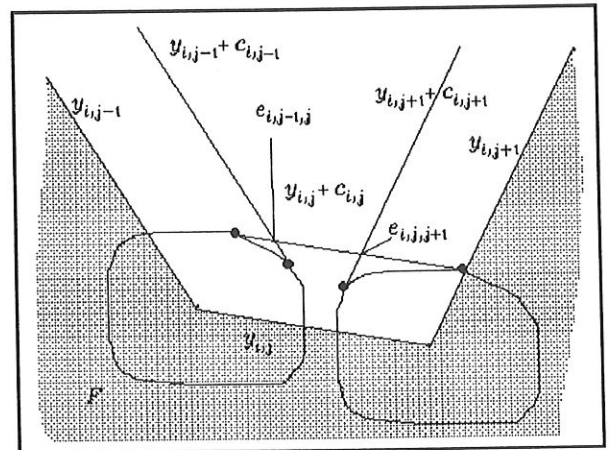


Figure F.4

Les segments  $u_{i,j}$  se présentent dans le même ordre que les côtés de  $F$  sur  $\Gamma_i$ .

Dans le cas où  $y_{i,j} + c_{i,j}$  et  $y_{i,j+1} + c_{i,j+1}$  ne se coupent pas, vu que la frontière de  $F \oplus T$  est une union de courbes fermées, ces segments sont reliés par une courbe qui n'est en fait que

$$C_{i,j,j+1} = \bigcup_{l=l_{i,j}}^{l_{i,j+1}-1} B_{l,l+1}$$

où  $l_{i,j}$  et  $l_{i,j+1}$  sont tels que lors de la renumérotation,  $c_{i,j}$  devient  $t_{l_{i,j}}$  et  $c_{i,j+1}$  devient  $t_{l_{i,j+1}}$ . Voir figure F.5.

### 3. Modification de $T$ .

Notons  $E^+(c_{i,j})$  le demi-plan caractérisé par la droite passant par  $c_{i,j}$  et de vecteur normal  $y_{i,j}^\perp$  et tel que  $E^+(c_{i,j})$  comprenne  $T$ ,  $i = 1, \dots, s$  et  $j = 1, \dots, n_i$ .

Appelons  $U$  le polygône convexe obtenu en prenant l'intersection de tous les demi-plans  $E^+(c_{i,j})$ ,  $i = 1, \dots, s$  et  $j = 1, \dots, n_i$ , i.e.

$$U = \bigcap_{i=1}^s \bigcap_{j=1}^{n_i} E^+(c_{i,j}).$$

Voir figure F.6.

Comme  $\mathcal{U}(T)$  n'est pas un sous-ensemble de  $\mathcal{U}(F)$  (par hypothèse), il existe au moins deux côtés adjacents de  $U$  qui n'appartiennent pas à la frontière de  $T$ . Supposons qu'ils correspondent aux demi-plans  $E^+(t_{l_0})$  et  $E^+(t_{l_0+1})$ .

Considérons alors la surface  $U \setminus T$  et ne retenons que la partie connexe ayant parmi l'ensemble de ses sommets  $t_{l_0}$  et  $t_{l_0+1}$ .

Notons  $T'$  le compact obtenu en prenant l'union de  $T$  et de la partie connexe retenue.

La différence entre  $T'$  et  $T$  réside dans le fait que la partie de la frontière de  $T$ ,  $B_{l_0, l_0+1}$  a été remplacée par  $B'_{l_0, l_0+1}$  qui est une union de deux segments ayant chacun leur vecteur unitaire normal vers l'extérieur appartenant à  $\mathcal{U}(F)$ . Voir figure F.7.

La construction de  $F \oplus T'$  se fait de la même manière que celle de  $F \oplus T$ . De par la construction de  $T'$ , tout  $c'_{i,j}$ , point de  $T'$  dont la projection sur  $y_{i,j}^\perp$  est maximale n'est rien d'autre que  $c_{i,j}$ .

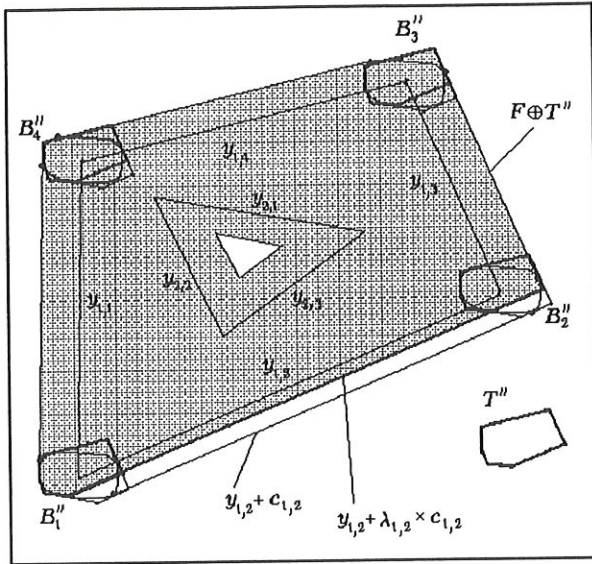


Figure F.5

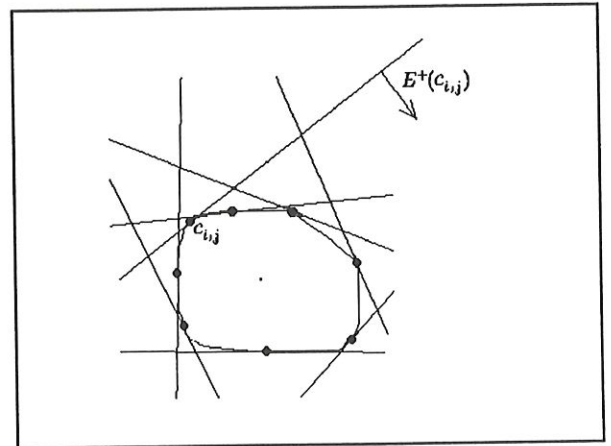


Figure F.6

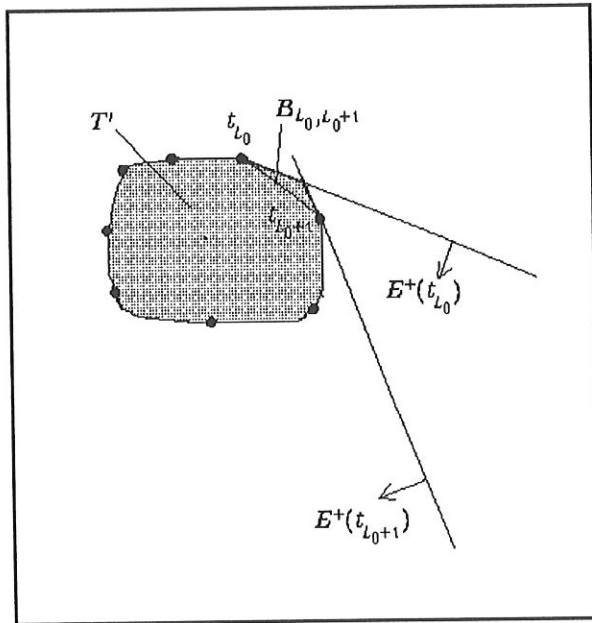


Figure F.7

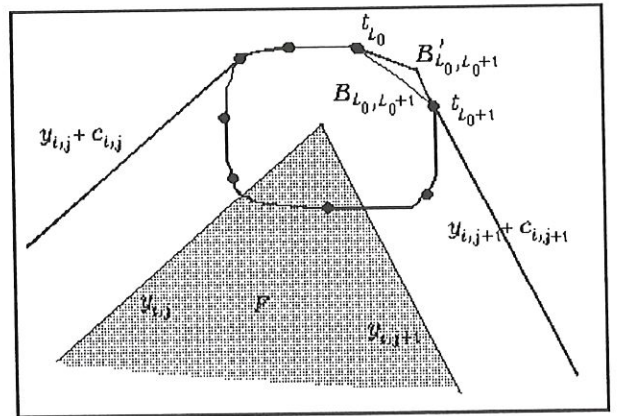


Figure F.8

Donc, la seule différence existant entre  $F \oplus T$  et  $F \oplus T'$ , est la suivante :

toute courbe  $C_{i,j,j+1} = \bigcup_{l=l_{i,j}}^{l_{i,j+1}-1} B_{l,l+1}$  qui comprenait  $B_{l_0,l_0+1}$  dans  $F \oplus T$  est remplacée par

$$C'_{i,j,j+1} = \bigcup_{l=l_{i,j}, l \neq l_0}^{l_{i,j+1}-1} B_{l,l+1} \cup B'_{l_0,l_0+1}$$

dans  $F \oplus T'$ . Voir figure F.8.

#### 4. Modifications de $T'$ .

Considérons  $E^+(\lambda_{l_0} * t_{l_0})$  et  $E^+(\lambda_{l_0+1} * t_{l_0+1})$  avec  $0 < \lambda_{l_0} < 1$  et  $0 < \lambda_{l_0+1} < 1$  et  $T'(\lambda_{l_0}, \lambda_{l_0+1}) = T' \cap E^+(\lambda_{l_0} * t_{l_0}) \cap E^+(\lambda_{l_0+1} * t_{l_0+1})$ . On note pour la facilité  $T''(\lambda_{l_0}, \lambda_{l_0+1}) = T''$  et tout ce qui se rapporte à  $T''$  sera muni d'une double apostrophe ("). Voir figure F.9.

Construisons  $F \oplus T''$  de la même manière que  $F \oplus T$  et  $F \oplus T'$ . On a  $c''_{i,j} \leq c'_{i,j} = c_{i,j}$ ,  $i = 1, \dots, s$  et  $j = 1, \dots, n_i$  (on a une inégalité car un point  $c'_{i,j}$  de  $T'$  peut ne plus appartenir à  $T''$  et donc  $c''_{i,j}$  est plus petit que  $c'_{i,j}$ ).

En particulier si on suppose que  $t_{l_0}$  et  $t_{l_0+1}$  correspondent à  $c_{i_{l_0}, j_{l_0}}$  et  $c_{i_{l_0+1}, j_{l_0+1}}$  respectivement, pour l'autre formulation,  $c''_{i_{l_0}, j_{l_0}} = \lambda_{l_0} * c'_{i_{l_0}, j_{l_0}} = \lambda_{l_0} * c_{i_{l_0}, j_{l_0}}$  et  $c''_{i_{l_0+1}, j_{l_0+1}} = \lambda_{l_0+1} * c'_{i_{l_0+1}, j_{l_0+1}} = \lambda_{l_0+1} * c_{i_{l_0+1}, j_{l_0+1}}$ .

Observons la différence entre  $F \oplus T''$  et  $F \oplus T'$ .

Considérons toutes les courbes  $C'_{i,j,j+1}$  de la frontière de  $F \oplus T'$  telles que  $C'_{i,j,j+1} = \bigcup_{l=l_1}^{l_2-1} B'_{l,l+1}$  comprennent  $B'_{l_0,l_0+1}$ .

Trois situations peuvent se produire :

(a)  $j \notin \{j_{l_0}, j_{l_0+1}\}$  et  $j+1 \notin \{j_{l_0}, j_{l_0+1}\}$ .

Dans ce cas, la surface comprise entre  $C'_{i,j,j+1}$  et  $C''_{i,j,j+1}$  est la même que la surface appartenant à  $T'$  et pas à  $T''$ , i.e.  $T' \setminus T''$ . Voir figure F.10.

(b)  $j \notin \{j_{l_0}, j_{l_0+1}\}$  et  $j+1 \in \{j_{l_0}, j_{l_0+1}\}$ ,

(respectivement  $j \in \{j_{l_0}, j_{l_0+1}\}$  et  $j+1 \notin \{j_{l_0}, j_{l_0+1}\}$ ).

Supposons sans perdre de généralité que  $j+1 \in j_{l_0+1}$ , (respectivement  $j \in j_{l_0}$ ).

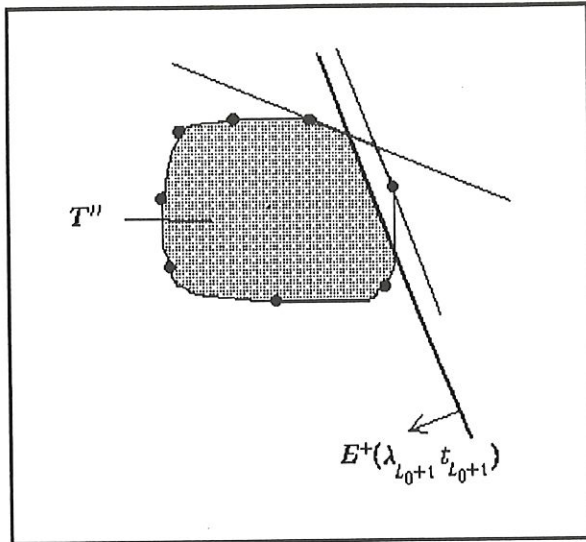


Figure F.9

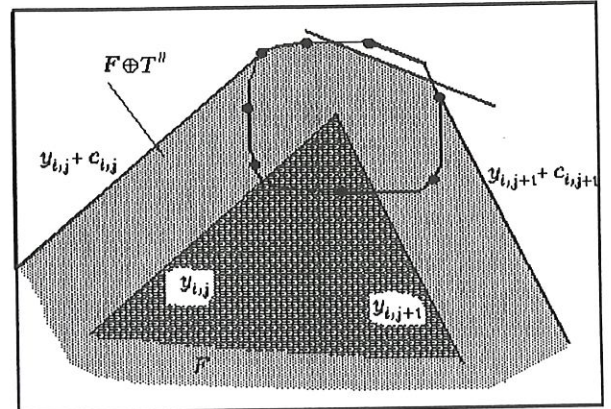


Figure F.10

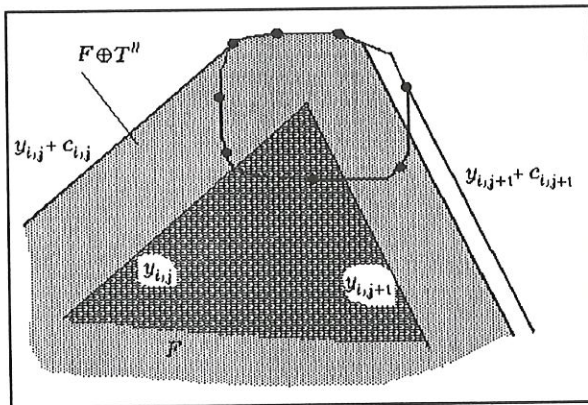


Figure F.11

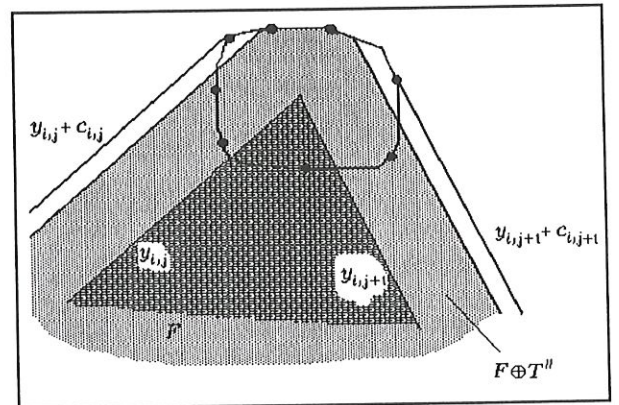


Figure F.12

Dans ce cas, la différence entre  $F \oplus T'$  et  $F \oplus T''$  est l'union de la surface  $T' \setminus T''$  translatée en  $x_{i,j,j+1}$  et du trapèze de bases  $u'_{i,j+1}$  et  $u''_{i,j+1}$  et de hauteur  $(1 - \lambda_{l_0+1}) * c'_{i,l_0+1}$ , (respectivement de bases  $u'_{i,j}$  et  $u''_{i,j}$  et de hauteur  $(1 - \lambda_{l_0}) * c'_{i,l_0}$ ). Voir figure F.11.

- (c)  $j \in \{j_{l_0}, j_{l_0+1}\}$  et  $j+1 \in \{j_{l_0}, j_{l_0+1}\}$ . Supposons sans perdre de généralité que  $j+1 \in j_{l_0+1}$  et  $j \in j_{l_0}$ .

Dans ce cas, la différence entre  $F \oplus T'$  et  $F \oplus T''$  est l'union de

- la surface  $T' \setminus T''$  translatée en  $x_{i,j,j+1}$ ,
- du trapèze de bases  $u'_{i,j+1}$  et  $u''_{i,j+1}$  et de hauteur  $(1 - \lambda_{l_0+1}) * c'_{i,l_0+1}$  et
- du trapèze  $u'_{i,j}$  et  $u''_{i,j}$  et de hauteur  $(1 - \lambda_{l_0}) * c'_{i,l_0}$ .

Voir figure F.12.

5. Il est donc possible de trouver  $\lambda_{l_0}$  et  $\lambda_{l_0+1}$  tels que  $m(F \oplus T'') = a$ . De par les deux points précédents,  $m(T'') > m(T)$ .

Notons alors  $T''$  par  $T$  et si  $\mathcal{U}(T)$  n'est pas un sous-ensemble de  $\mathcal{U}(F)$  retournons au début de l'étape 3 pour encore améliorer l'espace des translations.

Dans la recherche de l'argument qui maximise  $\max_{T \uparrow m(F \oplus T) = a} m(T)$ , on peut se contenter de ne considérer que les  $T$  tels que l'ensemble des vecteurs unitaires normaux vers l'extérieur de ses côtés soit inclus dans l'ensemble des vecteurs unitaires normaux vers l'extérieur des côtés de  $F$ . On notera  $\mathcal{T}_a$  l'ensemble des  $T$  vérifiant cette propriété et ayant une mesure  $a$ .

## Annexe G

### Cinquième tentative

Nous avons alors pensé généraliser le résultat du cas convexe en estimant la forme unitaire de  $K$  de la manière suivante.

- i. Translater tous les côtés de  $F$  vers l'extérieur.
- ii. Prolonger ces côtés pour obtenir une frontière continue.

Les formes obtenues ne peuvent pas être des estimateurs de maximum de vraisemblance car certaines "pointes" de ces formes ne pourront jamais être atteintes par aucun translaté de  $F$  à l'intérieur de la forme. On se rend compte qu'il faut "couper" ces "pointes". Voir figures G.1 et G2.

Cela nous amène finalement à la solution donnée dans ce mémoire.

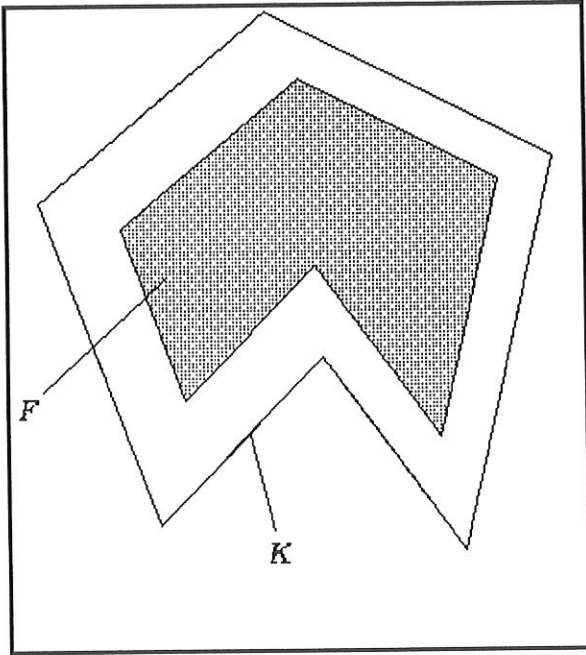


Figure G.1

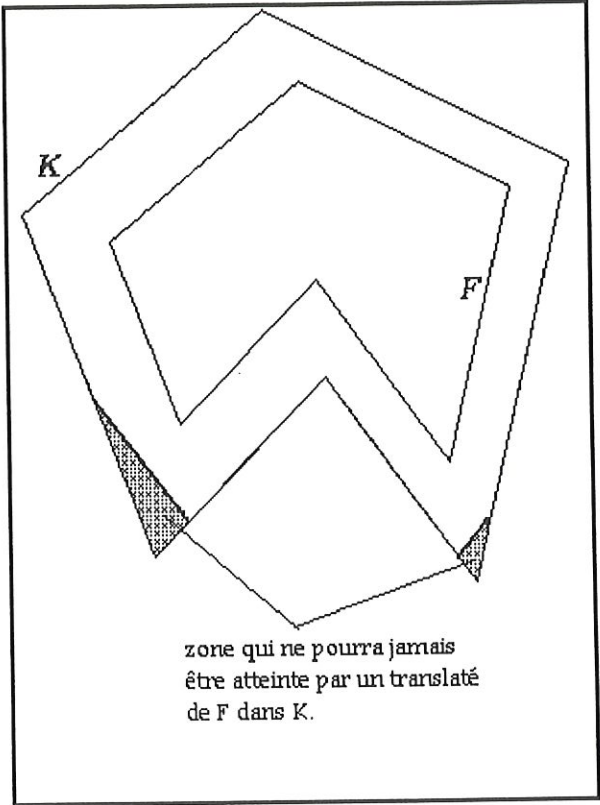


Figure G.2

# Bibliographie

- [1] H. Edelsbrunner, D. G. Kirkpatrick, R. Seidel, *On the shape of a set of points in the plane*, IEEE Transactions on Information Theory, vol. it-29, no. 4, July 1983, pp. 551–559.
- [2] R. A. Jarvis, *Computing the shape hull of points in the plane*, Proc. of the IEEE Comp. Soc. Conf. on Pattern Recognition and Image Processing, 1977, pp. 231–241.
- [3] N. Jeanne, *Trois approches de classification automatique non supervisées basées sur un processus de Poisson non homogène dans le plan*, Mémoire, Promoteur J.-P. Rasson, Année académique 1995–1996.
- [4] T. Kubushishi, *On some applications of the point process theory in cluster analysis and pattern recognition*, Dissertation doctorale, Facultés Universitaires Notre-Dame de la Paix de Namur, Belgique.
- [5] J.-P. Rasson, *Convexity methods in classification*, Data Science, Classification and Related Methods, 1998, pp. 99–106.
- [6] J.-P. Rasson, *Estimation de formes convexes du plan*, Statistiques et Analyse des Données no. 1, 1979, pp. 31–46.
- [7] J.-P. Rasson, V. Granville, *Geometrical tools in classification*, Computational Statistics & Data Analysis no. 23, 1996, pp. 105–123.
- [8] J.-P. Rasson, D. Jacquemin, V. Bertholet, *A new geometrical hypothesis for partitioning and discriminant analysis*, soumis à Journal of Classification.
- [9] J.-P. Rasson, M. Rémon and T. Kubushishi, *Finding the edge of a Poisson forest with inside and outside observations*, Publications du Département de Mathématique Facultés Universitaires Notre-Dame de la Paix de Namur, Report 93/14, June 3, 1993, pp. 1–19.
- [10] Sheldon M. Ross, *Initiation aux probabilités*, Lausanne, Presse polytechnique romandes, 1987.
- [11] M. Schmitt, J. Mattioli, *Morphologie mathématique*, Paris, Logique mathématique informatique Masson, 1994.

# Conclusion

L'objectif du mémoire est de généraliser le problème proposé par le Professeur D. G. Kendall et résolu par le Professeur J.-P. Rassin [6] : l'estimation de formes CONVEXES du plan.

Après quelques tentatives infructueuses, nous avons dû imposer les hypothèses suivantes sur les formes à estimer. Nous proposons d'estimer les formes PLANES, COMPACTES, CONNEXES ET IDENTIQUES À LEUR FERMETURE MORPHOLOGIQUE PAR UN DISQUE de rayon inconnu.

Le problème à résoudre est donc le suivant :

*Supposons qu'une réalisation d'un processus de Poisson dans le plan ait été mutilée de telle façon que nous ne puissions observer que les points intérieurs à un domaine  $K$  compact, connexe et IFMD de rayon  $r$  inconnu.*

*Trouver  $K$  en utilisant des méthodes d'inférence statistique.*

Si on note  $F$  l'union des faces intérieures de  $\alpha_S^*(\alpha_E^*(x))$  où  $x$  est une réalisation d'un processus de Poisson homogène dans le domaine à estimer, le mémoire propose une estimation du domaine  $K$  en utilisant la théorie de l'équivariance et en résolvant un problème d'optimisation. Voir figure A.

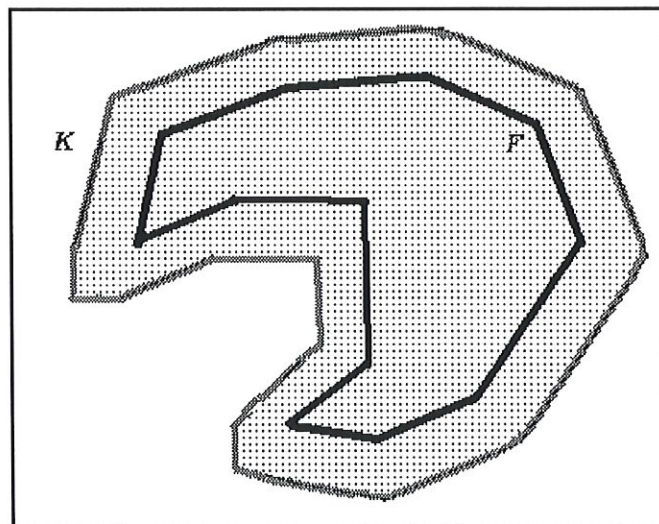


Figure A.

Des éventuelles pistes de recherches futures sont l'implémentation du problème d'optimisation et l'élimination d'une des hypothèses imposées sur les formes à estimer afin de généraliser encore le problème.