Institutional Repository - Research Portal
Dépôt Institutionnel - Portail de la Recherche
researchportal.unamur.be
University of Namur

THESIS / THÈSE

MASTER EN SCIENCES MATHÉMATIQUES

Résolution d'inéquations variationnelles à partir de deux schémas itératifs basés sur la régularisation progressive et sur l'approximation du coût.

Paquay, Noelle

Award date:
1998

Link to publication

General rights
Copyright and moral rights for the publications made accessible in the public portal are retained by the authors and/or other copyright owners and it is a condition of accessing publications that users recognise and abide by the legal requirements associated with these rights.

- Users may download and print one copy of any publication from the public portal for the purpose of private study or research.
- You may not further distribute the material or use it for any profit-making activity or commercial gain
- You may freely distribute the URL identifying the publication in the public portal ?

Take down policy
If you believe that this document breaches copyright please contact us providing details, and we will remove access to the work immediately and investigate your claim.

Download date: 04. May. 2026

Facultés Universitaires Notre-Dame de la Paix
Namur
Facultés des Sciences - Département de Mathématiques

Résolution d'Inéquations Variationnelles à partir de deux schémas itératifs basés sur la Régularisation Progressive et sur l'Approximation du Coût.

Mémoire présenté pour l'obtention du grade
de Licencié en Sciences
Mathématiques
par

Promoteur: V.H. NGUYEN

Noëlle PAQUAY

Année académique 1997-1998

Je remercie le professeur V.H. NGUYEN pour l'aide et les conseils qu'il m'a donnés pour l'élaboration de ce mémoire.

Je tiens également à remercier mes parents ainsi que tous mes proches de m'avoir soutenue, supportée et encouragée durant toutes ces années d'études.

Résumé

Différents schémas itératifs ont été proposés afin de résoudre les inéquations variationnelles.

Nous présentons dans ce travail, un algorithme de régularisation progressive (El Farouq, 1993) utilisant le Principe du Problème Auxiliaire (Cohen, 1980) et un algorithme basé sur l'approximation du coût (Patriksson, 1993), afin de résoudre des inéquations variationnelles monotones générales. Chacun de ces algorithmes utilise la résolution, à chaque itération, d'un sous-problème d'optimisation.

Dans le cadre de l'algorithme d'approximation du coût, nous développons une analyse de convergence dans le cas où l'approximation de l'opérateur impliqué n'est pas supposée symétrique.

Abstract

Various iterative schemes have been proposed for solving variational inequalities.

We present here an algorithm of progressive regularization (El Farouq, 1993) based on the Auxiliary Problem Principle (Cohen, 1980) and an algorithm based on the cost approximation (Patriksson, 1993), for solving general monotone variational inequalities. Each of them is based on the solution, at each iteration, of an optimization subproblem.

In the framework of the cost approximation algorithm, we develop here a convergence analysis in the case where the approximation of the involved operator is not assumed to be symmetric.

Noëlle PAQUAY

Titre du mémoire :

Résolution d'Inéquations Variationnelles à partir de deux schémas itératifs basés sur la Régularisation Progressive et sur l'Approximation du Coût.

ERRATA

p 11, sous le théorème : "Etant donné que" devient "Si"

p 15, définition 1.2.12 : "$\|u - u'\|$" est remplacé par "$\|u - u'\|^2$"

p 15, définition 1.2.15 : "$\frac{1}{A}$" devient "$\frac{1}{E}$"

p 19, supprimer la phrase "La preuve de ce théorème est donnée dans [20]"

p 21 : "proposition 1.3.3" est remplacé par "définition"

p 23, dernière ligne : "J' " est remplacé par "J"

p 24, proposition 1.4.3 : "$N_C(\bar{x})$" est remplacé par "$N_X(\bar{x})$"

p 31, proposition 2.2.1 : "emboité" et "emboitée" deviennent respectivement "emboîté" et "emboîtée"

p 32, algorithme 2.2.2 : "(u_0, v_0)" est remplacé par "(u^0, v^0)"

p 33, sous le théorème 2.2.5 : supprimer "r" et "t"

Dans les preuves des théorèmes 2.2.8, 2.2.9 et 2.2.10, remplacer "ε^{2k}" par "$(\varepsilon^k)^2$"

p 40, lemme 2.2.4 : "η^n" est remplacé par "η^N"

Les deux dernières lignes de la p 43 et la première ligne de la page 44 deviennent :

$$\text{" } = \frac{2}{b}\,\Phi(x^0) + \frac{2}{b}\,(\varepsilon^0)^2(\gamma\|x^0 - x^*\|^2 + \delta) + \frac{2}{b}\sum_{k=1}^{N-1}((\varepsilon^k)^2(\gamma\|x^k - x^*\|^2 + \delta))$$

$$= \frac{2}{b}\,\Phi(x^0) + \frac{2\gamma}{b}\,(\varepsilon^0)^2\,\|x^0 - x^*\|^2 + \sum_{k=1}^{N-1}\frac{2\gamma}{b}\,((\varepsilon^k)^2\|x^k - x^*\|^2) + \sum_{k=0}^{N-1}(\frac{2\delta}{b}\,(\varepsilon^k)^2).$$

Notons

$$\eta^N = \frac{2}{b}\Phi(x^0) + \frac{2\gamma}{b}\,(\varepsilon^0)^2\,\|x^0 - x^*\|^2 + \sum_{k=0}^{N-1}\frac{2\delta}{b}(\varepsilon^k)^2\text{"} \qquad (1)$$

p 44, cinquième relation : "$\|x^N - x^*\|$" est remplacé par "$\|x^N - x^*\|^2$"

p 48, (2.21) devient "$(III) < \varepsilon^k \langle \psi(x^*), x^{k+1} - x^* \rangle - \varepsilon^k \langle \psi(x^*), x^k - x^* \rangle$"

p 54, deuxième ligne : "différentiable" est remplacé par "dérivable"

p 54, douzième ligne : "grace" est remplacé par "grâce"

p 57, théorème 2.3.3, troisième ligne de l'énoncé : remplacer "$b^k \geq b \geq 0$" par "$b^k \geq b > 0$" et "$\varepsilon^k < \frac{2b^k}{A+\beta}$" par "$\varepsilon^k \leq \frac{2b}{A+\beta}$"

p 57, quatre lignes avant la fin de la page "lemme (1.3.9)" est remplacé par "proposition (1.3.9)"

p 58, dans les troix premières relations, supprimer "$\forall x \in X^{ad}$"

p 58, les neuf et dixième lignes deviennent :
"$\Delta_k^{k+1} \leq (\frac{A}{2} - \frac{b^k}{\varepsilon^k})\|x^{k+1} - x^k\|^2 \leq (\frac{A}{2} - \frac{b}{\varepsilon^k})\|x^{k+1} - x^k\|^2$.
Or, par hypothèse, $\varepsilon^k \leq \frac{2b}{A+\beta}$ où A et β sont > 0; nous obtenons donc
$(\frac{A}{2} - \frac{b}{\varepsilon^k}) \leq \frac{-\beta}{2}$."

p 58, avant-dernière ligne : "$B^k < B$" est remplacé par "$B^k \leq B$"

p 59, septième ligne : "$B^k < B$" est remplacé par "$B^k \leq B$"

p 61, définition de l'opérateur : supprimer les "k"

p 74, dans les deux premières relations : "$\|v^* - \tilde{v}(u)\|^2$" est remplacé par "$\|\tilde{v}(u) - v\|^2$"

p 78, seconde ligne : "lemme (1.3.9)" est remplacé par "proposition (1.3.9)"

p 90 : remplacer "$\|\ldots\|^2$" par "$\|(\ldots)\|^2$"

p 91 : "x_3^k" et "x_4^k" sont respectivement remplacés par "y_1^k" et "y_2^k"

p 94, cinq lignes avant la fin : "$x^k \in X^{ad}$" devient "$x^k \in X$".

Table des matières

Introduction 4

1 Inéquations Variationnelles et Préliminaires 8

1.1 Inéquations variationnelles 8
1.1.1 Cadre de travail et définition 8
1.1.2 Cas particuliers 9
1.1.3 Existence d'une solution 11
1.1.4 Problème équivalent 12
1.1.5 Notre objectif 12

1.2 Propriétés d'opérateurs 12
1.2.1 Opérateur univoque 13
1.2.2 Continuité lipschitzienne 13
1.2.3 Symétrie 14
1.2.4 Monotonie 14
1.2.5 Propriété de Dunn 15
1.2.6 Continuité de Hölder 18

1.3 Propriétés d'ensembles et de fonctions 18
1.3.1 Gâteaux-différentiabilité 18
1.3.2 Sous-différentiabilité 19
1.3.3 Convexité 19
1.3.4 Semi-continuité 22
1.3.5 Coercivité 22
1.3.6 Gradient lipschitzien 23

1.4 Notions d'optimisation 23
1.4.1 Minimum local et minimum global 23
1.4.2 Direction de descente 24
1.4.3 Cône normal 24

2 Principe du Problème Auxiliaire **25**

2.1 Motivation 25

2.2 Cas des opérateurs non intégrables 26
2.2.1 Définition du Problème Auxiliaire et Algorithme de base . 26
2.2.2 Décomposition 28
2.2.3 Résultats de convergence 29

2.3 Cas des opérateurs intégrables 52
2.3.1 Définition du Problème Auxiliaire et Algorithme de base . 52
2.3.2 Résultats de convergence 55

2.4 Conclusion 60

3 Régularisation progressive d'inéquations variationnelles **61**

3.1 Motivation 61

3.2 Régularisation d'inéquations variationnelles monotones 63

3.3 Régularisation Progressive 65
3.3.1 Algorithmes 65
3.3.2 Décomposition 68
3.3.3 Résultats de convergence 69
3.3.4 Application numérique 89

3.4 Conclusion 91

4 Algorithme d'approximation du coût de Patriksson **93**

4.1 Principe de l'algorithme de Patriksson 93

4.2 Cadre de travail 94
4.2.1 Sous-problème approximé 94
4.2.2 Critère d'arrêt 96
4.2.3 Direction de descente 96
4.2.4 Algorithme 97
4.2.5 Fonction de mérite 98

4.3 Exemples d'algorithmes d'approximation du coût 99

4.4 Analyse de convergence 101

4.5 Conclusion 105

En guise de conclusion... **105**

Introduction

Dans ce mémoire, nous allons étudier deux manières de résoudre des inéquations variationnelles monotones; d'une part, en utilisant le Principe du Problème Auxiliaire et, d'autre part, en faisant appel à l'approximation du coût de Patriksson.

La première méthode, comme son nom l'indique, consiste à introduire un **Problème Auxiliaire** dont la résolution permet de trouver une solution au problème variationnel de départ. Le Problème Auxiliaire est un problème de minimisation construit à partir d'une fonction auxiliaire convexe choisie de manière adéquate par l'utilisateur. A partir du Problème Auxiliaire, nous allons développer un algorithme de base en traitant séparément les cas des opérateurs non intégrables et intégrables. Ensuite, nous passerons en revue les différents résultats de convergence déjà obtenus quant à cet algorithme.

Nous observerons que, pour les opérateurs non intégrables, la propriété de Dunn, à savoir la forte monotonie de l'opérateur inverse, est une des propriétés minimales assurant la convergence de la plupart des algorithmes itératifs de résolution proposés dans la littérature. Cette propriété implique la monotonie simple ainsi que la propriété de Lipschitz; l'équivalence peut même être prouvée si l'opérateur est symétrique. De plus, pour un opérateur lipschitzien, la propriété de Dunn est plus faible que la forte monotonie.

La convergence peut également être obtenue sous des hypothèses plus faibles que la propriété de Dunn, à savoir la forte pseudo-monotonie et la propriété pseudo-Dunn.

Dans le cas des opérateurs intégrables, l'algorithme de base converge lorsque l'opérateur est symétrique et monotone; dans ce cas, la résolution du problème variationnel est équivalente à la minimisation d'une fonction convexe. Nous donnons également un théorème de convergence, valable en dimension finie, pour un opérateur pseudo-monotone et symétrique; le problème variationnel se ramène alors à un problème de minimisation d'une fonction pseudo-convexe.

En étudiant un exemple numérique, nous nous apercevrons qu'il existe des opérateurs non intégrables pour lesquels l'algorithme de base développé à partir du Principe du Problème Auxiliaire ne converge pas. Nous introduirons dès lors la **régularisation**. En effet, il est possible de montrer que l'opérateur régularisé d'un opérateur monotone, même multivoque, est univoque, monotone, lipschitzien et qu'il vérifie la propriété de Dunn sous laquelle nous avons déjà pu prouver la convergence. De cette manière, en appliquant l'algorithme de base à l'opérateur régularisé, nous obtiendrons un algorithme convergent. Cependant, la régularisation peut s'avérer aussi complexe que la résolution de l'inéquation variationnelle originale.

Afin de contourner la difficulté, nous développerons un algorithme de **régularisation progressive** permettant de résoudre les inéquations variationnellles impliquant des opérateurs monotones non symétriques. L'idée est d'utiliser le Principe du Problème Auxiliaire afin d'effectuer l'opération de régularisation tout en résolvant, simultanément, l'inéquation variationnelle régularisée. De cette manière, les deux processus sont effectués en même temps au lieu d'être emboîtés et nous obtenons ainsi un nouveau schéma itératif comprenant un pas de régularisation suivi d'un pas de minimisation.

L'algorithme de régularisation progressive sera présenté sous deux versions : les versions parallèle et séquentielle. La première de ces deux versions peut être vue comme l'algorithme de base construit sur le Principe du Problème Auxiliaire appliqué à un opérateur défini sur le produit de deux espaces. Nous remarquerons que cet opérateur possède deux propriétés remarquables : la forte monotonie avec respect du second argument et la propriété de Dunn partielle avec respect de la première composante.

Nous étudierons ensuite le comportement de l'algorithme sur un exemple numérique pour lequel les algorithmes développés antérieurement ne convergeaient pas.

La seconde méthode utilisée afin de résoudre les inéquations variationnelles monotones est basée sur l'algorithme d'**approximation du coût de Patriksson**. Cet algorithme consiste, à chaque itération, à déterminer une direction de recherche en résolvant un sous-problème "approximé" du problème de départ et ensuite, à effectuer une recherche linéaire, éventuellement inexacte, relativement à une fonction de mérite.

Nous observerons que cette méthode englobe en fait le cas particulier de l'algorithme de base construit à partir du Principe du Problème Auxiliaire.

Les théories de convergence développées jusqu'à présent pour l'algorithme d'approximation du coût se ramènent toujours à la situation particulière où l'approximation de l'opérateur est supposée symétrique. Dès lors, nous nous donnerons pour objectif de développer une théorie de convergence plus générale n'utilisant pas cette hypothèse de symétrie.

Afin d'élaborer ce mémoire, nous nous sommes principalement basée sur les articles de EL FAROUQ (1998a) et EL FAROUQ et COHEN (1998a) ainsi que sur l'ouvrage de PATRIKSSON (1994).

Organisation du mémoire

Après avoir décrit les inéquations variationnelles et différents concepts de base, notre travail se compose de trois grandes parties traitant respectivement de l'algorithme de base développé à partir du Principe du Problème Auxiliaire, de l'algorithme de régularisation progressive et de l'algorithme d'approximation du coût de Patriksson. Nous porterons une grande attention aux hypothèses à partir desquelles la convergence des algorithmes peut être prouvée et cela, spécialement pour les opérateurs non intégrables.

Le chapitre 1 aborde la définition d'inéquations variationnelles et décrit le cadre général du problème variationnel qui va nous intéresser. Nous y donnons entre autres un théorème d'existence de la solution du problème variationnel convexe. Ensuite, nous développons quelques rappels concernant les différents concepts principaux intervenant dans notre mémoire.

Le chapitre 2 introduit le Problème Auxiliaire dont les solutions permettent de résoudre le problème variationnel initial.

Nous y donnons un aperçu des hypothèses à partir desquelles la convergence de l'algorithme de base a déjà pu être prouvée; et cela, en distinguant les opérateurs intégrables et non intégrables.

Chapitre 1

Inéquations Variationnelles et Préliminaires

Dans ce chapitre, nous allons définir le problème variationnel et donner un théorème d'existence de ses solutions.
Ensuite, nous rassemblerons un certain nombre de définitions et de propriétés que nous utiliserons fréquemment dans ce mémoire.

1.1 Inéquations variationnelles

La théorie des inéquations variationnelles englobe plusieurs autres classes de problèmes comme les problèmes d'optimisation convexe ou les problèmes de minimax.
Elle donne lieu à de nombreuses applications comme l'équilibre dans les réseaux de transport (aussi bien transport urbain que transport de commmunication), dans la recherche opérationnelle ou dans les problèmes économiques.
Certaines de ces applications sont données dans [16],[21] et [26].

1.1.1 Cadre de travail et définition

Considérons X un espace de Hilbert, éventuellement de dimension infinie, identifié à son dual topologique X^*.

L'espace X est muni d'un produit scalaire noté $\langle .,. \rangle$ dont on peut déduire une norme $\|.\| = \langle .,. \rangle^{\frac{1}{2}}$.

Le produit scalaire vérifie respectivement les quatre propriétés suivantes :

$\forall \alpha, \beta \in I\!R,\ \forall x, y, x_1, x_2 \in X,$

i) $\langle \alpha x_1 + \beta x_2, y \rangle = \alpha \langle x_1, y \rangle + \beta \langle x_2, y \rangle$;

ii) $\langle x, y \rangle = \langle y, x \rangle$;

iii) $\langle x, x \rangle \geq 0$;

iv) $\langle x, x \rangle = 0 \Leftrightarrow x = 0$,

ainsi que l'**inégalité de Cauchy-Schwarz** : $\boxed{|\langle x, y \rangle| \leq \|x\|\ \|y\|.}$

Les **topologies faible** et **forte** sont respectivement les topologies associées au produit scalaire $\langle ., . \rangle$ et à la norme $\|.\|$.

Considérons ψ une application monotone de X dans X ainsi que X^{ad} un sous-ensemble convexe admissible fermé de X.

La résolution d'une inéquation variationnelle consiste à résoudre le **problème variationnel** suivant, que nous noterons (VIP)[1] :

$$\boxed{\text{Trouver } x^* \in X^{ad} \text{ tel que } \langle \psi(x^*), x - x^* \rangle \geq 0, \quad \forall x \in X^{ad}.} \quad \textbf{(VIP)}$$

Dans le cas d'un opérateur ψ **multivoque**, le problèle (VIP) s'écrit :

$$\boxed{\text{Trouver } x^* \in X^{ad} \text{ tel que } \exists\ r^* \in \psi(x^*),\ \langle r^*, x - x^* \rangle \geq 0, \quad \forall x \in X^{ad}.}$$

1.1.2 Cas particuliers

1. Si $X^{ad} = X$, c'est-à-dire dans le cas où le sous-ensemble convexe est l'espace tout entier

   Dans ce cas, le problème (VIP) s'écrit :

   Trouver $x^* \in X$ tel que $\langle \psi(x^*), x - x^* \rangle \geq 0, \quad \forall x \in X$

   ou encore : Trouver $x^* \in X$ tel que $\langle \psi(x^*), x - x^* \rangle = 0, \quad \forall x \in X.$

1. Initiales de "Variational Inequality Problem"

En effet, supposons qu'il existe $x_1^* \in X$ tel que $\langle \psi(x_1^*), x - x_1^* \rangle > 0$, $\forall x \in X$. En prenant $x = 2x_1^* - x_1$ avec $x_1 \in X$, nous obtenons $\langle \psi(x_1^*), 2x_1^* - x_1 - x_1^* \rangle$ qui est strictement négatif et non strictement positif. Nous obtenons donc une contradiction.

De plus, dans un espace de Hilbert, dire que $\langle \psi(x^*), x - x^* \rangle = 0, \quad \forall x \in X$, ou encore que $\langle \psi(x^*), y \rangle = 0, \quad \forall y \in X$, revient à dire que $\psi(x^*) = 0$.

Par conséquent, dans le cas où $X^{ad} = X$, l'inéquation variationnelle est une équation et (VIP) devient : Trouver $x^* \in X$ tel que $\psi(x^*) = 0$.

2. Opérateur symétrique

Supposons que ψ soit la dérivée d'une fonction convexe différentiable J, à savoir $\psi = J'$, le problème variationnel consiste alors à trouver x^* minimum de J sur X^{ad}.

En effet, si $\psi = J'$, (VIP) devient :

Trouver $x^* \in X^{ad}$ tel que $\langle J'(x^*), x - x^* \rangle \geq 0, \quad \forall x \in X^{ad}$.

Or, étant donné que X^{ad} est convexe, cela signifie que $-J'(x^*) \in N_{X^{ad}}(x^*)$ où $N_{X^{ad}}(x^*)$ est le cône normal défini par :

$$N_{X^{ad}(x^*)} = \{z \in X : \langle z, x^* - y \rangle \geq 0, \quad \forall y \in X^{ad}\}.$$

Par conséquent, comme J est convexe et en vertu de la proposition (1.4.3) qui sera donnée plus tard dans ce chapitre, x^* minimise J sur X^{ad}.

Dans le cas où J n'est pas différentiable, nous obtenons le même résultat que dans le cas convexe différentiable en remplaçant la notion de dérivée par celle de sous-différentiel ∂J.

Dans ce cas, (VIP) revient à trouver $x^* \in X^{ad}$ tel que

$$\langle \partial J(x^*), x - x^* \rangle \geq 0, \quad \forall x \in X^{ad}.$$

Par conséquent, si ψ est symétrique, (VIP) est un problème d'optimisation convexe qui consiste à minimiser la fonction J sur X^{ad}.

Remarquons que dans le cas où ψ ne dérive pas d'un potentiel, le problème de départ ne trouve en général pas d'interprétation en termes de problème d'optimisation.

1.1.3 Existence d'une solution

Ekeland et Temam ([10]) ont donné un théorème relatif à l'existence d'une solution x^* au problème variationnel (VIP).

Théorème 1.1.1

Si i) ψ est faiblement continu sur tout sous-espace de dimension finie de X;
ii) ψ est monotone sur X^{ad};
iii) il existe $\hat{x} \in X$ tel que

$$\lim_{\substack{\|x\| \to +\infty \\ x \in X^{ad}}} \frac{\langle \psi(x), x - \hat{x} \rangle}{\|x\|} = +\infty,$$

alors il existe une solution x^* au problème variationnel.

Etant donné que X^{ad} est borné, l'hypothèse iii) est inutile.

Par conséquent, si nous supposons - comme nous l'avons fait au début de ce chapitre - que ψ est monotone, ce théorème permet de présumer l'**existence** d'une solution au problème variationnel si ψ est faiblement continu sur tout sous-espace de dimension finie de X.

Afin de remarquer que le problème variationnel ne possède pas toujours une solution, il suffit de considérer $X = \mathbb{R}$ et $\psi(x) = e^x$.
Dans ce cas, nous avons montré que le problème variationnel est équivalent à trouver x^* tel que $e^{x^*} = 0$, ce qui est impossible.

Généralement, la solution d'une inéquation variationnelle n'est pas unique, mais elle l'est quand ψ est strictement monotone ([10]) et, à plus forte raison, quand ψ est fortement monotone.

1.2.3 Symétrie

Définition 1.2.6

Un opérateur ψ est **symétrique** *s'il est le gradient d'une fonction convexe.*

1.2.4 Monotonie

Définition 1.2.7

Un opérateur ψ est **monotone sur** X^{ad} *si,* $\forall x, y \in X^{ad}, \langle \psi(x) - \psi(y), x - y \rangle \geq 0.$

Définition 1.2.8

Un opérateur ψ est **strictement monotone sur** X^{ad} *si*
$\forall x, y \in X^{ad}, x \neq y, \langle \psi(x) - \psi(y), x - y \rangle > 0.$

Définition 1.2.9

Un opérateur ψ est **fortement monotone de constante a sur** X^{ad} *si*
$\exists a > 0$ *tel que* $\forall x, y \in X^{ad}, \ \langle \psi(x) - \psi(y), x - y \rangle \geq a\|x - y\|^2.$

Définition 1.2.10

Un opérateur ψ est **pseudo-monotone sur** X^{ad} *si*
$\forall x, y \in X^{ad}, \ \langle \psi(y), x - y \rangle \geq 0 \Rightarrow \langle \psi(x), x - y \rangle \geq 0.$

Définition 1.2.11

Un opérateur ψ est **fortement pseudo-monotone de constante e sur** X^{ad}
si $\exists e > 0$ *tel que* $\forall x, y \in X^{ad}, \ \langle \psi(y), x - y \rangle \geq 0 \Rightarrow \langle \psi(x), x - y \rangle \geq e\|x - y\|^2.$

Proposition 1.2.1

Si ψ est monotone, alors ψ est pseudo-monotone.

Proposition 1.2.2

Si ψ est fortement monotone, alors ψ est fortement pseudo-monotone.

Proposition 1.2.3

Si ψ est fortement pseudo-monotone, alors ψ est pseudo-monotone.

Les preuves de ces propositions découlent directement des définitions.

Définition 1.2.12

Considérons $\psi_u : \mathcal{U} \times \mathcal{V} \to \mathcal{U}$ *et* $\psi_v : \mathcal{U} \times \mathcal{V} \to \mathcal{V}$. *Notons* ψ *l'opérateur composite* $(\psi_u(u,v), \psi_v(u,v))$ *et considérons deux sous-ensembles convexes fermés* $\mathcal{U}^{ad} \subseteq \mathcal{U}$ *et* $\mathcal{V}^{ad} \subseteq \mathcal{V}$.

L'opérateur ψ *est* **fortement monotone en** u **de constante** T **uniformément en** v *si* $\langle \psi(u,v) - \psi(u',v), u - u' \rangle \geq T\|u - u'\|, \quad \forall u, u' \in \mathcal{U}^{ad}$ *et* $v \in \mathcal{V}^{ad}$.

Définition 1.2.13

Un opérateur ψ *est* **maximal monotone** *sur* X^{ad} *si son graphe est maximal pour l'inclusion dans l'ensemble des graphes monotones c'est-à-dire si son graphe n'est pas strictement inclus dans le graphe d'un autre opérateur monotone sur* X.

Proposition 1.2.4

Un opérateur ψ *est monotone maximal si et seulement s'il est monotone et si* $R(I + \psi) = \mathbb{R}^2$.

Cette proposition est démontrée dans [3].

1.2.5 Propriété de Dunn

Définition 1.2.14

Un opérateur ψ *possède la* **propriété de Dunn de constante A sur** X^{ad} *si* $\exists A > 0$ *tel que* $\forall x, y \in X^{ad}, \quad \langle \psi(x) - \psi(y), x - y \rangle \geq \frac{1}{A}\|\psi(x) - \psi(y)\|^2$.

Définition 1.2.15

Un opérateur ψ *possède la* **propriété pseudo-Dunn de constante E sur** X^{ad} *si* $\exists E > 0$ *tel que*
$\forall x, y \in X^{ad}, \quad \langle \psi(y), x - y \rangle \geq 0 \Rightarrow \langle \psi(x), x - y \rangle \geq \frac{1}{A}\|\psi(x) - \psi(y)\|^2$.

Par définition, dire que ψ possède la propriété de Dunn revient à dire que ψ^{-1} est fortement monotone.

Remarquons que si nous prenons $x = y$ dans les deux définitions précédentes,

nous trouvons $\psi(x) = \psi(y)$, ce qui signifie que :

Tout opérateur possédant la propriété de Dunn ou pseudo-Dunn est univoque.

Proposition 1.2.5

Si ψ possède la propriété de Dunn, alors ψ possède la propriété pseudo-Dunn.

Proposition 1.2.6

Si ψ possède la propriété pseudo-Dunn, alors ψ est pseudo-monotone.

Les preuves de ces propositions découlent directement des définitions.

Proposition 1.2.7

1) Si ψ vérifie la propriété de Dunn avec la constante A,
alors ψ est monotone et lipschitzien de constante A.

2) Si ψ est fortement monotone de constante a et lipschitzien de constante A,
alors ψ vérifie l'hypothèse de Dunn avec la constante $\frac{A^2}{a}$.

3) Si ψ vérifie la propriété de Dunn,
alors, même si la solution x^* de (VIP) n'est pas unique, la valeur de $\psi(x^*)$ l'est.

Preuve :

1) * ψ est monotone car $\frac{1}{A} > 0$.

* ψ est lipschitzien de constante A si $\|\psi(x) - \psi(y)\| \leq A\|x - y\|$.

Or, en appliquant l'inégalité de Cauchy-Schwarz à la propriété de Dunn, nous obtenons :

$\exists A > 0$ tel que $\forall x, y \in X^{ad}$, $\frac{1}{A}\|\psi(x) - \psi(y)\|^2 \leq \|\psi(x) - \psi(y)\|\|x - y\|$.

Dans ce cas, nous avons soit $\psi(x) = \psi(y)$, soit $\frac{1}{A}\|\psi(x) - \psi(y)\| \leq \|x - y\|$

ce qui, dans les deux cas, fournit le résultat souhaité.

2) Comme ψ est fortement monotone de constante a, nous avons que :

$\exists a > 0$ tel que $\forall x, y \in X^{ad}, \langle \psi(x) - \psi(y), x - y \rangle \geq a\|x - y\|^2$.

De plus, comme ψ est lipschitzien, nous trouvons :

$\forall x, y \in X^{ad}, \langle \psi(x) - \psi(y), x - y \rangle \geq \frac{a}{A^2}\|\psi(x) - \psi(y)\|^2$.

tandis qu'en général, une réunion d'ensembles convexes n'est pas convexe.

Définition 1.3.7

*L'***enveloppe convexe de X,** *notée Co(X), est l'intersection de tous les sous-ensembles convexes qui contiennent X. C'est donc le plus petit ensemble convexe contenant X.*

Définition 1.3.8

Une fonction J est **convexe sur X** *si*
$\forall x, y \in X, \forall \lambda \in [0,1],\ J(\lambda x + (1-\lambda)y) \leq \lambda J(x) + (1-\lambda)J(y).$

Définition 1.3.9

Une fonction J est **strictement convexe sur X** *si*
$\forall x, y \in X, x \neq y, \forall \lambda \in]0,1[,\ J(\lambda x + (1-\lambda)y) < \lambda J(x) + (1-\lambda)J(y).$

Définition 1.3.10

On appelle **épigraphe de J** *l'ensemble noté* **epi J** *et défini par*
$epiJ = \{(x,y) \in X \times I\!R,\ J(x) < y\}.$

Graphiquement, l'épigraphe est l'ensemble des points se trouvant au-dessus du graphe de J.

Proposition 1.3.1

Une fonction est convexe si et seulement si son épigraphe est un ensemble convexe.

La preuve est donnée dans [10].

Pour des fonctions différentiables, nous avons une caractérisation de la convexité donnée par la proposition suivante.

Proposition 1.3.2

Si J est une fonction différentiable en tout point x de X,
alors les conditions suivantes sont équivalentes :

i) J est convexe sur X;
ii) $\forall x, y \in X, J(x) \geq J(y) + \langle J'(y), x-y \rangle$;
iii) $\forall x, y \in X, \langle J'(x) - J'(y), x-y \rangle \geq 0.$

Il est possible de trouver la preuve dans [2].

Proposition 1.3.3

Une fonction J est **fortement convexe de constante a sur X** *si* $\exists a > 0$ *tel que,* $\forall x, y \in X, \forall \lambda \in [0,1]$,
$J(\lambda x + (1-\lambda)y) \leq \lambda J(x) + (1-\lambda)J(y) - \frac{a}{2}\ \lambda\ (1-\lambda)\ \|x-y\|^2$.

Dans le cas où la fonction est différentiable, nous avons une caractérisation de la forte convexité donnée par la proposition suivante.

Proposition 1.3.4

Si J est une fonction différentiable en tout point x de X,
alors les conditions suivantes sont équivalentes :

i) J est fortement convexe de constante a;
ii) $\forall x, y \in X, J(x) \geq J(y) + \langle J'(y), x-y\rangle + \frac{a}{2}\ \|x-y\|^2$;
iii) $\forall x, y \in X, \langle J'(x) - J'(y), x-y\rangle \geq a\ \|x-y\|^2$.

La preuve de cette proposition se trouve dans [23].

Proposition 1.3.5

Si J est une fonction G-différentiable,
alors J est fortement convexe si et seulement si le gradient J'(x) est fortement monotone.

Cette proposition est démontrée dans [19].

Définition 1.3.11

Une fonction J G-différentiable sur un sous-ensemble C ouvert de X est **pseudo-convexe sur C** *si* $\forall x_1, x_2 \in C,\ \langle J'(x_1), x_2 - x_1\rangle \geq 0 \Rightarrow J(x_2) \geq J(x_1)$.

Proposition 1.3.6

Si J une fonction G-différentiable sur un sous-ensemble ouvert convexe C de X,
alors J est pseudo-convexe si et seulement le gradient J'(x) est pseudo-monotone sur C.

La preuve de cette proposition est donnée dans [11].

1.3.4 Semi-continuité

Définition 1.3.12

Une fonction J est **semi-continue inférieure (sci) en x_0 sur X** *si et seulement si* $\forall \varepsilon > 0,\ \exists \delta > 0$ *tel que* $\|x - x_0\| \leq \delta \Rightarrow f(x) > f(x_0) - \varepsilon,\ \ \forall x \in X.$

Définition 1.3.13

Une fonction J est **semi-continue inférieure sur X** *si elle l'est pour tout point de X.*

Proposition 1.3.7

Une fonction f est semi-continue inférieurement sur X si et seulement si

$$f(x) = \liminf_{y \to x} f(y),\ \ \forall x \in X.$$

La preuve de cette proposition est donnée dans [29].

Toute fonction continue est semi-continue inférieurement.
La réciproque n'est pas toujours vraie.

Proposition 1.3.8

Une fonction J est semi-continue inférieure si et seulement si son épigraphe est fermé.

La preuve de cette proposition est donnée dans [10].

1.3.5 Coercivité

Définition 1.3.14

Une fonction J est **coercive** *si X^{ad} est borné ou si*

$$\lim_{\substack{\|x\| \to +\infty \\ x \in X^{ad}}} J(x) = +\infty.$$

1.3.6 Gradient lipschitzien

Proposition 1.3.9

Si J est une fonction différentiable dont le gradient est lipschitzien de constante A,
alors $\forall x, y \in X, J(x) - J(y) \leq \langle J'(y), x - y \rangle + \frac{A}{2} \|x - y\|^2$.

La preuve de cette proposition est donnée dans [11].

1.4 Notions d'optimisation

1.4.1 Minimum local et minimum global

Considérons $X \subseteq \mathbb{R}^n$ et J une fonction : $X \to \mathbb{R}$.

Définition 1.4.1

Un vecteur $x \in X$ est appelé **minimum local de J** *s'il existe $\varepsilon > 0$ tel que $J(x) \leq J(y)$, $\forall y \in X$ satisfaisant $\|x - y\| \leq \varepsilon$.*

Définition 1.4.2

Un vecteur $x \in X$ est appelé **minimum global de J** *si $J(x) \leq J(y)$, $\forall y \in X$.*

Sous des hypothèses de convexité, la distinction entre minimum local et minimum global n'est plus nécessaire, comme le montre la proposition suivante.

Proposition 1.4.1

Si $C \subseteq \mathbb{R}^n$ est un ensemble convexe et $J : C \to \mathbb{R}$ est une fonction convexe, alors un minimum local de J est un minimum global.

De plus, si J est strictement convexe, il existe au plus un minimum global de J.

La preuve est donnée dans [10].

Etant donné que l'hypothèse de forte convexité entraîne celle de convexité stricte, ce résultat est toujours valable lorsque J' est fortement convexe.

1.4.2 Direction de descente

Soit J une fonction : $X \to \mathbb{R}$, un point $x_0 \in X$ et $d \in \mathbb{R}$ avec $d \neq 0$.

Définition 1.4.3

d est **une direction admissible pour X à partir de** $x_0 \in X$ *si et seulement si* $\exists \delta > 0$ *tel que* $\forall t \in [0, \delta], x_0 + td \in X$.

Cela signifie que le segment $\{x_0 + td$ tel que $t \in [0, \delta]\}$ est contenu dans X.

Définition 1.4.4

d est **une direction de descente pour J en** x_0 *si et seulement si*
$\exists \delta > 0$ *tel que* $\forall t \in]0, \delta], J(x_0 + td) < J(x_0)$.

Proposition 1.4.2

Si J est de classe C^1,
alors d est une direction de descente en x pour J si $\langle J'(x_0), d \rangle < 0$.

1.4.3 Cône normal

Définition 1.4.5

Le **cône normal à un ensemble convexe X de** $\mathbb{R}^n$ **au point** $x_0 \in X$ *est noté* $N_X(x_0)$ *et est défini par :*
$N_X(x_0) = \{y \in \mathbb{R}^n$ *tel que* $\langle y, x_0 - x \rangle \geq 0, \ \forall x \in X\}$.

Proposition 1.4.3

Si J est de classe C^1,
alors $\bar{x}$ est minimum local de J sur $X \Rightarrow -J'(\bar{x}) \in N_C(\bar{x})$.

La réciproque est vérifiée si J et X sont convexes.

Chapitre 2

Principe du Problème Auxiliaire

2.1 Motivation

Afin de résoudre les inéquations variationnelles monotones définies au chapitre précédent, nous allons proposer un algorithme basé sur le Principe du Problème Auxiliaire.

Le Principe du Problème Auxiliaire a été introduit par Cohen ([4]) comme un cadre général qui englobe différents schémas d'optimisation allant de la méthode de gradient/sous-gradient aux algorithmes de décomposition/coordination.
Nous pouvons donc écrire qu'au départ cette théorie a été développée pour résoudre des problèmes d'optimisation (à savoir le cas particulier où l'opérateur ψ est le gradient d'une fonction convexe). Par la suite, cette approche a été étendue ([6]) pour y inclure des méthodes de résolution d'inéquations variationnelles générales avec des opérateurs qui ne sont pas nécessairement des gradients de fonctions convexes.

Dans ce chapitre, nous traiterons séparément les opérateurs intégrables et non intégrables. Pour chacun d'entre eux, nous introduirons le Problème Auxiliaire à partir duquel nous développerons un algorithme de base qui nous permettra de résoudre les inéquations variationnelles.

Nous aurons donc deux versions de l'algorithme: une pour le cas intégrable et une autre pour le cas non intégrable.

Ensuite, nous ferons un relevé des hypothèses à partir desquelles la convergence des algorithmes précédents a déjà pu être prouvée.

En outre, nous remarquerons qu'en choisissant adéquatement la fonction auxi-

liaire, nous pouvons introduire une décomposition du problème de minimisation auxiliaire en sous-problèmes indépendants, pourvu que l'on connaisse une décomposition de l'espace de départ et de l'espace admissible en produits de sous-espaces indépendants.

2.2 Cas des opérateurs non intégrables

2.2.1 Définition du Problème Auxiliaire et Algorithme de base

Considérons une fonction auxiliaire $M : X \longrightarrow I\!R$ que l'on choisit fortement convexe et G-différentiable ainsi qu'un nombre positif ε.

Pour un $x \in X$, introduisons le **Problème Auxiliaire** (PA) suivant :

$$\boxed{\min_{y \in X^{ad}} \{ M(y) + \langle \varepsilon\psi(x) - M'(x), y \rangle \}.} \qquad \text{(PA)}$$

Notons $\tilde{y}(x)$ la solution de ce problème. Cette solution est caractérisée par l'inéquation variationnelle (IV) suivante :

$$\boxed{\langle M'(\tilde{y}(x)) + \varepsilon\psi(x) - M'(x), y - \tilde{y}(x) \rangle \geq 0, \quad \forall y \in X^{ad}.} \qquad \text{(IV)}$$

En effet, étant donné que M et X^{ad} sont convexes,
$\tilde{y}(x)$ minimise $M(y) + \langle \varepsilon\psi(x) - M'(x), y \rangle$ si et seulement si
$$-(M(\tilde{y}(x)) + \langle \varepsilon\psi(x) - M'(x), \tilde{y}(x) \rangle)' \in N_{X^{ad}}(\tilde{y}(x))$$
c-à-d si $-(M'(\tilde{y}(x)) + \varepsilon\psi(x) - M'(x)) \in N_{X^{ad}}(\tilde{y}(x))$
ou encore si $\langle M'(\tilde{y}(x)) + \varepsilon\psi(x) - M'(x), y - \tilde{y}(x) \rangle \geq 0, \quad \forall y \in X^{ad}$.

Remarquons que dans un cadre plus général, nous aurions pu considérer une suite de nombres positifs ε^k ($k \in I\!N$) ainsi qu'une suite d'applications M^k variant avec l'indice d'itération k.
Cela aurait donné lieu au problème suivant :

$$\min_{y \in X^{ad}} \{M^k(y) + \langle \varepsilon^k \psi(x) - (M^k)'(x), y \rangle\}.$$

Lemme 2.2.1

Si la solution $\tilde{y}(x)$ de (PA) est égale à x,
alors x est une solution de (VIP).

Ce lemme peut se reformuler de la manière suivante:

Si x est solution du Problème Auxiliaire défini en x
alors x est solution de (VIP).

Preuve:

Si nous remplaçons $\tilde{y}(x)$ par x dans l'inéquation variationnelle (IV), nous trouvons:

$$\langle M'(x) + \varepsilon\psi(x) - M'(x), y - x \rangle = \varepsilon \langle \psi(x), y - x \rangle \geq 0, \quad \forall y \in X^{ad}.$$

Dès lors x est bien solution de (VIP).

□

Remarquons que la réciproque est également vérifiée.

Ce lemme est crucial étant donné qu'en résolvant le Problème Auxiliaire, nous pouvons trouver la solution du problème variationnel de départ.

Par conséquent, afin de solutionner une inéquation variationnelle, il est possible de se ramener à la résolution d'un problème d'optimisation (pour lequel nous connaissons plusieurs méthodes de résolution) en introduisant une fonction auxiliaire. Ceci est intéressant si le problème auxiliaire est plus facile à résoudre que (VIP); le choix de la fonction auxiliaire est donc très important.

L'observation précédente suggère un algorithme bâti sur le Principe du Problème Auxiliaire. C'est un algorithme de point fixe.

Algorithme 2.2.1 *(Algorithme de base)*

i) **k = 0** *: Choisir* $x^0 \in X^{ad}$
ii) **à l'étape k** *: Connaissant* x^k*, calculer* $x^{k+1} = \tilde{y}(x^k)$ *en résolvant le Problème Auxiliaire (PA) avec* $x = x^k$ *à savoir :*

$$\min_{y \in X^{ad}} \{M(y) + \langle \varepsilon\psi(x^k) - M'(x^k), y\rangle\}$$

iii) **Arrêt :** *si* $\|x^{k+1} - x^k\|$ *est inférieur à un certain seuil, sinon retour en ii) en incrémentant k d'une unité.*

De nouveau, nous aurions pu considérer que M et ε variaient avec le numéro de l'itération.

2.2.2 Décomposition

La **décomposition** est un des grands atouts de l'algorithme de base.

En choisissant adéquatement la fonction auxiliaire M, il est possible de décomposer le Problème Auxiliaire en sous-problèmes indépendants si on connaît une décomposition des sous-espaces X et X^{ad} en produits de sous-espaces indépendants.

Théorème 2.2.1

Si X *est un produit de* N *sous-espaces* $X_1 \times X_2 \times \ldots \times X_N$ *et si la contrainte implicite représentée par* X^{ad} *est découplée par rapport à cette décompositon, c'est-à-dire si* $X^{ad} = X_1^{ad} \times X_2^{ad} \times \ldots \times X_N^{ad}$ *avec* $X_i^{ad} \subset X_i, \quad \forall i,$
alors, pour obtenir la décomposition du Problème Auxiliaire à chaque étape de l'algorithme, il suffit de choisir une fonction auxiliaire additive $M(x) = \sum_{i=1}^{N} M_i(x_i)$.

De cette manière, nous pouvons remplacer la résolution du problème (VIP) par la résolution d'une suite de problèmes auxiliaires. Il suffit donc de résoudre de manière indépendante et en parallèle N sous-problèmes d'optimisation à chaque étape de l'algorithme.

Remarquons que la décomposition peut se révéler très utile étant donné que le problème variationnel (VIP) s'applique à un grand nombre de problèmes définis sur des ensembles qui sont des produits cartésiens.

2.2.3 Résultats de convergence

Nous allons passer en revue toutes les hypothèses à partir desquelles la convergence de l'algorithme de base a déjà pu être prouvée.

1. Forte monotonie

Commençons par donner un lemme assurant l'**existence** et l'**unicité** de la solution du problème variationnel (VIP).

Lemme 2.2.2

Si ψ est faiblement continu sur tout sous-espace de dimension finie de X et si ψ est fortement monotone de constante a sur X^{ad},
alors le problème (VIP) possède une solution unique x^*.

Preuve :

Sous les hypothèses données, nous sommes assurés grâce au théorème (1.1.1) de l'existence d'une solution.
De plus, la forte monotonie entraîne l'unicité de cette solution (voir [5]).

□

Les deux théorèmes suivants vont nous permettre, d'une part, d'assurer l'unicité de la solution du Problème Auxiliaire et, d'autre part, de prouver la convergence de la suite $\{x^k\}$ engendrée par l'algorithme de base vers l'unique solution de (VIP).

Théorème 2.2.2

Si M' est fortement monotone de constante b sur X^{ad},
alors il existe une solution unique x^{k+1} au Problème Auxiliaire.

Théorème 2.2.3

Si i) ψ *est lipschitzien de constante* A;

ii) $0 < \varepsilon < \frac{2ab}{A^2}$,

alors, la suite $\{x^k\}$ *engendrée par l'algorithme de base converge fortement vers* x^*.

Les preuves de ces deux théorèmes sont données dans [6].

2. Forte monotonie emboîtée

Considérons ψ défini sur le produit de deux espaces de Hilbert $X = \mathcal{U} \times \mathcal{V}$

$$\psi(u, v) = (\psi_u(u, v), \psi_v(u, v)) \text{ avec } \psi_u \in \mathcal{U} \text{ et } \psi_v \in \mathcal{V}.$$

L'ensemble admissible est $X^{ad} = \mathcal{U}^{ad} \times \mathcal{V}^{ad}$.

Le problème variationnel (VIP) peut se formuler de la manière suivante:

Trouver $(u^*, v^*) \in \mathcal{U}^{ad} \times \mathcal{V}^{ad}$ tel que

$$\begin{cases} \langle \psi_u(u^*, v^*), u - u^* \rangle \geq 0, & \forall u \in \mathcal{U}^{ad} \\ \langle \psi_v(u^*, v^*), v - v^* \rangle \geq 0, & \forall v \in \mathcal{V}^{ad}. \end{cases}$$

Définition 2.2.1

L'opérateur ψ *est* **fortement monotone emboîté** *sur* X^{ad} *si*

(P_1) *L'opérateur* $\psi_v(u, v)$ *est fortement monotone sur* $\mathcal{V}^{ad}$, $\forall u \in \mathcal{U}^{ad}$.

(P_2) *L'opérateur* $\Omega : u \rightsquigarrow \psi_u(u, \tilde{v}(u))$ *est fortement monotone sur* $\mathcal{U}^{ad}$ *où* $\tilde{v}(u) \in \mathcal{V}^{ad}$ *est solution de l'inéquation variationnelle* $\langle \psi_v(u, \tilde{v}(u)), v - \tilde{v}(u) \rangle \geq 0$, $\forall v \in \mathcal{V}^{ad}$.

L'hypothèse (P_1) entraîne que le problème partiel, que nous noterons (PP), qui consiste à trouver $\tilde{v}(u) \in \mathcal{V}^{ad}$ tel que $\langle \psi_v(u, \tilde{v}(u)), v - \tilde{v}(u) \rangle \geq 0$, $\forall v \in \mathcal{V}^{ad}$, possède une solution **unique**.

Proposition 2.2.1

1) Tout opérateur fortement monotone est fortement monotone emboité.
2) La propriété de forte monotonie emboitée n'entraîne pas la monotonie simple.

Nous admettrons cette proposition.

Problème variationnel

Dans le cas présent,

Résoudre (VIP) $\Leftrightarrow$ Trouver $u^* \in \mathcal{U}^{ad}$ tel que $\langle \Omega(u^*), u - u^* \rangle \geq 0, \quad \forall u \in \mathcal{U}^{ad}$.

Le problème constituant la partie droite de l'équivalence, que nous noterons (VIPME), nécessite la connaissance de $\tilde{v}(u^*)$; il faut donc résoudre le problème partiel (PP) au moins pour $u = u^*$.

Par conséquent, toute solution de l'inéquation variationnelle impliquant l'opérateur emboîté Ω définit la solution du problème de départ qui est donnée par $(u^*, \tilde{v}(u^*))$.

Etant donné le fait que Ω est fortement monotone, la solution du problème (VIPME) est unique et, par la même occasion, celle du problème (VIP) l'est aussi.

Nous allons reformuler l'algorithme de base en choisissant pour M une fonction auxiliaire additive : $M(u, v) = K(u) + L(v)$ ainsi que deux longueurs de pas, ε et ρ, éventuellement identiques, pour mettre à jour u et v.

Cela donne lieu à l'algorithme suivant.

Théorème 2.2.6

Si le problème variationnel (VIP) admet une solution x^* et si M' est fortement monotone de constante b,
alors il existe une solution unique x^{k+1} au Problème Auxiliaire.

Donnons à présent un théorème de convergence :

Théorème 2.2.7

Si, en plus des hypothèses du théorème précédent, ψ vérifie la propriété de Dunn avec la constante A et si $0 < \varepsilon < \frac{2b}{A}$,
alors la suite $\{\psi(x^k)\}$ converge fortement vers $\psi(x^*)$, la suite $\{x^k\}$ est bornée et tout point d'accumulation faible de $\{x^k\}$ est solution de (VIP).

Les preuves des deux théorèmes précédents sont données dans [22].

Grâce aux propositions développées dans le premier chapitre, nous savons que :

1. L'hypothèse selon laquelle un opérateur possède la propriété de Dunn est plus forte que la monotonie simple.
2. Pour un opérateur lipschitzien, la propriété de Dunn est plus faible que la forte monotonie.

Jusqu'ici, la propriété de Dunn semblait être la propriété minimale qui assure la convergence de la plupart des algorithmes itératifs de résolution mais El-Farouq ([12]) a réussi à prouver la convergence sous des hypothèses encore plus faibles, à savoir la forte pseudo-monotonie et la propriété pseudo-Dunn.

Nous allons démontrer les théorèmes de convergence impliquant, d'une part, la pseudo-monotonie et, d'autre part, la propriété pseudo-Dunn, en considérant le cas plus général qui consiste à choisir le pas ε variant avec l'itération.

4. Forte pseudo-monotonie

Dans ce paragraphe, nous allons supposer que le problème (VIP) admet une solution x^*.

Théorème 2.2.8

Si i) ψ *est fortement pseudo-monotone de constante* e *sur* X^{ad},
ii) M' *est fortement monotone de constante* b *sur* X^{ad},
iii) ψ *est lipschitz continue de module* A *sur* X^{ad},
iv) $\forall k \in \mathbb{N}$, $\alpha < \varepsilon^k < \frac{2eb}{A^2+\beta}$ *où* $\alpha > 0$ *et* $\beta > 0$,
alors la suite $\{x^k\}$ *converge fortement vers* x^*.

De plus, si M' *est lipschitz continue de constante* B *sur* X^{ad},
alors une approximation de l'erreur a posteriori est donnée par:

$$\|x^{k+1} - x^*\| \leq \frac{1}{e}\left(\frac{B}{\varepsilon^k} + A\right) \|x^{k+1} - x^k\|.$$

Vu le lemme (2.2.3), la première hypothèse du théorème entraîne que la solution x^* de (VIP) est **unique**.

De plus, en utilisant la seconde hypothèse et en appliquant le théorème (2.2.2), nous savons qu'il existe une solution unique x^{k+1} au Problème Auxiliaire.

L'approximation permet de connaître une mesure de la distance d'une solution approximée à l'ensemble des solutions du problème variationnel (VIP).

Preuve:

Etant donné que x^* est solution de (VIP), nous avons:

$$\langle \psi(x^*), x - x^* \rangle \geq 0, \quad \forall x \in X^{ad}. \tag{2.3}$$

De plus, comme x^{k+1} est solution du Problème Auxiliaire:

$$\langle M'(x^{k+1}) - M'(x^k), x - x^{k+1} \rangle + \varepsilon^k \langle \psi(x^k), x - x^{k+1} \rangle \geq 0, \quad \forall x \in X^{ad}. \tag{2.4}$$

Considérons la fonction Φ définie par:

$$\Phi(x) = M(x^*) - M(x) - \langle M'(x), x^* - x \rangle. \tag{2.5}$$

Remarquons que comme M' est fortement monotone,

$$M(x^*) - M(x^k) - \langle M'(x^k), x^* - x^k \rangle \geq \frac{b}{2} \|x^* - x^k\|^2 \geq 0,$$

ce qui entraîne que $\Phi(x^k)$ est positive.

Etudions la variation de la fonction Φ en une étape de l'algorithme de base, nous la noterons Δ_k^{k+1}.

$$\begin{aligned} \Delta_k^{k+1} &= \Phi(x^{k+1}) - \Phi(x^k) \\ &= M(x^*) - M(x^{k+1}) - \langle M'(x^{k+1}), x^* - x^{k+1} \rangle - M(x^*) + M(x^k) \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&+\langle M'(x^k), x^* - x^k\rangle \\
&= M(x^k) - M(x^{k+1}) + \langle M'(x^k), x^* - x^k\rangle - \langle M'(x^{k+1}), x^* - x^{k+1}\rangle \\
&= \underbrace{M(x^k) - M(x^{k+1}) - \langle M'(x^k), x^k - x^{k+1}\rangle}_{(I)} + \underbrace{\langle M'(x^k) - M'(x^{k+1}), x^* - x^{k+1}\rangle}_{(II)}.
\end{aligned}
$$

Etant donné la forte monotonie de M', nous savons que :

$$M(x^{k+1}) - M(x^k) - \langle M'(x^k), x^{k+1} - x^k\rangle \geq \tfrac{b}{2}\,\|x^{k+1} - x^k\|^2 \geq 0.$$

Et donc, $\underbrace{M(x^k) - M(x^{k+1}) - \langle M'(x^k), x^k - x^{k+1}\rangle}_{(I)} \leq -\tfrac{b}{2}\|x^{k+1} - x^k\|^2 \leq 0.$ (A)

De plus, si dans (2.4) nous prenons $x = x^*$, nous obtenons :

$$\langle M'(x^{k+1}) - M'(x^k), x^* - x^{k+1}\rangle + \varepsilon^k\langle \psi(x^k), x^* - x^{k+1}\rangle \geq 0$$

ou encore $-\langle M'(x^{k+1}) - M'(x^k), x^* - x^{k+1}\rangle - \varepsilon^k\langle \psi(x^k), x^* - x^{k+1}\rangle \leq 0.$

Par conséquent, (II) $\leq \varepsilon^k\langle \psi(x^k), x^* - x^{k+1}\rangle$

$$= \varepsilon^k\langle \psi(x^k) - \psi(x^{k+1}), x^* - x^{k+1}\rangle + \varepsilon^k\langle \psi(x^{k+1}), x^* - x^{k+1}\rangle.$$

D'un autre côté, sachant, par (2.3), que $\langle \psi(x^*), x^{k+1} - x^*\rangle \geq 0$ et que, par hypothèse, ψ est fortement pseudo-monotone, nous avons, par définition :

$$\langle \psi(x^{k+1}), x^{k+1} - x^*\rangle \geq e\|x^{k+1} - x^*\|^2. \tag{2.6}$$

Dès lors, (II) $\leq \varepsilon^k\langle \psi(x^k) - \psi(x^{k+1}), x^* - x^{k+1}\rangle - e\varepsilon^k\|x^{k+1} - x^*\|^2$

$$\leq \varepsilon^k\|\psi(x^k) - \psi(x^{k+1})\|\|x^* - x^{k+1}\| - e\varepsilon^k\|x^{k+1} - x^*\|^2$$

$$\leq \varepsilon^k A\|x^k - x^{k+1}\|\|x^* - x^{k+1}\| - e\varepsilon^k\|x^{k+1} - x^*\|^2. \tag{B}$$

Les deux dernières inéquations sont obtenues en utilisant respectivement l'inégalité de Cauchy-Schwarz et le fait que l'opérateur ψ est lipschitzien de module A.

En utilisant (A) et (B), nous trouvons :

$$
\begin{aligned}
\Delta_k^{k+1} &= (\mathrm{I}) + (\mathrm{II}) \\
&\leq -\tfrac{b}{2}\|x^{k+1} - x^k\|^2 + \varepsilon^k A\|x^k - x^{k+1}\|\|x^* - x^{k+1}\| - e\varepsilon^k\|x^{k+1} - x^*\|^2. \quad \text{(C)}
\end{aligned}
$$

Considérons maintenant l'inégalité suivante :

$$0 \leq \left(\tfrac{\varepsilon^k A}{\sqrt{2\lambda}}\|x^{k+1} - x^*\| - \sqrt{\tfrac{\lambda}{2}}\|x^k - x^{k+1}\|\right)^2$$

qui peut se réécrire sous la forme :

$$\varepsilon^k A\|x^{k+1} - x^*\|\|x^k - x^{k+1}\| \leq \tfrac{\varepsilon^{2k}A^2}{2\lambda}\|x^{k+1} - x^*\|^2 + \tfrac{\lambda}{2}\|x^k - x^{k+1}\|^2.$$

En prenant $\lambda = b$ et en utilisant (C), nous obtenons :

$$\begin{aligned}\Delta_k^{k+1} &\leq -\tfrac{b}{2}\|x^{k+1}-x^k\|^2 + \tfrac{\varepsilon^{2k}A^2}{2b}\|x^{k+1}-x^*\|^2 + \tfrac{b}{2}\|x^k-x^{k+1}\|^2 - e\varepsilon^k\|x^{k+1}-x^*\|^2 \\ &= (\tfrac{A^2}{2b} - \tfrac{e}{\varepsilon^k})\,\varepsilon^{2k}\|x^{k+1}-x^*\|^2 \\ &= (\tfrac{A^2\varepsilon^k - 2eb}{2b\varepsilon^k})\,\varepsilon^{2k}\|x^{k+1}-x^*\|^2.\end{aligned}$$

Or, par hypothèse, nous savons que : $\forall k \in I\!N \;\; \alpha < \varepsilon^k < \frac{2eb}{A^2+\beta}$ où $\alpha > 0$ et $\beta > 0$

c-à-d $\varepsilon^k A^2 - 2eb < -\varepsilon^k\beta$ et $-\alpha^2 > -\varepsilon^{2k}$

et donc $(\frac{A^2\varepsilon^k - 2eb}{2b\varepsilon^k})\,\varepsilon^{2k} < \frac{-\varepsilon^k\beta}{2b\varepsilon^k}\,\varepsilon^{2k} < -\frac{\alpha^2\beta}{2b}$.

Nous obtenons de ce fait : $\Delta_k^{k+1} \leq -\frac{\alpha^2\beta}{2b}\|x^{k+1}-x^*\|^2 \leq 0$.

Par conséquent, si $x^{k+1} \neq x^*$, la suite $\{\Phi(x^k)\}$ décroît strictement et comme elle est positive, elle va donc converger et la différence entre deux termes consécutifs de la suite va tendre vers zéro.

Etant donné que Δ_k^{k+1} converge vers 0, x^k va converger fortement vers x^*.

L'approximation a posteriori s'obtient en prenant (2.4) avec $x = x^*$,

à savoir $\langle M'(x^{k+1}) - M'(x^k), x^* - x^{k+1}\rangle + \varepsilon^k\langle\psi(x^k), x^* - x^{k+1}\rangle \geq 0$

et en l'additionant à (2.6) multiplié par ε^k, c-à-d

$\varepsilon^k\,\langle -\psi(x^{k+1}), x^* - x^{k+1}\rangle \geq e\varepsilon^k\,\|x^{k+1}-x^*\|^2$,

ce qui nous donne :

$$\langle M'(x^{k+1}) - M'(x^k), x^* - x^{k+1}\rangle + \varepsilon^k\langle\psi(x^k) - \psi(x^{k+1}), x^* - x^{k+1}\rangle \geq e\varepsilon^k\|x^{k+1}-x^*\|^2.$$

En utilisant l'inégalité de Cauchy-Schwarz, nous trouvons :

$$\begin{aligned}\|M'(x^{k+1}) - M'(x^k)\|\|x^* - x^{k+1}\| + \varepsilon^k\|\psi(x^k) - \psi(x^{k+1})\|\;\|x^* - x^{k+1}\| \\ \geq e\varepsilon^k\|x^{k+1}-x^*\|^2.\end{aligned}$$

De plus comme, par hypothèse, M' est lipschitz continue de constante B sur X^{ad} et ψ est lipschitz continue de constante A sur X^{ad}, nous obtenons :

$$B\;\|x^{k+1}-x^k\| + \varepsilon^k A\;\|x^k - x^{k+1}\| \geq e\varepsilon^k\;\|x^{k+1}-x^*\|.$$

Ou encore : $\|x^{k+1}-x^*\| \leq \frac{1}{e\varepsilon^k}(B + \varepsilon^k A)\;\|x^k - x^{k+1}\|$

$$= \tfrac{1}{e}\,(\tfrac{B}{\varepsilon^k} + A)\;\|x^k - x^{k+1}\|.$$

□

Cas des opérateurs multivoques

Nous avons déjà vu que, dans le cas d'un opérateur multivoque, le problème (VIP) prend la forme suivante :

$$\boxed{\text{Trouver } x^* \in X^{ad} \text{ tel que } \exists\, r^* \in \psi(x^*),\ \langle r^*, x - x^* \rangle \geq 0,\ \ \forall x \in X^{ad}.} \quad \text{(VIP')}$$

De plus, dans ce cas, un opérateur est **fortement pseudo-monotone** si :

$$\exists e > 0,\ \forall x_1, x_2 \in X^{ad},\ \forall r_1 \in \psi(x_1) \text{ et } r_2 \in \psi(x_2),$$
$$\langle r_1, x_2 - x_1 \rangle \geq 0 \Rightarrow \langle r_2, x_2 - x_1 \rangle \geq e\|x_2 - x_1\|^2.$$

Nous choisirons un élément r^k dans l'ensemble $\psi(x^k)$ qui jouera dès lors le rôle du $\psi(x^k)$ dans le cas d'un opérateur univoque.
De plus, nous allons prendre des pas ε^k qui satisfont les conditions suivantes :

- $\varepsilon^k > 0$;
- $\sum_{k=0}^{+\infty} \varepsilon^k = +\infty$;
- $\sum_{k=0}^{+\infty} (\varepsilon^k)^2 < +\infty$.

Nous allons considérer l'algorithme suivant :

Algorithme 2.2.3

i) **k = 0** *: Choisir* $x^0 \in X^{ad}$.
ii) **à l'étape k** *: Connaissant* x^k, *calculer* $x^{k+1} = \tilde{y}(x^k)$ *en résolvant le problème auxiliaire suivant :*

$$\min_{x \in X^{ad}} \{M(x) + \langle \varepsilon^k r^k - M'(x^k), x \rangle\} \quad \textit{avec} \quad r^k \in \psi(x^k). \tag{2.7}$$

iii) **Arrêt :** *si* $\|x^{k+1} - x^k\|$ *est inférieur à un certain seuil, sinon retour en ii) en incrémentant k d'une unité.*

Donnons un théorème permettant de prouver la convergence de la suite engendrée par l'algorithme vers la solution du problème (VIP).

Théorème 2.2.9

Si i) ψ *est fortement pseudo-monotone de constante e sur* X^{ad},
ii)M' *est fortement monotone de constante b sur* X^{ad},
iii) $\exists \alpha$ *et* $\beta > 0$ *tels que* $\forall x \in X^{ad}, \quad \forall r \in \psi(x), \quad \|r\| \leq \alpha\|x\| + \beta$,
iv) la suite $\{\varepsilon^k\}$ *satisfait* - $\varepsilon^k > 0$;
- $\sum_{k=0}^{+\infty} \varepsilon^k = +\infty$;
- $\sum_{k=0}^{+\infty} (\varepsilon^k)^2 < +\infty$,

alors la suite $\{x^k\}$ *converge fortement vers* x^*.

L'hypothèse iii), qui remplace l'hypothèse lipschitzienne que nous avions dans le cas univoque, signifie que la norme de ψ n'augmente pas plus vite que linéairement avec la norme de x.

Le résultat du lemme (2.2.3) concernant l'unicité de la solution du problème (VIP) est toujours valable dans le cas multivoque.
Dès lors, la première hypothèse entraîne que la solution x^* de (VIP) est **unique**.

De plus, en utilisant la seconde hypothèse et en appliquant le théorème (2.2.2), nous savons qu'il existe une solution unique x^{k+1} au Problème Auxiliaire.

Afin de pouvoir démontrer le théorème (2.2.9), nous avons besoin de deux lemmes techniques que nous admettrons (les preuves en sont données dans [7]).

Lemme 2.2.4

Si $\{x^k\}$ *et* $\{\mu^k\}$ *sont deux suites de* $\mathbb{R}^+$ *telles que*

i) $$\sum_{k \in \mathbb{N}} \mu^k < +\infty;$$

ii) $$x^N \leq \sum_{k=1}^{N-1} \mu^k X^{k+1} + \eta^N \text{ avec } X^k = \sup_{l \leq k} x^l \text{ et } \eta^n \leq \eta, \quad \forall N \in \mathbb{N},$$

alors $\{x^k\}$ *est bornée.*

Lemme 2.2.5

Soit f une fonctionnelle lipschitzienne sur un espace de Hilbert X.
Considérons $\{x^k | k \in I\!N\} \subseteq X$ et $\{\varepsilon^k | k \in I\!N\} \subseteq I\!R^+$ telles que

i) $\sum_{k \in I\!N} \varepsilon^k = +\infty$;

ii) $\exists \xi \ , \forall k \in I\!N, \ \|x^{k+1} - x^k\| \leq \xi \varepsilon^k$;

iii) $\exists \xi \ , \sum_{k \in I\!N} \ \varepsilon^k |f(x^k) - \xi| < +\infty$,

alors

$$\lim_{k \to \infty} f(x^k) = \xi.$$

Démontrons à présent le théorème (2.2.9).

Preuve du théorème:

Etant donné que x^* est solution de (VIP'), nous avons que:

$$\exists \ r^* \in \psi(x^*) \ tq \ \langle r^*, x - x^* \rangle \geq 0, \quad \forall x \in X^{ad}. \tag{2.8}$$

De plus, comme x^{k+1} est solution du Problème Auxiliaire, nous savons également que:

$$\langle M'(x^{k+1}) - M'(x^k), x - x^{k+1} \rangle + \varepsilon^k \langle r^k, x - x^{k+1} \rangle \geq 0, \quad \forall x \in X^{ad} \tag{2.9}$$

avec $r^k \in \psi(x^k)$.

Considérons la fonction Φ définie par:

$$\Phi(x) = M(x^*) - M(x) - \langle M'(x), x^* - x \rangle \tag{2.10}$$

et étudions la variation de cette fonction en une étape de l'algorithme (2.2.3).

$$\begin{aligned}
\Delta_k^{k+1} &= \Phi(x^{k+1}) - \Phi(x^k) \\
&= M(x^*) - M(x^{k+1}) - \langle M'(x^{k+1}), x^* - x^{k+1} \rangle - M(x^*) + M(x^k) \\
&\quad + \langle M'(x^k), x^* - x^k \rangle \\
&= M(x^k) - M(x^{k+1}) + \langle M'(x^k), x^* - x^k \rangle - \langle M'(x^{k+1}), x^* - x^{k+1} \rangle \\
&= \underbrace{M(x^k) - M(x^{k+1}) - \langle M'(x^k), x^k - x^{k+1} \rangle}_{(I)} + \underbrace{\langle M'(x^k) - M'(x^{k+1}), x^* - x^{k+1} \rangle}_{(II)}.
\end{aligned}$$

Etant donné la forte monotonie de M', nous savons que:

$$M(x^{k+1}) - M(x^k) - \langle M'(x^k), x^{k+1} - x^k \rangle \geq \tfrac{b}{2} \ \|x^{k+1} - x^k\|^2 \geq 0.$$

Et donc, $\underbrace{M(x^k) - M(x^{k+1}) - \langle M'(x^k), x^k - x^{k+1}\rangle}_{(I)} \leq -\frac{b}{2}\|x^{k+1} - x^k\|^2 \leq 0.$ (A)

De plus, si dans (2.9) nous prenons $x = x^*$, cela donne :

$$\langle M'(x^{k+1}) - M'(x^k), x^* - x^{k+1}\rangle + \varepsilon^k\langle r^k, x^* - x^{k+1}\rangle \geq 0,$$

ou encore $-\langle M'(x^{k+1}) - M'(x^k), x^* - x^{k+1}\rangle - \varepsilon^k\langle r^k, x^* - x^{k+1}\rangle \leq 0.$

Par conséquent, (II) $\leq \varepsilon^k\langle r^k, x^* - x^{k+1}\rangle$

$$= \varepsilon^k\langle r^k, x^* - x^k\rangle + \varepsilon^k\langle r^k, x^k - x^{k+1}\rangle.$$

Comme $\langle r^*, x^k - x^*\rangle \geq 0$ (par (2.8)) et que ψ est fortement pseudo-monotone, nous avons, par définition :

$$\langle r^k, x^k - x^*\rangle \geq e\|x^k - x^*\|^2. \tag{2.11}$$

Dès lors, (II) $\leq -e\varepsilon^k\|x^k - x^*\|^2 + \varepsilon^k\langle r^k, x^k - x^{k+1}\rangle$

$$\leq -e\varepsilon^k\|x^k - x^*\|^2 + \varepsilon^k\|r^k\|\|x^k - x^{k+1}\|, \tag{B}$$

la dernière inéquation étant obtenue en appliquant l'inégalité de Cauchy-Schwarz.

En utilisant (A) et (B), nous obtenons :

$$\begin{aligned}\Delta_k^{k+1} &= (\mathrm{I}) + (\mathrm{II}) \\ &\leq -\tfrac{b}{2}\|x^{k+1} - x^k\|^2 - e\,\varepsilon^k\|x^k - x^*\|^2 + \varepsilon^k\|r^k\|\|x^k - x^{k+1}\|. \end{aligned} \tag{C}$$

Considérons maintenant l'inégalité suivante : $0 \leq (\frac{\varepsilon^k}{\sqrt{2\lambda}}\|r^k\| - \sqrt{\frac{\lambda}{2}}\|x^k - x^{k+1}\|)^2$

qui peut se réécrire sous la forme :

$$\varepsilon^k\|r^k\|\|x^k - x^{k+1}\| \leq \tfrac{\varepsilon^{2k}}{2\lambda}\|r^k\|^2 + \tfrac{\lambda}{2}\|x^k - x^{k+1}\|^2.$$

En prenant $\lambda = b$ et en utilisant (C), nous trouvons :

$$\begin{aligned}\Delta_k^{k+1} &\leq -\tfrac{b}{2}\|x^{k+1} - x^k\|^2 - e\varepsilon^k\|x^k - x^*\|^2 + \tfrac{\varepsilon^{2k}}{2b}\|r^k\|^2 + \tfrac{b}{2}\|x^k - x^{k+1}\|^2 \\ &= \tfrac{\varepsilon^{2k}}{2b}\|r^k\|^2 - e\varepsilon^k\|x^k - x^*\|^2.\end{aligned}$$

Or, par hypothèse, nous savons que $\|r^k\| \leq \alpha\|x^k\| + \beta$

$$\leq \alpha\|x^k - x^*\| + \alpha\|x^*\| + \beta.$$

Dès lors, en utilisant l'inégalité $(u - v)^2 \geq 0$ qui se réécrit également

$$(u + v)^2 \leq 2(u^2 + v^2),$$

nous obtenons $\|r^k\|^2 \leq (\alpha\|x^k - x^*\| + \alpha\|x^*\| + \beta)^2$

$\leq 2(\alpha^2\|x^k - x^*\|^2 + (\alpha\|x^*\| + \beta)^2)$.

En divisant les deux membres par $2b$, nous avons : $\frac{\|r^k\|^2}{2b} \leq \frac{(\alpha^2\|x^k - x^*\|^2 + (\alpha\|x^*\| + \beta)^2)}{b}$.

Notons $\gamma = \frac{\alpha^2}{b}$ et $\delta = \frac{1}{b}(\alpha\|x^*\| + \beta)^2$; cela donne $\frac{\|r^k\|^2}{2b} \leq \gamma \|x^k - x^*\|^2 + \delta$.

Dès lors, $\Delta_k^{k+1} \leq \varepsilon^{2k} (\gamma\|x^k - x^*\|^2 + \delta) - e\varepsilon^k \|x^k - x^*\|^2$.

Sommons ces inégalités pour k allant de 0 à $N-1$; nous trouvons :

$$\sum_{k=0}^{N-1} \Delta_k^{k+1} = \sum_{k=0}^{N-1} (\Phi(x^{k+1}) - \Phi(x^k)) = \Phi(x^1) - \Phi(x^0) + \Phi(x^2) - \Phi(x^1) + \ldots + \Phi(x^N) - \Phi(x^{N-1})$$

$$= \Phi(x^N) - \Phi(x^0) \leq \sum_{k=0}^{N-1} (\varepsilon^{2k}(\gamma\|x^k - x^*\|^2 + \delta) - e\varepsilon^k \|x^k - x^*\|^2).$$

Par conséquent,

$$\Phi(x^N) \leq \Phi(x^0) + \sum_{k=0}^{N-1} (\varepsilon^{2k}(\gamma\|x^k - x^*\|^2 + \delta) - e\varepsilon^k \|x^k - x^*\|^2)$$

$$\leq \Phi(x^0) + \sum_{k=0}^{N-1} (\varepsilon^{2k}(\gamma\|x^k - x^*\|^2 + \delta)). \qquad (B)$$

De plus, comme M' est fortement monotone, nous avons
$M(x^*) - M(x^k) - \langle M'(x^k), x^* - x^k\rangle = \Phi(x^k) \geq \frac{b}{2}\|x^k - x^*\|^2 \geq 0$,
ce qui donne pour k = N :

$$\frac{b}{2}\|x^N - x^*\|^2 \leq \Phi(x^N) \leq \Phi(x^0) + \sum_{k=0}^{N-1} (\varepsilon^{2k}(\gamma\|x^k - x^*\|^2 + \delta)),$$

c-à-d :

$$\|x^N - x^*\|^2 \leq \frac{2}{b}\,\Phi(x^0) + \frac{2}{b}\sum_{k=0}^{N-1} (\varepsilon^{2k}(\gamma\|x^k - x^*\|^2 + \delta))$$

$$= \frac{2}{b}\,\Phi(x^0) + \frac{2}{b}\varepsilon^0(\gamma\|x^0 - x^*\|^2 + \delta) + \frac{2}{b}\sum_{k=1}^{N-1} (\varepsilon^{2k}(\gamma\|x^k - x^*\|^2 + \delta))$$

$$= \frac{2}{b}\,\Phi(x^0) + \frac{2\gamma}{b}\,\|x^0 - x^*\|^2 + \sum_{k=1}^{N-1} \frac{2\gamma}{b}\,(\varepsilon^{2k}\|x^k - x^*\|^2) + \sum_{k=0}^{N-1} (\frac{2\delta}{b}\,\varepsilon^{2k}).$$

Notons

$$\eta^N = \frac{2}{b}\Phi(x^0) + \frac{2\gamma}{b}\,\|x^0 - x^*\|^2 + \sum_{k=0}^{N-1}\frac{2\delta}{b}\varepsilon^{2k} \tag{2.12}$$

et $\mu^k = \frac{2\gamma}{b}\varepsilon^{2k}$,

nous obtenons

$$\|x^N - x^*\|^2 \leq \eta^N + \sum_{k=1}^{N-1}\mu^k\|x^k - x^*\|^2.$$

Nous savons que $\quad \forall k, \quad \|x^k - x^*\|^2 \leq \sup_{l\leq k+1}\|x^l - x^*\|^2,$

et donc

$$\|x^N - x^*\| \leq \eta^N + \sum_{k=1}^{N-1}\mu^k \sup_{l\leq k+1}\|x^l - x^*\|^2.$$

De plus, en utilisant (2.12) et le fait que, par hypothèse, $\sum_{k=0}^{+\infty}(\varepsilon^k)^2 < +\infty$, cela implique qu'il existe η tel que $\eta^N \leq \eta$, $\forall N \in I\!N$; et donc, grâce au lemme (2.2.4), nous pouvons conclure que $\{x^k\}$ est <u>bornée</u>.

Dès lors, la fonction $x \rightsquigarrow \|x - x^*\|^2$ est lipschitzienne sur une enveloppe convexe bornée de cette suite.

Etant donnés (B), $\sum_{k=0}^{+\infty}(\varepsilon^k)^2 < +\infty$ et le fait que la suite $\{x^k\}$ soit bornée , nous avons :

$$\sum_{k\in I\!N}\varepsilon^k\|x^k - x^*\|^2 < +\infty. \tag{2.13}$$

Si nous prenons (2.9) avec $x = x^k$:

$$0 \leq \langle M'(x^{k+1}) - M'(x^k), x^k - x^{k+1}\rangle + \varepsilon^k\langle r^k, x^k - x^{k+1}\rangle \quad \forall x \in X^{ad},$$

et que nous appliquons la forte monotonie de M', nous obtenons :

$$0 \leq -b\,\|x^{k+1} - x^k\|^2 + \varepsilon^k\langle r^k, x^k - x^{k+1}\rangle.$$

Par conséquent, $\|x^{k+1} - x^k\|^2 \leq \frac{\varepsilon^k}{b}\langle r^k, x^k - x^{k+1}\rangle$

$$\leq \tfrac{\varepsilon^k}{b}\|r^k\|\;\|x^k - x^{k+1}\|.$$

En supposant que $\|x^k - x^{k+1}\|$ est non nul et en utilisant l'hypothèse ii), nous trouvons : $\|x^{k+1} - x^k\| \leq \frac{\varepsilon^k}{b}\|r^k\| \leq \varepsilon^k(\frac{\alpha\,\|x^k\|+\beta}{b})$.

Or, étant donné que la suite $\{x^k\}$ est bornée, $\exists\xi$ tel que

$$\|x^{k+1} - x^k\| \leq \xi\varepsilon^k. \tag{2.14}$$

En utilisant le lemme (2.2.5) avec (2.13) et (2.14) nous obtenons que :

$$\lim_{k \to +\infty} x^k = x^*$$

et donc x^k converge fortement vers x^*.

□

5. Pseudo-Dunn

Dans ce paragraphe, nous allons continuer à supposer que le problème (VIP) admet une solution x^*.

Comme nous l'avons déjà souligné, tout opérateur possédant la propriété pseudo-Dunn est univoque. Il n'est donc pas nécessaire de traiter le cas multivoque.

Commençons par donner un lemme.

Lemme 2.2.6

Si ψ possède la propriété pseudo-Dunn avec la constante A,
alors il existe un et un seul x^* tel que $\langle \psi(x^*), x - x^* \rangle \geq 0, \quad \forall x \in X^{ad}$.

Preuve :

Considérons $\psi(x^*)$ et $\psi(y^*)$ qui vérifient la propriété :

$$\exists x^* \text{ et } y^* \in X^{ad} \text{ tels que } \langle \psi(x^*), x - x^* \rangle \geq 0, \quad \forall x \in X^{ad} \quad \text{(a)}$$

$$\langle \psi(y^*), x - y^* \rangle \geq 0, \quad \forall x \in X^{ad} \quad \text{(b)}$$

et montrons qu'ils sont égaux.

Prenons $x = y^*$ dans (a) : $\langle \psi(x^*), y^* - x^* \rangle \geq 0$.

Or, par hypothèse, ψ est pseudo-Dunn ce qui entraîne que :

$$\langle \psi(y^*), y^* - x^* \rangle \geq \tfrac{1}{A} \|\psi(y^*) - \psi(x^*)\|^2. \quad \text{(c)}$$

De plus, si nous utilisons (b) avec $x = x^*$, nous obtenons $\langle \psi(y^*), x^* - y^* \rangle \geq 0$. (d)

En combinant (c) et (d), nous avons $\frac{1}{A} \|\psi(y^*) - \psi(x^*)\|^2 \leq 0$, ce qui a comme conséquence que $\psi(x^*) = \psi(y^*)$.

□

Donnons à présent un théorème de convergence qui permet de prouver que la suite $\{x^k\}$ engendrée par l'algorithme converge bien vers une solution de (VIP).

Théorème 2.2.10

Si ψ vérifie l'hypothèse pseudo-Dunn avec la constante A sur X^{ad}, si M' est fortement monotone de constante b sur X^{ad} et si $\forall k \in \mathbb{N}$, $\varepsilon^{k+1} < \varepsilon^k$ et $\alpha < \varepsilon^k < \frac{2b}{A+\beta}$ où α et β sont >0,

alors i) la suite $\{\psi(x^k)\}$ converge vers $\psi(x^*)$;

ii) $\|x^{k+1} - x^k\|$ converge vers 0;

iii) $\{x^k\}$ est bornée.

De plus, si nous supposons que M' est lipschitz continue et ψ Hölder continue sur X^{ad}, alors chaque point d'accumulation faible de $\{x^k\}$ est une solution de (VIP).

En utilisant le fait que le problème variationnel (VIP) admet x^* comme solution et que M' est fortement monotone de constante b sur X^{ad}, si nous appliquons le théorème (2.2.2), nous savons qu'il existe une solution unique x^{k+1} au Problème Auxiliaire.

Preuve:

Etant donné que x^* est solution de (VIP), nous avons:

$$\langle \psi(x^*), x - x^* \rangle \geq 0, \quad \forall x \in X^{ad}. \tag{2.15}$$

De plus, comme x^{k+1} est solution du Problème Auxiliaire:

$$\langle M'(x^{k+1}) - M'(x^k), x - x^{k+1} \rangle + \varepsilon^k \langle \psi(x^k), x - x^{k+1} \rangle \geq 0, \quad \forall x \in X^{ad}. \tag{2.16}$$

Considérons la fonction Λ définie par:

$$\Lambda(x, \varepsilon) = \Phi(x) + \Omega(x, \varepsilon) \tag{2.17}$$

avec
$$\begin{cases} \Phi(x) = M(x^*) - M(x) - \langle M'(x), x^* - x \rangle \\ \Omega(x, \varepsilon) = \varepsilon \, \langle \psi(x^*), x - x^* \rangle \geq 0. \end{cases}$$

Par hypothèse, M' est fortement monotone et donc:

$$\Phi(x^k) = M(x^*) - M(x^k) - \langle M'(x^k), x^* - x^k\rangle \geq \tfrac{b}{2}\,\|x^k - x^*\|^2 \geq 0.$$

Par conséquent, $\Lambda(x^k,\varepsilon^k) = \Phi(x^k) + \Omega(x^k,\varepsilon^k)$
$$\geq \tfrac{b}{2}\,\|x^k - x^*\|^2 + \Omega(x^k,\varepsilon^k) \geq \tfrac{b}{2}\,\|x^k - x^*\|^2.$$

Etudions la variation de Λ en une étape de l'algorithme de base, nous la notons Γ_k^{k+1}.

$$\begin{aligned}
\Gamma_k^{k+1} &= \Lambda(x^{k+1},\varepsilon^{k+1}) - \Lambda(x^k,\varepsilon^k)\\
&= M(x^*) - M(x^{k+1}) - \langle M'(x^{k+1}), x^* - x^{k+1}\rangle + \varepsilon^{k+1}\langle\psi(x^*), x^{k+1} - x^*\rangle\\
&\quad -M(x^*) + M(x^k) + \langle M'(x^k), x^* - x^k\rangle - \varepsilon^k\langle\psi(x^*), x^k - x^*\rangle\\
&= M(x^k) - M(x^{k+1}) + \langle M'(x^k), x^* - x^k\rangle - \langle M'(x^{k+1}), x^* - x^{k+1}\rangle\\
&\quad +\varepsilon^{k+1}\langle\psi(x^*), x^{k+1} - x^*\rangle - \varepsilon^k\langle\psi(x^*), x^k - x^*\rangle\\
&= \underbrace{M(x^k) - M(x^{k+1}) - \langle M'(x^k), x^k - x^{k+1}\rangle}_{(I)} + \underbrace{\langle M'(x^k) - M'(x^{k+1}), x^* - x^{k+1}\rangle}_{(II)}\\
&\quad + \underbrace{\varepsilon^{k+1}\langle\psi(x^*), x^{k+1} - x^*\rangle - \varepsilon^k\langle\psi(x^*), x^k - x^*\rangle}_{(III)}.
\end{aligned}$$

Etant donné la forte monotonie de M', nous avons que:

$$M(x^{k+1}) - M(x^k) - \langle M'(x^k), x^{k+1} - x^k\rangle \geq \tfrac{b}{2}\,\|x^{k+1} - x^k\|^2 \geq 0.$$

Dès lors,

$$(I) \leq -\frac{b}{2}\|x^{k+1} - x^k\|^2 \leq 0. \tag{2.18}$$

En outre, si nous prenons $x = x^*$ dans (2.16), cela nous donne:

$$\langle M'(x^{k+1}) - M'(x^k), x^* - x^{k+1}\rangle + \varepsilon^k\langle\psi(x^k), x^* - x^{k+1}\rangle \geq 0,$$
ou encore $-\langle M'(x^{k+1}) - M'(x^k), x^* - x^{k+1}\rangle - \varepsilon^k\langle\psi(x^k), x^* - x^{k+1}\rangle \leq 0.$

Par conséquent, $(II) \leq \varepsilon^k\langle\psi(x^k), x^* - x^{k+1}\rangle$
$$= \varepsilon^k\langle\psi(x^k), x^* - x^k\rangle + \varepsilon^k\langle\psi(x^k), x^k - x^{k+1}\rangle.$$

D'un autre côté, sachant que $\langle\psi(x^*), x^k - x^*\rangle \geq 0$ (par (2.15)) et que ψ vérifie la propriété pseudo-Dunn, nous avons, par définition:

$$\langle\psi(x^k), x^k - x^*\rangle \geq \frac{1}{A}\|\psi(x^k) - \psi(x^*)\|^2. \tag{2.19}$$

Dès lors,

$$(II) \leq -\frac{\varepsilon^k}{A}\|\psi(x^k) - \psi(x^*)\|^2 + \varepsilon^k\langle\psi(x^k), x^k - x^{k+1}\rangle. \tag{2.20}$$

De plus, comme par hypothèse, $\forall k \in I\!N,\ \ \varepsilon^{k+1} < \varepsilon^k$, nous obtenons :

$$(III) = \varepsilon^{k+1}\langle \psi(x^*), x^{k+1} - x^*\rangle - \varepsilon^k \langle \psi(x^*), x^k - x^*\rangle \tag{2.21}$$

En utilisant (2.20) et (2.21), nous trouvons :

$$\begin{aligned}(II)+(III) &\leq -\tfrac{\varepsilon^k}{A}\|\psi(x^k)-\psi(x^*)\|^2 + \varepsilon^k\langle \psi(x^k), x^k - x^{k+1}\rangle + \varepsilon^k\langle \psi(x^*), x^{k+1} - x^*\rangle \\ &\qquad -\varepsilon^k\langle \psi(x^*), x^k - x^*\rangle \\ &= -\tfrac{\varepsilon^k}{A}\|\psi(x^k)-\psi(x^*)\|^2 + \varepsilon^k\langle \psi(x^k), x^k - x^{k+1}\rangle + \varepsilon^k\langle \psi(x^*), x^{k+1} - x^k\rangle \\ &= -\tfrac{\varepsilon^k}{A}\|\psi(x^k)-\psi(x^*)\|^2 + \varepsilon^k\langle \psi(x^k) - \psi(x^*), x^k - x^{k+1}\rangle.\end{aligned}$$

Par conséquent, en combinant cette dernière inéquation avec (2.18), nous parvenons à :

$$\begin{aligned}\Gamma_k^{k+1} &= (I) + (II) + (III) \\ &\leq -\tfrac{b}{2}\|x^{k+1} - x^k\|^2 - \tfrac{\varepsilon^k}{A}\|\psi(x^k) - \psi(x^*)\|^2 + \varepsilon^k\langle \psi(x^k) - \psi(x^*), x^k - x^{k+1}\rangle.\end{aligned}$$

En appliquant l'inégalité de Cauchy-Schwarz, nous trouvons :

$$\Gamma_k^{k+1} \leq -\frac{b}{2}\|x^{k+1} - x^k\|^2 - \frac{\varepsilon^k}{A}\|\psi(x^k) - \psi(x^*)\|^2 + \varepsilon^k\|\psi(x^k) - \psi(x^*)\|\ \|x^k - x^{k+1}\|. \tag{2.22}$$

Considérons maintenant l'inégalité suivante :

$$0 \leq (\tfrac{\varepsilon^k}{\sqrt{2\lambda}}\|\psi(x^k) - \psi(x^*)\| - \sqrt{\tfrac{\lambda}{2}}\|x^k - x^{k+1}\|)^2$$

qui peut se réécrire sous la forme :

$$\varepsilon^k\|\psi(x^k) - \psi(x^*)\|\|x^k - x^{k+1}\| \leq \tfrac{\varepsilon^{2k}}{2\lambda}\|\psi(x^k) - \psi(x^*)\|^2 + \tfrac{\lambda}{2}\|x^k - x^{k+1}\|^2.$$

En appliquant ce résultat à l'inégalité (2.22), nous obtenons :

$$\begin{aligned}\Gamma_k^{k+1} &\leq -\tfrac{b}{2}\|x^{k+1} - x^k\|^2 - \tfrac{\varepsilon^k}{A}\|\psi(x^k) - \psi(x^*)\|^2 + \tfrac{\varepsilon^{2k}}{2\lambda}\|\psi(x^k) - \psi(x^*)\|^2 + \tfrac{\lambda}{2}\|x^k - x^{k+1}\|^2 \\ &= (\tfrac{\lambda}{2} - \tfrac{b}{2})\|x^k - x^{k+1}\|^2 + \varepsilon^k(\tfrac{\varepsilon^k}{2\lambda} - \tfrac{1}{A})\|\psi(x^k) - \psi(x^*)\|^2.\end{aligned}$$

Or, par hypothèse, nous savons que $\forall k \in I\!N,\ \ \alpha < \varepsilon^k < \frac{2\lambda}{A+\beta}$ où $\alpha > 0$ et $\beta > 0$

et donc, $\Gamma_k^{k+1} < (\frac{\lambda}{2} - \frac{b}{2})\|x^k - x^{k+1}\|^2 + \varepsilon^k(\frac{1}{A+\beta} - \frac{1}{A})\|\psi(x^k) - \psi(x^*)\|^2$

$$\begin{aligned}&< (\tfrac{\lambda}{2} - \tfrac{b}{2})\|x^k - x^{k+1}\|^2 - \alpha(\tfrac{A+\beta-A}{A(A+\beta)})\|\psi(x^k) - \psi(x^*)\|^2 \\ &= (\tfrac{\lambda}{2} - \tfrac{b}{2})\|x^k - x^{k+1}\|^2 - (\tfrac{\alpha\beta}{A(A+\beta)})\|\psi(x^k) - \psi(x^*)\|^2.\end{aligned}$$

Nous en concluons que, si $\lambda < b$, alors $\Gamma_k^{k+1} \leq 0$.

Par conséquent, si $x^{k+1} \neq x^k$ et si $\psi(x^k) \neq \psi(x^*)$ (dans le cas contraire, vu (2.15) et (2.16) nous avons bien que x^* est solution de (VIP)), la suite $\{\Lambda(x^k, \varepsilon^k)\}$ décroît strictement et, comme elle est positive, elle va converger; dès lors la différence entre deux termes consécutifs de la suite va tendre vers zéro.

Or, si Γ_k^{k+1} converge vers 0, alors $\|\psi(x^k) - \psi(x^*)\|$ converge vers 0 ce qui prouve le point i) et
$\|x^k - x^{k+1}\|$ converge vers 0 ce qui démontre le point ii).

Pour vérifier le point iii), il suffit de remarquer que, comme la suite $\{\Lambda(x^k, \varepsilon^k)\}$ converge, elle est bornée et donc, vu que $\Lambda(x^k, \varepsilon^k) \geq \frac{b}{2} \|x^k - x^*\|^2 \geq 0$, la suite $\{x^k\}$ est également bornée.

Montrons maintenant que si nous supposons que M' est lipschitz continue et que ψ est Hölder continue sur X^{ad}, chaque point d'accumulation faible de $\{x^k\}$ est une solution de (VIP).

Notons $\bar{x}$ un point d'accumulation faible de $\{x^k\}$ et $\{x^{k_i}\}$ une sous-suite de $\{x^k\}$ convergeant vers $\bar{x}$.

Utilisons l'inégalité (2.16) à laquelle nous appliquons l'inégalité de Cauchy-Schwarz, nous trouvons :

$$0 \leq \|M'(x^{k+1}) - M'(x^k)\| \, \|x - x^{k+1}\| - \varepsilon^k \langle \psi(x^k), x^{k+1} - x \rangle.$$

Cependant, par hypothèse, M' est lipschitz continue de constante B et $\varepsilon^k > \alpha$,
ce qui nous donne : $0 \leq B\|x^{k+1} - x^k\| \, \|x - x^{k+1}\| - \alpha \langle \psi(x^k), x^{k+1} - x \rangle$,
ou encore : $\langle \psi(x^k), x - x^{k+1} \rangle \geq -\frac{B}{\alpha} \|x^{k+1} - x^k\| \, \|x - x^{k+1}\|$.

De plus, si nous prenons la limite et si nous utilisons les résultats i) et ii), nous obtenons :

$$\langle \psi(x^*), x - \bar{x} \rangle \geq 0, \quad \forall x \in X^{ad}. \tag{2.23}$$

En outre, $\langle \psi(\bar{x}), x^{k_i} - \bar{x} \rangle$ converge vers 0, ce qui entraîne que :

a) soit $\psi(\bar{x}) = 0$

Dès lors, $\bar{x}$ est solution de (VIP).

b) soit $\psi(\bar{x}) \neq 0$

Dans ce cas, si nous prenons $y^{k_i} = x^{k_i} - \frac{\langle \psi(\bar{x}), x^{k_i} - \bar{x} \rangle}{\|\psi(\bar{x})\|^2} \psi(\bar{x})$, nous obtenons

$$\langle \psi(\bar{x}), y^{k_i} - \bar{x} \rangle = 0. \tag{2.24}$$

De plus, vu que $\|y^{k_i} - x^{k_i}\| = \| - \frac{\langle \psi(\bar{x}), x^{k_i} - \bar{x} \rangle}{\|\psi(\bar{x})\|^2} \psi(\bar{x})\|$, et que $\langle \psi(\bar{x}), x^{k_i} - \bar{x} \rangle$ converge vers 0, nous avons $\|y^{k_i} - x^{k_i}\|$ qui converge vers 0.

Dès lors, 1) y^{k_i} converge faiblement vers $\bar{x}$.

2) Par hypothèse, ψ est Hölder continu c-à-d :

$\exists c > 0$ et $D \in I\!R^+ \ : \ \forall x, y \in X^{ad} \ \ \|\psi(x) - \psi(y)\| \leq D\|x - y\|^c$

et donc $\|\psi(y^{k_i}) - \psi(x^{k_i})\| \leq D\|y^{k_i} - x^{k_i}\|^c$.

Par conséquent, étant donné que $\{\psi(x^{k_i})\}$ converge vers $\psi(x^*)$ et que $\|y^{k_i} - x^{k_i}\|$ converge vers 0, $\psi(y^{k_i})$ converge fortement vers $\psi(x^*)$.

De plus, vu (2.24) et vu que ψ est pseudo-Dunn, nous avons $\langle \psi(y^{k_i}), y^{k_i} - \bar{x} \rangle \geq \frac{1}{A} \|\psi(y^{k_i}) - \psi(\bar{x})\|^2$. Dès lors, comme y^{k_i} converge vers $\bar{x}$, $\psi(y^{k_i})$ converge fortement vers $\psi(\bar{x})$.

Par unicité de la limite, nous obtenons que $\psi(x^*) = \psi(\bar{x})$
et par conséquent, vu (2.23), $\langle \psi(\bar{x}), x - x^* \rangle \geq 0, \ \ \forall x \in X^{ad}$,
ce qui entraîne que $\bar{x}$ est solution de (VIP).

□

Nous allons à présent donner un corollaire qui nous permettra de prouver l'unicité du point d'accumulation de la suite $\{x^k\}$ engendrée par l'algorithme.

Corollaire 2.2.1

Si, en plus des hypothèses du théorème précédent, $M : X \to X$ (avec X muni de la topologie faible) est telle que M' est continue et si $\forall k$, $\varepsilon^k = \varepsilon$, alors $\{x^k\}$ possède un unique point d'accumulation.

Preuve :

Par l'absurde, supposons que $\{x^k\}$ possède deux points d'accumulation distincts $\bar{x}$ et $\hat{x}$.

Dès lors, ces deux points peuvent remplacer x^* dans la définition de la fonction

Λ du théorème (2.2.10), ce qui donne les fonctions $\bar{\Lambda}$ et $\hat{\Lambda}$ suivantes :

$\bar{\Lambda}(x,\varepsilon) = \bar{\Phi}(x) + \bar{\Omega}(x,\varepsilon)$ avec

$$\begin{cases} \bar{\Phi}(x) = M(\bar{x}) - M(x) - \langle M'(x), \bar{x} - x\rangle \\ \bar{\Omega}(x,\varepsilon) = \varepsilon\ \langle \psi(x^*), x - \bar{x}\rangle \geq 0 \end{cases}$$

et $\hat{\Lambda}(x,\varepsilon) = \hat{\Phi}(x) + \hat{\Omega}(x,\varepsilon)$ avec

$$\begin{cases} \hat{\Phi}(x) = M(\hat{x}) - M(x) - \langle M'(x), \hat{x} - x\rangle \\ \hat{\Omega}(x,\varepsilon) = \varepsilon\ \langle \psi(x^*), x - \hat{x}\rangle \geq 0. \end{cases}$$

Nous avons montré dans la preuve du théorème précédent que $\{\Lambda(x^k,\varepsilon^k)\}$ converge; cependant, sa limite peut dépendre de la solution x^* utilisée pour définir Λ.

Notons donc $\bar{l}$ et $\hat{l}$ les limites respectives de $\bar{\Lambda}$ et $\hat{\Lambda}$.

Considérons les sous-suites $\{k_i\}$ et $\{l_j\}$ telles que : $x^{k_i} \to \bar{x}$ et $x^{l_j} \to \hat{x}$.

Etant donné que $\bar{\Phi}(x^{k_i}) = M(\bar{x}) - M(x^{k_i}) - \langle M'(x^{k_i}), \bar{x} - x^{k_i}\rangle$

$$\text{et } \hat{\Phi}(x^{k_i}) = M(\hat{x}) - M(x^{k_i}) - \langle M'(x^{k_i}), \hat{x} - x^{k_i}\rangle,$$

nous avons $\hat{\Phi}(x^{k_i}) = \bar{\Phi}(x^{k_i}) - M(\bar{x}) + M(\hat{x}) + \langle M'(x^{k_i}), \bar{x} - x^{k_i} - \hat{x} + x^{k_i}\rangle$

$$= \bar{\Phi}(x^{k_i}) - M(\bar{x}) + M(\hat{x}) + \langle M'(x^{k_i}), \bar{x} - \hat{x}\rangle.$$

De même, comme $\bar{\Omega}(x^{k_i},\varepsilon) = \varepsilon\ \langle \psi(x^*), x^{k_i} - \bar{x}\rangle$

$$\text{et } \hat{\Omega}(x^{k_i},\varepsilon) = \varepsilon\ \langle \psi(x^*), x^{k_i} - \hat{x}\rangle,$$

nous avons $\hat{\Omega}(x^{k_i},\varepsilon) = \bar{\Omega}(x^{k_i},\varepsilon) + \varepsilon\ \langle \psi(x^*), \bar{x} - \hat{x}\rangle.$

Dès lors, $\hat{\Lambda}(x^{k_i},\varepsilon) = \hat{\Phi}(x^{k_i}) + \hat{\Omega}(x^{k_i},\varepsilon)$

$$= \Phi(\bar{x}^{k_i}) - M(\bar{x}) + M(\hat{x}) + \langle M'(x^{k_i}), \bar{x} - \hat{x}\rangle + \bar{\Omega}(x^{k_i},\varepsilon)$$
$$+\varepsilon\ \langle \psi(x^*), \bar{x} - \hat{x}\rangle.$$

En comparant ceci avec $\bar{\Lambda}(x^{k_i},\varepsilon) = \bar{\Phi}(x^{k_i}) + \bar{\Omega}(x^{k_i},\varepsilon)$, nous obtenons :

$$\hat{\Lambda} = \bar{\Lambda} + R$$
$$\text{où } R = -M(\bar{x}) + M(\hat{x}) + \langle M'(x^{k_i}), \bar{x} - \hat{x}\rangle + \varepsilon\ \langle \psi(x^*), \bar{x} - \hat{x}\rangle.$$

Nous savons déjà que $\hat{\Lambda} \to \hat{l}$ et que $\bar{\Lambda} \to \bar{l}$; de plus, étant donné la forte convexité de M', $M(\hat{x}) - M(\bar{x}) + \langle M'(\bar{x}), \bar{x} - \hat{x}\rangle \geq \frac{b}{2}\|\bar{x} - \hat{x}\|^2$ et par conséquent,

$R \to L$ avec $L \geq \frac{b}{2}\|\bar{x} - \hat{x}\|^2 + \varepsilon \langle \psi(x^*), \bar{x} - \hat{x} \rangle$.

Dès lors, $\hat{l} \geq \bar{l} + \frac{b}{2}\|\bar{x} - \hat{x}\|^2 + \varepsilon \langle \psi(x^*), \bar{x} - \hat{x} \rangle$,
c-à-d : $0 \leq \frac{b}{2}\|\bar{x} - \hat{x}\|^2 \leq \hat{l} - \bar{l} - \varepsilon \langle \psi(x^*), \bar{x} - \hat{x} \rangle$. (a)

En effectuant le même calcul avec $\bar{x}$ et $\hat{x}$ interchangés ainsi que $\{l_j\}$ à la place de $\{k_i\}$, nous obtenons : $\bar{l} \geq \hat{l} + \frac{b}{2}\|\bar{x} - \hat{x}\|^2 + \varepsilon \langle \psi(x^*), \hat{x} - \bar{x} \rangle$,
c-à-d : $0 \leq \frac{b}{2}\|\bar{x} - \hat{x}\|^2 \leq \bar{l} - \hat{l} - \varepsilon \langle \psi(x^*), \hat{x} - \bar{x} \rangle$. (b)

En combinant les inégalités (a) et (b), nous obtenons $0 \leq b \|\hat{x} - \bar{x}\|^2 \leq 0$, ce qui entraîne que $\hat{x} = \bar{x}$; ceci contredit bien notre hypothèse absurde de départ.

□

2.3 Cas des opérateurs intégrables

2.3.1 Définition du Problème Auxiliaire et Algorithme de base

Tout au long de ce paragraphe, nous supposerons que X est de **dimension finie.**

Supposons qu'il existe une fonctionnelle $J : X \longrightarrow \mathbb{R}$ telle que $\psi(x) = J'(x)$ et considérons le problème de minimisation (PM) suivant :

$$\min_{x \in X^{ad}} J(x). \qquad (PM)$$

Etant donné la forme particulière de l'opérateur ψ, le problème (VIP) peut se réécrire :

Trouver $x^* \in X^{ad}$ tel que $\langle J'(x^*), x - x^* \rangle \geq 0, \quad \forall x \in X^{ad}$.

Commençons par donner un lemme concernant l'existence des solutions de

facile à résoudre que le problème (PM).

Parallèlement à la théorie développée dans le cas non différentiable, nous allons considérer le Problème Auxiliaire suivant :

$$\boxed{\min_{y \in X^{ad}} \{M(y) + \langle \varepsilon J'(x) - M'(x), y \rangle\}}$$

dont la solution $\tilde{y}(x)$ est caractérisée par l'inéquation variationnelle :

$$\boxed{\langle M'(\tilde{y}(x)) + \varepsilon J'(x) - M'(x), y - \tilde{y}(x) \rangle \geq 0, \quad \forall y \in X^{ad}.}$$

Ainsi, si $\tilde{y}(x) = x$, x est solution de l'inéquation variationnelle

$$\langle J'(x), y - \tilde{y}(x) \rangle \geq 0, \quad \forall y \in X^{ad}.$$

Dans le reste de ce paragraphe, nous supposerons que la fonctionnelle J est G-différentiable et pseudo-convexe sur un sous-ensemble convexe ouvert C contenant X^{ad}.

Dans ce cas, l'existence d'une solution de (VIP) est assurée grace au théorème (2.3.1) et au lemme (2.3.1).

L'algorithme de base s'exprime maintenant de la manière suivante :

Algorithme 2.3.1 *(Algorithme de base)*

i) **k = 0** : *Choisir* $x^0 \in X^{ad}$
ii) **à l'étape k** : *Connaissant* x^k, *calculer* $x^{k+1} = \tilde{y}(x^k)$ *en résolvant le problème auxiliaire suivant :*

$$\min_{y \in X^{ad}} \{M(y) + \langle \varepsilon J'(x^k) - M'(x^k), y \rangle\}$$

iii) **Arrêt :** *si* $\|x^{k+1} - x^k\|$ *est inférieur à un certain seuil*
sinon retour en ii) en incrémentant k d'une unité.

Cet algorithme se déduit de l'algorithme de base (2.2.1) en remplaçant ψ par J'.

Tout comme dans le cas des opérateurs non intégrables, en choisissant la fonction auxiliaire $M(x) = \sum_{i=1}^{N} M_i(x_i)$, il est possible de décomposer le Problème

Auxiliaire en sous-problèmes indépendants si on connaît une décomposition des sous-espaces X et X^{ad} en produits de sous-espaces indépendants.

Nous allons maintenant donner l'algorithme et prouver sa convergence dans le cas plus général où l'on considère une suite de fonctionnelles $\{M^k, k \in I\!N\}$ ainsi que des nombres positifs $\{\varepsilon^k, k \in I\!N\}$.

Dans ce cas, l'algorithme s'écrit :

Algorithme 2.3.2 *(Algorithme de base généralisé)*

i) **k = 0** *: Choisir* $x^0 \in X^{ad}$
ii) **à l'étape k** *: Connaissant* x^k*, calculer* $x^{k+1} = \tilde{y}(x^k)$ *en résolvant le problème auxiliaire suivant :*

$$\min_{y \in X^{ad}} \{M^k(y) + \langle \varepsilon^k J'(x^k) - (M^k)'(x^k), y \rangle\} \tag{2.25}$$

iii) **Arrêt :** *si* $\|x^{k+1} - x^k\|$ *est inférieur à un certain seuil, sinon retour en ii) en incrémentant k d'une unité.*

2.3.2 Résultats de convergence

Donnons un théorème permettant de prouver l'unicité de la solution du Problème Auxiliaire.

Théorème 2.3.2

Si $(M^k)'$ *est fortement monotone de constante* b^k*, alors il existe une solution unique au Problème Auxiliaire (2.25).*

La preuve de ce théorème est analogue à celle du théorème (2.2.2).

Parcourons maintenant les résultats de convergence obtenus pour l'algorithme de base dans le cas des opérateurs intégrables.

1. Monotonie simple et symétrie

Certaines hypothèses techniques permettent de prouver que la suite $\{x^k\}$ est bornée et que tout point d'accumulation pour la topologie faible est solution de ce problème d'optimisation (voir [5]).

Dans le cas où l'opérateur n'est pas symétrique, la monotonie simple ne permet pas de garantir la convergence de l'algorithme comme nous le confirme l'exemple de l'opérateur de rotation $\frac{\Pi}{2}$ dans le plan $I\!R^2$.

En effet, nous avons vu dans le premier chapitre que cet opérateur linéaire est monotone mais il n'est pas symétrique.

Or, dans le cas présent, étant donné que $X = I\!R^2$, (VIP) revient à trouver $x^* \in I\!R^2$ tel que $\psi(x^*) = 0$; par conséquent, il existe bien une solution unique au problème, qui est donnée par $x^* = (0, 0)$.

Cependant, nous montrerons un peu plus tard, que si nous appliquons l'algorithme de base, il diverge; ceci prouve bien que l'hypothèse de simple monotonie n'entraîne pas à elle seule la convergence de l'algorithme.

2. Pseudo-monotonie et symétrie

Le théorème suivant va nous permettre de prouver la convergence de la suite $\{x^k\}$ engendrée par l'algorithme de base vers une solution de (PM).

Théorème 2.3.3

Si, en plus des hypothèses du théorème (2.3.1), nous supposons que J' est lipschitz continue de module A sur X^{ad}, que $(M^k)'$ est fortement monotone de constante b^k (avec $b^k \geq b \geq 0$, $\forall k \in \mathbb{N}$), et que ε^k est tel que $\alpha < \varepsilon^k < \frac{2b^k}{A+\beta}$ où α et β sont > 0,

alors i) $\{J(x^k)\}$ décroît strictement (sauf si x^k est une solution x^* de (PM) pour un k);

ii) $\{x^k\}$ est bornée;

iii) $\lim_{k\to+\infty} \|x^{k+1} - x^k\| = 0$.

De plus, si nous supposons que $(M^k)'$ est lipschitz continue de constante B^k sur X^{ad}, que J est pseudo-convexe sur C et qu'il existe $B > 0$ tel que, $\forall k \in \mathbb{N}$, $B^k \leq B$, alors chaque point d'accumulation de $\{x^k\}$ est une solution de

$$\min_{x\in X^{ad}} J(x). \qquad (PM)$$

Preuve:

i) Etant donné que le problème (PM) admet x^* comme solution, nous savons, grâce au lemme (2.3.1) que x^* est solution de

$$\langle J'(x^*), x - x^*\rangle \geq 0, \quad \forall x \in X^{ad}. \tag{2.26}$$

De plus, comme x^{k+1} est la solution du Problème Auxiliaire, nous savons également que:

$$\langle (M^k)'(x^{k+1}) - (M^k)'(x^k), x - x^{k+1}\rangle + \varepsilon^k \langle J'(x^k), x - x^{k+1}\rangle \geq 0, \quad \forall x \in X^{ad}. \tag{2.27}$$

Etudions la variation de J en une étape de l'algorithme; pour ce faire, notons $\Delta_k^{k+1} = J(x^{k+1}) - J(x^k)$.

Attendu que J' est lipschitz continue de constante A, nous savons par le lemme (1.3.9) que

$$J(x^{k+1}) - J(x^k) \leq \langle J'(x^k), x^{k+1} - x^k\rangle + \tfrac{A}{2}\|x^{k+1} - x^k\|^2,$$

et par conséquent

$$\Delta_k^{k+1} \leq \langle J'(x^k), x^{k+1} - x^k\rangle + \frac{A}{2}\|x^{k+1} - x^k\|^2. \tag{2.28}$$

En prenant $x = x^k$ dans (2.27), cela donne

$$\langle (M^k)'(x^{k+1}) - (M^k)'(x^k), x^k - x^{k+1} \rangle + \varepsilon^k \langle J'(x^k), x^k - x^{k+1} \rangle \geq 0 \quad \forall x \in X^{ad}.$$

En utilisant le fait que, par hypothèse, $(M^k)'$ est fortement monotone, nous parvenons à

$$-b^k \|x^{k+1} - x^k\|^2 + \varepsilon^k \langle J'(x^k), x^k - x^{k+1} \rangle \geq 0 \quad \forall x \in X^{ad},$$

ou encore à

$$\frac{b^k}{\varepsilon^k} \|x^{k+1} - x^k\|^2 \leq \langle J'(x^k), x^k - x^{k+1} \rangle \quad \forall x \in X^{ad}. \tag{2.29}$$

Par conséquent, en utilisant (2.28) et (2.29), nous trouvons

$\Delta_k^{k+1} \leq (\frac{A}{2} - \frac{b^k}{\varepsilon^k}) \|x^{k+1} - x^k\|^2$.

Or, par hypothèse, $\varepsilon^k < \frac{2b^k}{A+\beta}$ où α et β sont > 0; nous obtenons donc

$(\frac{A}{2} - \frac{b^k}{\varepsilon^k}) < \frac{-\beta}{2}$.

Dès lors, $\Delta_k^{k+1} \leq -\frac{\beta}{2} \|x^{k+1} - x^k\|^2 \leq 0$.

Par conséquent, si $x^{k+1} \neq x^k$, la suite $\{J(x^k)\}$ décroît strictement et étant donné que x^* est solution de (PM), la suite est bornée inférieurement par $J(x^*)$; elle va donc converger vers une limite finie.

Remarquons que dans le cas où $x^{k+1} = x^k$, vu (2.27), x^k est solution du problème (PM).

ii) Montrons que $\{x^k\}$ est bornée.

Cela découle du fait que J est coercive et que la limite de $\{J(x^k)\}$ est finie, ce qui entraîne par définition que X^{ad} est borné et par conséquent que $\{x^k\}$ est bornée.

iii) Etant donné que la suite $\{J(x^k)\}$ converge vers une limite finie, Δ_k^{k+1} va tendre vers 0 et comme $\Delta_k^{k+1} \leq -\frac{\beta}{2} \|x^{k+1} - x^k\|^2 \leq 0$, il faut que $\|x^{k+1} - x^k\|^2$ tende également vers 0.

Passons maintenant à la seconde partie de la démonstration qui consiste à montrer que si $(M^k)'$ est lipschitz continue de constante B^k sur X^{ad}, si J est pseudo-convexe sur C et s'il existe $B > 0$ tel que, $\forall k \in \mathbb{N}$, $B^k < B$, alors chaque point d'accumulation de $\{x^k\}$ est solution de (PM).

Pour ce faire, notons $\bar{x}$ un point d'accumulation de $\{x^k\}$ et $\{x^{k_i}\}$ une sous-suite de $\{x^k\}$ qui converge vers $\bar{x}$ et montrons que $\bar{x}$ est solution de (PM).

Utilisons (2.27), à savoir :

$$\langle (M^k)'(x^{k+1}) - (M^k)'(x^k), x - x^{k+1}\rangle + \varepsilon^k \langle J'(x^k), x - x^{k+1}\rangle \geq 0, \quad \forall x \in X^{ad}.$$

En lui appliquant l'inégalité de Cauchy-Schwarz, nous obtenons :

$$\|(M^k)'(x^{k+1}) - (M^k)'(x^k)\| \, \|x - x^{k+1}\| - \varepsilon^k \langle J'(x^k), -x + x^{k+1}\rangle \geq 0 \quad \forall x \in X^{ad}.$$

Utilisant le fait que, par hypothèse, M' est lipschitz continue de constante $B^k < B$ sur X^{ad} et que $\varepsilon^k > \alpha$, nous trouvons :

$$B\|x^{k+1} - x^k\| \, \|x - x^{k+1}\| - \alpha \langle J'(x^k), x^{k+1} - x\rangle \geq 0,$$

ou encore $\langle J'(x^k), x - x^{k+1}\rangle \geq -\frac{B}{\alpha}\|x^{k+1} - x^k\| \, \|x - x^{k+1}\|$.

Par ailleurs, étant donné le fait que J' est lipschitz continue sur X^{ad}, nous avons $J'(x^{k_i}) \to J'(\bar{x})$ et, par conséquent, en utilisant l'inégalité précédente, nous obtenons :

$$\langle J'(\bar{x}), x - \bar{x}\rangle \geq 0, \quad \forall x \in X^{ad}. \tag{2.30}$$

En utilisant l'hypothèse selon laquelle J est pseudo-convexe sur C et le lemme (2.3.1), nous concluons que $\bar{x}$ est solution de

$$\min_{x \in X^{ad}} J(x).$$

□

Remarquons que si nous n'avions pas supposé que la dimension de X était finie, il aurait fallu supposer que le gradient $J'(x)$ soit faiblement continu afin d'obtenir l'inéquation (2.30). Cependant, cette hypothèse est relativement forte et nous limiterons dès lors le résultat au cas de dimension finie.

Tout comme pour la monotonie simple, il suffit de considérer le cas de l'opérateur de rotation $\frac{\pi}{2}$ (qui est pseudo-monotone et non symétrique) pour s'apercevoir que la pseudo-monotonie ne permet pas à elle seule de garantir la convergence de l'algorithme.

2.4 Conclusion

Dans ce chapitre, nous avons commencé par définir le Principe du Problème Auxiliaire et nous avons développé un algorithme de base permettant de solutionner les inéquations variationnelles.

Nous avons traité séparément les cas des opérateurs non intégrables et intégrables.

Dans le premier cas, après avoir donné diverses hypothèses de convergence, nous avons montré que les hypothèses minimales, connues jusqu'à ce jour, à partir desquelles il est possible de prouver la convergence de l'algorithme de base, sont la forte pseudo-monotonie et la propriété pseudo-Dunn.

Dans le cas des opérateurs intégrables, il est possible de prouver la convergence sous l'hypothèse de symétrie et monotonie de l'opérateur et sous l'hypothèse de symétrie et de pseudo-monotonie de l'opérateur (en se restreignant dans ce dernier cas à la dimension finie).

Chapitre 3

Régularisation progressive d'inéquations variationnelles

3.1 Motivation

A travers un exemple concret, nous allons montrer que l'algorithme de base développé au chapitre précédent dans le cas des opérateurs non intégrables, ne converge pas toujours vers la solution du problème posé. En effet, considérons l'exemple de l'opérateur de rotation $\frac{\pi}{2}$ dans le plan $\mathbb{R}^2$.

Cet opérateur est défini par $\psi(x_1, x_2) = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -x_2^k \\ x_1^k \end{pmatrix}$.

En outre, il est linéaire, pseudo-monotone, monotone et lipschitzien mais il n'est pas symétrique et il ne possède pas la propriété de Dunn.

Etant donné que $X^{ad} = \mathbb{R}^2$, la résolution du problème variationnel est équivalente à trouver $x^* \in \mathbb{R}^2$ tel que $\psi(x^*) = 0$.

Appliquons l'algorithme de base en considérant $M(x) = \frac{\|x\|^2}{2}$.

La suite $\{x^k\} = \{(x_1^k, x_2^k)\}$ générée par l'algorithme de base pour résoudre l'équation $\psi(x^*) = 0$ est obtenue grâce à la récurrence suivante :

$$\begin{pmatrix} x_1^{k+1} \\ x_2^{k+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1^k \\ x_2^k \end{pmatrix} - \varepsilon \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1^k \\ x_2^k \end{pmatrix}.$$

Calculons $\|x^{k+1}\|$:

$$\|x^{k+1}\|^2 = [x_1^k + \varepsilon x_2^k]^2 + [x_2^k - \varepsilon x_1^k]^2$$

$$= (x_1^k)^2 + (x_2^k)^2 + 2\varepsilon x_1^k x_2^k - 2\varepsilon x_1^k x_2^k + \varepsilon^2 (x_2^k)^2 + \varepsilon^2 (x_1^k)^2$$
$$\geq (x_1^{k+1})^2 + (x_2^{k+1})^2 = \|x^k\|^2$$

Dès lors, $\forall \varepsilon > 0$, la norme de x^k augmente avec k et donc la suite ne va pas converger vers l'unique solution $x^* = (0,0)$.

Par conséquent, il existe des opérateurs non intégrables monotones (et pseudo-monotones) pour lesquels l'algorithme de base ne converge pas vers la solution du problème posé.

Nous allons essayer de pallier cette difficulté en développant une théorie qui permettra, à partir d'une opération sur l'opérateur non intégrable de départ, d'appliquer l'algorithme de base et d'utiliser les résultats de convergence que nous avons étudiés au chapitre précédent.
Pour ce faire, nous allons faire appel à la régularisation d'une inéquation variationnelle dont le but est de construire un problème régularisé qui admette le même ensemble de solutions que le problème de départ et qui possède certaines propriétés pour lesquelles nous connaissons un théorème de convergence.

Cependant, nous verrons que la régularisation peut s'avérer aussi complexe que la résolution de l'inéquation variationnelle originale.
Afin de contourner la difficulté, nous développerons un algorithme de **régularisation progressive** qui consiste à effectuer l'opération de régularisation tout en résolvant, simultanément, l'inéquation variationnelle régularisée. De cette manière, les deux processus seront effectués en même temps au lieu d'être emboîtés et nous obtiendrons ainsi un nouveau schéma itératif comprenant un pas de régularisation suivi d'un pas de minimisation.

L'algorithme de régularisation progressive sera présenté sous deux versions (parallèle et séquentielle), dont la première peut être vue comme l'algorithme de base construit sur le Principe du Problème Auxiliaire appliqué à un opérateur défini sur le produit de deux espaces.
Nous étudierons séparément la convergence des deux versions.

Par la suite, nous envisagerons à nouveau le cas de l'opérateur de rotation $\frac{\pi}{2}$ pour lequel les algorithmes proposés auparavant ne convergeaient pas et nous montrerons qu'il est possible de lui appliquer l'algorithme de régularisation pro-

gressive.

3.2 Régularisation d'inéquations variationnelles monotones

Définition 3.2.1

*La régularisation de Moreau-Yosida consiste à associer à un opérateur monotone maximal ψ, l'***opérateur régularisé** *ψ^γ défini par:*

$$\psi^\gamma(x) = \gamma\ (x - \tilde{y}(x)) \tag{3.1}$$

où γ est un nombre réel strictement positif et $\tilde{y}(x)$ est l'unique solution du problème variationnel suivant:

Trouver $\tilde{y}(x) \in X^{ad}$ tel que $\langle \psi(\tilde{y}(x)) + \gamma\ (\tilde{y}(x) - x), y - \tilde{y}(x) \rangle \geq 0, \quad \forall y \in X^{ad}.$ (3.2)

Remarquons que, si ψ est faiblement continu sur tout sous-espace de dimension finie de X, l'existence et l'unicité de $\tilde{y}(x)$ sont assurées, étant donné le lemme (1.1.1) et le fait que ψ est monotone maximal.

Problème variationnel

Résoudre (VIP) $\Leftrightarrow$ Annuler $\gamma(\tilde{y}(x) - x)$;
$\Leftrightarrow$ Trouver un zéro de ψ^γ;
$\Leftrightarrow$ Trouver $x^* \in X$ tel que $\psi^\gamma(x^*) = 0$.

Dès lors, si x^* est tel que $\langle \psi(x^*), x - x^* \rangle \geq 0, \quad \forall x \in X^{ad}$, alors $\psi^\gamma(x^*) = 0$ et réciproquement.

Par conséquent, nous sommes passée de la résolution du problème variationnel, à la résolution d'un problème sans contrainte.

Le **problème régularisé** est le problème sans contrainte qui consiste à trouver $x^* \in X$ tel que $\psi^\gamma(x^*) = 0$.

Remarquons que l'opérateur régularisé ψ^γ dépend de l'opérateur originel ψ mais aussi de l'opérateur régularisant (à savoir γ I où I est l'identité) et de l'ensemble admissible X^{ad}.

Mataoui ([22]) a montré que, si ψ est monotone, l'opérateur régularisé ψ^γ jouit de la **propriété de Dunn** de constante γ; de plus, même si l'opérateur ψ est multivoque, ψ^γ est **univoque.**

Etant donné que l'opérateur régularisé possède la propriété de Dunn et que nous avons prouvé la convergence de l'algorithme de base sous cette hypothèse, nous allons appliquer l'algorithme de base à l'opérateur régularisé plutôt qu'à l'opérateur originel.

Cela donne lieu à l'algorithme suivant :

Algorithme 3.2.1 *(Algorithme de régularisation)*

i) **k = 0** *: Choisir* $x^0 \in X^{ad}$

ii) **à l'étape k** *: Connaissant* x^k*, calculer* $x^{k+1} = \tilde{y}(x^k)$ *en résolvant le problème auxiliaire suivant :*

$$\min_{y \in X} \{M(y) + \langle \varepsilon \psi^\gamma(x^k) - M'(x^k), y \rangle\}$$

où $\psi^\gamma(x^k) = \gamma(x^k - z^k)$

et z^k *est la solution de l'inéquation variationnelle*

$$\langle \psi(z^k) + \gamma(z^k - x^k), y - z^k \rangle \geq 0, \quad \forall y \in X^{ad}.$$

iii) **Arrêt :** *si* $\|x^{k+1} - x^k\|$ *est inférieur à un certain seuil, sinon retour en ii) en incrémentant k d'une unité.*

Notons que le problème de minimisation porte sur X étant donné que nous recherchons un zéro de l'opérateur ψ^γ sur X.

Sous certaines hypothèses, il est possible de prouver que $\{\psi^\gamma(x^k)\}$ converge vers $\psi^\gamma(x^*) = 0$ (voir [11]).

Bien que cet algorithme converge, il possède un *inconvénient majeur*: son implémentation nécessite, à chaque étape, le calcul de l'opérateur régularisé (de manière exacte) qui, lui-même, entraîne la résolution d'une inéquation variationnelle similaire à l'inéquation variationnelle de départ si ce n'est le fait que l'opérateur impliqué dans le problème régularisé (3.2) (à savoir $\psi + \gamma\ I$) est fortement monotone.

La résolution de cette inéquation variationnelle peut s'effectuer dans une boucle interne infinie en utilisant l'algorithme de base construit sur le Principe du Problème Auxiliaire. Cependant, afin de ne pas devoir résoudre l'inéquation variationnelle de manière exacte, nous allons mettre au même niveau les boucles interne et externe au lieu de les emboîter.

Par conséquent, plutôt que d'appliquer l'algorithme de base dans son entièreté afin de résoudre l'inéquation variationnelle, nous allons seulement prendre un pas de l'algorithme qui exécute cette résolution.

3.3 Régularisation Progressive

3.3.1 Algorithmes

La régularisation progressive consiste à effectuer l'opération de régularisation tout en résolvant **en même temps** l'inéquation variationnelle régularisée. Il n'y a ainsi donc pas de boucle interne infinie.

Nous allons calculer x^{k+1} comme auparavant; par contre, au lieu de calculer y^{k+1} en résolvant exactement une inéquation variationnelle, nous allons résoudre un Problème Auxiliaire de minimisation.

Cela donne lieu à l'algorithme de régularisation progressive suivant.

Algorithme 3.3.1 *(Algorithme de régularisation progressive, version parallèle en (x,y))*

i) $\mathbf{k = 0}$ *: Choisir* $(x^0, y^0) \in X \times X^{ad}$

ii) **à l'étape k** *: Connaissant* x^k *et* y^k*, calculer* x^{k+1} *et* y^{k+1} *qui sont les solutions respectives des problèmes auxiliaires suivants :*

$$\begin{cases} \min_{x \in \mathbf{X}} \{K(x) + \langle \varepsilon\ \gamma\ (x^k - y^k) - K'(x^k), x \rangle\} & (I) \\ \min_{y \in X^{ad}} \{L(y) + \langle \rho\psi(y^k) + \gamma\rho\ (y^k - x^k) - L'(y^k), y \rangle\} & (II) \end{cases}$$

iii) **Arrêt :** *si* $\|(x^{k+1}, y^{k+1}) - (x^k, y^k)\|$ *est inférieur à un certain seuil, sinon retour en ii) en incrémentant k d'une unité.*

Remarquons que dans cet algorithme, on calcule x^{k+1} avant y^{k+1}.
La version séquentielle consiste à remplacer y^k par y^{k+1} dans (I) et à commencer par résoudre (II) avant (I), ce qui donne :

Algorithme 3.3.2 *(Algorithme de régularisation progressive, version séquentielle : y avant x)*

i) $\mathbf{k = 0}$ *: Choisir* $(x^0, y^0) \in X \times X^{ad}$

ii) **à l'étape k** *: Connaissant* x^k *et* y^k*, calculer* x^{k+1} *et* y^{k+1} *qui sont les solutions respectives des problèmes auxiliaires suivants :*

$$\begin{cases} \min_{y \in X^{ad}} \{L(y) + \langle \rho\psi(y^k) + \gamma\rho\ (y^k - x^k) - L'(y^k), y \rangle\} \\ \min_{x \in \mathbf{X}} \{K(x) + \langle \varepsilon\ \gamma\ (x^k - y^{k+1}) - K'(x^k), x \rangle\} \end{cases}$$

iii) **Arrêt :** *si* $\|(x^{k+1}, y^{k+1}) - (x^k, y^k)\|$ *est inférieur à un certain seuil sinon retour en ii) en incrémentant k d'une unité.*

Le premier des deux algorithmes peut être vu comme l'algorithme de base appliqué à un opérateur composite défini sur le produit de deux espaces $X \times X$, que l'on peut réécrire $\mathcal{U} \times \mathcal{V}$, utilisé pour résoudre un système composé d'une équation et d'une inéquation variationnelle.

Notons Γ l'opérateur.

Dès lors,

$$\Gamma(u, v) = \begin{pmatrix} \Gamma_u(u, v) \\ \Gamma_v(u, v) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma\ (u - v) \\ \psi(v) + \gamma\ (v - u) \end{pmatrix}. \tag{3.3}$$

Il s'avère que Γ vérifie les propriétés suivantes :

1. Γ_v est fortement monotone en v, de constante γ, uniformément en u.
2. Γ vérifie l'hypothèse de Dunn partielle par rapport à sa première composante avec la constante γ sur $\mathcal{U}^{ad} \times \mathcal{V}^{ad}$.

Preuves :

1) Γ_v est fortement monotone en v uniformément en u si :

$\exists \gamma > 0$ tel que $\forall u \in \mathcal{U}^{ad}$ et $\forall v_1, v_2 \in \mathcal{V}^{ad}$,

$\langle \Gamma_v(u, v_1) - \Gamma_v(u, v_2), v_1 - v_2 \rangle \geq \gamma \|v_1 - v_2\|^2$.

Montrons, par définition de Γ_v, que :

$\gamma \|v_1 - v_2\|^2 \leq \langle \psi(v_1) + \gamma\ (v_1 - u) - \psi(v_2) - \gamma\ (v_2 - u), v_1 - v_2 \rangle$,

c-à-d que $\gamma \|v_1 - v_2\|^2 \leq \|\psi(v_1) - \psi(v_2) + \gamma\ (v_1 - v_2 - u + u)\|\ \|v_1 - v_2\|$,

ou encore $\gamma \|v_1 - v_2\|^2 \leq \|\psi(v_1) - \psi(v_2)\|\ \|v_1 - v_2\| + \gamma\ \|v_1 - v_2\|^2$.

Cette dernière inégalité est bien vérifiée.

2) Montrons que $\forall (u, v), (u', v') \in \mathcal{U}^{ad} \times \mathcal{V}^{ad}$,

$\langle \Gamma_u(u, v) - \Gamma_u(u', v'), u - u' \rangle + \langle \Gamma_v(u, v) - \Gamma_v(u', v'), v - v' \rangle$

$\geq \frac{1}{\gamma} \|\Gamma_u(u, v) - \Gamma_u(u', v')\|^2$,

c-à-d $\langle \gamma\ (u - v) - \gamma\ (u' - v'), u - u' \rangle + \langle \psi(v) + \gamma\ (v - u) - \psi(v') - \gamma\ (v' - u'), v - v' \rangle$

$\geq \frac{1}{\gamma} \|\gamma\ (u - v) - \gamma\ (u' - v')\|^2$,

ou encore $\langle \gamma\ (u - v - u' + v'), u - u' - v + v' \rangle + \langle \psi(v') - \psi(v), v' - v \rangle$

$\geq \frac{1}{\gamma} \|\gamma\ (u - v - u' + v')\|^2$.

En utilisant l'inégalité de Cauchy-Schwarz, il nous reste à montrer que

$\gamma \|u - v - u' + v'\|^2 + \langle \psi(v') - \psi(v), v' - v \rangle \geq \frac{1}{\gamma} \|\gamma\ (u - v - u' + v')\|^2$.

Etant donné que ψ est monotone, cette dernière inégalité est vérifiée.

□

Donnons maintenant un lemme qui nous permettra de montrer que l'opérateur

régularisé possède la propriété de Dunn.

Lemme 3.3.1

Supposons que Γ possède la propriété de Dunn partielle par rapport à sa première composante de constante A et que, $\forall u \in \mathcal{U}^{ad}$, il existe une solution $\tilde{v}(u) \in \mathcal{V}^{ad}$ à $\langle \Gamma_v(u, \tilde{v}(u)), v - \tilde{v}(u) \rangle \geq 0, \quad \forall v \in \mathcal{V}^{ad}$,
alors l'opérateur Ω défini par : $u \rightsquigarrow \Gamma_u(u, \tilde{v}(u))$ jouit de la propriété de Dunn de constante A.

La preuve de ce lemme est donnée dans [22].

Remarquons que, même si $\tilde{v}(u)$ existe, il peut ne pas être unique; dès lors, à première vue, $\Omega(u)$ est multivoque.

Cependant, sous les hypothèses du lemme, Ω possède la propriété de Dunn, ce qui entraîne qu'il est **univoque**.

Grâce au lemme et, étant donné que l'opérateur Γ défini par (3.3) possède la propriété de Dunn partielle en sa première composante de constante γ et que $\psi^\gamma(u)$ est défini comme $\Gamma_u(u, \tilde{v}(u))$ où $\tilde{v}(u)$ est l'unique solution de l'inéquation variationnelle $\langle \Gamma_v(u, \tilde{v}(u)), v - \tilde{v}(u) \rangle \geq 0, \quad \forall v \in \mathcal{V}^{ad}$, l'opérateur ψ^γ vérifie la propriété de Dunn de constante γ.

3.3.2 Décomposition

Nous allons donner un théorème de décomposition général que nous particulariserons par la suite à l'algorithme de régularisation progresssive.

Théorème 3.3.1

Si les ensembles $\mathcal{U}$ et/ou $\mathcal{V}$ sont des produits de sous-espaces et si les contraintes implicites représentées par $\mathcal{U}^{ad}$ et/ou $\mathcal{V}^{ad}$ sont découplées,
alors, pour obtenir la décomposition d'un ou des deux problèmes auxiliaires à résoudre à chaque étape de l'algorithme, il suffit de choisir les fonctions auxiliaires K et/ou L additives par rapport à ces décompositions.

De cette manière, nous obtenons des sous-problèmes qui peuvent être résolus de manière indépendante et en parallèle.

En outre, étant donné que les sous-problèmes en u et v sont déjà résolus indépendamment, cela donne un niveau de décomposition supplémentaire.

En général, les décompositions de $\mathcal{U}$ et $\mathcal{V}$ sont indépendantes et elles peuvent ou non être possibles.
Dans le cas où elles le sont toutes les deux, il se peut que les nombres de sous-espaces dans les deux décompositions soient distincts.

Cependant, dans le cas de la régularisation progressive, les variables appartiennent au même espace et elles sont donc décomposables de la même manière.

De plus, si dans ce cas, la contrainte représentée par X^{ad} n'est pas décomposable, le second problème de minimisation portant sur X^{ad} ne l'est pas non plus, tandis que le problème de minimisation sur X, qui est un problème sans contrainte, est décomposable malgré tout.

3.3.3 Résultats de convergence

Nous allons commencer par prouver la convergence de la version parallèle de l'algorithme de régularisation progressive

Pour ce faire, nous travaillerons dans le cadre un peu plus général de l'algorithme parallèle bâti sur le Principe du Problème Auxiliaire. En effet, nous avons montré que la version parallèle de l'algorithme de régularisation progressive peut être vue comme la version parallèle de l'algorithme de base (construit sur le Principe du Problème Auxiliaire) appliquée à un opérateur défini sur le produit de deux espaces vérifiant les hypothèses de Dunn partielle par rapport à la première composante et de forte monotonie par rapport au second argument.

Par conséquent, nous allons prouver la convergence de l'algorithme de base sous certaines hypothèses appropriées et nous adapterons ensuite le théorème obtenu afin de pouvoir prouver la convergence de l'algorithme de régularisation progressive.

Nous donnerons ensuite un théorème de convergence pour la version séquentielle de l'algorithme de régularisation progressive.

1. Convergence de la version parallèle de l'algorithme de base

Considérons $\mathcal{U}$ et $\mathcal{V}$ deux espaces de Hilbert de dimension éventuellement infinie ainsi qu'un sous-espace convexe fermé $\mathcal{U}^{ad} \times \mathcal{V}^{ad}$ et un opérateur $\Gamma : \mathcal{U} \times \mathcal{V} \to \mathcal{U} \times \mathcal{V}$ défini par $\Gamma(u,v) = (\Gamma_u(u,v), \Gamma_v(u,v))$ avec $\Gamma_u \in \mathcal{U}$ et $\Gamma_v \in \mathcal{V}$.

Le problème variationnel (VIP) peut se reformuler, pour Γ, de la manière suivante :

Trouver $(u^*, v^*) \in \mathcal{U}^{ad} \times \mathcal{V}^{ad}$ tel que, $\forall (u,v) \in \mathcal{U}^{ad} \times \mathcal{V}^{ad}$,

$$\begin{cases} \langle \Gamma_u(u^*,v^*), u - u^* \rangle \geq 0, & \forall u \in \mathcal{U}^{ad} \\ \langle \Gamma_v(u^*,v^*), v - v^* \rangle \geq 0, & \forall v \in \mathcal{V}^{ad}. \end{cases} \qquad (VIP'')$$

Notons $\tilde{v}(u)$ la solution de l'inéquation variationnelle :

$$\langle \Gamma_v(u, \tilde{v}(u)), v - \tilde{v}(u) \rangle \geq 0, \quad \forall v \in \mathcal{V}^{ad},$$

et définissons l'opérateur $\Omega(u)$ par :

$$\Omega(u) = \Gamma_u(u, \tilde{v}(u)).$$

Considérons le problème variationnel (PV) suivant :

Trouver $u^* \in \mathcal{U}^{ad}$ tel que $\langle \Omega(u^*), u - u^* \rangle \geq 0, \quad \forall u \in \mathcal{U}^{ad}.$ (PV)

Remarquons que, bien que u^* ne soit pas nécessairement unique, $\Omega(u^*) = \Gamma_u(u^*, v^*)$ est univoquement défini si Γ_u est lipschitzien.

Le lemme suivant va nous permettre de caractériser la solution du problème de départ à partir de la solution du problème variationnel (PV).

Lemme 3.3.2

Si u^* est une solution de (PV) et si $v^* = \tilde{v}(u^*)$, alors (u^*, v^*) est solution de (VIP'').

La preuve est donnée dans [11].

Par conséquent,

Résoudre (VIP") $\Leftrightarrow$ Trouver $u^* \in \mathcal{U}^{ad}$ tel que $\langle \Omega(u^*), u - u^* \rangle \geq 0, \quad \forall u \in \mathcal{U}^{ad}$
où $\Omega(u^*) = \Gamma_u(u, v^*)$.

Comme nous l'avons déjà écrit, afin de résoudre le problème, nous considérons l'algorithme parallèle (2.2.2) bâti sur le Principe du Problème Auxiliaire dont l'étape principale consiste, en connaissant u^k et v^k, à calculer u^{k+1} et v^{k+1} qui sont les solutions respectives des problèmes auxiliaires suivants :

$$\min_{u \in \mathcal{U}^{ad}} \{K(u) + \langle \varepsilon \, \Gamma_u(u^k, v^k) - K'(u^k), u \rangle\} \quad (I)$$

$$\min_{v \in \mathcal{V}^{ad}} \{L(v) + \langle \rho \, \Gamma_v(u^k, v^k) - L'(v^k), v \rangle\}. \quad (II)$$

Donnons un lemme qui nous sera utile afin de prouver la convergence de l'algorithme parallèle.

Lemme 3.3.3

Soient $u \in \mathcal{U}^{ad}$ et $v \in \mathcal{V}^{ad}$.
Supposons que :
i) Γ possède la propriété de Dunn partielle par rapport à sa première composante de constante γ;
ii) Γ_u est lipschitzienne en v de constante Y uniformément en u;
iii) Γ_v est fortement monotone en v de constante t uniformément en u, lipschitzienne en u de constante Z uniformément en v et lipschitzienne en v de constante T uniformément en u;
iv) K' est fortement monotone de constante c et lipschitzienne de constante C;
v) L' est fortement monotone de constante d et lipschitzienne de constante D,
alors $\forall u, u' \in \mathcal{U}^{ad}, \ \|\tilde{v}(u) - \tilde{v}(u')\| \leq S \, \|u - u'\|$ *où* $S = \frac{Z}{t}$.

Preuve :

Considérons u et $u' \in \mathcal{U}^{ad}$ arbitraires ainsi que $v = \tilde{v}(u)$ et $v' = \tilde{v}(u')$, les solutions correspondantes de (VIP"); nous avons donc :

$$\begin{cases} \langle \Gamma_v(u, v), \bar{v} - v \rangle \geq 0, \quad \forall \bar{v} \in \mathcal{V}^{ad} \quad (i) \\ \langle \Gamma_v(u', v'), \bar{v} - v' \rangle \geq 0, \quad \forall \bar{v} \in \mathcal{V}^{ad}. \quad (ii) \end{cases}$$

En réécrivant $ii)$ comme $\langle -\Gamma_v(u', v'), v' - \bar{v}\rangle \geq 0, \quad \forall \bar{v} \in \mathcal{V}^{ad}$
et en l'additionnant à $i)$, nous obtenons $\langle \Gamma_v(u, v) - \Gamma_v(u', v'), v' - v\rangle \geq 0$.

Cela peut encore s'écrire

$$\langle \Gamma_v(u, v) - \Gamma_v(u', v), v' - v\rangle \geq \langle \Gamma_v(u', v') - \Gamma_v(u', v), v' - v\rangle. \tag{3.4}$$

De plus, par hypothèse,

a) Γ_v est fortement monotone en v uniformément en u de constante t
c-à-d $\langle \Gamma_v(u', v') - \Gamma_v(u', v), v' - v)\rangle \geq t \ \|v - v'\|^2$.

b) Γ_v est lipschitzienne en u uniformément en v de constante Z
c-à-d $\langle \Gamma_v(u, v) - \Gamma_v(u', v), v' - v)\rangle \leq Z \ \|u - u'\| \ \|v' - v\|$.

Par conséquent, en appliquant ces résultats à (3.4), nous trouvons

$t \ \|v - v'\|^2 \leq Z\|u - u'\| \ \|v' - v\|$.

Par définition de v et v', nous obtenons finalement $\|\tilde{v}(u) - \tilde{v}(u')\| \leq \frac{Z}{t} \ \|u - u'\|$.

□

Donnons maintenant un théorème de convergence.

Théorème 3.3.2

Sous les hypothèses du lemme précédent, l'algorithme parallèle génère une suite bien définie $\{(u^k, v^k)\}$.

De plus, il existe une fonction g *dépendant d'un paramètre positif* α *et de* ρ *telle que i)* $\forall \alpha > 0$, *si*

$$0 < \rho < \frac{2 \ \alpha dt}{T^2(1 + \alpha)}, \tag{3.5}$$

alors $g(\alpha, \rho) > 0$.

ii) si

$$0 < \epsilon < g(\rho, \alpha), \tag{3.6}$$

alors la suite $\{(u^k, v^k)\}$ *est bornée et chaque point d'accumulation* $\bar{u}$ *de la suite* $\{u^k\}$, *pour la topologie faible, est solution* u^* *de (PV). De plus, la suite totale* $\{\Gamma_u(u^k, v^k)\}$ *converge fortement vers* $\Omega(u^*) = \Gamma_u(u^*, v^*)$ *et* $\|v^k - \tilde{v}(u^k)\|$ *converge vers 0.*

Remarquons que α est un nombre introduit pour la technique de la preuve de convergence uniquement et qu'il n'affecte en rien l'algorithme; c'est pourquoi il peut être choisi arbitrairement (strictement positif).
Notons également qu'il est difficile de trouver une expression explicite de g.

Preuve:

Notons $w^k = \tilde{v}(u^k)$.

Par définition de $\tilde{v}(u^k)$, nous avons:

$$\langle \Gamma_v(u^k, w^k), v - w^k \rangle \geq 0, \qquad \forall v \in \mathcal{V}^{ad}. \tag{3.7}$$

Etant donné que (u^*, v^*) est solution de (VIP"), nous avons:

$$\langle \Gamma_u(u^*, v^*), u - u^* \rangle \geq 0, \quad \forall u \in \mathcal{U}^{ad} \tag{3.8}$$

$$\langle \Gamma_v(u^*, v^*), v - v^* \rangle \geq 0, \quad \forall v \in \mathcal{V}^{ad}. \tag{3.9}$$

De plus, comme u^{k+1} et v^{k+1} sont solutions des problèmes de minimisation, nous savons que:

$$\frac{1}{\varepsilon} \left[\langle K'(u^{k+1}) - K'(u^k), u - u^{k+1} \rangle \right] + \langle \Gamma_u(u^k, v^k), u - u^{k+1} \rangle \geq 0, \quad \forall u \in \mathcal{U}^{ad} \tag{3.10}$$

$$\frac{1}{\rho} \left[\langle L'(v^{k+1}) - L'(v^k), v - v^{k+1} \rangle \right] + \langle \Gamma_v(u^k, v^k), v - v^{k+1} \rangle \geq 0, \quad \forall v \in \mathcal{V}^{ad}. \tag{3.11}$$

Considérons la fonction Φ définie par:

$$\Phi(u, v) = \Phi_1(u) + \Phi_2(v) + \Phi_3(u, v) + \Phi_4(u, v) \tag{3.12}$$

avec:

$$\Phi_1(u) = \tfrac{1}{\varepsilon} \left[K(u^*) - K(u) - \langle K'(u), u^* - u \rangle \right]$$
$$\Phi_2(v) = \tfrac{1}{\rho} \left[L(v^*) - L(v) - \langle L'(v), v^* - v \rangle \right]$$
$$\Phi_3(u, v) = \tfrac{\alpha}{\rho} \left[L(\tilde{v}(u)) - L(v) - \langle L'(v), \tilde{v}(u) - v \rangle \right]$$
$$\Phi_4(u, v) = \langle \Gamma_v(u, \tilde{v}(u)), v - \tilde{v}(u) \rangle$$

où α est une constante strictement positive.

Remarquons que comme K' et L' sont fortement monotones,

$$K(u^*) - K(u) - \langle K'(u), u^* - u \rangle \geq \tfrac{c}{2} \|u^* - u\|^2 \geq 0,$$
$$L(v^*) - L(v) - \langle L'(v), v^* - v \rangle \geq \tfrac{d}{2} \|v^* - v\|^2 \geq 0,$$

et $L(\tilde{v}(u)) - L(v) - \langle L'(v), \tilde{v}(u) - v\rangle \geq \frac{d}{2} \|v^* - \tilde{v}(u)\|^2 \geq 0.$

Par conséquent, étant donné que, par (3.7), $\Phi_4(u,v)$ est positif, nous trouvons :

$$\Phi(u,v) \geq \frac{c}{2\varepsilon} \|u^* - u\|^2 + \frac{d}{2\rho} \|v^* - v\|^2 + \frac{\alpha d}{2\rho} \|v^* - \tilde{v}(u)\|^2 \geq 0. \qquad (3.13)$$

Etudions la variation de la fonction Φ en une étape de l'algorithme de base, nous la noterons $\Delta_k^{k+1} = \Phi(u^{k+1}, v^{k+1}) - \Phi(u^k, v^k)$; de plus, nous noterons $(\Delta_i)_k^{k+1}$ les différences correspondantes pour $\Phi_i, i = 1, ..., 4$.

$$\begin{aligned}
(\Delta_1)_k^{k+1} &= \Phi_1(u^{k+1}) - \Phi_1(u^k) \\
&= \tfrac{1}{\varepsilon} [K(u^*) - K(u^{k+1}) - \langle K'(u^{k+1}), u^* - u^{k+1}\rangle] + \tfrac{1}{\varepsilon} [-K(u^*) + K(u^k) \\
&\quad + \langle K'(u^k), u^* - u^k\rangle] \\
&= \tfrac{1}{\varepsilon} [K(u^k) - K(u^{k+1}) + \langle K'(u^k), u^* - u^k\rangle - \langle K'(u^{k+1}), u^* - u^{k+1}\rangle] \\
&= \underbrace{\frac{1}{\varepsilon} [K(u^k) - K(u^{k+1}) - \langle K'(u^k), u^k - u^{k+1}\rangle]}_{(I)} + \underbrace{\frac{1}{\varepsilon} [\langle K'(u^k) - K'(u^{k+1}), u^* - u^{k+1}\rangle]}_{(II)}.
\end{aligned}$$

Etant donné la forte monotonie de K', nous savons que :

$$K(u^{k+1}) - K(u^k) - \langle K'(u^k), u^{k+1} - u^k\rangle \geq \tfrac{c}{2} \|u^{k+1} - u^k\|^2 \geq 0.$$

Et donc,

$(I) =^{def} \frac{1}{\varepsilon} [K(u^k) - K(u^{k+1}) - \langle K'(u^k), u^k - u^{k+1}\rangle] \leq -\frac{c}{2\varepsilon} \|u^{k+1} - u^k\|^2.$ (A)

De plus, si nous sommons (3.10) où $u = u^*$ avec (3.8) où $u = u^{k+1}$, cela donne

$$\tfrac{1}{\varepsilon} [\langle K'(u^{k+1}) - K'(u^k), u^* - u^{k+1}\rangle] + \langle \Gamma_u(u^k, v^k) - \Gamma_u(u^*, v^*), u^* - u^{k+1}\rangle \geq 0,$$

ou encore

$$-\tfrac{1}{\varepsilon} [\langle K'(u^{k+1}) - K'(u^k), u^* - u^{k+1}\rangle] - \langle \Gamma_u(u^k, v^k) - \Gamma_u(u^*, v^*), u^* - u^{k+1}\rangle \leq 0.$$

Par conséquent,

$$\begin{aligned}
(II) &=^{def} \tfrac{1}{\varepsilon} [\langle K'(u^k) - K'(u^{k+1}), u^* - u^{k+1}\rangle] \\
&\leq \langle \Gamma_u(u^k, v^k) - \Gamma_u(u^*, v^*), u^* - u^{k+1}\rangle \\
&= \langle \Gamma_u(u^k, v^k) - \Gamma_u(u^*, v^*), u^* - u^k\rangle + \langle \Gamma_u(u^k, v^k) - \Gamma_u(u^*, v^*), u^k - u^{k+1}\rangle.
\end{aligned}$$

Par ailleurs, sachant que Γ vérifie la propriété de Dunn partielle par rapport à sa première composante avec la constante γ c-à-d :

$\exists \gamma > 0$ tel que $\forall (u,v),(u',v') \in \mathcal{U}^{ad} \times \mathcal{V}^{ad}$,

$\langle \Gamma_u(u,v) - \Gamma_u(u',v'), u - u' \rangle + \langle \Gamma_v(u,v) - \Gamma_v(u',v'), v - v' \rangle$

$\geq \frac{1}{\gamma} \|\Gamma_u(u,v) - \Gamma_u(u',v')\|^2$,

nous obtenons

$$\begin{aligned}(II) &\leq -\tfrac{1}{\gamma}\|\Gamma_u(u^k,v^k) - \Gamma_u(u^*,v^*)\|^2 + \langle \Gamma_v(u^k,v^k) - \Gamma_v(u^*,v^*), v^k - v^* \rangle \\ &\quad + \langle \Gamma_u(u^k,v^k) - \Gamma_u(u^*,v^*), u^k - u^{k+1} \rangle \\ &\leq -\tfrac{1}{\gamma}\|\Gamma_u(u^k,v^k) - \Gamma_u(u^*,v^*)\|^2 + \langle \Gamma_v(u^k,v^k) - \Gamma_v(u^*,v^*), v^k - v^* \rangle \\ &\quad + \|\Gamma_u(u^k,v^k) - \Gamma_u(u^*,v^*)\| \|u^k - u^{k+1}\|. \qquad (B)\end{aligned}$$

La dernière inéquation est obtenue en appliquant l'inégalité de Cauchy-Schwarz.

En utilisant (A) et (B), nous trouvons :

$$\begin{aligned}(\Delta_1)_k^{k+1} &= (I) + (II) \\ &\leq -\tfrac{c}{2\varepsilon}\|u^{k+1} - u^k\|^2 - \tfrac{1}{\gamma}\|\Gamma_u(u^k,v^k) - \Gamma_u(u^*,v^*)\|^2 \\ &\quad + \langle \Gamma_v(u^k,v^k) - \Gamma_v(u^*,v^*), v^k - v^* \rangle + \|\Gamma_u(u^k,v^k) - \Gamma_u(u^*,v^*)\| \|u^k - u^{k+1}\|.\end{aligned}$$

De la même façon,

$$\begin{aligned}(\Delta_2)_k^{k+1} &= \Phi_2(v^{k+1}) - \Phi_2(v^k) \\ &= \tfrac{1}{\rho}\left[L(v^*) - L(v^{k+1}) - \langle L'(v^{k+1}), v^* - v^{k+1} \rangle\right] - \tfrac{1}{\rho}\left[L(v^*) - L(v^k) - \langle L'(v^k), v^* - v^k \rangle\right] \\ &= \tfrac{1}{\rho}\left[L(v^k) - L(v^{k+1}) + \langle L'(v^k), v^* - v^k \rangle\right] - \tfrac{1}{\rho}\left[\langle L'(v^{k+1}), v^* - v^{k+1} \rangle\right] \\ &= \underbrace{\frac{1}{\rho}\left[L(v^k) - L(v^{k+1}) - \langle L'(v^k), v^k - v^{k+1} \rangle\right]}_{(III)} + \underbrace{\frac{1}{\rho}\left[\langle L'(v^k) - L'(v^{k+1}), v^* - v^{k+1} \rangle\right]}_{(IV)}.\end{aligned}$$

Etant donné la forte monotonie de L', nous savons que :

$$L(v^{k+1}) - L(v^k) - \langle L'(v^k), v^{k+1} - v^k \rangle \geq \tfrac{d}{2} \|v^{k+1} - v^k\|^2 \geq 0.$$

Et donc,

$$(III) =^{def} \tfrac{1}{\rho}\left[L(v^k) - L(v^{k+1}) - \langle L'(v^k), v^k - v^{k+1} \rangle\right] \leq -\tfrac{d}{2\rho}\|v^{k+1} - v^k\|^2. \qquad (C)$$

De plus, si nous sommons (3.9) où $v = v^k$ avec (3.11) où $v = v^*$, cela donne :

$\frac{1}{\rho}\,[\langle L'(v^{k+1})-L'(v^k),v^*-v^{k+1}\rangle]+\langle\Gamma_v(u^k,v^k),v^*-v^{k+1}\rangle+\langle\Gamma_v(u^*,v^*),v^k-v^*\rangle\geq 0,$

ou encore

$\frac{1}{\rho}\,[\langle L'(v^{k+1})-L'(v^k),v^*-v^{k+1}\rangle]+\langle\Gamma_v(u^k,v^k)-\Gamma_v(u^*,v^*),v^*-v^k\rangle$
$+\langle\Gamma_v(u^k,v^k),v^k-v^{k+1}\rangle\geq 0.$

Par conséquent,

$$(IV)=^{def}\frac{1}{\rho}\,[\langle L'(v^k)-L'(v^{k+1}),v^*-v^{k+1}\rangle]$$
$$\leq\langle\Gamma_v(u^k,v^k)-\Gamma_v(u^*,v^*),v^*-v^k\rangle+\underbrace{\langle\Gamma_v(u^k,v^k),v^k-v^{k+1}\rangle}_{(V)}.$$

En outre, $(V)=\langle\Gamma_v(u^k,v^k)-\Gamma_v(u^k,w^k),v^k-v^{k+1}\rangle+\langle\Gamma_v(u^k,w^k),v^k-v^{k+1}\rangle.$

En appliquant au membre de droite l'hypothèse selon laquelle Γ_v est lipschitzienne en v de constante T uniformément en u, nous obtenons:

$(V)\leq T\|v^k-w^k\|\|v^k-v^{k+1}\|+\langle\Gamma_v(u^k,w^k),v^k-v^{k+1}\rangle.$

Par conséquent,

$$(IV)\leq\langle\Gamma_v(u^k,v^k)-\Gamma_v(u^*,v^*),v^*-v^k\rangle+T\|v^k-w^k\|\|v^k-v^{k+1}\|$$
$$+\langle\Gamma_v(u^k,w^k),v^k-v^{k+1}\rangle. \qquad (D)$$

Dès lors, en utilisant (C) et (D), nous trouvons:

$$\begin{aligned}(\Delta_2)_k^{k+1}&=(III)+(IV)\\&\leq-\tfrac{d}{2\rho}\|v^{k+1}-v^k\|^2+\langle\Gamma_v(u^k,v^k)-\Gamma_v(u^*,v^*),v^*-v^k\rangle\\&\quad+T\|v^k-w^k\|\|v^k-v^{k+1}\|+\langle\Gamma_v(u^k,w^k),v^k-v^{k+1}\rangle.\end{aligned}$$

Etudions ensuite $(\Delta_3)_k^{k+1}$.

$$\begin{aligned}(\Delta_3)_k^{k+1}&=\Phi_3(u^{k+1},v^{k+1})-\Phi_3(u^k,v^k)\\&=\tfrac{\alpha}{\rho}\,[L(\tilde v(u^{k+1}))-L(v^{k+1})-\langle L'(v^{k+1}),\tilde v(u^{k+1})-v^{k+1}\rangle]\\&\quad-\tfrac{\alpha}{\rho}\,[L(\tilde v(u^k))-L(v^k)-\langle L'(v^k),\tilde v(u^k)-v^k\rangle]\\&=\tfrac{\alpha}{\rho}\,[L(w^{k+1})-L(v^{k+1})-\langle L'(v^{k+1}),w^{k+1}-v^{k+1}\rangle]\\&\quad-\tfrac{\alpha}{\rho}\,[L(w^k)-L(v^k)-\langle L'(v^k),w^k-v^k\rangle]\\&=\tfrac{\alpha}{\rho}\,[L(w^{k+1})-L(v^{k+1})-L(w^k)+L(v^k)]-\tfrac{\alpha}{\rho}\,\langle L'(v^{k+1}),w^{k+1}-v^{k+1}+w^k-w^k\rangle\\&\quad+\tfrac{\alpha}{\rho}\,\langle L'(v^k),w^k-v^k+v^{k+1}-v^{k+1}\rangle)\end{aligned}$$

$$= \tfrac{\alpha}{\rho}\,[L(v^k) - L(v^{k+1})] - \tfrac{\alpha}{\rho}\,\langle L'(v^k), v^k - v^{k+1}\rangle + \tfrac{\alpha}{\rho}\,[L(w^{k+1}) - L(w^k)]$$
$$+\tfrac{\alpha}{\rho}\,\langle L'(v^k), w^k - v^{k+1}\rangle - \tfrac{\alpha}{\rho}\,\langle L'(v^{k+1}), w^{k+1} - w^k\rangle - \tfrac{\alpha}{\rho}\,\langle L'(v^{k+1}), w^k - v^{k+1}\rangle$$
$$= \tfrac{\alpha}{\rho}\,[L(v^k) - L(v^{k+1}) - \langle L'(v^k), v^k - v^{k+1}\rangle]$$
$$+\tfrac{\alpha}{\rho}\,[L(w^{k+1}) - L(w^k) + \langle L'(v^k) - L'(v^{k+1}), w^k - v^{k+1}\rangle] - \tfrac{\alpha}{\rho}\,\langle L'(v^{k+1}), w^{k+1} - w^k\rangle.$$

Etant donné que L' est fortement monotone de constante d, nous avons :

$L(v^{k+1}) - L(v^k) - \langle L'(v^k), v^{k+1} - v^k\rangle \geq \frac{d}{2}\,\|v^{k+1} - v^k\|^2$,

c-à-d $\frac{\alpha}{\rho}\,[L(v^k) - L(v^{k+1}) - \langle L'(v^k), v^k - v^{k+1}\rangle] \leq \frac{\alpha}{\rho}\,[\,\frac{-d}{2}\,\|v^{k+1} - v^k\|^2\,]$.

Et par conséquent,

$$(\Delta_3)_k^{k+1} \leq \tfrac{-\alpha d}{2\rho}\,\|v^{k+1} - v^k\|^2 + \underbrace{\frac{\alpha}{\rho}\,[\langle L'(v^k) - L'(v^{k+1}), w^k - v^{k+1}\rangle]}_{(VI)} + \underbrace{\frac{\alpha}{\rho}\,[L(w^{k+1}) - L(w^k)]}_{(VII)}$$
$$+ \underbrace{\frac{\alpha}{\rho}\,\langle L'(v^{k+1}), w^k - w^{k+1}\rangle}_{(VIII)}.$$

Par ailleurs, si nous utilisons (3.11) avec $v = w^k$, à savoir :

$$\tfrac{1}{\rho}\,[\langle L'(v^{k+1}) - L'(v^k), w^k - v^{k+1}\rangle] + \langle \Gamma_v(u^k, v^k), w^k - v^{k+1}\rangle \geq 0,$$

et en le sommant avec (3.7) où $v = v^{k+1}$, nous obtenons :

$$\tfrac{1}{\rho}\,[\langle L'(v^{k+1}) - L'(v^k), w^k - v^{k+1}\rangle] + \langle \Gamma_v(u^k, v^k) - \Gamma_v(u^k, w^k), w^k - v^{k+1}\rangle \geq 0.$$

Par conséquent,

$$(VI) =^{def} \tfrac{\alpha}{\rho}\,[\langle L'(v^k) - L'(v^{k+1}), w^k - v^{k+1}\rangle]$$
$$\leq \alpha\,\langle \Gamma_v(u^k, v^k) - \Gamma_v(u^k, w^k), w^k - v^{k+1} - v^k + v^k\rangle$$
$$\leq \alpha\,\langle \Gamma_v(u^k, v^k) - \Gamma_v(u^k, w^k), w^k - v^k\rangle + \alpha\,\langle \Gamma_v(u^k, v^k) - \Gamma_v(u^k, w^k), v^k - v^{k+1}\rangle.$$

Utilisons successivement le fait que Γ_v est fortement monotone en v de constante t uniformément en u, l'inégalité de Cauchy-Schwarz et l'hypothèse selon laquelle Γ_v est lipschitz continue, de constante T uniformément en u, cela nous donne :

$$(VI) \leq -\alpha t\,\|v^k - w^k\|^2 + \alpha\,\langle \Gamma_v(u^k, v^k) - \Gamma_v(u^k, w^k), v^k - v^{k+1}\rangle$$
$$\leq -\alpha t\,\|v^k - w^k\|^2 + \alpha\,\|\Gamma_v(u^k, v^k) - \Gamma_v(u^k, w^k)\|\,\|v^k - v^{k+1}\|$$
$$\leq -\alpha t\,\|v^k - w^k\|^2 + \alpha T\,\|v^k - w^k\|\,\|v^k - v^{k+1}\|. \qquad (E)$$

Par ailleurs, étant donné que L est convexe et que L' est lipschitz de constante D, nous avons l'inégalité suivante en utilisant le lemme (1.3.9) :

$$L(w^{k+1}) - L(w^k) - \langle L'(w^k), w^{k+1} - w^k \rangle \leq \tfrac{D}{2} \|w^{k+1} - w^k\|^2,$$

ce qui nous donne :

$$\begin{aligned}(VII) &=^{def} \tfrac{\alpha}{\rho} [L(w^{k+1}) - L(w^k)] \\ &\leq \tfrac{\alpha}{\rho} [\langle L'(w^k), w^{k+1} - w^k \rangle + \tfrac{D}{2} \|w^{k+1} - w^k\|^2].\end{aligned}$$

Dès lors, par définition de $(VIII)$, nous obtenons :

$$\begin{aligned}(VII) + (VIII) &\leq \tfrac{\alpha}{\rho} \langle L'(w^k), w^{k+1} - w^k \rangle + \tfrac{D\alpha}{2\rho} \|w^{k+1} - w^k\|^2 \\ &\quad + \tfrac{\alpha}{\rho} \langle L'(v^{k+1}), w^k - w^{k+1} \rangle \\ &= \tfrac{\alpha}{\rho} \langle L'(w^k) - L'(v^k), w^{k+1} - w^k \rangle + \tfrac{\alpha}{\rho} \langle L'(v^k) - L'(v^{k+1}), w^{k+1} - w^k \rangle \\ &\quad + \tfrac{D\alpha}{2\rho} \|w^{k+1} - w^k\|^2 \\ &\leq \tfrac{\alpha}{\rho} \|L'(w^k) - L'(v^k)\| \, \|w^{k+1} - w^k\| \\ &\quad + \tfrac{\alpha}{\rho} \|L'(v^k) - L'(v^{k+1})\| \, \|w^{k+1} - w^k\| + \tfrac{D\alpha}{2\rho} \|w^{k+1} - w^k\|^2.\end{aligned}$$

En outre, vu le lemme (3.3.3),

$$\|w^{k+1} - w^k\| \leq S \, \|u^{k+1} - u^k\| \tag{3.14}$$

et comme, par hypothèse, L' est lipschitz continue de constante D, nous obtenons

$$\begin{aligned}(VII) + (VIII) &\leq \tfrac{\alpha D}{\rho} \|w^k - v^k\| \, S \, \|u^{k+1} - u^k\| + \tfrac{\alpha D}{\rho} \|v^k - v^{k+1}\| \, S \, \|u^{k+1} - u^k\| \\ &\quad + \tfrac{\alpha D}{2\rho} S^2 \|u^{k+1} - u^k\|^2 \\ &= \tfrac{\alpha D S}{\rho} \|u^k - u^{k+1}\| \, (\|w^k - v^k\| + \|v^k - v^{k+1}\|) \\ &\quad + \tfrac{\alpha D S^2}{2\rho} \|u^{k+1} - u^k\|^2. \qquad \text{(F)}\end{aligned}$$

Par conséquent, en utilisant (E) et (F), nous obtenons :

$$\begin{aligned}(\Delta_3)_k^{k+1} &\leq -\tfrac{\alpha d}{2\rho} \|v^{k+1} - v^k\|^2 + (VI) + (VII) + (VIII) \\ &\leq -\tfrac{\alpha d}{2\rho} \|v^{k+1} - v^k\|^2 - \alpha t \, \|v^k - w^k\|^2 + \alpha T \, \|v^k - w^k\| \, \|v^k - v^{k+1}\| \\ &\quad + \tfrac{\alpha D S}{\rho} \|u^k - u^{k+1}\| (\|w^k - v^k\| + \|v^{k+1} - v^k\|) + \tfrac{\alpha D S^2}{2\rho} \|u^{k+1} - u^k\|^2.\end{aligned}$$

Considérons maintenant $(\Delta_4)_k^{k+1}$.

$$
\begin{aligned}
(\Delta_4)_k^{k+1} &= \Phi_4(u^{k+1}, v^{k+1}) - \Phi_4(u^k, v^k) \\
&= \langle \Gamma_v(u^{k+1}, \tilde{v}(u^{k+1})), v^{k+1} - \tilde{v}(u^{k+1}) \rangle - \langle \Gamma_v(u^k, \tilde{v}(u^k)), v^k - \tilde{v}(u^k) \rangle \\
&= \langle \Gamma_v(u^{k+1}, w^{k+1}), v^{k+1} - w^{k+1} \rangle - \langle \Gamma_v(u^k, w^k), v^k - w^k \rangle \\
&= \langle \Gamma_v(u^{k+1}, w^{k+1}), v^{k+1} - w^{k+1} \rangle - \langle \Gamma_v(u^k, w^k), v^k - w^k - v^{k+1} + v^{k+1} - w^{k+1} + w^{k+1} \rangle \\
&= \langle \Gamma_v(u^k, w^k), v^{k+1} - v^k \rangle + \underbrace{\langle \Gamma_v(u^{k+1}, w^{k+1}) - \Gamma_v(u^k, w^k), v^{k+1} - w^{k+1} \rangle}_{(IX)} \\
&\quad + \underbrace{\langle \Gamma_v(u^k, w^k), w^k - w^{k+1} \rangle}_{(X)}.
\end{aligned}
$$

Par ailleurs,

$$
\begin{aligned}
(IX) &=^{def} \langle \Gamma_v(u^{k+1}, w^{k+1}) - \Gamma_v(u^k, w^k), v^{k+1} - w^{k+1} \rangle \\
&= \langle \Gamma_v(u^{k+1}, w^{k+1}) - \Gamma_v(u^{k+1}, w^k), v^{k+1} - w^{k+1} \rangle \\
&\quad + \langle \Gamma_v(u^{k+1}, w^k) - \Gamma_v(u^k, w^k), v^{k+1} - w^{k+1} \rangle \\
&= \langle \Gamma_v(u^{k+1}, w^{k+1}) - \Gamma_v(u^{k+1}, w^k), v^{k+1} - v^k + v^k - w^k + w^k - w^{k+1} \rangle \\
&\quad + \langle \Gamma_v(u^{k+1}, w^k) - \Gamma_v(u^k, w^k), v^{k+1} - v^k + v^k - w^k + w^k - w^{k+1} \rangle.
\end{aligned}
$$

Etant donné que Γ_v est fortement monotone en v de constante t uniformément en u, c'est-à-dire: $\langle \Gamma_v(u^{k+1}, w^{k+1}) - \Gamma_v(u^{k+1}, w^k), w^{k+1} - w^k \rangle \geq t \, \|w^{k+1} - w^k\|^2$, nous avons:

$$
\begin{aligned}
(IX) &\leq \langle \Gamma_v(u^{k+1}, w^{k+1}) - \Gamma_v(u^{k+1}, w^k), v^{k+1} - v^k + v^k - w^k \rangle - t \, \|w^{k+1} - w^k\|^2 \\
&\quad + \langle \Gamma_v(u^{k+1}, w^k) - \Gamma_v(u^k, w^k), v^{k+1} - v^k + v^k - w^k + w^k - w^{k+1} \rangle \\
&\leq \|\Gamma_v(u^{k+1}, w^{k+1}) - \Gamma_v(u^{k+1}, w^k)\| \, \|v^{k+1} - v^k + v^k - w^k\| - t \, \|w^{k+1} - w^k\|^2 \\
&\quad + \|\Gamma_v(u^{k+1}, w^k) - \Gamma_v(u^k, w^k)\| \, \|v^{k+1} - v^k + v^k - w^k + w^k - w^{k+1}\| \\
&\leq \|\Gamma_v(u^{k+1}, w^{k+1}) - \Gamma_v(u^{k+1}, w^k)\| \, (\|v^{k+1} - v^k\| + \|v^k - w^k\|) - t \, \|w^{k+1} - w^k\|^2 \\
&\quad + \|\Gamma_v(u^{k+1}, w^k) - \Gamma_v(u^k, w^k)\| \, (\|v^{k+1} - v^k\| + \|v^k - w^k\| + \|w^k - w^{k+1}\|).
\end{aligned}
$$

Nous obtenons les deux dernières inéquations en appliquant respectivement l'inégalité de Cauchy-Schwarz et l'inégalité triangulaire.

Utilisons ensuite l'hypothèse selon laquelle Γ_v est lipschitzienne de constante T, en v, uniformément en u et lipschitzienne de constante Z, en u, uniformément en v, nous trouvons:

$$
(IX) \leq T \, \|w^{k+1} - w^k\| \, (\|v^{k+1} - v^k\| + \|v^k - w^k\|) - t \, \|w^{k+1} - w^k\|^2
$$

$$+Z\ \|u^{k+1}-u^k\|\ (\|v^{k+1}-v^k\|\ +\|v^k-w^k\|+\|w^k-w^{k+1}\|).$$

De plus, étant donné (3.14),

$$\begin{aligned}(IX) &\le TS\ \|u^{k+1}-u^k\|\ (\|v^{k+1}-v^k\|+\|v^k-w^k\|)-t\ \|w^{k+1}-w^k\|^2\\ &\quad +Z\ \|u^{k+1}-u^k\|\ (\|v^{k+1}-v^k\|+\|v^k-w^k\|+S\ \|u^k-u^{k+1}\|)\\ &= (TS+Z)\ \|u^{k+1}-u^k\|\ (\|v^{k+1}-v^k\|+\|v^k-w^k\|)+ZS\ \|u^k-u^{k+1}\|^2\\ &\quad -t\ \|w^{k+1}-w^k\|^2.\end{aligned}$$

En outre, puisque t est positif, nous obtenons :

$$(IX)\le (TS+Z)\|u^{k+1}-u^k\|\ (\|v^{k+1}-v^k\|+\|v^k-w^k\|)+ZS\ \|u^k-u^{k+1}\|^2. \quad (G)$$

Par ailleurs, vu (3.7) avec $v=w^{k+1}$, à savoir $\langle\Gamma_v(u^k,w^k),w^{k+1}-w^k\rangle\ge 0$,
nous avons $(X)=^{def}\langle\Gamma_v(u^k,w^k),w^k-w^{k+1}\rangle\le 0.$ (H)

Par conséquent, étant donnés (G) et (H), nous avons :

$$\begin{aligned}(\Delta_4)_k^{k+1} &= \langle\Gamma_v(u^k,w^k),v^{k+1}-v^k\rangle+(IX)+(X)\\ &\le \langle\Gamma_v(u^k,w^k),v^{k+1}-v^k\rangle\\ &\quad +(TS+Z)\ \|u^{k+1}-u^k\|\ (\|v^{k+1}-v^k\|+\|v^k-w^k\|)+ZS\ \|u^{k+1}-u^k\|^2.\end{aligned}$$

Nous en concluons que :

$$\begin{aligned}\Delta_k^{k+1} &= \textstyle\sum_{k=1}^4(\Delta_i)_k^{k+1}\\ &\le -\tfrac{c}{2\varepsilon}\|u^{k+1}-u^k\|^2-\tfrac{1}{\gamma}\|\Gamma_u(u^k,v^k)-\Gamma_u(u^*,v^*)\|^2\\ &\quad +\|\Gamma_u(u^k,v^k)-\Gamma_u(u^*,v^*)\|\|u^k-u^{k+1}\|+\langle\Gamma_v(u^k,v^k)-\Gamma_v(u^*,v^*),v^k-v^*\rangle.\\ &\quad -\tfrac{d}{2\rho}\|v^{k+1}-v^k\|^2+\langle\Gamma_v(u^k,v^k)-\Gamma_v(u^*,v^*),v^*-v^k\rangle+T\|v^k-w^k\|\|v^k-v^{k+1}\|\\ &\quad +\langle\Gamma_v(u^k,w^k),v^k-v^{k+1}\rangle-\tfrac{\alpha d}{2\rho}\|v^{k+1}-v^k\|^2-\alpha t\ \|v^k-w^k\|^2\\ &\quad +\alpha T\ \|v^k-w^k\|\ \|v^k-v^{k+1}\|+\tfrac{\alpha DS}{\rho}\|u^k-u^{k+1}\|\ (\|w^k-v^k\|+\|v^{k+1}-v^k\|)\\ &\quad +\tfrac{\alpha DS^2}{2\rho}\|u^{k+1}-u^k\|^2+\langle\Gamma_v(u^k,w^k),v^{k+1}-v^k\rangle\\ &\quad +(TS+Z)\ \|u^{k+1}-u^k\|\ (\|v^{k+1}-v^k\|+\|v^k-w^k\|)+ZS\ \|u^{k+1}-u^k\|^2\\ &\le (ZS+\tfrac{\alpha DS^2}{2\rho}-\tfrac{c}{2\varepsilon})\|u^{k+1}-u^k\|^2-\tfrac{(1+\alpha)d}{2\rho}\|v^{k+1}-v^k\|^2-\alpha t\|v^k-w^k\|^2\\ &\quad -\tfrac{1}{\gamma}\ \|\Gamma_u(u^k,v^k)-\Gamma_u(u^*,v^*)\|^2+\|\Gamma_u(u^k,v^k)-\Gamma_u(u^*,v^*)\|\|u^k-u^{k+1}\|\end{aligned}$$

$$+(TS+Z+\tfrac{\alpha DS}{\rho})\|u^{k+1}-u^k\|\ (\|v^{k+1}-v^k\|+\|v^k-w^k\|)$$
$$+T(\alpha+1)\ \|v^k-w^k\|\|v^k-v^{k+1}\|.$$

La dernière inégalité peut également s'écrire :

$$-\frac{1}{2}\,(\xi^k)^T\ \mathcal{M}\ (\xi^k) \tag{3.15}$$

où $(\xi^k)^T = (\|\Gamma_u(u^k,v^k)-\Gamma_u(u^*,v^*)\| \quad \|v^k-w^k\| \quad \|v^{k+1}-v^k\| \quad \|u^{k+1}-u^k\|)$

et $\mathcal{M} = \begin{pmatrix} \frac{2}{\gamma} & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 2\alpha t & -(1+\alpha)T & -(TS+Z+\frac{\alpha DS}{\rho}) \\ 0 & -(1+\alpha)T & \frac{(1+\alpha)d}{\rho} & -(TS+Z+\frac{\alpha DS}{\rho}) \\ -1 & -(TS+Z+\frac{\alpha DS}{\rho}) & -(TS+Z+\frac{\alpha DS}{\rho}) & \frac{c}{\varepsilon}-\frac{\alpha DS^2}{\rho}-2ZS \end{pmatrix}$.

Nous allons maintenant montrer qu'il est possible de choisir les paramètres ρ et ε tels que $\mathcal{M}$ soit définie positive.

En effet, pour qu'elle le soit, il faut que :

a) $\frac{2}{\gamma} > 0$,

b) $d_0(\alpha,\rho) = \det \begin{pmatrix} \frac{2}{\gamma} & 0 \\ 0 & 2\alpha t \end{pmatrix} > 0$,

c) $d_1(\alpha,\rho) = \det \begin{pmatrix} \frac{2}{\gamma} & 0 & 0 \\ 0 & 2\alpha t & -(1+\alpha)T \\ 0 & -(1+\alpha)T & \frac{(1+\alpha)d}{\rho} \end{pmatrix} > 0$,

d) $d_2(\alpha,\rho) = \det \mathcal{M} > 0$.

Vérifions ces quatre conditions :

a) évident,

b) $d_0(\alpha,\rho) = \frac{4\alpha t}{\gamma} > 0$,

c) $d_1(\alpha,\rho) = \frac{4\alpha t}{\gamma}\frac{(1+\alpha)d}{\rho} - \frac{2}{\gamma}(1+\alpha)^2T^2$.

Afin que $d_1(\alpha,\rho)$ soit strictement positif, il faut que ρ soit tel que $\rho < \frac{2\alpha t d}{T^2(1+\alpha)}$, ce qui est bien vérifié par hypothèse.

d) Vérifions finalement que $d_2(\alpha,\rho) > 0$.

Pour ce faire, nous effectuons une permutation de coordonnées
(1,2,3,4) $\rightarrow$ (1,4,2,3), ce qui donne:

$$\mathcal{M}' = \begin{pmatrix} \frac{2}{\gamma} & -1 & 0 & 0 \\ -1 & \frac{c}{\varepsilon} - \frac{\alpha DS^2}{\rho} - 2ZS & -(TS + Z + \alpha\frac{DS}{\rho}) & -(TS + Z + \alpha\frac{DS}{\rho}) \\ 0 & -(TS + Z + \alpha\frac{DS}{\rho}) & 2\alpha t & -(1+\alpha)T \\ 0 & -(TS + Z + \alpha\frac{DS}{\rho}) & -(1+\alpha)T & (1+\alpha)\frac{d}{\rho} \end{pmatrix}.$$

Partitionnons $\mathcal{M}'$ en blocs 2×2 et utilisons la formule suivante:
$det\mathcal{M}' = det\mathcal{M}'_{22} \times det(\mathcal{M}'_{11} - \mathcal{M}'_{12}\ (\mathcal{M}'_{22})^{-1}\ \mathcal{M}'_{21})$.

Nous avons $det\mathcal{M}'_{22} = 2\alpha t(1+\alpha)\frac{d}{\rho} - (1+\alpha)^2T^2 = \frac{\gamma}{2}d_1(\alpha,\rho) > 0$

et par conséquent $\mathcal{M}'_{22}$ est inversible.

Nous pouvons dès lors calculer

$$\mathcal{M}'_{11} - \mathcal{M}'_{12}\ (\mathcal{M}'_{22})^{-1}\ \mathcal{M}'_{21} = \begin{pmatrix} \frac{2}{\gamma} & -1 \\ -1 & d_3(\alpha,\varepsilon,\rho) \end{pmatrix}$$

où $d_3(\alpha,\varepsilon,\rho) =$
$\frac{c}{\varepsilon} - \alpha\frac{DS^2}{\rho} - 2ZS - (\frac{2}{\gamma d_1(\alpha,\rho)})(TS + Z + \alpha\frac{DS}{\rho})^2\ ((1+\alpha)\frac{d}{\rho} + 2\alpha t + 2(1+\alpha)T)$.

Dès lors, afin d'assurer que $d_2(\alpha,\rho) > 0$, il faut imposer à ε qu'il soit tel que

$$\frac{c}{\varepsilon} > \frac{\alpha DS^2}{\rho} + 2ZS + (\frac{2}{\gamma d_1(\alpha,\rho)})(TS + Z + \alpha\frac{DS}{\rho})^2\ ((1+\alpha)\frac{d}{\rho} + 2\alpha t + 2(1+\alpha)T),$$

ou encore que $\varepsilon < \frac{c\rho\gamma d_1(\alpha,\rho)}{g_1(\alpha,\rho)}$

où $g_1(\alpha,\rho) = \alpha DS^2\gamma d_1(\alpha,\rho) + 2ZS\rho\ \gamma d_1(\alpha,\rho)$
$+2(TS + Z + \alpha\frac{DS}{\rho})^2\ ((1+\alpha)d + 2\alpha t\rho + 2(1+\alpha)T\rho)$.

Cette condition nous donne l'expression de $g(\rho,\alpha)$.

Par conséquent, sous les hypothèses de départ, la matrice $\mathcal{M}$ est définie positive; dès lors, vu (3.15):

i) soit ξ^k est nul.

Dans ce cas, par définition de ξ^k, $\|\Gamma_u(u^k,v^k)\| = \|\Gamma_u(u^*,v^*)\|$ et par conséquent (u^k,v^k) est solution de (VIP).

ii) soit $(\Delta)_k^{k+1}$ est négative.

Dans ce cas, la suite $\{\Phi(u^k, v^k)\}$ est strictement décroissante; or, elle est bornée inférieurement par zéro, ce qui entraîne qu'elle converge et la différence entre deux termes consécutifs doit par conséquent tendre vers zéro. Dès lors, ξ^k lui-même tend vers zéro, ce qui revient à dire, par définition que $\|\Gamma_u(u^k, v^k) - \Gamma_u(u^*, v^*)\|$, $\|v^k - w^k\|$, $\|v^{k+1} - v^k\|$ et $\|u^{k+1} - u^k\|$ convergent fortement vers zéro.

De plus, étant donné que la suite $\{\Phi(u^k, v^k)\}$ est convergente, elle est bornée et, vu (3.13), la suite $\{(u^k, v^k)\}$ engendrée par l'algorithme est également bornée.

D'autre part, la suite $\{w^k\}$ étant définie à partir de u^k comme étant $w^k = \tilde{v}(u^k)$, est aussi bornée.

Soit $\bar{u}$ un point d'accumulation faible de la suite $\{u^k\}$; notons $\{u^{k_i}\}$ la sous-suite convergeant faiblement vers $\bar{u}$.
Montrons que $\bar{u}$ est solution de l'inégalité variationnelle $\langle \Omega(u^*), u - u^* \rangle \geq 0$.

D'une part, nous avons :

$$\begin{aligned}\|\Omega(u^k) - \Omega(u^*)\| &= \|\Gamma_u(u^k, w^k) - \Gamma_u(u^*, v^*)\| \\ &\leq \|\Gamma_u(u^k, w^k) - \Gamma_u(u^k, v^k)\| + \|\Gamma_u(u^k, v^k) - \Gamma_u(u^*, v^*)\|.\end{aligned}$$

Or, étant donné que Γ_u est lipschitz continue en v de constante Y,
$\|\Omega(u^k) - \Omega(u^*)\| \leq Y\|w^k - v^k\| + \|\Gamma_u(u^k, v^k) - \Gamma_u(u^*, v^*)\|$.

Cependant, $\|w^k - v^k\|$ et $\|\Gamma_u(u^k, v^k) - \Gamma_u(u^*, v^*)\|$ convergent fortement vers zéro et par conséquent $\|\Omega(u^k) - \Omega(u^*)\|$ également.

D'autre part, étant donné l'hypothèse i), Ω possède la propriété de Dunn de constante γ et dès lors, $\langle \Omega(\bar{u}) - \Omega(u^{k_i}), \bar{u} - u^{k_i} \rangle \geq \frac{1}{\gamma} \|\Omega(\bar{u}) - \Omega(u^{k_i})\|^2$.

Cependant, u^{k_i} converge faiblement vers $\bar{u}$ et, de plus, nous venons de montrer que $\Omega(u^{k_i})$ converge fortement vers $\Omega(u^*)$.

Dès lors, en passant à la limite dans l'inégalité précédente, nous trouvons $\Omega(\bar{u}) = \Omega(u^*)$.

Finalement, si nous considérons (3.10), à savoir
$-\langle K'(u^{k+1}) - K'(u^k), u - u^{k+1} \rangle \leq \varepsilon \langle \Gamma_u(u^k, v^k), u - u^{k+1} \rangle, \quad \forall u \in \mathcal{U}^{ad}$,

et si nous utilisons respectivement l'inégalité de Cauchy-Schwarz et le fait que K' est lipschitz continue de constante C, nous obtenons :

$$-C\|u^{k+1}-u^k\|\|u-u^{k+1}\| \leq \varepsilon\langle\Gamma_u(u^k,v^k),u-u^{k+1}\rangle, \quad \forall u \in \mathcal{U}^{ad}. \tag{3.16}$$

Par conséquent, sachant que $\Gamma_u(u^k,v^k)$ converge fortement vers $\Gamma_u(u^*,v^*)=\Omega(u^*)=\Omega(\bar{u})$, en passant à la limite pour la sous-suite k_i dans (3.16), nous aboutissons à $\langle\Omega(\bar{u}),u-\bar{u}\rangle \geq 0, \quad \forall u \in \mathcal{U}^{ad}$.

Nous en déduisons que $(\bar{u},\tilde{v}(\bar{u}))$ est solution du problème de départ.

□

Le théorème (3.3.2) nécessite quelques commentaires.

Plus α grandit et plus la borne supérieure sur ρ devient élevée; de ce point de vue, le α optimal est un α qui se rapproche de l'infini. Cependant, quand α converge vers l'infini, la borne sur ε devient minime et donc $g(\rho,\infty) \to 0$, ce qui réduit le domaine admissible pour ε.

Si nous notons $D_\alpha \subseteq I\!R^2$ le sous-ensemble ouvert de paires admissibles (ρ,ε) pour une valeur de α fixée c'est-à-dire le domaine de convergence défini par (3.5) et (3.6), alors le domaine maximal de convergence est donné par

$$D = \bigcup_\alpha D_\alpha.$$

Une autre remarque importante est que, dans le cas général, en dimension infinie, il n'y a pas de résultat de convergence pour la suite $\{v^k\}$. Cependant, si $\mathcal{U}$ est de dimension finie, il n'y a pas de différence entre topologies faible et forte sur $\mathcal{U}$; dès lors, étant donné que, par le lemme (3.3.3), $\tilde{v}$ est lipschitz continue en u et que, par le théorème (3.3.2), $\|v^k-\tilde{v}(u^k)\|$ converge vers zéro, nous obtenons le résultat suivant :

> Si u^* est un point d'accumulation de $\{u^k\}$,
> alors $\tilde{v}(u^*)$ est un point d'accumulation de $\{v^k\}$.

Donnons à présent un corollaire.

Corollaire 3.3.1

Dans la situation du théorème (3.3.2) et sous les hypothèses supplémentaires suivantes :

i) si nous avons $v^c = \tilde{v}(u^c)$ *pour tout point d'accumulation* (u^c, v^c) *de* $\{(u^k, v^k)\}$;

ii) si K' et L' sont continues respectivement de $\mathcal{U}$ *dans* $\mathcal{U}$ *et de* $\mathcal{V}$ *dans* $\mathcal{V}$ *où* $\mathcal{U}$ *et* $\mathcal{V}$ *sont tous deux munis de la topologie faible,*

alors la suite $\{(u^m, v^m)\}$ *possède un unique point d'accumulation.*

Dans les espaces de **dimension finie**, la première condition est automatiquement vérifiée.

En effet, étant donné le résultat de convergence pour la suite $\{v^k\}$ obtenu ci-dessus dans le cas de la dimension finie et le fait que u^c et v^c sont respectivement points d'accumulation de $\{u^k\}$ et $\{v^k\}$, v^c doit être égal à $\tilde{v}(u^c)$ par unicité de la limite.

Preuve :

Supposons que nous ayons deux points d'accumulation (u_a^c, v_a^c) et (u_b^c, v_b^c) de la suite $\{(u^k, v^k)\}$ et montrons qu'ils sont nécessairement égaux.

Notons $\{k_i\}$ et $\{l_j\}$ les sous-suites telles que $\{(u^{k_i}, v^{k_i})\}$ et $\{(u^{l_j}, v^{l_j})\}$ convergent respectivement vers (u_a^c, v_a^c) et (u_b^c, v_b^c).

Etant donné le théorème (3.3.2) et l'hypothèse i) de ce corollaire, nous pouvons utiliser les points d'accumulation (u_a^c, v_a^c) et (u_b^c, v_b^c) à la place de (u^*, v^*) afin de définir la fonction Φ utilisée pour démontrer le théorème (3.3.2). Cela nous donne donc deux fonctions notées respectivement Φ_a et Φ_b.

En outre, nous avions montré que $\Phi(u^k, v^k)$ converge; cependant, sa limite peut dépendre de la solution (u^*, v^*) utilisée pour définir Φ et, par conséquent, nous allons utiliser deux limites distinctes pour les fonctions Φ_a et Φ_b définies à partir des deux points d'accumulation (nous noterons ces limites l_a et l_b).

En comparant les définitions de $\Phi_a(u^{k_i}, v^{k_i})$ et $\Phi_b(u^{k_i}, v^{k_i})$ et en utilisant le fait

que

$$K(u_b^c) - K(u^{k_i}) - \langle K'(u^{k_i}), u_b^c - u^{k_i}\rangle =$$
$$K(u_a^c) - K(u^{k_i}) - \langle K'(u^{k_i}), u_a^c - u^{k_i}\rangle + K(u_b^c) - K(u_a^c) - \langle K'(u^{k_i}), u_b^c - u_a^c\rangle$$

et que

$$L(v_b^c) - L(v^{k_i}) - \langle L'(v^{k_i}), v_b^c - v^{k_i}\rangle =$$
$$L(v_a^c) - L(v^{k_i}) - \langle L'(v^{k_i}), v_a^c - v^{k_i}\rangle + L(v_b^c) - L(v_a^c) - \langle L'(v^{k_i}), v_b^c - v_a^c\rangle$$

nous obtenons

$$\Phi_b(u^{k_i}, v^{k_i}) = \Phi_a(u^{k_i}, v^{k_i}) + \tfrac{1}{\varepsilon}(K(u_b^c) - K(u_a^c) - \langle K'(u^{k_i}), u_b^c - u_a^c\rangle)$$
$$+\tfrac{1}{\rho}(L(v_b^c) - L(v_a^c) - \langle L'(v^{k_i}), v_b^c - v_a^c\rangle).$$

Etant donné que Φ_a, Φ_b et $\{(u^{k_i}, v^{k_i})\}$ convergent respectivement vers l_a, l_b et (u_a^c, v_a^c) et que K' et L' sont continues, nous trouvons en passant à la limite que :

$$l_b = l_a + \tfrac{1}{\varepsilon}(K(u_b^c) - K(u_a^c) - \langle K'(u_a^c), u_b^c - u_a^c\rangle)$$
$$+\tfrac{1}{\rho}(L(v_b^c) - L(v_a^c) - \langle L'(v_a^c), v_b^c - v_a^c\rangle).$$

Or, par hypothèse, K et L sont fortement convexes; nous obtenons dès lors :

$$l_b \geq l_a + \tfrac{c}{2\varepsilon}\|u_b^c - u_a^c\|^2 + \tfrac{d}{2\rho}\|v_b^c - v_a^c\|^2.$$

Cependant, nous pouvons échanger les rôles de u_a^c et u_b^c ainsi que ceux de v_a^c et v_b^c et utiliser la sous-suite $\{l_j\}$, ce qui donne lieu à :

$$l_a \geq l_b + \tfrac{c}{2\varepsilon}\|u_a^c - u_b^c\|^2 + \tfrac{d}{2\rho}\|v_a^c - v_b^c\|^2.$$

En combinant les deux dernières inégalités obtenues, nous trouvons, $u_a^c = u_b^c$ et $v_a^c = v_b^c$.

□

2. Convergence de la version parallèle de l'alg. de régularisation progressive

Dans le cas particulier de la régularisation progressive, nous travaillons avec l'opérateur

$$\Gamma(u,v) = \begin{pmatrix} \Gamma_u(u,v) \\ \Gamma_v(u,v) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma\,(u-v) \\ \psi(v) + \gamma\,(v-u) \end{pmatrix},$$

qui vérifie les hypothèses de forte monotonie par rapport au second argument et

la propriété de Dunn par rapport à la première composante.

Dans ce cas, en supposant que ψ est monotone maximal et lipschitz continu de constante A sur X^{ad}, les constantes Y, Z, T et t sont estimées à $Y = \gamma$, $Z = \gamma$, $T = A + \gamma$ et $t = \gamma$.
Par conséquent, la constante S apparaissant dans le lemme (3.3.3) vaut 1.

Etant donné que la version parallèle de l'algorithme de régularisation progressive est un cas particulier de la version parallèle de l'algorithme de base construit à partir du Principe du Problème Auxiliaire; nous pouvons adapter le théorème de convergence développé pour la version parallèle de l'algorithme de base, à savoir le théorème (3.3.2), et donner ainsi un théorème de convergence pour la version parallèle de l'algorithme de régularisation progressive.

Nous supposons que (VIP) admet (u^*, v^*) comme solution.

Théorème 3.3.3

Supposons que ψ est monotone maximal et lipschitzien de constante A sur X^{ad}, que les fonctions auxiliaires K et L sont telles que K' est fortement monotone de constante c et lipschitzienne de constante C sur X et que L' est fortement monotone de constante d et lipschitzienne de constante D sur X^{ad},
alors l'algorithme (3.3.1) génère une suite bien définie $\{(u^k, v^k)\}$.

De plus, il existe une fonction g dépendant d'un paramètre positif α et de ρ telle que i) $\forall \alpha > 0$, si

$$0 < \rho < \frac{2\ \alpha d\gamma}{(A+\gamma)^2(1+\alpha)}, \tag{3.17}$$

alors $g(\alpha, \rho) > 0$.

ii) si

$$0 < \epsilon < g(\rho, \alpha), \tag{3.18}$$

alors la suite $\{(u^k, v^k)\}$ est bornée et chaque point d'accumulation $\bar{u}$ de la suite $\{u^k\}$, pour la topologie faible, est solution u^* de (VIP). De plus, la suite totale $\{\Gamma_u(u^k, v^k)\}$ converge fortement vers $\Omega(u^*) = \Gamma_u(u^*, v^*)$ et $\|v^k - \tilde{v}(u^k)\|$ converge vers 0.

La preuve est identique à celle du théorème (3.3.2).

Remarquons qu'étant donné que $\Gamma_u(u,v) = \gamma\ (u - v)$ et que $\{\Gamma_u(u^k, v^k)\}$ converge fortement vers zéro, les suites $\{u^k\}$ et $\{v^k\}$ ont le même point d'accumulation.

3. Convergence de la version séquentielle de l'alg. de régularisation progressive

Bien qu'il n'y ait pas de théorème de convergence pour la version séquentielle de l'algorithme basé sur le Principe du Problème Auxiliaire, nous avons un théorème de convergence propre à la version séquentielle de l'algorithme de régularisation progressive.

Théorème 3.3.4

Supposons que ψ est monotone maximal et lipschitzien de constante A sur X^{ad}, que les fonctions auxiliaires K et L sont telles que K' est fortement monotone de constante c et lipschitzienne de constante C sur X et que L' est fortement monotone de constante d et lipschitzienne de constante D sur X^{ad}, alors l'algorithme séquentiel (3.3.2) génère une suite bien définie $\{(u^k, v^k)\}$.

De plus, il existe une fonction h dépendant d'un paramètre positif α et de ρ telle que i) $\forall \alpha > 0$, si

$$0 < \rho < min(\frac{d}{\gamma}, \frac{2\ \alpha\gamma d(1+\alpha)}{(A+\gamma)^2(1+\alpha)^2 - \alpha\gamma^2}), \tag{3.19}$$

alors $h(\alpha, \rho) > 0$.

ii) si

$$0 < \epsilon < h(\rho, \alpha), \tag{3.20}$$

alors la suite $\{(u^k, v^k)\}$ est bornée, $\|u^k - v^k\|$ converge vers zéro et chaque point d'accumulation faible $\bar{u}$ des suites $\{u^k\}$ et $\{v^k\}$ est solution u^* de (VIP).

Il existe une preuve basée sur des éléments semblables à ceux de la preuve du théorème (3.3.3) ; cependant, étant donné son caractère fastidieux, nous l'omettrons ici.
Elle est développée dans [11].

i) Γ possède la propriété de Dunn partielle par rapport à sa première composante de constante γ;

ii) Γ_u est lipschitzienne en v de constante Y uniformément en u;

iii) Γ_v est fortement monotone en v de constante t uniformément en u, lipschitzienne en u de constante Z uniformément en v et lipschitzienne en v de constante T uniformément en u;

iv) K' est fortement monotone de constante c et lipschitzienne de constante C;

v) L' est fortement monotone de constante d et lipschitzienne de constante D.

En prenant $K(x) = \frac{\|x\|^2}{2}$ et $L(y) = \frac{\|y\|^2}{2}$ où x et $y \in I\!R^2$ et en appliquant les définitions à l'opérateur $\frac{\pi}{2}$, nous trouvons que, dans la situation présente, les constantes Y, Z et t valent γ, tandis que les constantes c, d, C et D valent 1.

La valeur de la constante T pour laquelle Γ_v est lipschitzienne en v vaut $\sqrt{1+\gamma^2}$.

En effet, $\Gamma_v(u,v) = \psi(v) + \gamma(v-u)$, ce qui par définition de ψ, donne

$$\Gamma_v((u_1,v_1),(u_2,v_2)) = \begin{pmatrix} -v_2 + \gamma\,(v_1 - u_1) \\ v_1 + \gamma\,(v_2 - u_2) \end{pmatrix}.$$

Nous devons montrer que $\|\Gamma_v(w,u) - \Gamma_v(v,u)\| \leq T\ \|w - v\|$.

$$\text{Or, } \left\| \begin{matrix} -w_2 + v_2 + \gamma(w_1 - v_1) \\ w_1 - v_1 + \gamma(w_2 - v_2) \end{matrix} \right\|^2 = (1+\gamma^2) \left\| \begin{matrix} w_1 - v_1 \\ w_2 - v_2 \end{matrix} \right\|^2.$$

Dès lors, $T = \sqrt{1+\gamma^2}$.

Etant donné que les hypothèses assurant la convergence des versions parallèle et séquentielle de l'algorithme de régularisation progressive sont bien vérifiées, nous pouvons appliquer cet algorithme à l'opérateur $\frac{\pi}{2}$.

Regardons ce que cela donne dans les deux situations.

2. Algorithme parallèle

La k-ième étape de l'algorithme consiste, connaissant x^k et y^k, à calculer x^{k+1} et y^{k+1} qui sont solutions de

$$\begin{cases} x_1^{k+1} = x_1^k - \varepsilon\gamma(x_1^k - y_1^k) \\ x_2^{k+1} = x_2^k - \varepsilon\gamma(x_2^k - y_2^k) \\ y_1^{k+1} = y_1^k + \rho y_2^k - \gamma\rho(y_1^k - x_1^k) \\ y_2^{k+1} = y_2^k + \rho y_1^k - \gamma\rho(y_2^k - x_2^k). \end{cases}$$

Ce système peut se réécrire de manière matricielle: $z^{k+1} = N_{par}\ z^k$

où $N_{par} = \begin{pmatrix} 1-\varepsilon\gamma & 0 & \varepsilon\gamma & 0 \\ 0 & 1-\varepsilon\gamma & 0 & \varepsilon\gamma \\ \rho\gamma & 0 & 1-\rho\gamma & \rho \\ 0 & \rho\gamma & -\rho & 1-\rho\gamma \end{pmatrix}$

et $z^k = (x_1^k, x_2^k, x_3^k, x_4^k)$.

3. Algorithme séquentiel

La k-ième étape de l'algorithme consiste, connaissant x^k et y^k, à calculer x^{k+1} et y^{k+1} qui sont solutions de

$$\begin{cases} y_1^{k+1} = y_1^k + \rho y_2^k - \gamma\rho(y_1^k - x_1^k) \\ y_2^{k+1} = y_2^k + \rho y_1^k - \gamma\rho(y_2^k - x_2^k) \\ x_1^{k+1} = x_1^k - \varepsilon\gamma(x_1^k - y_1^{k+1}) \\ x_2^{k+1} = x_2^k - \varepsilon\gamma(x_2^k - y_2^{k+1}). \end{cases}$$

Ce système peut se réécrire de manière matricielle : $z^{k+1} = N_{seq}\ z^k$

où $N_{seq} = \begin{pmatrix} 1-\varepsilon\gamma\ (1-\rho\gamma) & 0 & \varepsilon\gamma\ (1-\rho\gamma) & \varepsilon\rho\gamma \\ 0 & 1-\varepsilon\gamma\ (1-\rho\gamma) & -\varepsilon\rho\gamma & \varepsilon\gamma(1-\rho\gamma) \\ \rho\gamma & 0 & 1-\rho\gamma & \rho \\ 0 & \rho\gamma & -\rho & 1-\rho\gamma \end{pmatrix}$

et $z^k = (x_1^k, x_2^k, x_3^k, x_4^k)$.

3.4 Conclusion

Nous avons développé dans ce chapitre un nouvel algorithme, l'algorithme de régularisation progressive, permettant de calculer la solution d'une inéquation variationnelle impliquant un opérateur monotone non intégrable.

Pour ce faire, nous avons commencé par régulariser l'opérateur de départ. Nous avons ainsi obtenu un opérateur régularisé satisfaisant la propriété de Dunn qui est une des propriétés minimales permettant de prouver la convergence de l'algorithme de base développé à partir du Principe du Problème Auxiliaire.
Cependant, le calcul de l'opérateur régularisé étant une tâche presqu'aussi difficile que la résolution du problème de départ, un nouvel algorithme a été proposé dans lequel la régularisation s'effectue en même temps que la résolution. C'est ce que nous avons appelé **régularisation progressive**.

Après avoir prouvé la convergence de l'algorithme de régularisation progressive, nous avons montré sur l'exemple de l'opérateur de rotation $\frac{\pi}{2}$ que l'algorithme de régularisation progressive s'applique dans un cas où l'algorithme de base ne convergeait pas.

La première consiste, à chaque itération, à déterminer une direction de recherche en partant d'un point admissible et en résolvant un sous-problème "approximé" du problème de départ, c'est-à-dire un problème où ψ est approximé par une application monotone.

La direction de recherche obtenue par résolution du sous-problème approximé est une **direction de descente admissible** pour une fonction de mérite F dont les minima coïncident avec l'ensemble des solutions de (VIP).

La seconde étape consiste à effectuer une recherche linéaire, éventuellement inexacte, le long de cette direction de descente, relativement à la fonction de mérite. La longueur de pas résultante définit un nouvel itéré qui réduit la valeur de la fonction de mérite. De cette manière, nous allons générer une suite de solutions admissibles avec une valeur de la fonction de mérite décroissante et nous trouverons ainsi les minima de la fonction de mérite qui, par définition, sont les solutions de (VIP).

4.2 Cadre de travail

Commençons par une définition.

Définition 4.2.1

Une **fonction de mérite** *pour le problème (VIP) est une fonction dont les minima coïncident avec les solutions du problème (VIP).*

4.2.1 Sous-problème approximé

Essayons de formaliser le sous-problème approximé.

Considérons un point $x^k \in X^{ad}$ et introduisons, à l'itération k, une **fonction monotone d'approximation du coût** notée $C^k : X \longrightarrow I\!R^n$.

En approximant ψ par C^k en x^k, nous commettons une erreur d'approximation qui vaut $\psi - C^k$; nous allons donc la prendre en considération en ajoutant à C^k le terme d'erreur fixe $\psi(x^k) - C^k(x^k)$.

De cette manière, nous pouvons définir le **sous-problème approximé** suivant :

Trouver $y^k \in X^{ad}$ tel que $\langle C^k(y^k) + \psi(x^k) - C^k(x^k), y - y^k \rangle \geq 0, \quad \forall y \in X^{ad}$
où $\{C^k\}$ est une suite de fonctions monotones approximant le coût.

Notons ce problème $(VIP^k_{C^k})$ et $\tilde{y}(x^k)$ sa solution.

Sous-problème équivalent

Afin de pouvoir mettre $(VIP^k_{C^k})$ sous forme d'un *problème d'optimisation*, il faut choisir C^k comme étant le **gradient** d'une fonction convexe continûment différentiable $M^k : X \longrightarrow I\!R$.

De cette manière,

Résoudre $(VIP^k_{C^k})$ est équivalent à résoudre le problème de minimisation convexe

$$\min_{y \in X^{ad}} \{M^k(y) + \langle \psi(x^k) - (M^k)'(x^k), y \rangle\}$$

Ce dernier problème est noté $(VIP^k_{M^k})$.

Dans ce cas, (VIP) peut être résolu en solutionnant une série de problèmes d'optimisation.

Preuve de l'équivalence entre $(VIP^k_{C^k})$ et $(VIP^k_{M^k})$.

Soit $x^k \in X$ donné.

Montrons que, si $C^k = (M^k)'$ où M^k est une fonction convexe, $\forall k$, nous avons bien l'équivalence.

$(VIP^k_{M^k}) \Leftrightarrow$ Trouver $y^k \in X^{ad}$ qui résout le problème

$$\min_{y \in X^{ad}} \{M^k(y) + \langle \psi(x^k) - (M^k)'(x^k), y \rangle\};$$

$\Leftrightarrow$ Trouver $y^k \in X^{ad}$ tel que $-(M^k(y^k) + \langle \psi(x^k) - (M^k)'(x^k), y^k \rangle)' \in N_{X^{ad}}(y^k)$;

$\Leftrightarrow$ Trouver $y^k \in X^{ad}$ tel que $-((M^k)'(y^k) + \psi(x^k) - (M^k)'(x^k)) \in N_{X^{ad}}(y^k)$;

Or $N_{X^{ad}}(y^k) = \{z \in X \text{ tel que } \langle z, y^k - y \rangle \geq 0, \ \forall y \in X^{ad}\}$;

$\Leftrightarrow$ Trouver $y^k \in X^{ad}$ tq $\langle -((M^k)'(y^k)+\psi(x^k)-(M^k)'(x^k)), y^k-y\rangle \geq 0, \ \forall y \in X^{ad}$;
$\Leftrightarrow$ Trouver $y^k \in X^{ad}$ tq $\langle (M^k)'(y^k)+\psi(x^k)-(M^k)'(x^k), y-y^k\rangle \geq 0, \ \forall y \in X^{ad}$;
$\Leftrightarrow$ Trouver $y^k \in X^{ad}$ tq $\langle (C^k(y^k)+\psi(x^k)-C^k(x^k)), y-y^k\rangle \geq 0, \ \forall y \in X^{ad}$;
$\Leftrightarrow (VIP^k_{C^k})$.

□

Remarque

Par construction, aux points d'approximation x^k, les solutions de $(VIP^k_{C^k})$ et celles de (VIP) sont les mêmes.

4.2.2 Critère d'arrêt

La remarque précédente est très importante car elle donne lieu à un critère d'arrêt pour l'algorithme de Patriksson.
Ce critère d'arrêt découle du lemme suivant.

Lemme 4.2.1

Si x^k est solution de $(VIP^k_{C^k})$ défini en x^k,
alors x^k est une solution de (VIP).

Notons que la réciproque est également vérifiée.

Preuve:

Par définition, si x^k est solution de $(VIP^k_{C^k})$ défini en x^k, nous avons:
$\langle C^k(x^k)+\psi(x^k)-C^k(x^k), y-x^k\rangle \geq 0, \ \forall y \in X^{ad}$
c'est-à-dire $\langle \psi(x^k), y-x^k\rangle \geq 0, \ \forall y \in X^{ad}$.

Par conséquent, x^k est une solution de (VIP).

□

4.2.3 Direction de descente

En général, nous ne pouvons pas nous attendre à ce que le problème soit résolu avec la solution (éventuellement inexacte) y^k de $(VIP^k_{C^k})$; par conséquent, dans le cas où le critère d'arrêt n'est pas vérifié, nous définissons un nouveau point d'itération en prenant un pas dans la direction $d^k = y^k - x^k$ tel que la fonction

Auxiliaire.

Nous allons montrer que la classe des algorithmes d'approximation du coût englobe la classe d'algorithmes basés sur le Principe du Problème Auxiliaire.

Théorème 4.3.1

Etant donnés $x^k \in X^{ad}$ *et* $C^k = \frac{1}{\varepsilon}M'(x)$ *où* ε *est un nombre strictement positif et* $M : X \to \mathbb{R}$ *est une fonction convexe et de classe* C^1 *sur* X,
alors le sous-problème $(VIP^k_{C^k})$ *est équivalent au Problème Auxiliaire.*

Ce théorème peut se reformuler de la sorte :

Si chaque fonction C^k approximant ψ est le gradient d'une fonction convexe M (multiplié par $\frac{1}{\varepsilon}$),
alors le sous-problème $(VIP^k_{C^k})$ est équivalent au Problème Auxiliaire.

Nous avons l'équivalence en ce sens que, par changement d'écriture, nous pouvons nous ramener à une même formulation pour les deux problèmes.

Cependant, ceci n'étant possible que sous l'hypothèse particulière imposée à C^k, le Problème Auxiliaire est un cas particulier des algorithmes d'approximation du coût.

Preuve :

Vérifions que $(VIP^k_{C^k})$ est équivalent au (PA).

Nous avons montré que, si C^k est le gradient d'une fonction convexe continûment différentiable $M^k : X \longrightarrow \mathbb{R}$, alors $(VIP^k_{C^k})$ est équivalent à $(VIP^k_{M^k})$.
Etant donné que $C^k = \frac{1}{\varepsilon}M'(x)$, en rebaptisant $M^k = \frac{1}{\varepsilon}M$, nous avons bien

$$(VIP^k_{C^k}) \Leftrightarrow (VIP^k_{M^k}).$$

Il nous reste à vérifier que $(VIP^k_{M^k}) \Leftrightarrow (PA)$.

Nous avons :

Théorème 4.4.1

Si C^k est fortement monotone de constante b sur X^{ad},
alors il existe une solution unique $\tilde{y}(x^k)$ au sous-problème approximé
$\langle C^k(y^k) + \psi(x^k) - C^k(x^k), y - y^k \rangle \geq 0, \quad \forall y \in X^{ad}.$

La preuve de ce théorème est analogue à celle du théorème (2.2.2).

Théorème 4.4.2

Si i) ψ est fortement pseudo-monotone de constante e sur X^{ad};
ii) ψ est lipschitz continue de module A sur X^{ad};
iii) C^k est fortement monotone de constante b sur X^{ad};
iv) C^k est lipschitz continue de constante B sur X^{ad};
v) $A^2 + B^2 < 2e$;
vi) $b \geq 1$,
alors, la suite $\{x^k\}$ converge fortement vers x^*.

Vu le lemme (2.2.3), la première hypothèse entraîne que la solution x^* est **unique**.

Preuve:

Etant donné que x^* est solution de (VIP), nous avons

$$\langle \psi(x^*), x - x^* \rangle \geq 0, \quad \forall x \in X^{ad}. \tag{4.1}$$

De plus, comme x^{k+1} est solution de l'inéquation variationnelle $(VIP^k_{C^k})$, nous savons que:

$$\langle C^k(x^{k+1}) - C^k(x^k), x - x^{k+1} \rangle + \langle \psi(x^k), x - x^{k+1} \rangle \geq 0, \quad \forall x \in X^{ad}. \tag{4.2}$$

Considérons la fonction Φ définie par:

$$\Phi(x) = \langle C^k(x) - C^k(x^*), x - x^* \rangle. \tag{4.3}$$

Remarquons que comme C^k est monotone,
$\langle C^k(x) - C^k(x^*), x - x^* \rangle \geq 0, \quad \forall x \in X^{ad},$
ce qui entraîne que $\Phi(x^k)$ est positive.

Etudions la variation de Φ en une étape de l'algorithme de Patriksson, nous la noterons Δ_k^{k+1}.

$$\begin{aligned}
\Delta_k^{k+1} &= \Phi(x^{k+1}) - \Phi(x^k) \\
&= \langle C^k(x^{k+1}) - C^k(x^*), x^{k+1} - x^* \rangle - \langle C^k(x^k) - C^k(x^*), x^k - x^* \rangle \\
&= \langle C^k(x^{k+1}), x^{k+1} - x^* \rangle - \langle C^k(x^k), x^k - x^* \rangle + \langle C^k(x^*), x^k - x^{k+1} \rangle \\
&= \langle C^k(x^{k+1}), x^{k+1} - x^* \rangle - \langle C^k(x^k), x^k - x^* + x^{k+1} - x^{k+1} \rangle + \langle C^k(x^*), x^k - x^{k+1} \rangle \\
&= \langle C^k(x^{k+1}) - C^k(x^k), x^{k+1} - x^* \rangle - \langle C^k(x^k) - C^k(x^*), x^k - x^{k+1} \rangle. \\
&= \underbrace{\langle C^k(x^{k+1}) - C^k(x^k), x^{k+1} - x^* \rangle}_{(I)} + \underbrace{\langle C^k(x^k) - C^k(x^{k+1}), x^{k+1} - x^k \rangle}_{(II)} \\
&\quad + \underbrace{\langle C^k(x^{k+1}) - C^k(x^*), x^{k+1} - x^k \rangle}_{(III)}.
\end{aligned}$$

De plus, étant donné que, par hypothèse, C^k est fortement monotone de constante b sur X^{ad}, nous savons que :

$$(II) = \langle C^k(x^k) - C^k(x^{k+1}), x^{k+1} - x^k \rangle \leq -b \, \|x^k - x^{k+1}\|^2.$$

Par ailleurs, en utilisant respectivement l'inégalité de Cauchy-Schwarz et l'hypothèse selon laquelle C^k est lipschitz continue de constante B, nous avons :

$$\begin{aligned}
(III) = \langle C^k(x^{k+1}) - C^k(x^*), x^{k+1} - x^k \rangle &\leq \|C^k(x^{k+1}) - C^k(x^*)\| \, \|x^{k+1} - x^k\| \\
&\leq B\|x^{k+1} - x^*\| \, \|x^{k+1} - x^k\|.
\end{aligned}$$

Enfin, si nous prenons (4.2) avec $x = x^*$, cela nous donne :

$$\langle C^k(x^{k+1}) - C^k(x^k), x^* - x^{k+1} \rangle + \langle \psi(x^k), x^* - x^{k+1} \rangle \geq 0,$$

ou encore

$$(I) = \langle C^k(x^{k+1}) - C^k(x^k), x^{k+1} - x^* \rangle \leq \langle \psi(x^k), x^* - x^{k+1} \rangle.$$

Par conséquent,

$$\begin{aligned}
\Delta_k^{k+1} &= (I) + (II) + (III) \\
&\leq \langle -b \, \|x^k - x^{k+1}\|^2 + B\|x^{k+1} - x^*\| \, \|x^{k+1} - x^k\| + \langle \psi(x^k), x^* - x^{k+1} \rangle \\
&= -b \, \|x^k - x^{k+1}\|^2 + B\|x^{k+1} - x^*\| \, \|x^{k+1} - x^k\| + \langle \psi(x^k) - \psi(x^{k+1}), x^* - x^{k+1} \rangle \\
&\quad + \langle \psi(x^{k+1}), x^* - x^{k+1} \rangle \\
&\leq -b \, \|x^k - x^{k+1}\|^2 + B\|x^{k+1} - x^*\| \, \|x^{k+1} - x^k\| + \|\psi(x^k) - \psi(x^{k+1})\| \, \|x^* - x^{k+1}\|
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&+\langle \psi(x^{k+1}), x^* - x^{k+1} \rangle \\
&\leq -b \, \|x^k - x^{k+1}\|^2 + B\|x^{k+1} - x^*\| \, \|x^{k+1} - x^k\| + A\|x^k - x^{k+1}\| \, \|x^* - x^{k+1}\| \\
&+\langle \psi(x^{k+1}), x^* - x^{k+1} \rangle.
\end{aligned}
$$

Les deux dernières inégalités sont obtenues en appliquant respectivement l'inégalité de Cauchy-Schwarz et l'hypothèse selon laquelle ψ est lipschitz continue de constante A.

D'un autre côté, sachant que $\langle \psi(x^*), x^{k+1} - x^* \rangle \geq 0$ (par (4.1)) et que ψ est fortement pseudo-monotone, nous avons, par définition,

$$
\langle \psi(x^{k+1}), x^{k+1} - x^* \rangle \geq e\|x^{k+1} - x^*\|^2. \tag{4.4}
$$

Dès lors,

$$
\Delta_k^{k+1} \leq -b \, \|x^k - x^{k+1}\|^2 + B\|x^{k+1} - x^*\| \, \|x^{k+1} - x^k\| + A\|x^k - x^{k+1}\| \, \|x^* - x^{k+1}\| - e\|x^{k+1} - x^*\|^2. \tag{4.5}
$$

Considérons maintenant l'inégalité $0 \leq (\frac{E}{\sqrt{2}}\|x^{k+1} - x^*\| - \sqrt{\frac{1}{2}}\|x^k - x^{k+1}\|)^2$

qui peut se réécrire sous la forme

$$
E\|x^{k+1} - x^*\|\|x^k - x^{k+1}\| \leq \tfrac{E^2}{2}\|x^{k+1} - x^*\|^2 + \tfrac{1}{2}\|x^k - x^{k+1}\|^2.
$$

En appliquant cette inégalité aux deuxième et troisième termes du membre de droite de (4.5), nous trouvons

$$
\Delta_k^{k+1} \leq (\tfrac{A^2}{2} + \tfrac{B^2}{2} - e) \, \|x^{k+1} - x^*\|^2 + (1 - b)\|x^k - x^{k+1}\|^2.
$$

Or, par hypothèse, nous savons que $\frac{A^2}{2} + \frac{B^2}{2} < e$ et que $b \geq 1$, ce qui nous donne $\Delta_k^{k+1} < 0$.

Par conséquent, si $x^{k+1} \neq x^*$, la suite $\{\Phi(x^k)\}$ décroît strictement et comme elle est positive, elle va donc converger et la différence entre deux termes consécutifs de la suite va tendre vers zéro.

Dès lors, comme Δ_k^{k+1} converge vers 0, x^{k+1} converge fortement vers x^*.

□

4.5 Conclusion

Nous avons développé dans ce chapitre une seconde méthode de résolution permettant de résoudre des inéquations variationnelles monotones.
Cette méthode de résolution consiste à utiliser l'algorithme de Patriksson.

Tout comme l'algorithme de base construit à partir du Problème Auxiliaire, cet algorithme résout, à chaque itération, un sous-problème approximé; cependant, il utilise en plus une recherche linéaire.

Nous avons atteint notre but qui était de développer une théorie de convergence pour cet algorithme dans le cas où l'approximation C^k de l'opérateur ψ n'est pas symétrique.

Néanmoins, nous remarquerons que cette théorie ne s'applique que dans le cas où la longueur de pas de la direction de recherche est unitaire. En effet, aucune fonction de mérite n'est disponible, à notre connaissance, afin de pouvoir effectuer une recherche linéaire.

En guise de conclusion...

De nombreux schémas itératifs ont été proposés dans la littérature afin de résoudre des inéquations variationnelles impliquant des opérateurs généraux, à savoir non symétriques.

Afin de pouvoir prouver la convergence de la plupart de ces algorithmes, la forte monotonie de l'opérateur est nécessaire. Cependant, en introduisant le Problème Auxiliaire, nous avons pu réduire ces hypothèses à la propriété de Dunn puis à la propriété pseudo-Dunn et à la forte pseudo-monotonie. Malheureusement, nous avons rencontré un opérateur non intégrable pour lequel l'algorithme de base ne convergeait pas alors que l'inéquation variationnelle définie à partir de cet opérateur possédait une solution.

Nous avons dès lors développé un nouveau schéma itératif qui donnait lieu à l'algorithme de régularisation progressive. En appliquant cet algorithme à un opérateur monotone, nous obtenions un opérateur global vérifiant les hypothèses de forte monotonie par rapport au second argument et la propriété de Dunn par rapport à la première composante.

Récemment, El Farouq a généralisé la régularisation au cas des opérateurs continus, faiblement monotones et pseudo-monotones ([13]). Ses résultats sont cependant limités au cas de la dimension finie.

Il reste également à étendre le cas de la régularisation progressive au cas des opérateurs multivoques.

D'un point de vue un peu plus général, nous pourrions également imaginer des algorithmes avec quelques pas de régularisation progressive puis un pas de résolution, ce qui permettrait d'accélérer la convergence.

Un autre problème que nous laissons ouvert est celui de savoir si la preuve que nous avons développée dans le cas de l'algorithme d'approximation du coût de Patriksson peut être appliquée dans le cas où la longueur de pas de la direction de recherche n'est pas unitaire. Il serait pour cela nécessaire de trouver une fonction de mérite adéquate ou bien sûr une autre technique de démonstration.

Bibliographie

[1] J.P. AUBIN AND I. EKELAND, *Applied Nonlinear Analysis*, Wiley-Interscience, John Wiley & Sons, United States, 1984.

[2] M.S.BAZARRA AND C.M. SHETTY, *Nonlinear Programming: Theory and Algorithms*, John Wiley & Sons, New York, 1979.

[3] H.BREZIS, *Opérateurs Maximaux Monotones et Semi-groupes de Contractions dans les Espaces de Hilbert*, North Holland, Amsterdam, 1973.

[4] G.COHEN, *Auxiliary Problem Principle and Decomposition of Optimization Problems*, Journal of Optimization Theory and Applications, 1980, **32**, 277-305.

[5] G. COHEN, *Décomposition et Coordination en Optimisation Déterministe Différentiable et Non Différentiable*, Thèse, Université de Paris IX-Dauphine, 1984.

[6] G. COHEN, *Auxiliary Problem Principle Extended to Variational Inequalities*, Journal of Optimization Theory and Applications, 1988, **39**, 325-333.

[7] G.COHEN AND D.L. ZHU, *Decomposition Coordination Methods in Large Scale Optimization Problems: the Nondifferentiable Case and the Use of Augmented Lagrangians*, Advances in Large Scale Systems, Theory and Applications, JAI Press, USA, 1983, **1**, 203-266.

[8] G.COHEN AND F. CHAPLAIS, *Nested Monotony for Variational Inequalities over Products of Spaces and Convergence of Iterative Algorithms*, Journal of Optimiz'tion and Applications, 1988, **59**, 369-390.

[9] J.P. CROUZEIX, *Pseudo-monotone Variational Inequality Problems : Existence of Solutions*, Mathematical Programming, 1997, **78**, 305-314.

[10] I.EKELAND AND R.TEMAM., *Analyse Convexe et Problèmes Variationnels.*, Etudes Mathématiques, Dunod, Paris, 1973.

[11] N. EL FAROUQ, *Algorithmes de Résolution d'Inéquations Variationnelles*, Thèse de Doctorat en Mathématiques et Automatique, Ecole des Mines de Paris, Fontainebleau, France, 1993.

[12] N. EL FAROUQ, *Pseudo-monotone Variational Inequalities. Convergence of the Auxiliary Problem Method*, 1998a, preprint.

[13] N. EL FAROUQ, *A Convergent Algorithm Based on the Progressive Regularization for Solving Pseudomonotome Variational Inequalities*, 1998b, preprint.

[14] N. EL FAROUQ AND G. COHEN, *Progressive Regularization of Variational Inequalities and Decomposition Algorithms*, to appear in Journal of Optimization Theory and Applications, Vol 97, **2**, May 1998.

[15] N. EL FAROUQ AND G. COHEN, *Convergence of a Zero-Finding Algorithm for some Nonmonotone Linear Operators*, 1998a, submitted for publication.

[16] R. GLOWINSKI, J.L. LIONS AND R. TREMOLIERES, *Analyse numérique des Inéquations Variationnelles*, Dunod, Paris, 1976.

[17] P.T. HARKER AND J.S. PANG, *Finite-Dimensional Variational and Nonlinear Complementarity Problems: a Survey of Theory, Algorithms and Applications*, Mathematical Programming, 1990, **48**, 161-220.

[18] J.B. HIRIART-URRUTY AND C. LEMARECHAL, *Convex Analysis and Optimization Algorithms*, springer verlag, 1993.

[19] S. KARAMARDIAN, *Complementary Problems over Cones with Monotone and Pseudo-monotone Maps*, Journal of Optimization Theory and Applications, 1976, **18**, 445-455.

[20] S. KARAMARDIAN AND J.S. PANG, *Finite-Dimensional Variational Inequality and Nonlinear Complementary Problems: a Survey of Theory, Algorithms and Applications*, Mathematical Programming, 1990, **48**, 161-220.

[21] D. KINDERLEHRER AND G. STAMPACCHIA, *An Introduction to Variational Inequalities and their Applications*, Academic Press, New York, 1980.

[22] M.A. MATAOUI, *Contributions à la Décomposition et à l'Agrégation des Problèmes Variationnels*, Thèse de Doctorat en Mathématiques et Automatique, Ecole des Mines de Paris, Fontainebleau, France, 1990.

[23] M.MINOUX, *Programmation Mathématique. Théorie et Algorithmes*, Tome 2, Dunod, Paris, 1983.

[24] K. MOUALLIF, V.H. NGUYEN AND J.J STRODIOT, *A Perturbed Parallel Decomposition Method for a Class of Nonsmooth Convex Minimization Problems*, SIAM on Journal Control and Optimization, 1991, **29**, 829-847.

[25] M. PATRIKSSON, *A Unified Framework of Descent Algorithms for Nonlinear Programs and Variational Inequalities*, Linköping University, Linköping, Sweden, 1993.

[26] M. PATRIKSSON, *The Traffic Assignement Problem-Models and Methods*, Topics in Transportations, Netherlands, 1994.

[27] M. PATRIKSSON, *Merit Functions and Descent Algorithms for a Class of Variational Inequality Problems*, Department of Mathematics, Linköping University, Linköping, Sweden, 1996.

[28] B.T. POLYAK, *Introduction to Optimization*, Optimization Softwares, New York, 1987.

[29] R.T. ROCKAFELLAR, *Convex Analysis*, Princeton University Press, Princeton, NJ, 1970.

[30] D.L. ZHU, *Optimisation Sous-Différentiable et Méthodes de Décomposition*, Thèse, Ecoles des Mines de Paris, 1982.