La dérivée en économie

Henry, Valérie

Published in:
Losanges

Publication date:
2018

Document Version
le PDF de l'éditeur

Losanges

N°40 Mars 2018

Réflexions

Des variations discrètes aux variations infiniment petites : le point de vue des économistes

Valérie Henry

Mots clés : Variation, discret, continu, économie, dérivée, marginal.

Résumé. *En économie, les variations de quantités sont généralement unitaires et on ne dispose pas toujours d'une expression analytique pour les différentes fonctions considérées. Néanmoins, des notions mathématiques telles que la dérivée ou la pente de la tangente à une courbe sont régulièrement utilisées pour traduire des phénomènes économiques liés à des variations de quantités. Dans cet article, nous commencerons par nous attacher à un exemple particulier qui nous permettra de mettre en évidence la problématique considérée puis nous explorerons quelques ouvrages d'économie et tenterons une analyse de leur contenu. Enfin, nous relaterons une expérience menée auprès d'étudiants en économie et en gestion dans le but d'identifier certaines conceptions des apprenants au sujet des notions envisagées.*

1. Introduction

Pour entamer la réflexion, nous nous proposons de nous intéresser à un exercice de microéconomie, issu de Jurion - Leclercq [10] et s'adressant à des étudiants de 1ère année en économie et en gestion. Cet exercice fait intervenir un certain nombre de notions d'économie intimement liées à des outils mathématiques, nous les expliciterons dans la section qui suit. Ensuite, nous proposerons une première analyse de cet exercice afin d'identifier les raisons qui nous ont poussé à examiner plus profondément les perceptions du discret et du continu en mathématiques et en économie.

1.1. Un exercice

Le tableau ci-dessous exprime le niveau d'utilité totale d'un consommateur en fonction de la quantité qu'il consomme de deux biens donnés A et B.

(...)

4. *Notre consommateur dispose de 1 unité de A et de 8 unités de B. Calculez son taux marginal de substitution du bien B par le bien A. Que devient ce taux marginal de substitution s'il dispose initialement de 4 unités de A et de 2 unités de B ? (...)*
5. *Le revenu du consommateur est de 24. Les prix des biens A et B sont respectivement de 4 et de 2. Tracez, sur votre graphique, sa contrainte budgétaire et mesurez-en la pente.*
6. *Dites la quantité de chaque bien qui sera consommée par ledit consommateur si ces biens ne peuvent être consommés que par unités indivisibles.*
7. *Vérifiez ce résultat graphiquement. Dites ce que vaut le taux marginal de substitution du bien B par le bien A en la position d'équilibre du consommateur.*

$A \backslash B$	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1	10	25	38	48	56	62	67	71	74	76
2	25	43	58	71	82	91	98	103	106	108
3	38	58	74	88	98	106	113	118	121	123
4	48	71	88	103	113	120	126	131	135	137
5	56	82	100	115	126	133	138	143	147	148
6	62	91	108	124	138	145	150	155	157	158
7	67	98	115	130	144	154	160	164	166	167
8	71	103	121	135	148	160	166	170	173	175
9	74	106	124	138	151	162	170	175	178	180
10	76	108	126	140	153	163	172	178	182	184

1.2. Quelques notions de micro-économie

Commençons par expliciter quelque peu (de manière très succinte et donc forcément réductrice) les notions de micro-économie convoquées dans cet énoncé.

L'utilité

Le concept de base dans ce contexte est celui d'*utilité*. Les économistes quantitatifs postulent qu'il est possible de mesurer la satisfaction que procure à un consommateur donné la possession d'un panier de biens. Pour un ensemble de n biens $X_1, X_2, \ldots, X_n$, cette satisfaction est quantifiée au moyen d'une fonction d'utilité $u : (x_1, x_2, \ldots, x_n) \mapsto u(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ où x_i est la quantité du bien X_i dont dispose le consommateur. Le n-uple $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ est appelé *panier de biens*. Cette fonction u peut parfois être fournie par une expression analytique mais est souvent à valeurs discrètes, comme dans le tableau ci-dessus, qui s'intéresse au cas particulier (très répandu dans l'enseignement) de deux biens.

On admet que cette fonction est croissante sur chacune de ses variables puisque la satisfaction d'un consommateur « raisonnable » augmente lorsque la quantité de biens dont il dispose augmente. L'étude de variation de l'utilité devient intéressante lorsque les quantités des biens varient en sens différents.

Taux marginal de substitution

Ainsi, dans le cas de deux biens X_1 et X_2, le *taux marginal de substitution* exprime la quantité de X_2 à laquelle le consommateur est prêt à renoncer lorsque la quantité de X_1 augmente, et ce tout en conservant le même niveau de satisfaction.

Courbes d'indifférence

Dans le même ordre d'idées, la recherche de l'ensemble des paniers de biens fournissant le même niveau d'utilité conduit à la notion de *courbe d'indifférence* :

$$\mathscr{C}_0 = \{(x_1, x_2, \ldots, x_n) : u(x_1, x_2, \ldots, x_n) = u_0\}$$

Vous l'aurez reconnu : la courbe d'indifférence de l'économiste n'est autre que la courbe de niveau d'une fonction particulière pour le mathématicien.

Dans le cas particulier de deux biens, la fonction d'utilité est une fonction de deux variables et ses courbes d'indifférence peuvent être représentées dans le plan cartésien, pour former la *carte d'indifférence* de la fonction d'utilité.

Quelques éléments de théorie des fonctions à plusieurs variables associées aux hypothèses sur la fonction d'utilité permettent de montrer que les courbes d'indifférence sont décroissantes et tournent leur concavité vers le haut, ce qui donne une allure générale telle que celle de la figure 1 à la carte d'indifférence.

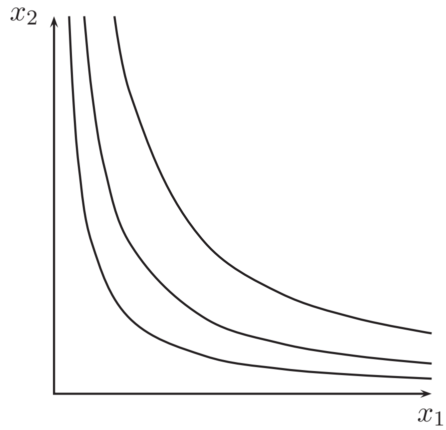


Fig. 1 : Carte d'indifférence

Contrainte budgétaire et maximisation de l'utilité

Cette notion d'utilité n'est intéressante pour déterminer le comportement d'un consommateur que parce qu'elle est intrinsèquement liée au budget dont dispose le consommateur pour acquérir les quantités de biens visés. Ainsi, connaissant les prix unitaires p_i de chacun des biens, le comportement du consommateur sera régi par la solution d'un problème d'optimisation sous contrainte :

$$\max u \text{ s.c. } \sum_{i=1}^{n} p_i x_i = B$$

où B est le budget disponible. Graphiquement, la solution du problème est donnée par le point d'intersection entre la droite représentant la contrainte budgétaire et la courbe d'indifférence à laquelle cette droite est tangente puisqu'on se trouve alors sur la courbe d'indifférence fournissant la plus grande utilité possible tout en respectant la contrainte.

Notons que l'égalité peut être remplacée, dans la contrainte, par une inégalité large, le consommateur n'étant pas forcé de consacrer tout le budget disponible à ces biens. Le problème est alors mathématiquement plus compliqué.

1.3. Analyse de l'exercice

Analysons maintenant l'exercice énoncé ci-dessus en lien avec la correction-type donnée par les auteurs (Jurion - Leclercq [10]).

Le taux marginal de substitution (TmS) est défini dans [10] comme suit :

> *Le taux marginal de substitution exprime la quantité du bien B à laquelle le consommateur est prêt à renoncer pour consommer une unité de A supplémentaire tout en gardant inchangé son niveau de satisfaction.*

La première partie du point 4 se résout, d'après les auteurs et conformément à la définition ci-dessus, en constatant dans le tableau que le niveau d'utilité relatif aux quantités données est de 71 et que, si le consommateur souhaite disposer d'une unité de A supplémentaire en gardant le même niveau de satisfaction, il ne pourra plus consommer que 4 unités de B. Le taux marginal de substitution vaut donc -4, le signe « $-$ » exprimant que si une quantité augmente, l'autre diminue, à satisfaction égale.

La deuxième partie de ce point 4 est déjà plus perturbante. En effet, si, conformément à la définition, on augmente la quantité de A de 4 à 5 unités, on ne trouve pas de panier de biens fournissant la même utilité. D'après la correction ([10]), c'est le panier (8,1) qu'il faut considérer, ce qui donne un TmS de $-\frac{1}{4}$.

Ce taux marginal de substitution est donc un rapport de variations de quantités lorsque la condition de maintien du niveau de satisfaction est imposée. Deux constatations s'imposent :

- dans la définition, ce rapport de quantités semblait univoquement défini par la condition d'augmentation d'**une** unité du bien A mais cette définition pose problème dans le cas d'une fonction à valeurs discrètes ;
- la correction suggère qu'on peut rechercher un autre panier de biens procurant une satisfaction égale mais comment choisit-on ce deuxième panier ? Pourquoi le panier $(8, 1)$ est-il plus adéquat que le panier $(2, 4)$ par exemple ?

Examinons la suite de l'exercice pour tenter d'éclaircir ces quelques points.

La contrainte budgétaire a pour équation $4x_A + 2x_B = 24$ (1) est représentée par une droite de coefficient angulaire -2. On recherche le panier de biens (x_A, x_B) fournissant une utilité maximum tout en respectant la contrainte. Pour déterminer ce panier, les auteurs dressent la liste de tous les paniers apparaissant dans le tableau et vérifiant la contrainte :

- $(1, 10)$ qui fournit une utilité de 76 ;
- $(2, 8)$ qui fournit une utilité de 103 ;
- $(3, 6)$ qui fournit une utilité de 106 ;
- $(4, 4)$ qui fournit une utilité de 103 ;
- $(5, 2)$ qui fournit une utilité de 82

et en déduisent que c'est en consommant 3 unités de A et 6 unités de B que l'utilité sera maximum. Le taux marginal de substitution en ce point est alors donné comme la pente de la contrainte budgétaire, soit -2 alors qu'en appliquant la définition citée plus haut et issue du manuel, nous aurions obtenu un TmS de $-\frac{2}{3}$ (2). Ainsi, au *point d'équilibre du consommateur*, le taux marginal de substitution est pris comme la pente de la droite budgétaire, qui est également la pente de la tangente à la courbe d'indifférence (uniquement en ce point).

Finalement, ce taux marginal de substitution peut être vu, mathématiquement, comme la pente d'une droite sécante à une courbe d'indifférence, sécante qui, à la limite, devient la pente de la tangente au point considéré.

2. Les liens entre discret et continu en économie

Nous nous sommes donc penchés sur différentes sources et avons analysé comment ces liens entre discret et continu y étaient traités. Nous nous sommes concentrés sur quelques notions de base en microéconomie, à savoir : le calcul à la marge, l'élasticité-prix de la demande, le taux marginal de substitution. Dix ouvrages d'économie, dont les références exactes sont reprises dans la bibliographie, ont été consultés. Nous donnons ci-dessous

1. On considère implicitement que le revenu est entièrement consacré à l'achat des deux biens en jeu dans l'énoncé.
2. Notons qu'il n'est pas garanti, en général, que le maximum d'utilité sous la contrainte de budget soit atteint en un panier où les quantités sont entières.

quelques exemples de la façon dont ces notions sont introduites dans les divers ouvrages consultés. Ensuite, nous tentons une analyse des informations apportées par ces quelques citations.

2.1. Consultation de la littérature

Généralités

- *Du fait du grand nombre de demandeurs, les écarts entre les prix sont petits et la courbe de demande a la forme continue traditionnelle* [16]

La fonction de production *est astreinte à être une fonction continue monotone, admettant des dérivées partielles continues du premier et du second ordre.* [6]

- *La pente d'une courbe représente la variation d'une variable qui se produit lorsqu'une autre variable change. Plus précisément, c'est la variation de la variable Y sur l'axe vertical pour une variation d'une unité de la variable X sur l'axe horizontal. (...) Pour trouver la pente d'une courbe régulière en un point donné, nous calculons la pente de la (...) tangente à la courbe.* [13]
- *Chaque couple de nombres (P, Q) du tableau est représenté par un point, puis une courbe lisse est tracée par ces points.* [13]
- *Dans un graphique, la modification d'une variable située sur l'axe vertical due à la modification d'une unité d'une variable située sur l'axe horizontal s'appelle la pente.* [15]

Calcul à la marge : utilité marginale et productivité marginale

- *L'utilité marginale désigne l'utilité supplémentaire tirée de la consommation d'une unité supplémentaire d'une marchandise.* [13]
- *La productivité marginale physique* [est le] *rapport* $\frac{\Delta P}{\Delta T}$*. Pour un volume d'emploi donné, elle est mesurée par la pente de la tangente à la courbe au point considéré.* ([3]) [14]
- *En économie, le coût marginal se définit comme la variation du coût total due à la production d'une unité supplémentaire. Comme le coût total* [est] *une fonction du volume de production Q, on peut exprimer mathématiquement le coût marginal comme la dérivée de la fonction précédente. (...) Bref, le concept marginal, correspondant à n'importe quelle fonction économique, peut être exprimé comme la dérivée de la fonction portant sur les grandeurs totales.* [4]
- *L'utilité marginale du bien 1 se définit (...) sous la forme d'un ratio*

$$Um_1 = \frac{\Delta U}{\Delta x_1} = \frac{u(x_1 + \Delta x_1, x_2) - u(x_1, x_2)}{\Delta x_1}$$

  Elle mesure le taux de variation de l'utilité découlant d'une petite variation de la quantité du bien 1. [16]
- *La fonction d'utilité ordinale est $U = f(q_1, q_2)$. (...) les dérivées partielles f_1 et f_2 sont définies comme étant les utilités marginales des biens Q_1 et Q_2.* [note de bas de page :] *L'utilité marginale d'un bien est souvent définie en termes vagues comme étant l'augmentation d'utilité résultant de l'augmentation d'une unité de consommation.* [6]
- *Le coût marginal est donné par la pente de la tangente en un point de la courbe de coût total.* [3]
- *On appelle recette marginale (R_m), le supplément de recette totale résultant de la vente d'une unité supplémentaire de produit. (...) Lorsque la recette totale peut être exprimée par une fonction continue et différentiable, on obtient la recette marginale en prenant la dérivée de la recette totale par rapport à la quantité, soit :*$R_m = \frac{dR}{dx}$. [11]
- *La productivité marginale physique du travail est donc égale au rapport* $\frac{Dq}{DL}$*. Il s'agit de la modification de la production de la firme correspondant à un accroissement marginal unitaire de la quantité de travail qu'elle utilise.* [9]
- *La productivité marginale (Pm) de X_1 est le taux de variation de sa productivité totale par rapport aux variations de sa quantité, c'est-à-dire la dérivée partielle de* [la fonction de production] *par rapport à x_1.* [6]
- *Comme toujours en économie, le terme « marginal » implique simplement une dérivée.* [16]
- *L'utilité marginale étant l'utilité apportée par une unité supplémentaire de consommation, on la calcule au moyen de la pente de la courbe d'utilité.* [15]

Elasticité-prix de la demande

- *En économie, l'élasticité par rapport au prix ε mesure la variation en pourcentage de la quantité qui résulte d'une variation en pourcentage du prix. Mathématiquement, $\varepsilon = \frac{dQ/Q}{dP/P}$ (...) ou $\varepsilon = \frac{dQ}{dP}\frac{P}{Q}$* [4]
- *L'élasticité de la demande proprement dite pour un bien Q_1, soit ε_{11}, est définie par le rapport de la variation relative de q_1 à la variation relative de p_1*

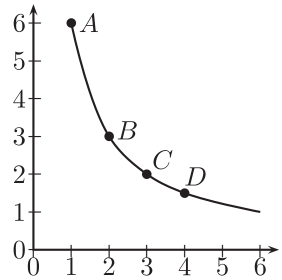
$$\varepsilon_{11} = \frac{\partial(\log q_1)}{\partial(\log p_1)} = \frac{p_1}{q_1}\frac{\partial q_1}{\partial p_1} \quad [6]$$

3. P représente la production et T la quantité de travail.

- *L'élasticité de la demande par rapport au prix (...) mesure de combien varie la quantité demandée d'un bien quand son prix change. L'élasticité par rapport au prix se définit plus précisément par le rapport entre la variation en pourcentage de la quantité demandée et la variation en pourcentage du prix.* [13]
- *Le coefficient d'élasticité (...) est un rapport de pourcentage :*
$$\frac{\Delta Q/Q}{\Delta P/P} \quad [14]$$
- *L'élasticité-prix de la demande se définit comme la variation en pourcentage de la quantité demandée divisée par la variation en pourcentage du prix. En termes mathématiques :*
élasticité de la demande =
$$\frac{\textit{variation en pourcentage de la quantité demandée}}{\textit{variation en pourcentage du prix}}$$
(...) On peut maintenant réécrire l'élasticité de la demande comme suit :
$$\begin{aligned}\text{élasticité} = \frac{\Delta Q/q}{\Delta p/p} &= \frac{\Delta Q}{\Delta p} \times \frac{p}{Q} \\ &\vdots \\ &= \frac{1}{\text{pente}} \times \frac{p}{Q} \quad [15]\end{aligned}$$

Taux marginal de substitution

- *La pente de la droite de budget a une interprétation économique intéressante. Elle mesure le taux auquel le marché est prêt à substituer le bien 1 au bien 2. (...) la pente de la courbe d'indifférence est connue sous le nom de « taux marginal de substitution » (TmS). Ce nom provient du fait que le taux marginal de substitution mesure le taux auquel le consommateur est disposé à substituer un bien à l'autre. (...) Le rapport $\frac{\Delta x_2}{\Delta x_1}$ mesure le taux auquel le consommateur accepte de substituer le bien 2 au bien 1. Supposons maintenant que Δx_1 soit une très petite variation, une variation marginale. (...) A mesure que Δx_1 se réduit, $\frac{\Delta x_2}{\Delta x_1}$ tend vers la pente de la courbe d'indifférence.* [16]
- *La pente de la courbe d'indifférence dq_2/dq_1 est le taux pour lequel un consommateur voudra substituer Q_1 à Q_2 ou Q_2 à Q_1 tout en restant à un même niveau donné de satisfaction. L'opposé de la pente $-dq_2/dq_1$ est le taux de substitution entre biens (...) et il est égal au rapport des dérivées partielles de la fonction d'utilité.* [6]
- *Si nous joignons les points A et B sur la figure* [ci-dessous], *nous trouvons que la pente de la droite qui en résulte (en négligeant le signe négatif) a une valeur de 3. Si nous joignons les points B et C, la pente est égale à 1 (...) Ces nombres (...) sont des coefficients de substitution appelés taux marginaux de substitution entre les deux biens. Quand le déplacement le long de la courbe devient très petit, le taux de substitution se rapproche de la pente réelle de la courbe d'indifférence.* [13]



- *L'équilibre du consommateur est atteint au point où la droite de budget est tangente à la courbe d'indifférence la plus élevée. En ce point, le coefficient de substitution du consommateur est exactement égal à la pente de la droite de budget.* [13]
- *Le terme technique utilisé pour désigner la pente d'une courbe d'indifférence est le taux marginal de substitution. Ce dernier indique quelle quantité d'un bien un consommateur est disposé à sacrifier en échange d'une unité supplémentaire d'un autre bien.* [15]

2.2. Analyse de la littérature

La lecture des quelques exemples de la section précédente nous semble intéressante à plus d'un titre. D'une part, elle révèle différentes conceptions assez distinctes suivant les auteurs. D'autre part, ces exemples laissent apparaître un certain flou dans la définition des différentes notions car les justifications rigoureuses permettant le passage d'une variation unitaire à son homologue continu font défaut. Cette assertion est bien illustrée par Dupont et Rys [5] :

> *Le mathématicien déplore le manque de rigueur d'une telle définition, mais l'économiste passe outre. Homme pratique, il avoue sans complexe confondre « très petite variation » et « variation égale à l'unité », cette dernière étant choisie la plus faible possible.*

Les deux aspects évoqués ci-dessus sont évidement très liés et il fait peu de doute que le deuxième a eu un impact sur le premier même si les réactions induites ont été différentes. Ainsi, certains auteurs comme Samuelson [13] ont-ils pris le parti de ne considérer que des variations discrètes, le plus souvent unitaires, des variables. D'autres ouvrages, à l'instar de Henderson et Quandt [6] se placent directement dans un cadre où toutes les fonctions envisagées sont continues et suffisamment différentiables pour ne considérer que des variations continues. Dans de nombreuses références (Dowling [4], Lecaillon [11], Stiglitz [15]), les deux aspects précédents cohabitent et il semble trivial de transformer une variation due à une unité supplémentaire en une dérivée ou en la pente de la tangente correspondante. Enfin, le recours à une variation devenue très petite apparaît chez certains auteurs comme Varian [16]. Ces conceptions différentes trouvent une justification épistémologique dans l'évolution de la notion d'infiniment petit au cours des siècles. D'abord utilisée par les mathématiciens du XVII$^{\text{ème}}$ siècle pour découvrir les grands résultats du calcul différentiel puis rejetée par les contemporains de Cauchy et Weierstrass pour évoluer vers la notion de limite, elle a néanmoins été à la source de nombreux raisonnements économistes :intuitivement, une variation unitaire peut être considérée comme infiniment petite dès l'instant où la quantité globale est suffisamment importante. Les économistes contemporains se trouvent ainsi pris entre deux feux :le raisonnement intuitif qui se base sur des variations unitaires considérées comme infiniment petites eu égard à la quantité globale et le raisonnement mathématique qui n'accepte comme rigoureux que le passage à la limite, notion potentielle peu satisfaisante pour les raisonnements économistes mais rigoureuse du point de vue mathématique ([4]).

Suite à cette analyse, nous avons tenté d'identifier les conceptions induites par un enseignement d'économie relativement aux notions présentées ci-dessus. Nous nous sommes, dans cet article, intéressé au concept d'élasticité - prix de la demande et avons interrogé un public d'étudiants de 2$^{\text{ème}}$ année d'université en économie-gestion. Ceux-ci ont suivi, en première année, l'ouvrage de Jurion [9] et, en deuxième année, celui de Varian [16]. La section suivante détaille l'expérimentation qui a été menée.

3. Une expérimentation : l'élasticité - prix de la demande

Cette expérience a été effectuée lors du cours de mathématiques. Trente-neuf apprenants y étaient présents. Nous leur avons proposé deux exercices concernant l'élasticité. Après chaque exercice, les réponses ont été collectées, une discussion s'est engagée entre l'enseignant et les étudiants concernant les réponses proposées et une institutionnalisation a clôturé la discussion. Ci-après, nous détaillons l'ensemble du processus.

Exercice 1

Vous savez que la demande individuelle d'un consommateur pour un bien s'exprime, toutes choses restant égales, par la relation donnant, dans des unités adéquates, les quantités demandées, notées Q, en fonction des prix correspondants, notés P ([5]).

Lorsque le prix du bien vaut 6, calculez la valeur de l'élasticité - prix (c'est-à-dire l'élasticité de la demande pour un bien par rapport à son prix) d'un consommateur pour lequel la loi de demande est donnée par :

1. *le tableau suivant :*

prix P	*1*	*2*	*3*	*6*	*8*	*9*	*12*
quantités Q	*66*	*60*	*54*	*36*	*24*	*18*	*0*

2. *la formule suivante :* $Q = 72 - 6P$.

Il est à remarquer que les deux cas correspondent à la même demande, mais que les prix du tableau n'ont pas été donnés en progression arithmétique pour que cette dépendance affine ne soit pas trop facilement reconnue ; par ailleurs, la seconde formulation est reprise du livre d'exercices que les étudiants avaient suivi pour leur cours d'économie politique de la première année. De plus, il convient de signaler que cet énoncé correspond à un cas dit *d'élasticité unitaire*, ce qui représente une situation importante dans la théorie économique.

Presque tous les étudiants ont trouvé la bonne réponse dans les deux cas, à savoir -1 ; seuls 3 élèves ont fourni une ou des réponses inexactes probablement dues à des erreurs de calculs que l'on pourrait qualifier d'*erreurs de distraction* ou encore d'*erreurs qui n'arrivent que dans les écoles* (Rouche [12], 1988, p. 117). Il est toutefois apparu que les deux énoncés ont été traités différemment, sauf par deux personnes qui ont construit dans le premier

4. Pour plus de détails, voir Henry [7] [8].
5. Pour cette séquence, nous avons repris les notations auxquelles les étudiants ont été habitués en première année lors de leur cours d'économie, à savoir P et Q respectivement pour les prix et les quantités ; de même, nous avons utilisé le signe D et non Δ ou d.

cas la loi affine de demande et se sont ainsi ramenés au deuxième cas. Toutes les autres personnes interrogées ont, comme l'a écrit l'une d'entre elles, *obtenu des réponses identiques, mais avec un raisonnement différent*. En effet, dans le cas du tableau des données, les étudiants ont pris une variation du prix finie ; par contre, lorsque la loi de demande est explicitement connue analytiquement, ils ont utilisé la dérivée de la fonction de demande. Ce raisonnement est en fait conforme à celui réalisé dans leur livre d'exercices (Jurion - Leclercq [10]).

Ainsi, la définition vue au cours d'économie politique semble bien maîtrisée mais il est apparu, lors de l'institutionnalisation, que la formule du manuel, à savoir (Jurion [9], p. 47)

$$e = \frac{\frac{DQ}{Q}}{\frac{DP}{P}}$$

est appliquée différemment selon que les données sont discrètes ou traduites par une loi continue : dans le premier cas, le D signifie une différence finie de deux valeurs numériques fournies par le tableau, tandis que dans le second cas, il est mis pour le signe d de différentiation. En réalité, les étudiants exploitent assez aveuglément une règle fort pragmatique, qui donne de bons résultats dans tous les cas rencontrés jusqu'à présent.

Exercice 2

On donne la loi de demande suivante

$$Q(P) = 200P^2 - 2400P + 10000.$$

Calculez l'élasticité moyenne de la demande lorsque le prix P augmente de 4 à 5.

Au vu des réponses fournies pour le premier exercice, il n'est pas étonnant que cet énoncé ait perturbé les étudiants ; de fait, d'une part, on leur fournissait explicitement une fonction du second degré en les « invitant » ainsi à dériver cette dernière, mais, d'autre part, on leur imposait une variation finie du prix qui passe de 4 à 5 unités, ce qui correspond à un accroissement fini (et même unitaire) du prix.

Effectivement, les élèves ont visiblement hésité entre la méthode des différences finies et celle de dérivation : 27 ont opté pour le modèle discret, tandis que 10 autres ont choisi le modèle continu et que les deux derniers ont utilisé les deux méthodes. Notons encore que plusieurs étudiants commencent par calculer la dérivée, presque par réflexe, puis repassent au modèle discret, sans doute parce qu'ils ne parviennent pas à exprimer que P passe de 4 à 5 en utilisant la dérivée. De plus, une autre question pratique s'est posée : quel prix faut-il utiliser dans la formule ? Cette interrogation est d'autant plus pertinente que certaines réponses numériques pouvaient un peu perturber : le cas discret pour un prix de 5 conduit au cas fréquent d'une élasticité unitaire (en valeur absolue), tandis que les modèles discret avec un prix de 4 et continu avec un prix de 5 livrent la même valeur numérique (de $-2/3$). Toujours est-il que les élèves se sont fort divisés sur ce point : 15 ont choisi un prix de 4, 14 ont choisi un prix de 5, 8 n'ont pas su choisir et ont réalisé leurs calculs dans les deux cas, et enfin deux ont opté pour le prix moyen de 4.5. Plus précisément, les résultats enregistrés pour cet exercice sont rassemblés dans le tableau suivant :

Prix/Modèle	Modèle discret	Modèle continu	Discret + Continu
$P = 4$	12	3	0
$P = 5$	9	4	1
$P = 4, P = 5$	5	2	1
$P = 4.5$	1	1	0

Une mise au point théorique fut nécessaire à la suite de cet exercice pour montrer que, en dehors du cas d'une demande affine, l'élasticité-prix dépend non seulement de la loi f de demande et du prix P considéré, mais également de l'accroissement ΔP du prix : il s'agit donc d'une élasticité de Q sur l'intervalle $[P, P + DP]$.

4. Conclusion et perspectives

Cette modeste expérience semble confirmer notre analyse a priori : les réponses des étudiants reflètent la difficulté pour les économistes de justifier le passage de variations discrètes à leur homologue continu. Cette difficulté induit une conception dichotomique des notions, conception qui ne résiste pas à une situation où les cadres discret et continu sont mêlés.

Cette expérimentation ne peut refléter à elle seule la situation globale. En particulier, il nous paraît indispensable de reproduire ce type d'intervention à propos des autres notions envisagées et auprès de publics différents, notamment en ce qui concerne les références suivies.

Pour en savoir plus

[1] Bkouche R. - Charlot B. - Rouche N. (1991), *Faire des mathématiques :le plaisir du sens*, Editions Armand Colin, Paris.

[2] De Bock D. (1998), « L'illusion de la linéarité. Première partie :circonstances et commentaires », *Mathématique et Pédagogie*, 120, pp. 39-50.

[3] Dollo C. - Luiset B. (1998), *Des concepts économiques aux outils mathématiques*, Hachette Education, Paris.

[4] Dowling E.T. (1990), *Mathématiques pour l'économiste*, Mc Graw-Hill, New York et Mc Graw-Hill, Paris.

[5] Dupont B. - Rys A. (1993), *Introduction à la microéconomie*, Editions Armand Colin, Paris.

[6] Henderson J.M. - Quandt R.E. (1982), *Microéconomie*, Mc Graw-Hill, New York et Dunod, Paris.

[7] Henry V. (2003), « La notion d'infiniment petit en économie :historique et implications didactiques », *Actes du Colloque EMF 2003*, Tozeur.

[8] Henry V. (2004), *Questions de didactique posées par un enseignement de l'analyse non standard à de futurs économistes*, Thèse doctorale soutenue à l'Université Paul Sabatier de Toulouse.

[9] Jurion B. (1996), *Economie politique*, De Boeck Université, Bruxelles.

[10] Jurion B. - Leclercq A. (1997), *Exercices d'économie politique*, De Boeck Université, Bruxelles.

[11] Lecaillon J. (1980), *Cours de microéconomie*, Editions Cujas, Paris.

[12] Rouche N. (1988), Rôle de l'erreur dans l'apprentissage et l'enseignement de la mathématique, *Compte rendu de la 39e rencontre internationale de la CIEAEM*, Les Editions de l'Université de Sherbrooke, pp. 97-121.

[13] Samuelson P.A. - Nordhaus W.D. (1998), *Economie*, 16ème édition, Economica, Paris.

[14] Stassart J. (1993), *Introduction à l'économie politique*, Edité par la Faculté d'Economie, de Gestion et de Sciences Sociales de l'Université de Liège, Liège.

[15] Stiglitz J.E. (2000), *Principes d'économie moderne*, De Boeck Université, Bruxelles.

[16] Varian H.R. (1992), *Introduction à la microéconomie*, De Boeck Université, Bruxelles.

Valérie Henry est professeur à l'UNamur et à l'ULiège. ✉ valerie.henry@unamur.be