Institutional Repository - Research Portal
Dépôt Institutionnel - Portail de la Recherche
researchportal.unamur.be
University of Namur

THESIS / THÈSE

MASTER EN SCIENCES MATHÉMATIQUES À FINALITÉ APPROFONDIE

Stabilité des systèmes planétaires en résonance au sein d'étoiles binaires

DOUKHANIN, Nikita

Award date:
2022

Awarding institution:
Universite de Namur

Link to publication

General rights
Copyright and moral rights for the publications made accessible in the public portal are retained by the authors and/or other copyright owners and it is a condition of accessing publications that users recognise and abide by the legal requirements associated with these rights.

- Users may download and print one copy of any publication from the public portal for the purpose of private study or research.
- You may not further distribute the material or use it for any profit-making activity or commercial gain
- You may freely distribute the URL identifying the publication in the public portal ?

Take down policy
If you believe that this document breaches copyright please contact us providing details, and we will remove access to the work immediately and investigate your claim.

Download date: 02. May. 2026

Stabilité des systèmes planétaires en résonance au sein d'étoiles binaires

Nikita Doukhanin

Juin 2022



Mémoire présenté pour l'obtention du grade académique
de master en « Sciences mathématiques à finalité approfondie »

Promotrice : Anne-Sophie Libert
Co-promoteur : Jean Teyssandier
Maître de stage : Sean Raymond

Résumé

Il est classiquement estimé que 50% des étoiles sont multiples, dont une grande majorité sont des étoiles binaires. Parmi les 5030 exoplanètes découvertes à ce jour, près de 4% se trouvent dans des systèmes binaires. Dans sa première partie, ce mémoire traite de la stabilité d'exoplanètes de type S au sein d'étoiles binaires proches et se concentre en particulier sur celles en résonance en moyen mouvement avec le compagnon stellaire ou avec une autre planète du système. Grâce à des milliers de simulations numériques, nous avons réalisé des profils de stabilité à une ou deux planètes où les différents comportements dynamiques ont été mis en évidence et analysés. Dans la seconde partie, le code du mémoire a été appliqué à la stabilité d'exolunes en orbite autour d'une planète de type S dans des étoiles binaires proches. L'étude s'intéresse à la stabilité d'exolunes sous l'effet de la perturbation de l'orbite de la planète due au compagnon stellaire et sous l'effet de la résonance d'évection entre les lunes et le compagnon stellaire.

Mots-clés : Systèmes extrasolaires / Étoiles binaires / Résonances / Problème des N corps / Mécanique céleste / Stabilité orbitale / Chaos

Abstract

It is usually estimated that 50% of stars are multiple, most of which are binary stars. Of the 5030 discovered exoplanets, around 4% are in binary stars. In its first part, the master thesis deals with the stability of S-type exoplanets around close binary stars and focuses mainly on those in mean-motion resonance with the binary companion or another planet. By means of thousands of numerical simulations, we have carried out stability profiles with one or two planets, from which different dynamical behaviours were identified and analysed. In the second part of the master thesis, the code was applied to the stability of exomoons of S-type planets around close binaries. The study focuses on the effect on exomoon stability of the perturbed orbit of the planet and the evection resonance between the moon and the binary companion.

Keywords : Extrasolar systems / Binary stars / Resonances / N-body problem / Celestial mechanics / Orbital stability / Chaos

Remerciements

Les premières personnes à remercier sont mes promoteurs, Anne-Sophie Libert et Jean Teyssandier pour m'avoir guidé pendant tout ce mémoire. Ils ont été d'une aide inestimable pour la compréhension et l'application des concepts ainsi que pour la rédaction. Ils ont fait preuve d'une disponibilité qui ne cessait de m'impressionner, et ce sur les trois quadrimestres de ce travail.

Je remercie également mon maître de stage, Sean Raymond, pour ses suggestions toujours pertinentes. Il a à la fois été un guide très efficace et à la fois m'a aidé à grandir en tant que chercheur en me laissant suivre les sujets qui m'intéressaient le plus lors du stage. Je remercie aussi tous mes collègues au Laboratoire d'Astrophysique de Bordeaux pour l'accueil chaleureux dont ils ont fait preuve.

Je remercie plus généralement tous les enseignants et assistants de l'UNamur pour m'avoir accompagné pendant mes études. Chacun m'aura fait progressé pendant ces cinq ans.

Je remercie aussi mes amis, en particulier les étudiants du master de Mathématiques, l'ImproNam et mes amis de secondaire, pour les relectures tout au long de ce travail et pour tous les moments de détente qu'ils m'ont offert.

Je remercie finalement ma maman pour m'avoir permis de faire des études.

Table des matières

Mémoire 2

Introduction 2

1 Systèmes planétaires au sein d'étoiles binaires 3
- 1.1 Problème des N corps . . . 3
- 1.2 Étoiles binaires . . . 4
  - 1.2.1 Étoiles binaires et couples optiques . . . 4
  - 1.2.2 Classification des étoiles binaires . . . 4
  - 1.2.3 Orbites des étoiles binaires . . . 6
- 1.3 Exoplanètes au sein d'étoiles binaires . . . 7
  - 1.3.1 Intérêt . . . 7
  - 1.3.2 Orbites des exoplanètes . . . 9
  - 1.3.3 Exoplanètes en résonance . . . 9

2 Stabilité des systèmes planétaires 12
- 2.1 Contexte . . . 12
- 2.2 MEGNO . . . 14
  - 2.2.1 Définition . . . 14
  - 2.2.2 Comportement . . . 14
  - 2.2.3 Lien avec le plus grand exposant de Lyapunov . . . 15
- 2.3 Analyse en fréquence (FMA) . . . 16

3 Article de référence 17
- 3.1 Contexte et objectif . . . 17
- 3.2 Résultats . . . 18
  - 3.2.1 Simulations à une planète . . . 18
  - 3.2.2 Simulations à deux planètes . . . 21
- 3.3 Résultats et conclusions . . . 23

4 Étude dynamique des profils de stabilité 25
- 4.1 Choix de l'intégrateur . . . 25
- 4.2 Choix du détecteur de chaos . . . 27
- 4.3 Profil de stabilité à une planète . . . 28
  - 4.3.1 Stabilité dans son ensemble . . . 28
  - 4.3.2 Stabilité par région . . . 30
- 4.4 Profil de stabilité à deux planètes . . . 34
  - 4.4.1 Stabilité dans son ensemble . . . 34
  - 4.4.2 Stabilité par région . . . 37

Conclusion 48

Stage 51

Introduction 51

5 Contexte scientifique 52
5.1 Exolunes dans des systèmes planétaires . . . 52
5.2 Le rayon de Hill . . . 53
5.2.1 Définition du rayon de Hill . . . 53
5.2.2 Excentricité critique pour la planète . . . 53
5.2.3 Demi-grand axe critique pour la lune . . . 55
5.2.4 Excentricité critique pour la lune . . . 55

6 Étude numérique de la stabilité des exolunes 56
6.1 Exploration de l'espace des phases . . . 56
6.1.1 Simulations et objectifs . . . 56
6.1.2 Résultats des simulations . . . 57
6.1.3 Récapitulatif . . . 59
6.2 Simulations pour $q_B = 20$ . . . 59
6.2.1 Simulations et objectifs . . . 60
6.2.2 Résultats des simulations . . . 60
6.2.3 Récapitulatif . . . 65
6.3 Dynamique d'un système particulier . . . 65
6.3.1 La planète de ce système . . . 66
6.3.2 Temps de survie des lunes . . . 67
6.3.3 Pics d'excentricité et résonance d'évection . . . 68
6.3.4 Comparaison sans le compagnon stellaire . . . 72
6.3.5 Récapitulatif . . . 74
6.3.6 Discussion des objectifs initiaux . . . 74
6.4 Simulations avec des lunes massives . . . 75
6.4.1 Simulations et objectifs . . . 75
6.4.2 Résultats . . . 76
6.4.3 Récapitulatif . . . 81

Conclusion 82

Références 84

A Article sur la capture en résonance 87

Mémoire :
Stabilité des systèmes planétaires en résonance au sein d'étoiles binaires

Introduction

Ce mémoire de mécanique céleste traite du problème des N corps. La première partie du mémoire se concentre sur l'étude dynamique de profils de stabilité de systèmes planétaires à une et deux planètes au sein d'étoiles binaires. Une attention particulière sera portée sur les résonances en moyen mouvement entre différents corps, plus précisément entre les planètes et le compagnon binaire et entre les planètes elles-mêmes. A cette fin, nous allons reproduire les résultats d'un des rares articles traitant simultanément de la stabilité de systèmes planétaires dans des étoiles binaires et les systèmes planétaires en résonance. Une fois reproduit, les résultats seront étudiés dynamiquement.

Pour commencer, les systèmes planétaires au sein d'étoiles binaires et les résonances en moyen mouvement seront introduits au chapitre 1. Ensuite, la stabilité des systèmes planétaires ainsi que les détecteurs de chaos, les outils pour étudier numériquement la stabilité, seront définis dans le chapitre 2. Dans ce mémoire, nous avons choisi de travailler avec le détecteur de chaos MEGNO. Par la suite, nous discuterons l'article de référence de ce travail, à savoir "Stability of multiplanet systems in binaries" de Marzari et Gallina [1]. Les objectifs et les résultats clés de l'article seront présentés dans le chapitre 3. Nous tenterons de reproduire leurs résultats en utilisant l'indicateur de chaos MEGNO au chapitre 4. Pour finir, nous réaliserons l'analyse dynamique des profils de stabilité en mettant en application les différents concepts présentés précédemment. Dans un premier temps, les profils de stabilité y seront analysés dans leur ensemble pour en extraire des zones dynamiquement différentes. Dans un second temps, chaque zone de stabilité sera étudiée au travers de l'analyse de systèmes représentatifs.

Chapitre 1

Systèmes planétaires au sein d'étoiles binaires

Dans ce premier chapitre, nous allons faire plus ample connaissance avec les systèmes planétaires au sein d'étoiles binaires. A la section 1.1, nous introduirons le problème à N corps. La section 1.2 se focalisera sur les étoiles binaires tandis que les exoplanètes découvertes au sein de celles-ci seront abordées à la section 1.3. Nous finirons ce chapitre par une présentation des résonances et des impacts qu'elles peuvent avoir sur l'orbite des corps.

1.1 Problème des N corps

Le problème des N corps modélise l'interaction gravitationnelle entre N corps. Si la masse du i-ème corps est notée m_i et le vecteur allant de l'origine O à ce corps est noté $\vec{r}_i$, alors la dynamique du système se traduit par le système d'équations différentielles vectorielles

$$m_i \ddot{\vec{r}_i} = \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{N} -\frac{G m_i m_j (\vec{r}_i - \vec{r}_j)}{||\vec{r}_i - \vec{r}_j||^3}, \ \forall i \in \{1, ..., N\}. \tag{1.1}$$

Cette équation est non linéaire à cause du facteur $||\vec{r}_i - \vec{r}_j||^3$ au dénominateur. Il y a également un couplage très fort entre les différentes équations du système. Tout ceci a comme conséquence que les équations ne peuvent être résolues analytiquement sauf dans le cas très particulier où $N = 2$. C'est pour cela que pour étudier le problème des N corps, nous avons recours à des des intégrations numériques.

Les corps sont classiquement des étoiles en interaction dans un système stellaire ou des planètes en orbite autour d'étoiles dans des systèmes planétaires. La distinction entre étoiles et planètes se fait du point de vue de l'Eq (1.1) au travers des masses. Le Soleil a une masse de 1 masse solaire, notée 1 $m_\odot$, la planète géante Jupiter a une masse de 9.54×10^{-4} $m_\odot$ et la Terre a une masse de 3×10^{-6} $m_\odot$ seulement [2]. Il existe également des étoiles plus massives que le Soleil : R136a1, une des étoiles les plus massives que nous connaissons, a une masse estimée à plus de 200 $m_\odot$, avec certaines estimations dépassant les 300 $m_\odot$ selon [3].

Ce mémoire est consacré aux systèmes planétaires au sein d'étoiles binaires. Ces dernières sont introduites à la section suivante.

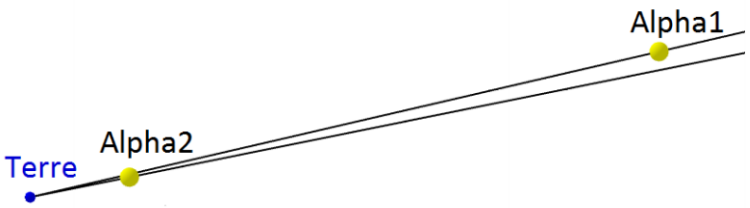


FIGURE 1.1 – Schéma du couple optique α-capricorni. La distance physique entre les étoiles est grande mais un jeu de perspective nous fait croire qu'elles sont proches. Source : [5].

1.2 Étoiles binaires

Dans cette section, nous allons décrire la distinction faite entre étoiles binaires et couples optiques. Nous allons ensuite présenter le système de classification des étoiles binaires. Nous finirons en discutant brièvement les orbites décrites par les étoiles binaires.

1.2.1 Étoiles binaires et couples optiques

Il est nécessaire d'être prudent lorsque nous parlons de proximité d'étoiles. Il faut en particulier préciser si nous parlons de distance physique ou de distance angulaire sur la voûte céleste. En effet, lorsque nous regardons le ciel, il est tentant de se dire que deux étoiles proches visuellement sont proches physiquement. Ceci n'est cependant pas nécessairement vrai. C'est pour cela que nous distinguons les étoiles binaires des couples optiques. Une *étoile double*, c'est-à-dire une paire d'étoiles proches sur la voûte céleste, peut être soit une étoile binaire soit un couple optique [4]. Dans le cas des étoiles binaires, les deux étoiles sont proches l'une de l'autre physiquement et sont donc en plus proches dans la voûte céleste. Les deux étoiles influencent par conséquent la dynamique l'une de l'autre. Dans le second cas, celui des *couples optiques*, les étoiles sont séparées de potentiellement plusieurs années-lumières [1] mais semblent proches dans le ciel par un jeu de perspective. Ce jeu de perspective est illustré à la figure 1.1.

L'exemple de couple optique représenté à la figure 1.1 est α^1-capricorni et α^2-capricorni. Les étoiles sont séparées de 0.11° seulement sur la voûte céleste : leur séparation est petite mais visible à l'oeil nu. Cependant, α^1 est à 870 années-lumière de nous comparé à 100 années-lumière pour α^2 : les deux étoiles sont donc physiquement très séparées. La paire Mizar et Alcor est un autre exemple de couple optique dont la séparation est visible à l'oeil nu [2].

Un exemple d'étoile binaire est la paire Sirius, composée des étoiles Sirius A et Sirius B, dont une photo prise en 2005 est visible sur la figure 1.2. La distance séparant les deux étoiles oscille entre 8.2 et 31.5 UA. Cette distance est suffisamment petite pour que les deux étoiles interagissent gravitationnellement.

1.2.2 Classification des étoiles binaires

Décrivons maintenant les différentes catégories d'étoiles binaires. Basé sur la manière dont les scientifiques confirment qu'une paire d'étoiles est bien une paire en interaction,

1. Une année-lumière correspond à la distance parcourue par la lumière dans le vide en une année, soit $\sim 63,241.1$ unités astronomiques (UA), où une UA vaut 149,597,870.7km, c'est-à-dire la distance Terre-Soleil moyenne.

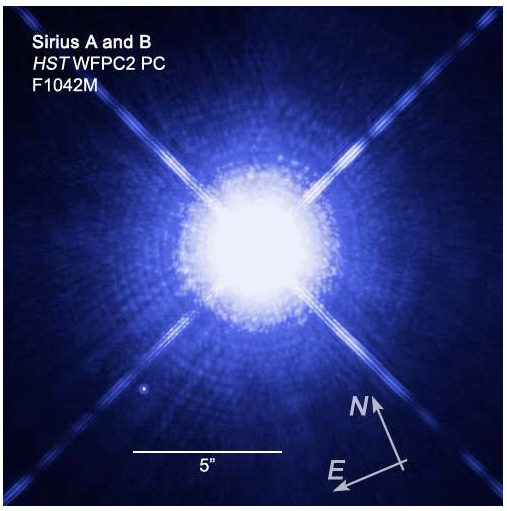


FIGURE 1.2 – Photo de l'étoile binaire Sirius prise par le télescope Hubble. Source : [6].

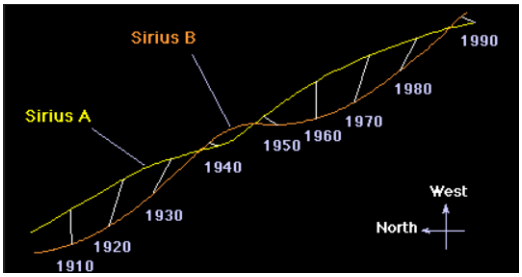


FIGURE 1.3 – Schéma de l'étude astrométrique de la paire Sirius entre 1910 et 1990. Source : [7].

les étoiles binaires sont classées selon quatre catégories : les binaires visuelles, les binaires astrométriques, les binaires spectroscopiques et les binaires à éclipse.

Les *binaires visuelles* sont les paires d'étoiles où l'observation avec de l'équipement suffisant permet de voir les deux étoiles. Au travers de photos, il est facile de voir que les deux étoiles orbitent autour de leur centre de masse commun. Sirius est un exemple d'une binaire visuelle. La figure 1.2 est typiquement le genre de photos permettant de confirmer que la paire d'étoiles est suffisamment proche pour être en interaction gravitationnelle.

En ce qui concerne les trois autres catégories d'étoiles binaires, le compagnon stellaire n'est pas explicitement visible. Ceci peut être dû au fait que la paire est trop éloignée de la Terre pour que nous puissions distinguer les deux étoiles avec de l'équipement moderne. Une autre raison possible est qu'une des deux étoiles de la paire est beaucoup plus lumineuse que son compagnon, rendant l'observation directe du compagnon impossible.

C'est le cas pour les *binaires astrométriques*. L'étoile visible d'une binaire astrométrique est par définition en interaction avec une autre étoile, même si celle-ci nous est invisible. Nous étudions alors son mouvement dans le but de détecter des oscillations périodiques causées par l'attraction gravitationnelle du compagnon. Il est important que les oscillations soient périodiques : si elles ne le sont pas, elles ne sont probablement pas dues à l'interaction avec une seconde étoile. Précisons également qu'avec l'amélioration des télescopes au fil des années, des binaires initialement astrométriques peuvent devenir visuelles. C'est notamment le cas de la paire Sirius, initialement classifiée comme binaire grâce aux oscillations dans le ciel de Sirius A. L'étude astrométrique de Sirius est illustrée à la figure 1.3.

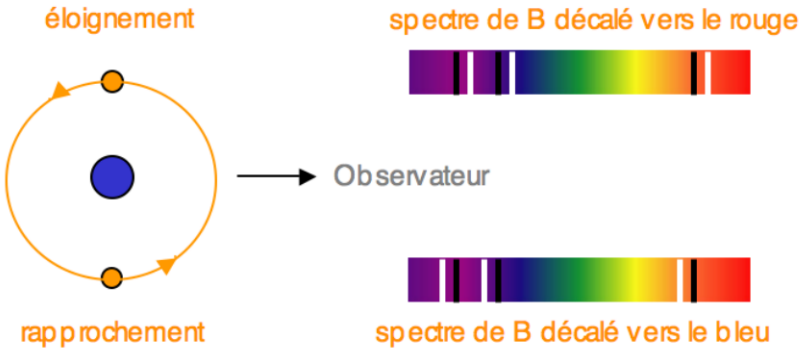


FIGURE 1.4 – Schéma du mouvement d'une binaire spectroscopique dans le ciel juxtaposé à la variation de lumière induite par le mouvement des étoiles. Source : [8].

Les *binaires spectroscopiques* sont des cas où les deux étoiles sont trop proches l'une de l'autre pour pouvoir être distinguées visuellement. Par conséquent, la lumière observée est une addition des lumières émises par les deux étoiles. Or, puisqu'elles oscillent autour de leur centre de masse, elles subissent des accélérations. Ces accélérations induisent un effet Doppler changeant la couleur de la lumière émise par les compagnons et permettent d'identifier une étoile en apparence unique comme étant une étoile binaire (voir la représentation schématique de la figure 1.4). Un exemple de binaire spectroscopique est Mizar A.

Pour la dernière catégorie d'étoiles binaires, les *binaires à éclipse*, la lumière émise est également étudiée afin de déterminer que la source est une paire d'étoiles. Cette fois-ci, cependant, il est nécessaire que la Terre se trouve à peu près dans le plan orbital dans lequel les étoiles se meuvent. Ainsi, vu depuis la terre, une des étoiles est périodiquement éclipsée par son compagnon. Nous observons donc des chutes périodiques d'intensité lumineuse lorsqu'une des étoiles est éclipsée, partiellement ou totalement, par l'autre. Plus l'étoile éclipsée est bien cachée par son compagnon et plus elle est lumineuse, plus la perte d'intensité sera grande. Ce processus est illustré pour la binaire à éclipse SV Cam à la figure 1.5.

1.2.3 Orbites des étoiles binaires

Discutons à présent des orbites décrites par les étoiles binaires en l'absence d'autres corps. Dans le cas d'une étoile binaire, l'Eq. (1.1) se réduit à un problème à 2 corps. La solution analytique pour un tel système prédit que les étoiles vont orbiter selon des trajectoires elliptiques dans un plan fixé. L'ellipse suivie par une étoile a un de ses foyers à la position de l'autre étoile. Ces ellipses restent toujours les mêmes.

Il est utile pour la suite de définir les éléments orbitaux a, e, i, ω, Ω et M, illustrés à la figure 1.6. Les cinq premiers définissent une unique ellipse dans l'espace et le dernier la position du corps sur cette ellipse. Le demi-grand axe a est la moitié de la distance entre le péricentre et l'apocentre de l'ellipse. L'excentricité e représente à quel point l'orbite est loin d'être circulaire : $e = 0$ signifie un cercle, $e \in [0;1[$ est une ellipse de plus en plus aplatie, $e = 1$ est une parabole et $e > 1$ est une hyperbole. L'inclinaison i donne l'angle entre le plan de l'orbite et un plan de référence. L'angle ω, l'argument du péricentre, représente la position du péricentre de l'ellipse par rapport au noeud ascendant. La longitude du noeud ascendant Ω indique, par rapport à une direction de référence, l'angle de la direction où le corps traverse le plan de référence avec une vitesse verticale

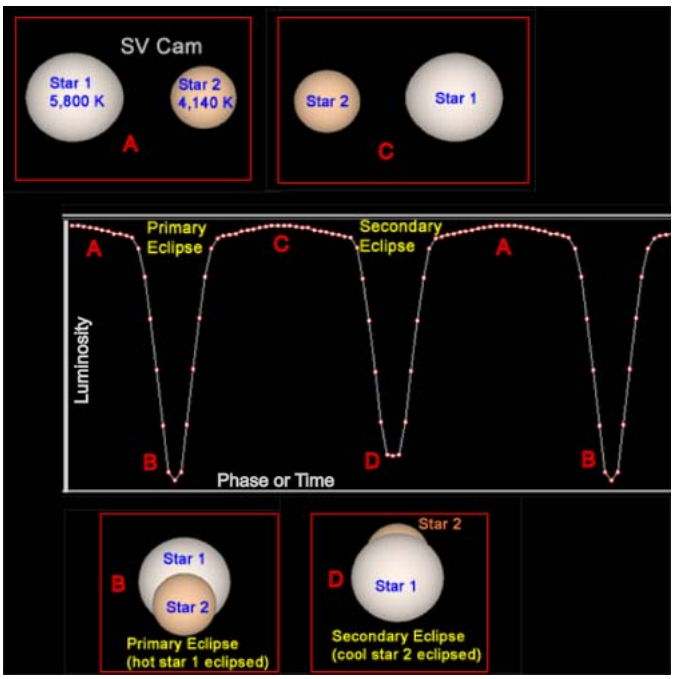


FIGURE 1.5 – Représentation schématique de données simulées pour la paire SV Cam. Nous pouvons voir l'évolution de luminosité lorsqu'une étoile passe devant l'autre. Source : [9].

positive. M est l'anomalie moyenne. M indique la position du corps sur l'ellipse. M est absente de la figure : l'anomalie vraie ν est utilisée à la place. Nous pouvons passer de l'une à l'autre grâce aux formules

$$\tan\left(\frac{\nu}{2}\right) = \sqrt{\frac{1+e}{1-e}}\tan\left(\frac{E}{2}\right)$$

et

$$M = E - e\sin(E),$$

où E est l'anomalie excentrique, une autre manière de représenter la position du corps sur l'ellipse.

Lorsque des planètes orbitent une étoile binaire, les orbites des étoiles ne seront presque pas affectées. Les planètes ont en effet des masses comparativement petites et donc peu d'effet sur les mouvements des étoiles.

1.3 Exoplanètes au sein d'étoiles binaires

Dans cette section nous allons nous intéresser aux exoplanètes. Nous allons dans un premier temps les introduire au moyen d'un bref historique et d'une discussion quant à l'utilité de les étudier. Dans un second temps, nous discuterons des orbites décrites par les planètes au sein d'étoiles binaires et introduirons le concept de résonance.

1.3.1 Intérêt

Une question assez naturelle que nous pourrions nous poser est de chercher à comprendre pourquoi il est opportun de s'intéresser aux exoplanètes dans les systèmes binaires. Une première raison est qu'il est classiquement estimé que plus de 50% des systèmes stellaires sont multiples, c'est-à-dire ont au moins deux étoiles. L'étude [11] est plus

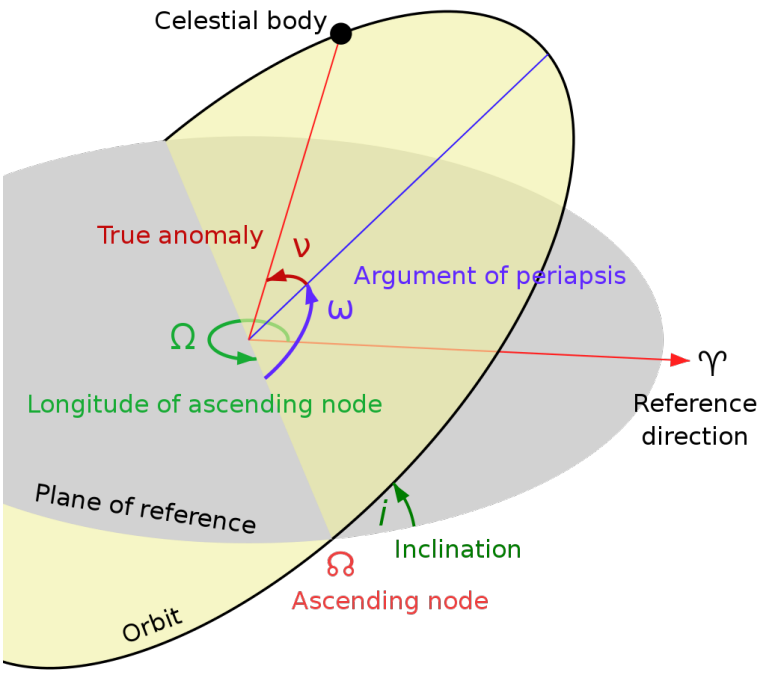


FIGURE 1.6 – Éléments orbitaux (a, e, i, ω, Ω, ν). Source : [10].

pessimiste : elle propose que 50% serait un nombre exagéré par des biais tels que la facilité d'observation d'étoiles plus lumineuses, fréquemment multiples. Cette étude propose plutôt qu'un tiers des systèmes stellaires seraient multiples. Puisque vraisemblablement beaucoup sont multiples, connaître leur fonctionnement est intéressant. Et puisque les systèmes binaires sont les plus simples et les plus communs parmi ceux-ci, c'est eux que nous étudierons dans ce mémoire.

Une deuxième raison est l'essor actuel de la science des exoplanètes. Au moment du début de la rédaction de ce mémoire, 4367 exoplanètes étaient confirmées et 2593 autres attendaient confirmation selon le site de la NASA [12]. Le nombre d'exoplanètes confirmées connaît une réelle explosion ces dernières années. La découverte des premières exoplanètes est d'ailleurs très récente. La première exoplanète suspectée, Gamma Cephei Ab, date de 1988. Les données à l'époque n'étaient cependant pas d'assez bonne qualité pour pouvoir confirmer son existence. A noter que Gamma Cephei Ab est bel et bien une exoplanète : elle a été confirmée en 2002 [13]. Les premières exoplanètes découvertes et confirmées, PSR B1257+12a, b et c, orbitent autour d'un même pulsar. Leur confirmation date de 1992 pour b et c et de 1994 pour a [14]. La première exoplanète détectée autour d'une étoile de type solaire de la séquence principale, 51 Pegasi b, a été confirmée en 1995 [15]. Cette découverte a valu à Michel Mayor et Didiez Queloz le prix Nobel de Physique en 2019.

Parmi les planètes extrasolaires confirmées, à peu près 4% se trouvent dans des systèmes stellaires multiples selon [16]. Ceci correspond à plus d'une centaine de planètes dans des systèmes multiples dont la majorité sont des étoiles binaires. Ce pourcentage relativement faible pourrait être dû à des biais d'observation selon [17]. Une autre hypothèse est l'impact défavorable de la binaire sur la formation de planètes et la stabilité de tels systèmes à long terme. La stabilité de ces systèmes une fois les planètes formées est justement le sujet d'étude de ce mémoire. Quoiqu'il en soit, il est vraisemblable qu'une fraction non négligeable d'exoplanètes réside dans des systèmes binaires.

Étudier la stabilité de tels systèmes permettrait donc d'aider les futures détection

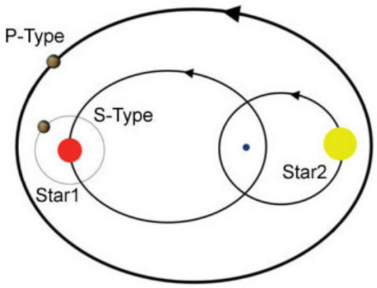


FIGURE 1.7 – Orbites de type S et de type P des planètes dans un système binaire. Source : [18].

d'exoplanètes et à terme du vivant en dehors de la Terre. En effet, nous savons maintenant qu'il a fallu beaucoup de temps, 1 milliard d'années selon les estimations actuelles, pour que la vie puisse apparaître sur Terre. Il aura également fallu 3.5 milliards d'années de vie pour qu'une des espèces, l'humain, développe des technologies suffisantes pour observer le ciel au-delà du Système solaire. Donc, si nous voulons observer la vie dans un système planétaire, il faut que ce système soit stable sur une durée suffisante pour que la vie s'y développe. De plus, de grandes variations des orbites planétaires, par exemple en demi-grand axe et en excentricité, auraient une incidence sur l'évolution du climat et pourraient empêcher le développement de la vie.

1.3.2 Orbites des exoplanètes

Deux types d'orbites sont possibles pour les exoplanètes au sein d'étoiles binaires : les orbites de type P et de type S. Lorsqu'une planète décrit une orbite de type P, elle orbite autour des deux étoiles comme si la paire d'étoiles ne formait qu'un seul corps. Une orbite de type S est par contre caractérisée par la proximité de la planète à une seule des étoiles autour de laquelle elle gravite. Ces deux types d'orbite sont illustrés à la figure 1.7.

1.3.3 Exoplanètes en résonance

Dans ce mémoire, nous nous intéresserons particulièrement aux exoplanètes en résonance en moyen mouvement avec une autre planète ou avec le compagnon stellaire : cette sous-section définit ce que sont ces résonances.

Deux corps orbitant autour d'un même corps central sont en résonance en moyen mouvement lorsque le rapport de leur période orbitale est proche d'un entier. Nous noterons $(p+q)$:p une résonance où le corps interne orbite le corps central $(p+q)$ fois le temps que le corps externe le fasse p fois, où q est dit l'ordre de la résonance. Plus q est petit, plus la résonance aura un impact important sur la dynamique. Mathématiquement, la condition de résonance s'exprime

$$\frac{T_2}{T_1} \approx \frac{p+q}{p}, \tag{1.2}$$

où T_1 est la période orbitale du corps interne et T_2 celle du corps externe. La troisième loi de Kepler indique que la période orbitale d'un corps de masse m_1 en orbite autour d'un corps de masse m_0 dans un problème à deux corps vaut

$$T_1 = \frac{2\pi a_1^{3/2}}{\sqrt{G(m_0+m_1)}}. \tag{1.3}$$

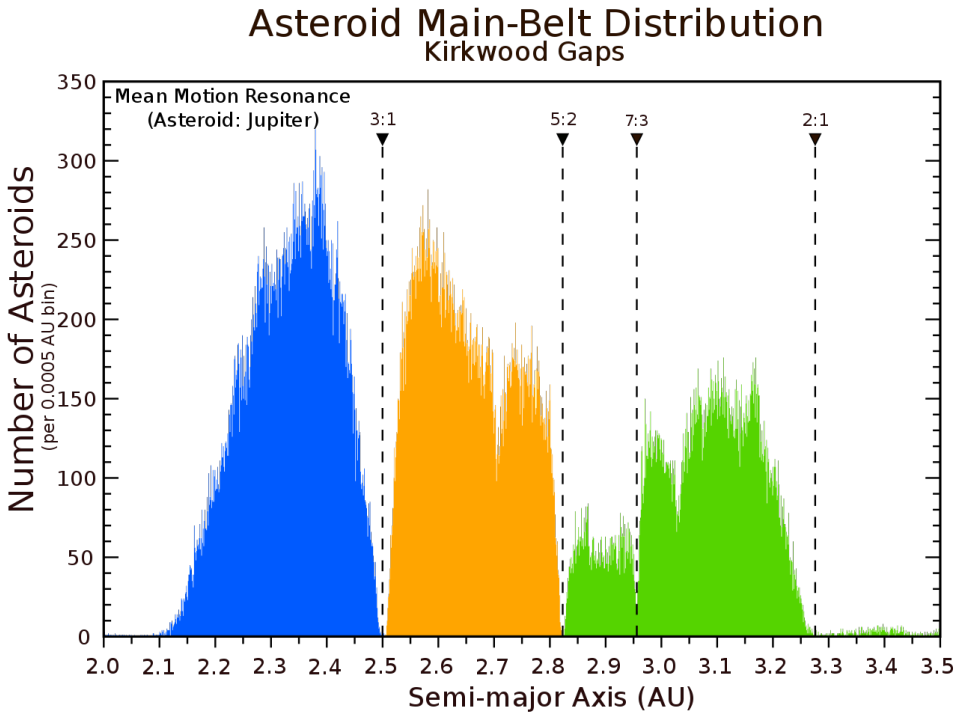


FIGURE 1.8 – Nombre d'astéroïdes dans la ceinture d'astéroïdes du Système solaire en fonction du demi-grand axe. Les traits en pointillés marquent les résonances en moyen mouvement avec Jupiter. Source : [19].

Le quotient des périodes orbitales des corps interne et externe se réexprime comme

$$\frac{T_2}{T_1} = \frac{\sqrt{m_0 + m_1}}{\sqrt{m_0 + m_2}} \left(\frac{a_2}{a_1}\right)^{3/2}. \tag{1.4}$$

Nous pouvons isoler le demi-grand axe de la planète interne dans l'équation précédente. Pour une planète interne avec demi-grand axe a_1, une planète externe doit nécessairement avoir un demi-grand axe

$$a_{2,(p+q:p)} \simeq a_1 \left(\frac{p+q}{p}\right)^{2/3} \tag{1.5}$$

pour être en résonance $(p+q)$:p avec l'autre corps, le facteur dépendant des masses de l'Eq. (1.4) étant proche de 1 puisque $m_1, m_2 << m_0$. Dans le cas d'un compagnon binaire avec un demi-grand axe a_B, une planète de type S doit avoir un demi-grand

$$a_{1,(p+q:p)} \simeq a_B \left(\frac{p}{p+q}\right)^{2/3} \frac{1}{2^{1/3}} \tag{1.6}$$

pour être en résonance $(p+q)$:p avec le compagnon binaire ($m_1 << m_0 = m_B$).

Pour que la résonance en moyen mouvement ait un impact sur la dynamique, il ne suffit pas que la condition (1.2) soit vérifiée, mais il faut également observer une libration des angles résonants. Pour un résonance $(p+q)$:p, nous utiliserons les $q+1$ angles résonants

$$\theta_{(p+q):p} = p\lambda_1 - (p+q)\lambda_2 + (q-i)\varpi_1 + i\varpi_2, \quad i \in \{0, \dots, q\}, \tag{1.7}$$

où $\varpi = \omega + \Omega$ est la longitude du péricentre. Lorsqu'un de ces angles est en libration, les corps sont en résonance.

L'impact de ces orbites remarquables sur la dynamique vient des conjonctions périodiques qu'elles entraînent. Les conjonctions sont des configurations où le corps central et les deux corps en résonance sont tous alignés. Cette périodicité induit une forte interaction entre les deux corps orbitant. Nous étudierons par la suite l'impact des résonances sur la stabilité à long terme des systèmes binaires. A titre d'exemple, la figure 1.8 illustre les *Kirkwood Gaps* : des trous dans la ceinture d'astéroïdes du Système solaire aux demi-grands axes où il y a une résonance en moyen mouvement avec Jupiter. Ceci donne l'intuition que les résonances peuvent avoir un énorme impact sur la stabilité. La notion de stabilité pour les systèmes planétaires sera décrite plus en détail au chapitre suivant.

Chapitre 2

Stabilité des systèmes planétaires

Dans ce chapitre, nous allons discuter de la stabilité des systèmes planétaires et introduire le MEGNO, une méthode de détection du chaos. Nous présenterons ses propriétés et ses avantages sur d'autres méthodes. Nous finirons cette section par une brève description d'une autre technique de détection du chaos, la Frequency Map Analysis (FMA).

2.1 Contexte

Dans un système dynamique quelconque, lorsque nous parlons de stabilité, nous faisons référence en général à la stabilité des points fixes. Les points fixes d'un système sont des points particuliers dont la dynamique est simple : toutes les variables sont constantes. L'étude analytique de la stabilité des points fixes permet de savoir si une condition initiale très proche du point fixe converge vers lui, s'éloigne de lui ou oscille autour de lui. Étudier ces quelques points particuliers permet d'avoir une bonne idée, au moins localement, de la dynamique du système.

Pour les systèmes planétaires représentés dans les coordonnées (a, e, i, ω, Ω, M), il n'y a pas de points fixes. Les solutions générales sont des solutions orbitantes où M grandit avec le temps. Une solution est de considérer le problème moyenné sur les courtes périodes, où l'évolution séculaire de l'orbite des corps est étudiée plutôt que la position des corps sur leur orbite. Les orbites du problème des deux corps sont des points fixes du problème moyenné. Dans un problème à N corps avec $N > 2$, l'étude analytique des points fixes s'avère compliquée pour l'étude de la stabilité des systèmes planétaires.

La difficulté de l'étude analytique motive l'étude numérique. La stabilité est étudiée numériquement principalement de deux manières dans le contexte des systèmes planétaires. La première est liée aux notions de régularité et de chaos. Une partie de l'espace des phases d'un système dynamique est dite chaotique ou irrégulière lorsque la distance entre deux trajectoires de conditions initiales proches diverge exponentiellement avec le temps. Il devient donc impossible à partir d'un certain moment de connaître à long terme le comportement du système au travers d'intégrations numériques. Le temps à partir duquel nous ne pouvons plus prédire l'évolution est dit temps de Lyapunov et sera discuté plus loin dans ce chapitre. Par exemple, le Système solaire a un temps de Lyapunov de l'ordre de 5 millions d'années [20], nous pouvons donc étudier son comportement avec certitude sur des périodes de cet ordre-là.

Le deuxième sens donné à la stabilité dans les systèmes planétaires étudiée numériquement est celui de l'absence de changements dramatiques. Par changements dramatiques, nous entendons soit de grandes oscillations non périodiques des éléments orbitaux, soit

une rencontre proche ou une collision entre différents corps du système, soit l'éjection d'un corps. Ces deux dernières situations sont ce que nous appellerons des évènements chaotiques. Discutons brièvement de ces différents évènements.

Une collision arrive lorsque deux corps ou plus se retrouvent au même endroit au même moment. Lors d'une collision, les corps peuvent se casser en morceaux ou partiellement fusionner par exemple. La dynamique du système change si dramatiquement que l'Eq. (1.1) n'est plus suffisante pour la modéliser. Une collision peut avoir lieu par exemple lorsque l'excentricité d'un corps grandit, de sorte que son orbite intersecte l'orbite d'un autre corps. Notons que deux orbites qui se coupent ne garantissent pas une collision. Neptune, dont l'apocentre est de 30.33 UA et Pluton, dont le péricentre est de 29.658 UA, suivent des orbites selon des ellipses qui se coupent. Leur collision est évitée grâce à la résonance en moyen mouvement 3:2 entre eux [21]. C'est un exemple de configuration où la résonance en moyen mouvement favorise la stabilité.

Une éjection se produit lorsque l'orbite d'un corps devient hyperbolique ou parabolique, c'est-à-dire $e \geq 1$. Ceci a comme conséquence que le corps sort du système et n'interagit plus avec. L'éjection d'un astéroïde dans un système avec une ceinture d'astéroïdes ne va probablement pas impacter la dynamique globale du système. Par contre, l'éjection d'une planète géante telle que Jupiter aura beaucoup d'impact : elle pourrait emporter certains corps avec elle ou en dévier d'autres en passant proche d'eux, par exemple.

Un autre exemple d'oscillations périodiques selon e et i est la résonance de von Zeipel-Lidov-Kozai. Sous cette dynamique, un corps en orbite autour d'un corps central perturbé par un troisième corps incliné va subir un échange périodique de son inclinaison et de son excentricité. Ce mécanisme peut être source d'évènements chaotiques. En effet, la croissance en excentricité peut mener à des rencontres proches ou collisions avec d'autres corps du système. Dans des simulations plus complexes que les nôtres qui tiennent également compte des effets de marée de l'étoile centrale par exemple, la croissance en excentricité peut mener à des changements de la dynamique du système et, *in fine*, à des évènements chaotiques [22].

Deux exemples d'oscillations non périodiques, selon a et e, sont les rencontres proches et le *planet-planet scattering*. Lors d'une rencontre proche entre les corps i et j, le facteur $\frac{1}{||r_i - r_j||^3}$ de l'Eq (1.1) devient très grand. Par conséquent, les planètes interagissent très fort. Une des conséquences possibles est le *planet-planet scattering*, où une planète est éjectée du système et l'autre voit son demi-grand axe changer et son excentricité croître brusquement, par exemple. Cette perturbation de la trajectoire est chaotique : si une des planètes suit une trajectoire légèrement différente, l'éjection du corps i et l'évolution de a_j et e_j seront différentes. Elle est par définition source d'évènements chaotiques. Dans les cas moins extrêmes, les rencontres proches sont tout de même source de chaos et d'évènements chaotiques. Le grand facteur $\frac{1}{||r_i - r_j||^3}$ mène à l'évolution chaotique de a et e. Cette évolution chaotique d'une part empêche l'étude précise du système et d'autre part peut mener à terme à du *planet-planet scattering*.

Pour résumer, lors de l'étude de la stabilité d'un système planétaire, nous nous demandons d'une part si son comportement semble chaotique et d'autre part si un événement changeant la dynamique du système risque d'arriver. Nous cherchons donc à savoir si le système est régulier et combien de temps celui-ci ne changera pas drastiquement. Par la suite nous utiliserons les mots régulier, irrégulier et chaotique pour parler de la stabilité au sens du chaos et les mots stable et instable pour parler de la stabilité au sens des évènements chaotiques.

2.2 MEGNO

Dans cette section, nous introduisons le MEGNO, "mean exponential rate of divergence of nearby orbits" , c'est-à-dire le taux moyen de divergence exponentielle des orbites proches. Nous allons détailler le critère numérique de détection du chaos à la base du MEGNO puis parler de ses avantages. Cette section est inspirée de la source [24].

2.2.1 Définition

Donnons pour commencer le contexte dans lequel le MEGNO est défini. Soit un système hamiltonien à n dimensions où $x = (p, q) \in \mathbb{R}^{2n}$, $p, q \in \mathbb{R}^n$, dont l'hamiltonien est $H(p, q)$ et dont le flot est donné par

$$\dot{x} = J\nabla_x \left(H(p, q)\right),$$

avec $J = \begin{bmatrix} 0_n & -id_n \\ id_n & 0_n \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{n\times n}$, où $0_n \in \mathbb{R}^{n\times n}$ dénote la matrice nulle et $id_n \in \mathbb{R}^{n\times n}$ la matrice identité. Soit une surface d'énergie $M_h = \{x \in \mathbb{R}^{2n} \mid H(p, q) = h\}$, une zone de l'espace des phases dont l'énergie, c'est-à-dire l'hamiltonien, vaut une constante h. Définissons une portion d'orbite dans M_h comme $\gamma(t) = \{x(s, x_0) \mid x_0 \in M_h,\ s \in [0 : t]\}$, où x_0 est la condition initiale de l'orbite, s est la variable indépendante représentant le temps et t le temps considéré. Définissons également l'orbite entière $\gamma = \lim_{t\to+\infty} \gamma(t)$. Le MEGNO nécessite le calcul du vecteur tangent $\delta_\gamma(t) \in \mathbb{R}^n$ le long de la courbe $\gamma(t)$ vérifiant l'équation dynamique

$$\dot{\delta}_\gamma(t) = J\nabla_x^2 \left(H(p, q)\right) \delta_\gamma(t).$$

Nous avons maintenant tous les outils pour définir le MEGNO comme dans [24]. Le MEGNO Y associé à une courbe donnée $\gamma(t)$ est défini par

$$Y(\gamma(t)) = \frac{2}{t} \int_0^t \frac{||\dot{\delta}_\gamma(s)||}{||\delta_\gamma(s)||} s\, ds, \tag{2.1}$$

avec $||.||$ une norme quelconque. Définissons également le MEGNO moyen $\bar{Y}$, d'expression

$$\bar{Y}(\gamma(t)) = \frac{1}{t} \int_0^t Y(\gamma(s))ds. \tag{2.2}$$

2.2.2 Comportement

Le MEGNO moyen se comporte assymptotiquement différemment en fonction du type d'orbite le long de laquelle il est calculé. En particulier, nous avons

- $\lim_{t\to+\infty} \bar{Y}(\gamma(t)) = +\infty$ lorsque $\gamma(t)$ est une orbite irrégulière,
- $\lim_{t\to+\infty} \bar{Y}(\gamma(t)) = 0$ lorsque $\gamma(t)$ est une orbite périodique stable,
- $\lim_{t\to+\infty} \bar{Y}(\gamma(t)) = 2$ lorsque $\gamma(t)$ est une orbite quasi-périodique ou proche d'une orbite périodique stable $\tilde{\gamma}$.

En pratique, nous ne pouvons pas étudier le MEGNO moyen pour $t \to +\infty$ mais ceci n'est pas nécessaire puisqu'il s'approche de sa valeur asymptotique rapidement. Il l'approche d'ailleurs très vite comparé à d'autres indicateurs de chaos tels que le plus

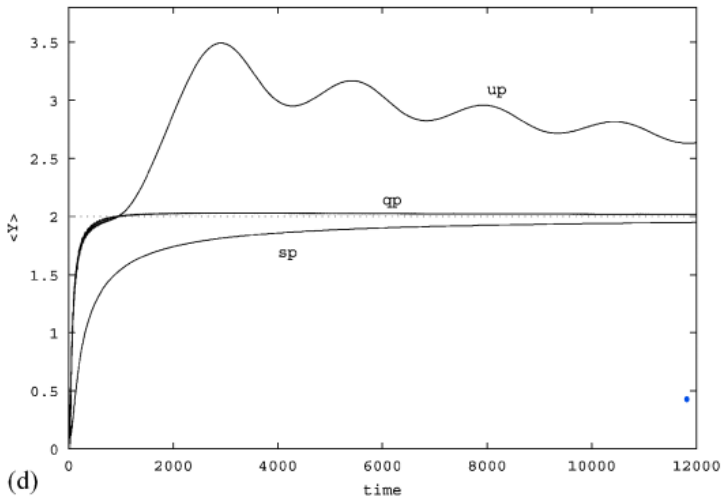


FIGURE 2.1 – Panel (d) de la figure 1 de [24]. Les MEGNOs de trois orbites stables évoluent différemment à cause de la stabilité locale mais convergent asymptotiquement vers 2.

grand exposant de Lyapunov, décrit à la section suivante, selon [24]. Il faut tout de même s'assurer que nous le calculons suffisamment longtemps. La figure 2.1 met ceci en évidence en montrant trois orbites où $\bar{Y}$ tend vers 2 asymptotiquement mais de manières différentes. Par exemple, nous serions tentés de classifier la courbe quasi-périodique *up* comme étant chaotique après 3000 unités de temps puisque $\bar{Y}(up(3000)) = 3.5 > 2$.

Pour les simulations réalisées dans ce travail, le temps d'intégration a été choisi tel que tous les MEGNOs moyens aient convergé. La convergence est considérée atteinte pour les orbites stables si un MEGNO moyen ayant atteint une valeur proche de 2 reste proche de cette valeur pour des temps d'intégration deux fois plus longs, puisque les MEGNOs moyens d'orbites irrégulières pour lesquelles

$$\lim_{t\to+\infty} \bar{Y}(\gamma(t)) = +\infty$$

vont nécessairement croître sur ce temps.

La valeur finale du MEGNO moyen nous permettra de classifier les systèmes planétaires comme réguliers (la terminologie "stable" sera également employée abusivement dans la suite) ou chaotiques. Notons que les valeurs 0 et 2 ne seront pas atteintes exactement : ce sont des valeurs asymptotiques, or nous regardons après un temps fini. Par conséquent, les orbites avec des valeurs jusqu'à 2.1 seront classifiées comme régulières dans la suite.

2.2.3 Lien avec le plus grand exposant de Lyapunov

Un moyen classique d'obtenir des informations sur la stabilité locale des trajectoires est le plus grand exposant de Lyapunov noté $\lambda(\gamma)$ et défini dans [24] par

$$\lambda(\gamma) = \lim_{t\to+\infty} \lambda_1(\gamma(t)), \tag{2.3}$$

où

$$\lambda_1(\gamma(t)) = \frac{1}{t} \ln\left(\frac{||\delta_\gamma(t)||}{||\delta_\gamma(0)||}\right). \tag{2.4}$$

Il peut également être réécrit

$$\lambda(\gamma) = \lim_{t\to+\infty} \frac{1}{t} \int_0^t \frac{||\dot{\delta}_\gamma(s)||}{||\delta_\gamma(s)||}\, ds. \tag{2.5}$$

Le plus grand exposant de Lyapunov d'une orbite représente son taux de divergence exponentielle : il est positif si l'orbite est irrégulière et négatif si l'orbite est quasi-périodique ou dans le bassin d'attraction d'une orbite stable. Plus $\lambda(\gamma) > 0$ est grand, plus les orbites proches de γ s'éloignent rapidement d'elle et donc plus γ est dans une partie chaotique de l'espace des phases. Le plus grand exposant de Lyapunov, une fois inversé, donne le temps de Lyapunov mentionné plus haut. Il représente le temps à partir duquel la séparation exponentielle des orbites est si grande que les simulations numériques ne peuvent plus être assez précises pour faire des prédictions fiables.

Le MEGNO a l'avantage de permettre de calculer approximativement le plus grand exposant de Lyapunov via

$$\hat{\lambda}(\gamma(t)) = \frac{Y(\gamma(t))}{t}$$

grâce aux relations pour t suffisamment grand,

$$\hat{\lambda}(\gamma(t)) \approx \lambda(\gamma) \text{ lorsque } \gamma(t) \text{ est irrégulière} \tag{2.6}$$

et

$$\hat{\lambda}(\gamma(t)) \approx \frac{2}{t} \text{ lorsque } \gamma(t) \text{ est régulière.}$$

$Y(\gamma(t))$ est déjà calculé lors de la classification des orbites comme stables ou irrégulières : la relation (2.6) ne demande presqu'aucun calcul supplémentaire. Ceci est très avantageux comparé à la formulation (2.3) qui demande des temps de calcul bien plus longs que le MEGNO et dont l'erreur relative par calcul numérique grandit lorsque $\lambda(\gamma(t) > 0$ diminue, selon [24].

2.3 Analyse en fréquence (FMA)

Dans l'article de référence [1] dont nous discuterons au chapitre suivant, la stabilité des systèmes est évaluée grâce à la Frequency Map Analysis, dite FMA [25]. Les auteurs intègrent numériquement chaque système pendant 10^7 ans. Le signal obtenu est divisé en cent morceaux de 5×10^5 ans, avec un point tous les 5 ans. Chaque morceau commence 10^5 ans plus tard que le précédent. Pour chacun, la fréquence principale f des variables non-singulières $h = e_1 \sin(\varpi_1)$ et $k = e_1 \cos(\varpi_1)$ est calculée. L'écart-type de la fréquence principale σ_f est obtenu à partir des cent fréquences calculées. La FMA donne en sortie l'indice de diffusion chaotique

$$c_s = \log_{10}\left(\frac{\sigma_f}{f}\right), \tag{2.7}$$

le logarithme du changement relatif de la fréquence principale. Plus la trajectoire est chaotique, moins le système sera périodique et plus c_s grandira. Plus c_s est grand, plus le temps caractéristique de stabilité sera court [25]. Un c_s supérieur à -6 est considéré comme associé à une orbite irrégulière dans [1].

Chapitre 3

Article de référence

Dans ce chapitre, nous allons discuter de l'article de référence pour notre travail, à savoir "Stability of multiplanet systems in binaries" de Marzari et Gallina [1]. Nous commencerons par expliquer l'objectif de l'article. Ensuite, les figures principales seront analysées. Nous finirons ce chapitre par un résumé des résultats de l'article et une ouverture sur la suite du mémoire.

3.1 Contexte et objectif

L'article de référence [1] traite de la stabilité de planètes de type S dans des systèmes binaires. Les séparations entre les étoiles considérées sont 25, 50 et 100 UA, des demi-grands axes typiques pour des étoiles proches. Pour comparaison, Uranus a un demi-grand axe de 19.2 UA et Pluton de 39.2 UA.

L'objectif premier de l'article est de tester deux formules : la limite empirique de stabilité dans les binaires a_c de Holman et Wiegert [26] et le critère de stabilité de Hill défini dans [27]. La formule de Holman et Wiegert pour la stabilité d'une particule test en orbite de type S autour d'une binaire est donnée par

$$\begin{aligned} a_c =& a_B\big((0.0464 \pm 0.006) + (-0.380 \pm 0.010)\bar{\mu} + (-0.631 \pm 0.034)e_B \\ &+ (0.586 \pm 0.061)\bar{\mu}e_B + (0.150 \pm 0.041)e_B^2 + (-0.198 \pm 0.074)\bar{\mu}e_B^2\big), \end{aligned} \tag{3.1}$$

avec $\bar{\mu} = \frac{m_B}{m_A+m_B}$, où m_A et m_B sont les masses des étoiles, a_B le demi-grand axe de la binaire et e_B son excentricité. Cette formule empirique donne une idée du demi-grand axe maximal pour que la particule test reste stable sur 10^6 années. Elle a été extrapolée numériquement à partir d'intégrations numériques intensives du problèmes des trois corps restreint elliptique et coplanaire dans [26]. Cet article explore de nombreuses valeurs du rapport des masses stellaires et du demi-grand axe et de l'excentricité de la binaire.

Le critère de Hill indique quant à lui la séparation initiale $\Delta = a_2 - a_1$ minimale nécessaire entre deux planètes pour éviter en tout temps les rencontres proches entre elles. Il suppose un système planétaire composé d'une étoile et de deux planètes décrivant des orbites circulaires et coplanaires. Le critère se traduit par la condition

$$\Delta = a_2 - a_1 \geq 2\sqrt{3}r_{Hill,mutuel}, \tag{3.2}$$

avec

$$r_{Hill,mutuel} = \left(\frac{m_1 + m_2}{3m_A}\right)^{1/3}\left(\frac{a_1 + a_2}{2}\right),$$

le rayon de la sphère mutuelle de Hill. Il a été obtenu par [27] par une étude topologique de la stabilité du problème des trois corps avec deux planètes sur des orbites circulaires et coplanaires. Il a été validé dans [27] et [28] par des simulations numériques.

Dans l'article de référence [1], ces deux formules sont testées dans le cadre de problèmes plus généraux. Toutes les planètes sont massives, sur des orbites non circulaires et légèrement inclinées. Les auteurs s'attendent donc à ce que les résultats soient différents et se demandent à quel point les deux critères explicités ci-dessus peuvent s'appliquer. Le but des simulations à une planète est de mettre à l'épreuve a_c dans un contexte très similaire à celui où elle a été développée pour la valider. a_c est ensuite testée dans un contexte plus général avec deux planètes. Le critère de Hill n'est bien sur étudié que dans les simulations à deux planètes, où les auteurs cherchent à voir si les perturbations dues à la binaire impactent la distance minimale nécessaire entre deux planètes pour éviter les rencontres proches.

Pour répondre à ces questions, ils effectuent plusieurs batteries de 5×10^5 simulations intégrées pendant 10^7 ans, pour des systèmes binaires à une planète et à deux planètes. Les orbites des planètes sont toujours de type S. Les principaux résultats obtenus dans [1] sont décrits à la section suivante.

3.2 Résultats

Dans cette section, nous allons analyser les principales figures de l'article de référence [1]. Nous commencerons par les résultats à une planète, où seule a_c est testée. Nous parlerons par la suite des simulations à deux planètes, où a_c et le critère de Hill sont étudiés.

3.2.1 Simulations à une planète

Les figures 3.1, 3.2 et 3.3 sont associées aux systèmes binaires à une planète dont les conditions initiales sont reprises dans les tables 3.1, 3.2 et 3.3 respectivement. Les angles ω, Ω et M seront tous pris uniformément entre 0 et 360° pour tous les corps. La notation "$rand(h, k)$" signifie que la valeur est prise aléatoirement selon une loi uniforme $U \sim unif([h, k])$. Avant d'analyser les figures, expliquons les notations utilisées par les auteurs. Chaque point rouge représente une simulation avec en abscisse le demi-grand axe initial de la planète et en ordonnée c_s, la sortie de la FMA. Pour rappel, plus la valeur c_s est grande, plus le système est chaotique. Les systèmes dont la FMA renvoie $c_s \leq -6$ sont considérés comme réguliers. La ligne verticale en traits noirs indique la limite empirique a_c à partir de laquelle il n'y aurait plus de système stable dans un problème à trois corps restreint elliptique et coplanaire. Les traits verts indiquent différentes résonances en moyen mouvement entre la planète et le compagnon binaire. Les carrés bleus et ronds jaunes indiquent des exemples de systèmes stables à long et à court terme respectivement.

Dans la figure 3.1, nous voyons le profil de stabilité de planètes géantes pour un compagnon binaire sur une orbite circulaire à 25 UA. Nous voyons qu'une grande majorité des systèmes sont réguliers entre 3 et 8 UA bien que la limite empirique soit de $a_c \approx 6.9$. Nous voyons que les systèmes proche de a_c deviennent plus chaotiques proche. Entre 9.5 et 11 UA, bien au-delà de la limite a_c, nous voyons que certains systèmes ont $c_s < -6$ et sont donc réguliers. La région entre 8 et 9.5 UA n'a aucun point. Nous verrons dans nos simulations que cette région est si chaotique que toutes les planètes en sont éjectées. Pour la suite de l'analyse des profils de stabilité de l'article de référence, nous supposons

Corps	a (UA)	e	I (°)	m
Planète	rand(3,12)	10^{-4}	rand(0,5)	1 $m_{Jupiter}$
Compagnon	25	0	0	1 $m_{\odot}$

TABLE 3.1 – Paramètres de la figure 3.1.

Corps	a (UA)	e	I (°)	m
Planète	rand(3,4.5)	10^{-4}	rand(0,5)	1 $m_{Jupiter}$
Compagnon	25	0.4	0	1 $m_{\odot}$

TABLE 3.2 – Paramètres de la figure 3.2.

Corps	a (UA)	e	I (°)	m
Planète	rand(3,9)	10^{-4}	rand(0,5)	1 $m_{Jupiter}$
Compagnon	50	0.4	0	1 $m_{\odot}$

TABLE 3.3 – Paramètres de la figure 3.3.

Corps	a (UA)	e	I (°)	m
Planète 1	3	10^{-4}	rand(0,5)	1 $m_{Jupiter}$
Planète 2	rand(3,16)	10^{-4}	rand(0,5)	1 $m_{Jupiter}$
Compagnon	50	0	0	1 $m_{\odot}$

TABLE 3.4 – Paramètres de la figure 3.4.

Corps	a (UA)	e	I (°)	m
Planète 1	3	10^{-4}	rand(0,5)	1 $m_{Jupiter}$
Planète 2	rand(3,8.5)	10^{-4}	rand(0,5)	1 $m_{Jupiter}$
Compagnon	50	0.4	0	1 $m_{\odot}$

TABLE 3.5 – Paramètres de la figure 3.5.

Corps	a (UA)	e	I (°)	m
Planète 1	3	10^{-4}	rand(0,5)	1 $m_{Jupiter}$
Planète 2	rand(3,17)	10^{-4}	rand(0,5)	1 $m_{Jupiter}$
Compagnon	100	0.4	0	1 $m_{\odot}$

TABLE 3.6 – Paramètres de la figure 3.6.

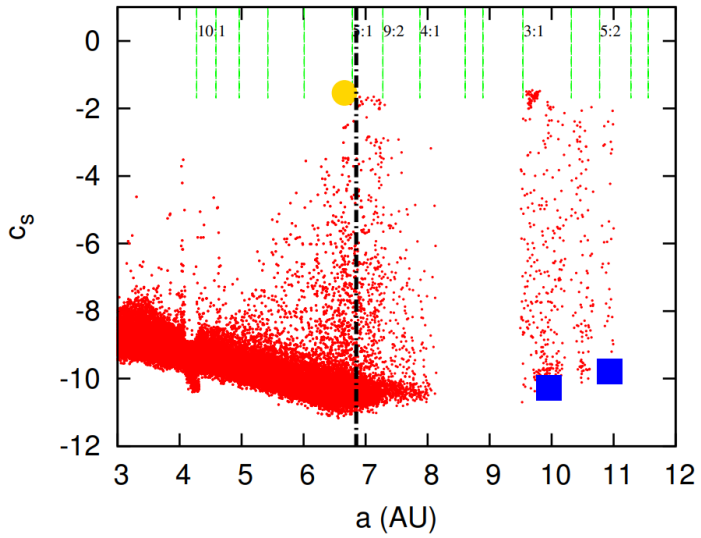


FIGURE 3.1 – Figure 1 de [1], associée à la table 3.1. Les points rouges représentent la valeur de la FMA, c_s, de chaque simulation. La valeur critique a_c est indiquée par la ligne verticale noire. Les traits pointillés verts indiquent les résonances en moyen mouvement entre la planète et la binaire. Les carrés bleus sont deux systèmes stables au-delà de la limite de stabilité ; le point jaune indique un système irrégulier avant a_c.

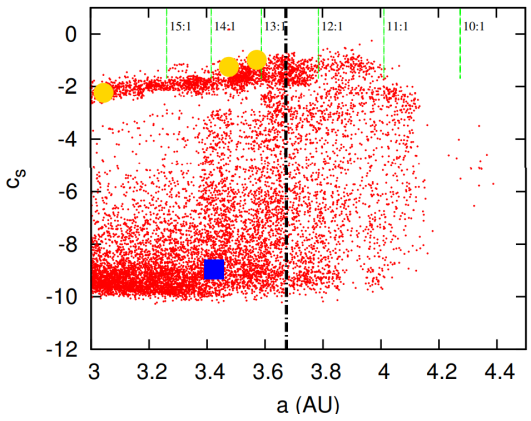


FIGURE 3.2 – Figure 3 de [1], associée à la table 3.2. Toutes les indications ont la même signification qu'à la figure 3.1.

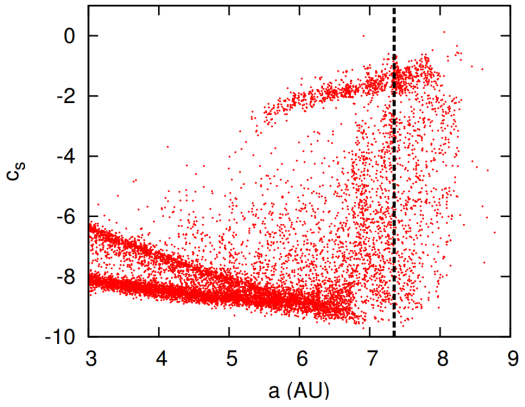


FIGURE 3.3 – Figure 6 de [1], associée à la table 3.3. Toutes les indications ont la même signification qu'à la figure 3.1.

qu'une zone de la figure sans valeur de c_s correspond à une zone où au moins une des planètes est systématiquement éjectée.

Avec cette première simulation, nous voyons déjà que a_c n'est pas une limite précise en dehors du cadre du problème des trois corps restreint. Selon les auteurs de [1], puisque la formule empirique a_c a été développée dans [26] à une époque avec une puissance de calcul moindre, il se peut que les quelques systèmes stables entre 9.5 et 11 UA sont passés entre les mailles du filet. Selon nous, il faut aussi prendre en compte que la limite a_c a été développée pour des planètes sans masse sur des orbites non inclinées.

La figure 3.2 est associée à un compagnon stellaire sur une trajectoire excentrique ($e_B = 0.4$) de même demi-grand axe que précédemment. Le profil de stabilité est fortement affecté : les systèmes sont généralement plus chaotiques que précédemment. Sur la figure 3.1, l'écrasante majorité des systèmes avaient un $c_s < -6$. Sur la figure 3.2, une bande de simulations irrégulières, où $c_s > -2$, apparaît dès $a = 3$ UA. De plus, une grande partie des simulations se retrouvent dispersés entre ces deux valeurs de c_s. Constatons aussi qu'a_c n'est pas un bon indicateur de la régularité des systèmes. Dans la figure précédente, a_c donnait une idée de la valeur du c_s : avant a_c les systèmes étaient réguliers, autour d'a_c les systèmes sont soit réguliers soit irréguliers et après a_c les systèmes voyaient généralement leur planète être éjectée. Ici, la régularité des orbites est moins en phase avec la valeur de a_c, à en juger par le nombre d'évolutions chaotiques visibles pour des valeurs inférieures à a_c.

Sur la figure 3.3 est associée à un compagnon stellaire excentrique et plus éloigné qu'avant ($a_B = 50$ UA, $e_B = 0.4$). Nous remarquons deux bandes de systèmes réguliers avant a_c. Nous observons également une bande de systèmes irréguliers autour d'a_c et un nuage de points de régularité variable dépassant la formule empirique. Bien que la binaire soit deux fois plus loin que dans la première classe de simulations, plus d'orbites sont instables à cause de sa grande excentricité. Encore une fois, $a_c = 7.3$ UA n'est pas un bon indicateur de la régularité : certains systèmes sont très irréguliers dès 5.5 UA et certains systèmes sont encore réguliers et stables en 8 UA. L'erreur commise par a_c sur la stabilité est de l'ordre de 10%.

L'étude de ces figures nous permet de confirmer la conclusion des auteurs de [1] : la formule empirique a_c de [26] n'est pas représentative du demi-grand axe à partir duquel la stabilité est impossible lorsque la planète est massive et sur une orbite inclinée. Comme dit plus haut, nous violons les hypothèses de la formule. Il est donc attendu que la prédiction puisse être mauvaise. Sur base du profil à une planète, nous pouvons être pessimistes sur la précision de a_c lorsqu'une seconde planète massive sur une orbite inclinée est ajoutée.

3.2.2 Simulations à deux planètes

Les figures 3.4, 3.5 et 3.6 sont associées aux systèmes composés de deux planètes et d'un compagnon stellaire dont les conditions initiales sont reprises respectivement dans les tables 3.4, 3.5 et 3.6. Une nouvelle notation est introduite : les traits verticaux bleus indiquent des résonances en moyen mouvement entre les deux planètes. Rappelons que les traits verts indiquent les résonances entre la planète externe et la binaire.

La figure 3.4 représente le premier profil de stabilité à deux planètes avec un compagnon stellaire de paramètres $a_B = 50$ UA et $e_B = 0$. La planète interne est située à 3 UA. Nous distinguons de nombreuses zones différentes dans cette figure. Avant $a_2 = 4 \approx a_{2,3:2} = 3.93$ UA, une zone ne contenant pas de système est clairement visible car le critère de Hill n'est pas respecté, ce qui entraîne collision et éjections. Entre 4 et 10 UA,

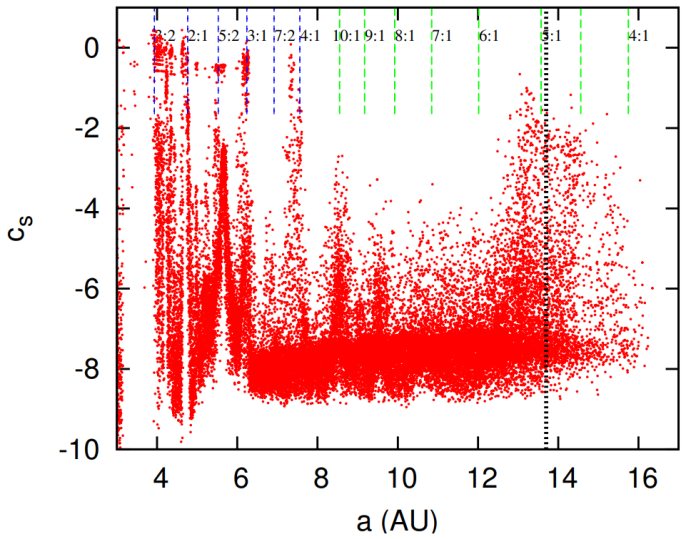


FIGURE 3.4 – Figure 7 de [1], associée à la table 3.4. L'axe horizontal indique le demi-grand axe initial de la planète externe. Les traits pointillés verts indiquent les résonances en moyen mouvement entre la planète externe et la binaire. Les traits pointillés bleus indiquent les résonances en moyen mouvement entre les planètes. Les carrés bleus sont deux systèmes stables au-delà de la limite de stabilité ; le point jaune indique un système irrégulier avant a_c.

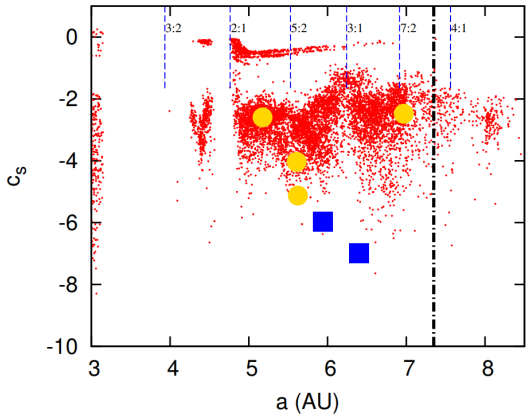


FIGURE 3.5 – Figure 9 de [1], associée à la table 3.5. Toutes les indications ont la même signification qu'à la figure 3.4.

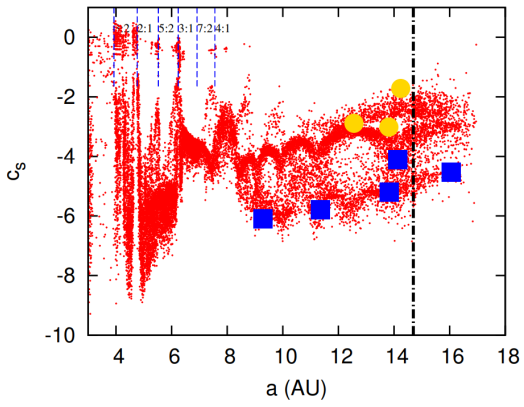


FIGURE 3.6 – Figure 10 de [1], associée à la table 3.6. Toutes les indications ont la même signification qu'à la figure 3.4.

le c_s varie fortement autour des résonances. Nous verrons dans notre analyse dynamique à la section 4.4 l'impact sur la stabilité des différentes résonances. Pour l'instant, remarquons simplement qu'elles sont clairement identifiables sur le profil de stabilité. Après 10 UA, nous revenons à une situation analogue au profil à une planète. c_s est souvent inférieur à -6 avant a_c et variable autour d'a_c. Il semble aussi y avoir moins de systèmes pour des valeurs supérieures à a_c que dans le reste du graphe. Ceci est dû aux valeurs de c_s ayant divergé, comme entre 3.1 et 4 UA, en raison de l'influence de la binaire. Les auteurs de l'article de référence concluent sur base de ce graphe que la planète interne en $a_1 = 3$ UA a peu d'impact sur la stabilité autour d'a_c, ce que nous confirmerons également au chapitre 4.

Les deux dernières figures reprises de l'article de référence considère une orbite excentrique du compagnon stellaire. La figure 3.5 correspond aux simulations avec un compagnon en $a_B = 50$ UA et $e_B = 0.4$. Dans la figure précédente, les planètes étaient toutes éjectées jusqu'en $a_2 \approx 2\sqrt{3}r_{Hill,mutuel}$, comme le prédit le critère de Hill. Ici, les planètes sont systématiquement éjectées jusqu'à $a_2 \approx a_{2,2:1} > 2\sqrt{3}r_{Hill,mutuel}$, excepté pour un îlot de systèmes chaotiques entre les résonances en moyen mouvement entre planètes 3:2 et 2:1. Après la résonance 2:1 entre planètes, un plus grand nombre de systèmes sans éjections apparaissent. Par contre, avec l'exception de $a_2 \approx a_1 = 3$ UA (corps co-orbitaux), seuls de très rares systèmes réguliers ($c_s < -6$) existent dans cette figure. De plus, certains de ces systèmes se situent au-delà de la formule a_c. Elle est donc une fois encore peu précise.

La figure 3.6 a son compagnon stellaire décrivant une ellipse où $a_B = 100$ UA et $e_B = 0$. Les comportements dans la figure sont proches de ceux de la figure 3.4. D'abord, avant $a_{2,3:2} \approx 2\sqrt{3}r_{Hill,mutuel}$, l'indice de diffusion diverge. Ensuite, entre 4 et 7 UA, le c_s varie à cause des résonances en moyen mouvement entre planètes. Finalement, après 7 UA, les systèmes sont quasiment tous classifiés comme chaotiques. Avec l'exception de a_2 proche d'une résonance entre planètes et en $a_2 \approx a_1 = 3$ UA, tous les systèmes sont chaotiques selon la FMA. $a_c = 14.7$ UA ne donne aucune information sur la limite de stabilité. Sur base des trois figures précédentes, nous voyons que a_c reste imprécise sur la limite de stabilité lorsqu'une deuxième planète massive est ajoutée.

3.3 Résultats et conclusions

Sur base des simulations dans leur article, les auteurs de [1] concluent que la formule de Holman et Wiegert sur la limite empirique de la stabilité dans le problème à 3 corps elliptique a_c n'est pas adaptée à l'étude de la stabilité des systèmes planétaires au sein d'étoiles binaires à une ou deux planètes. Des comportements complexes tels que les résonances peuvent créer des îlots de stabilité au-delà de la limite. Dans les pires cas tels qu'à la figure 3.5, la limite ne donne pas d'information sur le profil de stabilité. En guise de conclusion, Marzari et Gallina conseillent d'être prudent lors de l'utilisation d'a_c : la superposition de résonances en moyen mouvement avec des résonances séculaires peuvent mener à des orbites chaotiques endéans a_c et à de la stabilité au-delà.

Nous voulons nuancer leur conclusion sur la formule a_c. Nous sommes d'accord que la limite a_c n'est pas un bon indicateur de la régularité des systèmes ($c_s < -6$ ou $c_s \geq -6$). La formule est par contre un indicateur correct pour les évènements chaotiques tels que les éjections planétaires. Dans la figure 3.1, par exemple, le nombre de points rouges diminuent après $a_c \approx 6.9$ UA jusqu'à ce qu'il n'y ait plus de données à partir de $a_1 \approx 8$ UA. Comme le confirmera notre analyse, cette diminution correspond à la divergence de c_s, c'est-à-dire à l'éjection de la planète. La formule est donc imprécise mais pas inutile.

Grâce à leurs simulations à deux planètes, les auteurs confirment que le critère de Hill pour la stabilité de systèmes planétaires à deux planètes est également valide pour des systèmes planétaires au sein d'étoiles binaires.

Dans le chapitre suivant, nous allons nous concentrer sur la reproduction des figures 3.1 et 3.4, respectivement à une et deux planètes, avec un compagnon proche sur une orbite circulaire. L'analyse de cette première figure va nous permettre de confirmer notre hypothèse sur l'éjection des planètes lors de la divergence du c_s. Nous prendrons soin d'expliquer l'apparition de systèmes réguliers ou chaotiques au-delà de la limite. Nous étudierons également le comportement des systèmes réguliers endéans la limite a_c. L'étude à une planète servira de point de comparaison pour l'étude à deux planètes. Dans celle-ci, nous étudierons plus particulièrement le critère de Hill et les résonances en moyen mouvement entre planètes ainsi que leur impact sur la stabilité du système.

Chapitre 4

Étude dynamique des profils de stabilité

Le but de ce chapitre est de reproduire deux des figures de l'article de référence, à savoir les figures 3.1 et 3.4 décrites au chapitre précédent, et analyser les dynamiques sous-jacentes. Nous allons brièvement introduire à la section 4.1 l'intégrateur REBOUND utilisé. L'implémentation du MEGNO comme détecteur de chaos est décrit à la section 4.2. La section 4.3 analysera dynamiquement le profil de stabilité à une planète, tandis que celui à deux planètes fera l'objet de la section 4.4.

4.1 Choix de l'intégrateur

Cette première section décrit la méthode utilisée pour reproduire les figures. Pour chacune des figures, nous avons intégré 10^4 systèmes dont les conditions initiales sont données aux tables 3.1 et 3.4, avec l'intégrateur ias15 précodé dans REBOUND [1], une librairie open-source d'intégration du problème des N corps [29] [30] [31]. REBOUND possède deux intégrateurs avec implémentation du MEGNO (moyen) : ias15 et WHFast. Discutons brièvement de ces intégrateurs pour argumenter notre choix.

WHFast est un intégrateur symplectique introduit dans [30] pour la résolution du problème des N corps. Il est nommé ainsi car il implémente de manière peu coûteuse (Fast) le schéma d'intégration de Wisdom-Holman (WH) [32]. Les intégrateurs symplectiques sont souvent utilisés pour les simulations numériques en mécanique céleste. Grâce à leur construction sur base de l'hamiltonien du système, la croissance de l'erreur en énergie est limitée. Elle ne croît donc pas linéairement avec le temps comme elle le ferait pour un intégrateur classique comme RK4. Pour des systèmes où les intégrations doivent être réalisées sur de longues périodes de temps, tels que ceux en mécanique céleste, cette garantie sur l'erreur en énergie est désirable. WHFast en particulier est optimal, au sens où l'erreur grandit avec le nombre h de pas selon $\sqrt{h}$ pour un pas de temps τ assez petit et ce uniquement à cause des erreurs en arithmétique finie.

Considérons l'hamiltonien du problème des N corps

$$H(p,q) = \sum_{i=1}^{N} \frac{p_i^2}{2m_i} - \sum_{i=1}^{N} \sum_{j=i+1}^{N} \frac{Gm_i m_j}{|r_i - r_j|},\ p,q \in \mathbb{R}^N, \tag{4.1}$$

où les q_i sont les coordonnées cartésiennes et p_i les moments. Pour la construction de WHFast, l'hamiltonien du problème des N corps est réécrit comme la somme de deux

1. La documentation de REBOUND est disponible sur `https://rebound.readthedocs.io/en/latest/`.

hamiltoniens :

$$H = H_{Kepler} + H_{interaction}.$$

Dans la source [30], la séparation de l'hamiltonien est obtenue en utilisant un mélange de coordonnées cartésiennes et de coordonnées de Jacobi. Les coordonnées de Jacobi sont notées $(p', q') \in \mathbb{R}^{2N}$ et expriment la position cartésienne d'un corps en prenant comme origine le centre de masse des corps précédents. Deux variantes des masses sont introduites : $M_i = \sum_{j=1}^{i} m_j$, la masse totale des i premiers corps, et $m'_i = m_i \frac{M_{i-1}}{M_i}$. L'évolution du corps i sous

$$H_{Kepler}(p', q') = \sum_{i=1}^{N} \frac{p'_i}{2m'_i} - \frac{Gm'_i M_i}{|r'_i|}$$

est celle du problème des deux corps entre le corps i et un corps de masse M_{i-1} placé au centre de masse des $i-1$ corps précédents. La solution analytique du problème des deux corps est connue et l'intégration se fait donc sans erreur d'approximation. Il ne reste que l'évolution sous

$$H_{interaction}(p', q') = \sum_{i=2}^{N} \frac{Gm'_i M_i}{|r'_i|} - \sum_{i=1}^{N} \sum_{j=i+1}^{N} \frac{Gm_i m_j}{|r_i - r_j|}$$

à simuler numériquement. Pour le corps i, l'évolution sous $H_{interaction}$ représente la perturbation due aux interactions avec les $N - i$ corps restants.

L'intégrateur est implémenté avec des correcteurs symplectiques jusqu'à ordre 11. Pour un ordre de correcteur n donné, l'erreur de l'intégrateur WHFast est de l'ordre de $\mathcal{O}(\tau^n \epsilon) + \mathcal{O}(\epsilon^2 \tau^2)$, où ϵ est donné par

$$\epsilon = \left| \frac{H_{interaction}}{H_{Kepler}} \right|.$$

Cette quantité est petite dans le cas d'un corps central beaucoup plus massif que les autres. Prenons l'exemple d'un système avec le Soleil orbité par Jupiter et un astéroïde : $m_A = 1 m_\odot,\ m_1 = 9.54 \times 10^{-4} m_\odot,\ m_2 = 10^{-10} m_\odot$. Le système est dominé par la partie liée à H_{Kepler} (orbites képlériennes). La perturbation la plus grande, due à Jupiter, est ~ 1000 fois plus petite et nous obtenons alors $\epsilon \approx 10^{-3}$. Un tel ϵ permet à WHFast d'avoir une erreur petite. Dans ce mémoire, nous travaillons sur des binaires proches où $m_A = m_B = 1 m_\odot$. La perturbation la plus grande est donc de l'ordre de l'interaction képlerienne, donc $\epsilon \approx 1$. L'ordre dominant dans l'erreur de WHFast est alors $\mathcal{O}(\tau^2)$: l'intégrateur est d'ordre 2 seulement.

De surcroît, l'intégrateur WHFast est à pas fixe. D'une part, ceci limite sa vitesse pour les évolutions stables : le pas ne peut pas augmenter pour gagner en temps de calcul. D'autre part, ceci limite sa précision pour les évolutions chaotiques : les rencontres proches ne peuvent pas être gérées par la diminution du pas. Il faut donc prendre un pas petit pour toutes les intégrations, ce qui augmente le temps de calcul global. Un gain significatif en temps de calcul est par contre obtenu grâce à l'implémentation du MEGNO directement dans le schéma d'intégration de WHFast. C'est également le cas pour ias15.

L'autre intégrateur disponible est ias15 (implicit integrator with adaptative time stepping, 15th-order), un intégrateur implicite à pas variable d'ordre 15 dont la construction est explicitée dans [31]. C'est un schéma non-symplectique à pas variable dont l'implémentation met tout en place pour minimiser les erreurs en énergie à chaque pas. Son implémentation est plus compliquée que celle de WHFast et n'est pas explorée dans ce mémoire. Comme WHFast, cet intégrateur est optimal : l'erreur grandit selon $\sqrt{h}$. N'étant

pas symplectique, il n'hérite pas du problème de précision lié à une grande valeur de ϵ et convient donc mieux pour les systèmes binaires. Étant à pas variable, il gère mieux que WHFast les rencontres proches entre les corps. Pour toutes ces raisons, c'est cet intégrateur que nous avons préféré. Il a cependant comme défaut d'être 10 à 40 fois plus lent que WHFast pour les simulations que nous avons effectuées. Cependant, les simulations étant très courtes, gérer avec précision les rencontres proches nous a paru plus important.

Lors de ce mémoire, nous avons également utilisé le code REBOUND dans un autre contexte, afin d'analyser la stabilité des systèmes planétaires formés dans un disque de gaz autour de binaires éloignées. Les résultats de cette analyse sont décrits dans l'article [33] accepté avec révisions mineures par Astronomy & Astrophysics. L'article et en particulier la section 6 reprenant nos simulations sont disponibles dans l'Annexe A. Dans les simulations pour cet article, nous avons préféré WHFast à ias15 pour trois raisons. Premièrement, le temps d'intégration nécessaire à la convergence du MEGNO était beaucoup plus long dans l'article. Le gain de temps proposé par WHFast devenait un atout majeur pour que la durée des simulations reste raisonnable. Deuxièmement, les binaires dans cet article sont des binaires éloignées. La perturbation qu'elles engendrent est dès lors plus petite et donc le rapport ϵ aussi. Troisièmement, gérer les rencontres proches entre planètes n'était pas nécessaire dans l'article. Par conséquent, dans les simulations pour cet article, nous avons profité de la vitesse et de la précision de WHFast.

4.2 Choix du détecteur de chaos

Pour notre analyse de la stabilité, nous utiliserons le MEGNO plutôt que la FMA choisie dans l'article de référence. Ces deux détecteurs ont deux interprétations très différentes l'une de l'autre : la FMA donne une valeur selon une échelle logarithmique alors que le MEGNO doit être interprété selon trois cas. L'adéquation entre nos profils de stabilité et les leurs ne sera donc pas triviale.

Suite aux remarques sur la convergence du MEGNO formulées à la sous-section 2.2.2, le temps d'intégration choisi pour les systèmes à une planète est 40.000 ans et celui pour les systèmes à deux planètes 80.000 ans. Ces valeurs ont été confirmées en testant des temps plus longs dans les zones très chaotiques du profil de stabilité afin de vérifier si certaines orbites d'apparence régulières se révélaient être chaotiques. Précisons que de nombreuses simulations s'arrêtent avant d'atteindre le temps final d'intégration. Lorsqu'une éjection ou collision est observée lors de la simulation, la valeur du MEGNO n'est pas nécessaire pour conclure sur la chaoticité du système. La simulation se termine donc automatiquement dans notre code lorsqu'il y a un évènement chaotique. Aucune collision n'a eu lieu dans nos simulations car le MEGNO diverge lors de rencontres proches menant à une collision. La simulation s'arrête également lorsque l'orbite d'au moins une des planètes devient trop excentrique : $e > 0.99$. D'une part, si l'excentricité a atteint une telle valeur, il est probable que la planète va être éjectée d'ici peu. D'autre part, le code ne prend pas en compte les effets des marées avec l'étoile centrale et ne gère donc pas correctement des valeurs aussi élevées de l'excentricité, pour lesquelles le corps s'approchera de très près de l'étoile centrale. Notons que REBOUNDx [2], une extension de la librairie REBOUND avec des modules supplémentaires, permet l'ajout des marées dans le schéma d'intégration d'ias15 comme décrit dans [34].

2. La documentation de REBOUNDx est disponible sur `https://reboundx.readthedocs.io/en/latest/` .

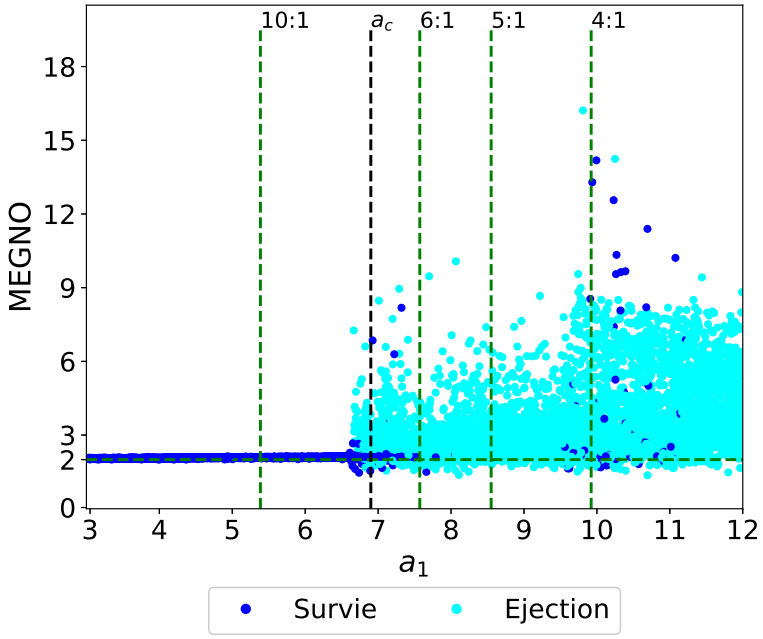


FIGURE 4.1 – Reproduction de la figure 3.1 avec le MEGNO comme indicateur de chaos. L'axe horizontal indique le demi-grand axe initial de la planète. Les traits pointillés verts indiquent les résonances en moyen mouvement entre la planète et la binaire. Les points bleus indiquent des simulations ayant atteint le temps final d'intégration sans collision ou éjection ; les points cyans indiquent une éjection de la planète.

Pour indiquer les différents comportements dans les simulations, les figures réalisées avec MEGNO comportent un code couleur, maintenu à travers toutes les figures liées au MEGNO. Le bleu indique que la simulation a atteint le temps final d'intégration sans souci : la régularité s'interprète sur base des valeurs du MEGNO. Le rose indique une simulation où le MEGNO a atteint la borne supérieure de 20 ou a divergé. Le cyan indique une éjection de la planète. De plus, puisque nous sommes particulièrement intéressés par l'impact des résonances en moyen mouvement avec la binaire, nous traçons sur les graphiques ces résonances avec des traits verticaux verts. Pour comparer avec les figures de l'article de référence, nous indiquons aussi la limite empirique a_c. Dans l'article de référence, pour chaque système, les auteurs effectuent 5×10^5 simulations. Nos figures reproduisent les mêmes résultats avec seulement 10^4 simulations.

4.3 Profil de stabilité à une planète

Dans cette section, nous allons analyser dynamiquement un profil de stabilité à une planète. Nous allons d'abord étudier à la section 4.3 la stabilité dans son ensemble en mettant en évidence des zones de stabilité distinctes. Nous allons ensuite analyser séparément chaque zone à la sous-section 4.3.2.

4.3.1 Stabilité dans son ensemble

Notre reproduction de la figure 3.1 issue de [1] à l'aide du détecteur de chaos MEGNO se trouve à la figure 4.1. Comparons les deux profils de stabilité pour montrer que la

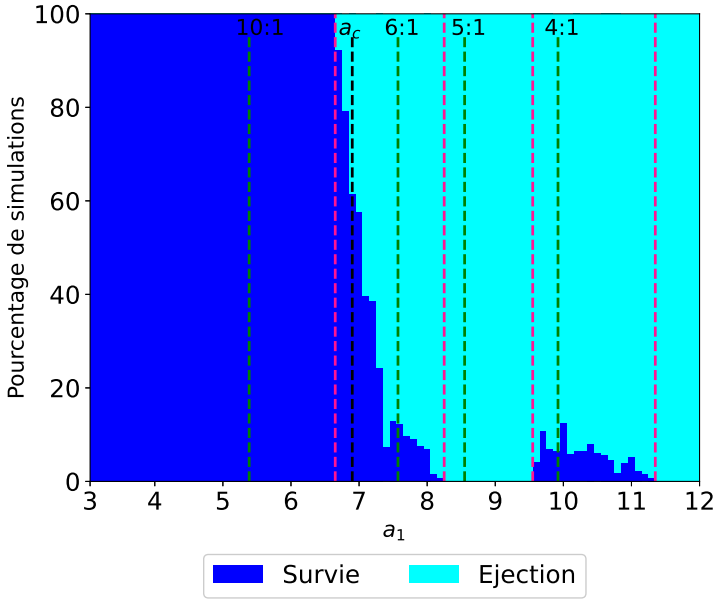


FIGURE 4.2 – Histogramme superposé associé à la figure 4.1 affichant le pourcentage de système avec éjection planétaire en fonction du demi-grand axe initial de la planète. Le code couleur est le même qu'à la figure 4.1. Les traits verticaux roses marquent les différentes zones du profil de stabilité.

reproduction colle parfaitement avec les résultats de [1]. Rappelons qu'ils s'agit du cas d'un système binaire avec une seule planète. Outre la valeur du MEGNO, la figure 4.1 renseigne en cyan les systèmes où la planète est éjectée du système. Nous considérons une planète comme éjectée lorsque son excentricité atteint 0.99 ou lorsque son demi-grand axe dépasse a_B. Nous observons avant a_c une zone de systèmes réguliers avec des valeurs du MEGNO proches de 2. Nous voyons l'apparition de valeurs du MEGNO différentes de 2 et de nombreuses éjections autour de a_c, entre 6.7 et 8.3 UA. Nous voyons ensuite une zone totalement chaotique entre 8.3 et 9.6 UA, correspondant à la zone sans valeur dans leur figure. Dans cette zone, seulement des éjections sont observées. Ceci confirme notre hypothèse sur l'absence de données dans les figures de l'article de référence correspondant à des systèmes tellement chaotiques que c_s est trop grand ou mal défini. Nous voyons enfin une zone très chaotique au-delà de 9.6 UA où seuls de rares systèmes ne connaissent pas d'éjection planétaires, les valeurs indiquées par MEGNO étant très diverses. Finalement, passé 11.4 UA, plus aucun système ne survit, ce qui correspond à nouveau à l'absence de données dans [1].

Les différentes zones de stabilité décrites précédemment sont mises en évidence grâce aux lignes verticales roses dans la figure 4.2, où l'issue des simulations est indiquée en pourcentage. La table synthétique 4.1 indique les pourcentages de MEGNO pour chaque zone de stabilité. Par la suite, nous allons nommer les systèmes de MEGNO inférieur à 2.1 réguliers, les systèmes de MEGNO entre 2.1 et 3 faiblement chaotique et les systèmes de MEGNO supérieur à 3 chaotiques.

La table 3.1 indique que, dans la première zone, tous les systèmes sont réguliers selon MEGNO. Dans la zone contenant a_c, 73.1% des systèmes subissent une éjection de la planète et seulement 5.3% des systèmes sont réguliers. Nous voyons également que le petit îlot entre 9.6 et 11.4 UA n'a que 0.9% de systèmes réguliers. Aucun système au-delà de 11.4 UA ne survit à l'intégration, en raison de la proximité avec la binaire ($a_B = 25$

MEGNO	<2.1	[2.1 ;3]	>3	Éjection
3<a_1 < 6.7	100%	0%	0%	0%
6.7<a_1 < 8.3	5.3%	21.3%	0.3%	73.1%
8.3<a_1 < 9.6	0%	0%	0%	100%
9.6<a_1 < 11.4	0.9%	3.1%	1.5%	94.5%
11.4<a_1 < 12	0%	0%	0%	100%

TABLE 4.1 – Table affichant en pourcentage les valeurs du MEGNO pour chaque zone de la figure 4.1.

UA).

4.3.2 Stabilité par région

Maintenant que nous avons une vue d'ensemble de la stabilité pour ces simulations, attardons-nous sur des cas particuliers de chaque zone de stabilité. L'analyse dynamique va s'intéresser à montrer que deux systèmes de conditions initiales proches peuvent avoir des comportements distincts. Selon notre étude, la petite inclinaison de la planète n'a aucun impact dans sa dynamique : son évolution n'est donc jamais affichée.

Entre 3 et 6.7 UA

Regardons d'abord des exemples de systèmes réguliers dans la première zone. Ces systèmes sont les moins perturbés par la binaire. Dans cette zone, aucune résonance en moyen mouvement avec la binaire n'a d'impact sur les trajectoires. L'évolution de a_1 et e_1 pour quatre systèmes stables est montrée à la figure 4.3. Pour les quatre systèmes, nous voyons que le demi-grand axe oscille périodiquement autour de sa valeur initiale. L'amplitude de l'oscillation est croissante avec le demi-grand axe initial : plus la planète est proche de la binaire, plus elle est perturbée. Similairement, l'excentricité oscille entre 0 et un maximum croissant avec le demi-grand axe initial. Même le système en $a_1 = 6.27$ dont l'excentricité atteint $e_{1,max} = 0.214$ est régulier au sens du MEGNO vu la périodicité des oscillations.

Entre 6.7 et 8.3 UA

Dans la zone suivante, des systèmes légèrement et fortement chaotiques et avec éjection apparaissent en plus des systèmes réguliers. Étudions séparément ces quatre cas vu leurs dynamiques différentes. A partir de cette région, nous présentons également la longitude du péricentre ϖ et un des angles résonants associé à la résonance en moyen mouvement la plus proche, en plus du demi-grand axe et de l'excentricité. Comme explicité précédemment, pour une résonance $(p+q)$:p, $q+1$ angles résonants sont possibles : nous n'affichons ici qu'un seul angle en libration pour les systèmes en résonance. Dans cette région, l'angle résonant représenté est

$$\theta_{6:1} = \lambda_1 - 6\lambda_B + 5\varpi_1.$$

Remarquons d'abord que les systèmes réguliers, dont un exemple est affiché à la figure 4.4, sont comme ceux de la zone précédente mais avec une perturbation légèrement plus

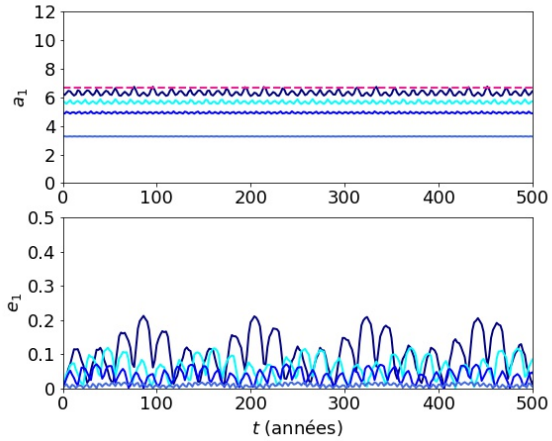


FIGURE 4.3 – Évolution du demi-grand axe et de l'excentricité de quatre systèmes réguliers de la première zone de la figure 4.1. Le trait horizontal rose indique la fin de la première zone.

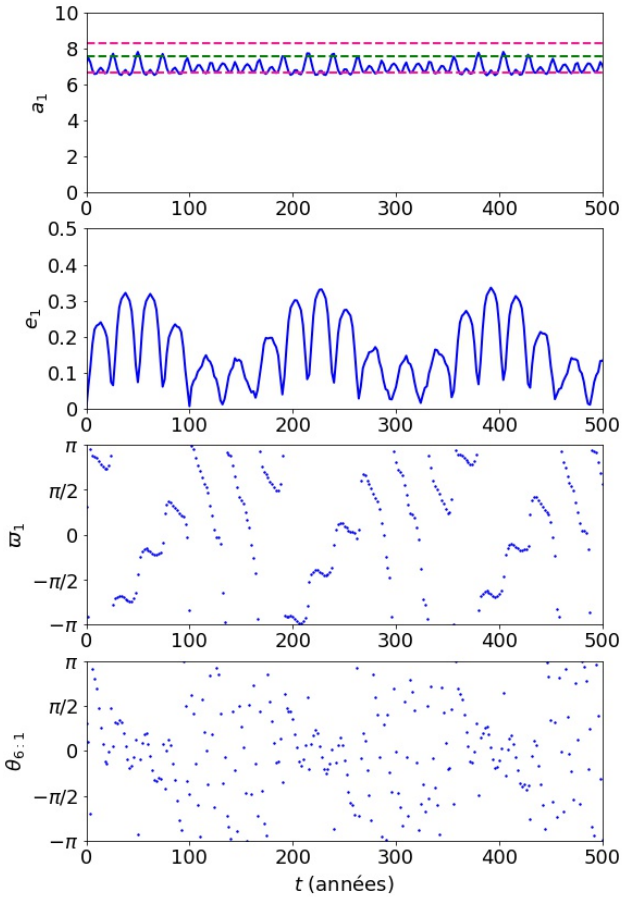


FIGURE 4.4 – Évolution de $(a_1, e_1, \varpi_1, \theta_{6:1})$ d'un système régulier dans la seconde zone de la figure 4.1. Les traits horizontaux roses indiquent 6.9 et 8.3 UA, les limites de la seconde zone.

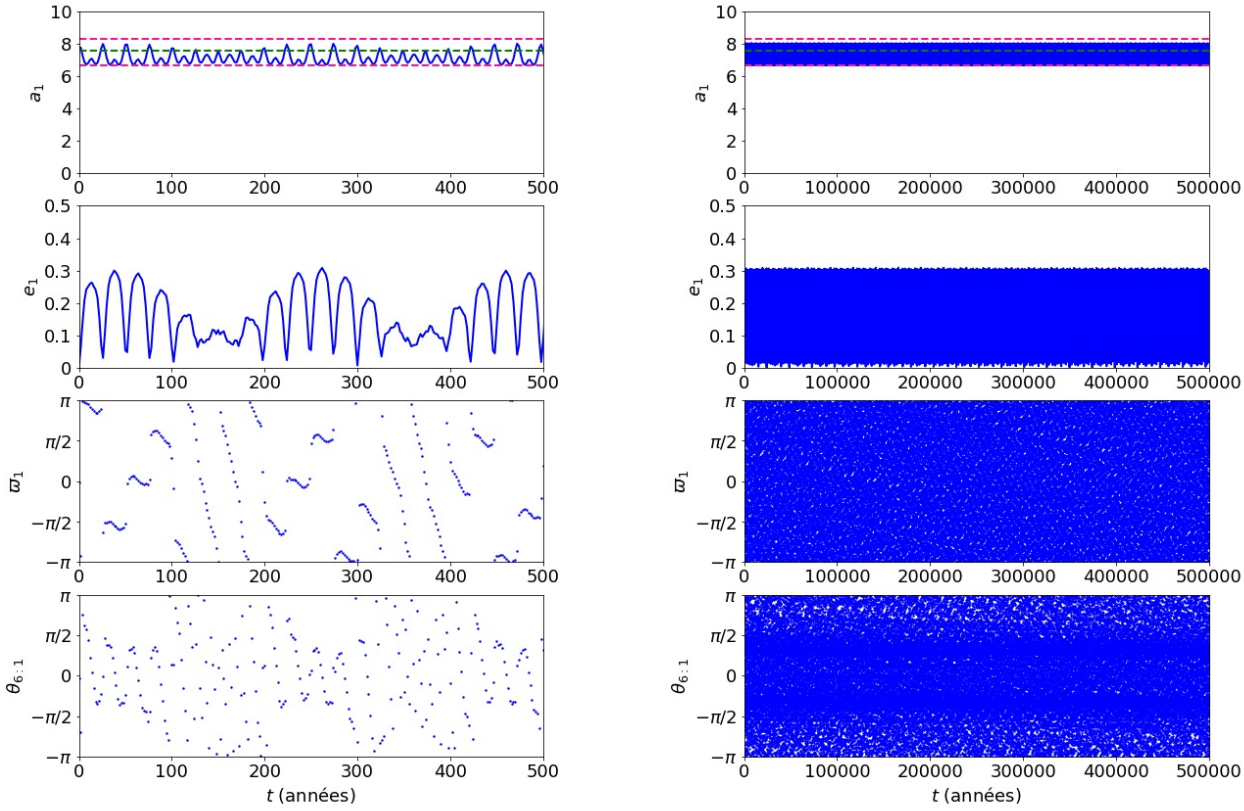


FIGURE 4.5 – Évolution à court terme et à long terme de $(a_1, e_1, \varpi_1, \theta_{6:1})$ pour un système irrégulier dans la seconde zone de la figure 4.1. Les traits horizontaux roses indiquent 6.9 et 8.3 UA, les limites de la seconde zone.

grande. Il est à noter que l'angle résonant oscille entre libration et circulation. Comparons les aux systèmes irréguliers apparus dans cette zone. Il y a exactement quatre systèmes irréguliers ayant survécu à la simulation. Ces systèmes, malgré un demi-grand axe initial différent pour chacun, ont la même dynamique, dont un exemple est affiché à court et à long terme à la figure 4.5. Pour chacun, le demi-grand axe oscille périodiquement entre 6.54 et 8.17 UA et l'excentricité entre 0 et au plus 0.31. Leur demi-grand axe ne dépasse jamais 8.3 UA, la valeur à partir de laquelle tous les systèmes sont éjectés. L'angle résonant libre autour de 0. Nous voyons que la libration n'est pas parfaite, $\theta_{6:1}$ circule par moment, mais les périodes de libration sont plus marquées que dans les systèmes réguliers tels celui à la figure 4.4. L'interaction renforcée entre la planète et la binaire cause l'irrégularité détectée par le MEGNO. Malgré le chaos que la résonance 6:1 génère, elle est stabilisante au sens où les systèmes capturés survivent à la simulation alors que la majorité des systèmes de cette région (73.1%) sont éjectés. Comme l'indique le panel à longue durée de la figure 4.5, le système est irrégulier mais reste borné. La résonance est d'ordre 5 pour une binaire non-excentrique : elle est relativement faible et donc peu de systèmes sont capturés.

Le dernier type de systèmes dans la seconde zone de stabilité voit la planète être éjectée. Trois exemples sont affichés à la figure 4.6. L'éjection a lieu en moins de 200 ans pour tous les systèmes avec éjection. Une éjection est détectée dans le système représenté

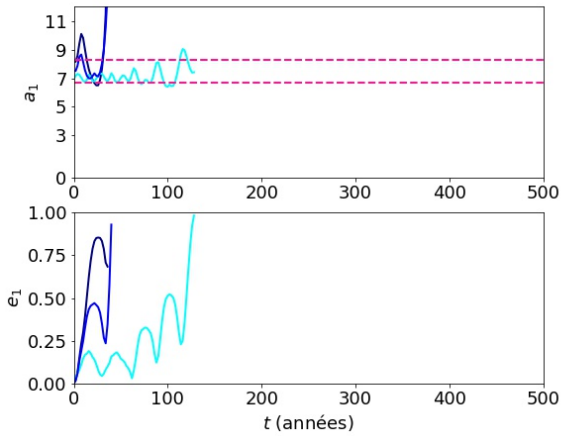


FIGURE 4.6 – Le demi-grand axe et l'excentricité de trois systèmes chaotiques de la seconde zone de la figure 4.1 pour lesquels une éjection planétaire est observée. Les traits horizontaux roses indiquent 6.9 et 8.3 UA, les limites de la seconde zone.

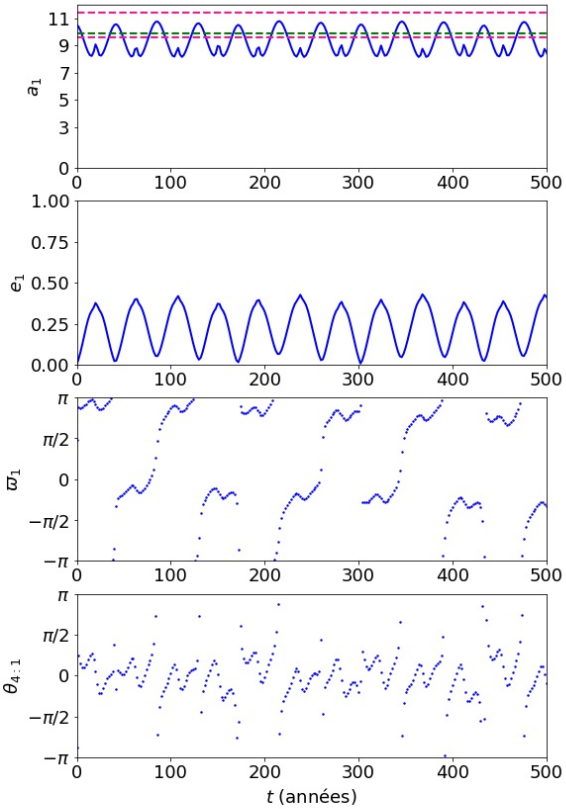


FIGURE 4.7 – Évolution de $(a_1, e_1, \varpi_1, \theta_{4:1})$ de deux systèmes réguliers dans la quatrième zone de la figure 4.1. Les traits horizontaux roses indiquent 9.6 et 11.4 UA, les limites de la quatrième zone.

en cyan car l'excentricité dépasse 1 : l'orbite de la planète devient hyperbolique. Pour les deux autres systèmes de la figure, l'éjection est détectée par le code car le demi-grand axe devient trop grand.

Entre 8.3 et 9.6 UA

La zone de stabilité suivante est celle où tous les systèmes sont éjectés. Aucun exemple supplémentaire de système éjecté n'est donné pour éviter de surcharger ce mémoire : tous les systèmes éjectés sont analogues à ceux de la figure 4.6.

Au-delà de 9.6 UA

Plus intéressante est la quatrième zone de stabilité, où 5.5% des systèmes survivent à la simulation. Les systèmes sans éjection planétaire sont en résonance 4:1 avec la binaire, comme le montre les angles résonants aux figures 4.7 et 4.8. L'angle résonant considéré est toujours

$$\theta_{4:1} = \lambda_1 - 4\lambda_B + 3\varpi_1.$$

Les systèmes réguliers sont périodiques en demi-grand axe et en excentricité. L'angle résonant, à part lors de courtes circulations, est borné. Les systèmes irréguliers se distinguent clairement. Le comportement des orbites alterne entre des périodes de circulation et de libration de l'angle résonant. De plus, l'évolution en excentricité est peu régulière, ce qui laisse présager un comportement plus irrégulier à plus long terme, comme le montre le panel à long terme de la figure 4.8. Après 92,000 années, l'excentricité de la planète dépasse 1 et elle est éjectée.

4.4 Profil de stabilité à deux planètes

Dans cette section, nous allons analyser le profil de stabilité à deux planètes de la figure 4.9. Comme dans la section précédente, nous regardons d'abord la stabilité dans son ensemble puis étudions des cas particuliers. Il est important de garder en tête l'analyse de stabilité faite pour une planète. La deuxième planète peut être vue comme une perturbation ajoutée au cas à une planète. Nous allons montrer que l'interaction entre planètes domine la dynamique lorsque les planètes sont proches tandis que la planète supplémentaire n'a aucun impact lorsqu'elles sont suffisamment séparées.

4.4.1 Stabilité dans son ensemble

Le profil de stabilité pour les systèmes à deux planètes se trouvent à la figure 4.9. Nous présentons une fois de plus un histogramme, à la figure 4.10, des différentes issues de simulations en pourcentage (survie du système, éjection planétaire et divergence du MEGNO) ainsi qu'à la table 4.2, un tableau de pourcentages de systèmes réguliers pour chaque zone de stabilité que nous mettons en évidence dans cette analyse. A première vue, la figure 4.9 reproduit bien le comportement global de la figure 3.4 de [1]. Discutons plus en détail des similarités et des différences entre les deux études. Rappelons que le demi-grand axe de la planète interne est toujours fixé à 3 UA et celui de la planète extérieure varie de 3 à 16 UA.

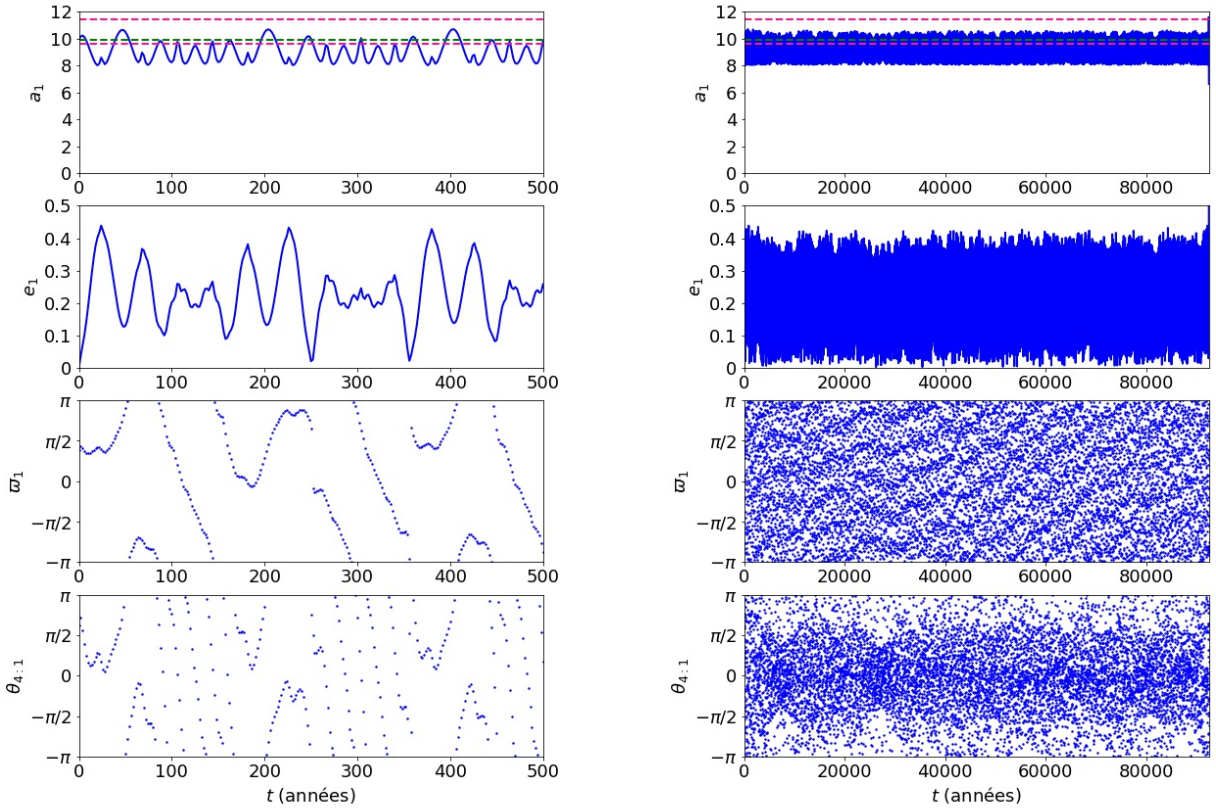


FIGURE 4.8 – Évolution à court et à long terme de $(a_1, e_1, \varpi_1, \theta_{4:1})$ d'un système irrégulier dans la quatrième zone de la figure 4.1. Les traits horizontaux roses indiquent 9.6 et 11.4 UA, les limites de la quatrième zone.

Dans notre figure et la leur, lorsque $a_2 \approx a_1 = 3$ UA, quelques systèmes réguliers sont formés. Après cela, pour $a_2 \in [3.2; 3.9[$ UA, la quasi-totalité des systèmes sont chaotiques, majoritairement des points roses à la figure 4.9, ce qui correspond à des valeurs de MEGNO supérieurs à 20 dans notre étude et à l'absence de données dans l'article [1].

Ensuite, entre 3.9 et 7.8 UA, la stabilité varie très fortement entre les deux figures. Dans l'article [1] de Marzari et Gallina, elle est dominée par les résonances en moyen mouvement entre planètes : les systèmes sont chaotiques autour des résonances et réguliers entre les résonances. Dans nos simulations, ceci est vrai aussi mais la largeur des instabilités générées semble bien plus petite. Par exemple, la résonance 5:2 génère du chaos ($c_s > -6$) entre 5.3 et 6 UA dans leur figure mais seulement entre 5.4 et 5.6 UA dans la nôtre.

Entre 7.8 et 13 UA, notre reproduction diffère également de la figure originale. Dans [1], il y a des pics de valeurs de c_s aux résonances en moyen mouvement avec la binaire. Ces pics de chaoticité sont absents de notre figure. De plus, nos résonances en moyen mouvement avec la binaire sont décalées par rapport aux leurs : la résonance 8:1 est en 10 UA dans [1] et en 12.5 UA dans notre travail. Nous pensons que les conditions initiales indiquées [1] ne sont pas renseignées correctement et que la binaire était située à 40 UA

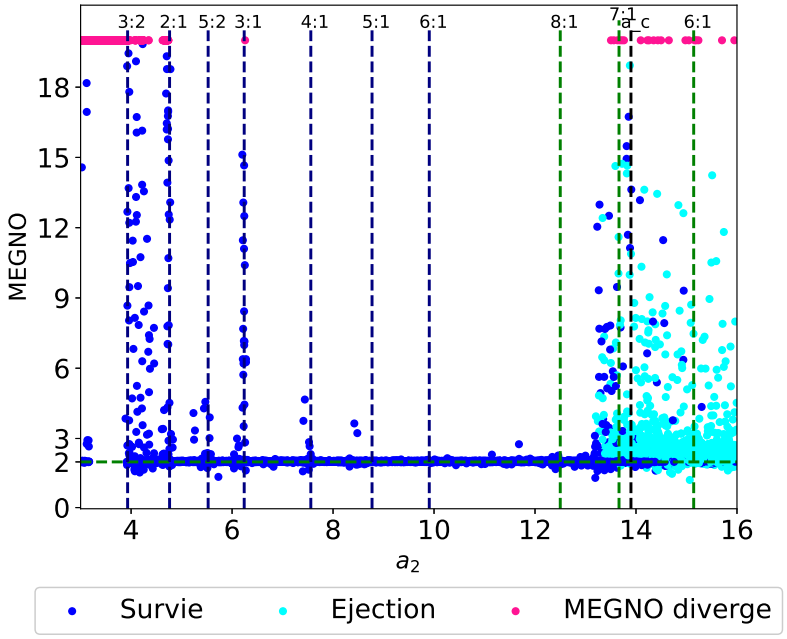


FIGURE 4.9 – Reproduction de la figure 3.4 issue de [1] avec le MEGNO comme indicateur de chaos. L'axe horizontale indique le demi-grand axe initial de la planète externe. Les traits verts et bleus indiquent respectivement les résonances en moyen mouvement entre la planète externe et la binaire et les résonances en moyen mouvement entre les planètes.

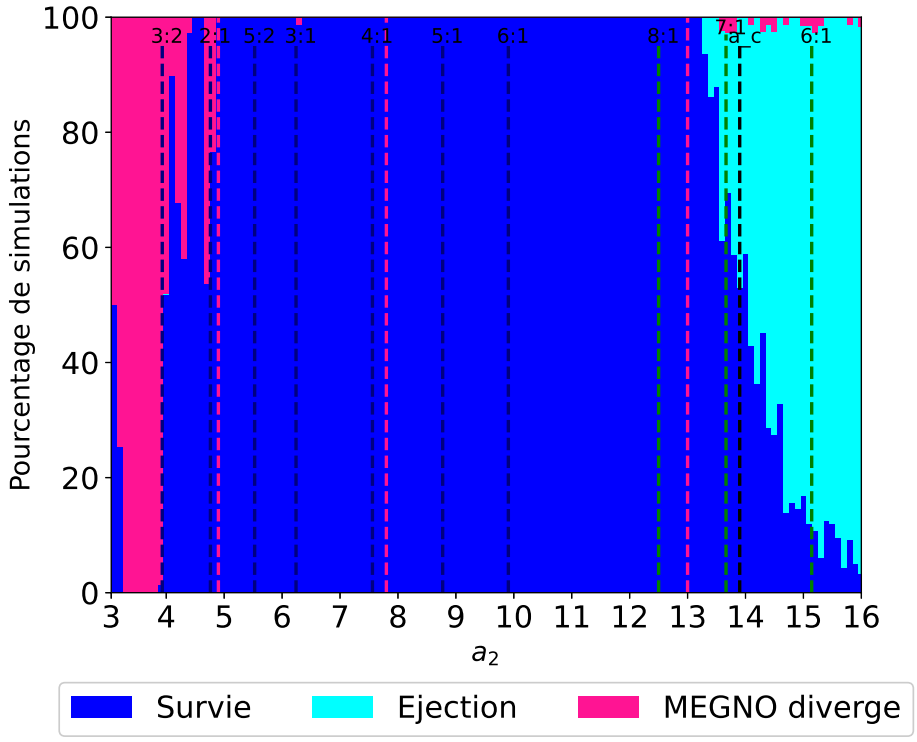


FIGURE 4.10 – Histogramme superposé associé à la figure 4.9 affichant le pourcentage de système avec éjection planétaire en fonction du demi-grand axe initial de la planète externe. Le code couleur est le même qu'à la figure 4.9. Les traits verticaux roses marquent les différentes zones reprises dans la table 4.2.

MEGNO	<2.1	[2.1 ;3]	>3	Chaotique
$3 \leq a_2 < 3.2$	32.9%	2.7%	2.0%	62.4%
$3.2 \leq a_2 < 3.9$	0%	0%	0.2%	99.8%
$3.9 \leq a_2 < 4.9$	64.0%	5.2%	10.8%	20.0%
5:2	96.0%	2.0%	2.0%	0%
3:1	83.2%	3.2%	13.0%	0.6%
4:1	96.7%	2.3%	1.0%	0%
$4.9 \leq a_2 < 13$	99.6%	0.3%	0.1%	0%
$13 \leq . \leq 16$	34.8%	1.8%	2.0%	61.4%

TABLE 4.2 – Table affichant en pourcentage les valeurs du MEGNO pour chaque zone de la figure 4.9. Les valeurs reprises en $4.9 \leq a_2 < 13$ excluent les systèmes autour des résonances 5:2, 3:1 et 4:1. La catégorie *Chaotique* reprend les évènements chaotiques : les MEGNOs ayant divergé (>20) et les éjections planétaires.

(et non 50 UA) dans leurs simulations. En effet, le calcul de $a_{2,8:1}$ permet de vérifier que

$$40 \times \left(\frac{1}{8}\right)^{2/3} = 10 \neq 12.5 = 50 \times \left(\frac{1}{8}\right)^{2/3}.$$

Dans notre figure, étant donné que la binaire est plus éloignée, la zone entre 7.8 et 12 UA est très régulière et ressent peu la perturbation du compagnon binaire. Même la résonance 8:1 avec la binaire, en raison de son ordre élevé, n'a pas d'impact sur la stabilité de la planète externe. Ainsi, à partir de 7.8 UA, le profil à deux planètes correspond qualitativement à celui à une planète : la planète externe est régulière endéans a_c.

Pour le reste de la figure, nos résultats s'accordent avec les leurs, décrits au chapitre 3. Comme dans le cas à une planète, c'est la binaire qui domine la dynamique de la planète externe lorsque $a_2 \geq a_c$.

4.4.2 Stabilité par région

Dans cette sous-section, nous allons analyser des cas représentatifs parmi la batterie de simulations, réalisées afin d'identifier les paramètres menant à des stabilités différentes. Nous afficherons la planète externe en bleu comme dans la section précédente. La planète interne sera indiquée en vert clair.

Entre 3 et 3.9 UA

Nous avons précédemment parlé du critère de Hill pour la séparation minimale entre deux planètes afin d'éviter les rencontres proches. En définissant la constante

$$K = \left(\frac{m_1 + m_2}{3m_\odot}\right)^{1/3},$$

le critère (3.2) se réexprime comme

$$a_2 \geq a_{2,Hill} = a_1 \left(\frac{1 + K/2}{1 - K/2}\right).$$

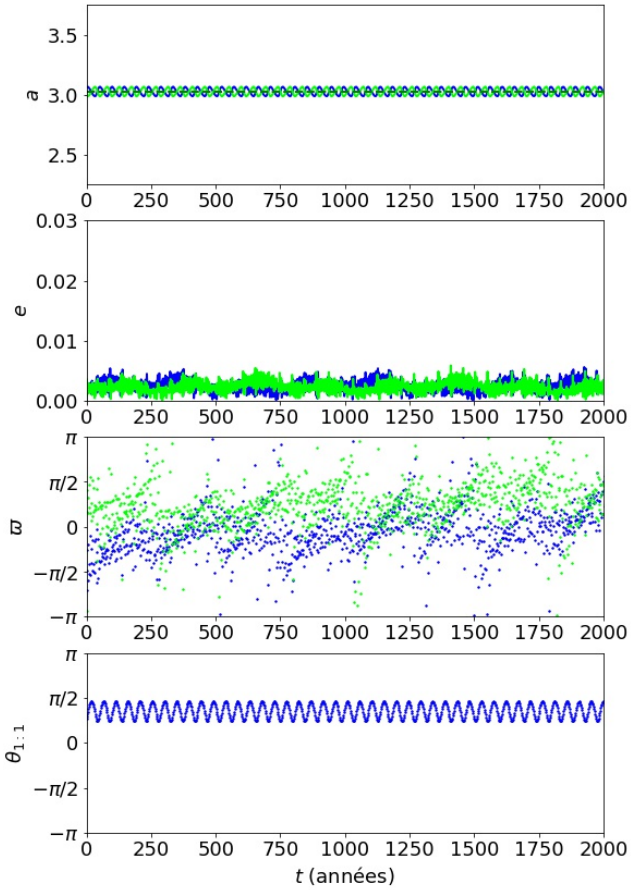


FIGURE 4.11 – Évolution de $(a_1, e_1, \varpi_1, \theta_{1:1})$ d'un système régulier en résonance 1:1.

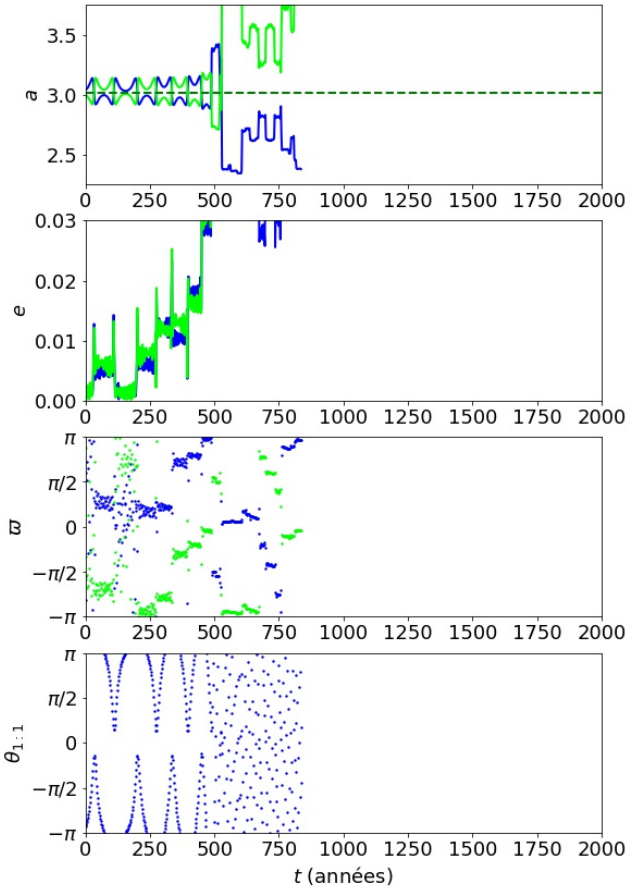


FIGURE 4.12 – Évolution de $(a_1, e_1, \varpi_1, \theta_{1:1})$ d'un système irrégulier en résonance 1:1.

En y injectant les valeurs des masses de nos simulations, nous obtenons

$$a_{2,Hill} = 4.05\text{UA}.$$

La première région de la table 4.2, également visible à la figure 4.10 grâce aux traits roses, est donc marquée par de nombreuses rencontres proches puisque $a_2 < 4.05$. Remarquons que le demi-grand axe a_2 correspondant à la résonance 3:2 est $a_{2,3:2} = 3.93$, c'est-à-dire très proche de $4.05 = a_{2,Hill}$. Cela explique les valeurs supérieures à 20 indiquées par le MEGNO généralement.

L'intuition pourrait nous faire croire que plus a_2 diminue sous cette limite, plus les chances de rencontre proche entre les deux planètes augmentent. Or, comme l'indique la table 4.2, 62.4% des systèmes voient leur MEGNO diverger lorsque $a_2 \in [3, 3.2]$. Pour contraste, ce nombre devient 99.8% lorsque $a_2 \in]3.2, 3.9]$. Avec $a_2 \in [3, 3.1]$, ce nombre descend même à 48.6%. Dans un premier temps, expliquons la dynamique stabilisant les systèmes pour $a_1 \approx a_2$, c'est-à-dire empêchant les rencontres proches entre planètes. Dans un deuxième temps, mettons en évidence que l'absence de cette dynamique mène à la déstabilisation de tous les systèmes $a_2 > a_1$ dans cette zone.

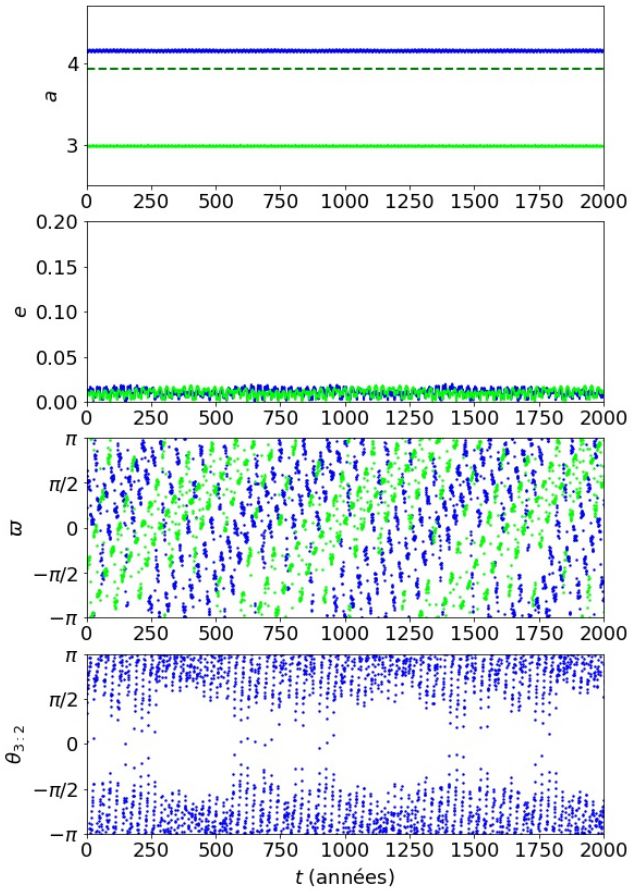


FIGURE 4.13 – Évolution de $(a_1, e_1, \varpi_1, \theta_{3:2})$ d'un système régulier dans la résonance 3:2 de la figure 4.9. Le demi-grand axe pour que la planète externe soit en résonance est affiché par le trait vert.

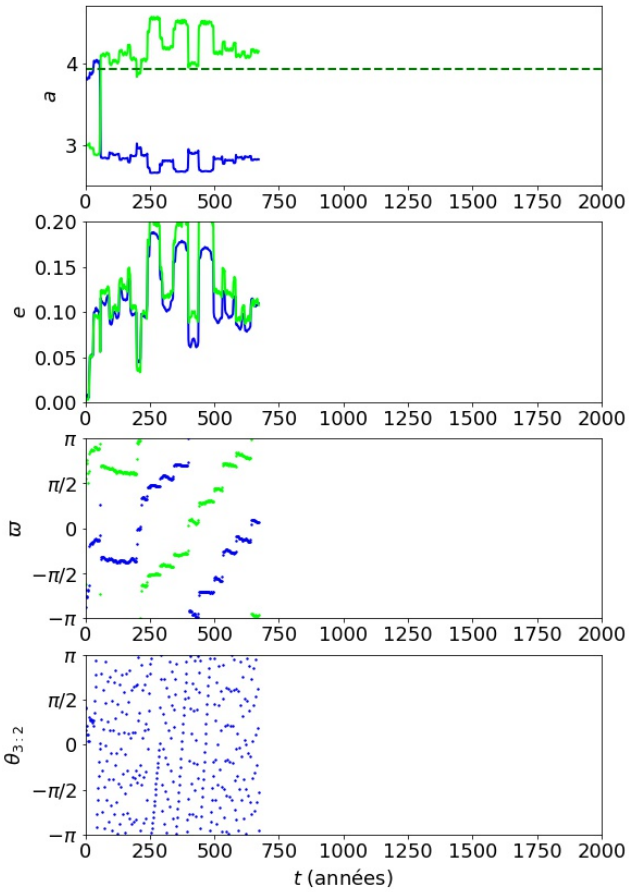


FIGURE 4.14 – Évolution de $(a_1, e_1, \varpi_1, \theta_{3:2})$ pour un système chaotique proche de la résonance 3:2 de la figure 4.9.

Les planètes sont initialement sur des orbites quasiment circulaires et quasiment coplanaires : $e_1 = e_2 = 10^{-4}$ et $i_1, i_2 = rand(0, 5)°$. La différence entre les dynamiques s'explique par la distance angulaire entre les planètes sur leur orbite commune. Si elles sont suffisamment éloignées, malgré un demi-grand axe similaire, elles peuvent coexister grâce à la résonance 1:1. Les orbites obtenues sont régulières. La distance angulaire est mesurée par l'angle résonant

$$\theta_{1:1} = \lambda_1 - \lambda_2.$$

Un exemple de système stable en résonance 1:1 est affiché à la figure 4.11. L'angle résonant est borné entre $\pi/3$ et $\pi/2$. Les planètes restent donc suffisamment séparées pour éviter une rencontre proche, malgré la violation du critère de Hill.

La résonance 1:1 ne peut avoir lieu que lorsque $T_1 \approx T_2$, c'est-à-dire lorsque $T_1/T_2 \approx 1$. Par conséquent, lorsque a_2 dépasse 3.2 UA dans nos simulations, cette résonance protectrice n'est plus possible. Le seul comportement observé pour $a_2 \in [3.2; 3.9]$ est par conséquent la déstabilisation systématique du système due à des rencontres proches (divergence du MEGNO). Un exemple d'un tel système chaotique se trouve à la figure 4.12.

Entre 3.9 et 4.9 UA

Étudions maintenant la première région respectant le critère de Hill, celle dominée par les résonances 3:2 et 2:1. Nous allons dans un premier temps analyser les deux résonances et dans un second temps la région entre les deux.

Commençons par la résonance 3:2. Deux exemples sont présentés aux figures 4.13 et 4.14. Dans cette résonance, les rencontres proches sont toujours possibles vu que $a_{2,Hill} = 4.05$, ce qui explique la présence de nombreux systèmes pour lesquels le MEGNO diverge à la figure 4.9. Un exemple de déstabilisation d'un système proche de la résonance 3:2 est donné à la figure 4.14. Seuls les systèmes capturés dans la résonance 3:2 peuvent être protégés et jouir d'une évolution régulière, comme l'indique la figure 4.13. Le système régulier à la figure 4.13 est bien en résonance, comme l'indique l'angle $\theta_{3:2}$. Les demi-grands axes des planètes sont quasiment constants et les excentricités oscillent quasipériodiquement entre 0 et 0.02.

Regardons maintenant la résonance 2:1, dont trois représentants sont visibles aux figures 4.15, 4.16 et 4.17. Le système à la figure 4.15 est un exemple d'évolution régulière grâce à la capture en résonance 2:1 (voir la libration de l'angle résonant). Des évolutions chaotiques proches de la résonance 2:1 sont présentées aux figures 4.16 et 4.17 et correspondent à des valeurs du MEGNO de 8.3 et >20 respectivement.

Sur le court terme, l'angle $\theta_{2:1}$ de la figure 4.16 libre la plupart du temps, induisant une oscillation conjointe en e_1 et en e_2, typique d'un système résonant. Dans le système de la figure 4.17 où le MEGNO a divergé, le comportement est initialement le même. La différence apparaît très rapidement après seulement 5000 ans : le système sort de la résonance. L'angle résonant commence à circuler et les évolutions des excentricités sont différentes. A long terme, comme le montre l'autre panel de la figure 4.17, ce dernier système connaît rapidement un évènement chaotique. Notons que le système de la figure 4.16 sortira de sa résonance également mais plus tard dans son évolution. Ce qui est surtout intéressant ici, c'est que le MEGNO arrive à moins à court terme.

Concernant les systèmes situés entre les deux résonances, différentes évolutions sont montrées aux figures 4.18, 4.19 et 4.20, nous affichons à chaque fois les angles $\theta_{3:2}$ et $\theta_{2:1}$.

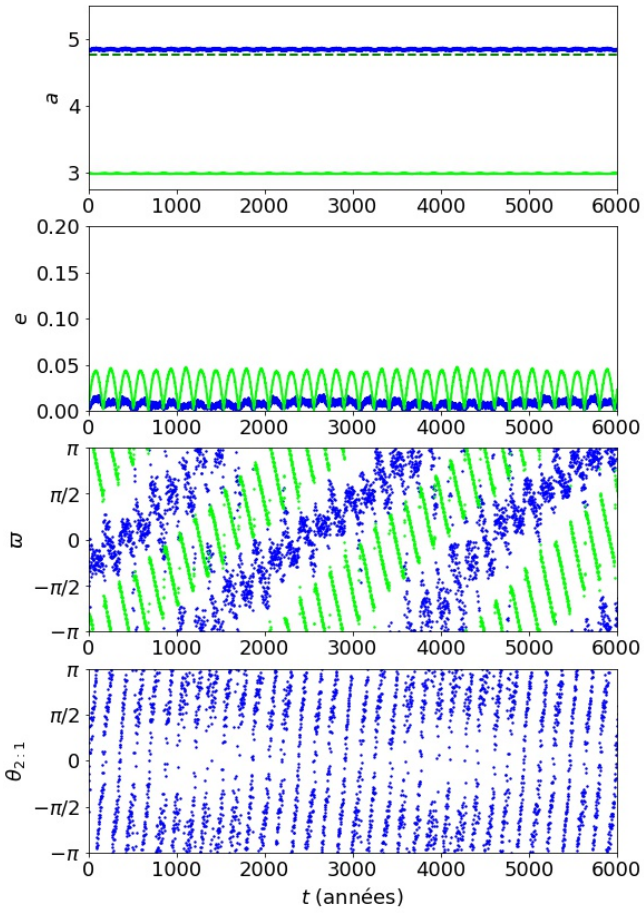


FIGURE 4.15 – Évolution de $(a_1, e_1, \varpi_1, \theta_{2:1})$ pour un système régulier dans la résonance 2:1. Le demi-grand axe pour que la planète externe soit en résonance est affiché par le trait vert.

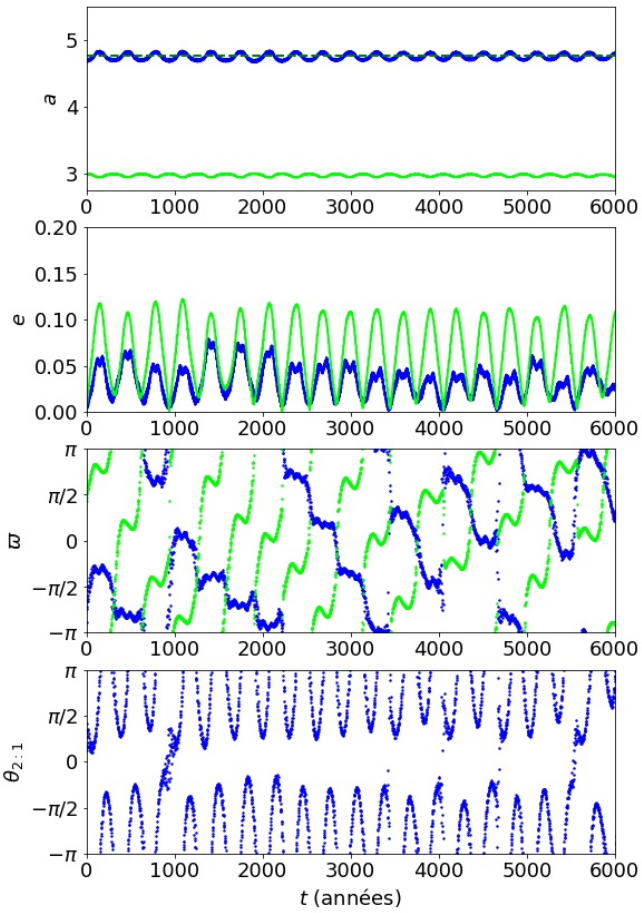


FIGURE 4.16 – Évolution de $(a_1, e_1, \varpi_1, \theta_{2:1})$ d'un système fortement chaotique dans la résonance 2:1 pour lequel le MEGNO vaut 8.3.

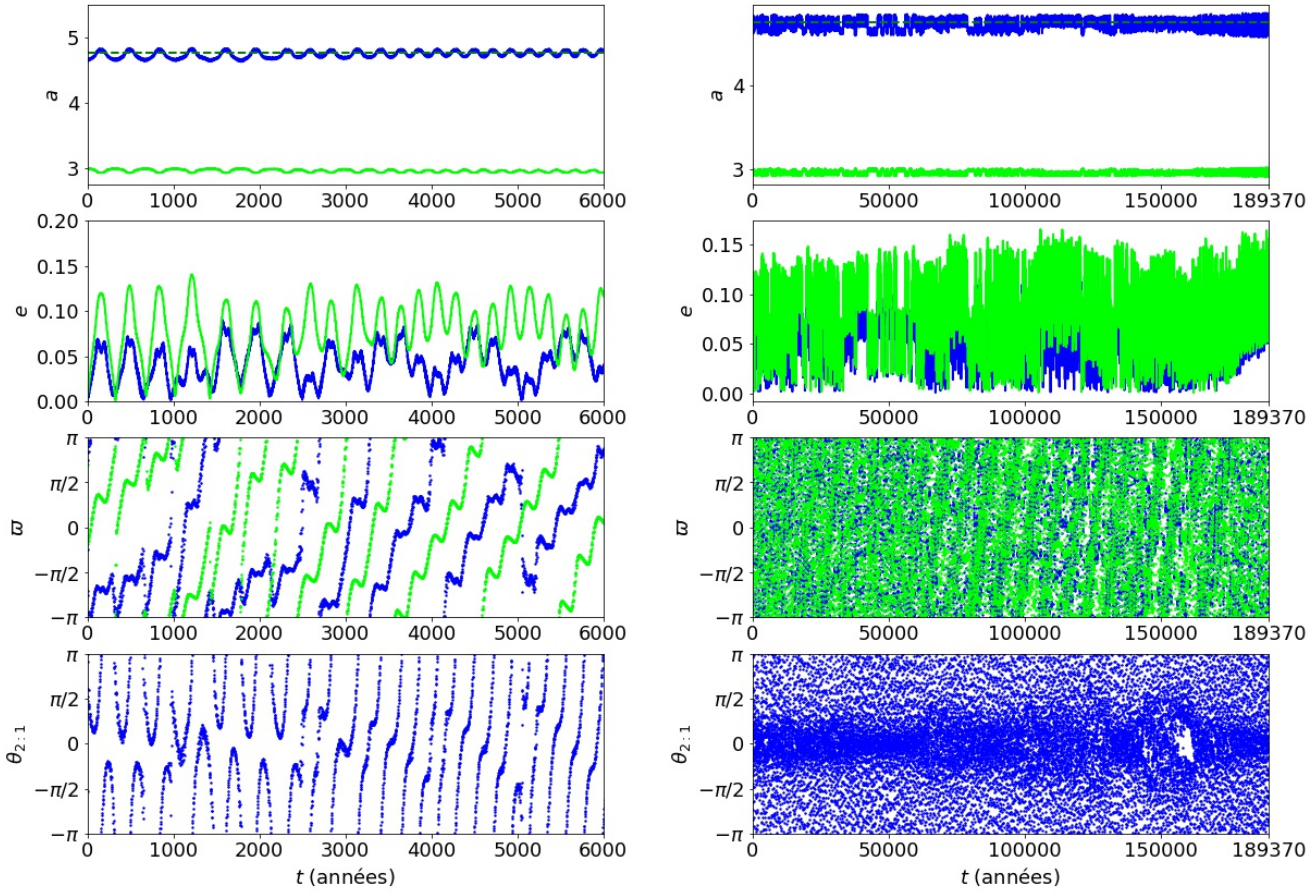


FIGURE 4.17 – Évolution à courte et longue durée de $(a_1, e_1, \varpi_1, \theta_{2:1})$ d'un système chaotique proche de la résonance 2:1 pour lequel le MEGNO diverge.

Certains systèmes ont un angle résonant en libration la plus grande partie du temps, avec des moments courts de circulation tous les quelques milliers d'années : ces systèmes sont classifiés réguliers ou faiblement chaotiques par le MEGNO (valeur inférieure à 3). Un exemple est donné à la figure 4.18 où la proximité avec la résonance favorise la régularité du système.

Certains systèmes ne possèdent aucun angle des deux résonances qui librent. C'est le cas du système chaotique représenté à la figure 4.19. Les amplitudes et fréquences de e_1 et e_2 croissent dans le temps. Après 24000 ans, l'interaction intensifiée mène à un changement brutal de demi-grand axe pour les deux corps autour de 28000 ans qui induit la divergence du MEGNO. Nous pouvons nous attendre à ce qu'une des planètes soit éjectée du système plus loin dans la simulation. Finissons l'analyse de cette zone du profil de stabilité par l'analyse du système chaotique dont le MEGNO n'a pas divergé. Le système de la figure 4.20 a des oscillations en excentricités non périodiques, menant à une croissance du MEGNO (valeur finale de 11.2). Ces oscillations semblent être dues à la superposition des deux résonances. Les angles résonants $\theta_{3:2}$ et $\theta_{2:1}$ présentent en effet de faibles librations intermittentes. Une telle évolution est donc bien chaotique.

Entre 4.9 et 13 UA

Cette grande zone du profil de stabilité est marquée de deux régimes distincts. Autour des résonances 5:2, 3:1 et 4:1, malgré leur distance, les planètes ont un impact sur l'orbite l'une de l'autre via la résonance. En dehors de ces résonances, les planètes sont découplées. Tous les systèmes hors résonances sont réguliers selon MEGNO. La planète interne en $a_1 = 3$ UA décrit une orbite circulaire presque constante en demi-grand axe et en excentricité. L'évolution des systèmes se distingue d'un problème à deux corps par la précession de ϖ_1 induites par les corps externes. Pour notre étude, ceci n'a pas d'impact vu que cette précession n'induit pas d'instabilité. Le comportement de la planète externe est analogue à celui de la planète à la figure 4.3 : le demi-grand axe et l'excentricité oscillent périodiquement, avec des amplitudes qui croissent avec le demi-grand axe de la planète externe.

Entre 4.9 et 13 UA, les rares systèmes chaotiques se trouvent aux abords des demi-grands axes correspondant aux résonances en moyen mouvement entre planètes. Vu que les résonances 5:2, 3:1 et 4:1 induisent les mêmes comportements, nous n'allons discuter ici que de la résonance 3:1 puisque c'est celle qui génère le plus de chaos (voir figure 4.9).

La table 4.2 indique que 83.2% des systèmes dont $a_2 \approx a_{2,3:1}$ sont réguliers. Un exemple d'évolution régulière est montré à la figure 4.21 et un exemple d'évolution chaotique à la figure 4.22. A court terme, rien ne permet de distinguer des différences notables dans leur évolution à part l'évolution de l'angle résonant. Afin de bien mettre en évidence l'évolution chaotique du système de la figure 4.22 prédite par le MEGNO, nous avons intégré sur 10^8 ans ce système chaotique avec une condition initiale très similaire : $\hat{a}_2 = a_2 \times (1 + 10^{-6})$. L'évolution de la distance entre les deux systèmes est affichée à la figure 4.23. Nous voyons que l'erreur relative en demi-grand axe augmente jusqu'à atteindre 10^{-3} après 10^8 ans. Les orbites de conditions initiales quasiment identiques s'écartent l'une de l'autre avec le temps. La croissance de l'erreur est exponentielle mais très lente. Le système est donc bien chaotique comme le prédit le MEGNO.

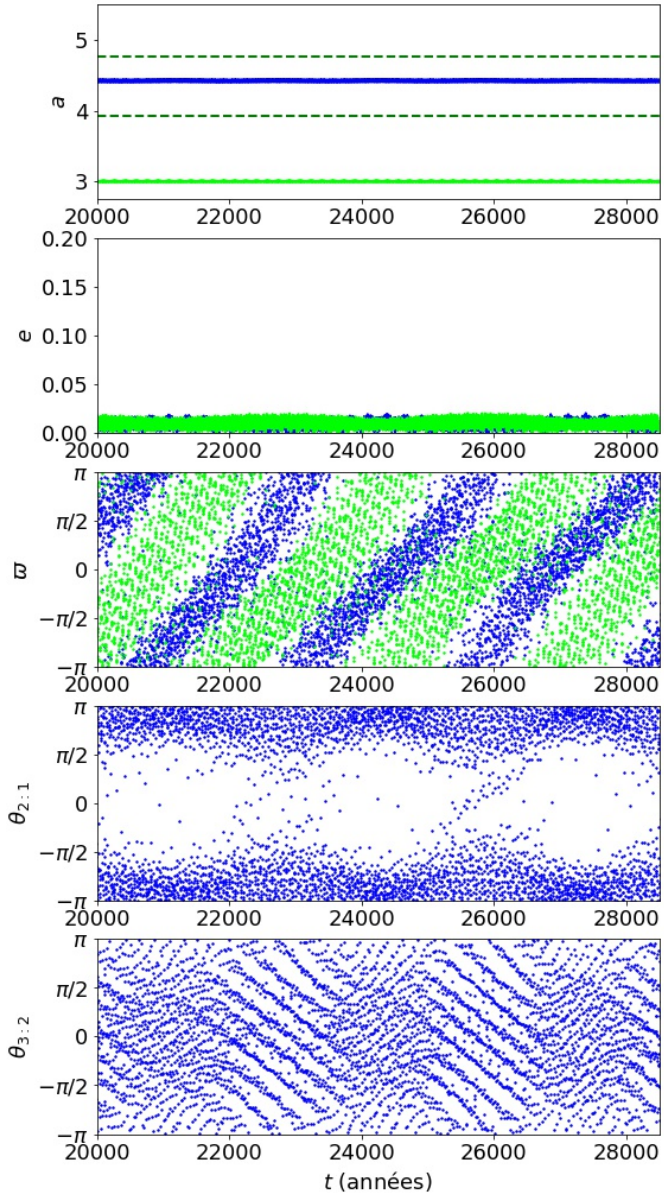


FIGURE 4.18 – Évolution de $(a_1, e_1, \varpi_1, \theta_{2:1}, \theta_{3:2})$ d'un système régulier dans la deuxième zone de la figure 4.9.

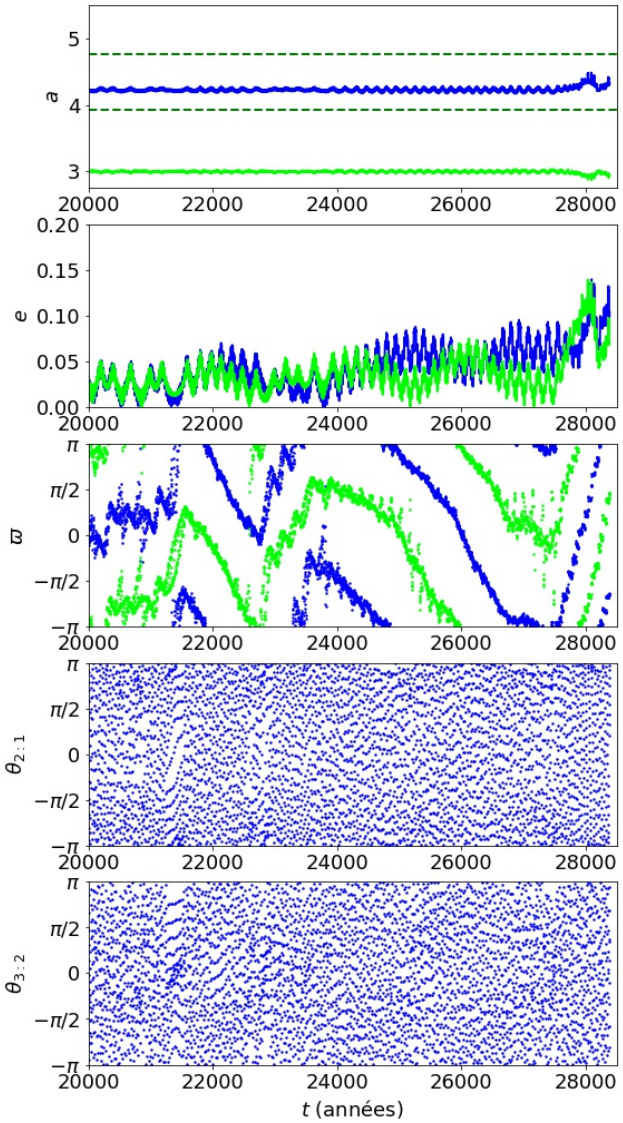


FIGURE 4.19 – Évolution de $(a_1, e_1, \varpi_1, \theta_{2:1}, \theta_{3:2})$ d'un système dont le MEGNO a divergé dans la deuxième zone de la figure 4.9. Le demi-grand axe pour que la planète externe soit en résonance est affiché par le trait vert.

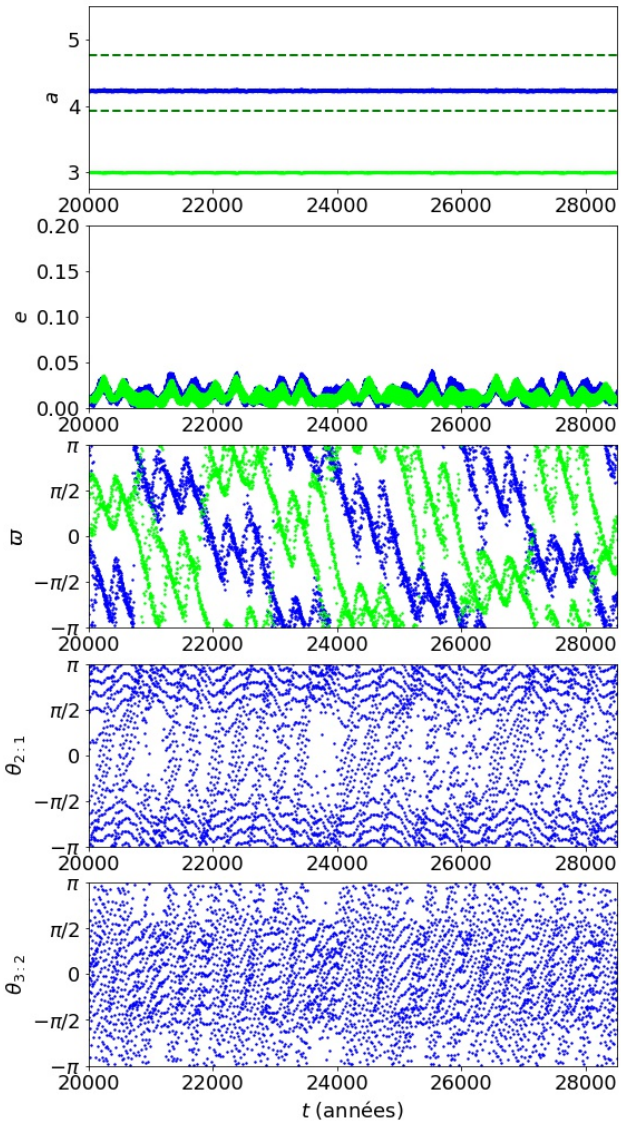


FIGURE 4.20 – Évolution de $(a_1, e_1, \varpi_1, \theta_{2:1}, \theta_{3:2})$ d'un système irrégulier dans la deuxième zone de la figure 4.9. Le demi-grand axe pour que la planète externe soit en résonance est affiché par le trait vert.

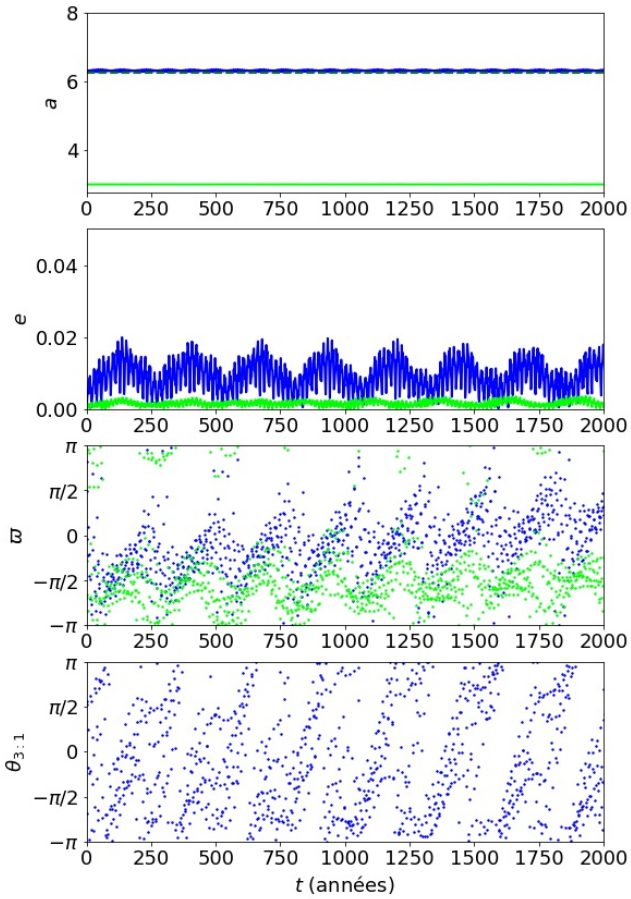


FIGURE 4.21 – Évolution de $(a_1, e_1, \varpi_1, \theta_{3:1})$ pour un système régulier dans la résonance 3:1 de la figure 4.9.

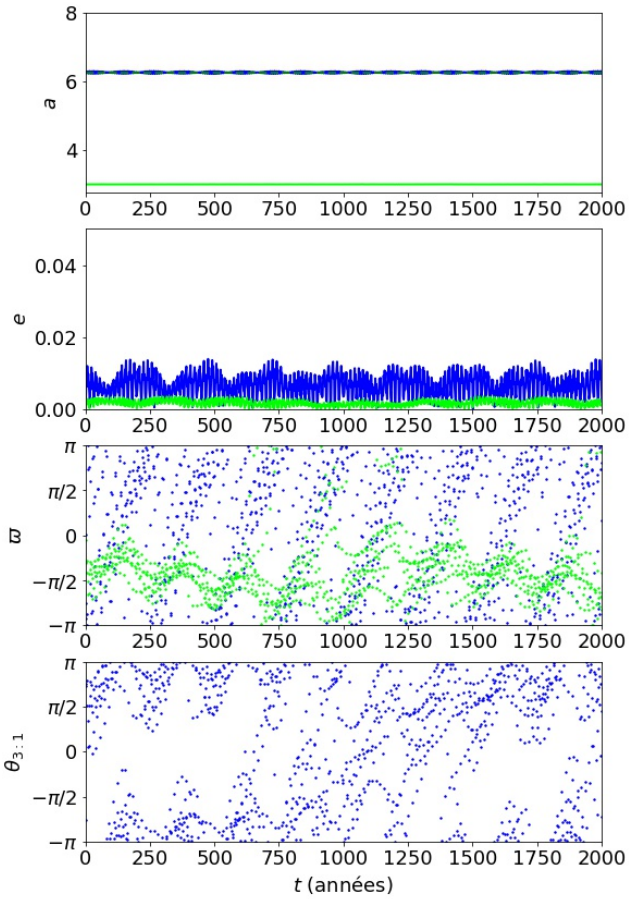


FIGURE 4.22 – Évolution de $(a_1, e_1, \varpi_1, \theta_{3:1})$ pour un système classifié instable dans la résonance 3:1 de la figure 4.9.

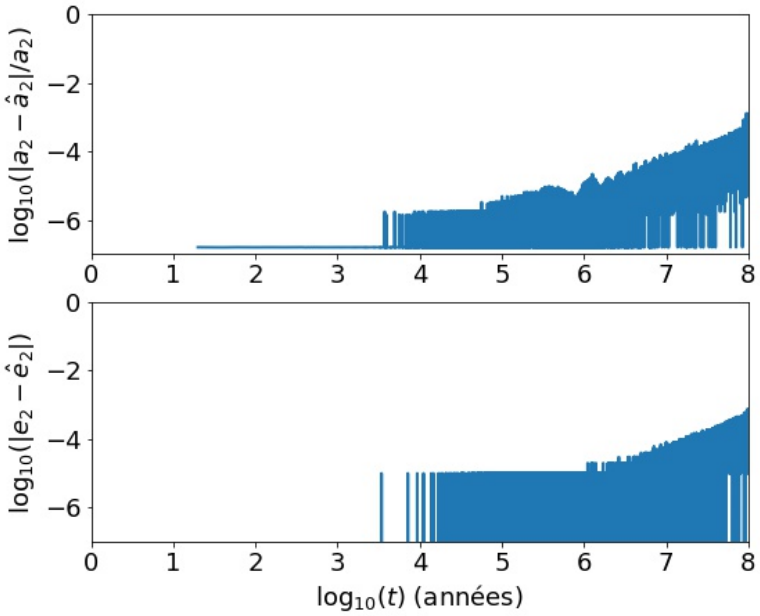


FIGURE 4.23 – Logarithme de la distance relative en a_2 et absolue en e_2 pour deux systèmes de conditions initiales très proche $\left(\hat{a}_2/a_2 = (1 + 10^{-6})\right)$.

Au-delà de 13 UA

La dernière région du profil de stabilité est celle au-delà de 13 UA. Dans la région précédente, les deux planètes étaient découplées sauf aux résonances. Dans cette nouvelle région, les planètes ne s'impactent plus du tout mais la dynamique du système est dominée par la perturbation de la binaire. Les dynamiques dans cette région du profil sont donc les mêmes que dans la région entre 6.7 et 8.3 UA dans les simulations à une planète de la section 4.3.2. Une majorité des planètes extérieures sont éjectées très vite. Seuls certains systèmes sont réguliers autour des résonances 6:1 et 7:1 de la planète externe avec la binaire, ces résonances étant d'ordre élevé et en deçà de la limite a_c.

Conclusion

La première partie du mémoire portait sur la stabilité des systèmes planétaires au sein d'étoiles binaires. Dans un premier temps, nous rappelons les dynamiques principales qui régissent les deux profils de stabilité étudiés. Dans un deuxième temps, des futures pistes de recherche sont proposées.

Dans le profil de stabilité à une planète reproduit de [1], la binaire est initialement trop éloignée pour influencer significativement la planète. La dynamique de celle-ci autour de la primaire est donc celle d'un problème à deux corps légèrement perturbé. La perturbation s'exprime par des précessions en ϖ_1 et Ω_1 et par des oscillations périodiques en a_1 et e_1. L'amplitude de ces oscillations devient critique autour de a_c, le demi-grand axe de la formule de Holman et Wiegert [26] pour la stabilité d'une particule test au sein d'une étoile binaire. A partir de a_c, le comportement devient plus complexe et des éjections planétaires sont observées. Les résonances avec la binaire jouent un rôle important et garantissent la régularité de certains systèmes.

Dans le profil à deux planètes, également reproduit de [1], un nouveau comportement dynamique apparaît où les perturbations entre planètes sont plus importantes que celles du compagnon binaire. Lorsque les planètes sont très proches, elles ne respectent pas le critère de Hill et vont la plupart du temps se déstabiliser l'une l'autre à la suite de rencontre proches. Ceci est évité pour les systèmes en résonance 1:1 entre planètes. Lorsque les planètes sont suffisamment distantes, les résonances planétaires dominent la dynamique. Celles-ci peuvent maintenir le système dans une évolution régulière ou au contraire rendre son évolution chaotique, en particulier si deux résonances agissent simultanément. Des orbites proches se séparent alors exponentiellement dans le temps sans nécessairement de croissance abrupte des excentricités ou des demi-grands axes.

Proposons maintenant de nouvelles pistes de recherche comme perspectives du travail dans ce mémoire. L'analyse des dynamiques sous-jacentes dans les profils des figures 3.2, 3.3, 3.5 et 3.6 de [1] est une prolongation naturelle du mémoire. Nous pensons que les différentes dynamiques sont toutes présentes dans les deux profils étudiés mais il serait bon de vérifier.

Une piste plus intéressante serait d'étudier des variantes des systèmes déjà étudiés ici, par exemple des systèmes où au moins une des planètes possède une orbite excentrique. L'impact du changement des paramètres sur la limite de stabilité au sein des binaires et sur le critère de Hill pourrait être étudié. L'article [1] cite notamment les sources [35] et [36], deux articles proposant des formules alternatives au critère de Hill pour des planètes sur des orbites plus générales que circulaires et coplanaires.

L'inclinaison des planètes de maximum 5° comme dans [1] n'a aucun impact sur le profil de stabilité selon nous. Une autre piste à explorer serait donc l'étude de l'influence d'une binaire fortement inclinée, en particulier de l'impact du mécanisme de von Zeipel-Lidov-Kozai sur les dynamiques et la stabilité du système.

Dans notre travail, comme souvent dans la littérature selon la source [26], l'étude est limitée à l'exploration de binaires de même masse uniquement. Étudier l'impact sur les dynamiques de binaires de rapports de masses différents est donc une autre piste pour de futures recherches.

Une dernière perspective qui nous semble pertinente serait d'étudier des étoiles binaires de plus petite séparation, où l'interaction planète-planète et l'interaction planète-binaire ne sont pas disjointes mais se juxtaposent. Par exemple, il serait intéressant de voir si des résonances en moyen mouvement entre planètes pourraient protéger les planètes contre des éjections dues à la binaire.

Stage :
Stabilité d'exolunes au sein d'étoiles binaires

Introduction

La seconde partie du mémoire a été réalisée pendant un stage de recherche de février à mai 2022 dans l'équipe ECLIPSE (Exoplanets, climate and and planetary systems evolution) au Laboratoire d'Astrophysique de Bordeaux, dit LAB, (Université de Bordeaux et CNRS) dans le cadre du master en sciences mathématiques, à finalité approfondie. La recherche a été supervisée par Dr. Sean Raymond, chercheur au LAB. L'équipe de chercheurs du LAB a également participé au travers de suggestions pour le code, de réunions d'équipe et de discussions sur des sujets d'astrophysique.

Le stage porte sur l'étude numérique de la stabilité d'exolunes en orbite autour d'une exoplanète de type S autour d'étoiles binaires proches. Le code REBOUND utilisé pour la première partie du mémoire est appliqué à des systèmes de quatre ou cinq corps dont une étoile binaire, une planète et une ou deux lunes. Le but de ce stage est de voir à quel point les formules de stabilité des exolunes développées dans [37] et [38] restent applicables en présence d'un compagnon stellaire.

Nous commencerons par un contexte scientifique dans le chapitre 5 pour construire l'intuition nécessaire à l'analyse de nos simulations. Dans le chapitre 6, quatre classe de simulations seront explorées. Dans un premier temps, pour les trois premières classes, les exolunes seront modélisées par des particules test. Nous commencerons par explorer l'espace des phases au travers de configurations générales. Nous affinerons ensuite notre étude à une partie réduite de l'espace des phases où des comportements divers peuvent être observés. Nous dédierons finalement une section à l'étude d'un système particulier, représentatif de la stabilité dans la-dite partie de l'espace des phases. Dans un second temps, pour la dernière classe de simulations, nous modéliserons deux lunes massives autour d'une même planète. Le but sera de voir si l'interaction entre lunes fait disparaitre ou modifie les comportements observés dans la configuration à une lune sans masse.

Chapitre 5

Contexte scientifique

Dans ce chapitre, nous introduirons les exolunes et l'intérêt d'étudier leur stabilité dans la section 5.1. Nous définirons ensuite le rayon de Hill, une valeur clé pour l'étude de la stabilité des lunes, et dériverons des limites analytiques approximées de la stabilité dans la section 5.2.

5.1 Exolunes dans des systèmes planétaires

L'étude des exolunes est, à ce jour, purement théorique car aucune exolune n'a été officiellement détectée. Certains candidats ont été proposés mais aucune exolune n'a été validée pour l'instant [2]. La recherche des exolunes est un sujet chaud et le stage vise à y contribuer.

Les deux références principales sur la stabilité des exolunes dans la littérature sont [37] et [38]. Dans [37], la limite de stabilité en demi-grand axe d'une lune prograde autour d'une planète en orbite autour d'une étoile simple est donnée par

$$a_{11,lim} = 0.4895(1 - 1.0305e_1 - 0.2738e_{11})r_{Hill}. \tag{5.1}$$

r_{Hill} est le rayon minimal de la sphère de Hill d'expression

$$r_{Hill} = q_1 \left(\frac{m_1}{3m_0}\right)^{(1/3)}, \tag{5.2}$$

où $q_1 = a_1(1 - e_1)$ est la distance du périastre de la planète à l'étoile centrale de masse m_0. Le rayon de Hill est discuté plus en longueur dans la sous-section 5.2.1. L'article [37] donne aussi une formule pour les orbites rétrogrades :

$$a_{11,lim,retro} = 0.9309(1 - 1.0764e_1 - 0.9812e_{11} + 0.9446e_1e_{11})r_{Hill}. \tag{5.3}$$

Les deux formules de [37] sont interpolées de simulations intensives de problèmes des trois corps restreints elliptiques et coplanaires. Nous chercherons à voir dans quelle mesure les résultats des simulations dans ce travail diffèrent de la formule à cause de l'influence de la binaire. Dans ce travail, seules des orbites progrades sont considérées. La formule (5.1) est prise comme point de référence pour la stabilité dans notre étude. La majorité de nos graphiques auront donc une marque en $a_{11} = 0.4895$, le meilleur cas possible dans (5.1).

La source [38] étudie la limite de stabilité dans des systèmes dit "STIPS" (Systems with Tighlty-packed Inner Planets), des systèmes planétaires où les planètes internes sont très proches. Ils testent de nombreuses configurations à deux planètes, dont une ayant

une exolune, menant chacun à des dynamiques différentes. L'article n'obtient donc pas de formule directement applicables dans notre étude. L'observation principale à retenir de cet article est que la stabilité maximale dans (5.1) est de $a_{11} = 0.4895 r_{Hill}$ comparée à

$$a_{11} \approx 0.40 r_{Hill}$$

dans cet article. La cause principale d'éjection des lunes observée dans [38] est les rencontres proches entre planètes, conséquences naturelles d'un systèmes à planètes proches. Dans différentes configurations, différents phénomènes telle que la résonance d'évection, résonance entre la précession de la lune et la période orbitale de l'étoile autour de la planète, viennent compliquer l'étude de la stabilité.

Notre étude a été motivée par le second article et par l'affinité des auteurs aux étoiles binaires. Dans l'article [38], nous voyons qu'un corps supplémentaire peut venir perturber la stabilité d'une exolune même endéans de la limite de stabilité empirique (5.1). La déstabilisation est due à des rencontres proches. Nous nous sommes donc demandés si un perturbateur massif éloigné, la binaire, pourrait déstabiliser les exolunes malgré l'absence de rencontres proches. De surcroît, nous nous sommes demandé si la déstabilisation des lunes serait directe ou indirecte. Par déstabilisation directe, nous entendons une éjection due à l'interaction gravitationnelle entre la lune et la binaire. Par déstabilisation indirecte, nous entendons une éjection de lune causée par la perturbation de l'orbite de la planète à cause de son interaction gravitationnelle avec la binaire.

5.2 Le rayon de Hill

Avant de passer aux simulations, discutons brièvement du rayon de Hill et de la formule (5.2). De cette formule, nous allons obtenir deux limites approximées pour la stabilité des particules autour de la planète. La sous-section 5.2.1 s'inspire de [2] et les formules obtenues aux sous-section 5.2.2, sous-section 5.2.3 et sous-section 5.2.4 sont obtenues par des développement analytiques par les auteurs de ce travail.

5.2.1 Définition du rayon de Hill

Le rayon de Hill est obtenu analytiquement dans un problème des trois corps restreint en cherchant le demi-grand axe $a_{11} = r_{Hill}$ de l'orbite de la particule test telle que la force gravitationnelle exercée sur celle-ci est égale à la force centrifuge. Le rayon de Hill est fonction de la distance entre les corps massifs. Si les corps massifs décrivent des orbites elliptiques, cette formule est instantanée vu que la distance entre les deux corps massifs n'est pas constante. En particulier, le rayon de Hill est minimal lorsque le corps massif est à son périastre. La formule (5.2) considère donc la distance minimale q_1, le pire cas pour la stabilité. Puisque les simulations seront suffisamment longues, la planète atteindra de nombreuses fois son périastre. Une lune à la limite entre régulière et chaotique lorsque sa planète est à l'apoastre se verra déstabilisée au périastre. Il est donc judicieux de prendre le pire cas.

5.2.2 Excentricité critique pour la planète

Nos simulations sont des problèmes des quatre corps ou des problèmes des cinq corps. Le calcul du rayon de Hill devrait donc prendre en compte des forces supplémentaires. Ces forces sont ignorées : le rayon de Hill de la planète est calculé avec la formule 5.2.

Cependant, même en ignorant les forces supplémentaires, le rayon de Hill d'une planète n'est plus une constante. De fait, dans un problème avec plus que deux corps massifs, les orbites évoluent dans le temps. La distance minimale q_1 évolue donc aussi. Si nous notons $r_{Hill}(a_1, e_1)$ le rayon de Hill de la planète autour de laquelle orbite la particule en fonction du demi-grand axe et de l'excentricité de la planète, alors $\forall a_{t_0}, a_{t_1} > 0$ et $\forall e_{t_0}, e_{t_1} \in [0; 1[$,

$$\begin{aligned} r_{Hill}(a_{t_0}, e_{t_0}) &= a_{t_0}(1 - e_{t_0}) \left(\frac{m_1}{3m_0}\right)^{(1/3)} \\ &= a_{t_0}\frac{a_{t_1}}{a_{t_1}}(1 - e_{t_0})\frac{(1 - e_{t_1})}{(1 - e_{t_1})} \left(\frac{m_1}{3m_0}\right)^{(1/3)} \\ &= \frac{a_{t_0}}{a_{t_1}}\frac{(1 - e_{t_0})}{(1 - e_{t_1})} r_{Hill}(a_{t_1}, e_{t_1}). \end{aligned}$$

Dans ce travail, les planètes auront un demi-grand axe oscillant autour de sa valeur initiale avec une variation de maximum 5%. Le ratio $\frac{a_{t_0}}{a_{t_1}}$ est donc négligé dans les calculs. Seule l'excentricité est prise en compte dans l'évolution du rayon de Hill r_{Hill} :

$$r_{Hill}(e_{t_0}) \approx \frac{(1 - e_{t_0})}{(1 - e_{t_1})} r_{Hill}(e_{t_1}), \quad \forall e_{t_0}, e_{t_1} \in [0; 1[. \tag{5.4}$$

Supposons qu'une particule test de demi-grand axe a_{11} orbite autour de sa planète d'excentricité initiale e_{t_0}. Le demi-grand axe de la particule se réécrit $a_{11} = h_0 r_{Hill}(e_{t_0})$, où h_0 est le coefficient initial en demi-grand axe de la lune, dit coefficient de la lune par la suite. Si l'orbite de la planète devient plus excentrique, son rayon de Hill change selon la formule 5.4. Supposons que le demi-grand axe de l'orbite de la particule test n'évolue pas : nous verrons plus tard que cette hypothèse est raisonnable. Le demi-grand axe inchangé de la lune, exprimé en fonction du nouveau rayon de Hill de la planète, devient

$$a_{11} = h_0 r_{Hill}(e_{t_0}) = h_{e_{t_1}} r_{Hill}(e_{t_1}) \tag{5.5}$$

où est le nouveau coefficient en demi-grand axe est

$$h_{e_{t_1}} = h_0 \frac{1 - e_{t_0}}{1 - e_{t_1}}. \tag{5.6}$$

Prenons comme dernière hypothèse que le coefficient $h_{crit} = 0.4895$, le meilleur cas dans (5.1), est la limite de stabilité pour les lunes. Nous verrons dans nos simulations que cette hypothèse est également raisonnable. Puisque h_{e_1} est fonction croissante de e_1, une particule de coefficient h_0 initialement inférieur à cette limite de stabilité peut être déstabilisée lorsque e_1 devient trop grande. Nous pouvons donc trouver $e_{1,crit}(h_0)$, une fonction associant à un coefficient h_0 quelconque l'excentricité de la planète telle qu'une lune de coefficient h_0 ait un nouveau coefficient $h_{e_{1,crit}(h_0)}$ trop grand. Cette condition s'exprime

$$h_{e_{1,crit}(h_0)} \geq h_{crit}.$$

En isolant $e_{1,crit}$, nous obtenons la condition

$$e_1 \geq e_{1,crit}(h_0) = 1 - (1 - e_{t_0})\frac{h_0}{h_{crit}}. \tag{5.7}$$

A noter que lorsque e_1 oscille entre une valeur maximale et minimale, h_{e_1} oscille aussi. Les moments où h_{e_1} est supérieur à la limite de stabilité suffisent à déstabiliser la lune petit à petit. Pour cette raison, nous lorsque nous considérerons l'excentricité de la planète dans les graphes, nous prendrons l'excentricité maximale. Remarquons que h_{e_1} est croissant en h_0 et que $e_{1,crit}$ est décroissante en h_0 : une lune est plus facilement déstabilisée lorsqu'elle est initialement plus éloignée du corps qu'elle orbite.

5.2.3 Demi-grand axe critique pour la lune

Comme dit précédemment, la formule (5.1) est prise comme référence pour la limite de stabilité, avec $h_{crit} = 0.4895$. Considérons maintenant la limite modifiée $h_{e_1,crit}$ prenant en compte les excentricités initiales et finales de la planète e_{t_0} et e_{t_1} de la planète, obtenuent à partir de la formule (5.6). Nous définissons la limite en coefficient d'une lune $h_{e_1,crit}$ par

$$h_0 \geq h_{e_1,crit} \iff h_{e_{t_1}} \geq h_{crit}.$$

Cette condition est respectée lorsque

$$h_0 \geq h_{e_1,crit} = h_{crit}\frac{1 - e_{t_1}}{1 - e_{t_0}}. \tag{5.8}$$

5.2.4 Excentricité critique pour la lune

Considérons maintenant l'excentricité qu'une lune doit avoir pour être éjectée. Soit l'apojove de la lune

$$j_{11} = a_{11}(1 + e_{11}) = h_0(1 + e_{11})r_{Hill}(e_{t_0}).$$

j_{11} est croissant en h_0 et en e_{11}. Lorsque j_{11} est grand, la lune est plus fréquemment loin de sa planète et peut plus facilement être perturbée par les étoiles. L'apojove dépasse la limite h_{crit} si

$$j_{11} = h_0(1 + e_{11})r_{Hill}(e_{t_0}) \geq h_{crit}r_{Hill}(e_{t_0}),$$

c'est-à-dire si

$$e_{11} \geq e_{11,crit} = \frac{h_{crit}}{h_0} - 1. \tag{5.9}$$

La limite (5.9), comme les limites (5.7) et (5.8), est affectée négativement par la croissance de h_0. Plus h_0 est grand, plus l'excentricité de la lune nécessaire à son éjection devient petit.

Nous avons également considéré une limite en e_{11} ajustée par l'évolution de e_1 mais nous nous sommes rendus compte lors de test que la limite (5.9) était un meilleur indicateur de la stabilité des lunes.

Chapitre 6

Étude numérique de la stabilité des exolunes

Dans ce chapitre nous présentons les quatre classes de simulations que nous avons effectuées. Dans la section 6.1, nous considérons des simulations très générales. L'objectif principale est de se familiariser aux lunes dans des systèmes planétaires au sein d'une binaire. Dans la section 6.2, nous restreignons les paramètres de la binaire pour explorer plus en détail l'impact de la binaire et de l'orbite de la planète sur le temps de survie des lunes. A la section 6.3, nous étudions en détail un système particulier de la section 6.2 et remarquons l'impact de la résonance d'évection. Nous consacrons pour finir quelques pages à la section 6.4 aux lunes massives et à l'impact de la masse sur les comportements vus aux autres sections.

Pour chaque classe de simulations, nous allons dans un premier temps donner les conditions initiales utilisées ainsi que les objectifs de la simulation. Dans un second temps, nous analyserons les résultats au travers de différentes figures. Dans un troisième temps, un récapitulatif des résultats répondra aux objectifs.

6.1 Exploration de l'espace des phases

Dans cette première section, nous étudions la stabilité de systèmes à quatre corps restreints, composés de deux étoiles d'une masse solaire chacune, d'une planète d'une masse de Jupiter en orbite de type S autour de l'étoile et une particule test dite lune autour de la planète.

6.1.1 Simulations et objectifs

Corps	a (UA)	e	m
Etoile centrale	-	-	1 $m_\odot$
Planète	5.204	0.0487	1 $m_{Jupiter}$
Lune	x	0.0041	0
Compagnon	grille(3,50.6)	grille($10^{-4}, 0.8$)	1 $m_\odot$

TABLE 6.1 – Paramètres des simulations de la section 6.1.

Les conditions initiales des simulations de cette section sont reprises dans la table 6.1. Le demi-grand axe de la planète et les excentricités de la planète et de la lune sont fixées aux valeurs réelles de Jupiter et de Io respectivement, proposant ainsi une configuration connue. Les inclinaisons de ces deux corps ont été prises petites (1°) mais non-nulles pour définir Ω_1 et Ω_{11}. La binaire est prise non-inclinée initialement, faisant du plan d'orbite des étoiles l'une autour de l'autre le plan de référence.

La grille de conditions initiales pour le compagnon explore des périastres allant de 3 à 50 UA. Nous avons volontairement exploré de nombreux périastres de la binaire pour trouver la limite de stabilité de la planète comme fonction de a_B ou de q_B. Nous voulions voir s'il existait des configurations où la planète était régulière mais où aucune lune ne pouvait survivre. Nous voulions également trouver la région à partir de laquelle les premières planètes porteuses de lunes existent. Des simulations au périastre volontairement trop petit ont donc été explorées. Le coût en calcul de celles-ci est mineur : la planète est éjectée en quelques secondes de calculs. Nous nous sommes également demandé s'il pouvait y avoir des configurations où l'étoile apportait, par un quelconque mécanisme dynamique, une stabilité plus grande aux lunes.

Le dernier paramètre de la table est le demi-grand axe de la lune, noté x. Pour chaque simulation, nous cherchons le demi-grand axe maximal où une particule test survie à 100 périodes de la binaire. Nous prenons la période binaire T_B comme unité de temps dans une logique de normalisation : chaque simulation aura une durée caractéristique différente en fonction de a_B. Sur base de la formule (5.1), nous supposons qu'une particule test au-delà de $h_{crit} = 0.4895$ est toujours éjectée. Nous fixons donc le demi-grand axe initial des particules à $a_{11} = 0.5 r_{Hill}$. Si la particule survie à 100 périodes binaires, elle est considérée comme régulière. Sinon, la simulation est refaite avec a_{11} réduit jusqu'à trouver une particule stable sur 100 T_B. Si toutes les lunes de demi-grand axe $a_{11} \geq 0.1 r_{Hill}$ sont éjectées, la simulation considère que la planète ne peut pas avoir de lunes. D'une part, des valeurs plus petites menaient à des simulations trop longues et d'autre part ces simulations auraient dû prendre en compte des effets supplémentaires, effets absents des simulations à N corps basiques que nous avons effectuées.

6.1.2 Résultats des simulations

Le résultat de 5000 simulations est affiché à la figure 6.1, où le demi-grand axe maximal des particules tests ayant survécu est mis en relation avec le périastre de la binaire q_B. Le demi-grand axe est mis à 0 lorsque soit la planète a été éjectée soit aucune toutes les particules tests en $h_0 \geq 0.1$ sont éjectées. Aucune distinction n'est faite dans ce graphe. D'une part, la stabilité des lunes n'a pas de sens dans les systèmes où la planète est éjectée. D'autre part, les systèmes où aucune lune n'est stable voit la planète être déstabilisée peu après. En effet, comme l'indique la figure complémentaire 6.2, la région avec éjection de la planète est confondue avec la région où aucune exolune ne survie à $100 T_B$.

Hormis le point isolé en $q_B = 13.14$ UA, les systèmes voient la planète survivre à 100 périodes binaires à partir de $q_B = 15.00 \approx 3a_1 = 15.61$ UA. C'est la même condition pour la stabilité dans la première partie de ce mémoire aux figures 4.1 et 4.9, où la planète externe est régulière lorsque $a_2 \leq a_B/3$, pour $e_B = 10^{-4}$.

Le tableau 6.2 donne la répartition des demi-grands axes des lunes ayant survécu. Nous validons la formule (5.1) de [37], dont le cas idéal $h_{crit} = 0.4895$ est marqué par la ligne horizontale verte dans la figure : 99.1% des demi-grands axes de lunes ayant survécu sont en dessous de cette ligne. Les lunes survivant au dessus de 0.4895 survivent à la

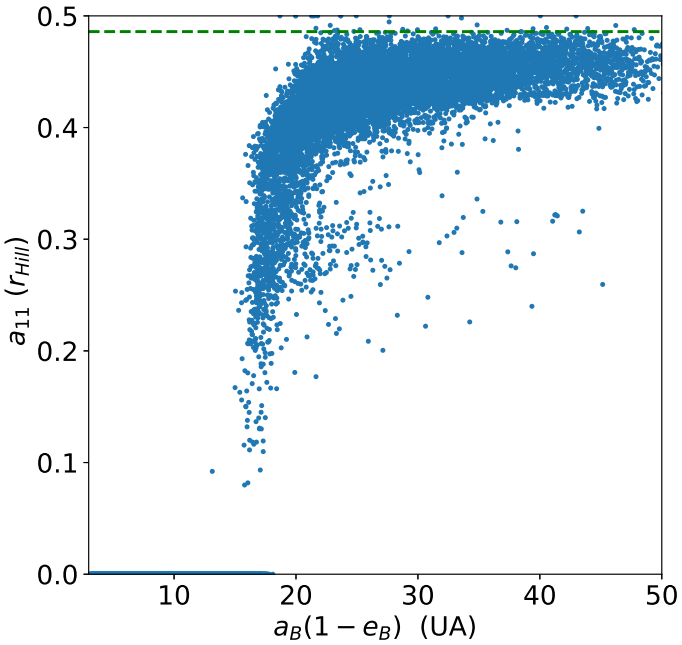


FIGURE 6.1 – Demi-grand axe maximal des lunes ayant survécu aux simulations de conditions initiales dans la table 6.1 en fonction du périastre de la binaire. Le trait horizontale vert indique $a_{11} = 0.4895 r_{Hill}$.

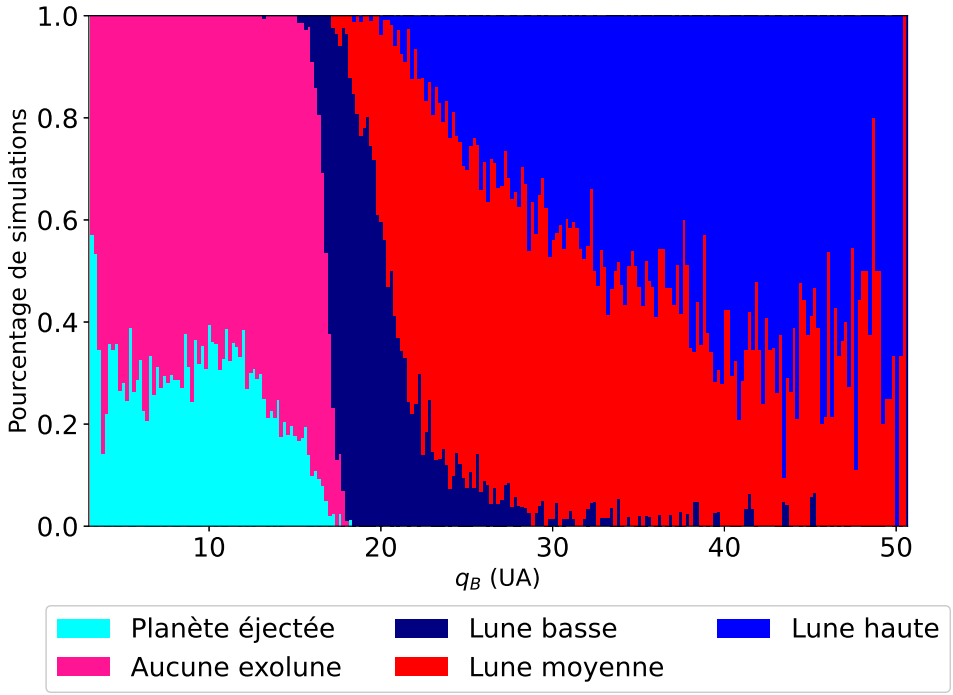


FIGURE 6.2 – Histogramme superposé du type de simulations en fonction du péricentre de la binaire. Figure complémentaire à 6.1.
Lune basse : $h_0 < 0.40$; moyenne : $0.40 \leq h_0 < 0.45$; haute : $0.45 \leq h_0 \leq 0.5$.

simulation grâce à de la chance. Pour des simulations sur des temps deux fois plus longs, toutes ses particules auraient été éjectées. Nous pouvons d'ores et déjà répondre à une de nos questions : l'étoile supplémentaire n'étend pas la limite de stabilité.

Nous retrouvons également à la table 6.2 le résultat de l'article [38], où la limite de stabilité décroît vers $h_{crit} \approx 0.40$. Considérons d'abord $q_B \in [15; 18.4[$ UA, où 15 UA est le plus petit périastre de la binaire sans éjection de la planète et 18.4 UA est le plus grand périastre avec éjection de la planète. Dans cette tranche, 39.1% des systèmes ne voient leur lune survivre qu'avec $h_0 < 0.40$ pour seulement 2.2% avec $0.40 \leq h_0$. Cette région permet la survie des planètes et de particules test mais est très chaotique : les 58.7% restants ont leur planète éjectée ou aucune lune survivante. Au-delà de q_B =18.4 UA, quand les planètes ne sont plus jamais éjectées et où une particule au moins survit, la majorité des systèmes ont une planète hébergeant une lune $h_0 \geq 0.40$, comme l'indique la table.

Particules test	Éjection	Aucune lune	$0.1 \leq h_0 < 0.4$	$0.4 \leq h_0 < 0.45$	$0.45 \leq h_0$
$3<q_B<15$	29.2 %	70.8%	0.0001%	0%	0%
$15 \leq q_B < 18.4$	8.3%	50.4%	39.1%	2.1%	0.1%
$18.4 \leq q_B < 30$	0%	0%	24.2%	57.0%	18.8%
$30 \leq q_B \leq 50.6$	0%	0%	1.4%	44.4%	54.2 %

TABLE 6.2 – Répartition de la stabilité dans la figure 6.1.

6.1.3 Récapitulatif

Finissons cette section en récapitulant les résultats des simulations. Au travers de ce récapitulatif, répondons aux objectifs de cette première classe de simulations.

La majorité des particules tests survivent endéans la limite $h_{crit} = 0.4895$, le meilleur cas de (5.1), la formule empirique de [37]. Hors des zones très instables de l'espace des phases, la majorité des systèmes ont la limite de stabilité pour leurs particules tests en $h \in [0.40; 0.4895]$, comme le prédisent [37] et [38]. Les très rares système où une particule survie au dessus de h_{crit} sont très chaotiques. Nous concluons donc que le compagnon binaire a un impact uniquement négatif sur la limite de stabilité des lunes.

La région où la planète est éjectée et celle où aucune particule ne peut survivre sont confondues. Aucun péricentre de la binaire ne permet la survie de la planète mais pas celle des exolunes dans nos simulations.

6.2 Simulations pour $q_B = 20$

Dans cette seconde section, nous étudions la stabilité de systèmes à quatre corps restreints, composés de deux étoiles d'une masse solaire chacune, de périastres fixés à 20 UA, d'une planète d'une masse de Jupiter en orbite de type S autour de l'étoile et une particule test autour de la planète. La perturbation de la binaire sur la trajectoire de la planète est étudiée. L'impact de la trajectoire perturbée de la planète sur la survie des lunes est ensuite exploré.

6.2.1 Simulations et objectifs

Dans cette section, nous allons étudier la tranche $q_B = 20$ de la figure 6.1 en simulant des systèmes de conditions initiales reprises dans la table 6.4. $q_B = 20 > 18.4$ UA a été choisi car aucun système n'y voit sa planète éjectée dans les simulations précédentes. De plus, la limite de stabilité des lunes varie dans cette tranche de $a_{11} = 0.1 r_{Hill}$ à $a_{11} = 0.4895 r_{Hill}$ en fonction du système. La répartition de la limite de stabilité des lunes dans la zone $q_B \in [19.5, 20.5]$ dans la figure 6.1 est affichée dans la table 6.3 à titre indicatif. Nous voulions étudier la source de cette variabilité. Nous allons voir que l'influence de la binaire domine la dynamique de la planète. Nous verrons aussi que l'orbite modifiée de la planète est la source du changement de la limite de stabilité des lunes.

$0.1 \leq a_{11} < 0.35$	$a_{11} < 0.40$	$a_{11} < 0.45$	$a_{11} < 0.4895$	$0.4895 \leq a_{11}$
16.1%	40.5%	42.2%	0.9%	0.3%

TABLE 6.3 – Répartition en demi-grand axe de la lune stable la plus éloignée dans la tranche $q_B \in [19.5, 20.5]$ de la figure 6.1.

Dans cette section, les particules tests considérées ont $h_0 \in \{0.20, 0.25, 0.30, 0.35, 0.40, 0.45\}$. Ces différents coefficients permettent d'étudier le comportement de particules a différents éloignements de la planète. Au travers de ces simulations, nous avons également essayé de répondre à la question suivante : la binaire déstabilise-t-elle les lunes directement ou indirectement ?

Les lunes $a_{11} = 0.20$ sont toutes stables avec des oscillations périodiques de faibles amplitudes et les lunes $a_{11} = 0.45$ sont très irrégulières et pratiquement toutes éjectées. Dans la table 6.3, nous voyons effectivement que les lunes dont $a_{11} \geq 0.45 r_{Hill}$ sont très rarement stables.

Corps	a (UA)	e	m
Etoile centrale	-	-	1 $m_\odot$
Planète	5.204	0.0487	1 $m_{Jupiter}$
Lune	[0.25 :0.05 :0.40]r_{Hill}	0.0041	0
Compagnon	grille(20,40)	$1 - \frac{20}{a_B}$	1 $m_\odot$

TABLE 6.4 – Paramètres des simulations de la section 6.2.

6.2.2 Résultats des simulations

Étudions l'impact de la binaire sur la planète ainsi que sur la particule. Vu que

$$q_B = a_B(1 - e_B) = 20$$

UA est constant dans cette section, étudier un comportement en fonction de e_B ou de a_B est équivalent. Nous avons choisi arbitrairement de considérer e_B.

Avant d'étudier la stabilité des particule, étudions l'orbite des planètes dans cette classe de systèmes. Comprendre le comportement de la planète permettra de contextualiser les données des lunes. La figure 6.3 indique que la variation en demi-grand axe de la

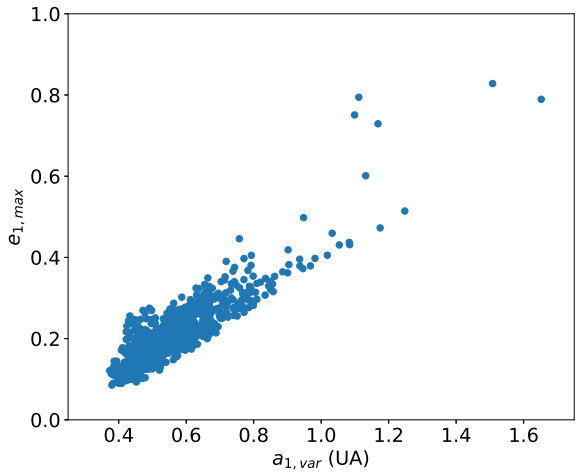


FIGURE 6.3 – La variation en a_1 en fonction du maximum de e_1.

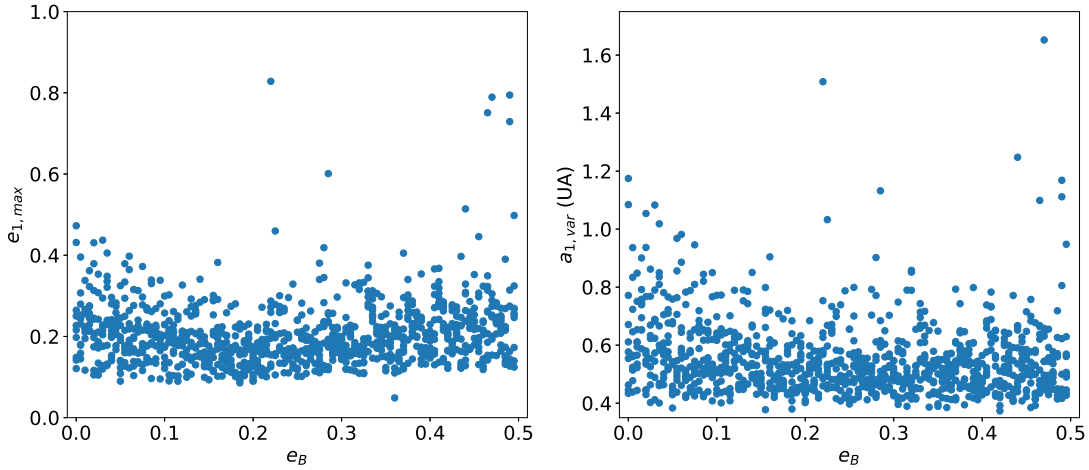


FIGURE 6.4 – Maximum en excentricité et variation du demi-grand axe de la planète en fonction de l'excentricité de la binaire, pour $q_B = 20$.

planète, mesurée comme le maximum moins le minimum, est très fortement corrélée à son maximum en excentricité dans cette classe de simulations. Ceci indique, comme avec a_B et e_B, qu'il suffit de n'en considérer qu'un seul comme mesure de la perturbation de la planète. La figure 6.4 montre quant à elle que la déstabilisation de la planète, mesurée par $e_{1,max}$ et $a_{1,var}$, n'est pas corrélée à l'excentricité de la binaire (respectivement au demi-grand axe de la binaire). La figure 6.4 nous apprend que l'impact de la binaire sur la planète dépend des autres paramètres de la simulation. Elle nous confirme par ailleurs que le comportement de $e_{1,max}$ et de $a_{1,var}$ sont corrélés. Pour la planète, nous nous concentrerons par la suite sur $e_{1,max}$, pour faire le lien avec les formules limites de la section 5.2.

Étudions maintenant le temps de survie des particules en $h_0 \in \{0.25, 0.30, 0.35, 0.40\}$ en fonction de e_B et de $e_{1,max}$, aux figures 6.5 et 6.6. La figure 6.5 montre le lien entre le temps de survie des lunes et l'excentricité maximale que la planète atteint. Nous y affichons aussi la limite approximative $e_{1,crit}$ calculée en (5.7). Pour les lunes en $h_0 = 0.25$, les déstabilisations sont l'exception. Elles n'ont lieu que lorsque la planète est très perturbée

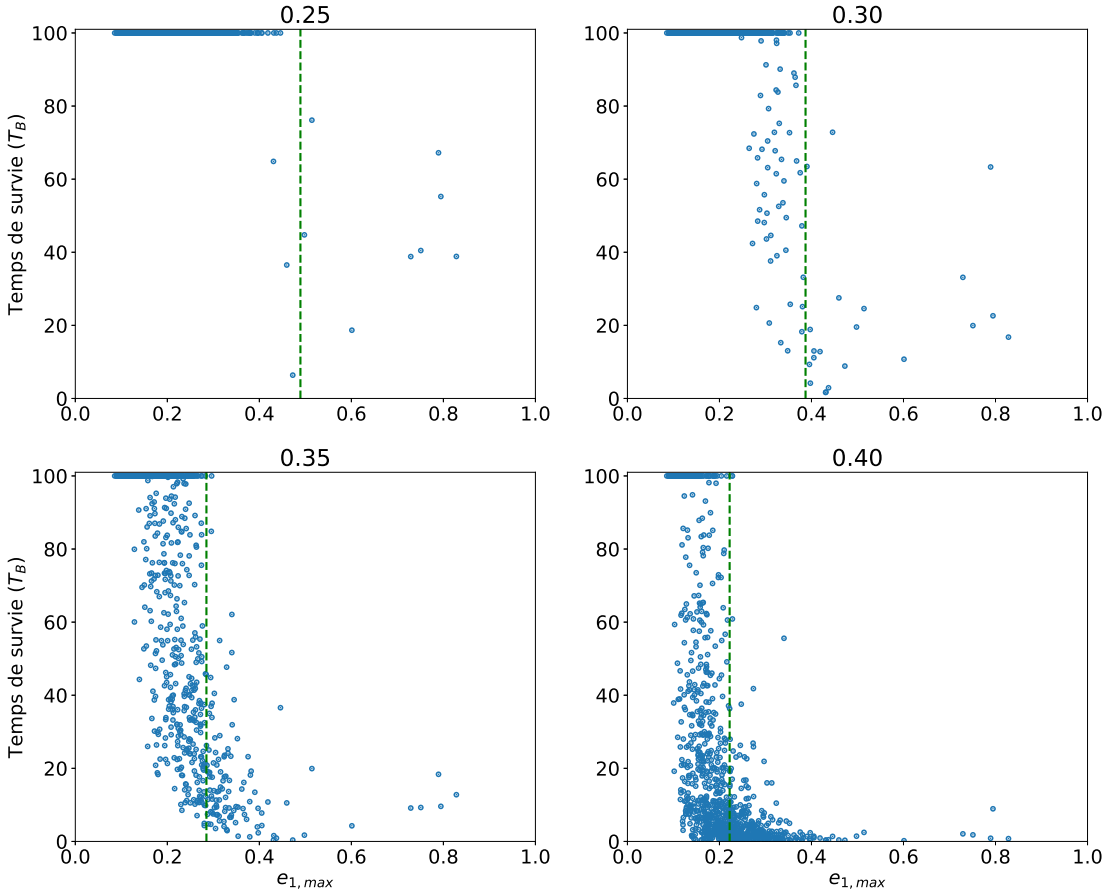


FIGURE 6.5 – Temps de survie des exolunes en fonction de l'excentricité de la binaire, pour $q_B = 20$. Chaque panel a un $h_0 \in \{0.25, 0.30, 0.35, 0.40\}$ différent. La ligne verticale verte indique $e_{1,crit}(h_0)$.

par la binaire, avec $e_{1,max} > 0.4$. La limite $e_{1,crit}(h_0)$ vaut 0.490 : la majorité systèmes ne voient pas leur planètes atteindre cette excentricité. Pour $h_0 \in \{0.30, 0.35, 0.40\}$, les particules peuvent être éjectées même pour une planète peu perturbée. Pour $h_0 = 0.30$, une lune est éjectée dés $e_{1,max} = 0.248$ malgré $e_{1,crit}(0.30) = 0.387$. La lune régulière pour la planète la plus excentrique en $h_0 = 0.30$ survie avec $e_{1,max} = 0.372 \approx e_{1,crit}(0.30)$. Il est probable que cette lune n'aurait pas survécu sur des temps d'intégrations plus longs. La limite $e_{1,crit}$ prédit avec précision l'excentrique à partir de laquelle aucune lune ne survie pour $h_0 \in \{0.30, 0.35, 0.40\}$. Pour chaque coefficient de lunes, les déstabilisations commencent avant $e_{1,crit}$. La stabilité en $h_0 = 0.30$, par exemple, est divisée en trois régions : $e_{1,max} < 0.248$ où aucune particule n'est éjectée ; $0.248 \leq e_{1,max} < 0.372 \approx e_{1,crit}(0.30)$ où les lunes peuvent être soit régulières soit chaotiques et $0.372 \leq e_{1,max}$ où toutes les lunes sont éjectées. En $h_0 = 0.45, e_{1,crit}(h_0) = 0.125$. La plus petite excentricité maximale atteinte pour $q_B = 20$ UA est $\min(e_{1,max}) = 0.086$. Parmi les trois zones possibles (celle où toutes les lunes sont régulières bien avant la limite, une zone mixte avant la limite et une zone totalement chaotique après), seules la zone mixte et la zone chaotique sont présentes pour les particules en $h_0 = 0.45$. Ainsi, la grande majorité des lunes sont éjectées dés le début de la simulation.

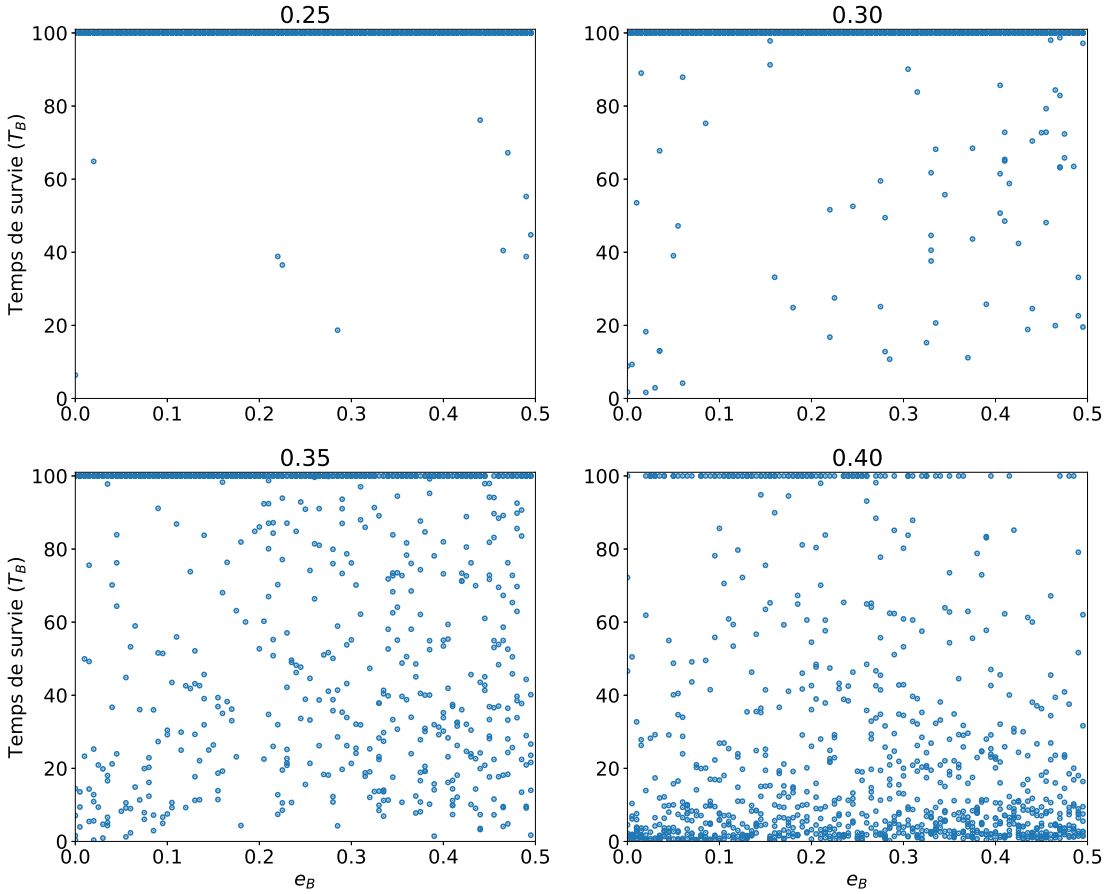


FIGURE 6.6 – Temps de survie des exolunes en fonction de l'excentricité maximale de la binaire, pour $q_B = 20$. Chaque panel a un $h_0 \in \{0.25, 0.30, 0.35, 0.40\}$ différent.

Regardons maintenant le temps de survie des mêmes simulations en fonction de l'excentricité du compagnon à la figure 6.6. Nous n'y voyons aucune corrélation. Les figures 6.3 et 6.4 nous montraient qu'e_B n'a pas d'impact direct sur la planète. Les figures 6.5 et 6.6 nous indiquent que $e_{1,max}$ est un bon indicateur du temps de survie des particules alors qu'e_B n'y est pas corrélé à première vue. Complétons notre réflexion en vérifiant si le couple $(e_{1,max}, e_B)$ ne donne pas plus d'information sur le temps de survie des particules comparé à $e_{1,max}$ seul. A la figure 6.7, nous affichons la survie des lunes en fonction de $e_{1,max}$, où chaque point est coloré en fonction de e_B. Aucun paterne sur la répartition des couleurs n'apparaît. Ainsi, nous concluons que l'orbite du compagnon binaire n'a d'impact sur la dynamique globale des lunes qu'au travers du péricentre q_B. Cette vue d'ensemble sera complétée à la sous-section 6.3.3.

Intéressons nous à l'impact de l'orbite de la planète sur celles des particules. Nous verrons par la suite que les particules n'évoluent pas en demi-grand axe lorsqu'elles sont régulières : étudions donc l'excentricité e_{11}. La figure 6.8 montre l'impact de $e_{1,max}$ sur l'évolution en excentricité des lunes pour les quatre coefficients considérés. Les lunes éjectées avant $100T_B$ sont affichées en rouge. En $h_0 = 0.25$, nous voyons une légère tendance à l'augmentation de l'excentricité des lunes pour une augmentation de $e_{1,max}$. Cette tendance devient plus claire aux lunes en $h_0 = 0.30$, même si une excentricité $e_{11} \approx 0$ reste

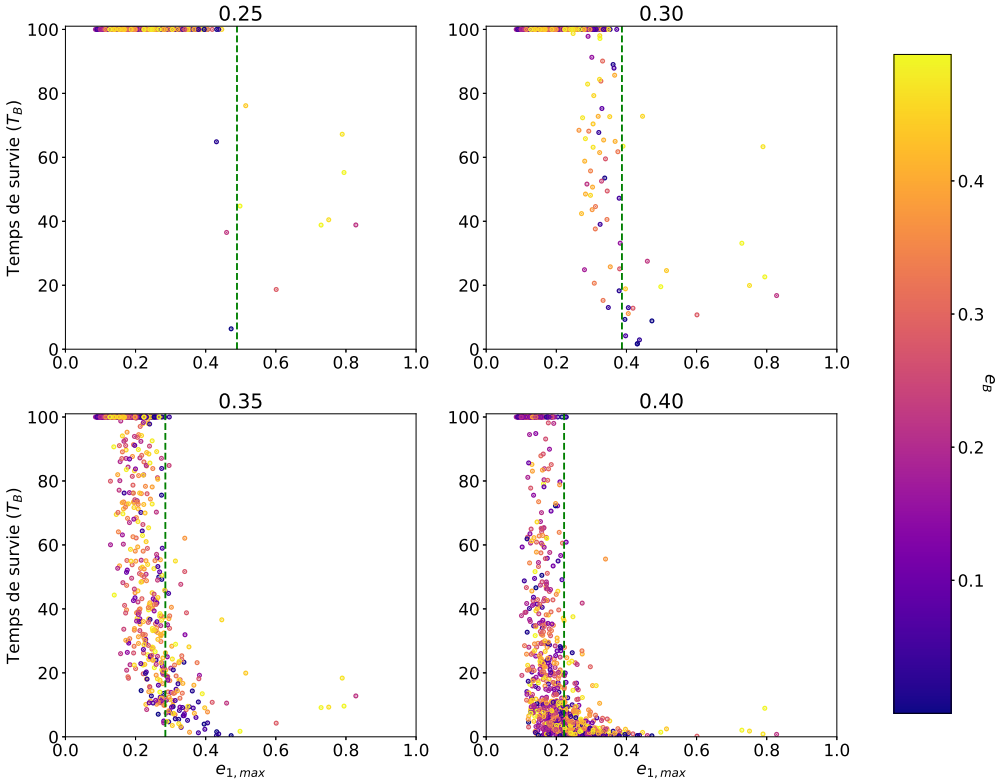


FIGURE 6.7 – Temps de survie des exolunes en fonction de l'excentricité maximale de la planète et de la binaire, pour $q_B = 20$. Chaque panel a un $h_0 \in \{0.25, 0.30, 0.35, 0.40\}$ différent. La ligne verticale verte indique $e_{1,crit}(h_0)$.

possible même pour $e_{1,max} \approx e_{1,crit}$. Cette même tendance reste mais est moins marquée en $h_0 \in \{0.35, 0.40\}$. Ces lunes approchent de la limite de stabilité et sont très chaotiques quel que soit $e_{1,max}$.

Sur analyse des quatre panels de 6.8 en même temps, nous remarquons que les lunes éjectées peuvent avoir des excentricités plus basses lorsque h_0 est plus grand. Ceci s'explique par l'apojove j_{11} de la lune et son excentricité critique (5.9). En $h_0 = 0.25$, la seule lune éjectée a $e_{11} = 0.94 \approx e_{11,crit}(0.25) = 0.96$. En $h_0 = 0.30$, la lune éjectée la moins excentrique a $e_{11} = 0.69 \approx e_{11,crit}(0.30) = 0.63$. Pour ce coefficient, seules 4 lunes parmi les 1000 survivent avec une excentricité supérieure à $e_{11,crit}(0.30)$. En $h_0 = 0.35$, l'excentricité la plus basse parmi les particules éjectées descend à $e_{11} = 0.42 \approx e_{11,crit}(0.40) = 0.40$. La limite semble imprécise en $h_0 = 0.40$ vu que la première lune éjectée a $e_{11} = 0.18 < 0.22 = e_{11,crit}$. Remarquons que cette lune est associée à une planète dont $e_{1,max} > e_{1,crit}$. La lune la moins excentrique éjectée suivante a $e_{11} = 0.28 > e_{11,crit}(0.40)$. Les deux limites approximatives (5.7) et (5.9) sont efficaces dans la caractérisation de la stabilité des lunes.

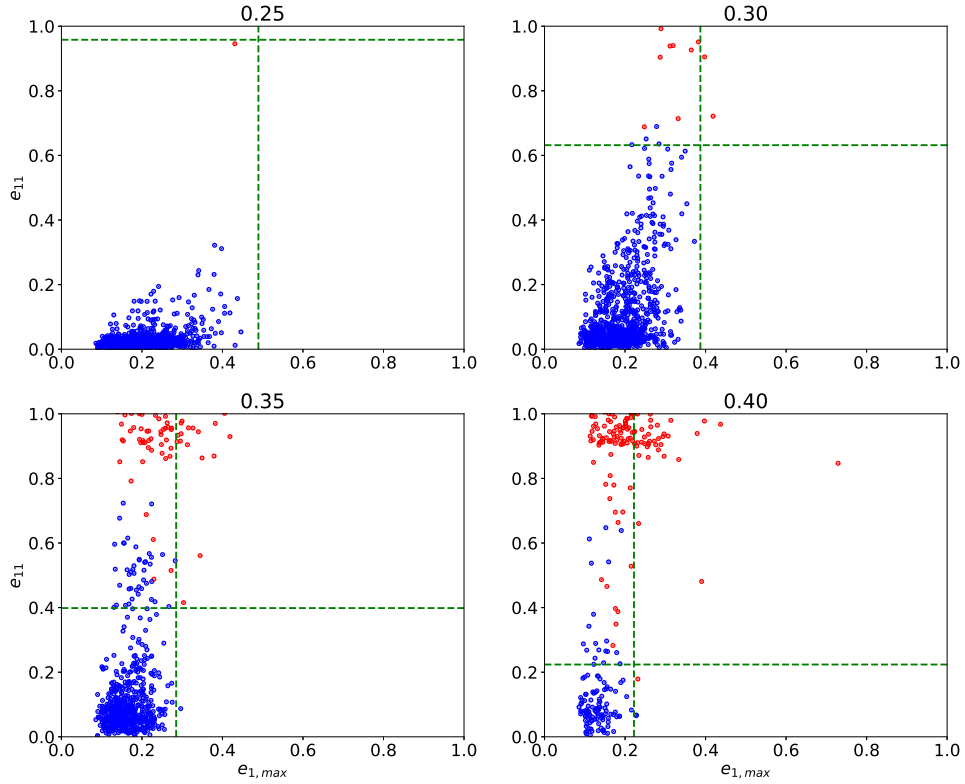


FIGURE 6.8 – Excentricité finale des exolunes en fonction de l'excentricité maximale de la planète pour $q_B = 20$. Chaque panel a un $h_0 \in \{0.25, 0.30, 0.35, 0.40\}$ différent. Les points rouges indiquent des lunes éjectées avant 100 T_B et les points bleus les lunes stables. La ligne verticale verte indique $e_{1,crit}(h_0)$; la ligne horizontale verte indique $e_{11,crit}(h_0)$.

6.2.3 Récapitulatif

Dans cette section, nous avons étudié 1000 systèmes avec $q_B = 20$ UA, pour des excentricités $e_B \in [0; 0.5]$. Nous avons vu que le paramètre e_B n'est pas un indicateur de la perturbation que le compagnon exerce sur la planète ou la particule du système. Nous avons vu que $a_{1,var}$ et $e_{1,max}$ étaient fortement corrélées et avons donc étudié les comportements en fonction de $e_{1,max}$ uniquement.

Nous avons vu que les temps de survie des particules de divers coefficients h_0 sont corrélés à $e_{1,max}$. L'excentricité de la planète joue un rôle dans la prédiction de l'éjection des lunes grâce à l'excentricité critique (5.7). L'excentricité de la planète est également corrélée à la croissance en excentricité des particules. L'excentricité des lunes permet aussi de prédire l'éjection des lunes grâce à la seconde excentricité critique (5.9).

6.3 Dynamique d'un système particulier

Dans cette section, nous allons étudier un système particulier de la section précédente afin de mieux comprendre le temps de survie des différentes lunes. Le choix de ce système particulier est justifié à la sous-section 6.3.3. Puisque nous ne simulons qu'un seul système,

le coût en calcul et en stockage de données est fortement réduit, ce qui nous permet d'étudier de nombreuses lunes dans la zone $[0.25; 0.5]r_{Hill}$. Les conditions initiales du système étudié sont reprises dans la table 6.5, dont les principales sont $a_B = 30.77$ UA et $e_B = 0.35$. Nous allons dans un premier temps analyser le comportement de la planète dans ce système particulier, en guise de contexte. Le comportement de la planète de cette section sera le même dans la section 6.4. Nous verrons dans un second temps l'évolution des lunes. Ces simulations avaient comme but de confirmer les comportements de la sous-section 6.2.3 et de voir si certains coefficients h_0 menaient à des comportements complexes, comme des résonances. Nous verrons en particulier le rôle de la résonance d'évection dans l'éjection des lunes.

Corps	a (UA)	e	m
Etoile centrale	-	-	1 $m_\odot$
Planète	5.204	0.0487	1 $m_{Jupiter}$
Lune	grille(0.25,0.5)	0.0041	0
Compagnon	30.77	0.35	1 $m_\odot$

TABLE 6.5 – Paramètres de la simulation particulière étudiée, de péricentre de la binaire est fixé à 20.

6.3.1 La planète de ce système

Le comportement de la planète est le même indépendamment de la particule test étudiée et est donc central à la compréhension de la stabilité. Nous n'étudions pas l'orbite du compagnon, que nous supposons constante vu la différence de masse : $m_1 = 0.000954 m_\odot << m_0 = m_B = m_\odot$.

Nous voyons sur la figure 6.9 que l'échelle de temps caractéristique de l'orbite de la planète est 117 années, la période de la binaire prédite par la troisième loi de Kepler

$$T_B = \frac{2\pi a_B^{3/2}}{\sqrt{G(m_0 + m_B)}}.$$

L'échelle de temps est mise en évidence en traçant les lignes verticales bleues à chaque temps t tel que l'excentricité e_1 soit à un maximum local. Notons que le maximum global en excentricité de la planète est $e_{1,max} = 0.126$. Ce temps t correspond au moment où a_1 varie le plus et où ϖ_1 circule brièvement. M_B est affiché dans un dernier panel avec une ligne horizontale marquant la valeur de M_B lors du premier pic en excentricité. Les intersections entre les lignes verticales et la ligne horizontale dans ce panel correspondent toujours à la valeur de M_B. L'orbite de la planète évolue donc en fonction de la position du compagnon dans l'espace.

Nous concluons donc que, pour q_B fixé, la valeur de a_B et e_B ont un impact sur les échelles caractéristiques de la dynamique du système au travers $T_B \propto a_B^{3/2}$. Ceci enrichit notre compréhension de la dynamique de la sous-section 6.2.3, où a_B et e_B ne semblaient pas apporter d'informations.

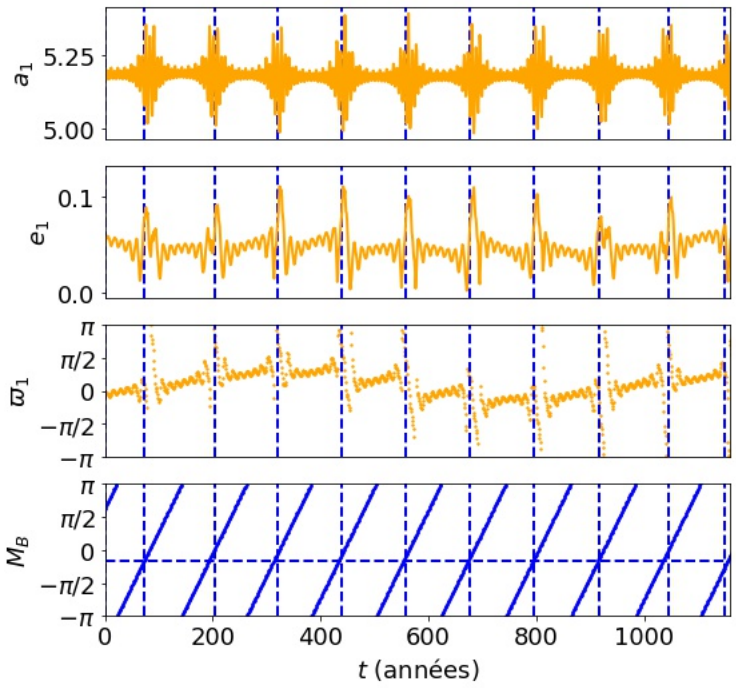


FIGURE 6.9 – (a_1,e_1,ϖ_1) la planète en fonction du temps, juxtaposé à M_B. Les lignes verticales bleues correspondent aux maximum locaux en excentricités. La ligne horizontale bleue correspond à M_B au premier pic en excentricité de la planète.

6.3.2 Temps de survie des lunes

Maintenant que nous connaissons le comportement de la planète, étudions le comportement des lunes en orbite autour d'elle. Les particules considérées ont $h_0 \in [0.25; 0.50]$. Le temps de survie de ces particules sont affichées à la figure 6.10. Cette figure comprend aussi l'évolution des excentricités et des demi-grands axes des lunes, vu leur importance dans la stabilité. Les lignes verticales indiquent la limite en $h_{crit} = 0.4895$ et la limite ajustée $h_{e_1,crit} = 0.4278$ (5.8) pour $e_{1,max} = 0.126$. La courbe verte dans le panel en excentricité indique l'excentricité $e_{11,crit}$ en fonction du coefficient h_0 associé.

Considérons le temps de survie des lunes. Pour ce système, la limite h_{crit} ne capture pas du tout le profile de stabilité des lunes. La limite ajustée est quant à elle proche du plus grand coefficient permettant la survie de la particule. Les particules en $h_0 \in [0.25; 0.37[$ sont toutes régulières sur 100 T_B. En $h_0 = 0.37$, la première particule est éjectée. Des lunes restent régulières jusqu'en $h = 0.414 \approx h_{e_1,crit} = 0.4278$. Pour $h_0 \geq 0.414$, plus aucune lune ne survie pendant cent périodes de la binaire.

Le panel des demi-grands axes des lunes indique que les lunes stables n'évoluent pas beaucoup en demi-grand axe. Leur demi-grand axe oscille autour de sa valeur initiale selon une amplitude croissante avec h_0. Parmi les lunes stables, la plus grande amplitude observée en a_{11} est de 7.1%.

Jusqu'ici, nos résultats collent à ceux de la section précédente : les lunes plus hautes sont plus perturbées. Dédions maintenant une sous-section à l'analyse du panel en excentricité, où nous verrons que ce comportement simple est couplé à un comportement plus compliqué.

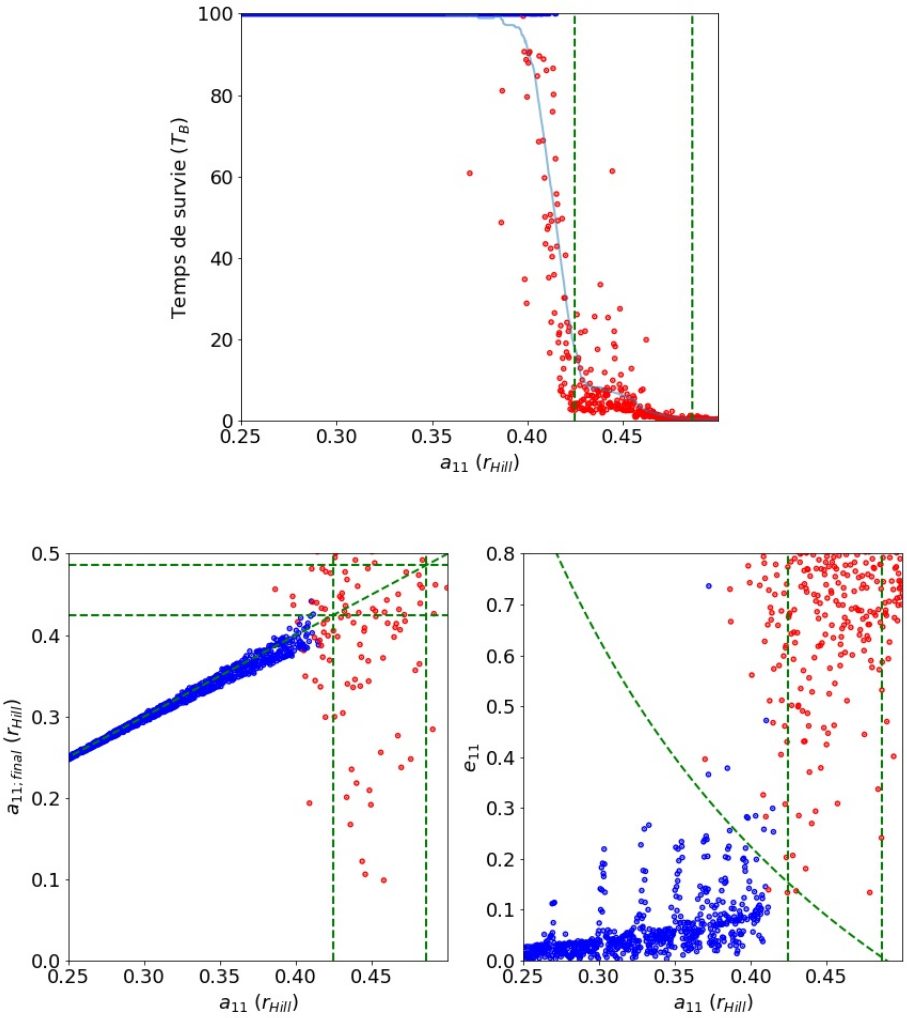


FIGURE 6.10 – Le temps de survie des particules test, l'évolution de leur demi-grand axe et de leur excentricité en fonction du demi-grand axe initial. Les points rouges indiquent des particules éjectées avant 100 T_B et les points bleus les lunes ayant survécu. Les lignes verticales et horizontales indiquent $h_{e_1,crit} = 0.4278$ et h_{crit}. La courbe en excentricité indique $e_{11,crit(h_0)}$.

6.3.3 Pics d'excentricité et résonance d'évection

Étudions le panel en excentricité de la figure 6.10, où les lignes verticales indiquent $h_{crit} = 0.4895$ et $h_{e_1,crit} = 0.4278$ et la courbe indique $h_{e_{11},crit}$. Certaines particules survivant pendant 100 T_B voient leur l'excentricité croître jusqu'à $e_{11} = 0.4$, avec un cas extrême en $e_{11} = 0.75$. Essayons de comprendre l'origine de ces pics en excentricité. Le choix du système particulier étudié dans cette section s'est fait sur la clarté des pics. Notons que les pics étaient présents dans toutes les simulations.

La figure 6.11 affiche les mêmes données que la figure 6.10 mais avec la période de la lune T_{11} à la place de son demi-grand axe, avec un zoom sur les coefficients avant $h = 0.414$. La première observation intéressante est que toutes les particules éjectées isolées dans la zone mixte $h_0 \in [0.37; 0.414]$ sont dans des pics d'excentricités. Leur éjection s'expliquent donc par la croissance de leur excentricité au-delà de $e_{11,crit}$, et donc de leur apocentre au-delà de la limite de stabilité.

La deuxième observation est que chaque pic est une harmonique des autres. Ceci est

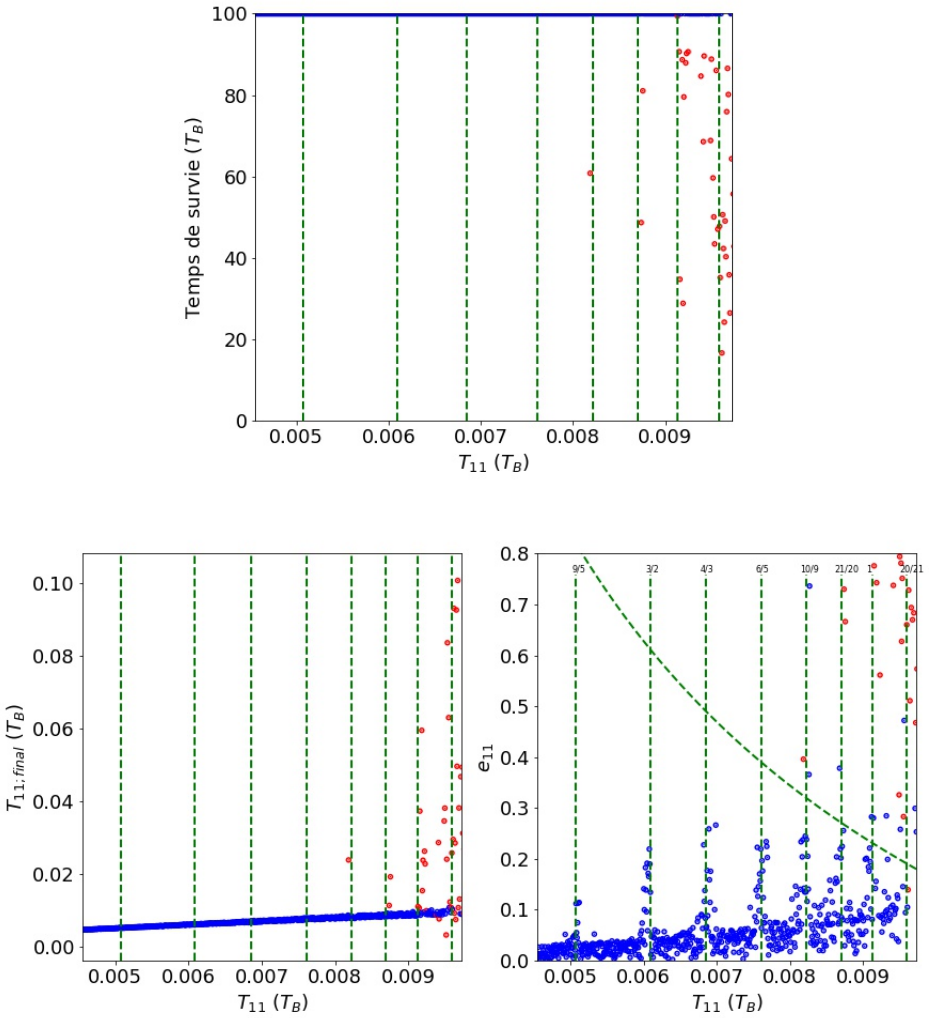


FIGURE 6.11 – Le temps de survie des particules test, l'évolution de leur demi-grand axe et de leur excentricité en fonction de la période initiale. Les points rouges indiquent des lunes éjectées avant 100 T_B et les points bleus les lunes régulières. Les lignes verticales vertes sont aux différents pics en excentricités, annotées d'une fraction correspondant au ratio de la période entre la période au pic et celle de référence, marquée par "1".

mis en évidence par les fractions au dessus des lignes verticales. L'avant-dernier pic est pris comme référence arbitrairement. Chaque autre pic s'exprime comme une fraction de cette référence. Nous n'avons pas su trouver de justification analytique ou intuitive de cette observation mais la trouvions intéressante à relever.

Comme l'indique la figure 6.12, la fréquence de précession des différentes lunes change au fil du temps et est liée à la présence ou absence d'excitation en excentricité. Dans les deux panels du haut de la figure 6.12, associés à deux lunes non résonantes, l'argument du péricentre circule sans suivre de paterne bien défini. Le demi-grand axe oscille autour de sa valeur initiale selon une amplitude croissante avec h_0. L'excentricité oscille entre un minimum valant près de 0 et un maximum croissant avec h_0. Ce comportement est le même que celui des particules hors des pics de la figure 6.10 et colle aux conclusions de la sous-section 6.2.3.

Dans les deux panels inférieurs, associés à des particules dans deux pics différents, la longitude du péricentre a un comportement très différent d'en dehors des pics. La particule test en $h_0 = 0.300$ entre périodiquement dans un régime où ϖ_{11} circule ou libre. Dans

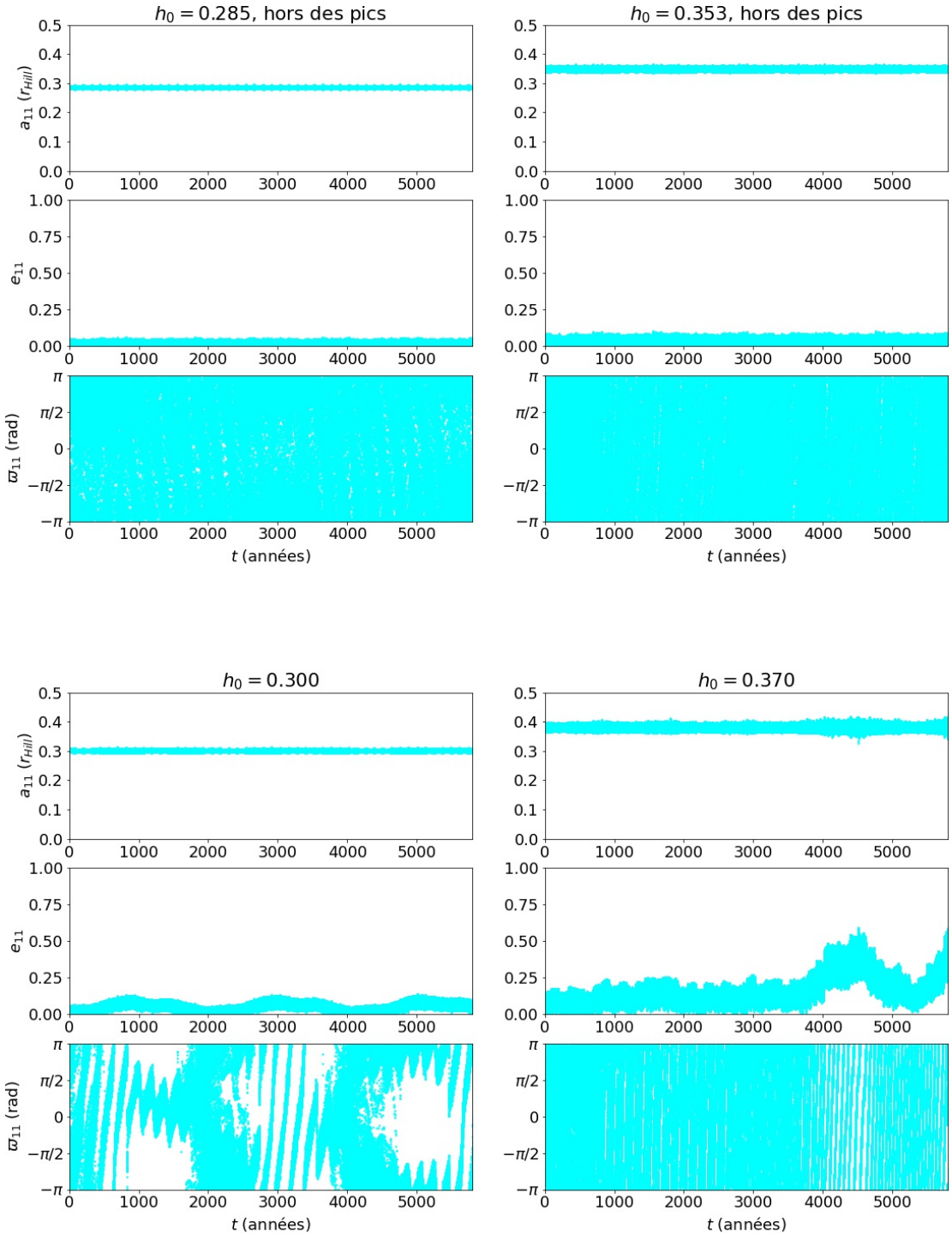


FIGURE 6.12 – $(a_{11}, e_{11}, \varpi_{11})$ de quatre lunes : deux des lunes sont dans des pics et les deux autres lunes sont hors des pics.

ce régime, l'excentricité croît jusqu'à $e_{11} = 0.154$, presque trois fois son maximum hors de ce régime. Entre chaque moment où ϖ_{11} circule ou libre car la lune est en résonance d'évection avec le compagnon stellaire, ϖ_{11} évolue sans paterne. Les moments où ϖ_{11} évolue chaotiquement sont associés à une excentricité oscillant entre 0 et un maximum local valant 0.058. Ainsi, e_{11} évolue comme hors des résonances : elle oscille entre 0 et le maximum dépendant de h_0. La longitude du péricentre de la particule en $h_0 = 0.370$ circule à différentes vitesses. En 4000 années, la vitesse permet la résonance d'évection : l'excentricité croît jusqu'à 0.6346. La vitesse change à nouveau vers 4700 années et la résonance est brisée. Le maximum en excentricité redescend jusqu'à $e_{11,max} \approx 0.2$. Lorsque la vitesse de la longitude du péricentre redevient celle permettant la résonance, l'excentricité de cette particule grandit, menant à son éjection, comme le montre la figure 6.13. Ceci illustre l'importance de ces résonances dans la stabilité : les lunes peuvent être régulières jusqu'à $h = 0.414$ mais les résonances d'évection endéans la limite, dont celle en $h \approx 0.37$, peuvent mener à l'éjection de certaines lunes.

La figure suivante 6.13 compare la particule en $h_0 = 0.370$ à la particule en $h_0 = 0.372$. Cette dernière est dans la même résonance mais n'est pas éjectée sur les 100 périodes binaires considérées. Nous voyons que la particule $h_0 = 0.370$ atteint une excentricité de 0.7 vers 6100 années. Ceci mène à un changement chaotique de son orbite. Son demi-grand axe chute soudainement et la vitesse de précession ralentit. Moins de 150 années plus tard, cette trajectoire mène à l'éjection de la particule. L'éjection de cette lune est prédite par $e_{11,crit}(0.370) = 0.32$. Cette particule dépasse $e_{11,crit}$ précédemment, lors de la résonance entre 4000 et 4800 années. Nous voyons donc que l'éjection n'est pas systématique lorsque $e_{11} > e_{11,crit}$. La particule en $h_0 = 0.370$, en particulier, a survécu à son premier passage au dessus de la limite en excentricité mais pas au second. La particule en $h_0 = 0.372$ ne subit pas la même croissance en excentricité : e_{11} n'atteint même pas 0.5. Cette particule ne subit pas le changement drastique de dynamique et survit à la résonance. Il est par contre probable que cette lune serait éjectée sur des temps d'intégrations plus long, lors d'un futur pic en excentricité causé par une résonance.

Le mécanisme derrière ces pics est une résonance d'évection, présente dans les configuration étoile-planète-lune. Une résonance d'évection apparaît lorsque la période associée à la précession de la lune correspond à la période orbitale de l'étoile autour de la planète. L'angle résonant général est

$$\vartheta_{p:q} = p\varpi_{11} - q\lambda_0,$$

où

$$\lambda = \omega + \Omega + M.$$

Les angles faisant intervenir λ_0 ne librent jamais : la période de la primaire autour de la planète est $T_0 = 11.87$ années, soit dix fois moins que $T_B = 117$ années. La précession de ϖ_{11} est trop lente pour qu'un mécanisme d'évection s'enclenche avec la primaire. Nous considérons donc uniquement λ_B.

Prenons comme premier exemple de la résonance d'évection celle en $h \approx 0.268$, dont deux systèmes sont affichés à la figure 6.14. Pour la lune en $h_0 = 0.268$, l'angle résonant $\vartheta_{1:5}$ ne libre qu'après 3000 années. L'excentricité de la lune grandit jusqu'à $e_{11} = 0.17 << e_{11,crit}(0.268) = 0.83$. La lune proche $h_0 = 0.269$ rentre en résonance plus tard encore, en $t = 5500$ années. Son excentricité croît jusqu'à la même valeur. D'autres pics ont d'autres angles résonants : le mécanisme est le même et n'est pas affiché pour ne pas surcharger le rapport.

Dans nos simulations, comme nous l'avons vu, la vitesse de précession de ϖ_{11} change dans le temps. Par conséquent, pour certaines particules en résonance, plusieurs angles

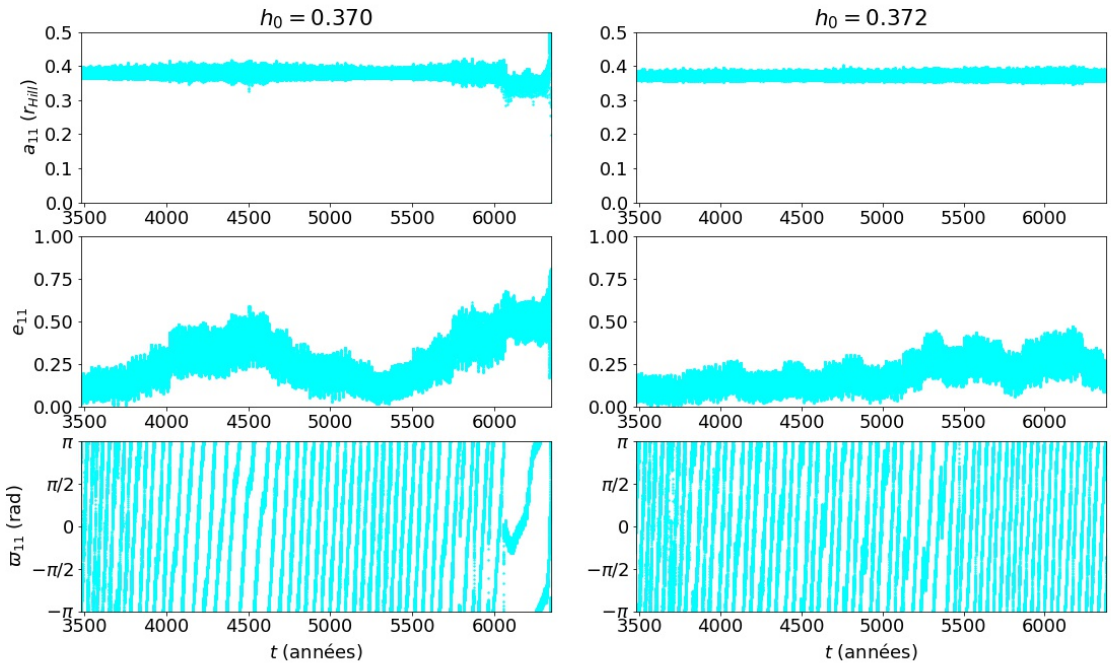


FIGURE 6.13 – $(a_{11}, e_{11}, \varpi_{11})$ pour deux particules dans le même pic, une éjectée (gauche) et une non (droite).

résonants différents librent. C'est le cas de la résonance en $h \approx 0.352$ et de celle en $h \approx 0.370$. Pour la particule en $h_0 = 0.352$, affichée à la figure 6.15, l'angle $\varpi_{11} - 2\lambda_B$ est le premier à librer. L'excentricité est affectée et croît jusqu'à 0.25. Après cela, c'est l'angle $2\varpi_{11} - 3\lambda_B$ qui libre, menant à une plus grande excitation de l'excentricité : elle atteint jusqu'à $0.49 > e_{11,crit} = 0.39$. Après 6000 années, l'angle résonant initial libre à nouveau, menant à nouveau à une excitation moindre vers $e_{11} \approx 0.25 < e_{11,crit}$. Ceci colle aux résultats précédents : aucune lune n'est éjectée dans cette résonance à la figure 6.10. Pour des temps d'intégrations plus longs, il est probable que cette particule soit éjectée vu sa trajectoire chaotique.

Pour la lune en $h_0 = 0.372$, l'angle résonant librant en premier est $\vartheta_{1:2}$. Il libre pour t entre 5000 et 6700 années. La libration est loin d'être parfaite mais elle suffit à ce que l'excentricité croisse jusqu'à $0.45 > e_{11,crit} = 0.32$. Passé $t = 6700$ années, c'est l'angle $\vartheta_{1:1}$ qui libre. L'excentricité continue à grandir jusqu'à ce que la particule soit éjectée. Dans la résonance correspondante en 6.10, une lune est éjectée. Les résonances ont un plus grand impact sur la stabilité lorsque h_0 grandit. D'une part, l'excentricité maximale hors résonance et en résonance sont plus grandes à cause de la proximité relative des étoiles et d'autre part la limite en excentricité $e_{11,crit}(h_0)$ est plus basse.

6.3.4 Comparaison sans le compagnon stellaire

Pour insister sur l'importance du compagnon et des résonances dans le profil de stabilité, considérons brièvement les mêmes simulations sans le compagnon. La simulation devient un problème des trois corps restreint. L'unique étoile et la planète évoluent comme dans un problème des deux corps : $(a_1, e_1, \omega_1, i_1, \Omega_1)$ sont constants et M_1 grandit linéairement avec le temps. En particulier, pour tout temps, $e_{1,max} = e_1 = 0.0487$.

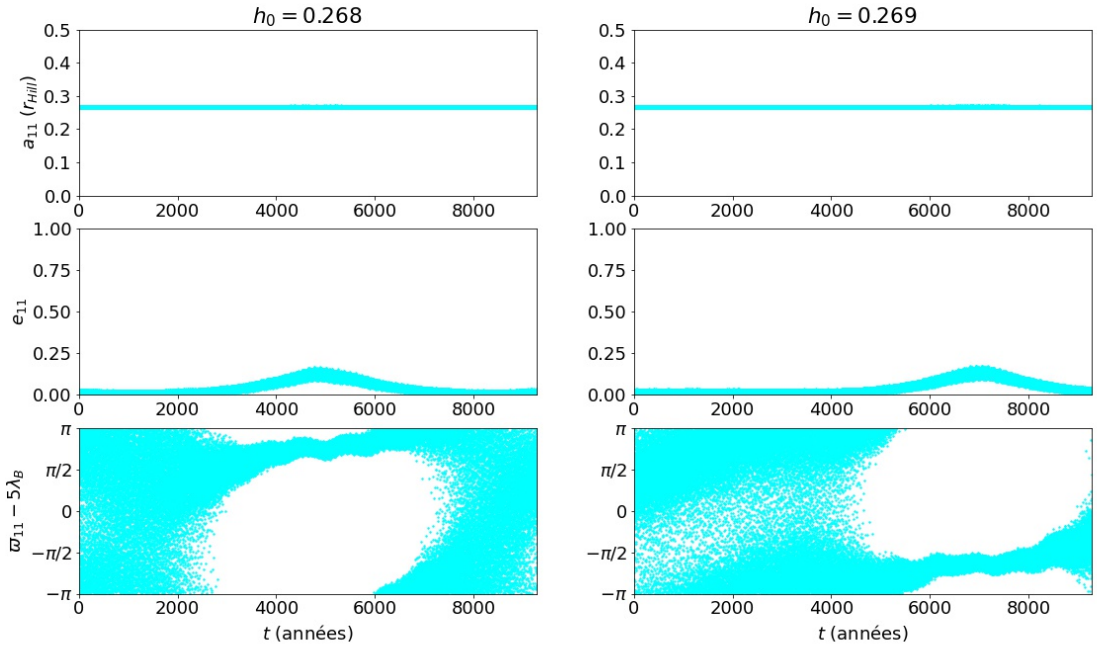


FIGURE 6.14 – $(a_{11}, e_{11}, \vartheta_{1:5})$ pour deux particules dans la même résonance.

Nous avons refait les deux panels importants de la figure 6.10 pour les mêmes simulations sans le compagnon. Les résultats de ces simulations sont affichées en 6.17, avec en haut les simulations avec compagnon stellaire et en bas sans. Les panels de droites montrent que les pics en excentricités dus aux résonances d'évections disparaissent lorsque la binaire est retirée. En effet, la résonance avec le compagnon n'est plus possible. L'excentricité ne croît donc plus aux demi-grands axes correspondants aux résonances. L'évection comme mécanisme de croissance de l'excentricité e_{11} est donc confirmé. Le compagnon stellaire peut donc bien perturber directement les particules.

Considérons maintenant les panels de gauche de la figure 6.17 pour voir l'effet de déstabilisation indirect. Dans le cas avec compagnon, étudié jusqu'ici, l'excentricité de la planète atteint jusqu'à 0.126. Les particules peuvent être éjectées dés $h = 0.37$. Toutes les particules sont éjectées après $h = 0.414$. Sans le compagnon, l'excentricité constante vaut $e_1 = 0.0487 = e_{1,max}$ et le rayon de la sphère minimale de Hill est une constante du système. La limite ajustée $h_{e_1,crit}$ vaut donc h_{crit} : le facteur prenant en compte le changement de la sphère de Hill $\frac{1-e_{t_1}}{1-e_{t_0}}$ dans (5.8) vaut 1. La particule la plus basse éjectée dans les simulations sans le compagnon est en $h_0 = 0.43$. Cette particule marque le début d'une petite zone totalement chaotique pour $h_0 \in [0.43; 0.44]$. Nous n'avons pas su l'expliquer mais elle correspond probablement à un mécanisme de résonance vu sa taille et la croissance locale en excentricité. Après cette zone, les particules ayant $h_0 \in [0.44; 0.45]$ sont majoritairement des lunes régulières mais elles ont toutes une excentricité supérieure à $e_{11,crit}$. Nous pensons donc que ces lunes auraient été éjectées sur des temps d'intégration plus longs. Nous avons préféré travailler sur les systèmes avec des binaires et n'avons pas eu le temps de tester cette hypothèse. La limite de stabilité sans compagnon vaut $h \approx 0.452$. Ceci s'approche de la valeur de la stabilité $a_{11,lim} = 0.464$ prédite par (5.1) pour les problème des trois corps restreints lorsque $e_1 = 0.0487$.

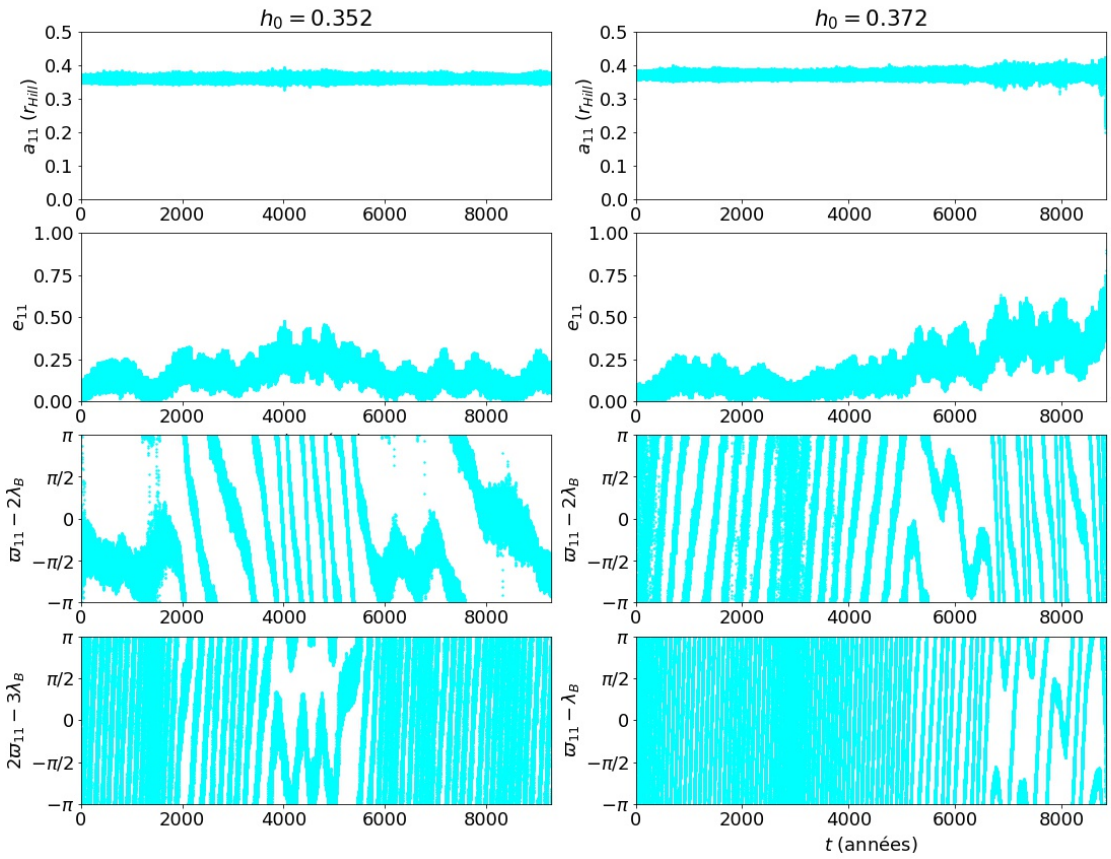


FIGURE 6.15 – $(a_{11}, e_{11}, \vartheta_{1:2}, \vartheta_{2:3})$ pour une particule dans deux résonances en même temps.

FIGURE 6.16 – $(a_{11}, e_{11}, \vartheta_{1:2}, \vartheta_{1:1})$ pour une particule dans deux résonances en même temps.

6.3.5 Récapitulatif

Dans cette section, nous avons étudié en profondeur un système particulier pour $q_B = 20$ UA. Nous avons vu comment le compagnon affectait l'orbite de la planète et en particulier, l'importance de T_B dans la dynamique. Nous avons confirmé les résultats de la section 6.2 pour la majorité des lunes. Le résultat le plus important à relever de cette section est que, pour des demi-grands axes spécifiques des particules, une résonance d'évection entre la particule et le compagnon mène à une croissance de l'excentricité de la particule. La zone mixte de stabilité avant la vraie limite de stabilité est dominée par les résonances d'évection. Nous avons vu que les limites (5.8) et (5.9), malgré les hypothèses dans leur construction, aide à interpréter les données.

6.3.6 Discussion des objectifs initiaux

Lors du début de ce projet, nous avions considéré chercher une formule pour la limite en stabilité en présence d'un compagnon, d'expression similaire à (5.1) et à (5.3). Une telle formule interpolée aurait demandé un nombre de simulations bien plus grand et une meilleure exploration de l'espace de phase. Nous avons considéré que chercher une telle formule dépassait le cadre d'un stage de recherche de trois mois.

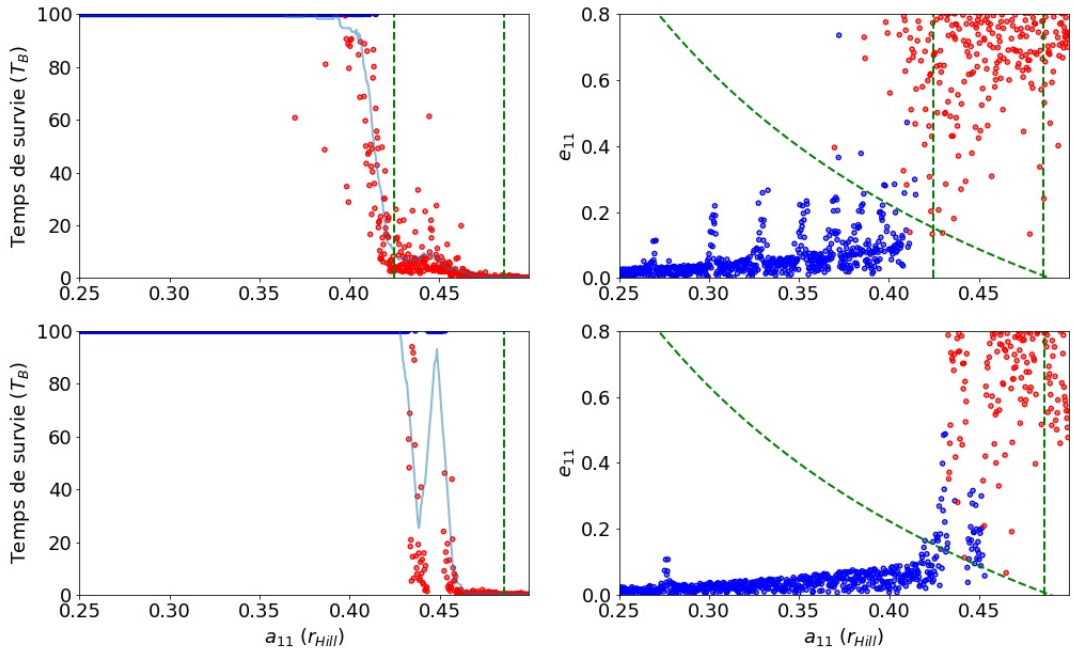


FIGURE 6.17 – Compare le temps de survie des lunes pour le système à la figure 6.10 dans le cas où la binaire est retirée. Panels du haut : avec binaire. Panels du bas : sans binaire. Les lignes vertes indiquent les différentes limites $h_{crit}, h_{e_1,crit}$ et $e_{11,crit}(h_0)$ en fonction du $e_{1,max}$ de la simulation.

De surcroît, une telle formule aurait été réductrice. Malgré l'existence d'un h tel que $h_0 \geq h$ garantit l'éjection de la particule, il existe des particules en résonances d'évection avec le compagnon éjectées malgré un coefficient inférieur à h. De plus, en présence d'une binaire, la trajectoire de la planète évolue dans le temps et donc son rayon de Hill aussi. La limite en stabilité peut alors être définie en terme du rayon de Hill initial ou en terme du rayon de Hill minimal le long de la simulation, par exemple, mais une formule interpolée ne traduira pas vraiment la complexité des comportements observés selon nous.

6.4 Simulations avec des lunes massives

6.4.1 Simulations et objectifs

Dans cette section, nous allons étudier des systèmes avec des paires de lunes de la masse d'Io. Si nous étudiions un système avec une seule lune massive, nous obtiendrions des résultats équivalents à ceux de la section précédente. A cause de la différence en ordre de grandeur des masses ($m_{Io} = 4.49\times10^{-8}m_\odot << m_{Jupiter} = 9.54\times10^{-4}m_\odot << m_0 = 1m_\odot$), la lune n'affecterait pas les autres corps. Les trois corps précédemment massifs auraient donc le même comportement que pour une lune sans masse.

Nous reprenons donc les conditions initiales de la section précédente en donnant une masse à la lune et en y ajoutant une seconde lune massive interne. Ces deux lunes auront la masse d'une fois Io, soit $4.490\times10^{-8}m_\odot$. Vu leur petite masse, elles n'ont aucun impact sur les orbites des étoiles ou de la planète. Ainsi, les figures et les interprétations de la sous-section 6.3.1 restent vraies dans cette section. Le ratio de masse entre lune est par

Corps	a (UA)	e	m
Etoile centrale	-	-	1 $m_\odot$
Planète	5.204	0.0487	1 $m_{Jupiter}$
Lune 1	$a_{1:2}$	0.0041	1 m_{Io}
Lune 2	grille(0.1,0.5)	0.0041	1 m_{Io}
Compagnon	30.77	0.35	1 $m_\odot$

TABLE 6.6 – Même paramètres qu'en 6.5 avec une lune supplémentaire. Les lunes sont massives et la lune supplémentaire interne est telle que $T_2/T_1 = 2$.

contre de

$$\frac{m_{12}}{m_{11}} = \frac{m_{Io}}{m_{Io}} = 1 :$$

elles auront de l'impact sur la dynamique l'une de l'autre. C'est cette interaction qui nous intéresse dans cette section. Nous cherchons à voir si la lune interne va rendre la lune externe plus stable. D'une part, nous allons voir si les formules précédemment étudiées restent d'applications pour la lune externe en présence de la lune interne. D'autre part, nous allons voir si les lunes massives induisent un changement de la vitesse de précession de $\varpi_{1.}$ et comment la résonance d'évection est affectée.

Pour étudier l'impact de l'interaction de deux lunes massives, nous avons considéré générer aléatoirement des paires de lunes. En particulier, nous avons considéré générer $a_{11} = h_{0,1} r_{Hill}$ et $a_{12} = h_{0,2} r_{Hill}$ aléatoirement pour $h_{0,1}, h_{0,2} \in [0.1; 0.5]$. Ceci aurait introduit beaucoup trop d'aléatoire et aurait rendu l'étude des résultats trop complexe étant donné le temps qu'il nous restait pour ce projet. Nous avons donc considéré des lunes massives internes choisies avec un demi-grand axe $a_{1:2}$ tel que

$$\frac{T_{12}}{T_{11}} = 2.$$

Les lunes ainsi positionnées peuvent entrer en résonance en moyen mouvement 2 :1 et potentiellement interagir plus fortement. Pour vérifier si les lunes entrent bien en résonance, nous afficherons un des deux angles résonants

$$\theta_{2:1} = \lambda_{11} - 2\lambda_{12} + (1-i)\varpi_{11} + i\varpi_{12}, \quad i \in \{0; 1\}.$$

Ces conditions initiales sont résumées dans la table 6.6.

6.4.2 Résultats

A la figure 6.18, nous voyons le temps de survie des lunes massives externes avec les mêmes marquages en h_{crit}, $h_{e_1,crit}$ et $e_{11,crit}$ qu'à la figure 6.10. Lors des simulations pour les lunes massives, nous connaissions l'importance de $e_{11,max}$ et l'avons donc gardé. Elle est donc affichée plutôt que l'excentricité finale. Notons que la lune éjectée était toujours la lune externe, d'une part parce qu'elle est par définition plus éloignée de la planète et d'autre part parce que la lune interne n'est jamais dans un pic en excentricité assez fort, comme le montre la figure 6.19. Nous y voyons que l'excentricité de la lune interne, pour un coefficient h égal, évolue de la même manière que l'excentricité de la lune externe hors

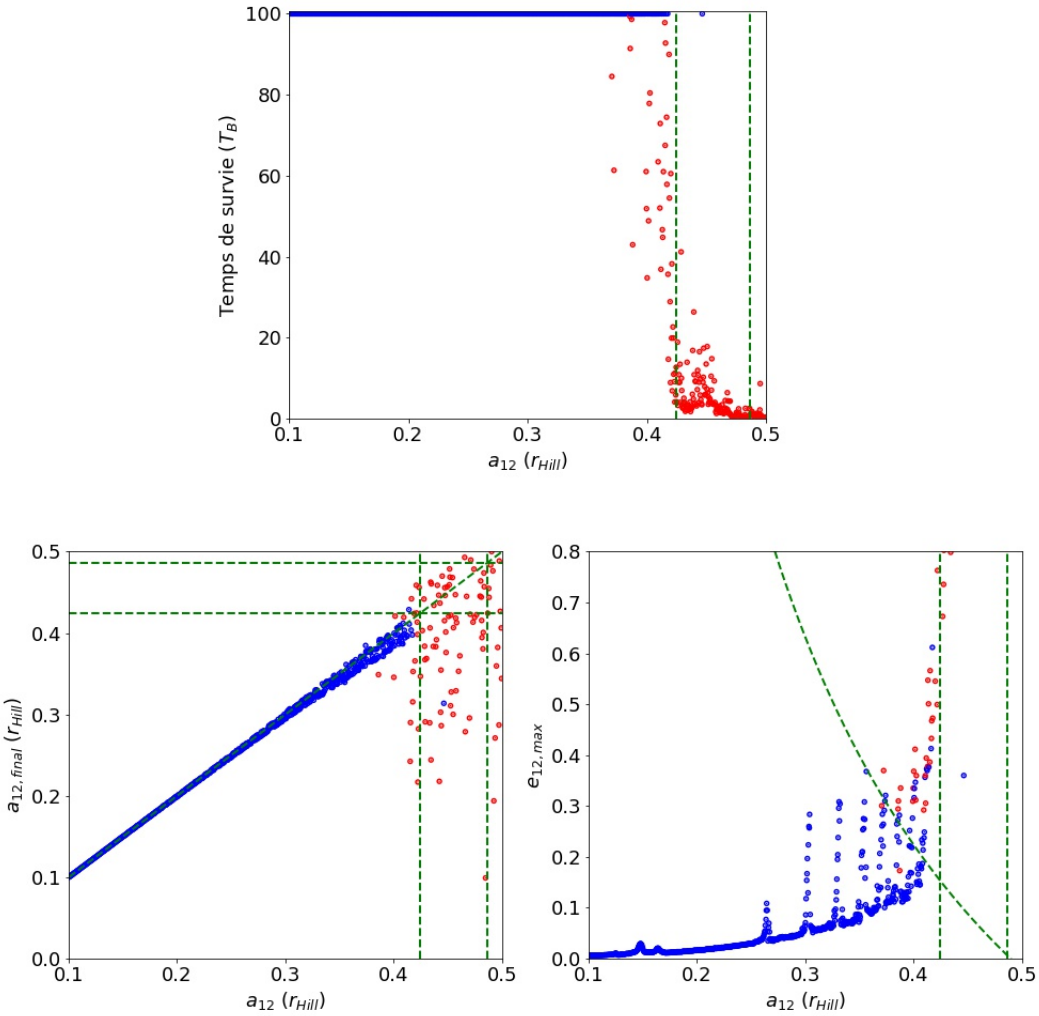


FIGURE 6.18 – Le temps de survie des systèmes à lunes massives, l'évolution du demi-grand axe et de l' excentricité de la lune externe en fonction de son demi-grand axe initial. Les points rouges indiquent des lunes externes éjectées avant 100 T_B et les points bleus les lunes stables. Les lignes vertes ont la même signification qu'en 6.10.

d'une résonance. Nous pouvons conclure que la précession de ϖ_{11} supplémentaire engendrée par la lune 12 empêche la résonance d'évection de s'enclencher dans ces systèmes. l'exception à cette règle est le pic en $h_{0,1} = 0.219$, dont nous parlerons plus tard dans cette section.

Le temps de survie des lunes externes n'est que peu affecté. Hormis l'exception en $h_{0,2} = 0.446$, la dernière lune externe stable est en $h_{0,2} = 0.417$. Cette limite de stabilité est similaire aux simulation sans la lune massive interne de limite en $h_0 = 0.414$. L'évolution en demi-grand axe de la lune externe, respectivement de la lune interne, a le même comportement qu'avec une particule test. Le demi-grand axe oscille autour de sa valeur initiale selon une amplitude croissante avec $h_{0,2}$. Le panel du maximum en excentricité à la figure 6.18 indique également une absence de changement par rapport au même panel de la figure 6.10. L'excentricité e_{12} oscille soit entre 0 et un maximum croissant avec $h_{0,2}$, soit est dans un pic en excentricité dû à une résonance d'évection. Nous voyons par ailleurs que les résonances d'évection sont aux mêmes demi-grands axes qu'en absence de la lune interne massive.

Considérons les deux systèmes aux lunes externes en $h_{0,2} = 0.352$ et $h_{0,2} = 0.372$, dont

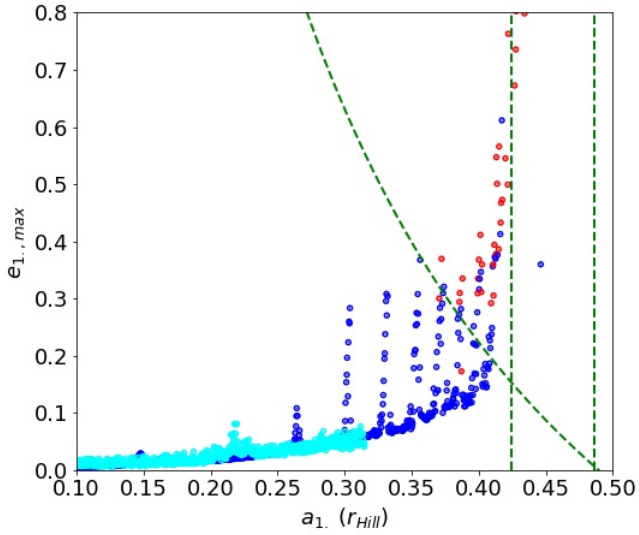


FIGURE 6.19 – Pic d'excentricités pour les lunes massives (cyan = in ; bleu rouge = out : vert = non massif comparaison).

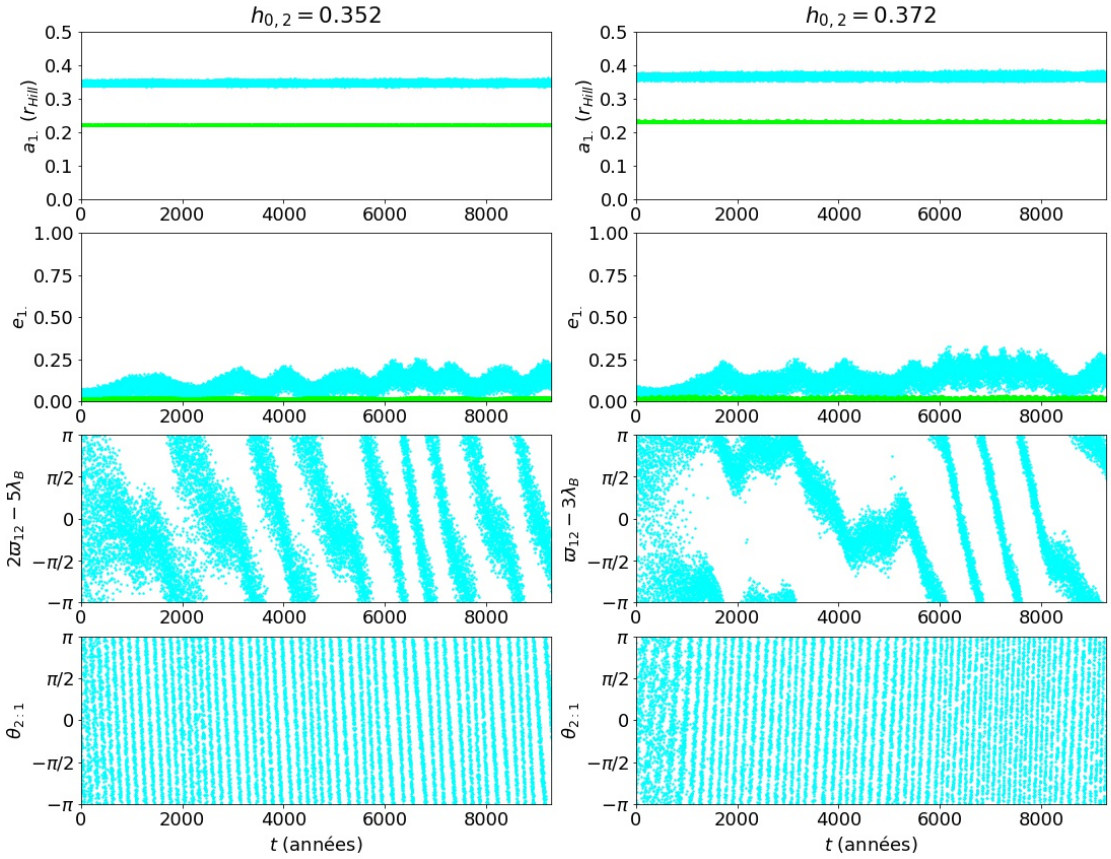


FIGURE 6.20 – Deux systèmes à deux lunes massives où la lune externe est en résonance d'évection : $(a_{1.}, e_{1.}, \vartheta_{2:5}, \theta_{2:1})$ à gauche et $(a_{1.}, e_{1.}, \vartheta_{1:3}, \theta_{2:1})$ à droite. Les lunes externes ont les mêmes coefficients que les particules test en 6.16.

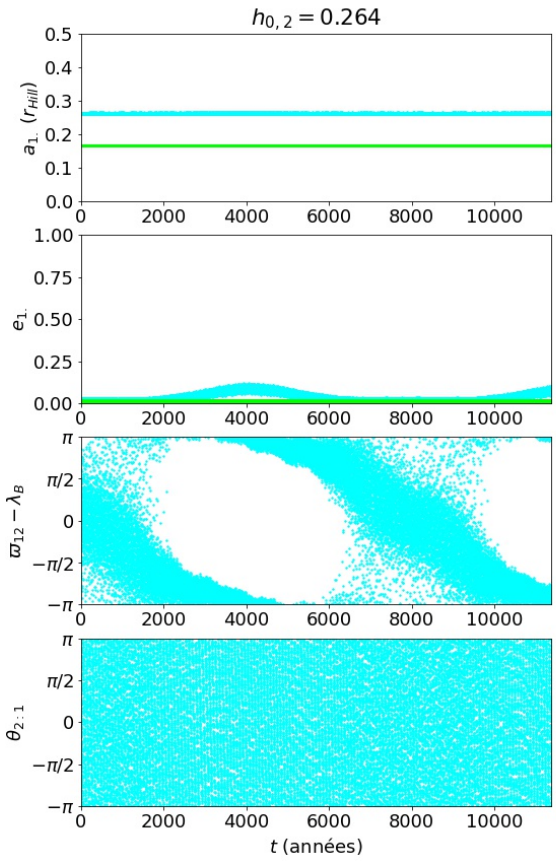


FIGURE 6.21 – $(a_{1.}, e_{1.}, \vartheta_{1:1}, \theta_{2:1})$ d'un système à deux lunes massives où la lune externe est en résonance d'évection.

les trajectoires sont affichées en 6.20. Ces lunes sont les mêmes que les particules test en résonance d'évection à la figure 6.16. Nous voyons qu'elles sont toujours en résonance d'évection malgré la lune interne. Les angles résonants ϑ sont différents. La particule à la figure 6.16 en $h_0 = 0.352$ étant en résonances d'évection 2:3 et 1:2. La lune massive externe en $h_{0,2} = 0.352$ est en résonance d'évection 2:5 à la figure 6.20. La particule sans masse $h_0 = 0.372$ était en résonance d'évection 12 et 1:1 à la figure 6.16. La lune correspondante à la figure 6.20 est en résonance d'évection 1:3. La résonance en moyen mouvement 2:1 ne s'enclenche pas dans ces systèmes. Elle ne s'enclenche d'ailleurs dans aucun système à cause des précessions très différentes de ϖ_{12} et ϖ_{11}.

La figure 6.21 montre un système dont la lune externe est en $h_{0,2} = 0.264$. La résonance la plus proche pour des particules sans masses était en $h_0 = 0.269$: le demi-grand axe nécessaire pour la résonance a bougé de 1.8%. C'est un autre exemple de résonance d'évection modifiée par la lune interne. La résonance d'évection pour la particule en $h_0 = 0.269$ était 1:5, voir figure 6.14. Avec la lune interne massive, la résonance d'évection devient une résonance 1:1, voir figure 6.21. Ainsi nous voyons que la lune interne a de l'impact sur la résonance d'évection de la lune externe : l'angle résonant en libration et le demi-grand axe nécessaire à la résonance peuvent changer. La résonance d'évection n'est par contre pas empêchée, comme nous aurions pu le croire.

Étudions maintenant la lune interne. Dans les figures 6.20 et 6.21, la lune interne

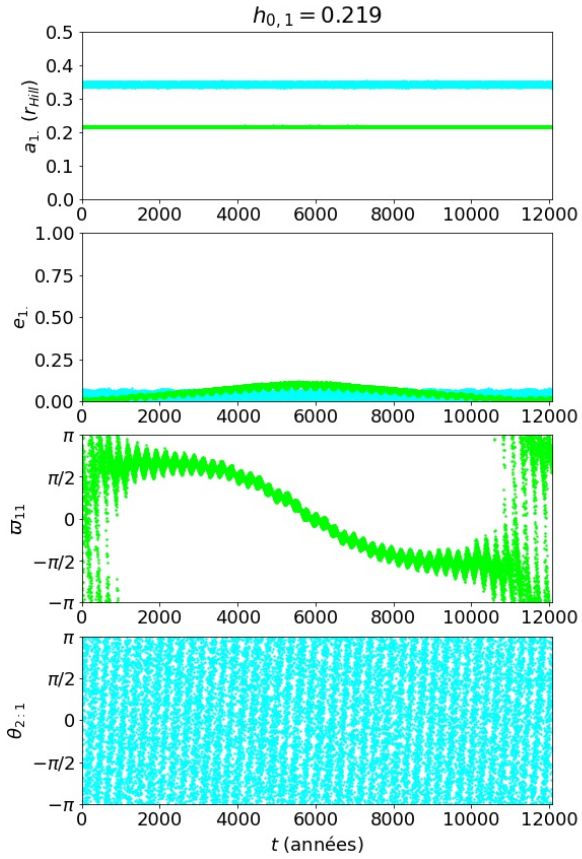


FIGURE 6.22 – $(a_{1.}, e_{1.}, \varpi_{11}, \theta_{2:1})$ d'un système à deux lunes massives où la lune interne est plus excentrique que la lune externe.

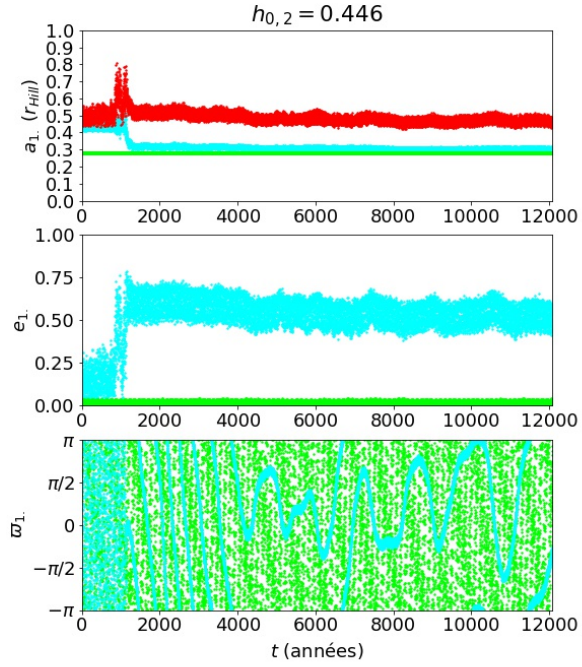


FIGURE 6.23 – $(a_{1.}, e_{1.}, \varpi_{1.})$ pour deux lunes où $h_{0,2} = 0.446$. La lune interne est en vert et l'externe en cyan, avec en rouge l'apojove de la lune externe. Correspond au système stable au-delà de la limite $h_{e1,crit}$.

décrit une orbite de demi-grand axe et d'excentricité presque constants. Toutes les lunes internes suivent ce type d'orbite régulière. A cause de la précession induite par la lune externe, aucune lune interne n'entre en résonance d'évection avec le compagnon stellaire.

La seule lune interne dont l'excentricité dépasse celle de la lune interne est en $h_{0,1} = 0.219$, associée à $h_{0,2} = 0.347$. Les trajectoires de ces deux lunes sont affichées à la figure 6.22. Remarquons que la particule sans masse en $h_0 = 0.219$ n'était pas en résonance dans la figure 6.10. La lune interne n'est pas en résonance d'évection avec la binaire ou en résonance en moyen mouvement avec la lune externe. La longitude de son péricentre circule les ~ 1000 premières années de la simulation. Pour les 10,000 années suivantes, ϖ_{11} libre. Après cela, la longitude du péricentre circule à nouveau : comme les résonances d'évection dans la section précédentes, ce comportement est périodique. Nous n'avons pas su expliquer ce comportement de la lune interne. Ce n'est pas une résonance d'évection : $T_B = 117$ années est bien trop court comparé à la circulation sur 10,000 années de ϖ_{11}. Nous suspectons tout de même une résonance vu le comportement très particulier de ϖ_{11} et la croissance en excentricité locale. Dans nos simulations, deux autres systèmes dont la lune interne a $h_{0,1} \approx 0.219$ ont leur lune interne se comportant ainsi.

La lune stable au-delà de la limite, en $h_0 = 0.446$, est affichée à la figure 6.23 à titre indicatif. La lune externe est perturbée jusqu'à tomber sur une orbite plus basse mais excentrique : $a_{12} \in [0.28; 0.33] r_{Hill}$, $e_{12} \in [0.56; 0.80]$. Brièvement, l'apojove de la lune externe monte jusqu'à $j_{12} = 0.78 r_{Hill} >> 0.4895 r_{Hill}$. La lune externe reste pourtant stable. Elle est aussi stable sur les 10,000 années suivantes, malgré son excentricité trop grande : $e_{12} \in [0.56; 0.80]$ dépasse la limite en excentricité pour une lune en $a_{12} = 0.33 r_{Hill}$, valant $e_{12,crit}(0.33) = 0.48$. Cette lune n'est pas non plus éjectée par la lune interne, malgré que les orbites se coupent. Nous n'avons pas détecté de résonance en moyen mouvement 1 :1 qui permettrait d'éviter des rencontres proches. Nous ne savons donc pas expliquer pourquoi ce système chaotique ne voit aucune de ses lunes éjectées.

6.4.3 Récapitulatif

Dans cette section, nous avons brièvement traité de simulations avec des paires de lunes massives. Nous avons vu que les comportements en temps de survie, en demi-grand axe et en excentricité des lunes externes sont les mêmes que pour les particules sans masse. Nous avons vu que les résonances d'évection restent possibles même si une lune interne vient perturber la trajectoire de la lune externe. Les résonances d'évection sont légèrement modifiées, en terme de demi-grand axe nécessaire à la résonance et d'angle résonant en libration. Nous avons également vu un nouveau comportement pour la lune interne de la figure 6.22, que nous n'avons pas su expliquer.

Conclusion

La seconde partie du mémoire portait sur la stabilité d'exolunes en orbite autour d'une planète au sein d'étoiles binaires. Nous rappelons les résultats principaux de cette partie dans un premier temps. Dans un second temps, nous proposons des idées de future recherche.

Lors des simulations générales, nous avons vu que les planètes pour lesquelles toutes les particules test étaient éjectées finissaient par être éjectées également. Nous y avons confirmé les résultats des articles de référence [37] et [38]. Avec l'exception des planètes les plus perturbées par le compagnon, la majorité des planètes peuvent héberger des lunes jusqu'à $0.40r_{Hill}$, voir $0.4895r_{Hill}$.

Dans les simulations pour le péricentre de la binaire fixé à 20 UA, nous avons vu que e_B (respectivement a_B) seul n'était pas suffisant pour interpréter les données. Nous avons principalement vu l'effet négatif de la croissance de l'excentricité de la planète sur la stabilité des particules. Une plus grande excentricité maximale de la planète pendant la simulation réduisait le temps de survie des particules, notamment en menant à la croissance de l'excentricité des particules. La compréhension des résultats a été aidée par les formules obtenues au début du travail à partir du rayon minimal de Hill, qui se sont montrées efficaces pour la prédiction de l'éjection des particules.

Au travers de l'analyse d'un système particulier, nous avons confirmé les comportements énoncés précédemment. Par-dessus tout, l'impact de la résonance d'évection entre les particules et le compagnon stellaire sur la stabilité des lunes a été étudié. Nous avons vu que la très grande majorité des particules éjectées étaient soit en résonance d'évection soit au-delà d'une des limites.

Dans une dernière section, nous avons mis à l'épreuve les résultats de cette partie au travers de simulations à deux lunes massives. Les simulations à lunes massives ont confirmé les résultats des simulations à particules test. De nouveaux comportements que nous n'avons pas su expliquer ont également émergé.

Finissons ce travail en suggérant quelques perspectives. Plusieurs perspectives ont été proposées au long de ce rapport. En particulier, même si elle pourrait être réductrice, trouver une formule interpolée de la stabilité de lunes dans un système planétaire au sein d'une étoile binaire serait un objectif intéressant. Un objectif similaire serait de tester les formules analytiques (5.7), (5.8) et (5.9) que nous proposons. Elles semblent efficaces pour expliquer nos simulations mais rien ne garantit leur efficacité dans d'autres configurations.

Nous pouvons aussi offrir des perspectives similaires à celles dans la première partie du mémoire. Notre étude de la stabilité des exolunes se limite à des binaires de même masse, comme souvent dans la littérature selon [26].

Comme dans la première partie du mémoire, les inclinaisons sont très petites et n'ont aucun impact. Étudier l'effet du mécanisme de von Zeipel-Lidov-Kozai sur la stabilité des lunes est donc intéressant, en particulier vu l'importance des excentricités de la planète et de la lune dans la stabilité des lunes.

Une dernière perspective est d'étudier la stabilité de lunes plus proches ($h_0 < 0.1$) dans des simulations avec des effets supplémentaires, telles les marées de l'étoile centrale ou d'une planète gazeuse. Dans le vrai Système Solaire, Io a un demi-grand axe de $a_{Io} = 0.00283$ UA $= 0.008 r_{Hill,Jupiter}$. Io est donc bien plus proche de sa planète que les lunes dans nos simulations. Une simulation du comportement d'Io nécessiterait donc des simulations plus générales, au moyen de REBOUNDx par exemple. Nous pensons que des simulations avec effets supplémentaires et l'analyse de leurs résultats est une perspective très intéressante.

Bibliographie

[1] F. Marzari et G. Gallina, Stability of multiplanet systems in binaries, Astronomy et Astrophysics, Volume 594, 9 pages, 2016.

[2] Wikipedia, the free encyclopedia, `https://en.wikipedia.org`, pages : Alpha1 Capricorni, Alpha2 Capricorni, binaire astrométrique, binaire spectroscopique, étoile binaire, étoile double, Jupiter, Jupiter trojan, discoveries of exoplanets, 51 Pegasi b, Orbital resonance, Hill sphere, Exomoon, consulté le 20/02/2022.

[3] J. M. Bestenlehner et al., The R136 star cluster dissected with Hubble Space Telescope/STIS. II. Physical properties of the most massive stars in R136, Monthly Notices of the Royal Astronomical Society, Volume 499, Issue 2, 1918-1936, 2020.

[4] M. Gerbaldi et G. Theureau, Les systèmes stellaires multiples, `https://media4.obspm.fr/public/ressources_lu/pages_doubles/impression.html`, consulté le 14/04/2021.

[5] A. Roisin, Développement d'un intégrateur symplectique pour les systèmes binaires. Application à la formation des systèmes de planètes géantes, Mémoire pour l'Université de Namur, 2017.

[6] G. Bacon, Astronomers use Hubble to 'weigh' dog star's companion, `https://hubblesite.org/contents/news-releases/2005/news-2005-36.html`, consulté le 14/04/2021.

[7] M. Guidry, University of Tennessee, repris par Australian Telescope National Facility, Types of Binary Stars, `https://www.atnf.csiro.au/outreach/education/senior/astrophysics/binary_types.html`, consulté le 15/04/2021.

[8] L. Sacco, Kepler a découvert une Tatooine avec deux couchers de soleil, `http://www.futura-sciences.com/magazines/espace/infos/actu/d/astronomie-kepler-decouvert-tatooine-deux-couchers-soleil-33455`, consulté le 14/04/2021.

[9] Original par Dan Bruton, StarLight Pro, modifié par Australian Telescope National Facility, Types of Binary Stars, `https://www.atnf.csiro.au/outreach/education/senior/astrophysics/binary_types.html`, consulté le 15 avril 2021.

[10] Par Lasunncty de English Wikipedia, `https://commons.wikimedia.org/w/index.php?curid=8971052`, consulté le 28/04/2021.

[11] C. J. Lada, Stellar Multiplicity and the Initial Mass Function : Most Stars Are Single, The Astrophysical Journal, Volume 640, Issue 1, 63-66, 2006.

[12] NASA Exoplanet Archive, `https://exoplanetarchive.ipac.caltech.edu/`, consulté le 12/05/2022.

[13] A. P. Hatzes et al., A Planetary Companion to γ Cephei A, The Astrophysical Journal, Volume 599, 1383-1394, 2003.

[14] A. Wolszczan et D. A. Frail, A planetary system around the millisecond pulsar PSR1257 + 12. Nature, Volume 355, Issue 6356, 145-147, 1992.

[15] M. Mayor et D. Queloz, A Jupiter-mass companion to a solar-type star, Nature, Volume 378, Issue 6555, 355-359, 1995.

[16] Catalogue of exoplanets in binary star systems, `https://www.univie.ac.at/adg/schwarz/intro.html`, consulté le 23/03/2021.

[17] F. Marzari et P. Thebault, Planets in Binaries : Formation and Dynamical Evolution, Galaxies, Volume 7, Issue 4, 84 pages, 2019.

[18] R. Schwarz, N. Haghighipour, S. Eggl, E. Pilat-Lohinger et B. Funk, Prospects of the detection of circumbinary planets with Kepler and CoRoT using the variations of eclipse timing, Monthly Notices of the Royal Astronomical Society, Volume 414, Issue 3, 2763-2770, 2011.

[19] A. Chamberlain, JPL/Caltech, `http://ssd.jpl.nasa.gov/images/ast_histo.ps`, consulté le 28/04/2021.

[20] J. Laskar, Le Système solaire est-il stable ?, Séminaire Poincaré XIV, 221–246, 2010.

[21] F. Varadi, Periodic Orbits in the 3:2 Orbital Resonance and Their Stability, The Astronomical Journal, Volume 118, Issue 5, 2526-2531, 1999.

[22] D. Fabrycky et S. Tremaine, Shrinking Binary and Planetary Orbits by Kozai Cycles with Tidal Friction, The Astrophysical Journal, Volume 669, Issue 2, 1298-1315, 2007.

[23] S. Chatterjee et al., Dynamical Outcomes of Planet-Planet Scattering, The Astrophysical Journal, Volume 686, Issue 1, 580-602, 2008.

[24] P.M. Cincotta, C.M. Giordano et C. Simó, Phase space structure of multi-dimensional systems by means of the mean exponential growth factor of nearby orbits, Physica D : Nonlinear Phenomena, Volume 182, Issue 3-4, 151–178, 2003.

[25] J. Laskar, Frequency analysis for multi-dimensional systems. Global dynamics and diffusion, Physica D : Nonlinear Phenomena, Volume 67, Issue 1-3, 257-281, 1993.

[26] M. J. Holman et P. A. Wiegert, Long-Term Stability of Planets in Binary Systems, The Astronomical Journal, Volume 117, Issue 1, 621-628, 1999.

[27] B. Gladman, Dynamics of Systems of Two Close Planets, Icarus, Volume 106, Issue 1, 247-263, 1993.

[28] J. E. Chambers, G. W. Wetherill et A. P. Boss, Icarus, Volume 119, 261-268, 1996.

[29] H. Rein, S.-F. Liu, REBOUND : an open-source multi-purpose N-body code for collisional dynamics, Astronomy et Astrophysics, 2012

[30] H. Rein et D. Tamayo, WHFast : A fast and unbiased implementation of a symplectic Wisdom-Holman integrator for long term gravitational simulations, Monthly Notices of the Royal Astronomical Society, 2015.

[31] H. Rein et David S. Spiegel, IAS15 : a fast, adaptive, high-order integrator for gravitational dynamics, accurate to machine precision over a billion orbits, Monthly Notices of the Royal Astronomical Society, Volume 446, p1424–1437, 2015.

[32] J. Wisdom et M. Holman, Symplectic maps for the N-body problem, The Astronomical Journal, 1991.

[33] A. Roisin, N. Doukhanin, J. Teyssandier et A.-S. Libert, Resonance captures in binary star systems, Astronomy et Astrophysics, accepted with minor revision

[34] S. A. Baronett, N. Ferich, D. Tamayo et J. H. Steffen, Stellar Evolution and Tidal Dissipation in REBOUNDx, MNRAS, 9 pages, 2021.

[35] J. R. Donnison, The Hill stability of a binary or planetary system during encounters with a third inclined body, MNRAS, Volume 369, Issue 3, 1267-1280, 2006.

[36] D. Veras et A. J. Mustill, A simple scaling for the minimum instability time-scale of two widely spaced planets, MNRAS, 434, 2013.

[37] R.C. Domingos, O.C. Winter T. Yokoyama, Stable satellites around extrasolar giant planets, Monthly Notices of the Astronomical Society, 373, 1227-1234, 2006.

[38] M. J. Payne, K. M. Deck, M. J. Holman H. B. Perets, Stability of Satellites in Closely Packed Planetary Systems, The Astrophysical Journal Letters, 775, 2013.

Annexe A

Article sur la capture en résonance

Astronomy & Astrophysics manuscript no. article
May 24, 2022
©ESO 2022

Resonance capture and long-term evolution of planets in binary star systems

A. Roisin[1], N. Doukhanin[1], J. Teyssandier[1], and A.-S. Libert[1]

naXys, Department of Mathematics, University of Namur, 61 Rue de Bruxelles, B-5000 Namur, Belgium

Received ... / Accepted ...

ABSTRACT

Aims. The growing population of planets discovered in orbit around one stellar component of a binary star raises the question of the influence of the binary companion on the formation process of planetary systems. The aim of this work is to study the impact of a binary companion on the evolution of two-planet systems during both the type-II migration phase and their long-term evolution after the dissipation of the protoplanetary disk.

Methods. We use the symplectic integrator SyMBA, modified to include a wide binary companion. We also include the Type-II migration of giant planets during the protoplanetary disk phase with suitable eccentricity and inclination damping as well as the gravitational potential acting on the planets due to the disk and the nodal precession of the disk induced by the binary companion. We consider various inclinations, eccentricities, and separations of the binary companion.

Results. Disk migration allows the formation of planet pairs in mean-motion resonances despite the presence of the binary companion. When the binary separation is wide (1000 au), the timescale of the perturbations it raises on the planets is longer than the disk's lifetime and resonant pairs are routinely formed in the 2:1, 5:2 and 3:1 commensurabilities. Provided the planet-planet interaction timescale is smaller than the binary perturbations timescale, these systems can remain in resonance long after the disk has dissipated. When the binary separation is smaller (250 au), only planets in the 2:1 resonance tend to remain in a resonant state and more chaotic evolutions are observed, as well as more ejections. After those ejections, the remaining planet can become eccentric due to the perturbations from the binary companion and for strongly inclined binary companions captures in the von Ziepel-Lidov-Kozai resonance can occur, while in systems with two planets this mechanism is quenched by planet-planet interactions. Our simulations reveal that the interplay between planet-disk, planet-planet and planet-binary interactions can lead to the formation of resonant pairs of planets which remain stable over timescales much longer than the disk's lifetime.

Key words. Planet-disk interactions – Planet-star interactions – binaries: general – Planets and satellites: dynamical evolution and stability – Planets and satellites: formation

1. Introduction

Planetary system formation under the influence of a binary companion is an important question since it is estimated that about half of the Sun-like stars are part of multiple star systems (Duquennoy & Mayor 1991; Raghavan et al. 2010). Until now, more than 100 S-type planets (also called circumprimary planets) have been discovered and their eccentricities are slightly higher than around single star systems (Kaib et al. 2013).

A binary companion plays an important role in the formation process. Firstly, it has a considerable impact on the protoplanetary disk. Regarding the disk formation, it was observed that disks in close binary star systems are less present and if they are, they tend to be less massive than in single star systems (Kraus & Ireland 2012; Franchini et al. 2019; Chachan et al. 2019). The binary companion can induce a truncation of the disk, as shown by Artymowicz & Lubow (1994); Savonije et al. (1994). The binary companion also influences the shape of the disk (Terquem & Bertout 1993; Papaloizou & Terquem 1995) and could even lead to the warping of the disk if the self gravity or pressure forces are not strong enough to maintain it uniform (Batygin et al. 2011; Zanazzi & Lai 2017). Furthermore, the disk nodally precesses due to the presence of the binary companion (Batygin et al. 2011; Roisin et al. 2021).

Secondly, the binary companion also influences the planet embedded in the protoplanetary disk. The planet-disk interactions were extensively studied for close binaries by means of 3D hydrodynamical simulations where a decoupling between the motion of the planet and the disk was generally observed (e.g., Xiang-Gruess & Papaloizou 2014; Picogna & Marzari 2015; Lubow & Martin 2016; Martin et al. 2016). Regarding wide binaries, it was shown that the disk gravitational potential acting on the planet and the damping forces exerted by the disk on the planet tend to keep the latter in the midplane of the former (e.g., Roisin et al. 2021).

One key effect affecting the planets in binary star systems is the von Zeipel-Lidov-Kozai (ZLK) resonance which consists of coupled eccentricity and inclination variations for the planets (von Zeipel 1910; Lidov 1962; Kozai 1962). This effect influences the formation of giant planets in binary stars in multiple ways. It has been shown that the binary companion can generate ZLK cycles in the disk (Martin et al. 2014; Fu et al. 2015) which could be suppressed by the self-gravity of the disk (Batygin et al. 2011; Rafikov & Silsbee 2015). Moreover, for sufficiently inclined disks, ZLK instabilities can arise (Lubow & Ogilvie 2017; Zanazzi & Lai 2017). Inclined binary companions also influence planets migrating in the protoplanetary disk via the ZLK effect (Roisin & Libert 2021), but this effect is counteracted by the gravitational potential of the disk acting on the planets in the case of wide binaries (Roisin et al. 2021). Finally, it has been widely shown that the ZLK mechanism, when associated with

tidal friction, could lead to the formation of hot Jupiters in binary star systems (e.g., Fabrycky & Tremaine 2007).

Most of the planet formation studies focus on close binary systems, due to the strong interaction between the planets and the binary companion. However a wide binary could also in some case have a significant impact on the S-type planetary system architecture. This work aims at extending the studies on single planet systems made by Roisin & Libert (2021) and Roisin et al. (2021) by considering the influence of a wide binary companion on the resonance captures of two giant planets migrating in the Type-II regime during the protoplanetary disk phase where the gravitational influence of the disk on the planets and the mutual gravitational influence between the planets also act. The long-term evolution of the systems after the dispersal of the disk will be thoroughly investigated. We will also focus our attention on the ZLK resonance with the wide binary companion and how it could play a role during the two stages mentioned above.

The paper is organized as follows. Section 2 describes the set-up of the *N*-body simulations carried out in this work. Section 3 presents an overview of the relevant timescales of the problem. Section 4 presents the results of the simulations for a wide binary companion at 1000 au by outlining the system architectures as well as the different dynamical effects observed during and after the disk phase, while a similar analysis is performed in Section 5 for closer binary stars. The long-term stability of the systems found in our simulations is assessed in Section 6. In Section 7, we discuss our results in light of the observational data on S-type planets. Finally our conclusions are given in Section 8.

2. Methods

The code used in this work is the well-known *N*-body SyMBA integrator, which handles close encounters (Duncan et al. 1998). It was modified to include a wide binary companion following Chambers et al. (2002) (see Roisin & Libert 2021, for more details). The code also considers the gravitational influence of the protoplanetary disk in which the planets are embedded, namely the type-II migration of the planets (Ivanov et al. 1999; Nelson et al. 2000; Crida & Morbidelli 2007), through the acceleration (Papaloizou & Larwood 2000)

$$\mathbf{a}_{\rm mig} = -\frac{\mathbf{v}_{\rm pl}}{\tau_{\rm mig}}, \tag{1}$$

with $\mathbf{v}_{\rm pl}$ the velocity of the migrating planet and $\tau_{\rm mig}$ the timescale for the Type-II regime given by (both in the disk-dominated case and planet-dominated cases, see Sotiriadis et al. 2017, for more details):

$$\tau_{\rm mig} = \frac{2}{3}\alpha^{-1}h^{-2}\Omega_{\rm pl}^{-1} \times \max\left\{1, \frac{m_{\rm pl}}{(4\pi/3)\Sigma(r_{\rm pl})r_{\rm pl}^2}\right\}, \tag{2}$$

with $\alpha = 0.005$ the classical value for the Shakura-Sunyanev viscosity parameter (Shakura & Sunyaev 1973), $h = 0.05$ the disk aspect ratio, $\Omega_{\rm pl}^{-1}$ the orbital frequency of the planet, $a_{\rm pl}$ the semi-major axis of the planet, $m_{\rm pl}$ the mass of the planet, $r_{\rm pl}$ the distance of the planet to the host star, and $\Sigma \propto r^{-0.5}$ the surface density profile of the disk. Unless otherwise stated, in the simulations, we fix the disk inner and outer edges to $a_{\rm in} = 0.05$ AU and $a_{\rm out} = 30$ AU. The code also adopts a smooth transition in the gas-free inner cavity using an hyperbolic tangent function $\tanh\left(\frac{r-R_{\rm in}}{\Delta r}\right)$ where $\Delta r = 0.001$ AU, following Matsumoto et al. (2012).

Moreover, the inclination and eccentricity damping induced on the planets by the disk is included through the formulas deduced from the 3D hydrodynamical simulations in Bitsch et al. (2013):

$$\begin{aligned}\frac{de}{dt}(m_{\rm pl}, e_{\rm pl}, i_{\rm pl}) = &-\frac{m_{\rm ld}}{0.025 m_A}\left(a_e\left[i_{\rm pl} + \frac{m_{\rm pl}}{3}\right]^{-2b_e} + c_e i_{\rm pl}^{-2d_e}\right)^{-\frac{1}{2}} \\ &+ 12.65\frac{m_{\rm pl}m_{\rm ld}}{m_A^2}e_{\rm pl}\exp\left(-\left[\frac{i_{\rm pl}}{m_{\rm pl}}\right]^2\right), \\ \frac{di}{dt}(m_{\rm pl}, e_{\rm pl}, i_{\rm pl}) = &-\frac{m_{\rm ld}}{0.025 m_A}\left(a_i i_{\rm pl}^{-2b_i}\exp\left(\frac{-(i_{\rm pl}/g_i)^2}{2}\right)\right. \\ &\left. + c_i\left[\frac{i_{\rm pl}}{40}\right]^{-2d_i}\right)^{-\frac{1}{2}}, \end{aligned} \tag{3}$$

with $e_{\rm pl}$ and $i_{\rm pl}$ the planetary eccentricity and inclination, respectively, m_A the mass of the central star, and with the coefficients defined as

$$a_e = 80 e_{\rm pl}^{-2}\exp\left\{-e_{\rm pl}^2\frac{m_{\rm pl}}{0.26}\right\}15^{m_{\rm pl}}\left(20 + 11m_{\rm pl} - m_{\rm pl}^2\right), \tag{4}$$

$$b_e = 0.3 m_{\rm pl}, \tag{5}$$

$$c_e = 450 + 2^{m_{\rm pl}}, \tag{6}$$

$$d_e = -1.4 + \frac{\sqrt{m_{\rm pl}}}{6}. \tag{7}$$

$$a_i = 1.5 \times 10^4 (2 - 3e_{\rm pl}) m_{\rm pl}^3, \tag{8}$$

$$b_i = 1 + \frac{m_{\rm pl}e_{\rm pl}^2}{10}, \tag{9}$$

$$c_i = \frac{1.2 \times 10^6}{\left(2 - 3e_{\rm pl}\right)\left(5 + e_{\rm pl}^2\left[m_{\rm pl} + 2\right]^3\right)}, \tag{10}$$

$$d_i = -3 + 2e_{\rm pl}, \tag{11}$$

and

$$g_i = \sqrt{\frac{3m_{\rm pl}}{e_{\rm pl} + 0.001}}. \tag{12}$$

To include the damping in the code, we converted it into an acceleration according to the formulas (Papaloizou & Larwood 2000)

$$\mathbf{a}_{\rm ecc} = -2\frac{(\mathbf{v}_{\rm pl}\cdot\mathbf{r}_{\rm pl})\mathbf{r}_{\rm pl}}{\left\|\mathbf{r}_{\rm pl}\right\|^2\tau_{\rm ecc}}, \tag{13}$$

$$\mathbf{a}_{\rm inc} = -2\frac{(\mathbf{v}_{\rm pl}\cdot\mathbf{k})\mathbf{k}}{\tau_{\rm inc}}, \tag{14}$$

where $\mathbf{v}_{\rm pl}$ and $\mathbf{r}_{\rm pl}$ are the velocity and the position of the planet, respectively, $\mathbf{k}$ is the unitary vertical vector,

$$\tau_{\rm ecc} = \left|\frac{e_{\rm pl}}{de/dt}\right|, \tag{15}$$

and

$$\tau_{\rm inc} = \left|\frac{i_{\rm pl}}{di/dt}\right|. \tag{16}$$

In Eq. (3), the time is expressed in orbital period and the inclination damping in degrees per orbit. We refer to Sotiriadis et al. (2017) for more details.

The code also includes the disk gravitational potential acting on the planets expressed in spherical coordinates as (Terquem & Ajmia 2010; Huré & Hersant 2011)

$$\Phi(r_{\rm pl},\varphi_{\rm pl},\theta_{\rm pl}) = -2G\int_{R_{\rm in}}^{R_{\rm out}} \Sigma(\tilde{r})\sqrt{\frac{\tilde{r}}{r_{\rm pl}\sin(\theta_{\rm pl})}}kK(k)d\tilde{r}, \tag{17}$$

where, $(r_{\rm pl},\varphi_{\rm pl},\theta_{\rm pl})$ is the position of the planet in spherical coordinates and $K(k)$ is the complete elliptic integral of first kind:

$$K(k) = \int_0^{\pi/2} \frac{d\tilde{\varphi}}{\sqrt{1-k^2\sin^2(\tilde{\varphi})}} \tag{18}$$

with k between 0 and 1 and equal, in our case, to

$$k = 2\sqrt{\frac{r_{\rm pl}\tilde{r}\sin(\theta_{\rm pl})}{r_{\rm pl}^2+\tilde{r}^2+2r_{\rm pl}\tilde{r}\sin(\theta_{\rm pl})}}. \tag{19}$$

We converted this potential in terms of acceleration in cartesian coordinates through (Roisin et al. 2021)

$$\begin{aligned}
\frac{d^2x_{\rm pl}}{dt^2} &= -\sin(\theta_{\rm pl})\cos(\varphi_{\rm pl})\frac{\partial\Phi}{\partial r_{\rm pl}} - \cos(\theta_{\rm pl})\cos(\varphi_{\rm pl})\frac{1}{r_{\rm pl}}\frac{\partial\Phi}{\partial\theta_{\rm pl}}\\
\frac{d^2y_{\rm pl}}{dt^2} &= -\sin(\theta_{\rm pl})\sin(\varphi_{\rm pl})\frac{\partial\Phi}{\partial r_{\rm pl}} - \cos(\theta_{\rm pl})\sin(\varphi_{\rm pl})\frac{1}{r_{\rm pl}}\frac{\partial\Phi}{\partial\theta_{\rm pl}}\\
\frac{d^2z_{\rm pl}}{dt^2} &= -\cos(\theta_{\rm pl})\frac{\partial\Phi}{\partial r_{\rm pl}} + \sin(\theta_{\rm pl})\frac{1}{r_{\rm pl}}\frac{\partial\Phi}{\partial\theta_{\rm pl}},
\end{aligned} \tag{20}$$

where $(x_{\rm pl},y_{\rm pl},z_{\rm pl})$ is the cartesian coordinate of the planet and where

$$\begin{aligned}
\frac{\partial\Phi}{\partial r_{\rm pl}} &= \frac{G}{r_{\rm pl}}\int_{R_{\rm in}}^{R_{\rm out}} \Sigma(\tilde{r})\sqrt{\frac{\tilde{r}}{r_{\rm pl}\sin(\theta_{\rm pl})}}k\left[K(k) - \frac{\tilde{r}^2-r_{\rm pl}^2}{R^2}E(k)\right]d\tilde{r}\\
\frac{\partial\Phi}{\partial\theta_{\rm pl}} &= G\int_{R_{\rm in}}^{R_{\rm out}} \Sigma(\tilde{r})\cot(\theta_{\rm pl})\sqrt{\frac{\tilde{r}}{r_{\rm pl}\sin(\theta_{\rm pl})}}k\left[K(k)\right.\\
&\qquad\left. - \frac{\tilde{r}^2+r_{\rm pl}^2}{R^2}E(k)\right]d\tilde{r}
\end{aligned} \tag{21}$$

with $R^2 = r_{\rm pl}^2+\tilde{r}^2-2r_{\rm pl}\tilde{r}\sin(\theta_{\rm pl})$ and $E(k)$ the complete elliptic integral of the second kind:

$$E(k) = \int_0^{\pi/2}\sqrt{1-k^2\sin^2(\tilde{\varphi})}d\tilde{\varphi}. \tag{22}$$

Note that all the accelerations presented in this section have been added in the code preserving the symmetry of SyMBA as prescribed in Lee & Peale (2002) :

$$f(t_{k+1}) = E_{\rm disk}\left(\frac{\tau}{2}\right)\exp(T\tau)\,E_{\rm disk}\left(\frac{\tau}{2}\right)f(t_k), \tag{23}$$

where T is the linear operator associated with the Hamiltonian $\mathcal{H}$ of the N-body system without the disk and $E_{\rm disk}(\cdot)$ is the evolution due to the disk.

Moreover, we considered the nodal precession of the disk induced by the binary companion as in Roisin et al. (2021), which leads to a uniform precession of the disk's ascending node and a variation of the disk inclination with amplitude $2i_B$:

$$\begin{cases} i_d(t) = 2i_B\,|\sin(2\pi f_d t)| \\ \Omega_d(t) = \dfrac{\pi}{2} + \Omega_B - (2\pi f_d t \mod \pi) \end{cases}, \tag{24}$$

where i_d and Ω_d are the inclination and longitude of the ascending node of the disk, i_B and Ω_B are the inclination and longitude of the ascending node of the binary companion in the initial plane of the disk, and

$$f_d = 0.2145\left(\frac{a_{\rm out}}{1\,{\rm au}}\right)^{3/2}\left(\frac{a_B}{1\,{\rm au}}\right)^{-3}\left(\frac{m_B}{1m_\odot}\right), \tag{25}$$

with a_B and m_B the semi-major axis and mass of the binary companion, respectively.

In our simulations, the disk mass decreases exponentially with time. We consider the disk as being fully dissipated and thus we neglect its influence when

$$\frac{dm_{\rm disk}(t)}{dt} = \frac{m_{\rm disk,0}}{T_0}\exp(-t/T_0) < 10^{-9}m_0/yr, \tag{26}$$

where m_0 denotes the mass of the central star, $m_{\rm disk,0}$ the disk mass at $t=0$ (fixed here to 8 $m_{\rm Jup}$), and $T_0 = 2.8\times10^5$ yr. More information about the code can also be found in Roisin et al. (2021).

In this work, we will follow the evolution of two planets perturbed by a binary companion during and after the disk phase. Different semi-major axis a_B, eccentricity e_B, and inclination i_B values will be considered for the binary. The masses of both stars are 1 $M_\odot$ in all the simulations. In the following, subscripts 1 and 2 will refer to the inner planet and outer planet, respectively. As commonly adopted, we applied an inward migration to the outer planet only (this approach favors convergent migration), while the eccentricity and inclination damping due to the disk is applied on both planets. For the integration, we used a time step of 0.005 yr for the disk phase and 0.01 yr for the dynamical evolution after the dispersal of the disk. The simulations were carried out for 100 Myr.

Table 1: Initial parameters for the simulations. The orbital elements are expressed with respect to the initial plane of the disk.

	Inner planet	Outer planet	Binary companion
mass	$U[1;5]\ M_{\rm Jup}$	$U[1;5]\ M_{\rm Jup}$	$1\ M_\odot$
a (au)	$U[5,7]$	$U[12,21]$	1000
e	$U[10^{-3};0.01]$	$U[10^{-3};0.01]$	10^{-3}, 0.1, 0.3, 0.5
i (°)	$U[0.01;0.1]$	$U[0.01;0.1]$	10^{-3}, 10, 20, 30, 40,50, 60, 70
Ω (°)	$U[0,360]$	$U[0,360]$	$U[0,360]$
ω (°)	$U[0,360]$	$U[0,360]$	$U[0,360]$
M (°)	$U[0,360]$	$U[0,360]$	$U[0,360]$

3. Timescale analysis

There are several timescales relevant to our study: the disk's lifetime, the timescale of the planet-planet interactions, and the timescale of the precession induced by the binary (i.e., the ZLK resonance timescale). Since we will use them to interpret the outcomes of our simulations throughout the paper, we review them first.

All effects inducing a precession of the pericenter of a planet faster than the one induced by the ZLK resonance act to suppress

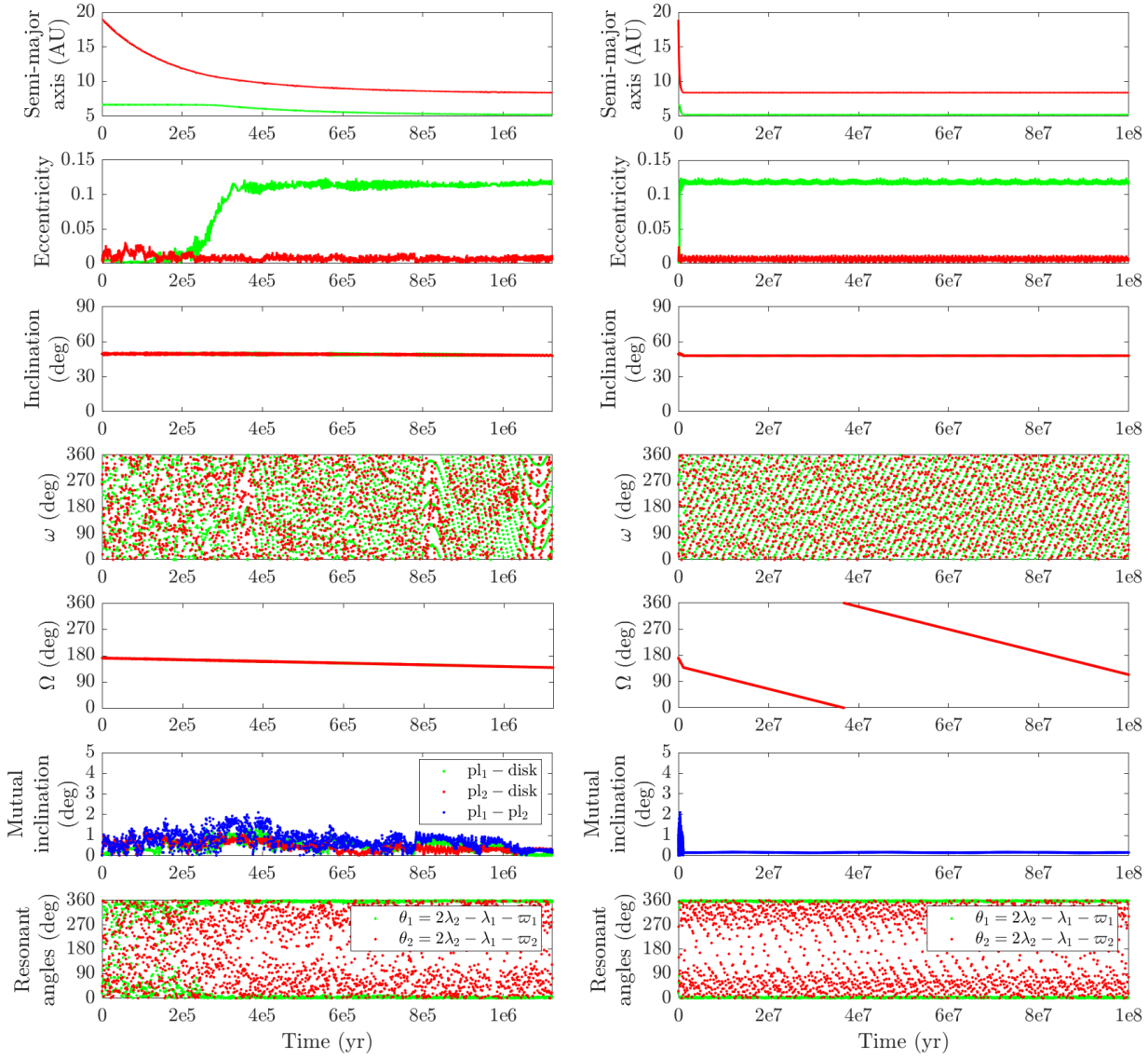


Fig. 1: Typical evolution of a system of two giant planets with a wide binary at $a_B = 1000$ au (in the Laplace plane reference frame), during the disk phase (left panels) and after the disk dispersal (right panels). The initial parameters (with respect to the disk plane) are $e_B = 10^{-3}$ and $i_B = 50°$ for the binary companion and $a_1 = 6.7$ au, $m_1 = 1.44\ M_{\rm Jup}$, $a_2 = 18.9$ au, and $m_2 = 3.55\ M_{\rm Jup}$ for the planets.

it. It is the case with, e.g., general relativity, tidal and rotational bulges and, as is the case here, gravitational interaction with another planet (Wu & Murray 2003; Fabrycky & Tremaine 2007; Takeda et al. 2008). The timescale associated with the ZLK resonance induced by a binary companion, $\tau_{\rm ZLK}$, can be approximated by (Kiseleva et al. 1998)

$$\tau_{\rm ZLK} = \frac{2}{3\pi}\frac{P_B^2}{P_j}(1-e_B^2)^{3/2}\frac{m_0+m_j+m_B}{m_B}, \tag{27}$$

where P_B and P_j are the orbital periods of the binary companion and the j-th planet, respectively, and m_j the mass of the j-th planet ($j = 1, 2$). If the ZLK timescale if longer than the disk's lifetime, then the binary companion does not significantly perturb the orbits of the planets while they migrate in the disk.

The timescale of the pericenter precession due to the gravitational interaction between two planets, denoted $\tau_{\rm pl}$, can be estimated by using the Laplace-Lagrange secular theory. It can be approximated by means of the eigenvalues of the following matrix (Brouwer & Clemence 1961; Murray & Dermott 1999; Takeda et al. 2008):

$$A = \begin{pmatrix} c_1 & -c_0c_1 \\ -c_0c_2 & c_2 \end{pmatrix} \tag{28}$$

with

$$\begin{aligned} c_0 &= \frac{b_{3/2}^{(2)}(\alpha)}{b_{3/2}^{(1)}(\alpha)} \\ c_1 &= \frac{1}{4}n_1\frac{m_2}{m_0+m_1}\alpha^2 b_{3/2}^{(1)}(\alpha) \\ c_2 &= \frac{1}{4}n_2\frac{m_1}{m_0+m_2}\alpha^2 b_{3/2}^{(1)}(\alpha), \end{aligned} \tag{29}$$

where $b_{3/2}^{(1)}(\alpha)$ and $b_{3/2}^{(2)}(\alpha)$ are the Laplace coefficients of the first and second kind, respectively, $\alpha = a_1/a_2$ the planetary semi-major axis ratio, and n_j the planetary mean motions ($j = 1, 2$).

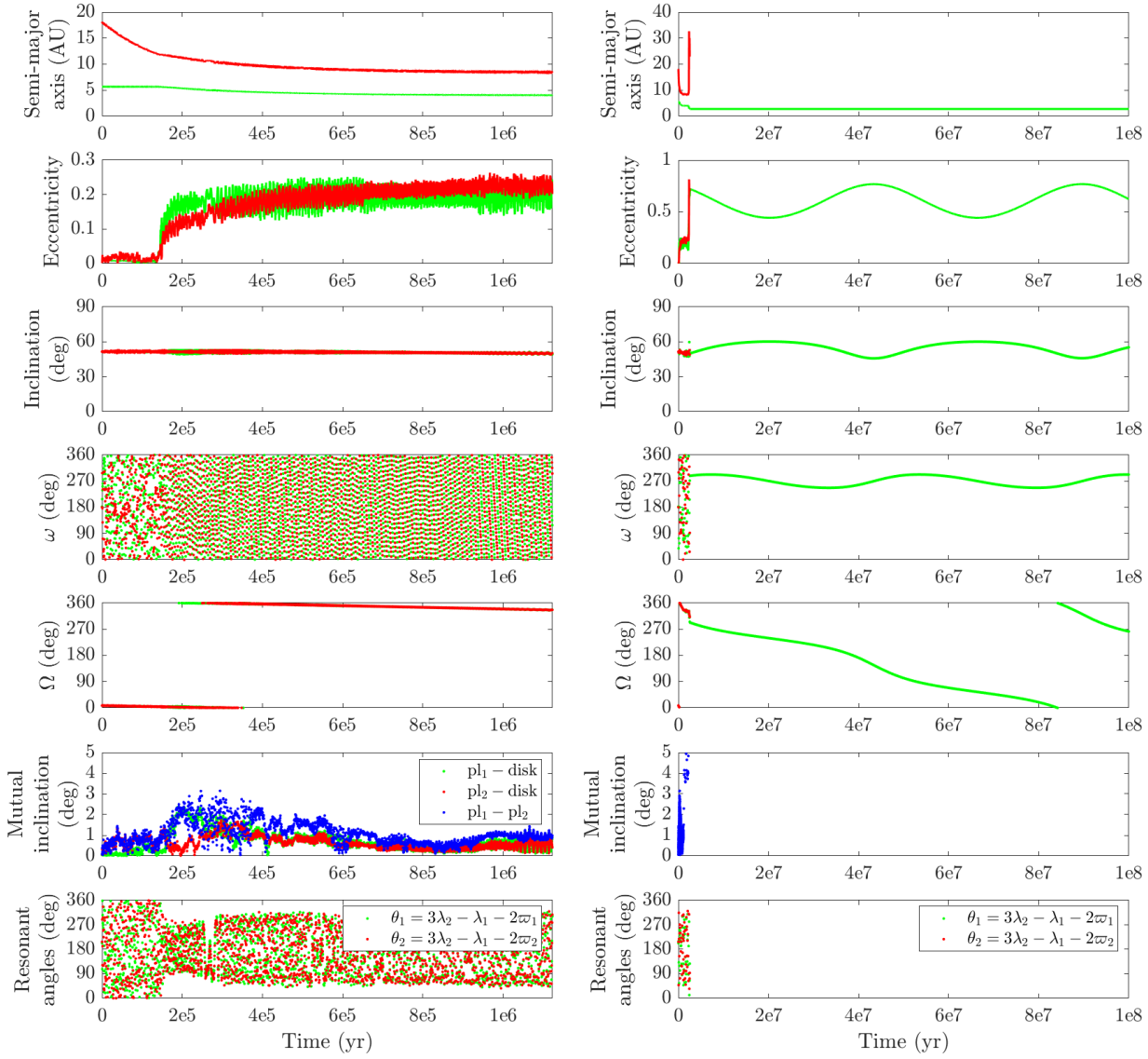


Fig. 2: Same as Fig. 1, for the initial parameters $e_B = 0.5$, $i_B = 50°$, $a_1 = 5.7$ au, $m_1 = 2.77\ M_{\rm Jup}$, $a_2 = 18.15$ au, and $m_2 = 2.99\ M_{\rm Jup}$.

The expressions of the eigenvalues are (Zhou & Sun 2003):

$$g_+ = \frac{1}{2}\left(c_1 + c_2 + \sqrt{(c_1 - c_2)^2 + 4c_0^2 c_1 c_2}\right) \quad (30)$$

$$g_- = \frac{1}{2}\left(c_1 + c_2 - \sqrt{(c_1 - c_2)^2 + 4c_0^2 c_1 c_2}\right). \quad (31)$$

The timescale of the pericenter precession $\tau_{\rm pl}$ for each planet is thus given by $2\pi/g_+$ and $2\pi/g_-$ with the highest value associated with the more massive planet. This approximation is accurate under the condition presented in Takeda et al. (2008), namely

$$\frac{\alpha}{1 - 3q\sqrt{\alpha}/b_{3/2}^{(1)}(\alpha)} \ll 1 \quad (32)$$

with $q = m_2/m_1$. In our work, the condition is not always fulfilled but even when it is not the case, the formula will still give us an indication about the order of magnitude of the precession timescale.

4. Wide binary with $a_B = 1000$ au

In this section we start by considering a binary companion at $a_B = 1000$ au. At such a separation, the timescale of the perturbations arising from the binary is longer than the disk's lifetime, and the binary will have a minimal impact on the migrating planets. We use this setup to smoothly form planets in mean-motion resonances (MMRs) via disk migration. We then evolve the simulations for another 100 Myr, in order to study the long-term impact of the binary on the planets, with emphasis on the resonant dynamics. In the next section, closer binaries will be considered, which will have a visible impact on the planets as early as in the migration phase.

Regarding the initial parameters of the simulations, the masses and orbital elements of the two giant planets and the binary companion are given in Table 1. For the binary, eight different inclinations (with respect to the initial plane of the disk) ranging from nearly 0° to 70°, as well as four different eccentricities (10^{-3}, 0.1, 0.3, and 0.5) are considered here. The semi-major axes of the planets are chosen randomly between 5 and 7 au for the inner planet and between 12 and 21 au for the outer planet, in order to allow captures in different MMRs during the migration. The closest initial location of the two planets is beyond the 2:1 MMR ($(12/7)^{3/2} \simeq 2.24$), while the furthest one is beyond the 8:1 MMR ($(21/5)^{3/2} \simeq 8.61$). The planetary masses, eccentrici-

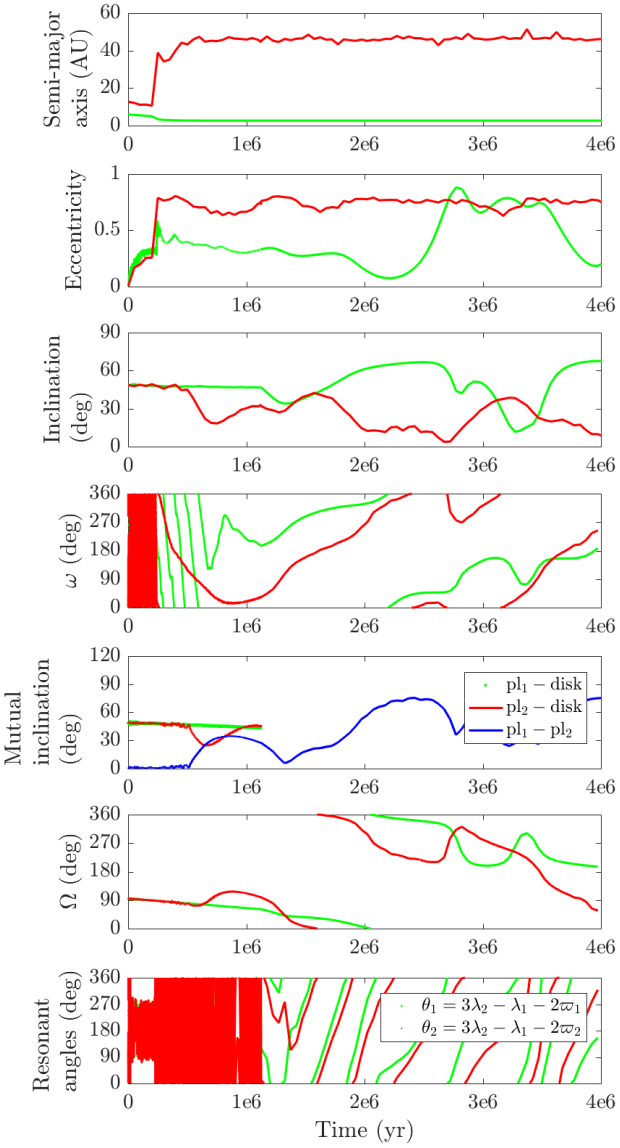


Fig. 3: Same as Fig. 1, for the initial parameters $e_B = 0.1$, $i_B = 50°$, $a_1 = 6$ au, $m_1 = 4.11\ M_{\rm Jup}$, $a_2 = 12.74$ au, and $m_2 = 3.47\ M_{\rm Jup}$.

ties, and inclinations are chosen randomly as $m \sim U[1;5]m_{\rm Jup}$, $e \sim U[0.001;0.01]$, and $i \sim U[0.01°;0.1°]$. For each combination of the fixed parameters of the binary companion, we drew 100 different random initial parameters for the planets.

4.1. Typical examples

We start by presenting several typical evolutions observed in the simulations. For each case, we will discuss both the disk phase and the long-term dynamical evolution after the dispersal of the disk. The evolutions are shown in the Laplace plane reference frame which is more suitable for the study of the ZLK resonance since the latter can easily be identified in this reference frame from the libration of the planetary pericenter argument (e.g., Libert & Tsiganis 2009).

A first example is shown in Fig. 1, for a binary companion with $e_B = 10^{-3}$ and $i_B = 50°$ and planetary masses of $m_1 = 1.44\ M_{\rm Jup}$ and $m_2 = 3.55\ M_{\rm Jup}$. The evolution during the disk phase is shown in the left panels. We observe that the outer planet migrates inwards and is captured at about 0.25 Myr in the 2:1 MMR with the inner planet, as confirmed by the libration of both resonant angles $\theta_1 = 2\lambda_2 - \lambda_1 - \varpi_1$ and $\theta_2 = 2\lambda_2 - \lambda_1 - \varpi_2$ (last panel), with $\lambda = \omega + \Omega + M$ and $\varpi = \omega + \Omega$ being the mean longitude and the longitude of the pericenter, respectively. After the capture in MMR, the two planets start migrating together and the eccentricity of the inner planet increases while the outer planet is kept on a quasi circular orbit (Lee & Peale 2002, see, e.g.,). The eccentricity increase is limited due to the eccentricity damping by the disk and is followed by a slight increase of the mutual inclination between the planets which is rapidly damped by the disk. The disk keeps the planets within its midplane during the whole disk phase (see the mutual inclination between the disk and the planets in the sixth left panel), despite the influence of the inclined binary companion. Regarding the dynamical evolution of the system after the dispersal of the disk (right panels of Fig. 1), we observe that the MMR is preserved during the whole simulation. We also notice the linear evolutions of the planetary longitudes of the ascending nodes which, coupled with the constant inclinations, indicate the nodal precession of the planets due to the binary companion. Moreover, there is no evidence of a ZLK resonance with the highly inclined binary companion (i.e., no libration of the pericenter arguments around 90° or 270°). This is due to the strong gravitational interaction between the planets.

A second system is displayed in Fig. 2. Its evolution is similar to the one of the previous system during the disk phase, except now the planets get captured in the 3:1 MMR instead (left panels). However, after the disk phase (right panels), a scattering event rapidly occurs leading to the ejection of the outer planet. The remaining planet is captured in a ZLK resonance with the binary companion, as shown by the libration of the pericenter argument around 270° in the fourth right panel of Fig. 2 as well as the coupled variation in the planetary eccentricity and inclination.

In some cases, a destabilization of the system takes place during the disk phase, as illustrated in Fig. 3. At about 0.25 Myr, while the planets evolve in the 3:1 MMR and pursue their migration, a scattering event occurs. The outer planet is scattered to a larger separation and does not evolve in the disk anymore. The evolution of both planets rapidly becomes chaotic. They alternate between ZLK resonant states and non-resonant evolutions (see the evolution of the planetary arguments of pericenters), until the disruption of the system at about 6 Myr. The instability comes from the nearly equal strength of the ZLK effect induced by the binary and the gravitational interaction between the planets, as will be shown in Sect. 5.

4.2. Results from a large ensemble of simulations

We now study the system configurations found in the 3200 simulations performed with $a_B = 1000$ au. In order to interpret these simulations, it is useful to consider the relevant timescales. The ZKL and planet-planet interaction timescales are shown in Fig. 4, calculated with the system parameters found at the dispersal of the disk. As expected, for nearly all the systems, the ZLK timescale is much longer than the timescale associated with the gravitational interaction between the two planets, which explains that the influence of the binary is very limited in the simulations. In addition, the ZKL timescale is longer than the disk's lifetime, indicating that the binary had little influence over the planets during the migration process. As a result, here we focus on the long-term dynamics after the disk phase, which a particular emphasis

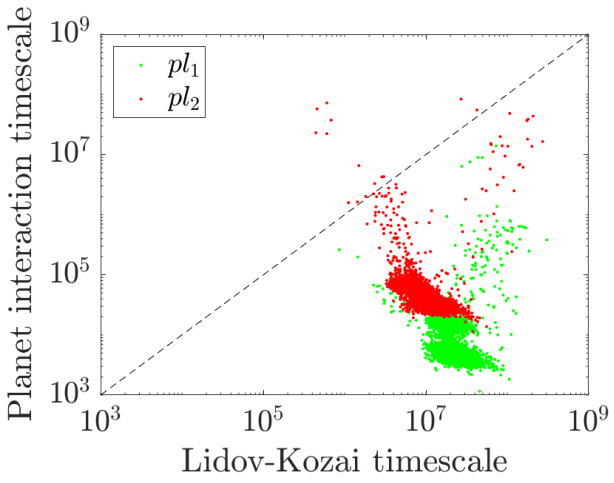


Fig. 4: Timescale of the pericenter precession due to the gravitational interaction between the planets versus the ZLK timescale due to the binary companion. The green and red colors refer to the inner planet and outer planet, respectively.

on the interplay between planetary MMRs and binary perturbations.

The distributions of the final orbital parameters are displayed in Fig. 5. To make it clearer, we present separately the systems for which the inclination of the binary companion is strictly below 40° (orange color) and the other systems for which the binary companion is highly inclined ($i_B \geq 40°$) and which are thus likely to experience a ZLK resonance with the binary companion (blue color). Let us note that we also run the same 3200 simulations without the binary companion for comparison (yellow color). The distributions are shown at the dispersal of the disk in the left panels and at the end of the simulations in the right panels.

4.2.1. MMR captures

We first look at the period ratios between the planets (top panels of Fig. 5) to study the MMR captures during the disk phase. Two resonant commensurabilities are more prevalent, namely the 2:1 MMR followed by the 3:1 MMR, although several systems are also trapped close to the 5:2 MMR. Overall, the effect of the wide binary companion is small, as expected from the timescale analysis. We see that the systems with a binary companion (blue and orange) are captured slightly more often in the 2:1 MMR and less captured in the 3:1 MMR than the systems without a binary companion (yellow curve). No significant influence of the inclination of the binary companion on the resonance capture is visible. The left and right panels look very similar, which leads us to the conclusion that the systems captured in a MMR during the disk phase stay trapped for a long time (100 Myr in this case), even under the influence of the binary companion. This shows that for the wide binary case investigated here, the chaotic evolutions after the disk phase are rather limited in two-planet resonant systems.

To confirm the previous results, we studied the evolution of the resonant angles for each system. In practice, the planets are considered locked in a MMR if at least one of the resonant angles librates with an amplitude of maximum 270° during the 0.2 Myr before the time considered, namely the dissipation of the disk or the end of the simulation. The results regarding the

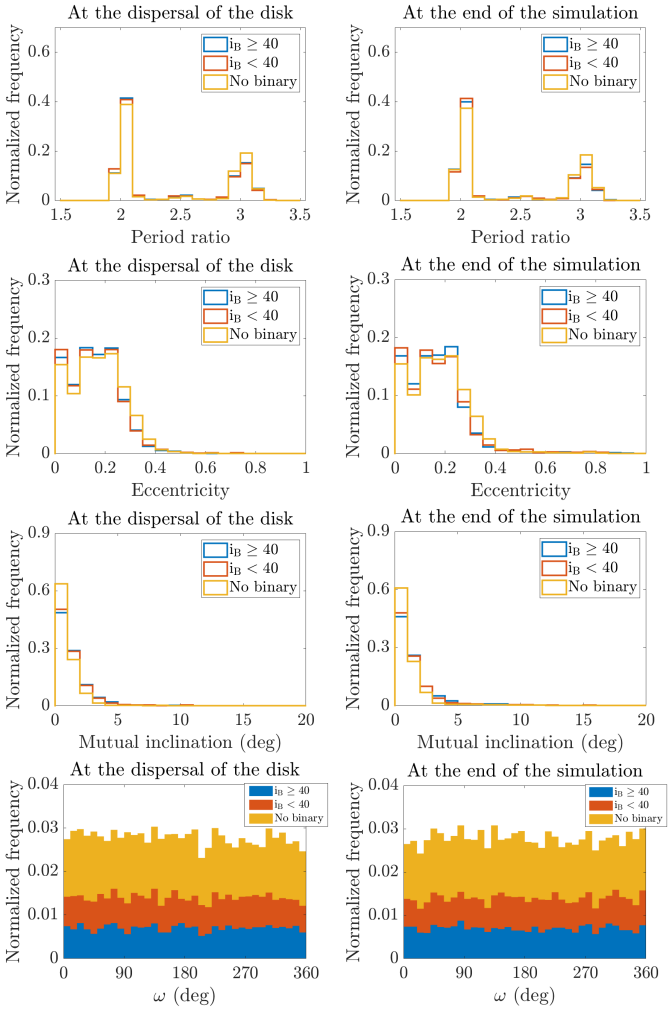


Fig. 5: Normalized distributions of final orbital elements at the dispersal of the disk (left panel) and at the end of the simulation (right panel). From top to bottom: period ratio, eccentricity, mutual inclination, and argument of the pericenter (in the Laplace plane reference frame). The color code refers to the presence of a binary companion and its inclination value for the systems with a companion.

MMR captures are gathered in Tables 2 and 3. As previously observed, there are slightly more two-planet systems captured in the 2:1 MMR for systems with a binary companion (53.6% against 49.7% at the dispersal of the disk, see Table 2) while it is the contrary for the 3:1 MMR (28.2% against 34.4%) and the 5:2 MMR (0.66% against 1.2%). Let us note that roughly the same percentages of planetary ejections at the dispersal of the disk are observed for single star systems and binary star systems (see the two last rows of Table 2). In Table 3, we see that the percentages of final one-planet systems have increased, in particular for binary star systems due to chaotic events occurring after the dispersal of the disk. Examples of chaotic evolutions after the disk phase were shown in Figs. 2 and 3. A study of the stability of the two-planet systems formed here is done in Section 6.

4.2.2. Eccentricities

The eccentricity distribution of the different systems is shown in the panels of the second row of Fig. 5. We observe that the single star systems with two planets have slightly higher eccen-

Table 2: Percentages of the different system configurations at the dissipation of the disk

Final systems	MMR	Binary ($i_B \geq 40°$)	Binary ($i_B < 40°$)	No binary
2 planets	2:1	53.37	53.87	49.7
	3:1	28.56	27.87	34.4
	5:2	0.68	0.63	1.16
	other MMR	0.15	0.25	1.58
	no MMR	14.5	14.88	10.66
1 planet		2.43	2.5	2.34
no planet		0.31	0	0.16

Table 3: Percentages of the different system configurations at the end of the simulation

Final systems	MMR	Binary ($i_B \geq 40°$)	Binary ($i_B < 40°$)	No binary
2 planets	2:1	53.44	54.06	49.8
	3:1	26.63	25	33.03
	5:2	0.56	0.25	0.72
	other MMR	0.12	0.26	1.65
	no MMR	12.81	13	9.78
1 planet		6.06	7.43	4.9
no planet		0.38	0	0.16

tricities (orange and blue curves above the yellow curve for eccentricities below 0.25 while the yellow curve is above the two others for higher values). This observation is coherent with the percentages of resonance captures. The proportion of two-planet systems which are found in MMR is indeed more important for single star systems (see Tables 2 and 3) and those resonance captures are generally followed by an increase of the planetary eccentricities. Again, the similar profile between the curves in the left panel (at the dispersal of the disk) and the right panel (at the end of the simulation) leads us to say that the wide binary companion has a limited influence on the system even after the dispersal of the disk.

4.2.3. Inclinations

In the third row panels of Fig. 5, we show the distribution of the mutual inclination between the planets. We observe mutual inclination values slightly higher for systems including a binary companion. However, most of the mutual inclinations are below 5°. Only 3% of the systems have a mutual inclination above 5° in binary star systems. These higher mutual inclinations are generally produced by an inclination-type resonance. This mechanism is known to operate at large eccentricities in two-planet systems (Thommes & Lissauer 2003; Libert & Tsiganis 2009; Teyssandier & Terquem 2014; Sotiriadis & Libert 2020), but can also be present at small to moderate eccentricities in systems with more than two planets (Libert et al. 2018). An example of a highly mutually inclined system is shown in Fig. 6. We first observe a temporary capture in the 3:1 MMR, before a second capture in the 5:2 MMR. The eccentricities increase to moderate values and the inclinations suddenly grow at 9×10^5 yr when the system enters an inclination-type resonance. To better identify the resonant process leading to the inclination increase, we display at the bottom panel of Fig. 6 the evolution of the angle $\theta_{i_1^2} = 5\lambda_2 - 2\lambda_1 - \varpi_1 - 2\Omega_1$ with the evolution of the mutual inclination (in logarithmic scale). We see that the inclination increases in correlation with the libration of the inclination-type resonant angle $\theta_{i_1^2}$.

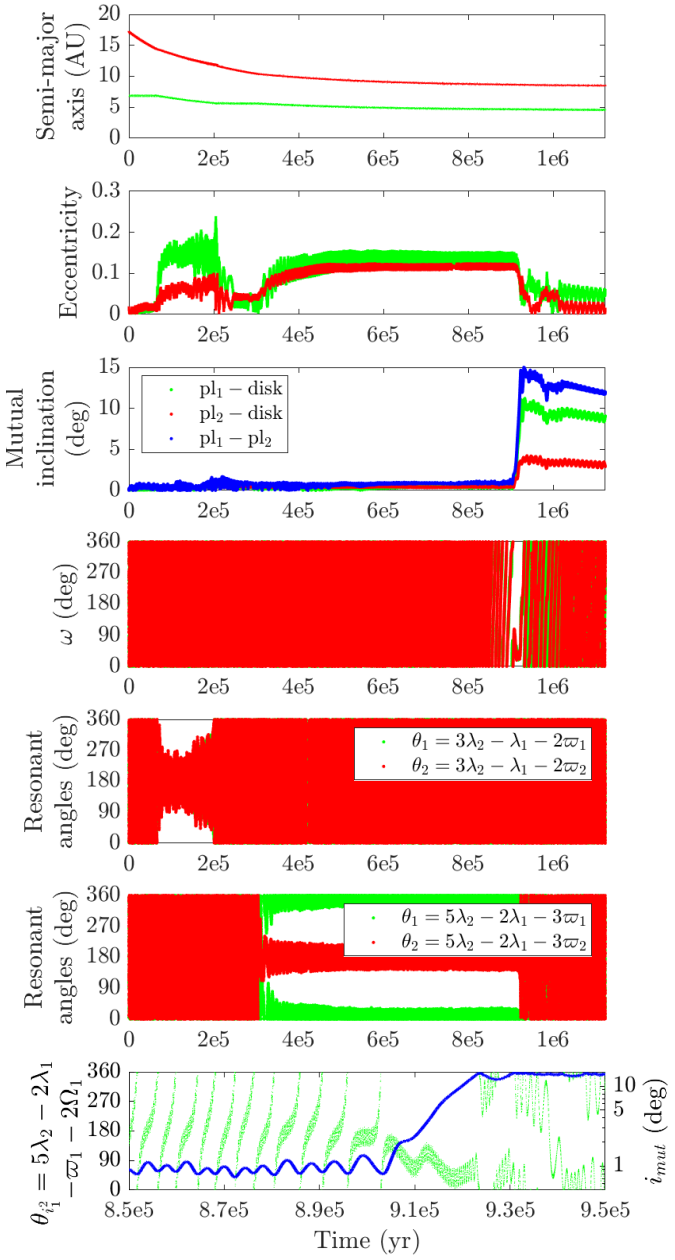


Fig. 6: Typical evolution of two giant planets (in a wide binary star system) experiencing an inclination-type resonance during the disk phase. The initial parameters are $e_B = 0.5$, $i_B = 0.001°$, $a_1 = 6.86$ au, $m_1 = 1.64\ M_{\rm Jup}$, $a_2 = 17.1$ au, and $m_2 = 3.79\ M_{\rm Jup}$.

The planets mostly remain in the midplane of the disk during the disk phase thanks to the gravitational and damping forces of the disk. We note that the planets tend to be slightly more misaligned with respect to the disk in systems with a binary companion but this misalignment is not significant (less than 4°).

In Fig. 7, we display the planetary inclinations with respect to the initial plane of the disk. We observe in the left panel showing the inclinations at the dispersal of the disk, that for binary star systems the planetary inclinations are proportional to the inclination of the binary companion. This is coherent with the precession of the disk due to the binary companion, which induces a periodic variation with an amplitude equal to $2i_B$. Since

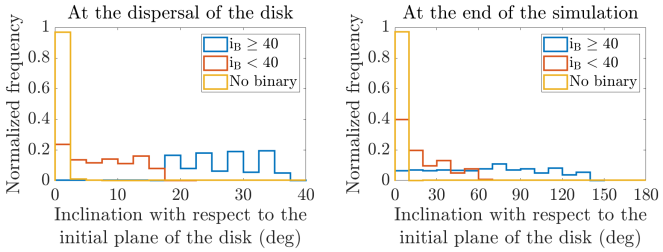


Fig. 7: Inclination distribution at the dissipation of the disk (left panel) and at the end of the simulation (right panel). The inclinations are given in the initial disk plane reference frame.

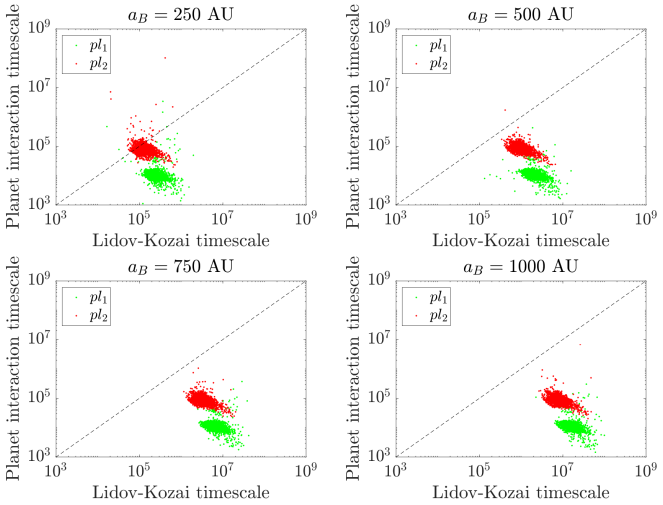


Fig. 8: Same as Fig. 4 for the different semi-major axes of the binary companion.

the planets tend to stay coupled with the disk, they follow its nodal precession, which explains the inclination distribution in the left panel of Fig. 7. On the right panel, we observe that the inclination is amplified during the dynamical phase. This is a consequence of the nodal precession induced by the binary companion acting this time on the coupled planets. Moreover, on the right panel, we observe that the normalized frequencies decrease with the inclination. This effect comes from the amplitude of the nodal precession. Indeed, we have 400 systems for each inclination of the binary, whose planetary inclinations are uniformly spread between 0 and $2i_B$, leading to an accumulation around the smallest values.

Assuming that the disk angular momentum vector is originally aligned with the stellar spin and that the stellar spin does not change direction over time (although see Storch et al. 2014, for conditions where this assumption might break down), and observing that the planets mostly remain in the disk's midplane throughout the migration, we can use the disk's inclination as a proxy for measuring spin-orbit angles. The nodal precession induced by the binary companion thus creates a misalignment between the spin axis of the primary star and the angular momentum of the planets.

4.2.4. ZLK resonance

To further analyze the influence of the binary companion, in particular the ZLK mechanism, we now focus on the pericenter argument of the planets. The bottom panels of Fig. 5 display the

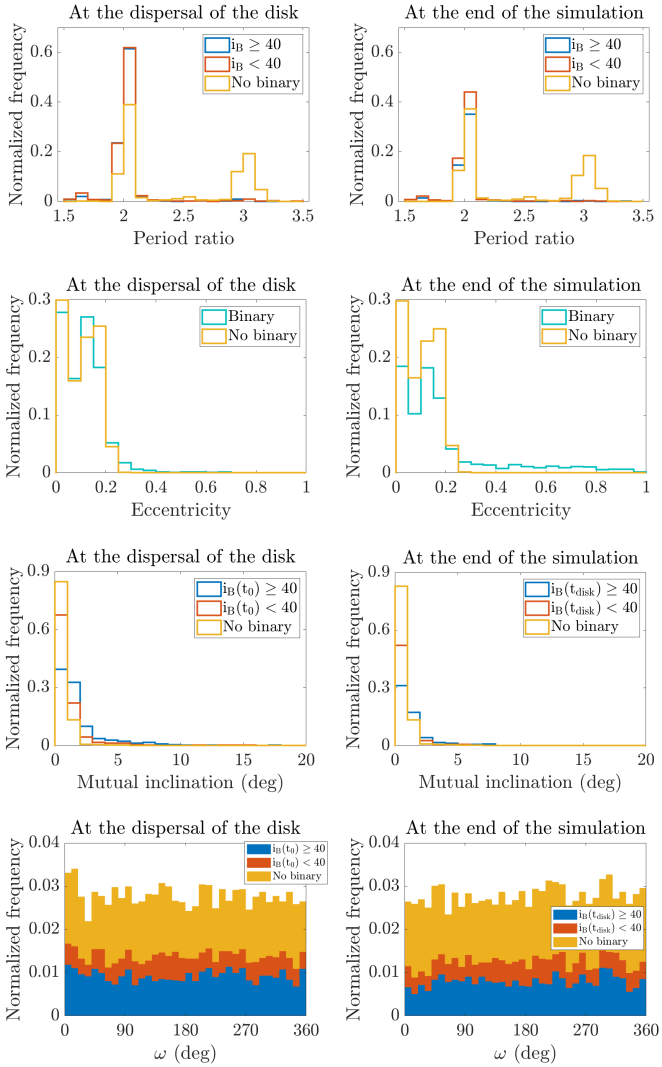


Fig. 9: Same as Fig. 5, for $a_B = 250$ au.

pericenter argument distributions at the dissipation of the disk (left panel) and at the end of the simulation (right panel). We do not notice any specific pattern associated with the ZLK resonance (i.e., accumulations around 90 or 270°). Regarding the evolution after the disk phase (right panel), the gravitational interaction between the two planets tends to overcome the effect of the binary companion and the establishment of a ZLK resonant evolution in highly inclined binary systems. Note that we also numerically investigated the libration of the pericenter arguments and observed that only the systems suffering from an ejection (i.e., systems with one remaining planet) possibly hold a planet locked in the ZLK resonance.

Overall, our simulations indicate that for planetary systems formed in very wide binaries, resonant captures still occur frequently and are robust against perturbations from the binary. In particular, on the long-term evolution, resonant interactions seem to quench ZLK oscillations.

5. Closer binary with $a_B = 250$ au

As seen in the previous section, in case of a wide binary companion at 1000 au, the influence of the binary companion on planet pairs embedded in the gas disk is very limited and the resonant evolution of the pairs is preserved well after the disper-

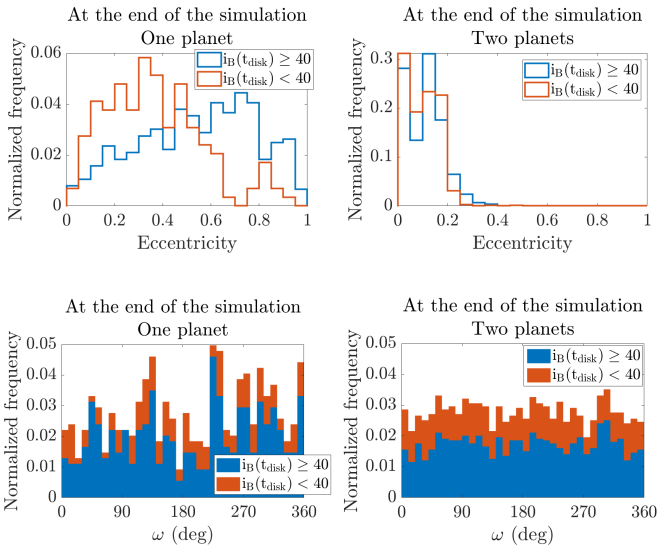


Fig. 10: Eccentricity and pericenter argument distributions at the end of the simulations for single planet systems (left panels) and two-planet systems (right panels) when a_B = 250 au

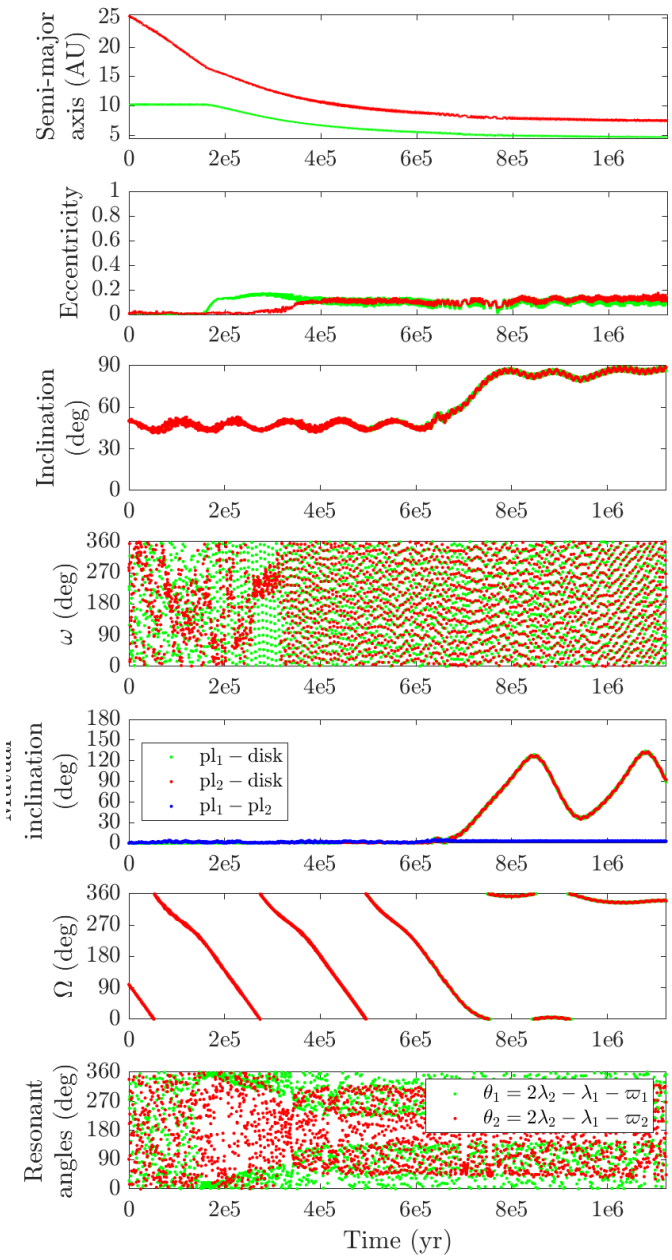


Fig. 11: Typical evolution of a system of two giant planets with a binary at a_B = 250 au (in the Laplace plane reference frame), during the disk phase. The initial parameters (with respect to the disk plane) are e_B = 0.5 and i_B = 50° for the binary companion and a_1 = 10.22 au, m_1 = 1.39 $M_{\rm Jup}$, a_2 = 25.33 au, and m_2 = 1.07 $M_{\rm Jup}$ for the planets.

sal of the disk. In this section, we investigate the case of closer binary stars.

5.1. Second set of simulations

Based on the observations related to Fig. 4, we aimed to conduct a parametric study to identify parameter values leading to an increase of the ratio between the precession timescale $\tau_{\rm pl}$ and the ZLK resonance timescale $\tau_{\rm LK}$. Following Eq. (27), to reduce the ZLK timescale, we decreased the semi-major axis of the binary companion by adopting the values 250 au, 500 au, and 750 au. Note that when the binary companion is closer to the primary star, our disk model suffers from some limitations that will be discussed in detail in Section 5.3. We also increased the initial semi-major axes of the planets by multiplying their range of values by 1.5 in order to increase their orbital periods. A last change consisted in decreasing the lower bound on the planetary masses to 0.65 $M_{\rm Jup}$. All the other parameters were kept unchanged, as given in Table 1. For each of the four a_B values and for the 32 choices of the binary eccentricity and inclination, we randomly drew 50 different initial conditions for the planetary parameters. In total, we ran 8000 simulations (single star simulations included).

We now study the system configurations resulting from this second set of simulations at the dispersal of the disk. In Fig. 8, we reproduce the same plot as in Fig. 4 for the different semi-major axes of the binary companion considered here. As expected from Eqs. (27), (30), and (31), we see that the smaller the semi-major axis of the binary, the closer the systems to the dashed line of equal timescales. As a result, the impact of the binary companion will be stronger for simulations with a_B = 250 au and we therefore chose to focus on this binary separation in the remainder of this section.

5.2. Results

The results are displayed in Fig. 9. We observe that systems with a binary companion (cyan color) are more eccentric than the ones without companion (yellow color), especially at the end of the simulations where highly eccentric planetary orbits are observed. They mainly result from scattering events and ejections during the long-term evolution. As shown in Fig. 10, for the simulations with a binary companion ending with two planets, almost all the eccentricities are below 0.2 (right panel), while most of the one-planet systems present very eccentric configurations (left panel). Note that in Fig. 10 we also see that the inclination of the binary companion influences the planetary eccentricities, since we observe that the majority of the highly eccentric systems have a binary companion with an inclination higher than 40° (i.e., close to the critical value of 39.23° for the ZLK mechanism.).

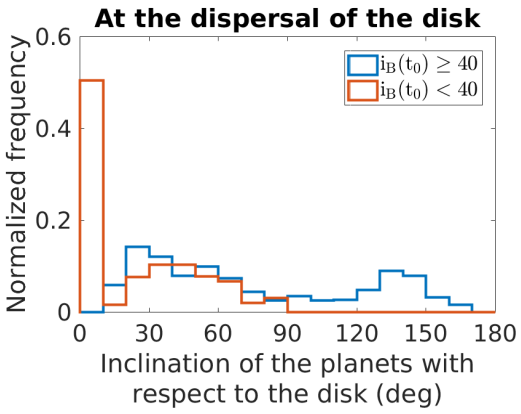


Fig. 12: Histogram of the inclination of the planets with respect to the disk, at the dissipation of the disk for simulations with a binary separation $a_B = 250$ au. Blue (resp. orange) bins are for binary orbital inclinations above (resp. below) 40°.

Again, the mutual inclinations between the planets are small, mainly below 4° (panels of the third row of Fig. 9). Moreover, the distributions of the pericenter arguments shown in the bottom panels of Fig. 9 are nearly uniform, but we note this time a possible evidence of the ZLK resonance. Indeed, if we present separately the single planet systems and the two-planet systems formed at the end of the simulations, we see in Fig. 10 that the distribution of the systems ending with one planet only presents two peaks centered at 90° and 270° associated with the ZLK resonance (bottom left panel). A study of the libration of the pericenter arguments for each system individually leads us to the observation that no system with two planets end up with one of the planets in the ZLK resonance with the binary companion. For the one-planet systems, the percentage of systems locked in the ZLK resonance with an inclined binary companion is $\sim 30\%$, similarly to the observation made in Roisin et al. (2021). However, even if the system is not evolving in the ZLK resonance, its dynamics is still influenced by the ZLK islands which can explain the high planetary eccentricities observed here. For a dynamical study of the one-planet case, we refer to Roisin & Libert (2021); Roisin et al. (2021).

Contrary to the case where $a_B = 1000$ au, the inclination of the planets with respect to the disk was modified during the disk phase for $a_B = 250$ au, as a consequence of the much shorter timescale of the binary perturbations. This can be observed in the typical evolution displayed in Fig. 11. In Fig. 12 we show the inclination of the planets with respect to the disk at the time of the dispersal of the disk. For binaries with inclinations less than 40° (red color), about half of the planets remain in the disk's midplane, while the other half show inclinations ranging up to 90°, with a peak around 40°. This distribution could be in part caused by the nodal precession which induces inclinations ranging from 0 to $2i_B$. Indeed, some of these planets may have been separated from the disk's midplane due to the differential precession induced by the binary, which occurs on a timescale short enough that the damping forces and disk-induced precession cannot counteract it. Note that some planets may also have been expelled from the disk's midplane due to inclination-type resonances, as illustrated in Fig. 6. For binaries with inclinations larger than 40° (blue color), the distribution of the mutual disk-planet inclinations broadens and an excess is observed at inclinations near 30° and 140°. After being ejected from the disk's midplane, these planets may be undergoing ZLK cycles driven by the disk, as shown by Terquem & Ajmia (2010), for which the critical angle can be lower than 40° (Teyssandier et al. 2013).

Table 4: Percentages of the different system configurations at the end of the simulation for the second set of simulations

	250 au	500 au	750 au	1000 au	No binary
2 planets					
MMR	57	89.44	90.31	90.5	91.12
no MMR	5.25	7.44	8.31	7.87	7.94
1 planet	33.94	2.56	0.82	0.94	0.63
no planet	3.81	0.56	0.56	0.69	0.31

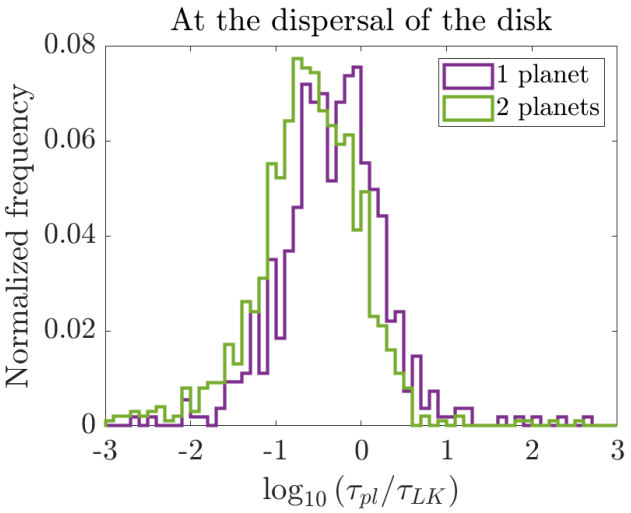


Fig. 13: Normalized frequency of the logarithm of the ratio between the timescale of the gravitational interaction between the planets and the ZLK timescale, for the simulations with $a_B = 250$ au. The color code refers to the number of planets in the system at the end of the simulation.

Regarding the MMRs, a variation in the initial semi-major axes of the planets leads to a modification of their migration rates and thus possibly to different MMR captures. In the new set of simulations with smaller a_B values, almost all the resonant systems are trapped in the 2:1 MMR. During the disk phase, the evolutions of the systems are very similar to the ones with a wide binary companion described in Section 4. At the end of the simulation, a lot of ejections are reported for the simulations with $a_B = 250$ au, as can be observed in Table 4 which shows the system configurations at the end of the simulation for the four considered binary separations for comparison. In Fig. 13, we observe that, when $a_B = 250$ au, the systems ending with a single planet at the end of the simulation (purple curve) have a mean ratio between $\tau_{\rm pl}$ and $\tau_{\rm LK}$ higher than the one for systems with two planets (green curve). This confirms that systems for which both timescales are roughly similar experience more planetary ejections. For all the other values of the binary semi-major axis, Table 4 shows that the influence of the binary companion on the system architecture is still quite limited.

In conclusion, we observed that a binary companion close enough to strongly influence the planets ($a_B = 250$ au) will tend to destabilize the systems and lead to the ejection of a planet in about one third of the cases. The ejection will possibly induce high eccentricity and ZLK resonance capture for the remaining planet.

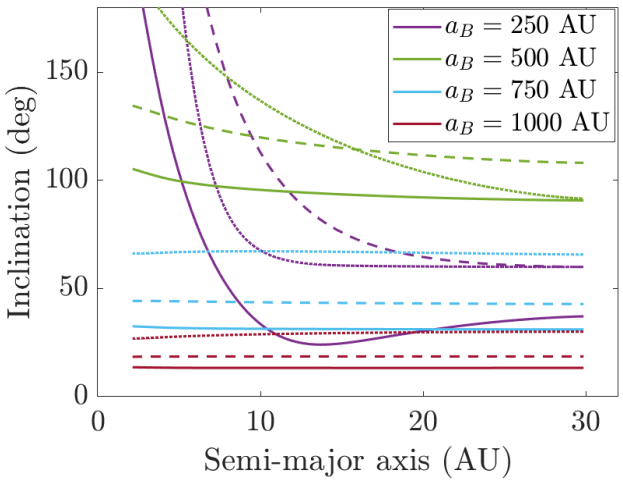


Fig. 14: Time evolution of the inclination of the disk as a function of the semi-major axis, for different semi-major axes of the binary (in the initial disk plane reference frame). The line type refers to different times: the solid line stands for t=0.5 Myr, the dashed line for t=0.75 Myr and the dotted line for t=1.123 Myr. The inclination of the binary i_B is fixed to 60°.

5.3. Caveats of the simulations with $a_B = 250$ au

In this section we discuss the possible limitations of our disk model for the parameters of the second set of simulations. Indeed, we have assumed here that the disk is uniform due to its self-gravity. This hypothesis is valid for wide binary stars (e.g., Roisin et al. 2021). Closer binary companions as the ones considered in the second part of our work could have the effect to overcome the disk self-gravity and lead to deformations of the disk. By splitting the disk in several massive rings adjacent to one another and making them evolve using the Laplace-Lagrange theory to estimate the nodal precession of the disk, we studied in Fig. 14 the uniformity of the disk for the different semi-major axes of the binary companion considered here. More details about this technique can be found in Murray & Dermott (1999); Levison & Morbidelli (2007); Batygin et al. (2011); Roisin et al. (2021). Note that we fix the inclination of the binary companion to $i_B = 60°$ arbitrarily, but the results are similar regardless of the chosen inclination. We see that the disk remains uniform for a binary companion at 750 au and 1000 au. On the contrary, the disk uniformity is not maintained for 250 au and 500 au. This does not mean that the disk is not uniform in this case, but the self-gravity is not sufficient alone to ensure it. Hydrodynamical effects such as radial pressure force and viscous diffusion (e.g., Papaloizou & Terquem 1995; Larwood et al. 1996) could play a role and keep the disk uniform. For instance, it has been shown that if the wave crossing time in the disk is shorter than the precession time due to the binary companion, the rigidity of the disk could be maintained (Zanazzi & Lai 2018a). Investigations of such effects is left for future work.

Moreover, the disk could experience ZLK cycles due to the presence of the binary companion (see, e.g., Martin et al. 2014; Fu et al. 2015b; Zanazzi & Lai 2017). Batygin et al. (2011) showed that the cycles could be suppressed by the self-gravity of the disk if the disk is massive enough. This assumption will eventually break down in our simulations since we implemented an exponential decrease of the disk mass. In addition, ZLK cycles in the disk could lead to eccentric orbits and the hypothesis of the Laplace-Lagrange theory requiring annuli without intersections could not be verified in this case.

Nevertheless, most of the results of the second set of simulations were very similar for all the semi-major axes considered for the binary companion. The differences observed for $a_B = 250$ au mainly arise during the long-term evolution after the dispersal of the disk. Since this phase does not suffer from the limitations in the disk model presented in this section, we therefore conclude that despite those limitations, our results are quite robust.

6. Stability

To assess the stability of the two-planet systems formed in our simulations, we used the Mean Exponential Growth factor of Nearby Orbits (MEGNO) chaos indicator which is based on the evolution of one deviation vector (Cincotta et al. 2003). This indicator differentiates efficiently the orbits since it converges to 0 for stable periodic orbits, to 2 for quasi-periodic orbits and orbits close to stable periodic orbits, and diverges with time for irregular orbits. In practice, the simulations were made with the symplectic Wisdom-Holman integrator WHFast implemented in REBOUND (Rein & Tamayo 2015) and we started to follow the evolution of the MEGNO indicator just after the disk phase.

A visual representation of the results is given in Fig. 15 which shows for each system the semi-major axes of the two planets. The two-planet systems with a binary companion at 250 au are shown in the left panel and the ones when $a_B = 1000$ au are shown in the right panel. The green dashed lines indicate the different MMRs. The high density of points close to the lines confirms that the systems gather around the 2:1 MMR for closer binaries, while captures in higher order resonances like the 3:1 and 5:2 MMRs are possible for wider binaries. Moreover, as previously noted, fewer two-planet systems are formed when the binary companion is at 250 au due to the largest proportion of planetary ejections.

The color code of Fig. 15 refers to the MEGNO value. Note that the color bar upper value is fixed to 10 since we stopped the simulation when the MEGNO reached this value. We observe that in the wide binary case, many systems close to the 2:1 and 3:1 MMRs have a regular motion while the evolution of most of the systems near the 5:2 MMR is irregular. The exact percentages of systems with regular (defined here as a MEGNO value smaller than 2.5) and irregular (MEGNO value higher than 2.5) is given in Table 5. On the contrary, for close binaries, only 22% of the systems near the 2:1 MMR present a regular evolution, showing the significant impact of a close binary companion on the long-term evolution of planetary systems. As expected, we observe in Table 5 that the percentage of regular systems is slightly lower for highly inclined binary stars (above 40°).

7. Comparison with observations

In this section we compare our results with the 187 S-type planets in binary star systems presented in the Open Exoplanet Catalogue of Rein (2012). In particular, the comparison of the cumulative eccentricities is made in Fig. 16. The eccentricity distribution of Rein (2012) for S-type planets is indicated by the green curve, while the one of all the detected planets is indicated by the black curve. Note that we only considered Jupiter-like planets with a mass higher than $0.5 M_{\rm Jup}$. As noticed in Kaib et al. (2013), planets in S-type systems have larger eccentricities. We observe that for the systems with a binary companion at 1000 au (blue curve) and without binary companion (yellow curve)

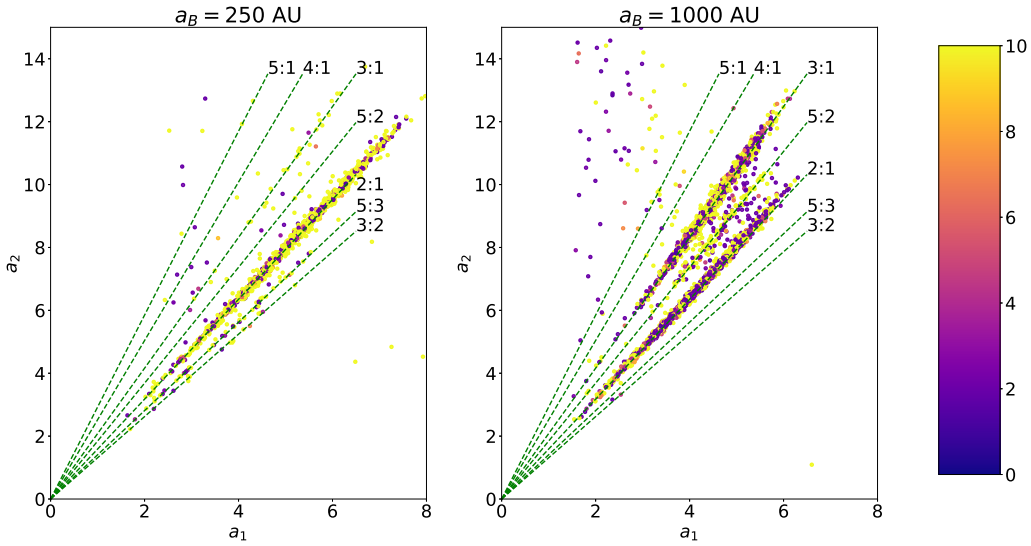


Fig. 15: Semi-major axis of the outer planet with respect to the one of the inner planet for the two-planet systems formed in our simulations with the binary at $a_B = 250$ au (left panel) and at $a_B = 1000$ au (right panel). The color code refers to the MEGNO value.

Table 5: Percentages of regular and irregular evolutions as given by the MEGNO indicator. The percentages are shown for different inclinations of the binary and MMRs between the planets. See the text for more details.

MEGNO	$a_B = 250$ au		$a_B = 1000$ au		$a_B = 250$ au	$a_B = 1000$ au		
	$i_B < 40°$	$i_B \geq 40°$	$i_B < 40°$	$i_B \geq 40°$	2:1	2:1	5:2	3:1
[0 : 2.5]	26.3	16.7	52.2	44.7	22	52.3	24.2	39.2
[2.5, 6]	7.8	6.7	10.2	11	7.5	9.8	7	13.7
> 6	65.9	76.6	37.6	44.3	70.5	37.9	68.8	47.1

found in our simulations, nearly all the eccentricities are below ~ 0.2, since the two-planet systems are weakly perturbed during their long-term evolution. On the contrary, high eccentricities are found in simulations with a close binary companion at 250 au (orange curve) and can notably be explained by the influence of the ZLK resonance on the planetary evolution after the ejection of one of the planets (see Roisin & Libert 2021, for more details). We also added in Fig. 16 the systems found in Roisin et al. (2021) for simulations of single planets migrating in the disk with a binary companion at 1000 au (purple curve). While binary companions with $i_B < 40°$ do not excite the initial quasi-circular orbits of the planets, high eccentricities can be reached in the presence of a highly inclined binary companion (cyan curve). As a result, we showed that the high eccentricities observed for S-type planets in Fig. 16 can be caused by highly inclined wide binary companions in case of single planet systems and close binary companions in case of multi-planet systems.

Moreover, several observations of misalignment between the stellar spin axis and the orbital angular momentum of hot Jupiters have been reported (Wright et al. 2011; Albrecht et al. 2012). A common scenario to explain this misalignment is the action of tidal friction during the ZLK cycles due to an highly inclined binary companion (e.g., Naoz & Fabrycky 2014). In this work we observed misalignment induced by the nodal precession of the planets due to their interaction with the binary companion, regardless of the inclination of the binary companion. This effect was extensively studied during the disk phase (see, e.g., Batygin & Adams 2013; Lai 2014; Spalding & Batygin 2014; Zanazzi & Lai 2018b) but it continues even after the dissipation of the disk (Boué & Fabrycky 2014). The nodal precession effect could lead to possibly strong misalignment even for planets further away of the star than the hot Jupiters and could help explaining the observed misalignment, alongside other mechanisms. Note that in this work we considered the spin axis of the star as fixed and parallel to the disk angular momentum at the beginning of the simulation. Of course, it is a strong assumption since the disk would most likely precess before the formation of the giant planets and would be misaligned. Moreover, the spin axis of the host star could also be chaotic and not constant, as shown by Storch et al. (2014) for a primary star under the influence of a hot Jupiter for example.

8. Conclusions

In this paper, we studied the impact of a binary companion on the migration of two giant planets in a protoplanetary disk, followed by the long-term evolution of the systems after the disk has vanished. The eccentricity and inclination damping induced by the disk, its gravitational potential, and the nodal precession induced by the binary companion on the disk were all considered here. A timescale analysis hinted at the existence of two main patterns in the disk migration phase. First, for very wide binaries ($a_B = 1000$ au), the nodal precession induced by the binary occurs on a timescale longer than the disk's lifetime. In this case, damping forces from the disk cause the planets to remain close to its midplane while they migrate and the entire

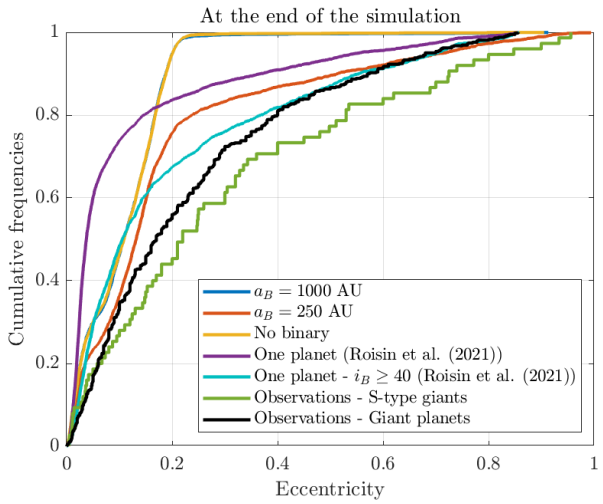


Fig. 16: Cumulative eccentricity of the planets found in our simulations and in the observations (Rein 2012). See text for more details.

disk-planets system precesses rigidly very slowly around the binary. Resonant pairs are routinely formed in these simulations, mostly at the 2:1, 5:2, and 3:1 commensurabilities. In addition, the strong gravitational interaction between the resonant planets acts to reduce the impact of the binary companion after the dissipation of the disk, preserving their resonant structure, and shielding them from undergoing ZLK oscillations. Second, for closer binaries (a_B = 250 au), the nodal precession timescale induced by the binary is in the range 10^5–10^6 yr, which is similar to the disk's lifetime. In this case, the damping forces and gravitational potential from the disk are not always able to maintain the planets within its midplane, and some primordial disk-planet inclinations can be generated, especially for highly inclined binary companions. At the end of these simulations, the fraction of systems in MMRs has dropped significantly compared to simulations with a_B = 1000 au, while the fraction of unstable systems with ejections has increased. Those ejections usually leave the remaining planets with high eccentricity. This could give an additional explanation for the existence of many S-type planets detected with high eccentricity values.

Our study shows that the existence of a binary companion can lead to significant misalignment between the planets and their natal protoplanetary disk. This suggests that misalignment between planetary orbital angular momentum and stellar spin could be generated early on in the system's lifetime, while the disk is still present. A natural continuation of this work would be to consider binary companions whose parameter distributions closely match observations, to increase the number of planets as is done in planet-planet numerical experiments, and finally to include tides and spin dynamics to properly assess the distribution of spin-orbit misalignments.

Acknowledgements. The authors would like to warmly thank the referee for providing insightful comments which improved this work. We also would like to warmly thank A. Crida, A. Lemaître, S. Raymond and K. Tsiganis for useful discussions. The work of A. Roisin was supported by a F.R.S.-FNRS Research Fellowship and the work of J. Teyssandier was supported by a F.R.S.-FNRS Postdoctoral Research Fellowship. This work was also supported by the Fonds de la Recherche Scientifique - FNRS under Grant No. F.4523.20 (DYNAMITE MIS-project). Computational resources have been provided by the Consortium des Equipements de Calcul Intensif, supported by the FNRS-FRFC, the Walloon Region, and the University of Namur (Conventions No. 2.5020.11, GEQ U.G006.15, 1610468 et RW/GEQ2016).

References

Albrecht, S., Winn, J. N., Johnson, J. A., et al. 2012, ApJ, 757, 18
Artymowicz, P. & Lubow, S. H. 1994, ApJ, 421, 651
Batygin, K. & Adams, F. C. 2013, ApJ, 778, 169
Batygin, K., Morbidelli, A., & Tsiganis, K. 2011, A&A, 533, A7
Bitsch, B., Crida, A., Libert, A.-S., & Lega, E. 2013, A&A, 555, A124
Boué, G. & Fabrycky, D. C. 2014, ApJ, 789, 111
Brouwer, D. & Clemence, G. M. 1961, Methods of celestial mechanics
Chachan, Y., Booth, R. A., Triaud, A. H. M. J., & Clarke, C. 2019, MNRAS, 489, 3896
Chambers, J. E., Quintana, E. V., Duncan, M. J., & Lissauer, J. J. 2002, The Astronomical Journal, 123, 2884
Cincotta, P. M., Giordano, C. M., & Simó, C. 2003, Physica D Nonlinear Phenomena, 182, 151
Crida, A. & Morbidelli, A. 2007, Monthly Notices of the Royal Astronomical Society, 377, 1324
Duncan, M. J., Levison, H. F., & Lee, M. H. 1998, AJ, 116, 2067
Duquennoy, A. & Mayor, M. 1991, A&A, 248, 485
Fabrycky, D. & Tremaine, S. 2007, The Astrophysical Journal, 669, 1298
Franchini, A., Martin, R. G., & Lubow, S. H. 2019, MNRAS, 485, 315
Fu, W., Lubow, S. H., & Martin, R. G. 2015, ApJ, 807, 75
Fu, W., Lubow, S. H., & Martin, R. G. 2015b, The Astrophysical Journal, 813, 105
Huré, J.-M. & Hersant, F. 2011, A&A, 531, A36
Ivanov, P. B., Papaloizou, J. C. B., & Polnarev, A. G. 1999, MNRAS, 307, 79
Kaib, N. A., Raymond, S. N., & Duncan, M. 2013, Nature, 493, 381
Kiseleva, L. G., Eggleton, P. P., & Mikkola, S. 1998, MNRAS, 300, 292
Kozai, Y. 1962, AJ, 67, 591
Kraus, A. L. & Ireland, M. J. 2012, ApJ, 745, 5
Lai, D. 2014, MNRAS, 440, 3532
Larwood, J. D., Nelson, R. P., Papaloizou, J. C. B., & Terquem, C. 1996, MNRAS, 282, 597
Lee, M. H. & Peale, S. J. 2002, The Astrophysical Journal, 567, 596
Levison, H. & Morbidelli, A. 2007, Icarus, 189, 196
Libert, A.-S., Sotiriadis, S., & Antoniadou, K. I. 2018, Celestial Mechanics and Dynamical Astronomy, 130, 19
Libert, A.-S. & Tsiganis, K. 2009, MNRAS, 400, 1373
Lidov, M. L. 1962, Planet. Space Sci., 9, 719
Lubow, S. H. & Martin, R. G. 2016, ApJ, 817, 30
Lubow, S. H. & Ogilvie, G. I. 2017, MNRAS, 469, 4292
Martin, R. G., Lubow, S. H., Nixon, C., & Armitage, P. J. 2016, MNRAS, 458, 4345
Martin, R. G., Nixon, C., Lubow, S. H., et al. 2014, ApJ, 792, L33
Matsumoto, Y., Nagasawa, M., & Ida, S. 2012, Icarus, 221, 624
Murray, C. D. & Dermott, S. F. 1999, Solar system dynamics (Cambridge University Press)
Naoz, S. & Fabrycky, D. C. 2014, ApJ, 793, 137
Nelson, R. P., Papaloizou, J. C. B., Masset, F., & Kley, W. 2000, Monthly Notices of the Royal Astronomical Society, 318, 18
Papaloizou, J. C. B. & Larwood, J. D. 2000, Monthly Notices of the Royal Astronomical Society, 315, 823
Papaloizou, J. C. B. & Terquem, C. 1995, MNRAS, 274, 987
Picogna, G. & Marzari, F. 2015, A&A, 583, A133
Rafikov, R. R. & Silsbee, K. 2015, ApJ, 798, 70
Raghavan, D., McAlister, H. A., Henry, T. J., et al. 2010, The Astrophysical Journal Supplement, 190, 1
Rein, H. 2012, arXiv e-prints, arXiv:1211.7121
Rein, H. & Tamayo, D. 2015, MNRAS, 452, 376
Roisin, A. & Libert, A. S. 2021, A&A, 645, A138
Roisin, A., Teyssandier, J., & Libert, A.-S. 2021, MNRAS, 506, 5005
Savonije, G. J., Papaloizou, J. C. B., & Lin, D. N. C. 1994, Monthly Notices of the Royal Astronomical Society, 268, 13
Shakura, N. I. & Sunyaev, R. A. 1973, A&A, 24, 337
Sotiriadis, S. & Libert, A.-S. 2020, MNRAS, 495, 192
Sotiriadis, S., Libert, A.-S., Bitsch, B., & Crida, A. 2017, A&A, 598, A70
Spalding, C. & Batygin, K. 2014, ApJ, 790, 42
Storch, N. I., Anderson, K. R., & Lai, D. 2014, Science, 345, 1317
Takeda, G., Kita, R., & Rasio, F. A. 2008, ApJ, 683, 1063
Terquem, C. & Ajmia, A. 2010, MNRAS, 404
Terquem, C. & Bertout, C. 1993, A&A, 274, 291
Teyssandier, J. & Terquem, C. 2014, MNRAS, 443, 568
Teyssandier, J., Terquem, C., & Papaloizou, J. C. B. 2013, MNRAS, 428, 658
Thommes, E. W. & Lissauer, J. J. 2003, ApJ, 597, 566
von Zeipel, H. 1910, Astronomische Nachrichten, 183, 345
Wright, J. T., Fakhouri, O., Marcy, G. W., et al. 2011, PASP, 123, 412
Wu, Y. & Murray, N. 2003, ApJ, 589, 605
Xiang-Gruess, M. & Papaloizou, J. C. B. 2014, MNRAS, 440, 1179
Zanazzi, J. J. & Lai, D. 2017, MNRAS, 467, 1957
Zanazzi, J. J. & Lai, D. 2018a, MNRAS, 477, 5207
Zanazzi, J. J. & Lai, D. 2018b, MNRAS, 478, 835
Zhou, J.-L. & Sun, Y.-S. 2003, ApJ, 598, 1290