



## THESIS / THÈSE

### MASTER EN SCIENCES MATHÉMATIQUES

#### Régulation de la hauteur et du débit d'eau dans un bief

Philippot, Vincent

*Award date:*  
2018

*Awarding institution:*  
Universite de Namur

[Link to publication](#)

#### General rights

Copyright and moral rights for the publications made accessible in the public portal are retained by the authors and/or other copyright owners and it is a condition of accessing publications that users recognise and abide by the legal requirements associated with these rights.

- Users may download and print one copy of any publication from the public portal for the purpose of private study or research.
- You may not further distribute the material or use it for any profit-making activity or commercial gain
- You may freely distribute the URL identifying the publication in the public portal ?

#### Take down policy

If you believe that this document breaches copyright please contact us providing details, and we will remove access to the work immediately and investigate your claim.



**UNIVERSITÉ  
DE NAMUR**

---

FACULTÉ  
DES SCIENCES

**UNIVERSITE DE NAMUR**

**Faculté des Sciences**

**RÉGULATION DE LA HAUTEUR ET DU DÉBIT D'EAU DANS UN BIEF**

**Mémoire présenté pour l'obtention  
du grade académique de master en sciences mathématiques à finalité spécialisée en perspectives  
professionnelles des mathématiques appliquées**

Vincent PHILIPPOT

Août 2018



**UNIVERSITE DE NAMUR**

**Faculté des Sciences**

**RÉGULATION DE LA HAUTEUR ET DU DÉBIT D'EAU DANS UN BIEF**

**Mémoire présenté pour l'obtention  
du grade académique de master en sciences mathématiques à finalité spécialisée en perspectives  
professionnelles des mathématiques appliquées**

Vincent PHILIPPOT

Août 2018

# Remerciements

*Je tiens à remercier mon promoteur, Monsieur Joseph Winkin, pour la supervision de ce mémoire, son aide, ses conseils et sa disponibilité. La confiance qu'il m'a accordée mais également donnée et redonnée m'a été nécessaire pour mener à bien ce travail.*

*Je remercie également tous les membres du Département de Mathématique qui m'ont formé et qui ont donc participé de près ou de loin à l'élaboration de ce travail final.*

*Je remercie enfin ma famille et mes amis pour leur soutien moral tout au long de la réalisation de ce mémoire.*

## Résumé

Ce mémoire traite de la régulation du niveau et du débit d'eau dans une voie navigable. Nous utilisons d'abord le modèle de Saint-Venant ("équations des eaux peu profondes") pour décrire la dynamique de ce système. Ce modèle est un système de deux équations aux dérivées partielles hyperboliques non linéaires ; la première est une équation de conservation de masse, la seconde est une équation de conservation de la quantité de mouvement. Un état d'équilibre est ensuite défini et nous linéarisons le modèle autour de cet état d'équilibre. Nous donnons d'abord un résultat utilisant la théorie des semi-groupes concernant la stabilisation de ce modèle linéarisé, avant de le discrétiser pour obtenir un modèle en dimension finie afin de pouvoir effectuer des simulations numériques et concevoir une loi de contrôle de type LQ optimale.

**Mots-clés :** contrôle, système hyperbolique, Saint-Venant, équilibre, linéarisation, semi-groupes, différences finies, LQ optimal

## Abstract

This master's thesis deals with the regulation of the water level and flow rate in a navigable river. We first use the Saint-Venant model (shallow water equations) to describe the dynamics of such a system. This model is a system of two nonlinear hyperbolic PDE's ; the first one is a mass balance, the second one is a momentum balance. Then a steady state is defined and we linearize the model around this steady state. We give some semigroup techniques to stabilize this linearized model, and then discretize it to obtain a finite-dimensional model so that we can perform numerical simulations and design LQ optimal control.

**Keywords :** control, hyperbolic system, shallow water equations, steady state, linearisation, semigroups, finite difference, LQ optimal

# Table des matières

|  |           |
|--|-----------|
| <b>Introduction</b>  | <b>1</b>  |
| <b>1 Préliminaires</b>   | <b>2</b>  |
| <b>2 Modélisation du flux d'eau dans un bief</b>   | <b>6</b>  |
| 2.1 Système physique étudié . . . . .  | 6         |
| 2.2 Modélisation du système . . . . .  | 7         |
| 2.3 Descriptions mathématiques . . . . .   | 8         |
| 2.3.1 Système d'équations aux dérivées partielles non linéaire : les équations de Saint-Venant . . . . . | 8         |
| 2.3.2 Système d'équations aux dérivées partielles linéarisé autour d'un équilibre . . . . .              | 12        |
| 2.3.3 Système linéaire discrétisé par différences finies . . . . .                                       | 14        |
| <b>3 Analyse de stabilité du système linéarisé</b>   | <b>19</b> |
| <b>4 Analyse dynamique du système discrétisé</b>   | <b>27</b> |
| 4.1 Observabilité, contrôlabilité et stabilité . . . . .   | 28        |
| 4.2 Réponses indicielle et impulsionnelle . . . . .  | 30        |
| 4.2.1 Réponse indicielle . . . . .   | 30        |
| 4.2.2 Réponse impulsionnelle . . . . .   | 30        |
| 4.3 Tests dynamiques en boucle ouverte . . . . .   | 31        |
| <b>5 Conception d'une loi de contrôle pour le système discrétisé</b>                                     | <b>37</b> |
| <b>6 Conclusions et perspectives</b>   | <b>42</b> |

# Introduction

L'étude des systèmes dynamiques et de la façon dont on peut les contrôler occupe une place importante dans le domaine des mathématiques appliquées. Le monde qui nous entoure est rempli d'exemples d'applications de la théorie du contrôle comme le pendule inversé, les réacteurs chimiques ou encore les segways (de plus en plus répandus dans nos villes). Un autre exemple intéressant est le contrôle du niveau d'eau et du débit dans les voies navigables. En effet, grâce à un débit bien régulé, l'on peut informer les bateliers sur la charge maximale qu'ils peuvent transporter sur un bateau dans un canal sans en toucher le fond, l'approvisionnement des centrales électriques et autres industries consommatrices d'eau situées sur des berges est facilité et l'on peut également absorber en douceur des variations naturelles induites par des aléas météorologiques. Ces exemples, issus de [4], forment une liste non exhaustive de raisons de s'intéresser au contrôle du niveau et du débit d'eau dans un canal. Ce mémoire se concentrera sur ce sujet.

Nous commencerons par définir le système que nous allons étudier : nous nous concentrerons sur une section de canal délimitée par deux écluses, appelée *bief*, où de l'eau peut s'écouler et aux bords de laquelle l'on peut réguler le débit d'eau entrant ou sortant. Nous effectuerons quelques hypothèses simplificatrices afin de modéliser ce système à l'aide des principes physiques qu'il doit vérifier. Nous obtiendrons ainsi une description mathématique du modèle sous forme de deux équations aux dérivées partielles hyperboliques non linéaires, l'une concernant la conservation de la masse, l'autre la conservation de la quantité de mouvement, appelées équations de Saint-Venant, ou, en anglais, *shallow water equations*. Celles-ci dépendent de deux variables, l'une temporelle  $t$ , l'autre spatiale,  $x$ . Cette partie de modélisation se basera principalement sur [1] et s'appuyera également sur [5]. Nous fixerons ensuite un équilibre du système qui sera, à terme, l'équilibre à atteindre. De la sorte, nous pourrons linéariser le système autour de cet équilibre et utiliser l'un des grands principes de la théorie du contrôle, le principe de linéarisation : "des approximations du premier ordre sont suffisantes pour caractériser un comportement local. Les conceptions basées sur des linéarisations fonctionnent localement pour le système original." [9] Nous démontrerons également un résultat utilisant la théorie des semi-groupes permettant la stabilisation de ce système linéarisé.

Enfin, afin de pouvoir faire des simulations numériques, nous discrétiserons, par rapport à la variable spatiale, le système ainsi linéarisé via des différences finies. Nous passerons de la sorte à un système en dimension finie et pourrons appliquer la théorie se rapportant à ce type de systèmes. Nous ferons, de façon numérique, une analyse dynamique du système obtenu et concevrons une loi de contrôle pour celui-ci de type LQ optimale.

# Chapitre 1

## Préliminaires

Les définitions qui suivent sont reprises comme présentées dans le Chapitre 1 de la référence [1].

**Définition 1.** Soit  $\mathcal{Y}$  un sous-espace non vide ouvert et connexe de  $\mathbb{R}^n$ .

Un système dynamique unidimensionnel de  $n$  lois d'équilibre non linéaires sur un intervalle d'un espace fini est un système d'équations aux dérivées partielles (EDP's) de la forme

$$\partial_t e(Y(t, x)) + \partial_x f(Y(t, x)) + g(Y(t, x)) = 0, \quad t \in [0, +\infty[, \quad x \in [0, L] \quad (1.1)$$

où

- $t \in [0, +\infty[$  (variable de temps) et  $x \in [0, L]$  (variable d'espace) sont les 2 variables indépendantes ;
- $Y : [0, +\infty[ \times [0, L] \mapsto \mathbb{R}^n$  est le vecteur des variables d'état ;
- $e \in C^2(\mathcal{Y}; \mathbb{R}^n)$  est le vecteur des variables à contrôler et est un difféomorphisme sur  $\mathcal{Y}$  ;
- $f \in C^2(\mathcal{Y}; \mathbb{R}^n)$  est le vecteur des densités de flux correspondantes ;
- $g \in C^1(\mathcal{Y}; \mathbb{R}^n)$  est le vecteur des termes source représentant la production ou la consommation des variables contrôlées dans le système.

Nous pouvons réécrire ce système (1.1) sous la forme d'un système quasi-linéaire

$$Y_t + F(Y)Y_x + G(Y) = 0, \quad t \in [0, +\infty[, \quad x \in [0, L], \quad (1.2)$$

avec  $F : \mathcal{Y} \mapsto \mathcal{M}_{n,n}(\mathbb{R})$  et  $G : \mathcal{Y} \mapsto \mathbb{R}^n$  des fonctions de classe  $C^1$  et dont les définitions sont

$$F(Y) := \left( \frac{\partial e}{\partial Y} \right)^{-1} \left( \frac{\partial f}{\partial Y} \right) \quad \text{et} \quad G(Y) := \left( \frac{\partial e}{\partial Y} \right)^{-1} g(Y)$$

où  $\mathcal{M}_{n,n}(\mathbb{R})$  est l'ensemble des matrices réelles  $n \times n$ .

*N.B. :* Nous avons omis de mettre que  $Y$  est fonction de  $(t, x)$  dans (1.2) et nous le ferons à chaque fois qu'il n'y a pas de confusion possible.

**Définition 2.** Un système de la forme (1.2) est dit hyperbolique si  $F(Y)$  a  $n$  valeurs propres distinctes non nulles, pour tout  $Y \in \mathcal{Y}$ . Ces valeurs propres seront appelées vitesses caractéristiques.

**Convention 1.** Nous considérerons que,  $\forall Y \in \mathcal{Y}$ ,  $\forall i$ ,  $\lambda_i(Y) > 0$ . Les valeurs propres seront donc écrites  $\lambda_1(Y)$ ,  $\dots$ ,  $\lambda_m(Y)$ ,  $-\lambda_{m+1}(Y)$ ,  $\dots$ ,  $-\lambda_n(Y)$ , où  $m$  est le nombre de valeurs propres positives.

**Définition 3.** Un système de la forme (1.2) est dit semi-linéaire si  $F$  est constant, c'est-à-dire que  $F$  ne dépend pas de  $Y$ . Dans ce cas, les vitesses caractéristiques sont constantes et notées  $\lambda_1$ ,  $\dots$ ,  $\lambda_m$ ,  $-\lambda_{m+1}$ ,  $\dots$ ,  $-\lambda_n$ .

**Définition 4.** Des systèmes hyperboliques intéressants sont ceux pouvant être mis sous forme caractéristique à l'aide de  $n$  coordonnées de Riemann. Elles sont obtenues via le changement de coordonnées  $R = \psi(Y)$  ayant les propriétés suivantes

- $\psi : \mathcal{Y} \mapsto \mathcal{R} \subset \mathbb{R}^n$  est un difféomorphisme :  $R = \psi(Y) \Leftrightarrow Y = \psi^{-1}(R)$ , avec la matrice Jacobienne  $\Psi(Y) := \frac{\partial \psi}{\partial Y}$  ;
- cette matrice Jacobienne  $\Psi(Y)$  diagonalise la matrice  $F(Y)$  :

$$\Psi(Y)F(Y) = D(Y)\Psi(Y), \quad Y \in \mathcal{Y}$$

avec

$$D(Y) = \text{diag}(\lambda_1(Y) \dots, \lambda_m(Y), -\lambda_{m+1}(Y), \dots, -\lambda_n(Y)).$$

Dès lors, nous avons que le système (1.2) est équivalent, pour des solutions de classe  $C^1$ , au système mis sous forme caractéristique et exprimé dans les coordonnées de Riemann suivant

$$R_t + \Lambda(R)R_x + C(R) = 0, \quad t \in [0, +\infty[, \quad x \in [0, L], \quad (1.3)$$

avec

$$\Lambda(R) := D(\psi^{-1}(R)) \text{ et } C(R) := \Psi(\psi^{-1}(R))G(\psi^{-1}(R)).$$

**Définition 5.** Un état stationnaire (ou d'équilibre) est une solution  $Y(t, x) = Y^*(x) \forall t \in [0, +\infty[$  du système (1.2) satisfaisant l'équation différentielle ordinaire

$$F(Y^*)Y_x^* + G(Y^*) = 0, \quad x \in [0, L]. \quad (1.4)$$

**Définition 6.** *Le système linéarisé autour d'un état d'équilibre prend la forme*

$$Y_t + A(x)Y_x + B(x)Y = 0, \quad t \in [0, +\infty[, \quad x \in [0, L] \quad (1.5)$$

où

$$A(x) := F(Y^*(x)) \text{ et } B(x) := \left[ \frac{\partial}{\partial Y} (F(Y)Y_x + G(Y)) \right]_{Y=Y^*(x)}.$$

*Dans le cas où il existe une solution à l'équation algébrique  $G(Y^*) = 0$ , on dit que le système a un état d'équilibre constant (il ne dépend ni de  $t$  ni de  $x$ ) et la linéarisation prend la forme*

$$Y_t + AY_x + BY = 0, \quad t \in [0, +\infty[, \quad x \in [0, L], \quad (1.6)$$

*où  $A$  et  $B$  sont des matrices constantes. Dans ce cas particulier, on dit que le système (1.2) a un état d'équilibre uniforme. Sinon, on le dit non uniforme.*

**Définition 7.** *Un état d'équilibre du système mis sous forme caractéristique (1.3) est, par définition,  $R^*(x) = \psi(Y^*(x))$  tel que*

$$\Lambda(R^*)R_x^* + C(R^*) = 0.$$

*Dès lors, les coordonnées de Riemann autour de cet état d'équilibre peuvent être définies comme*

$$R := \psi(Y) - \psi(Y^*).$$

*Avec ces coordonnées de Riemann, on peut écrire le système sous forme caractéristique*

$$R_t + \Lambda(R, x)R_x + C(R, x) = 0, \quad t \in [0, +\infty[, \quad x \in [0, L], \quad (1.7)$$

avec

$$\Lambda(R(t, x), x) := D(\psi^{-1}(R(t, x) + \psi(Y^*(x))))$$

et

$$C(R(t, x), x) := D(\psi^{-1}(R(t, x) + \psi(Y^*(x))))\psi_x(Y^*(x)) + \Psi(\psi^{-1}(R(t, x) + \psi(Y^*(x))))G(\psi^{-1}(R(t, x) + \psi(Y^*(x)))).$$

*La linéarisation du système (1.7) donne*

$$R_t + \Lambda(x)R_x + M(x)R = 0, \quad t \in [0, +\infty[, \quad x \in [0, L], \quad (1.8)$$

où

$$\Lambda(x) := D(Y^*(x)) \text{ et } M(x) := \left[ \frac{\partial C(R, x)}{\partial R} \right]_R = 0.$$

*N.B. : Ici, on a d'abord mis le système sous forme caractéristique (1.3) et puis on a linéarisé. On remarque que, si on avait d'abord linéarisé le système (1.1) et puis le mettre sous forme caractéristique, on obtenait le même résultat repris en (1.8). En résumé, les opérations de linéarisation et de transformation en coordonnées de Riemann peuvent être exécutées dans l'ordre que l'on veut pour obtenir le système sous la forme (1.8).*

La définition suivante est extraite de [9].

**Définition 8.** *Un système différentiel linéaire temps-invariant (LTI) est un système  $R = [A, B, C, D]$  défini par :*

$$\begin{aligned}\dot{x}(t) &= Ax(t) + Bu(t) \\ y(t) &= Cx(t) + Du(t)\end{aligned}$$

*où  $u(t) \in \mathbb{R}^m$  est la fonction d'entrée,  $x(t) \in \mathbb{R}^n$  est l'état et  $y(t) \in \mathbb{R}^p$  est la fonction de sortie.*

# Chapitre 2

## Modélisation du flux d'eau dans un bief

Nous établirons dans ce chapitre une modélisation du système dynamique consistant en une section de canal ouvert où de l'eau peut s'écouler, délimitée par deux écluses successives, appelée bief (comme dans [4]). Les objectifs de ce chapitre seront les suivants : poser le système physique étudié, le modéliser, et, enfin, en faire diverses descriptions mathématiques grâce aux équations de Saint-Venant. Le contenu de ce chapitre se base sur les références [1] et [5].

### 2.1 Système physique étudié

Nous considérons un bief, c'est-à-dire une section de canal délimitée par deux écluses distantes d'une certaine longueur, où de l'eau s'écoule. Une représentation de bief est donnée à la figure 2.1.



FIGURE 2.1 – Illustration représentant un bief (Source : [3])

## 2.2 Modélisation du système

Nous allons utiliser la modélisation de Saint-Venant pour ce système. Les hypothèses de ce modèle sont que la section transversale est rectangulaire et que les points d'une même tranche d'eau se déplacent à la même vitesse horizontale.

Les grandeurs prises en compte dans ce modèle sont les suivantes :

- $H(t, x)$  est la profondeur de l'eau dans le bief à la position  $x$  et au temps  $t$  (mètres) ;
- $V(t, x)$  est la vitesse horizontale moyenne d'une colonne verticale d'eau à la position  $x$  et au temps  $t$  (mètres par seconde) ;
- $Q(t, x)$  est le débit d'eau à la position  $x$  et au temps  $t$  (mètres cube par seconde) ;
- $A(t, x)$  est l'aire de la section transversale à la position  $x$  et au temps  $t$  (mètres carré) ;
- $S_b$  est une constante correspondant à la pente au fond du canal ;
- $L$  est la longueur du bief (mètres).

Les figures 2.2.a et 2.2.b donnent respectivement une représentation latérale et transversale de ces grandeurs.

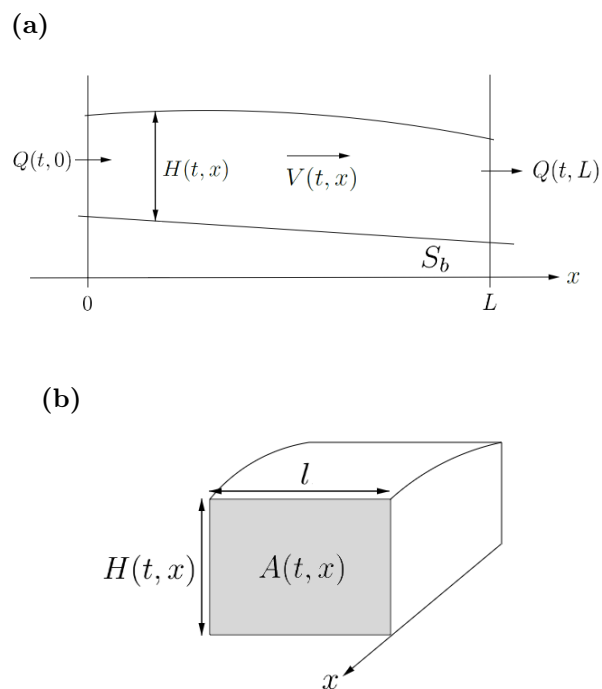


FIGURE 2.2 – Vues (a) latérale (inspirée de [5]) et (b) transversale du système étudié selon le modèle de Saint-Venant

## 2.3 Descriptions mathématiques

### 2.3.1 Système d'équations aux dérivées partielles non linéaire : les équations de Saint-Venant

L'outil utilisé pour décrire mathématiquement le modèle décrit ci-dessus consiste en les équations de Saint-Venant, c'est-à-dire le système d'équations aux dérivées partielles hyperboliques suivant

$$\partial_t H + \partial_x(HV) = 0, \quad (2.1)$$

$$\partial_t V + \partial_x \left( \frac{V^2}{2} + gH \right) + \left( C \frac{V^2}{H} - gS_b \right) = 0. \quad (2.2)$$

où  $g$  est l'accélération de la pesanteur à la surface de la Terre et  $C$  un coefficient de friction. Notons que, dans ces équations, la largeur du canal  $l$  a été considérée comme unitaire, et ce sera le cas dans tout ce qui suivra.

#### Dégagement des équations de Saint-Venant

Voyons, dans les grandes lignes, comment nous arrivons à ces équations, en suivant la même démarche que dans [5]. Par le théorème des accroissements finis, on a

$$Q(L, t) - Q(0, t) = L \partial_x Q.$$

Le volume d'eau sur le bief a un accroissement de  $lL \partial_t H$ , ce qui est égal à  $L \partial_t A$  puisque  $A(t, x) = lH(t, x)$ . Comme ces termes sont égaux au signe près, on obtient donc  $L \partial_x Q + lL \partial_t H = 0$ . Enfin, puisque  $Q = AV$ , on obtient

$$l \partial_t H + \partial_x(AV) = 0.$$

Comme nous avons fait l'hypothèse lors de l'établissement du modèle que la largeur du canal était unitaire ( $l = 1$ ), on retrouve bien la première équation de Saint-Venant. En effet, le premier terme devient  $\partial_t H$  et le second  $\partial_x(HV)$  car  $A = lH = H$  dans ce cas.

Concernant la seconde équation, utilisons la seconde loi de Newton ( $\vec{F} = m \vec{a}$ ). Nous obtenons ainsi, en termes de normes,

$$\begin{aligned} F &= ma \\ &= \rho AL \frac{dV}{dt} \\ &= \rho AL (\partial_t V + V \partial_x V). \end{aligned}$$

Le module de la force extérieure résultante causant cette accélération est

$$F = -\rho g AL \cos S_b \partial_x H - \rho g AL j + \rho g AL \sin S_b.$$

où  $j$  est un terme égal à  $\frac{V^2}{Ch^2m}$  avec  $Ch$  le coefficient de Chezy et  $m = A/p$  le rapport entre l'aire de la section transversale et le "périmètre mouillé". Si nous considérons que  $S_b$  est assez petit, nous obtenons

$$F = -\rho g AL \partial_x H - \rho g AL j + \rho g AL S_b.$$

Finalement, cela nous donne

$$\begin{aligned} F &= \rho AL(\partial_t V + V \partial_x V) = \rho g AL(-\partial_x H - j + S_b) \\ &\Leftrightarrow (\partial_t V + V \partial_x V) + g \partial_x H = g(S_b - j). \end{aligned}$$

En faisant quelques manipulations sur  $j$ , nous obtenons bien l'équation (2.2). Notons qu'il est également possible de trouver les équations de Saint-Venant à partir des équations de Navier-Stokes.

Maintenant que nous avons dégagé les deux équations de Saint-Venant, mettons-les sous forme matricielle quasi-linéaire

$$Y_t + F(Y)Y_x + G(Y) = 0 \tag{2.3}$$

$$\text{où } Y := \begin{pmatrix} H \\ V \end{pmatrix}, F(Y) := \begin{pmatrix} V & H \\ g & V \end{pmatrix} \text{ et } G(Y) := \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{cV^2}{H} - gS_b \end{pmatrix}.$$

Calculons à présent les valeurs propres de la matrice  $F(Y)$  ainsi définie. Le polynôme caractéristique de cette matrice est  $\rho(\lambda) = (V - \lambda)^2 - gH$ . Son réalisant est  $4gH$  et nous obtenons donc comme valeurs propres (avec la convention que  $\lambda_i > 0$  ( $i = 1, 2$ ))

$$\lambda_1 = V + \sqrt{gH} \text{ et } -\lambda_2 = V - \sqrt{gH}.$$

Si nous considérons que le flux est fluvial, c'est-à-dire que le nombre de Froude  $Fr = \frac{V}{\sqrt{gH}}$  est strictement inférieur à 1, nous avons que  $\lambda_1 > 0$  et que  $-\lambda_2 < 0$ . De cette façon, le système (2.3) est hyperbolique, puisqu'il possède des valeurs propres distinctes de signes opposés.

Nous pouvons à présent définir les coordonnées de Riemann comme

$$R_1 = V + 2\sqrt{gH} \text{ et } R_2 = V - 2\sqrt{gH}.$$

Le changement de coordonnées inverse est le suivant

$$H = \frac{(R_1 - R_2)^2}{16g} \text{ et } V = \frac{R_1 + R_2}{2}.$$

Grâce à ces coordonnées de Riemann, on peut donc écrire le système sous la forme caractéristique  $R_t + \Lambda(R)R_x + C(R) = 0$  avec

$$R = \begin{pmatrix} R_1 \\ R_2 \end{pmatrix}, \quad \Lambda(R) := \begin{pmatrix} \lambda_1(R) & 0 \\ 0 & -\lambda_2(R) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{3R_1 + R_2}{4} & 0 \\ 0 & \frac{R_1 + 3R_2}{4} \end{pmatrix}$$

et

$$C(R) := \left( 4gC \left( \frac{R_1 + R_2}{R_1 - R_2} \right)^2 - gS_b \right) \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

### Conditions aux bords

Lorsque le flux est fluvial, nous avons besoin pour compléter les équations de Saint-Venant de deux conditions aux bords : une en  $x = 0$ , l'autre en  $x = L$ . Ces conditions sont déterminées par la configuration des bords du bief, comme, par exemple, un déversoir à chaque extrémité. Nous pouvons envisager deux situations.

Une situation relativement simple est lorsque le bassin est fermé mais doté de pompes qui régulent l'évacuation de l'eau en  $x = 0$  et en  $x = L$ . Dans ce cas, les conditions aux bords sont

$$\begin{aligned} H(t, 0)V(t, 0) &= U_0(t); \\ H(t, L)V(t, L) &= U_L(t). \end{aligned} \tag{2.4}$$

où  $U_0(t)$  et  $U_L(t)$  sont les débits d'eau (en  $m^3s^{-1}$ ) en  $x = 0$  et en  $x = L$  respectivement. Couplé avec ces conditions, le système formé par les équations de Saint-Venant (2.1) et (2.2) est un système de contrôle aux bords avec les signaux de commande  $U_0(t)$  et  $U_L(t)$ .

Une deuxième situation correspond au cas où les conditions aux bords sont régies par des portes hydrauliques aux extrémités du bief. La figure 2.3 illustre ce cas.

Dans le cas où il y a débordement, les conditions aux bords sont

$$\begin{aligned} H(t, 0)V(t, 0) &= (k_G \sqrt{2g}) \sqrt{[Z_0(t) - U_0(t)]^3}; \\ H(t, L)V(t, L) &= (k_G \sqrt{2g}) \sqrt{[H(t, L) - U_L(t)]^3}. \end{aligned}$$

Dans le cas d'un sous-écoulement, les conditions aux bords correspondantes sont

$$\begin{aligned} H(t, 0)V(t, 0) &= (k_G \sqrt{2g}) U_0(t) \sqrt{Z_0(t) - H(t, 0)}; \\ H(t, L)V(t, L) &= (k_G \sqrt{2g}) U_L(t) \sqrt{H(t, L) - Z_L(t)}. \end{aligned}$$

Dans les deux expressions précédentes,

- $Z_0(t)$  et  $Z_L(t)$  représentent les hauteurs d'eau au niveau des portes, à l'extérieur du bief;

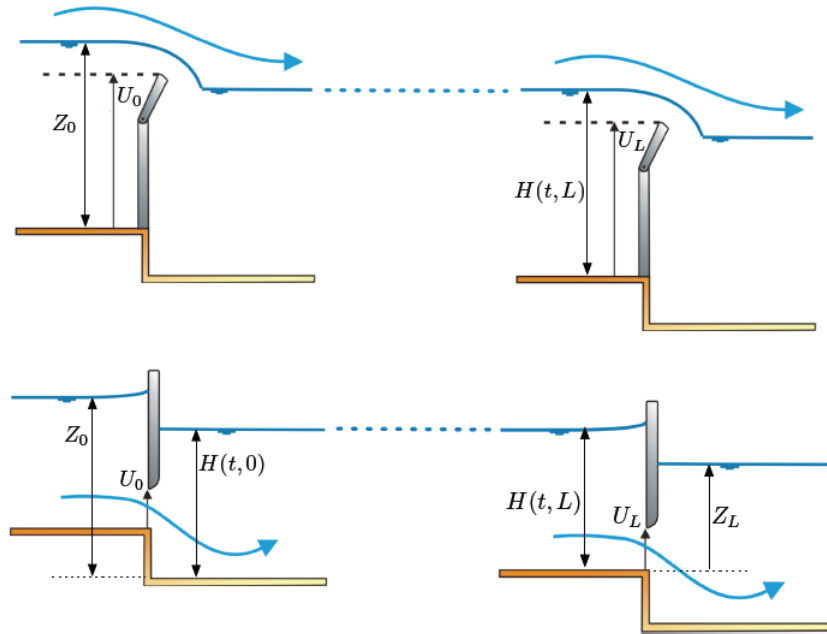


FIGURE 2.3 – Portes hydrauliques à l’entrée et à la sortie d’un bief : au-dessus, pour des débordements, en-dessous pour des sous-écoulements. (Source : [1])

- $k_G$  est un coefficient d’écoulement ;
- $U_0(t)$  et  $U_L(t)$  représentent l’élévation de la porte dans le cas de débordement, ou la hauteur de l’ouverture de cette porte lors de sous-écoulement.

Comme dans le premier cas, les équations de Saint-Venant couplées avec ces conditions aux bords forment un système de contrôle aux bords avec  $U_0$  et  $U_L$  comme signaux de commande, et  $Z_0$  et  $Z_L$  comme entrées de perturbation.

### 2.3.2 Système d'équations aux dérivées partielles linéarisé autour d'un équilibre

Étudions maintenant les équilibres de ce système afin de pouvoir linéariser ce dernier. Les équilibres correspondent aux couples  $(H^*(x), V^*(x))$  vérifiant

$$\begin{aligned} \partial_x(H^*V^*) &= 0 \\ \partial_x\left(\frac{V^{*2}}{2} + gH^*\right) + \left(C\frac{V^{*2}}{H^*} - gS_b\right) &= 0 \end{aligned}$$

c'est-à-dire les couples  $(H^*(x), V^*(x))$  solutions du système d'équations différentielles ordinaires ci-dessus. En effet, de cette façon, on aura

$$\begin{aligned} \partial_t H^* &= 0 \\ \partial_t V^* &= 0 \end{aligned}$$

ce qui fait bien de ce couple  $(H^*, V^*)$  un état d'équilibre.

De la première équation, on obtient  $V^*\partial_x H^* = -H^*\partial_x V^*$  que l'on peut évaluer, grâce à la seconde équation, à  $\frac{H^*V^*(gS_b - C\frac{V^{*2}}{H^*})}{gH^* - V^{*2}}$ .

À présent, nous sommes en mesure de linéariser le système en posant

$$\begin{aligned} h(t, x) &:= H(t, x) - H^*(x); \\ v(t, x) &:= V(t, x) - V^*(x). \end{aligned} \tag{2.5}$$

De cette façon, les équations (2.1) et (2.2) donnent

$$\begin{aligned} \partial_t[h(t, x) + H^*(x)] + \partial_x[(h(t, x) + H^*(x))(v(t, x) + V^*(x))] &= 0 \\ \partial_t[v(t, x) + V^*(x)] + \partial_x\left[\frac{(v(t, x) + V^*(x))^2}{2} + g(h(t, x) + H^*(x))\right] \\ + \left(C\frac{(v(t, x) + V^*(x))^2}{h(t, x) + H^*(x)} - gS_b\right) &= 0 \end{aligned}$$

qui, après simplifications et suppression des termes non linéaires, deviennent

$$\partial_t h + V^*\partial_x h + H^*\partial_x v + (\partial_x V^*)h + (\partial_x H^*)v = 0; \tag{2.6}$$

$$\partial_t v + g\partial_x h + V^*\partial_x v - \left(\frac{CV^{*2}}{H^{*2}}\right)h + \left(\partial_x V^* + \left(2C\frac{V^*}{H^*}\right)\right)v = 0. \tag{2.7}$$

Les coordonnées de Riemann correspondant à ce système linéarisé sont définies comme suit

$$\begin{aligned} R_1(t, x) &= v(t, x) + h(t, x)\sqrt{\frac{g}{H^*(x)}}; \\ R_2(t, x) &= v(t, x) - h(t, x)\sqrt{\frac{g}{H^*(x)}}. \end{aligned}$$

Le changement de coordonnées inverse est donc

$$h(t, x) = \frac{R_1(t, x) - R_2(t, x)}{2} \sqrt{\frac{H^*(x)}{g}};$$

$$v(t, x) = \frac{R_1(t, x) + R_2(t, x)}{2}.$$

Les équations de Saint-Venant linéarisés peuvent donc être écrites sous forme caractéristique

$$\partial_t R_1(t, x) + \lambda_1(x) \partial_x R_1(t, x) + \gamma_1(x) R_1(t, x) + \delta_1(x) R_2(t, x) = 0; \quad (2.8)$$

$$\partial_t R_2(t, x) + \lambda_2(x) \partial_x R_2(t, x) + \gamma_2(x) R_1(t, x) + \delta_2(x) R_2(t, x) = 0; \quad (2.9)$$

où

- $\lambda_1(x) = V^*(x) + \sqrt{gH^*(x)}$  et  $\lambda_2(x) = V^*(x) - \sqrt{gH^*(x)}$  sont les vitesses caractéristiques ;
- $\gamma_1 = \frac{CV^{*2}}{H^*} \left[ -\frac{3}{4(\sqrt{gH^*} + V^*)} + \frac{1}{V^*} - \frac{1}{2\sqrt{gH^*}} \right] + \frac{3gS_b}{4(\sqrt{gH^*} + V^*)};$
- $\delta_1 = \frac{CV^{*2}}{H^*} \left[ -\frac{1}{4(\sqrt{gH^*} + V^*)} + \frac{1}{V^*} + \frac{1}{2\sqrt{gH^*}} \right] + \frac{gS_b}{4(\sqrt{gH^*} + V^*)};$
- $\gamma_2 = \frac{CV^{*2}}{H^*} \left[ \frac{1}{4(\sqrt{gH^*} + V^*)} + \frac{1}{V^*} - \frac{1}{2\sqrt{gH^*}} \right] - \frac{gS_b}{4(\sqrt{gH^*} + V^*)};$
- $\delta_2 = \frac{CV^{*2}}{H^*} \left[ \frac{3}{4(\sqrt{gH^*} + V^*)} + \frac{1}{V^*} + \frac{1}{2\sqrt{gH^*}} \right] - \frac{3gS_b}{4(\sqrt{gH^*} + V^*)}.$

### 2.3.3 Système linéaire discrétisé par différences finies<sup>1</sup>

Dans cette section, nous allons, à l'aide de [7], passer du modèle en dimension infinie linéarisé autour d'un équilibre (que nous prendrons, par la suite, constant, c'est-à-dire que  $H^*(x) := H^*$  et  $V^*(x) := V^*$ ) de la section précédente à un modèle linéaire en dimension finie en discrétisant la variable spatiale  $x$  et en utilisant la méthode des différences finies pour estimer les dérivées partielles par rapport à cette variable. Nous obtiendrons ainsi un système linéaire temps-invariant.

Pour ce faire, nous posons

$$\begin{aligned} x_0 &= 0, \\ x_N &= L, \\ \text{et } \forall i \in \{0, \dots, N-1\}, x_{i+1} &= x_i + k \end{aligned}$$

où  $k$  est le pas de discrétisation et  $N+1$  le nombre de points de discrétisation. Nous avons donc que  $L = Nk$ .

Nous pouvons ainsi passer de la famille

$$\begin{pmatrix} h(t, x) \\ v(t, x) \end{pmatrix}_{x \in [0, L]}$$

à un vecteur de dimension  $2(N+1)$  finie

$$\begin{pmatrix} h(t, x_0) \\ h(t, x_1) \\ \vdots \\ h(t, x_N) \\ v(t, x_0) \\ v(t, x_1) \\ \vdots \\ v(t, x_N) \end{pmatrix}$$

que nous noterons

$$\begin{pmatrix} h_0(t) \\ h_1(t) \\ \vdots \\ h_N(t) \\ v_0(t) \\ v_1(t) \\ \vdots \\ v_N(t) \end{pmatrix} := X(t).$$

---

1. Il s'agit en fait d'une discrétisation uniquement de la variable spatiale, la variable temporelle restant continue.

D'après les équations [2.6](#) et [2.7](#) et les conditions aux bords [2.4](#), nous allons déterminer les matrices  $A$  et  $B$  permettant d'écrire le système discrétisé correspondant sous la forme

$$\dot{X}(t) = AX(t) + BU(t)$$

où  $\dot{X}(t) := \frac{dX}{dt}$ .

En utilisant pour les points intérieurs la méthode des différences finies centrées dans les équations [2.6](#) et [2.7](#), nous obtenons, pour tout  $i = 1, \dots, N - 1$ , les approximations

$$\begin{aligned} \dot{h}_i(t) + V^* \frac{(h_{i+1}(t) - h_{i-1}(t))}{2k} + H^* \frac{(v_{i+1}(t) - v_{i-1}(t))}{2k} &= 0, \\ \dot{v}_i(t) + g \frac{h_{i+1}(t) - h_{i-1}(t)}{2k} + V^* \frac{v_{i+1}(t) - v_{i-1}(t)}{2k} - \left( \frac{CV^{*2}}{H^{*2}} \right) h_i(t) + \left( 2C \frac{V^*}{H^*} \right) v_i(t) &= 0 \end{aligned}$$

qui donnent

$$\begin{aligned} \dot{h}_i(t) &= -\frac{1}{2k} (-V^* h_{i-1}(t) + V^* h_{i+1}(t) - H^* v_{i-1}(t) + H^* v_{i+1}(t)), \\ \dot{v}_i(t) &= -\frac{1}{2k} \left( -g h_{i-1}(t) - \frac{2CV^{*2}k}{H^{*2}} h_i(t) + g h_{i+1}(t) - V^* v_{i-1}(t) + \frac{4CV^*k}{H^*} v_i(t) + V^* v_{i+1}(t) \right), \end{aligned}$$

pour  $i = 1, \dots, N - 1$ .

Pour les points frontières  $x_0$  et  $x_N$ , nous utilisons respectivement des différences finies progressives et régressives de précision 2 (pour avoir la même précision que les différences finies centrées), et nous obtenons

$$\begin{aligned} \dot{h}_0(t) + V^* \frac{(-3h_0(t) + 4h_1(t) - h_2(t))}{2k} + H^* \frac{(-3v_0(t) + 4v_1(t) - v_2(t))}{2k} &= 0 \\ \dot{h}_N(t) + V^* \frac{(h_{N-2}(t) - 4h_{N-1}(t) + 3h_N(t))}{2k} + H^* \frac{(v_{N-2}(t) - 4v_{N-1}(t) + 3v_N(t))}{2k} &= 0 \\ \dot{v}_0(t) + g \frac{(-3h_0(t) + 4h_1(t) - h_2(t))}{2k} + V^* \frac{(-3v_0(t) + 4v_1(t) - v_2(t))}{2k} \\ &\quad - \left( \frac{CV^{*2}}{H^{*2}} \right) h_0(t) + \left( 2C \frac{V^*}{H^*} \right) v_0(t) = 0 \\ \dot{v}_N(t) + g \frac{(h_{N-2}(t) - 4h_{N-1}(t) + 3h_N(t))}{2k} + V^* \frac{(v_{N-2}(t) - 4v_{N-1}(t) + 3v_N(t))}{2k} \\ &\quad - \left( \frac{CV^{*2}}{H^{*2}} \right) h_N(t) + \left( 2C \frac{V^*}{H^*} \right) v_N(t) = 0. \end{aligned}$$

Sous forme matricielle, nous avons donc

$$\dot{X}(t) = -\frac{1}{2k} \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix} X(t)$$

où

$$A_{11} = \begin{bmatrix} -3V^* & 4V^* & -V^* & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ -V^* & 0 & V^* & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -V^* & 0 & V^* & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & -V^* & 0 & V^* & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & -V^* & 0 & V^* \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & V^* & -4V^* & 3V^* \end{bmatrix},$$

$$A_{12} = \begin{bmatrix} -3H^* & 4H^* & -H^* & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ -H^* & 0 & H^* & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -H^* & 0 & H^* & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & -H^* & 0 & H^* & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & -H^* & 0 & H^* \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & H^* & -4H^* & 3H^* \end{bmatrix},$$

$$A_{21} = \begin{bmatrix} -3g - \frac{2CV^{*2}k}{H^{*2}} & 4g & -g & \dots & \dots & 0 & 0 & 0 \\ -g & -\frac{2CV^{*2}k}{H^{*2}} & g & \dots & \dots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \dots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \dots & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \dots & -g & -\frac{2CV^{*2}k}{H^{*2}} & g \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \dots & g & -4g & 3g - \frac{2CV^{*2}k}{H^{*2}} \end{bmatrix}$$

et

$$A_{22} = \begin{bmatrix} -3V^* + \frac{4CV^*k}{H^*} & 4V^* & -V^* & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ -V^* & \frac{4CV^*k}{H^*} & V^* & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \dots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \dots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & -V^* & \frac{4CV^*k}{H^*} & V^* \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & V^* & -4V^* & 3V^* + \frac{4CV^*k}{H^*} \end{bmatrix}$$

En utilisant les relations de [2.5](#) dans les conditions aux bords [2.4](#), nous obtenons

$$\begin{aligned} V^*h_0(t) + H^*v_0(t) + H^*V^* &= U_0(t), \\ V^*h_N(t) + H^*v_N(t) + H^*V^* &= U_L(t) \end{aligned}$$

qui, en posant  $U^* = H^*V^*$ , donnent

$$\begin{aligned} V^*h_0(t) + H^*v_0(t) &= u_0(t), \\ V^*h_N(t) + H^*v_N(t) &= u_L(t) \end{aligned}$$

où  $u_0(t) := U_0(t) - U^*$  et  $u_L(t) := U_L(t) - U^*$ .

Nous obtenons donc l'égalité

$$\begin{bmatrix} V^* & 0 & \dots & 0 & H^* & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & -V^* & 0 & 0 & \dots & -H^* \\ V^* & 0 & \dots & 0 & H^* & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & -V^* & 0 & 0 & \dots & -H^* \end{bmatrix} X(t) + \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 0 \\ \vdots & \vdots \\ 0 & 0 \\ 0 & 1 \\ -1 & 0 \\ 0 & 0 \\ \vdots & \vdots \\ 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_0(t) \\ u_L(t) \end{bmatrix} = 0.$$

Les matrices  $A$  et  $B$  permettant d'écrire notre système discrétisé sous la forme [2.3.3](#)

sont donc

$$A = -\frac{1}{2k} \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix} - \frac{1}{k} \begin{bmatrix} V^* & 0 & \dots & 0 & H^* & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & -V^* & 0 & 0 & \dots & -H^* \\ V^* & 0 & \dots & 0 & H^* & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & -V^* & 0 & 0 & \dots & -H^* \end{bmatrix},$$

et

$$B = -\frac{1}{k} \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 0 \\ \vdots & \vdots \\ 0 & 0 \\ 0 & 1 \\ -1 & 0 \\ 0 & 0 \\ \vdots & \vdots \\ 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Enfin, nous avons choisi, afin de connaître les niveaux d'eau aux extrémités  $h_0(t)$  et  $h_N(t)$  ainsi que les vitesses correspondantes  $v_0(t)$  et  $v_N(t)$ , la matrice  $C$  telle que

$$C = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \end{bmatrix}$$

## Chapitre 3

# Analyse de stabilité du système linéarisé

Le contenu de ce chapitre est directement issu de [8].

Nous énonçons et démontrons une condition suffisante de stabilité pour un système décrit par l'équation aux dérivées partielles suivante

$$\xi_t + \Lambda \xi_x = M \xi$$

où

- $x \in (0, 1)$  et  $t \geq 0$ ;
- $\Lambda = \begin{bmatrix} \Lambda_+ & 0 \\ 0 & -\Lambda_- \end{bmatrix}$  est une matrice diagonale constante dans  $\mathbb{R}^{n \times n}$  avec  $\Lambda_+ = \text{diag}(\lambda_i)_{i=1}^m \in \mathbb{R}^{m \times m}$  et  $\Lambda_- = \text{diag}(-\lambda_i)_{i=m+1}^n \in \mathbb{R}^{(n-m) \times (n-m)}$  qui sont définies positives;
- $M$  est une matrice constante dans  $\mathbb{C}^{n \times n}$ ;
- l'état  $\xi$  est tel que  $\xi = \xi(x, t) = \begin{bmatrix} \xi_+(x, t) \\ \xi_-(x, t) \end{bmatrix}$  où  $\xi_+ \in \mathbb{R}^m$  et  $\xi_- \in \mathbb{R}^{n-m}$ .

On associe à ce système la condition au bord suivante

$$\begin{bmatrix} \xi_+(0, t) \\ \xi_-(1, t) \end{bmatrix} = K \begin{bmatrix} \xi_+(1, t) \\ \xi_-(0, t) \end{bmatrix} + Nu(t)$$

où

- $K = \begin{bmatrix} 0 & K_0 \\ K_1 & 0 \end{bmatrix}$  est une matrice constante dans  $\mathbb{C}^{n \times n}$  avec  $K_0 \in \mathbb{C}^{m \times (n-m)}$  et  $K_1 \in \mathbb{C}^{(n-m) \times m}$ ;

- $N$  est une matrice de rang plein dans  $\mathbb{C}^{n \times p}$  de la forme  $N = \begin{bmatrix} N_0 \\ N_1 \end{bmatrix}$   
où  $p \leq n$ ,  $N_0 \in \mathbb{C}^{m \times p}$ ,  $N_1 \in \mathbb{C}^{(n-m) \times p}$ ;
- $u(t) \in \mathbb{C}^p$  est le contrôle au temps  $t \geq 0$  à trouver.

Le système d'équations aux dérivées partielles linéarisé autour de l'équilibre en coordonnées de Riemann tel qu'écrit dans les équations [2.8](#) et [2.9](#) est bien un système de cette forme. Le résultat qui va suivre peut donc lui être appliqué.

Définissons un opérateur  $L$  de la façon suivante

$$L\xi = -\Lambda\xi' + M\xi.$$

Nous observons que  $L \in \mathcal{L}(Z, X)$  où  $Z = H^1((0, 1); \mathbb{C}^n)$  et  $X = L^2((0, 1); \mathbb{C}^n)$ .

Définissons également l'opérateur  $G \in \mathcal{L}(Z, \mathbb{C}^n)$  comme suit

$$G\xi = \begin{bmatrix} \xi_+(0) \\ \xi_-(1) \end{bmatrix} - K \begin{bmatrix} \xi_+(1) \\ \xi_-(0) \end{bmatrix}$$

ainsi que son noyau  $\text{Ker } G$  noté  $X_1$ .

On a donc

$$X_1 = \left\{ \xi \in Z : \begin{bmatrix} \xi_+(0) \\ \xi_-(1) \end{bmatrix} = K \begin{bmatrix} \xi_+(1) \\ \xi_-(0) \end{bmatrix} \right\}.$$

Enfin, définissons l'opérateur  $A := L|_{X_1} \in \mathcal{L}(X_1, X)$ .

Nous allons, pour la suite, faire 2 hypothèses.

1<sup>ère</sup> hypothèse :

Il existe une matrice diagonale  $P \in \mathbb{R}^{n \times n}$  définie positive telle que

$$PM + M^*P \text{ est semi-définie négative;} \tag{3.1}$$

et il existe une matrice diagonale  $Q \in \mathbb{R}^{n \times n}$  définie positive telle que

$$QM^* + MQ \text{ est semi-définie négative.} \tag{3.2}$$

2<sup>ème</sup> hypothèse :

$\Lambda$  et  $K$  sont telles que

$$\|(|\Lambda|P)^{\frac{1}{2}}K(|\Lambda|P)^{-\frac{1}{2}}\| < 1 \tag{3.3}$$

et

$$\|(Q|\Lambda|^{-1})^{-\frac{1}{2}}K(Q|\Lambda|^{-1})^{\frac{1}{2}} \begin{bmatrix} 0 & I_m \\ I_{n-m} & 0 \end{bmatrix}\| < 1 \tag{3.4}$$

Nous pouvons à présent énoncer et démontrer le résultat suivant.

**Théorème 1.** Si la matrice  $\begin{bmatrix} -K_1 & I \end{bmatrix} e^{\Lambda^{-1}M} \begin{bmatrix} K_0 \\ I \end{bmatrix}$  est inversible et vérifie les hypothèses 1 et 2 définies ci-dessus,

Alors,

- l'opérateur  $A$  génère un  $C_0$ -SG  $(T(t))_{t \geq 0}$  sur  $X$
- $\exists \nu > 0$  tel que,  $\forall t \geq 0$ ,  $\|T(t)\| \leq e^{-\nu t}$

*Démonstration.* La preuve de ce théorème se fera en 4 étapes :

- 1) L'opérateur  $A$  est fermé
- 2) Détermination de l'opérateur adjoint  $A^*$  de  $A$
- 3) L'opérateur  $A$  est dissipatif
- 4) L'opérateur  $A^*$  est dissipatif

1) L'opérateur  $A$  est fermé

Comme  $X_1$  contient un sous-espace  $(H_0^1((0, 1); \mathbb{C}^n))$  dense de  $X$ ,  $X_1$  est dense dans  $X$ . Dès lors, l'opérateur  $A$  est densément défini sur  $X$ , surjectif et inversible. Son inverse  $A^{-1}$  est un opérateur linéaire borné (grâce à la surjectivité). Ceci est équivalent à dire que  $0 \in \rho(A)$  puisque  $A - 0I$  est inversible. D'où  $\rho(A) \neq \emptyset$ , ce qui implique que  $A$  est fermé. En effet,  $s \in \rho(A) \Rightarrow G(sI - A)$  est le même que  $G((sI - A)^{-1})$  sauf que les coordonnées sont "inversées". Donc,  $sI - A$  est fermé, et donc  $A$  est fermé car, si  $A : D(A) \rightarrow Z$  est fermé ( $D(A) \subset X$ ) et  $P \in \mathcal{L}(X, Z)$ , alors  $A + P$  est fermé ( $D(A + P) = D(A)$ ).

2) Détermination de l'opérateur adjoint  $A^*$  de  $A$

L'opérateur adjoint  $A^*$  de  $A$  est donné par

$$A^*\psi = \Lambda\psi' + M^*\psi \quad (3.5)$$

et son domaine de définition est

$$D(A^*) = \left\{ \psi \in Z : K^*|\Lambda| \begin{bmatrix} \psi_+(0) \\ \psi_-(1) \end{bmatrix} = |\Lambda| \begin{bmatrix} \psi_+(1) \\ \psi_-(0) \end{bmatrix} \right\} \quad (3.6)$$

En effet, vérifions que  $\forall z \in D(A)$ ,  $\forall \psi \in D(A^*)$ , on a  $\langle A^*\psi, z \rangle = \langle \psi, Az \rangle$  avec  $A^*$  et  $D(A^*)$  ainsi définis. Calculons pour ce faire  $\langle A^*\psi, z \rangle$ .

$$\begin{aligned}
\langle A^*\psi, z \rangle &= \int_0^1 (A^*\psi)^* z \, dx \\
&= \int_0^1 (\Lambda\psi' + M^*\psi)^* z \, dx \\
&= \int_0^1 (\Lambda\psi')^* z \, dx + \int_0^1 (M^*\psi)^* z \, dx \\
&= \int_0^1 \psi'^* \Lambda^* z \, dx + \int_0^1 \psi^* M z \, dx \\
&= \int_0^1 \psi'^* \Lambda z \, dx + \int_0^1 \psi^* M z \, dx
\end{aligned}$$

La dernière égalité vient du fait que  $\Lambda$  est une matrice diagonale à valeurs réelles, et que donc  $\Lambda^* = \Lambda$ .

Ensuite, nous pouvons écrire

$$\langle A^*\psi, z \rangle = \int_0^1 \psi'_+ \Lambda_+ z_+ \, dx - \int_0^1 \psi'_- \Lambda_- z_- \, dx + \int_0^1 \psi^* M z \, dx$$

Intégrons les deux premiers termes par parties. Ainsi, nous obtenons

$$\begin{aligned}
\langle A^*\psi, z \rangle &= [\psi^* \Lambda_+ z_+]_0^1 - \int_0^1 \psi^* \Lambda_+ z'_+ \, dx - ([\psi^* \Lambda_- z_-]_0^1 - \int_0^1 \psi^* \Lambda_- z'_- \, dx) + \int_0^1 \psi^* M z \, dx \\
&= [\psi^* \Lambda_+ z_+]_0^1 - \int_0^1 \psi^* \Lambda_+ z'_+ \, dx - [\psi^* \Lambda_- z_-]_0^1 + \int_0^1 \psi^* \Lambda_- z'_- \, dx + \int_0^1 \psi^* M z \, dx
\end{aligned}$$

Par la suite, nous aurons besoin des deux équivalences suivantes,

$$\psi \in D(A^*) \Leftrightarrow \psi \in Z \text{ et } \begin{bmatrix} K_1^* \Lambda_- \psi_-(1) \\ K_0^* \Lambda_+ \psi_+(0) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \Lambda_+ \psi_+(1) \\ \Lambda_- \psi_-(0) \end{bmatrix}$$

et

$$\begin{aligned}
z \in D(A) &\Leftrightarrow z \in X_1 = \text{Ker } G \\
&\Leftrightarrow z \in Z \text{ et } \begin{bmatrix} z_+(0) \\ z_-(1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} K_0 z_-(0) \\ K_1 z_+(1) \end{bmatrix}. \tag{3.7}
\end{aligned}$$

Continuons le calcul de  $\langle A^*\psi, z \rangle$  en utilisant ces deux informations,

$$\begin{aligned}
\langle A^*\psi, z \rangle &= \int_0^1 \psi_-^* \Lambda_- z'_- dx - \int_0^1 \psi_+^* \Lambda_+ z'_+ dx + \psi_+^*(1) \Lambda_+ z_+(1) - \psi_+^*(0) \Lambda_+ z_+(0) \\
&\quad - (\psi_-^*(1) \Lambda_- z_-(1) - \psi_-^*(0) \Lambda_- z_-(0)) + \int_0^1 \psi^* M z dx \\
&= - \int_0^1 \psi^* \Lambda z' dx + \int_0^1 \psi^* M z dx + \psi_+^*(1) \Lambda_+ z_+(1) - \psi_+^*(0) \Lambda_+ K_0 z_-(0) \\
&\quad - \psi_-^*(1) \Lambda_- K_1 z_+(1) + \psi_-^*(0) \Lambda_- z_-(0) \\
&= \int_0^1 (\psi^* M z - \psi^* \Lambda z') dx + \psi_+^*(1) \Lambda_+ z_+(1) - \psi_+^*(0) \Lambda_+ K_0 z_-(0) \\
&\quad - (z_+^*(1) K_1^* \Lambda_- \psi_-(1))^* + (z_-^*(0) \Lambda_- \psi_-(0))^* \\
&= \int_0^1 \psi^* (-\Lambda z' + M z) dx + \psi_+^*(1) \Lambda_+ z_+(1) - \psi_+^*(0) \Lambda_+ K_0 z_-(0) \\
&\quad - (z_+^*(1) \Lambda_+ \psi_+(1))^* + (z_-^*(0) K_0^* \Lambda_+ \psi_+(0))^* \\
&= \int_0^1 \psi^* A z dx + \psi_+^*(1) \Lambda_+ z_+(1) - \psi_+^*(0) \Lambda_+ K_0 z_-(0) - \psi_+^*(1) \Lambda_+ z_+(1) \\
&\quad + \psi_+^*(0) \Lambda_+ K_0 z_-(0) \\
&= \langle \psi, A z \rangle
\end{aligned}$$

Nous avons donc bien que l'opérateur  $A^*$  et son domaine  $D(A^*)$  définis en (3.5) et (3.6) caractérisent l'opérateur adjoint de  $A$ .

### 3) L'opérateur $A$ est dissipatif

Montrons que  $\exists \nu_1 > 0$  tel que,  $\forall z \in D(A)$ ,  $\operatorname{Re} \langle A z, P z \rangle \leq -\nu_1 |z|_X^2$ .  
On a que,  $\forall z \in D(A)$ ,

$$\begin{aligned}
\operatorname{Re} \langle A z, P z \rangle &= \operatorname{Re} \int_0^1 (A z)^* P z dx = \operatorname{Re} \int_0^1 (-\Lambda z' + M z)^* P z dx \\
&= \operatorname{Re} \int_0^1 (-\Lambda z')^* P z dx + \operatorname{Re} \int_0^1 (M z)^* P z dx \\
&= \operatorname{Re} \int_0^1 -z'^* \Lambda^* P z dx + \operatorname{Re} \int_0^1 z^* M^* P z dx \\
&\leq \operatorname{Re} \int_0^1 -z'^* \Lambda P z dx
\end{aligned}$$

En effet, on a  $\operatorname{Re} \int_0^1 z^* M^* P z dx \leq 0$  par l'hypothèse faite en (3.1).

Comme  $\Lambda$  et  $P$  sont diagonales, on a  $\Lambda P = P \Lambda$ , c'est-à-dire  $P$  et  $\Lambda$  sont commutatives.

Dès lors, on a  $\frac{d}{dx}(z^* \Lambda P z) = 2z'^* \Lambda P z$ . En effet,

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx}(z^* \Lambda P z) &= z'^* \Lambda P z + z^* \Lambda P z' \\ &= z'^* \Lambda P z + (z'^* P^* \Lambda^* z)^* \\ &= z'^* \Lambda P z + (z'^* P \Lambda z)^* \\ &= z'^* \Lambda P z + (z'^* \Lambda P z)^* \\ &= z'^* \Lambda P z + z'^* \Lambda P z \end{aligned}$$

où on a également utilisé les faits suivants :

- $P$  et  $\Lambda$  sont des matrices réelles et donc  $P = P^*$  et  $\Lambda = \Lambda^*$  ;
- $\forall x \in \mathbb{R}$ ,  $x^* = x$  et donc  $(z'^* \Lambda P z)^* = z'^* \Lambda P z$ .

En d'autres termes,  $[z^* \Lambda P z]_0^1 = 2 \int_0^1 z'^* \Lambda P z dx$ , et donc  $\int_0^1 -z'^* \Lambda^* P z dx = -\frac{1}{2} [z^* \Lambda P z]_0^1$ .  
Il en découle que

$$\begin{aligned} \operatorname{Re}\langle Az, Pz \rangle &\leq -\frac{1}{2} [z^* \Lambda P z]_0^1 \\ &= -\frac{1}{2} [(z_+^*(1) \Lambda_+ P_+ z_+(1) - z_-^*(1) \Lambda_- P_- z_-(1)) \\ &\quad - (z_+^*(0) \Lambda_+ P_+ z_+(0) - z_-^*(0) \Lambda_- P_- z_-(0))] \end{aligned}$$

En utilisant à nouveau [\(3.7\)](#), nous obtenons alors

$$\begin{aligned} \operatorname{Re}\langle Az, Pz \rangle &\leq -\frac{1}{2} [z_+^*(1) \Lambda_+ P_+ z_+(1) - z_+^*(1) K_1^* \Lambda_- P_- K_1 z_+(1) \\ &\quad - z_-^*(0) K_0^* \Lambda_+ P_+ K_0 z_-(0) + z_-^*(0) \Lambda_- P_- z_-(0)] \end{aligned}$$

Réécrite sous forme matricielle, cette inégalité devient

$$\operatorname{Re}\langle Az, Pz \rangle \leq \frac{1}{2} \begin{bmatrix} z_+(1) \\ z_-(0) \end{bmatrix}^* \begin{bmatrix} -\Lambda_+ P_+ + K_1^* \Lambda_- P_- K_1 & 0 \\ 0 & K_0^* \Lambda_+ P_+ K_0 - \Lambda_- P_- \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z_+(1) \\ z_-(0) \end{bmatrix}$$

L'inéquation [\(3.3\)](#) dans la seconde hypothèse est équivalente à

$$K |\Lambda|^{-1} P^{-1} K^* < |\Lambda|^{-1} P^{-1}$$

et donc à

$$\begin{cases} K_1^* \Lambda_- P_- K_1 < \Lambda_+ P_+ \\ K_0^* \Lambda_+ P_+ K_0 < \Lambda_- P_- \end{cases}$$

Dès lors,  $\exists \nu_1 > 0$  tel que,  $\forall z \in D(A)$ ,

$$\operatorname{Re}\langle Az, Pz \rangle \leq \nu_1 \left\| \begin{bmatrix} z_+(1) \\ z_-(0) \end{bmatrix} \right\|^2$$

et, via la bornitude de l'opérateur trace de  $Z$  dans  $\mathbb{R}$  de norme 1, il s'ensuit que,  $\forall z \in D(A)$ ,

$$\operatorname{Re}\langle Az, Pz \rangle \leq -\nu_1 |z|_X^2$$

Comme  $\nu_1 > 0$  et  $|z|_X^2 \geq 0$ ,

$$\operatorname{Re}\langle Az, Pz \rangle \leq 0$$

c'est-à-dire  $A$  est dissipatif.

#### 4) L'opérateur adjoint $A^*$ est dissipatif

La preuve de ce point est analogue à celle du point précédent. Par conséquent, nous irons moins dans les détails cette fois-ci.

Nous allons maintenant montrer que  $\exists \nu_2 > 0$  tel que,  $\forall \psi \in D(A^*)$ ,  $\operatorname{Re}\langle A^*\psi, Q\psi \rangle \leq -\nu_2 |\psi|_X^2$ .

On a que,  $\forall \psi \in D(A^*)$ ,

$$\begin{aligned} \operatorname{Re}\langle A^*\psi, Q\psi \rangle &= \operatorname{Re} \int_0^1 (\Lambda\psi')^* Q\psi \, dx + \operatorname{Re} \int_0^1 (M^*\psi)^* Q\psi \, dx \\ &\leq \operatorname{Re} \int_0^1 \psi'^* \Lambda Q\psi \, dx \end{aligned}$$

En effet, on a  $\operatorname{Re} \int_0^1 (M^*\psi)^* Q\psi \, dx \leq 0$  par l'hypothèse faite en [\(3.2\)](#).

Comme  $\Lambda$  et  $Q$  sont diagonales, on a  $\Lambda Q = Q\Lambda$ , c'est-à-dire  $Q$  et  $\Lambda$  sont commutatives.

Dès lors, on a  $\frac{d}{dx}(\psi^* \Lambda Q\psi) = 2\psi'^* \Lambda Q\psi$  en utilisant un raisonnement similaire à celui uti-

lisé dans la preuve du point précédent. En d'autres termes,  $[\psi^* \Lambda Q\psi]_0^1 = 2 \int_0^1 \psi'^* \Lambda\psi \, dx$ ,

et donc  $\int_0^1 \psi'^* \Lambda Q\psi \, dx = \frac{1}{2} [\psi^* \Lambda Q\psi]_0^1$ .

Il en découle que

$$\begin{aligned} \operatorname{Re}\langle A^*\psi, Q\psi \rangle &\leq \frac{1}{2} [\psi^* \Lambda Q\psi]_0^1 \\ &= \frac{1}{2} [(\psi_+^*(1)\Lambda_+ Q_+ \psi_+(1) - \psi_-^*(1)\Lambda_- Q_- \psi_-(1)) \\ &\quad - (\psi_+^*(0)\Lambda_+ Q_+ \psi_+(0) - \psi_-^*(0)\Lambda_- Q_- \psi_-(0))] \\ &= \frac{1}{2} [(\Lambda_+ \psi_+(1))^* Q_+ \psi_+(1) + (\Lambda_- \psi_-(0))^* Q_- \psi_-(0) \\ &\quad - \psi_-^*(1)\Lambda_- Q_- \psi_-(1) - \psi_+^*(0)\Lambda_+ Q_+ \psi_+(0)] \end{aligned}$$

En utilisant à nouveau (3.7), nous obtenons alors

$$\begin{aligned}
\operatorname{Re}\langle A^*\psi, Q\psi \rangle &\leq \frac{1}{2}[(K_1^*\Lambda_-\psi_-(1))^*Q_+\psi_+(1) + (K_0^*\Lambda_+\psi_+(0))^*Q_-\psi_-(0) \\
&\quad - \psi_-^*(1)\Lambda_-Q_-\psi_-(1) - \psi_+^*(0)\Lambda_+Q_+\psi_+(0)] \\
&= \frac{1}{2}[\psi_-^*(1)\Lambda_-K_1Q_+\psi_+(1) + \psi_+^*(0)\Lambda_+K_0Q_-\psi_-(0) \\
&\quad - \psi_-^*(1)\Lambda_-Q_-\psi_-(1) - \psi_+^*(0)\Lambda_+Q_+\psi_+(0)] \\
&= \frac{1}{2}[\psi_-^*(1)\Lambda_-K_1Q_+\Lambda_+^{-1}K_1^*\Lambda_-\psi_-(1) + \psi_+^*(0)\Lambda_+K_0Q_-\Lambda_-^{-1}K_0^*\Lambda_+\psi_+(0) \\
&\quad - \psi_-^*(1)\Lambda_-Q_-\psi_-(1) - \psi_+^*(0)\Lambda_+Q_+\psi_+(0)]
\end{aligned}$$

Réécrite sous forme matricielle, cette inégalité devient

$$\operatorname{Re}\langle A^*\psi, Q\psi \rangle \leq \frac{1}{2} \begin{bmatrix} \psi_+(0) \\ \psi_-(1) \end{bmatrix}^* \begin{bmatrix} \Lambda_+K_0Q_-\Lambda_-^{-1}K_0^*\Lambda_+ - \Lambda_+Q_+ & 0 \\ 0 & \Lambda_-K_1Q_+\Lambda_+^{-1}K_1^*\Lambda_- - \Lambda_-Q_- \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \psi_+(0) \\ \psi_-(1) \end{bmatrix}$$

L'inéquation (3.4) dans la seconde hypothèse est équivalente à

$$|\Lambda|KQ|\Lambda|^{-1}K^*|\Lambda| < Q|\Lambda|$$

et donc à

$$\begin{cases} \Lambda_+K_0Q_-\Lambda_-^{-1}K_0^*\Lambda_+ < \Lambda_+Q_+ \\ \Lambda_-K_1Q_+\Lambda_+^{-1}K_1^*\Lambda_- < \Lambda_-Q_- \end{cases}$$

Dès lors,  $\exists \nu_2 > 0$  tel que,  $\forall \psi \in D(A^*)$ ,

$$\operatorname{Re}\langle A^*\psi, Q\psi \rangle \leq \nu_2 \left| \begin{bmatrix} \psi_+(0) \\ \psi_-(1) \end{bmatrix} \right|^2$$

et, via la bornitude de l'opérateur trace de  $Z$  dans  $\mathbb{R}$  de norme 1, il s'ensuit que,  $\forall \psi \in D(A^*)$ ,

$$\operatorname{Re}\langle A^*\psi, Q\psi \rangle \leq -\nu_2|\psi|_X^2.$$

Comme  $\nu_2 > 0$  et  $|\psi|_X^2 \geq 0$ ,

$$\operatorname{Re}\langle A^*\psi, Q\psi \rangle \leq 0$$

c'est-à-dire  $A^*$  est dissipatif.

On conclut par le théorème 6.1.8 de [6] que  $A$  est le générateur infinitésimal d'un semi-groupe de contraction  $(T(t))_{t \geq 0}$ .  $\square$

# Chapitre 4

## Analyse dynamique du système discrétisé

Dans ce chapitre, nous ferons, à l'aide du logiciel Matlab, une analyse dynamique du modèle linéaire discrétisé. Nous étudierons les caractéristiques de ce modèle en fonction du pas de discrétisation  $k$  choisi, et donc, de la dimension  $2(N + 1)$  du système. Puisque nous avons utilisé des différences finies centrées pour les points intérieurs et des différences finies progressives et régressives pour les points frontières toutes de précision 2, nous devons avoir au moins 3 points de discrétisation, c'est-à-dire que nous devons avoir  $N \geq 2$  ( $N$  étant, pour rappel, le nombre de pas de discrétisation). Nous ferons donc notre étude pour des valeurs de  $N$  supérieures à 2.

Nous nous intéresserons ici principalement à l'observabilité et à la contrôlabilité ainsi qu'aux stabilités interne et externe. Nous considérerons également les réponses indicielle et impulsionnelle et ferons des tests dynamiques en boucle ouverte.

### Note préliminaire

Nous avons posé, pour toutes les simulations numériques à venir, les paramètres du modèle aux valeurs suivantes :  $H^* = 3$ ,  $S_b = 10^{-5}$ ,  $C_f = 10^{-3}$  et  $L = 250$ . Notons que la valeur (0.5425) de  $V^*$  est déterminée par ces choix puisque nous avons, pour rappel, la relation  $V^* = \sqrt{\frac{gS_bH^*}{C_f}}$ , où  $g = 9.81$ .

## 4.1 Observabilité, contrôlabilité et stabilité

### Observabilité et contrôlabilité

Intéressons-nous tout d'abord à l'observabilité et à la contrôlabilité du système en fonction de  $N$ . Nous utiliserons les caractérisations algébriques pour déterminer ces deux propriétés, c'est-à-dire

$$\begin{aligned} (C, A) \text{ est complètement observable} &\Leftrightarrow \forall s \in \sigma(A), \operatorname{rg} \begin{bmatrix} sI - A \\ C \end{bmatrix} = n \\ \text{et } (A, B) \text{ est complètement contrôlable} &\Leftrightarrow \forall s \in \sigma(A), \operatorname{rg} \begin{bmatrix} sI - A & B \end{bmatrix} = n \end{aligned}$$

où  $n$  est la dimension de  $A$ , c'est-à-dire  $2(N + 1)$  dans notre cas.

En effectuant le calcul de ces deux rangs pour toutes les valeurs propres de  $A$  pour  $N$  allant de 2 à 50, nous obtenons toujours comme résultat que le système est complètement observable et contrôlable.

### Stabilités interne et externe

Intéressons-nous maintenant à la stabilité interne et à la stabilité externe du système en fonction de  $N$ . Pour rappel,

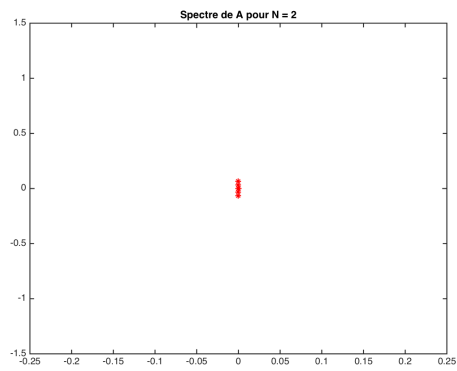
- la matrice  $A$  est intérieurement stable si  $\forall \lambda \in \sigma(A), \operatorname{Re}(\lambda) < 0$  ;
- la matrice  $A$  est extérieurement stable si  $\forall p \in \mathcal{P}[\hat{G}], \operatorname{Re}(p) < 0$

où  $\mathcal{P}[\hat{G}]$  est l'ensemble des pôles de la fonction de transfert  $\hat{G}$  du système.

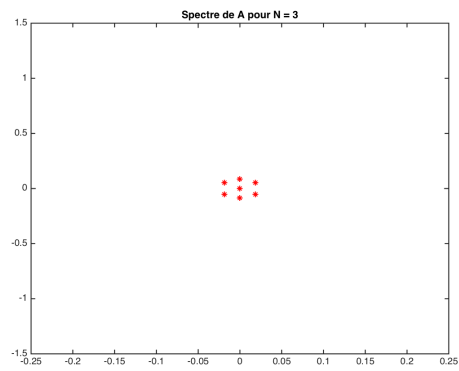
Pour toutes les valeurs de  $N$  testées (de 2 à 50), le système n'est stable ni intérieurement, ni extérieurement.

Les séries de figures qui suivent donnent l'évolution du spectre de  $A$ . La figure [4.1](#) représente le spectre de  $A$  pour  $N$  allant de 2 à 5 tandis que la figure [4.2](#) reprend les spectres de  $A$  pour  $N = 10, 20, 30, 40$  et 50 afin d'observer son évolution lorsque  $N$  devient grand.

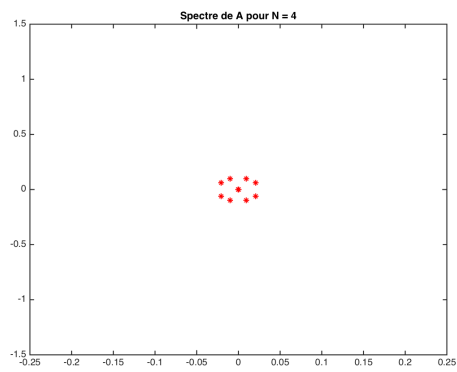
(a)



(b)



(c)



(d)

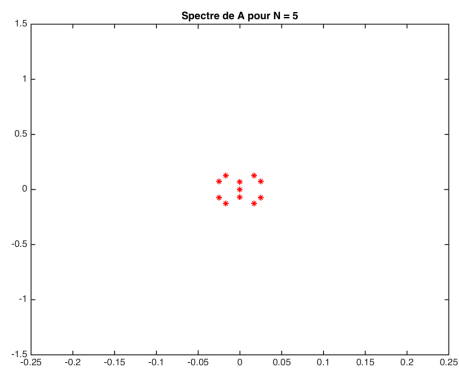


FIGURE 4.1 – Spectre de  $A$  pour  $N \in \{2, 3, 4, 5\}$ .  $A$  n'est pas stable quelle que soit la valeur de  $N$ .

## 4.2 Réponses indicielle et impulsionnelle

Comme pour le spectre de  $A$ , nous allons ici étudier les réponses indicielle et impulsionnelle pour  $N \in \{2, 3, 4, 5, 10, 20, 30, 40, 50\}$ .

### 4.2.1 Réponse indicielle

Pour rappel, la réponse indicielle d'un système est la sortie de ce système à l'état nul lorsque l'entrée est une fonction de Heaviside.

Sur les figures [4.3](#) et [4.4](#), nous pouvons observer l'évolution de la réponse indicielle en fonction de  $N$ . Nous remarquons tout d'abord que l'allure générale des graphes est quasi toujours la même quelle que soit la valeur de  $N$ . Cependant, les amplitudes sont de plus en plus élevées : l'effet de l'entrée est plus rapide lorsque  $N$  augmente. Les résultats observés sont assez logiques : l'entrée  $u_0$  n'a pas d'effet sur  $h_N$  et  $v_N$  et, analogiquement, l'entrée  $u_L$  n'a pas d'effet sur  $h_0$  et  $h_N$ . L'entrée  $u_0$  a pour effet de faire augmenter linéairement  $h_0$  et  $v_0$  et donc les éloigner de l'équilibre ; l'entrée  $u_L$  a, quant à elle, l'effet de faire diminuer  $h_N$  et  $v_N$  mais cette fois pas de manière linéaire pour  $v_N$ , qui finit même par recroître après 0.4 secondes pour une valeur de  $N$  à 50. Puisque l'impact de l'augmentation de  $N$  est d'accélérer l'effet de l'entrée, concentrons-nous sur le graphe correspondant à  $N = 50$ . L'interprétation que nous pouvons en faire est que, lorsque nous injectons continuellement une unité de débit en  $x = 0$  et prélevons également de façon continue une unité de débit en  $x = L$ , les hauteurs correspondantes augmentent et diminuent respectivement au cours du temps ; cependant, cette variation semble avoir lieu beaucoup plus vite en  $x = L$ , ce qui explique l'amplitude plus élevée ainsi que la vitesse qui finit par ré-augmenter. Tout ceci peut s'expliquer par le fait que nous soyons en boucle ouverte.

### 4.2.2 Réponse impulsionnelle

Pour rappel, la réponse impulsionnelle d'un système est la sortie de ce système à l'état nul lorsque l'entrée est une impulsion de Dirac.

Comme nous l'avons observé pour la réponse indicielle, l'effet de l'augmentation de  $N$  sur la réponse impulsionnelle est d'accélérer l'effet des entrées  $u_0$  et  $u_L$  et d'augmenter les amplitudes. Nous observerons donc uniquement la figure [4.5](#) pour  $N = 50$ . Nous constatons à nouveau que les entrées n'ont d'effet que sur les sorties se situant du même côté du bief. Cette fois, nous voyons que, après une demi-seconde,  $h_0$ , après avoir augmenté, diminue pour revenir à sa valeur initiale. Nous constatons également que  $v_0$  augmente et puis semble rester constante après 0.8 secondes. Concernant le comportement en  $x = L$ ,  $h_N$  et  $v_N$  augmentent au cours du temps pour se rapprocher de l'équilibre. Ces constats peuvent s'expliquer par le fait que les entrées correspondent respectivement à une injection et une ponction ponctuelles d'une unité de débit en  $x = 0$  et en  $x = L$ .

### 4.3 Tests dynamiques en boucle ouverte

Pour terminer ce chapitre, nous ferons quelques tests dynamiques en boucle ouverte afin d'avoir une idée du comportement du système sans contrôle. Pour ce faire, nous prendrons comme condition initiale une vitesse nulle sur tout le bief, et, pour  $H$ , une fonction gaussienne, c'est-à-dire une fonction de la forme

$$f(x) = c e^{-\frac{(x - \mu)^2}{2\sigma^2}}.$$

Nous choisirons ici  $c = 0.1 H^*$ ,  $\mu = \frac{L}{2}$  et  $\sigma^2 = 50$ .

Les graphes de la figure [4.6](#) représentent la hauteur de l'eau dans le bief toutes les 10 secondes pour cette condition initiale et pour une valeur de  $N$  égale à 50.

Nous observons qu'à partir de 30 secondes, la situation devient chaotique et le niveau d'eau ne tend pas vers le niveau d'équilibre (3 mètres). Nous résoudrons ce problème dans le chapitre suivant en appliquant un contrôle sur le système.

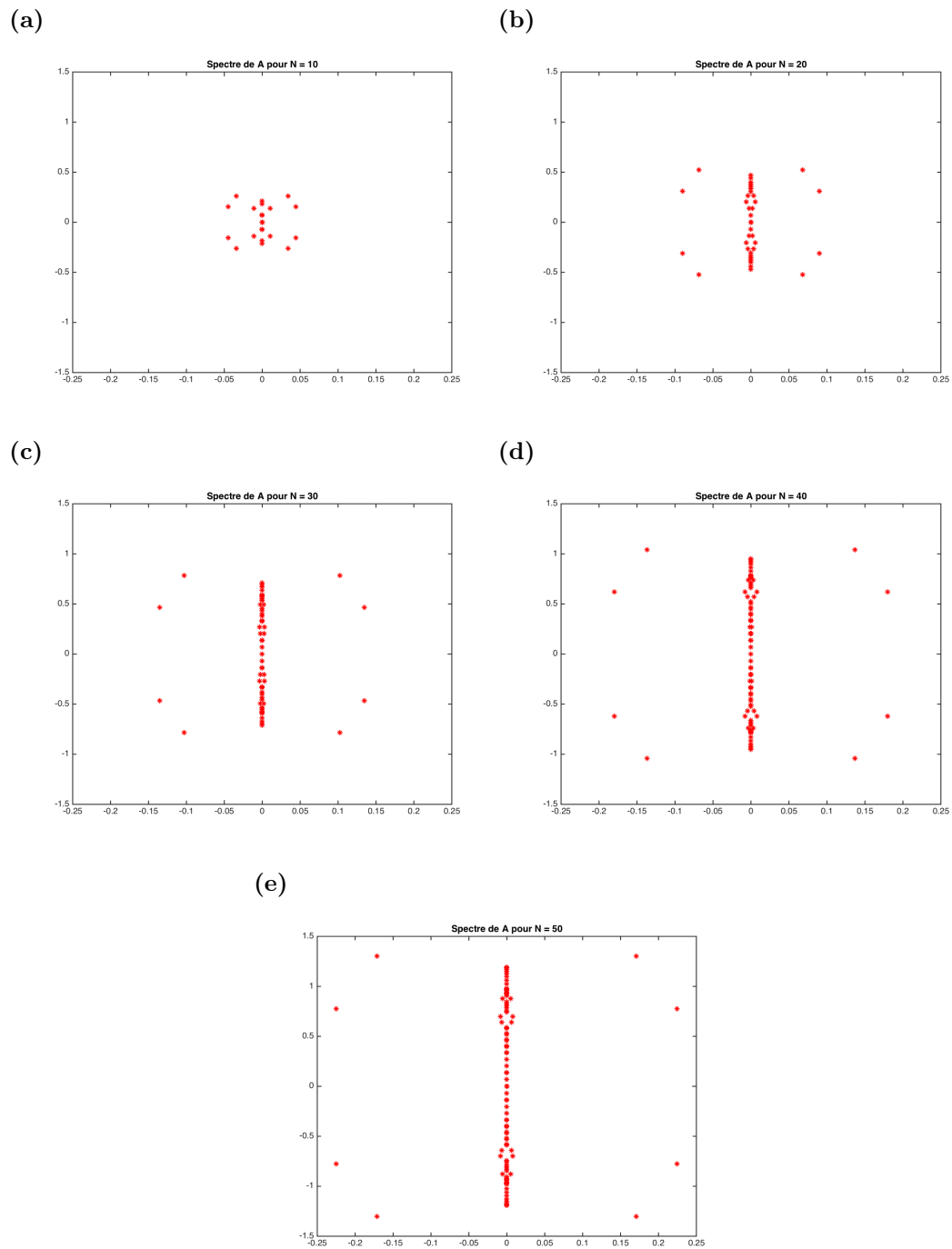
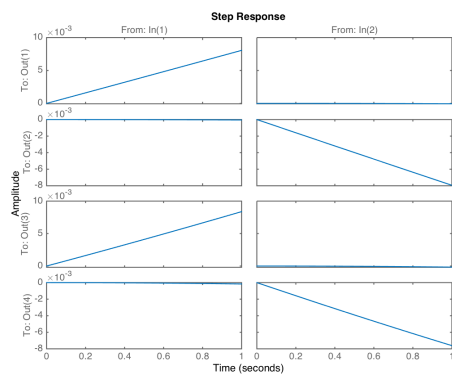
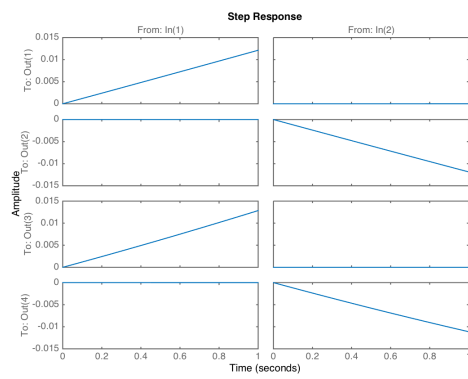


FIGURE 4.2 – Spectre de  $A$  pour  $N \in \{10, 20, 30, 40, 50\}$ . La plupart des valeurs propres semblent se situer autour d'un axe vertical très proche de l'axe imaginaire. Celles qui sont plus éloignées de cet axe vertical semblent être symétriques par rapport à celui-ci.

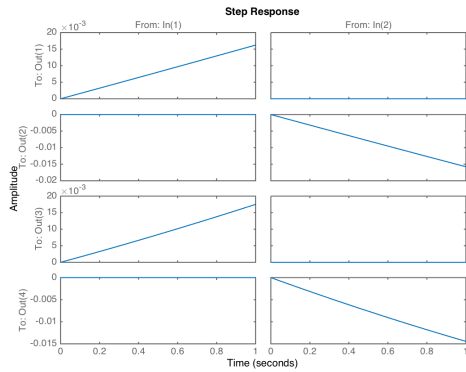
(a)



(b)



(c)



(d)

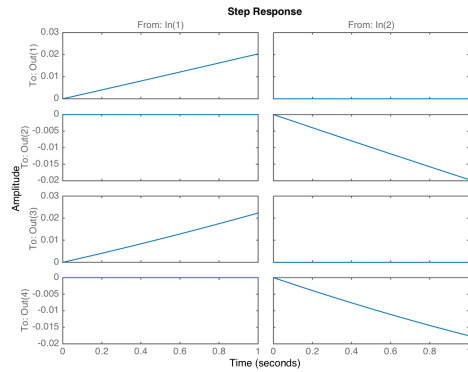
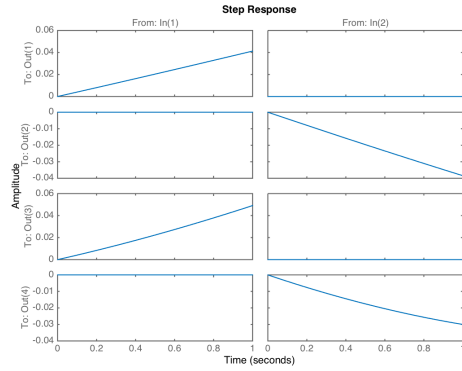
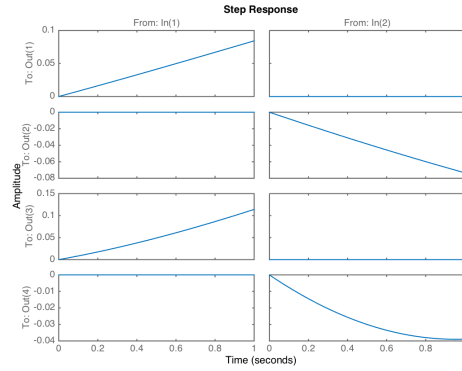


FIGURE 4.3 – Réponses indicelles pour  $N \in \{2, 3, 4, 5\}$

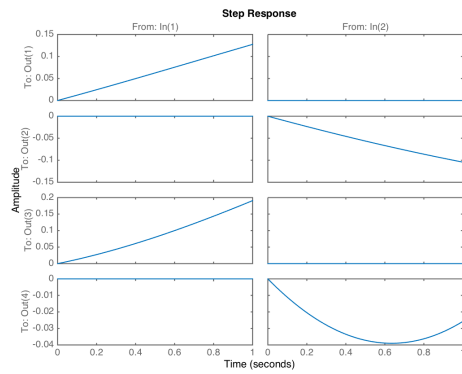
(a)



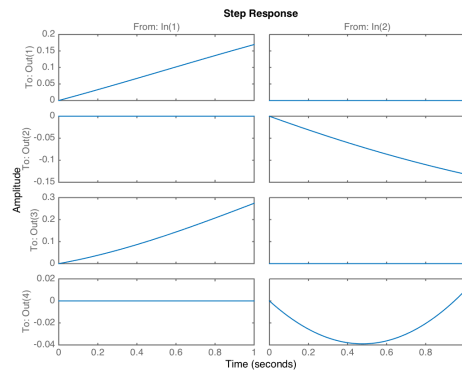
(b)



(c)



(d)



(e)

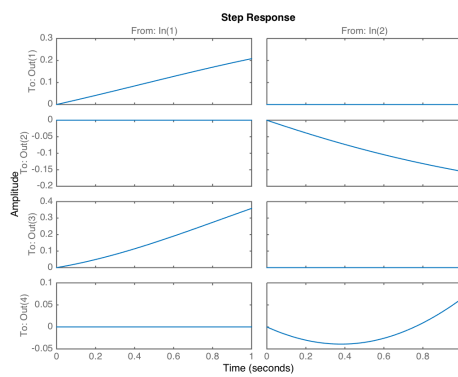


FIGURE 4.4 – Réponses indicielles pour  $N \in \{10, 20, 30, 40, 50\}$

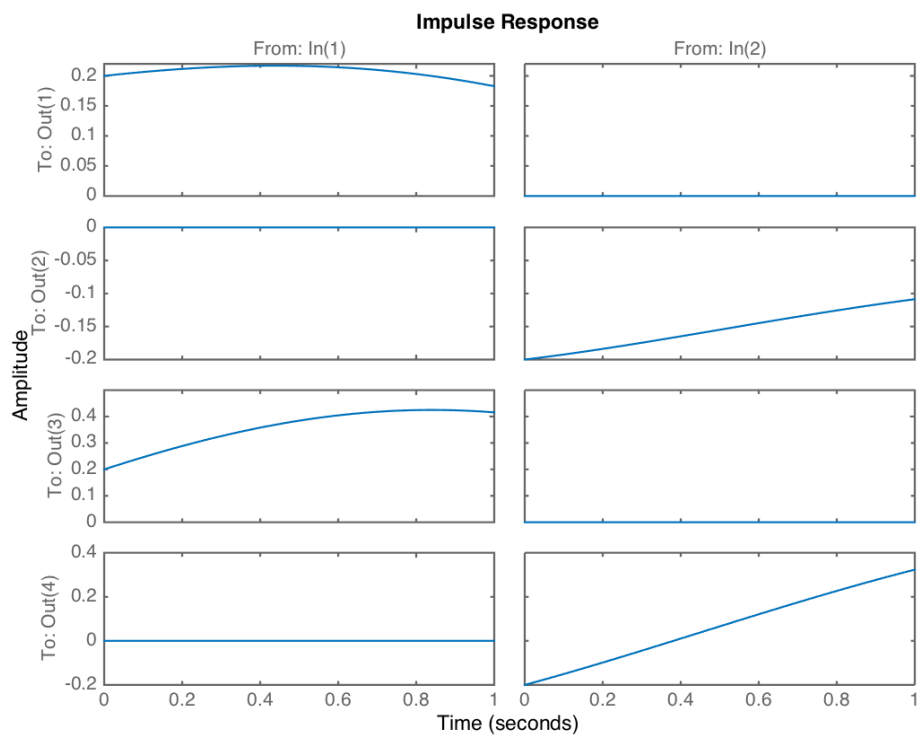


FIGURE 4.5 – Réponse impulsionnelle pour  $N = 50$

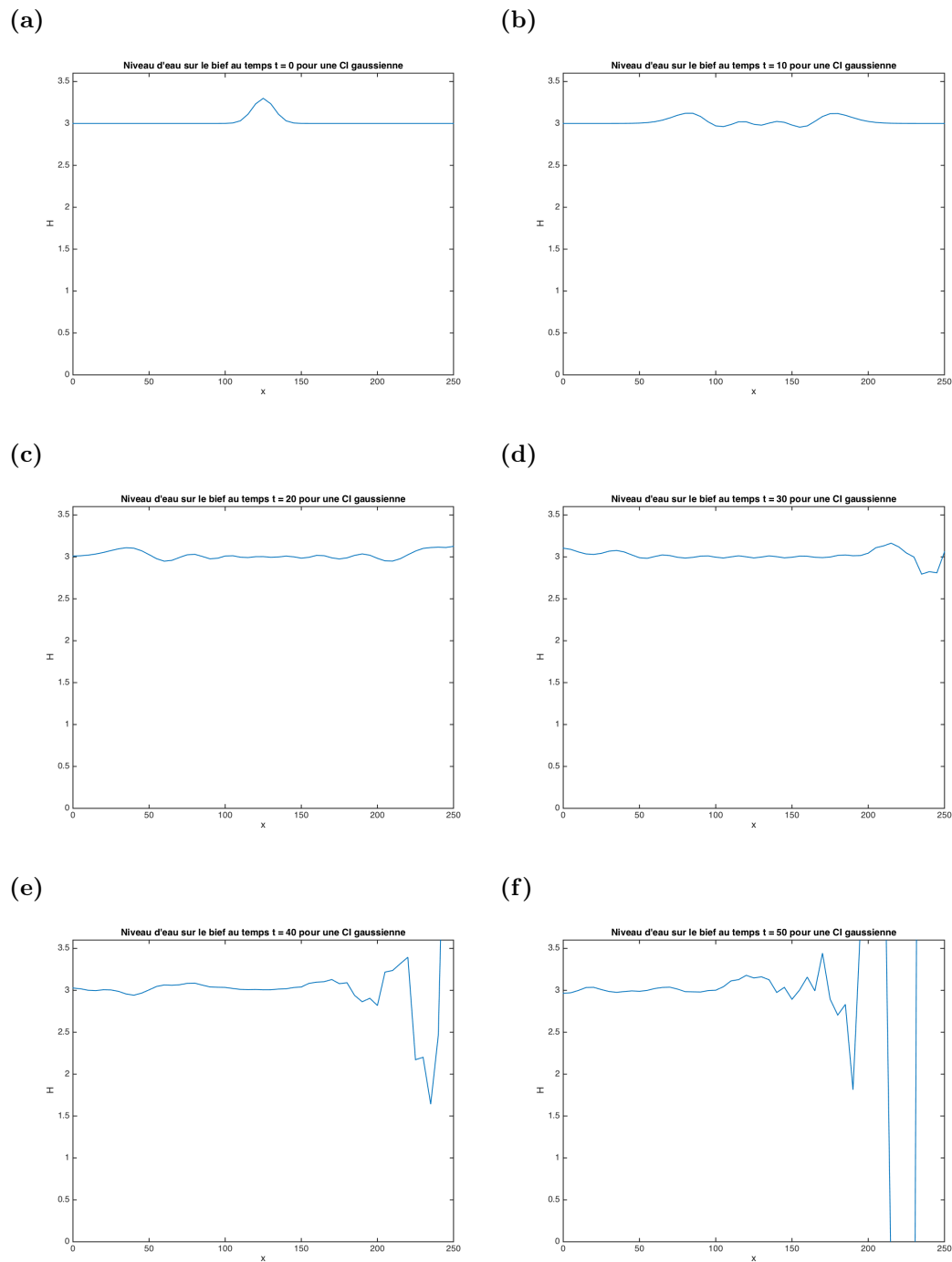


FIGURE 4.6 – Toutes les 10 secondes, niveau d'eau en boucle ouverte sur un bief d'une longueur de 250 mètres, avec  $H^* = 3$  mètres,  $S_b = 10^{-5}$ ,  $C_f = 10^{-3}$ ,  $N = 50$  et, comme condition initiale,  $H(0, x) = 0.1 H^* e^{-\frac{(x - \frac{L}{2})^2}{100}}$  et  $V(0, x) = 0$ .

## Chapitre 5

# Conception d'une loi de contrôle pour le système discrétisé

Nous avons observé dans le chapitre précédent, lors de l'analyse du système discrétisé par différences finies, que celui-ci n'était pas stable. En effet, l'analyse de stabilité a montré que, quel que soit le pas de discrétisation choisi, la matrice  $A$  n'est pas exponentiellement stable. De plus, des simulations numériques des trajectoires d'état indiquent que celui-ci ne converge pas au cours du temps vers l'état d'équilibre recherché, et que l'absence de contrôle mène vers une situation chaotique dans le bief.

Le but de ce chapitre va donc être de contrôler ce système afin d'atteindre l'équilibre et d'avoir un niveau d'eau constant dans le bief. Pour ce faire, nous utiliserons une loi de contrôle LQ optimale et ferons des simulations numériques afin de voir son effet sur le système, tout en essayant de garder une entrée "réaliste".

Rappelons que la méthode LQ optimale consiste à minimiser la fonction

$$J(u) = \int_0^{\infty} (x(t)^T Q x(t) + u(t)^T R u(t)) dt$$

où  $Q \in \mathbb{R}^{n \times n}$  et  $R \in \mathbb{R}^{m \times m}$ . La solution de ce problème est  $u = Kx$  où  $K = -R^{-1}B^T P$  et  $P$  est la solution de  $A^T P + PA - PBR^{-1}B^T P + Q = 0$ . De la sorte, nous allons minimiser le coût dû à l'état initial choisi (fonction gaussienne) et au contrôle  $u(\cdot)$ .

Nous ne présentons ici qu'un cas particulier sans faire une étude exhaustive du contrôle conçu. Le code Matlab utilisé est repris en annexe et il est possible, à partir de ce code, d'effectuer une étude complète du comportement du système en boucle fermée en fonction de  $N$  et des valeurs données à  $Q$  et  $R$ .

Le cas choisi est le cas le plus simple : nous fixons  $Q = C^T C$  et  $R = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ .

Nous fixons également  $N$ , à 50. Les valeurs des autres paramètres du modèle sont à nouveau fixées à celle reprise dans la note préliminaire du chapitre précédent.

Le spectre de la matrice  $A + BK$  ainsi obtenue est représenté à la figure [5.1](#)

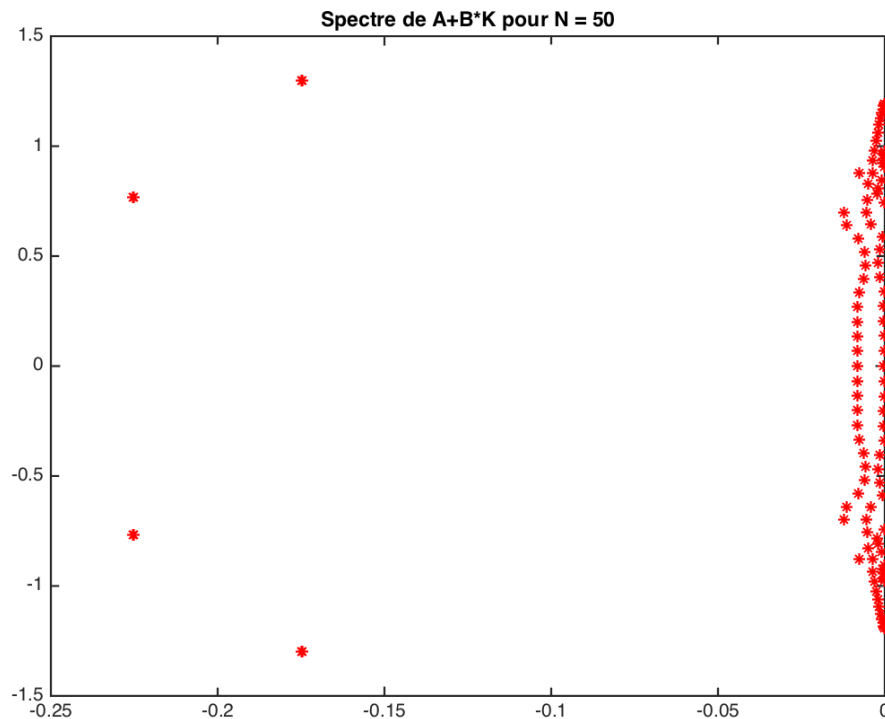


FIGURE 5.1 – Spectre de  $A + BK$  pour  $N = 50$

Nous constatons que toutes les valeurs propres ont bien leur partie réelle négative et que nous sommes donc bien parvenu à stabiliser le système.

Les graphes de la figure 5.2 représentent la hauteur de l'eau dans le bief toutes les 10 secondes en boucle fermée pour la même condition initiale gaussienne qu'en boucle ouverte. Nous constatons que le niveau de l'eau s'approche de l'équilibre au cours du temps et que le contrôle conçu est donc efficace. L'entrée correspondante est représentée à la figure 5.3. Il s'agit d'entrées bornées qui semblent peu coûteuses, à part après entre 20 et 30 secondes où elles ont un léger pic; le reste du temps elles oscillent entre des petites valeurs. Le contrôle obtenu semble donc satisfaisant.

Ce chapitre n'est, par manque de temps, pas une étude complète de la loi de contrôle pouvant être mise en place mais il pose les bases nécessaires à cette étude. En effet, le code à utiliser a été conçu et est fonctionnel, et nous avons pu voir avec le test effectué ci-dessus que le contrôle appliqué fonctionnait et que le comportement obtenu semblait assez réaliste.

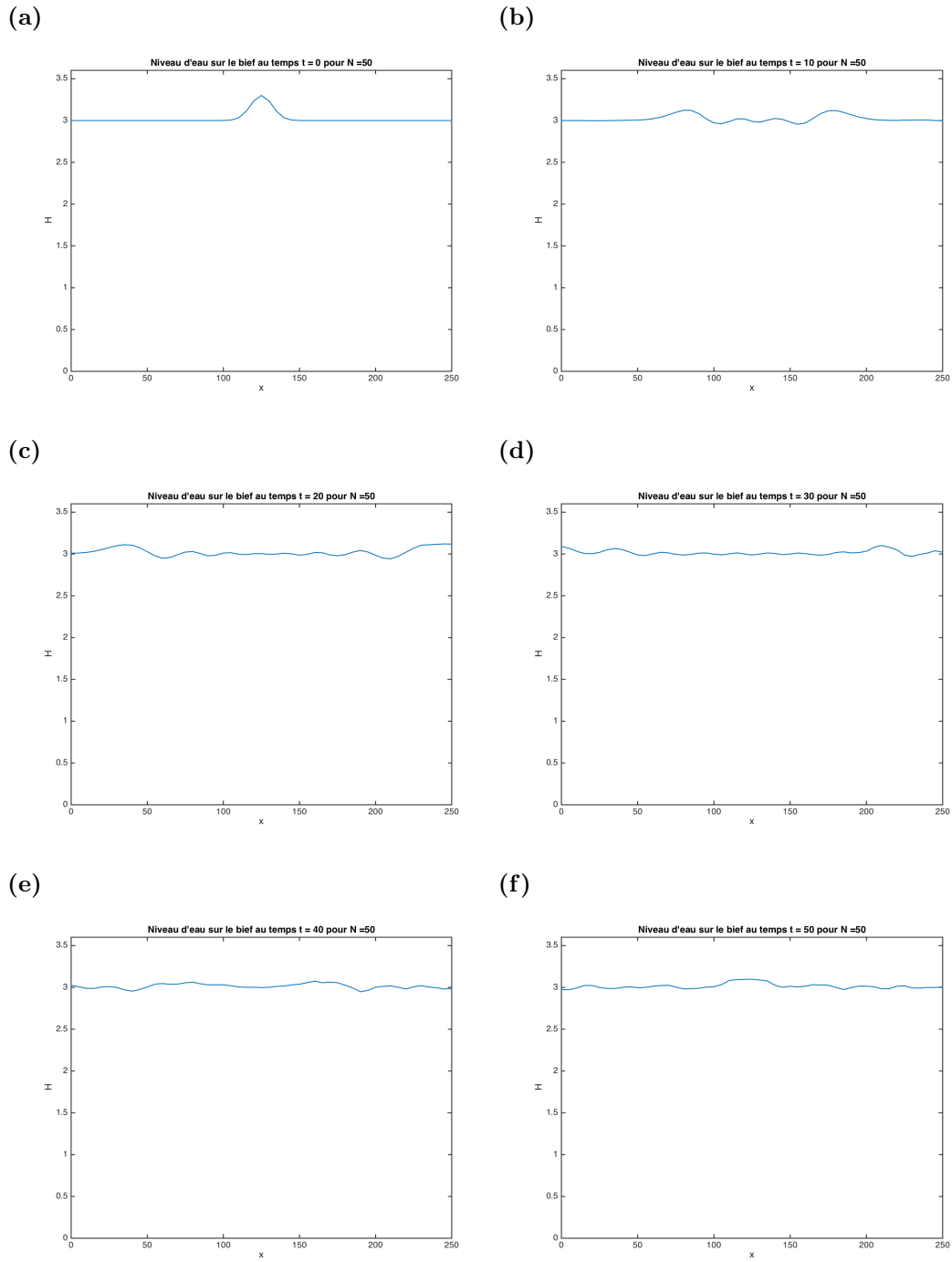


FIGURE 5.2 – Toutes les 10 secondes, niveau d'eau en boucle fermée via contrôle LQ optimal sur un bief d'une longueur de 250 mètres, avec  $H^* = 3$  mètres,  $S_b = 10^{-5}$ ,  $C_f = 10^{-3}$ ,  $N = 50$  et, comme condition initiale,  $H(0, x) = 0.1 H^* e^{-\frac{(x-\frac{L}{2})^2}{100}}$  et  $V(0, x) = 0$ .

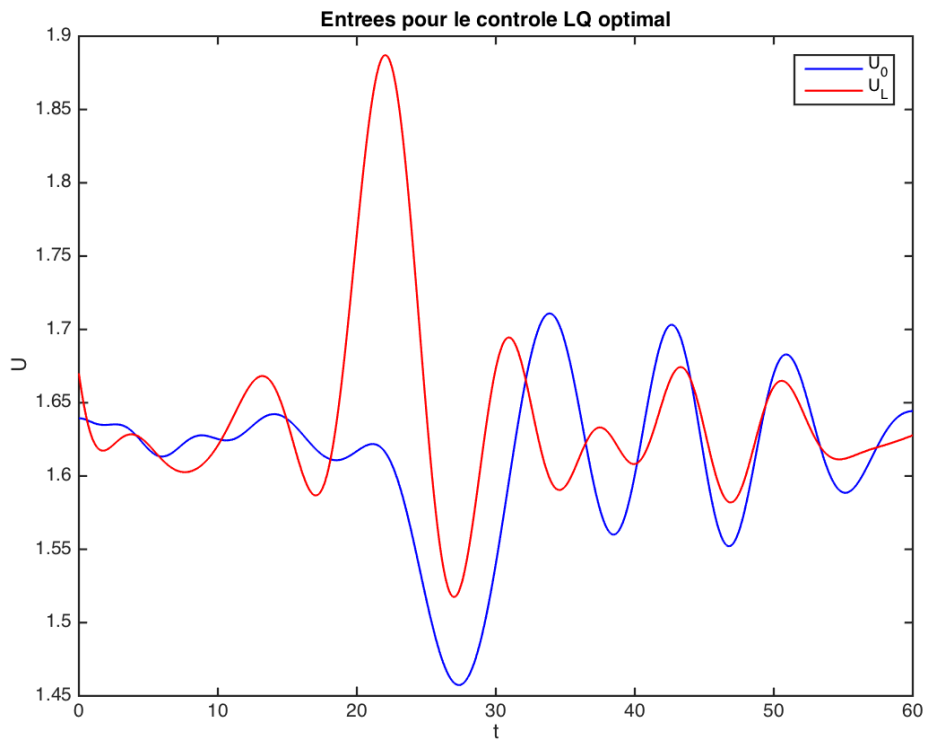


FIGURE 5.3 – Entrées  $u_0$  et  $u_L$  pour le contrôle LQ optimal

# Chapitre 6

## Conclusions et perspectives

Dans ce mémoire, nous avons fait l'étude d'un système dynamique consistant en un bief traversé par un flux d'eau. Après avoir décrit ce système physiquement, nous en avons fourni un modèle mathématique : un système hyperbolique non linéaire de deux équations aux dérivées partielles appelées équations de Saint-Venant. Nous avons ensuite simplifié ce système en le linéarisant autour d'un équilibre. De la sorte, nous avons pu mettre en évidence un résultat de la théorie des semi-groupes pouvant être utile dans le cadre de la stabilisation de ce système. Ensuite, nous avons désiré être capable de simuler numériquement le comportement de ce modèle linéarisé. Pour ce faire, nous avons utilisé la méthode des différences finies afin de discrétiser le système et ainsi obtenir une modélisation en dimension finie. Cela a permis de faire numériquement une analyse dynamique du système et de concevoir une loi de contrôle afin de le stabiliser.

De nombreuses perspectives sont envisageables suite à ce qui a été fait jusqu'ici. En effet, un temps considérable a été consacré, entre autres, à trouver une alternative aux équations de Navier-Stokes afin de dégager les équations de Saint-Venant de façon simplifiée, à mettre en place un modèle discrétisé restant fidèle au modèle de départ tout en étant robuste numériquement, et, enfin, à développer les codes fournis en annexe. Cela a entraîné une étude plus brève de la partie s'attendant à la conception de loi de contrôle. En effet, le contrôle proposé dans le chapitre 5 est un exemple préliminaire non optimal : il faudrait faire une étude à base d'essais/erreurs afin d'obtenir un contrôle peut-être moins coûteux tout en gardant une efficacité satisfaisante. Le code développé permet de faire cette étude. En outre, le contrôle obtenu peut être testé sur le système de base non linéaire pour vérifier le principe de linéarisation. Cela permettrait aussi de connaître le nombre de points de discrétisation nécessaires pour être assez fidèle au modèle de départ.

Il est également possible de concevoir une loi de contrôle par asservissement d'état estimé : ce point est encore totalement ouvert dans ce travail. L'étude effectuée dans le chapitre 3 sur base de [8] et celle réalisée dans [2] peuvent également permettre de concevoir des lois de contrôle sur le système nous préoccupant et il serait extrêmement intéressant de faire une étude comparative de ces différentes lois de contrôle avec celle réalisée ici.

# Annexes

## Codes Matlab

### Fonctions appelées dans d'autres codes

#### modele\_central\_finite\_diff

```
1 % Fonction permettant la construction du modele R = [A,B,C,0]
2 function [A,B,C] = modele_central_finite_diff(Hstar, Vstar, Cf, g, N, k, dim)
3
4 for i = 1:N+1 diag_A11(i) = 0; end
5 for i = 1:N diagsup_A11(i) = Vstar; end
6 for i = 1:N diaginf_A11(i) = -Vstar; end
7 A11 = diag(diag_A11,0) + diag(diagsup_A11,1) + diag(diaginf_A11,-1);
8 A11(1,1) = -3*Vstar; A11(1,2) = 4*Vstar; A11(1,3) = -Vstar;
9 A11(N+1,N-1) = Vstar; A11(N+1,N) = -4*Vstar; A11(N+1,N+1) = 3*Vstar;
10
11 %%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
12 for i = 1:N+1 diag_A12(i) = 0; end
13 for i = 1:N diagsup_A12(i) = Hstar; end
14 for i = 1:N diaginf_A12(i) = -Hstar; end
15 A12 = diag(diag_A12,0) + diag(diagsup_A12,1) + diag(diaginf_A12,-1);
16 A12(1,1) = -3*Hstar; A12(1,2) = 4*Hstar; A12(1,3) = -Hstar;
17 A12(N+1,N-1) = Hstar; A12(N+1,N) = -4*Hstar; A12(N+1,N+1) = 3*Hstar;
18
19 %%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
20 for i = 1:N+1 diag_A21(i) = -(2*Cf*Vstar^2*k/Hstar^2); end
21 for i = 1:N diagsup_A21(i) = g; end
22 for i = 1:N diaginf_A21(i) = -g; end
23 A21 = diag(diag_A21,0) + diag(diagsup_A21,1) + diag(diaginf_A21,-1);
24 A21(1,1) = -3*g-2*Cf*Vstar^2*k/Hstar^2; A21(1,2) = 4*g; A21(1,3) = -g;
25 A21(N+1,N-1) = g; A21(N+1,N) = -4*g; A21(N+1,N+1) = 3*g-2*Cf*Vstar^2*k/
    Hstar^2;
26
27 %%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
28 for i = 1:N+1 diag_A22(i) = 4*Cf*Vstar*k/Hstar; end
29 for i = 1:N diagsup_A22(i) = Vstar; end
30 for i = 1:N diaginf_A22(i) = -Vstar; end
31 A22 = diag(diag_A22,0) + diag(diagsup_A22,1) + diag(diaginf_A22,-1);
32 A22(1,1) = Vstar*(4*Cf*k/Hstar-3); A22(1,2) = 4*Vstar; A22(1,3) = -Vstar;
```

```

33 A22(N+1,N-1) = Vstar; A22(N+1,N) = -4*Vstar; A22(N+1,N+1) = Vstar*(4*Cf*k/
    Hstar+3);
34
35 %%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
36 A = [A11 A12; A21 A22];
37
38 % Prise en compte des conditions aux bords
39 A(1,1) = A(1,1) + 2*Vstar;
40 A(1,N+2) = A(1,N+2) + 2*Hstar;
41
42 A(N+1,N+1) = A(N+1,N+1) - 2*Vstar;
43 A(N+1,2*(N+1)) = A(N+1,2*(N+1)) - 2*Hstar;
44
45 A(N+2,1) = A(N+2,1) + 2*Vstar;
46 A(N+2,N+2) = A(N+2,N+2) + 2*Hstar;
47
48 A(2*(N+1),N+1) = A(2*(N+1),N+1) - 2*Vstar;
49 A(2*(N+1),2*(N+1)) = A(2*(N+1),2*(N+1)) - 2*Hstar;
50
51 A = -(1/(2*k))*A;
52
53 % Matrice B
54 B = zeros(dim,2);
55
56 B(1,1) = -1;
57 B(N+1,2) = 1;
58 B(N+2,1) = -1;
59 B(2*(N+1),2) = 1;
60
61 B = -(1/k)*B;
62
63 % Matrice C (observer h et v aux extremités du bief)
64 C = zeros(4,dim);
65
66 C(1,1) = 1;
67 C(2,N+1) = 1;
68 C(3,N+2) = 1;
69 C(4,2*(N+1)) = 1;
70
71 end

```

## stabilite\_externe

```

1 function [poles]=stabilite_externe(sys)
2
3 [num,den] = tfdata(sys);
4
5 [z11,p11,k11] = tf2zp(num{1,1},den{1,1});
6 [z21,p21,k21] = tf2zp(num{2,1},den{2,1});
7 [z31,p31,k31] = tf2zp(num{3,1},den{3,1});
8 [z41,p41,k41] = tf2zp(num{4,1},den{4,1});
9 % zeros, poles et gain
10 [z12,p12,k12] = tf2zp(num{1,2},den{1,2});

```

```

11 [z22 , p22 , k22] = tf2zp (num{2,2} , den {2,2});
12 [z32 , p32 , k32] = tf2zp (num{3,2} , den {3,2});
13 [z42 , p42 , k42] = tf2zp (num{4,2} , den {4,2});
14
15 i = 1;
16
17 if (length(p11) > 0)
18     for j = 1:length(p11)
19         poles(i) = p11(j);
20         i = i+1;
21     end
22 end
23
24 if (length(p21) > 0)
25     for j = 1:length(p21)
26         poles(i) = p21(j);
27         i = i+1;
28     end
29 end
30
31 if (length(p31) > 0)
32     for j = 1:length(p31)
33         poles(i) = p31(j);
34         i = i+1;
35     end
36 end
37
38 if (length(p41) > 0)
39     for j = 1:length(p41)
40         poles(i) = p41(j);
41         i = i+1;
42     end
43 end
44
45 if (length(p12) > 0)
46     for j = 1:length(p12)
47         poles(i) = p12(j);
48         i = i+1;
49     end
50 end
51
52 if (length(p22) > 0)
53     for j = 1:length(p22)
54         poles(i) = p22(j);
55         i = i+1;
56     end
57 end
58
59 if (length(p32) > 0)
60     for j = 1:length(p32)
61         poles(i) = p32(j);
62         i = i+1;
63     end

```

```

64 end
65
66 if (length(p42) > 0)
67     for j = 1:length(p42)
68         poles(i) = p42(j);
69         i = i+1;
70     end
71 end
72
73 poles = unique(poles);
74
75 [temp,I] = sort(abs(poles));
76
77 poles = poles(I);
78
79 end

```

### traj\_etat

```

1 function [ksi] = traj_etat(A,ksi0 ,tmax,N,Hstar ,Vstar)
2
3     i = 1;
4
5     for t=0:0.1:tmax
6         ksi(:,i) = expm(A*t)*ksi0;
7         i=i+1;
8     end
9
10 end

```

## Codes utilisé pour l'analyse dynamique du chapitre 3

```

1 clear all;
2 close all;
3 clc;
4 format long;
5
6 %% CREATION D'UN FICHER DE SORTIE POUR LES RESULTATS
7
8 filename = sprintf('Spectre, stabilites interne et externe, observabilite ,
9     controlabilite.txt');
9 fid = fopen(filename , 'w');
10
11 %% CREATION DE LA DESCRIPTION R = [A,B,C,D] DU SYSTEME
12 % Valeurs des parametres "figes" du modele
13 Hstar = 3; Sb = 10^(-5); Cf = 10^(-3); g = 9.81; Vstar = sqrt(g*Sb*Hstar/Cf
14     ); L = 250;
15
16 % Choix du nombre de pas (N), du nombre de points (N+1), du pas (k) de
17     discretisation / de la dimension du systeme 2*(N+1)
18 N = 50;
19 k = L/N; % pas de discretisation

```

```

18 dim = 2*(N+1); % dimension du systeme
19
20 % Construction du modele R = [A,B,C,0]
21 [A,B,C] = modele_central_finite_diff(Hstar ,Vstar ,Cf ,g ,N,k ,dim);
22
23 % Creation du systeme de description R = [A,B,C,0]
24 sys = ss(A,B,C,0);
25
26 fprintf(fid ,['N = ' num2str(N) '\n']);
27
28 %% ETUDE DE STABILITE
29
30 %Stabilite interne
31 fprintf(fid , 'STABILITE INTERNE : \n');
32
33 [vp, vlp] = eig(A);
34 vlp = eig(A);
35
36 figure;
37 plot(real(vlp),imag(vlp), 'r*');
38 axis([-0.25 0.25 -1.5 1.5])
39 title(['Spectre de A pour N = ' num2str(N)]);
40 print(['Spectre de A pour N = ' num2str(N)], '-dpng');
41
42 if(length(vlp(real(vlp)>=0))>0) fprintf(fid , 'Il y a des valeurs propres de
    partie reelle positive => R pas internement stable \n');
43 else fprintf(fid , 'Toutes les valeurs propres ont leur partie reelle
    strictement negative => R internement stable \n');
44 end
45
46 %Stabilite externe
47 fprintf(fid , 'STABILITE EXTERNE : \n');
48 poles = stabilite_externe(sys);
49
50 if(length(poles(real(poles)>=0))>0) fprintf(fid , 'Il y a des poles de partie
    reelle positive => R pas externement stable \n');
51 else fprintf(fid , 'Tous les poles ont leur partie reelle strictement
    negative => R externement stable \n');
52 end
53
54 % OBSERVABILITE ET CONTROLABILITE
55 fprintf(fid , 'OBSERVABILITE ET CONTROLABILITE : \n');
56
57 %Observabilite
58 O = obsv(sys);
59 rangO = rank(O);
60 fprintf(fid , 'Rang de la matrice d''observabilite : %d \n',rangO);
61 Z = null(O);
62
63 %Controlabilite
64 Co = ctrb(sys);
65 rangCo = rank(Co);
66 fprintf(fid , 'Rang de la matrice de controlabilite : %d \n',rangCo);

```

```

67
68 if(rangO == dim) fprintf(fid, 'R observable selon la matrice d''
    observabilite O\n');
69 else fprintf(fid, 'R non observable selon la matrice d''observabilite O\n');
70 end
71
72 if(rangCo == dim) fprintf(fid, 'R controlable selon la matrice de
    controlabilite C \n');
73 else fprintf(fid, 'R non controlable selon la matrice de controlabilite C \n
    ');
74 end
75
76 fprintf(fid, 'Rangs de [sI-A ; C] et [sI-A B] pour chaque valeur propre \n')
    ;
77
78 for i = 1 : size(vlp)
79
80     rg_obs(i) = rank([vlp(i)*eye(dim)-A ; C]);
81     fprintf(fid, 'Rg [sI-A ; C] : %d \n', rg_obs(i));
82     rg_contr(i) = rank([vlp(i)*eye(dim)-A B]);
83     fprintf(fid, 'Rg [sI-A B] : %d \n', rg_contr(i));
84     fprintf(fid, '\n\n');
85
86     test_obs(i) = rg_obs(i) == dim;
87     test_contr(i) = rg_contr(i) == dim;
88
89 end
90
91 if(length(test_obs(test_obs==0)) > 0) fprintf(fid, 'R non observable selon
    la caracterisation algebrique \n');
92 else fprintf(fid, 'R observable selon la caracterisation algebrique \n');
93 end
94
95 if(length(test_contr(test_contr==0)) > 0) fprintf(fid, 'R non controlable
    selon la caracterisation algebrique \n');
96 else fprintf(fid, 'R controlable selon la caracterisation algebrique \n');
97 end
98
99 fprintf(fid, '\n\n');
100
101 %% REPONSES IMPULSIONNELLE ET INDICIELLE
102
103 figure;
104 impulse(sys,1);
105 print(['impulse' num2str(N)], '-dpng');
106 figure;
107 step(sys,1);
108 print(['step' num2str(N)], '-dpng');
109
110 fclose(fid);

```

## Code utilisé pour tracer les trajectoires d'état libres du chapitre 3 et en boucle fermée du chapitre 4

```

1 clear all;
2 close all;
3 clc;
4 format long;
5
6 %% CREATION DE LA DESCRIPTION R = [A,B,C,D] DU SYSTEME
7 % Valeurs des parametres "figes" du modele
8 Hstar = 3; Sb = 10^(-5); Cf = 10^(-3); g = 9.81; Vstar = sqrt(g*Sb*Hstar/Cf
   ); L = 250;
9
10 % Choix du nombre de pas (N), du nombre de points (N+1), du pas (k) de
   discretisation / de la dimension du systeme 2*(N+1)
11 N = 50;
12 k = L/N; % pas de discretisation
13 dim = 2*(N+1); % dimension du systeme
14
15 % Construction du modele R = [A,B,C,0]
16 [A,B,C] = modele_central_finite_diff(Hstar, Vstar, Cf, g, N, k, dim);
17
18 % Creation du systeme de description R = [A,B,C,0]
19 sys = ss(A,B,C,0);
20
21 controle = 1;
22
23 if controle == 1
24 Q = C'*C;
25 R = eye(2);
26 K = -lqr(A,B,Q,R);
27 else K = zeros(2,2*(N+1));
28 end
29
30 [vp, vlp] = eig(A+B*K);
31 vlp = eig(A+B*K);
32
33 figure;
34 plot(real(vlp), imag(vlp), 'r*');
35 axis([-0.25 0.25 -1.5 1.5])
36 title(['Spectre de A+B*K pour N = ' num2str(N)]);
37 print(['Spectre de A+B*K pour N = ' num2str(N)], '-dpng');
38
39
40 %% TRAJECTOIRES D'ETAT ET ENTREES DU SYSTEME CONTROLE
41
42 tmax = 60;
43
44 x = 0:k:L;
45 ksi0h = 0.1*Hstar*exp((-x-L/2).^2/100)';
46 ksi0v = zeros(N+1,1);
47
48 ksi0_g = [ksi0h ; ksi0v];

```

```

49 ksi = traj_etat(A+B*K,ksi0_g,tmax,N,Hstar,Vstar);
50
51
52 t=0:0.1:tmax;
53
54 u = K*ksi + Hstar*Vstar;
55
56 if controle == 1
57 plot(t,u(1,:), '-b',t,u(2,:), '-r');
58 title('Entrees pour le controle LQ optimal');
59 legend('U_0','U_L');
60 xlabel('t')
61 ylabel('U')
62 print(['Entrees pour N = ' num2str(N)], '-dpng');
63 end
64
65 ksi(1:N+1,:) = ksi(1:N+1,:) + Hstar;
66 ksi(N+2:2*(N+1),:) = ksi(N+2:2*(N+1),:) + Vstar;
67
68 writerObj = VideoWriter(['Niveau d'eau sur le bief au cours du temps pour
        N = ' num2str(N) '.avi']); % Name it.
69 writerObj.FrameRate = 200; % How many frames per second.
70 open(writerObj);
71 fid = figure;
72
73 T = 0;
74
75 for i = 1:length(ksi(1,:))
76
77     figure(fid);
78     plot(x, ksi(1:N+1,i));
79     axis([0 L 0 Hstar*1.2]);
80     title(['Niveau d'eau sur le bief au temps t = ' num2str(T) 'pour N = '
            num2str(N)]);
81     frame = getframe(gcf); % 'gcf' can handle if you zoom in to take a
            movie.
82     writeVideo(writerObj, frame);
83     T=T+0.1;
84 end
85
86 close(writerObj);

```

# Bibliographie

- [1] G. Bastin et J.-M. Coron, *Stability and Boundary Stabilization of 1-D Hyperbolic Systems*, tome 88 de *Progress in Nonlinear Differential Equations and Their Applications*, Springer, 2016
- [2] G. Bastin, J.-M. Coron et A. Diagne, *Lyapunov exponential stability of 1-D linear hyperbolic systems of balance laws*, Elsevier, 2012
- [3] Site de la Direction territoriale Nord-Est des Voies Navigables de France, <http://www.nordest.vnf.fr/spip.php?article3107>
- [4] B. d'Andréa Novel, G. Bastin et J.-M. Coron, *Les équations de Saint-Venant pour le contrôle des canaux et des voies navigables : Penser globalement, observer et agir localement*, 2008
- [5] I. M. Goodwill et P. A. Sleight, *The St Venant Equations : School of Civil Engineering*, University of Leeds, 2000
- [6] B. Jacob et H. Zwart, *Infinite Dimensional Linear Systems Theory*, 14<sup>th</sup> Internet Seminar (ISEM), 2010-2011
- [7] A. Lemaître, *Mécanique des fluides*, Notes de cours à l'usage des étudiants de Bachelier en Sciences Mathématiques, Université de Namur, 2014-2015
- [8] C. Prieur et J. Winkin, *Boundary Feedback Control of Hyperbolic Systems : Application to the Shallow Water Equations*, 2016
- [9] J. Winkin, *Systèmes, Contrôle et Optimisation*, Notes de cours à l'usage des étudiants de 1<sup>ère</sup> Master en Sciences Mathématiques, Université de Namur, 2015-2016