



## THESIS / THÈSE

### MASTER EN SCIENCES MATHÉMATIQUES

#### Coexistence dans un modèle de chemostat par feedback linéarisant

LOSSEAU, Sylvie

*Award date:*  
2012

[Link to publication](#)

#### **General rights**

Copyright and moral rights for the publications made accessible in the public portal are retained by the authors and/or other copyright owners and it is a condition of accessing publications that users recognise and abide by the legal requirements associated with these rights.

- Users may download and print one copy of any publication from the public portal for the purpose of private study or research.
- You may not further distribute the material or use it for any profit-making activity or commercial gain
- You may freely distribute the URL identifying the publication in the public portal ?

#### **Take down policy**

If you believe that this document breaches copyright please contact us providing details, and we will remove access to the work immediately and investigate your claim.



FACULTÉS UNIVERSITAIRES NOTRE-DAME DE LA PAIX  
NAMUR

Faculté des sciences

# COEXISTENCE DANS UN MODÈLE DE CHEMOSTAT PAR FEEDBACK LINÉARISANT

Mémoire présenté pour l'obtention  
du grade académique de master en sciences mathématiques  
Sylvie LOSSEAU

Juin 2012

## Coexistence dans un modèle de chemostat par feedback linéarisant

Ce travail présente une approche utilisant des procédés de géométrie différentielle pour assurer la coexistence de deux espèces en compétition indirecte pour un substrat dans un modèle de chemostat.

La méthode développée consiste en la construction d'un changement de coordonnées et d'un feedback d'état qui transforment localement le système non-linéaire considéré en un système linéaire et contrôlable. L'existence de ces deux outils est fonction du degré relatif du système. La question de trouver une fonction de sortie adéquate est par conséquent également abordée.

Cette théorie de linéarisation exacte est donc appliquée au modèle de chemostat, en considérant premièrement une entrée -le taux de dilution-, puis deux entrées -le taux de dilution et la concentration d'entrée de substrat. Pour une entrée, cette linéarisation exacte se révèle irréalisable, et une linéarisation partielle est alors envisagée. Dans le cas à deux entrées, une linéarisation exacte est effectuée, suivie par la stabilisation par feedback d'état du système linéaire. Des simulations numériques illustrent enfin le résultat obtenu en appliquant ces deux feedbacks au système initial.

**Mots-clés :** Chemostat, Coexistence, Feedback, Géométrie différentielle, Linéarisation

---

## Coexistence in a chemostat model by linearizing feedback

This dissertation presents an approach using differential geometry methods to ensure the coexistence of two species indirectly competing for a single nutrient in a chemostat model.

The developed method involves the construction of a coordinate transformation and a state feedback which locally transform the considered nonlinear system into a linear and controllable one. The existence of both these tools depends on the relative degree of the system. Therefore, this work also addresses the issue of finding an appropriate output function.

This theory of exact linearization is applied to the chemostat model, considering first one input -the dilution rate- and then two inputs -the dilution rate and the inlet nutrient concentration. The exact linearization proves to be unachievable if one input is considered. Hence a partial linearization is proposed. If we consider two inputs, the exact linearization is performed, followed by a state feedback stabilization of the linearized system. Numerical simulations finally illustrate the outcome when these two feedbacks are applied to the initial system.

**Keywords :** Chemostat, Coexistence, Differential Geometry, Feedback, Linearization

# Remerciements

En préambule à ce mémoire, je souhaite adresser mes remerciements aux nombreuses personnes qui ont contribué à l'aboutissement de ce mémoire.

Mes remerciements s'adressent tout d'abord à mon promoteur, le professeur Joseph Winkin, pour son encadrement avisé et le soutien témoigné dès le premier contact et tout au long de l'élaboration de ce mémoire. Je le remercie également de son optimisme, sa motivation et sa passion des mathématiques, communicatifs et à toute épreuve.

Je tiens également à remercier les lecteurs de ce mémoire pour le temps qu'ils y auront consacré.

Je souhaite également adresser un merci particulier à ma famille pour ses encouragements, et principalement à Bénédicte pour sa relecture littéraire de mon charabia mathématique.

J'exprime finalement un remerciement tout spécial à Luce de m'avoir soutenue, motivée et supportée durant toute cette période. Merci pour cette dose de folie au quotidien et pour toutes ces choses qui me permettent de continuer à avancer.

# Table des matières

<b>Introduction</b>	<b>5</b>
<b>1 Chemostat</b>	<b>7</b>
1.1 Définition et modèle . . . . .	7
1.2 Coexistence et problématique . . . . .	9
<b>2 Linéarisation par feedback d'état</b>	<b>13</b>
2.1 Classe de systèmes considérée . . . . .	13
2.2 Concepts de géométrie différentielle . . . . .	14
2.3 Degré relatif et mise sous forme normale . . . . .	18
2.4 Linéarisation exacte par feedback d'état . . . . .	22
2.5 Question de la fonction de sortie . . . . .	23
2.6 Linéarisation partielle . . . . .	25
2.7 Généralisation de la théorie de linéarisation exacte au cas à deux entrées	27
2.7.1 Degré relatif et mise sous forme normale . . . . .	28
2.7.2 Linéarisation exacte par feedback d'état . . . . .	30
2.7.3 Question de la fonction de sortie . . . . .	31
<b>3 Cas à une entrée - taux de dilution</b>	<b>32</b>
3.1 Adaptation du modèle . . . . .	32
3.2 Application de la théorie de linéarisation par feedback d'état . . . . .	33
3.2.1 Linéarisation exacte . . . . .	33
3.2.2 Linéarisation partielle . . . . .	34
3.2.3 Dynamique des zéros . . . . .	38
3.2.4 Stabilisation du sous-système linéaire . . . . .	39
3.2.5 Retour aux coordonnées d'origine . . . . .	43
<b>4 Cas à deux entrées - taux de dilution et concentration d'entrée de substrat</b>	<b>45</b>
4.1 Adaptation du modèle . . . . .	45
4.2 Application de la théorie de linéarisation . . . . .	46
4.2.1 Linéarisation exacte . . . . .	46
4.2.2 Stabilisation du système linéaire . . . . .	48
4.2.3 Retour aux coordonnées d'origine . . . . .	51

<b>5</b>	<b>Analyse et simulations numériques</b>	<b>54</b>
5.1	Cas à une entrée . . . . .	54
5.1.1	Analyse . . . . .	54
5.1.2	Simulations . . . . .	55
5.2	Cas à deux entrées . . . . .	58
5.2.1	Analyse . . . . .	58
5.2.2	Simulations . . . . .	60
	<b>Conclusion et perspectives</b>	<b>67</b>
	<b>Annexes</b>	<b>69</b>
A	Preuves annexées . . . . .	69
	<b>Bibliographie</b>	<b>75</b>

# Introduction

La question de la coexistence de plusieurs espèces au sein du chemostat a été l'objet de nombreuses études et recherches dans le domaine de la biologie mathématique. En effet, le principe d'exclusion compétitive a créé un besoin de construction de lois de contrôle pour assurer cette coexistence. C'est précisément cette question qui se trouve au centre de ce mémoire.

Différentes approches sont possibles pour assurer cette coexistence. On trouve, dans la littérature scientifique, des actions sur les variables de contrôle, comme le taux de dilution ou la concentration d'entrée de substrat, ou même les deux. Ces actions sont dépendantes du temps, parfois de façon périodique, ou prennent la forme d'un feedback dépendant de l'état du système. Cette dernière action est celle qui sera développée dans ce travail.

L'approche considérée utilise la géométrie différentielle, et traite plus précisément de la possibilité, sous conditions, de construire un changement de coordonnées et un feedback d'état qui permettent de transformer de façon locale, mais exacte un système donné en un système linéaire et contrôlable. Cette possibilité est fortement liée à certains concepts et résultats de géométrie différentielle, et principalement au théorème de Frobenius. Cette procédure vise la construction d'une loi de contrôle qui permette la stabilisation du système autour d'un point d'intérêt, dans le cas considéré, la coexistence.

Dans le cadre de ce mémoire, nous allons limiter notre analyse à la coexistence de deux espèces, en compétition indirecte pour un substrat. Il est possible de prolonger cette analyse en considérant plus d'espèces et/ou plus de substrats, mais, dans un souci de concision et d'efficacité, nous ne la développerons pas. Nous étudierons deux cas de figure, premièrement un cas à une entrée -le taux de dilution-, et deuxièmement un cas à deux entrées -le taux de dilution et la concentration de substrat d'entrée-. Le premier cas de figure est le plus commun dans la littérature, voir par exemple [5] ou [9].

Notre propos sera structuré comme suit. Nous allons d'abord introduire le chemostat, la problématique qui motive ce travail et le modèle qui sera considéré dans les analyses. Nous allons ensuite spécifier quelques outils qui seront utiles pour, par la suite, développer une théorie de linéarisation exacte par feedback d'état. Après cette partie théorique, nous tenterons d'appliquer cette méthode au modèle, avant de procéder à quelques simulations numériques pour illustrer nos résultats, à l'aide du

logiciel `Matlab`.

Précisons que les preuves de la partie théorique ne seront pas toutes développées. Nous avons voulu en effet mettre l'accent sur la partie applicative, en ne construisant et mentionnant que le nécessaire théorique. Pour les lecteurs qui désirent plus de formalisme, ces preuves se trouvent dans l'ouvrage de référence de ce mémoire, *Nonlinear Control Systems, An Introduction* d'Alberto Isidori [7], aux pages précisées après les énoncés des résultats non-démontrés.



# Chapitre 1

## Chemostat

Ce chapitre traite de la notion de chemostat et du modèle utilisé pour représenter celui-ci. Il introduit aussi la problématique de coexistence qui est au centre de ce travail.

### 1.1 Définition et modèle

Le chemostat est un dispositif expérimental où prennent place des interactions biologiques. Il se présente sous la forme d'un réacteur qui est alimenté de façon continue et parfaitement mélangé à tout moment et qui conserve les conditions ambiantes (température, luminosité, pH, aération). Dans le cas considéré, le volume est maintenu constant par un système de trop-plein ; on dit alors que le réacteur fonctionne en mode continu.

Notre travail porte sur la coexistence de deux espèces en compétition indirecte pour un substrat et les entrées envisagées sont le taux de dilution auquel est alimenté le réacteur et la concentration d'entrée de substrat. Ce cas particulier est représenté schématiquement sur la figure 1.1.

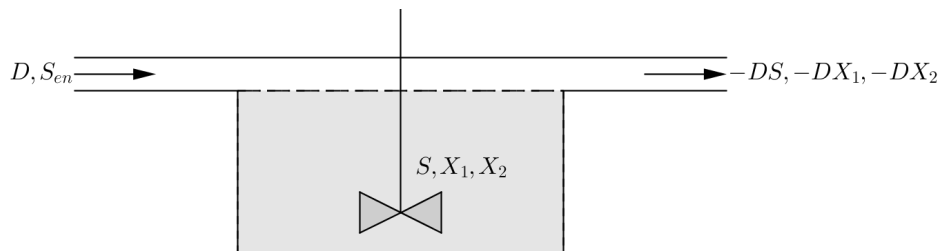


FIGURE 1.1 – Représentation schématique du chemostat considéré

Lors de notre analyse, ce chemostat sera modélisé de la façon suivante, qui est

utilisé notamment dans [4].

$$\begin{aligned}
 \dot{S} &= D(S_{en} - S) - X_1 \frac{F_1(S)}{\gamma_1} - X_2 \frac{F_2(S)}{\gamma_2} \\
 \dot{X}_1 &= X_1 (F_1(S) - D) \\
 \dot{X}_2 &= X_2 (F_2(S) - D)
 \end{aligned} \tag{1.1}$$

où

- $S$  : concentration de substrat, exprimée en  $gr/l$  ;
- $X_1$  et  $X_2$  : concentrations des deux espèces, en  $gr/l$  ;
- $F_1(S)$  et  $F_2(S)$  : fonctions de croissance des espèces  $X_1$  et  $X_2$ , en  $1/t$  ;
- $\gamma_1$  et  $\gamma_2$  : paramètres de rendement qui décrivent la conversion du substrat en bio-masse de chaque espèce ( $0 < \gamma_i \leq 1$  pour  $i = 1, 2$ ).

On pose des hypothèses sur les fonctions de croissance. Elles doivent être lisses (c'est-à-dire être  $\mathcal{C}^\infty$ , voir définition formelle 2.1) et vérifier que

$$F_i(0) = 0 \text{ et } F_i'(S) > 0 \text{ pour } i = 1, 2 \text{ et } S > 0.$$

Ces hypothèses reflètent une certaine cohérence physique : fonction de croissance nulle en l'absence de substrat et croissante en présence de substrat.

Comme les fonctions de croissance considérées doivent uniquement vérifier ces hypothèses, nos développements seront effectués de façon générale. Cependant, il est nécessaire de faire un choix dans les simulations numériques. Bien que les hypothèses ci-dessus soient vérifiées pour des fonctions générales, comme les fonctions de Hill,

$$\frac{kS^n}{\alpha^n + S^n}$$

où les paramètres  $m$  et  $a$  sont positifs et  $n \geq 1$ , ainsi que pour des fonctions linéaires  $F(S) = bS$ , où  $b > 0$ , notre choix portera sur des fonctions de croissances de type Michaelis-Mentens

$$\frac{mS}{a + S}$$

qui vérifient également les hypothèses et où les paramètres  $m$  et  $a$  sont positifs et représentent

- $m$  : le taux maximum de croissance de la population (quand  $S = \infty$ ) ;
- $a$  : constante de Michaelis-Mentens, qui correspond à la quantité de substrat nécessaire pour obtenir la moitié du taux maximum de croissance.

Ces paramètres sont donc dépendants des espèces en présence. Le modèle (1.1) combiné avec ces fonctions de croissance est appelé modèle de Monod. Le développement de ce modèle par J. Monod s'est effectué sur base d'expérimentations et a été reconnu par la communauté scientifique, raison pour laquelle il est le modèle le plus fréquemment utilisé, voir par exemple [3], [5] ou [9].

Cette fonction de croissance est représentée à la figure 1.2. On y voit bien la présence

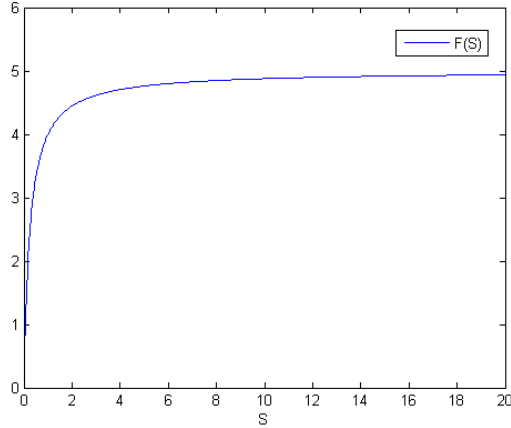


FIGURE 1.2 – Fonction de croissance  $F(S) = \frac{mS}{a + S}$  pour  $m = 5$  et  $a = 0.25$

d'une asymptote horizontale en  $F(S) = m$ , illustration du concept biologique de saturation. À partir d'un certain seuil, l'abondance de substrat n'a plus d'impact sur la croissance de la population.

Les deux variables restantes sont celles qui seront considérées comme entrées du système. La première est le taux de dilution  $D$ , exprimé en  $1/t$ , auquel est alimenté le réacteur, et la seconde est la concentration d'entrée de substrat  $S_{en}$  dans le flot d'entrée, exprimée en  $gr/l$ .

## 1.2 Coexistence et problématique

Notre but est donc d'assurer la coexistence, au sein de ce chemostat, de deux espèces en compétition indirecte pour un même substrat. Nous chercherons par conséquent à stabiliser les concentrations des deux espèces et du substrat à des valeurs strictement positives, pour que cette coexistence perdure sur le long terme. Formellement, on désire que les fonctions  $S(t)$ ,  $X_1(t)$  et  $X_2(t)$ , solutions des équations du système (1.1), soient à valeurs dans  $\mathbb{R}_0^+$ .

Le résultat qui sous-tend notre travail est celui du principe d'exclusion compétitive, développé par Volterra en 1928. Il dit que, si aucun contrôle n'est appliqué, de plusieurs espèces en compétition pour un seul substrat, une seule survit à long terme (cfr. [9]).

Développons ce postulat dans le cas qui nous occupe. Si le taux de dilution et la concentration d'entrée du substrat sont fixés, le système (1.1) peut être simplifié par une mise à l'échelle, en posant

$$s = \frac{S}{S_{en}}, \quad x_i = \frac{X_i}{\gamma_i S_{en}} \quad \text{et} \quad f_i(s) = F_i(S).$$

Nous obtenons alors le système suivant

$$\begin{aligned} \dot{s} &= D(1-s) - x_1 f_1(s) - x_2 f_2(s) \\ \dot{x}_i &= x_i(f_i(s) - D) \end{aligned} \quad (1.2)$$

On voit d'une part que si l'on pose

$$m(t) = s(t) + x_1(t) + x_2(t),$$

la dynamique de cette nouvelle variable sera

$$\dot{m} = D(1 - s - x_1 - x_2) = D(1 - m),$$

et donc

$$m(t) = e^{-Dt} + 1.$$

La somme des trois concentrations tend vers 1.

D'autre part, si on définit  $\lambda_1$  et  $\lambda_2$  de façon implicite comme

$$f_1(\lambda_1) = D = f_2(\lambda_2),$$

en supposant  $\lambda_1$  et  $\lambda_2$  distincts, on voit que les seuls équilibres possibles sont

$$E_0 = (1, 0, 0) \quad E_1 = (\lambda_1, 1 - \lambda_1, 0) \quad E_2 = (\lambda_2, 0, 1 - \lambda_2).$$

Aucun équilibre n'assure par conséquent la coexistence. De plus, le résultat suivant peut être démontré, voir [9, pp. 16-18] pour plus de détails. Si  $0 < \lambda_1 < 1$  et que  $\lambda_1 < \lambda_2$  alors l'équilibre  $E_1$  est un équilibre asymptotiquement stable du système (1.1) pour toutes conditions initiales dans l'ensemble  $\{(s, x_1, x_2) \in \mathbb{R}^3 \mid x_i > 0, i = 1, 2\}$ . On retrouve bien le principe exposé ci-dessus. Ce résultat est illustré aux figures 1.3, 1.4

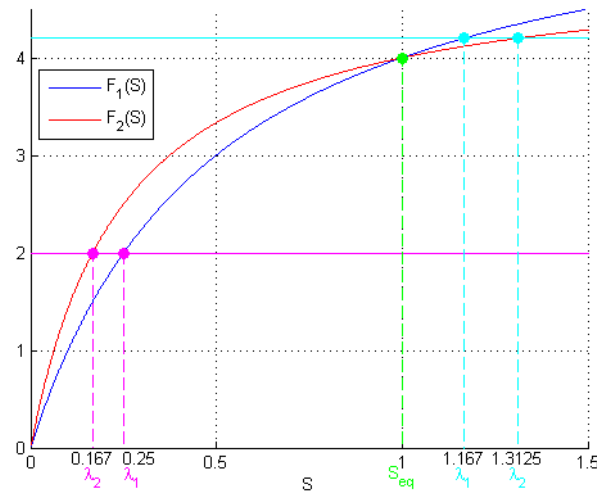


FIGURE 1.3 – Fonctions de croissance avec  $m_1 = 6$ ,  $a_1 = 0.5$ ,  $m_2 = 5$  et  $a_2 = 0.25$

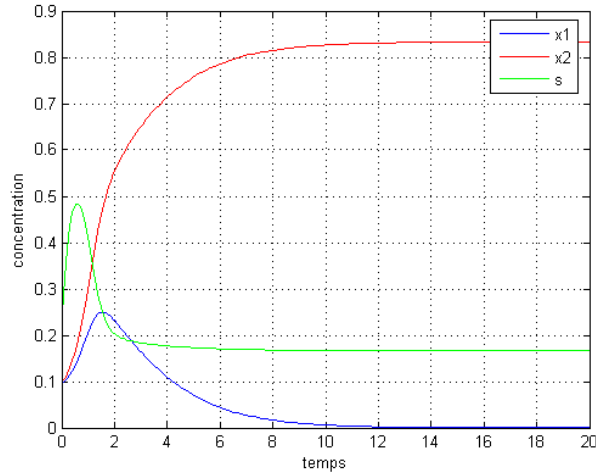


FIGURE 1.4 – Évolution des concentrations sans contrôle avec  $\lambda_2 < \lambda_1 < 1$

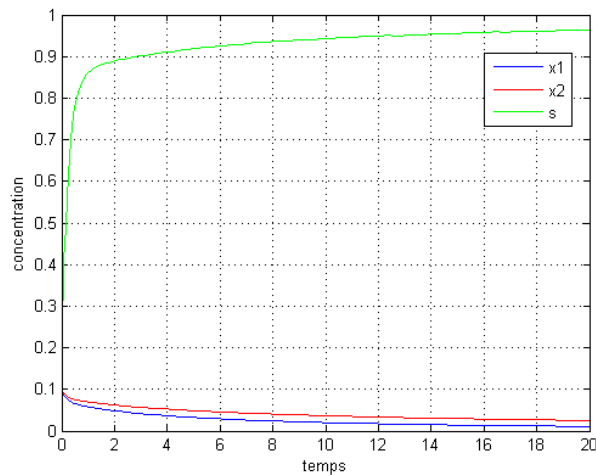


FIGURE 1.5 – Évolution des concentrations sans contrôle avec  $\lambda_2 > \lambda_1 > 1$

et 1.5 qui représentent respectivement la détermination des  $\lambda_i$ , le résultat obtenu lorsque  $\lambda_2 < \lambda_1 < 1$  et le cas où  $\lambda_2 > \lambda_1 > 1$ .

Remarquons que nous avons fait l'hypothèse que  $\lambda_1 \neq \lambda_2$ , En effet, il est extrêmement rare dans la nature d'être en présence d'un cas où  $\lambda_1 = \lambda_2$ , qui proposerait alors l'équilibre coexistant  $E_3 = (\lambda, x_{1e}, x_{2e})$  où  $\lambda + x_{1e} + x_{2e} = 1$ .

Ce principe d'exclusion compétitive a été remis en question par de nombreuses observations du milieu naturel, où plusieurs espèces en compétition se développent dans un environnement à substrat limité. Cependant, d'un point de vue mathématique et selon le modèle proposé, cette coexistence est impossible sans action extérieure. C'est ce qui justifie la recherche d'une loi de contrôle. Les deux variables que nous allons

considérer comme entrées pour cette loi sont le taux de dilution et la concentration d'entrée de substrat.

L'approche proposée, qui sera développée au prochain chapitre et qui utilise des concepts de géométrie différentielle, consiste en la construction d'une loi de contrôle à l'aide d'un feedback d'état appliqué au système préalablement linéarisé de façon locale mais exacte. On cherchera donc d'abord à linéariser le système à l'aide d'un changement de coordonnées et d'un feedback d'état locaux, puis on construira ce contrôle.

Remarquons que cette problématique de coexistence au sein du chemostat a beaucoup d'applications industrielles -ce qui justifie en grande partie la quantité de recherches qu'elle génère-, notamment la dégradation de polluants ou la culture de différentes bactéries et levures utilisées dans les domaines agro-alimentaire, chimique et pharmaceutique ou dans la production de bioénergie.

# Chapitre 2

## Linéarisation par feedback d'état

Ce chapitre constituera la partie théorique de ce travail. Nous allons y développer la théorie de linéarisation exacte par feedback d'état. Il débutera par une explication de la classe de système considéré -ce qui permettra également de fixer les notations-, de rappels de concepts et de résultats de géométrie différentielle. Il traitera ensuite du développement à proprement parler de la linéarisation, à l'aide de la notion de degré relatif. Une section sera par ailleurs consacrée à la question des systèmes sans fonction de sortie. Comme les premiers développements théoriques porteront sur le cas à une entrée et une sortie, la dernière section consistera en une généralisation de la théorie vue précédemment au cas à deux entrées et deux sorties, pour couvrir toutes les applications qui feront suite à cette théorie.

### 2.1 Classe de systèmes considérée

Lors de notre développement théorique, nous allons considérer la classe de systèmes non-linéaires suivante.

$$\begin{cases} \dot{x} = f(x) + \sum_{i=1}^m g_i(x)u_i \\ y_j = h_j(x) \quad 1 \leq j \leq p. \end{cases} \quad (2.1)$$

où

- $x \in \Omega$  ouvert de  $\mathbb{R}^n$ ,
- $f, g_i : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^n$  champs vectoriels lisses sur  $\Omega$

$$f(x) = \begin{bmatrix} f_1(x) \\ f_2(x) \\ \vdots \\ f_n(x) \end{bmatrix} \quad \text{et} \quad g_i(x) = \begin{bmatrix} g_{1i}(x) \\ g_{2i}(x) \\ \vdots \\ g_{ni}(x) \end{bmatrix}$$

où, pour  $i = 1, \dots, n$ ,  $f_i, g_{ij} : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $x \rightsquigarrow f_i(x), g_{ij}(x)$

- $u_i \in \mathbb{R}$  signaux de contrôle scalaires ( $1 \leq i \leq m$ ), et
- $h_j : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  fonctions scalaires lisses ( $1 \leq j \leq p$ ).

## 2.2 Concepts de géométrie différentielle

Dans cette section, nous allons procéder au rappel de certaines définitions et résultats importants qui nous seront utiles par la suite.

Commençons par quelques définitions générales. Notons que, pour cette section,  $U$  sera considéré comme une partie ouverte de  $\mathbb{R}^n$ .

**Définition 2.1.** Une fonction  $\varphi$  définie sur  $U$  et à valeurs réelles est dite **lisse** si  $\forall k \geq 0$ ,  $\varphi$  est de classe  $\mathcal{C}^k$  sur  $U$  ou, de façon équivalente,  $\varphi$  est de classe  $\mathcal{C}^\infty$  sur  $U$ .

Un **champ de vecteurs** (ou champ vectoriel) sur  $\mathbb{R}^n$  est une fonction définie sur  $U$  et à valeurs dans  $\mathbb{R}^n$ .

$$f : U \rightarrow \mathbb{R}^n, \quad x \mapsto f(x) = \begin{pmatrix} f_1(x) \\ \vdots \\ f_n(x) \end{pmatrix}.$$

Un **champ de covecteurs** est une fonction définie sur  $U$  et qui fait correspondre à chaque vecteur de  $U$  un covecteur de l'espace des formes linéaires sur  $\mathbb{R}^n$ .

$$\omega : U \rightarrow (\mathbb{R}^n)^*, \quad x \mapsto \omega(x) = ( \omega_1(x) \quad \dots \quad \omega_n(x) ).$$

Remarquons que, par convention, on écrira les vecteurs sous forme de colonnes et les covecteurs sous forme de lignes.

Rappelons à présent le concept de gradient et introduisons deux nouveaux concepts, les dérivée et crochets de Lie.

**Définition 2.2.** Le **gradient** (ou la différentielle) d'une fonction  $\lambda$  définie sur  $U$  et à valeurs réelles est le champ de covecteurs

$$d\lambda(x) = \left( \frac{\partial \lambda}{\partial x_1} \quad \dots \quad \frac{\partial \lambda}{\partial x_n} \right).$$

Notons que la partie de droite de cette expression correspond exactement à la **jacobienn**e de  $\lambda$  et que l'on préférera parfois utiliser la notation  $d\lambda(x) = \frac{\partial \lambda}{\partial x}$ . Cette notation est également utilisée pour la jacobienne de fonction à valeurs dans  $\mathbb{R}^n$ .

$$\text{Pour } f : U \rightarrow \mathbb{R}^n, \quad x \mapsto f(x) = \begin{pmatrix} f_1(x) \\ \vdots \\ f_n(x) \end{pmatrix}, \quad \text{on a } \frac{\partial f}{\partial x} = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n} \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial f_n}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial f_n}{\partial x_n} \end{pmatrix}.$$



La **dérivée de Lie** de la fonction à valeurs réelles  $h$  le long du champ vectoriel  $f$  est donnée par

$$L_f h(x) : U \text{ ouvert } \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$$

$$x \mapsto L_f h(x) = \frac{\partial h}{\partial x} f(x) = \sum_{i=1}^n \frac{\partial h}{\partial x_i} f_i(x).$$

Les **crochets de Lie** des champs vectoriels  $f$  et  $g$  sont définis comme

$$[f, g](x) = \frac{\partial g}{\partial x} f(x) - \frac{\partial f}{\partial x} g(x).$$

Ces crochets s'écrivent, en notation compacte,  $\text{ad}_f g(x) = [f, g](x)$  et la répétition de cette opération est définie récursivement comme

$$\text{ad}_f^k g(x) = [f, \text{ad}_f^{k-1} g](x), \quad \text{où } \text{ad}_f^1 g(x) = \text{ad}_f g(x) \text{ et } \text{ad}_f^0 g(x) = g(x).$$

*Illustrons cette dernière définition par un exemple. Soient  $f_1$  et  $f_2$  deux champs vectoriels sur  $U = \mathbb{R}^3$ , définis comme*

$$f_1(x) = \begin{pmatrix} 2x_2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad f_2(x) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ x_2 \end{pmatrix}. \quad (2.2)$$

*Le calcul des crochets de Lie de ces deux champs vectoriels donne*

$$\begin{aligned} [f_1, f_2] &= \frac{\partial f_2}{\partial x} f_1(x) - \frac{\partial f_1}{\partial x} f_2(x) \\ &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2x_2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ x_2 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}. \end{aligned} \quad (2.3)$$

Notons que ces concepts seront utiles lors de la construction du changement de coordonnées et du feedback.

Puisque dans les développements futurs, nous chercherons à construire un changement de variables, le concept de difféomorphisme sera nécessaire.

**Définition 2.3.** Un **difféomorphisme local** dans un voisinage ouvert  $U^o$  de  $x^o \in \mathbb{R}^n$  est un champ de vecteurs

$$\Phi : U^o \rightarrow \mathbb{R}^n, \quad x \mapsto \Phi(x)$$

qui vérifie les propriétés suivantes

- i)  $\Phi$  est inversible ;
- ii)  $\Phi$  est lisse sur  $U$  et  $\Phi^{-1}$  est lisse sur  $\Phi(U)$ .

Le résultat suivant sera utile pour vérifier qu'une fonction donnée est un difféomorphisme local.

**Proposition 2.1.** *Soit  $\Phi$  défini sur  $U$  et à valeurs dans  $\mathbb{R}^n$  un champ de vecteurs lisse et soit  $x^o \in U$  tels que la jacobienne de  $\Phi$  en  $x^o$  est non singulière, alors il existe un voisinage du point  $x^o$  inclus dans  $U$  sur lequel  $\Phi$  est un difféomorphisme local.*

Les définitions suivantes traitent du concept de distribution et de ses caractéristiques potentielles. Celui-ci intervient dans le théorème de Frobenius, qui sera mentionné ci-dessous, et dans le théorème qui assure l'existence d'une fonction de sortie adéquate pour effectuer la linéarisation exacte.

**Définition 2.4.** Soient les champs de vecteurs  $f_1, \dots, f_k$  définis sur le même ouvert  $U$ . Pour chaque  $x \in U$ , les vecteurs  $f_1(x), \dots, f_k(x)$  génèrent un sous-espace  $\Delta(x) \subset \mathbb{R}^n$ , c'est-à-dire

$$\Delta(x) = \text{span}\{f_1(x), \dots, f_k(x)\}.$$

La collection  $\Delta$  qui à tout  $x \in U$  associe le sous-espace  $\Delta(x) \subset \mathbb{R}^n$  est appelée **distribution**. La distribution  $\Delta$  générée par  $f_1, \dots, f_k$  est notée

$$\Delta = \text{span}\{f_1, \dots, f_k\}.$$

*Reprenons les champs vectoriels (2.2) de l'exemple sur les crochets de Lie pour illustrer le concept de distribution. La distribution  $\Delta$ , générée par  $f_1$  et  $f_2$  est notée*

$$\Delta = \text{span}\{f_1, f_2\}.$$

À tout  $x \in U$ , elle fait correspondre le sous-espace

$$\Delta(x) = \left\{ \alpha \begin{pmatrix} 2x_2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ x_2 \end{pmatrix}, \quad \alpha, \beta \in \mathbb{R} \right\}.$$

La distribution  $\Delta$  définie sur  $U$  est **non-singulière** si sa dimension est constante sur  $U$ , c'est-à-dire s'il existe un entier  $d$  tel que

$$\dim(\Delta(x)) = d \quad \text{pour tout } x \in U.$$

*Notons que la distribution considérée à l'exemple précédent est une distribution non-singulière. En effet, elle est de dimension 2 pour tout  $x \in U$  car les vecteurs  $f_1(x)$  et  $f_2(x)$  sont linéairement indépendants pour  $x$ .*

La distribution  $\Delta$  est **involutive** si les crochets de Lie de tout couple de champs vectoriels appartenant à  $\Delta$  forment un champ vectoriel appartenant à  $\Delta$ , c'est-à-dire

$$\tau_1 \in \Delta, \tau_2 \in \Delta \Rightarrow [\tau_1, \tau_2] \in \Delta.$$

**Remarque 2.1.** Dans le cas d'une distribution  $\Delta$  non-singulière générée par les champs vectoriels  $f_1, f_2, \dots, f_d$ , on remarque que  $\Delta$  est involutive si et seulement si

$$[f_i, f_j] \in \Delta \quad 1 \leq i, j \leq d.$$

Cette remarque nous permet par exemple de voir que la distribution définie dans l'exemple précédent n'est pas involutive. En effet, par (2.3),

$$[f_1, f_2] = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

et  $[f_1, f_2] \notin \Delta$ , car la matrice

$$\begin{pmatrix} f_1(x) & f_2(x) & [f_1, f_2](x) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2x_2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & x_2 & 1 \end{pmatrix}$$

est de rang plein pour tout  $x \in U$ .

Soient les champs de covecteurs  $\omega_1, \dots, \omega_k$  définis sur  $U$ . Pour chaque  $x \in U$ , les covecteurs  $\omega_1(x), \dots, \omega_k(x)$  génèrent un sous-espace  $\Omega(x) \subset (\mathbb{R}^n)^*$ , c'est-à-dire

$$\Omega(x) = \text{span}\{\omega_1(x), \dots, \omega_k(x)\}.$$

La collection  $\Omega$  qui à tout  $x \in U$  associe  $\Omega(x)$  est appelée **codistribution**. La codistribution générée par  $\omega_1, \dots, \omega_k$  est notée

$$\Omega = \text{span}\{\omega_1, \dots, \omega_k\}.$$

L'**annulateur** d'une distribution  $\Delta$  définie sur l'ouvert  $U$  est la codistribution qui à tout  $x \in U$  associe

$$\Delta^\perp(x) = \{w^* \in (\mathbb{R}^n)^* : \langle w^*, v \rangle = 0 \text{ pour tout } v \in \Delta(x)\}.$$

Une distribution non-singulière  $\Delta$ , définie sur l'ouvert  $U$ , est dite **complètement intégrable** si, pour tout point  $x^o$  de  $U$ , il existe un voisinage  $U^o$  de  $x^o$  et  $n - d$  fonctions lisses à valeurs réelles  $\lambda_1, \dots, \lambda_{n-d}$  définies sur  $U^o$ , tels que

$$\text{span}\{d\lambda_1, \dots, d\lambda_{n-d}\} = \Delta^\perp$$

sur  $U^o$ .

On peut définir ce concept de manière équivalente comme suit :

La distribution  $\Delta = \text{span}\{f_1, \dots, f_k\}$  est complètement intégrable si l'équation différentielle

$$\frac{\partial \lambda_j}{\partial x} [f_1(x) \dots f_k(x)] = 0$$

admet  $n - k$  solutions indépendantes, où le terme « indépendantes » signifie que les vecteurs

$$\frac{\partial \lambda_1}{\partial x}, \dots, \frac{\partial \lambda_{n-k}}{\partial x}$$

sont indépendants à chaque  $x \in U$ .

Ces définitions nous mènent à un résultat fort important en géométrie différentielle et qui est essentiel pour les développements suivants. En effet, il intervient dans la majorité des preuves des résultats des sections suivantes, principalement dans la construction du changement de coordonnées et pour assurer l'existence d'une fonction de sortie adéquate.

**Théorème 2.1** (Frobenius). *Une distribution non-singulière est complètement intégrable si et seulement si elle est involutive.*

La partie nécessaire de ce théorème est relativement aisée à développer à partir de l'hypothèse d'intégrabilité.

La partie suffisante est constructive. L'annulateur de la distribution est généré à partir des différentielles de composées de flots de champs de vecteurs. Pour plus de détails, voir [7, pp. 25-30].

## 2.3 Degré relatif et mise sous forme normale

Nous allons dans cette section nous pencher sur la notion de degré relatif et sur son utilité dans la définition d'un changement de coordonnées qui nous permettrait de simplifier le système considéré. Nous allons dans un premier temps considérer un modèle simplifié pour développer notre propos, avant de le généraliser par la suite. Le modèle suivant est donc une simplification du modèle (2.1) à une entrée et une sortie. Remarquons que les dépendances au temps sont ici explicitées.

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= f(x(t)) + g(x(t))u(t) \\ y(t) &= h(x(t)). \end{aligned} \tag{2.4}$$

Passons donc à la définition de degré relatif d'un système.

**Définition 2.5** (degré relatif). Le système (2.4) a un **degré relatif**  $r$  au point  $x^o$  si

1.  $L_g L_f^i h(x) = 0$ ,  $i = 0, 1, \dots, r - 2$  pour tout  $x$  dans un voisinage  $\Omega$  de  $x^o$  ;
2.  $L_g L_f^{r-1} h(x^o) \neq 0$  pour tout  $x \in \Omega$ .

Intéressons-nous à l'influence qu'a ce degré relatif sur les dérivées relatives au temps de la fonction de sortie au point  $x^o$ . Faisons tout d'abord l'hypothèse qu'il existe un temps  $t^o$  tel que  $x(t^o) = x^o$ . Nous obtenons

$$\begin{aligned} y(t^o) &= h(x(t^o)) = h(x^o) \\ y^{(1)}(t) &= \frac{\partial h}{\partial x} \frac{dx}{dt} = \frac{\partial h}{\partial x} (f(x(t)) + g(x(t))u(t)) \\ &= L_f h(x(t)) + L_g h(x(t))u(t). \end{aligned}$$

Par la définition de degré relatif, dans un voisinage de  $x^o$ , c'est-à-dire un voisinage de  $t^o$ , on obtient

$$y^{(1)}(t) = L_f h(x(t)).$$

Il en découle que

$$\begin{aligned} y^{(2)}(t) &= \frac{\partial L_f h}{\partial x} \frac{dx}{dt} \\ &= \frac{\partial L_f h}{\partial x} (f(x(t)) + g(x(t))u(t)) \\ &= L_f^2 h(x(t)) + L_g L_f h(x(t))u(t) = L_f^2 h(x(t)). \end{aligned}$$

Ce calcul peut être généralisé pour  $k < r$  et pour tout  $t$  dans un voisinage de  $t^o$ .

$$y^{(k)}(t) = L_f^k h(x(t)) + L_g L_f^{k-1} h(x(t))u(t) = L_f^k h(x(t))$$

Pour  $k = r$ , on obtient

$$y^{(r)}(t^o) = L_f^r h(x^o) + L_g L_f^{r-1} h(x^o)u(t^o).$$

Sur base de ces observations, on conçoit que les fonctions  $h(x)$ ,  $L_f h(x)$ ,  $\dots$ ,  $L_f^{r-1} h(x)$  doivent avoir une certaine importance. En effet, ces fonctions peuvent être utilisées pour concevoir, du moins partiellement, un changement local de coordonnées dans un voisinage du point  $x^o$ . Cette possibilité découle du lemme suivant.

**Lemme 2.1.** *Les vecteurs*

$$dh(x^o), dL_f h(x^o), \dots, dL_f^{r-1} h(x^o)$$

*sont linéairement indépendants.*

Ce résultat se prouve facilement en utilisant les définitions de crochets de Lie et de degré relatif, voir [7, pp. 148-149] pour les détails.

Ce lemme implique que le degré relatif  $r \leq n$  et que  $h(x)$ ,  $L_f h(x)$ ,  $\dots$ ,  $L_f^{r-1} h(x)$  peuvent être un ensemble partiel de nouvelles fonctions de coordonnées dans un voisinage du point  $x^o$  (cfr. proposition 2.1). Le choix de ce changement de coordonnées nous permettra par la suite d'obtenir un système simplifié. Résumons les propos précédents et complétons-les dans le cas où  $r < n$  dans la proposition suivante.

**Proposition 2.2.** *Supposons que le système (2.4) soit de degré relatif  $r$  en  $x^o$ . Alors,  $r \leq n$ . Posons*

$$\begin{aligned} \Phi_1(x) &= h(x) \\ \Phi_2(x) &= L_f h(x) \\ &\vdots \\ \Phi_r(x) &= L_f^{r-1} h(x). \end{aligned}$$

Si  $r < n$ , il est possible de trouver  $n - r$  autres fonctions  $\Phi_{r+1}(x), \dots, \Phi_n(x)$  telles que la fonction

$$\Phi(x) = \begin{pmatrix} \Phi_1(x) \\ \vdots \\ \Phi_n(x) \end{pmatrix}$$

ait une jacobienne non-singulière en  $x^o$  et puisse donc être considérée comme un changement local de coordonnées dans un voisinage de  $x^o$ . La valeur en  $x^o$  de ces fonctions additionnelles peut être fixée arbitrairement et il est toujours possible de les choisir telles que

$$L_g\Phi_i(x) = 0 \text{ pour } r + 1 \leq i \leq n \text{ et } x \text{ dans un voisinage de } x^o.$$

La preuve de ce résultat utilise le théorème de Frobenius et le lemme précédent, voir [7, pp. 149-151] pour plus de précisions.

Décrivons à présent notre système dans ces nouvelles coordonnées,  $z_i = \Phi_i(x)$  pour  $1 \leq i \leq n$ .

$$\begin{aligned} \frac{dz_1}{dt} &= \frac{\partial\Phi_1}{\partial x} \frac{dx}{dt} = \frac{\partial h}{\partial x} \frac{dx}{dt} = L_f h(x(t)) = \Phi_2(x(t)) = z_2(t) \\ &\vdots \\ \frac{dz_{r-1}}{dt} &= \frac{\partial\Phi_{r-1}}{\partial x} \frac{dx}{dt} = \frac{\partial L_f^{r-2} h}{\partial x} \frac{dx}{dt} = L_f^{r-1} h(x(t)) = \Phi_r(x(t)) = z_r(t) \\ \frac{dz_r}{dt} &= \frac{\partial\Phi_r}{\partial x} \frac{dx}{dt} = L_f^r h(x(t)) + L_g L_f^{r-1} h(x(t)) u(t). \end{aligned}$$

Si on remplace  $x(t)$  par son expression en  $z(t)$ , c'est-à-dire  $x(t) = \Phi^{-1}(z(t))$  et qu'on pose

$$\begin{aligned} a(z) &= L_g L_f^{r-1} h(\Phi^{-1}(z)) \\ b(z) &= L_f^r h(\Phi^{-1}(z)), \end{aligned}$$

cette équation peut être réécrite

$$\frac{dz_r}{dt} = b(z(t)) + a(z(t))u(t).$$

Par définition du degré relatif, le coefficient  $a$  est non nul pour tout  $z$  dans un voisinage du point  $z^o = \Phi(x^o)$ . Pour les dérivées des coordonnées suivantes, aucune structure particulière n'est attendue, sauf si les fonctions de coordonnées ont été choisies telles que

$$L_g\Phi_i(x) = 0 \text{ pour } r + 1 \leq i \leq n \text{ et } x \text{ dans un voisinage de } x^o,$$

auquel cas on obtient

$$\begin{aligned} \frac{dz_i}{dt} &= \frac{\partial\Phi_i}{\partial x} \frac{dx}{dt} \\ &= \frac{\partial\Phi_i}{\partial x} (f(x(t)) + g(x(t))u(t)) \\ &= L_f\Phi_i(x(t)) + L_g L_f\Phi_i(x(t))u(t) = L_f\Phi_i(x(t)). \end{aligned}$$

Dans un souci de concision, on pose

$$q_i(z) = L_f \Phi_i(\Phi^{-1}(z)) \quad \text{pour } r+1 \leq i \leq n,$$

et on réécrit les équations comme

$$\frac{dz_i}{dt} = q_i(z(t)).$$

La description de l'espace d'état du système est donc, dans les nouvelles coordonnées, la suivante :

$$\begin{aligned} \dot{z}_1 &= z_2 \\ &\vdots \\ \dot{z}_{r-1} &= z_r \\ \dot{z}_r &= b(z) + a(z)u \\ \dot{z}_{r+1} &= q_{r+1}(z) \\ &\vdots \\ \dot{z}_n &= q_n(z). \end{aligned}$$

Pour décrire le système au complet, nous devons encore exprimer la fonction de sortie en fonction des nouvelles coordonnées. Il est aisé de constater que comme  $y = h(x)$  et que  $z_1 = h(x)$ , on exprime la fonction de sortie comme  $y = z_1$ . Le système ainsi obtenu est mis sous forme dite **normale**.

**Remarque 2.2.** Il n'est pas toujours facile de trouver  $n - r$  fonctions  $\Phi_i$  telles que

$$L_g \Phi_i(x) = 0 \quad \text{pour } r+1 \leq i \leq n \text{ et } x \text{ dans un voisinage de } x^o,$$

car il s'agit de résoudre un système de  $n - r$  équations aux dérivées partielles. Il est d'habitude beaucoup plus simple de considérer des fonctions telles que la jacobienne de  $\Phi$  soit non-singulière en  $x^o$ , ce qui est suffisant pour assurer qu'il s'agisse bien d'un changement de coordonnées. On obtient alors le système suivant, où les  $r$  premières équations sont les mêmes mais les  $n - r$  suivantes n'ont pas de forme particulière :

$$\begin{aligned} \dot{z}_1 &= z_2 \\ &\vdots \\ \dot{z}_{r-1} &= z_r \\ \dot{z}_r &= b(z) + a(z)u \\ \dot{z}_{r+1} &= q_{r+1}(z) + p_{r+1}(z)u \\ &\vdots \\ \dot{z}_n &= q_n(z) + p_n(z)u \end{aligned}$$

avec une référence explicite à  $u$  dans les  $n - r + 1$  dernières équations.

## 2.4 Linéarisation exacte par feedback d'état

Après avoir explicité un changement de coordonnées qui simplifie le modèle, on cherche à présent, à partir de ce dernier, à trouver un feedback d'état

$$u = \alpha(x) + \beta(x)v$$

où  $v$  représente le contrôle externe et qui rend le système, exprimé dans ces nouvelles coordonnées, linéaire et contrôlable.

Considérons le cas où le degré relatif du système (2.4) est égal à la dimension de l'espace d'état. Ce système est alors exactement linéarisable par feedback d'état. Le changement de coordonnées suivant

$$\Phi(x) = \begin{pmatrix} \Phi_1(x) \\ \Phi_2(x) \\ \vdots \\ \Phi_n(x) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} h(x) \\ L_f h(x) \\ \vdots \\ L_f^{n-1} h(x) \end{pmatrix}$$

permet d'écrire le système dans les nouvelles coordonnées  $z_i = \Phi_i(x) = L_f^{i-1} h(x)$  comme

$$\begin{aligned} \dot{z}_1 &= z_2 \\ &\vdots \\ \dot{z}_{n-1} &= z_n \\ \dot{z}_n &= b(z) + a(z)u \end{aligned}$$

où  $a(z)$  est non-nul dans un voisinage de  $z^o$ . Si on considère le feedback d'état

$$u = \frac{1}{a(z)}(-b(z) + v)$$

qui est bien défini au voisinage de  $z^o$ , on obtient le système en boucle fermée caractérisé par les équations

$$\begin{aligned} \dot{z}_1 &= z_2 \\ &\vdots \\ \dot{z}_{n-1} &= z_n \\ \dot{z}_n &= v. \end{aligned}$$

Ce qui peut être écrit

$$\dot{z} = Az + Bv, \tag{2.5}$$

où

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad B = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix},$$



qui est bien linéaire et contrôlable.

En effet, le rang de la matrice de contrôlabilité

$$\mathcal{C} = ( B \quad AB \quad \dots \quad A^{n-1}B )$$

est plein, c'est-à-dire  $\text{rang}(\mathcal{C}) = n$ , ce qui est la caractérisation de la contrôlabilité pour les systèmes linéaires.

Revenons un instant sur le concept de contrôlabilité. On dit qu'un système est contrôlable (ou commandable) si, pour tous les états  $x^{(o)}$ ,  $x^{(1)}$ , il existe un temps fini et un contrôle admissible tel que le système contrôlé passe de l'état  $x^{(o)}$  à l'état  $x^{(1)}$ . Ce concept est par conséquent très intéressant dans le cas qui nous occupe, pour pouvoir stabiliser le système à un état d'intérêt particulier.

Le théorème suivant résume la discussion précédente.

**Théorème 2.2.** *Tout système non-linéaire ayant un degré relatif  $n$  à un point  $x^o$  peut être transformé, à l'aide d'un changement de coordonnées  $z = \Phi(x)$  et d'un feedback d'état, en un système qui, dans un voisinage du point  $z^o = \Phi(x^o)$ , est linéaire et contrôlable.*

## 2.5 Question de la fonction de sortie

Nous avons vu dans la section 2.4 que l'existence d'une fonction de sortie  $h(x)$  conférant au système un degré relatif  $n$  en un point  $x^o$  était une condition suffisante pour assurer l'existence d'un changement de coordonnées et d'un feedback d'état qui transforme le système considéré en un système linéaire et contrôlable. Cette condition est également nécessaire.

Considérons à présent le système

$$\dot{x} = f(x) + g(x)u \tag{2.6}$$

sans fonction de sortie. Le problème est donc de trouver, si possible, un feedback

$$u = \alpha(x) + \beta(x)v$$

défini sur un voisinage  $U$  d'un point  $x^o$  et un changement de coordonnées  $z = \Phi(x)$  également défini sur  $U$  tel que le système en boucle fermée

$$\dot{x} = f(x) + g(x)\alpha(x) + g(x)\beta(x)v,$$

exprimé dans les coordonnées  $z = \Phi(x)$ , soit linéaire et contrôlable. Le lemme suivant exprime la condition nécessaire et suffisante de la résolution de ce problème.

**Lemme 2.2.** *Le problème décrit ci-dessus est résoluble si et seulement s'il existe un voisinage  $U$  de  $x^o$  et une fonction  $\lambda(x)$  à valeurs dans  $\mathbb{R}$ , définie sur  $U$ , telle que le système*

$$\begin{aligned}\dot{x} &= f(x) + g(x)u \\ y &= \lambda(x)\end{aligned}$$

*soit de degré relatif  $n$  en  $x^o$ .*

La partie nécessaire de ce résultat se démontre par l'invariance du degré relatif sous changement de coordonnées et sous feedback, et par l'existence d'une fonction de sortie telle que le système linéarisé soit de degré relatif  $n$ . Pour plus de détails, voir [7, pp. 161-163].

Ce qui nous intéresse dès lors est la façon de trouver cette fonction de sortie  $\lambda(x)$  telle que le système (2.6) associé à cette fonction soit de degré relatif  $n$  au point  $x^o$ , c'est-à-dire que

$$L_g\lambda(x) = L_fL_g\lambda(x) = \dots = L_gL_f^{n-2}\lambda(x) = 0, \forall x \in U \text{ voisinage de } x^o$$

$$L_gL_f^{n-1}\lambda(x^o) \neq 0.$$

Les hypothèses de l'existence d'une telle fonction sont décrites dans le théorème suivant.

**Théorème 2.3.** *Il existe une fonction de sortie  $\lambda(x)$  telle que le degré relatif du système (2.6) associé à cette fonction soit égal à  $n$  en  $x^o$  si et seulement si les conditions suivantes sont vérifiées*

- (i) *la matrice  $[g(x^o) \text{ ad}_f g(x^o) \dots \text{ ad}_f^{n-2} g(x^o) \text{ ad}_f^{n-1} g(x^o)]$  soit de rang  $n$ ,*
- (ii) *la distribution  $D = \text{span}\{g \text{ ad}_f g \dots \text{ ad}_f^{n-2}\}$  est involutive dans un voisinage de  $x^o$ .*

Ce théorème se démontre à l'aide du théorème de Frobenius, énoncé plus haut. Les détails de la preuve peuvent être trouvés dans [7, pp. 164-165].

Suite aux développements précédents, nous pouvons désormais résumer les étapes de la résolution du problème de linéarisation exacte par feedback d'état pour le système

$$\dot{x} = f(x) + g(x)u$$

autour de l'état  $x^o$ .

1. À partir de  $f(x)$  et de  $g(x)$ , construire les champs de vecteurs

$$g(x), \text{ ad}_f g(x), \dots, \text{ ad}_f^{n-2} g(x), \text{ ad}_f^{n-1} g(x)$$

et vérifier les conditions

- (i) la matrice  $G(x) = (g(x^o) \operatorname{ad}_f g(x^o) \dots \operatorname{ad}_f^{n-2} g(x^o) \operatorname{ad}_f^{n-1} g(x^o))$  est de rang  $n$ ,
- (ii) la distribution  $\Delta = \operatorname{span}\{g, \operatorname{ad}_f g, \dots, \operatorname{ad}_f^{n-2} g\}$  est involutive dans un voisinage  $U$  de  $x^o$ .

2. Si ces conditions sont satisfaites, résoudre pour  $h(x)$  l'équation aux dérivées partielles

$$L_g h(x) = L_{\operatorname{ad}_f g} h(x) = \dots = L_{\operatorname{ad}_f^{n-2} g} h(x) = 0$$

en vérifiant la condition de non-trivialité

$$L_{\operatorname{ad}_f^{n-1} g} h(x^o) \neq 0.$$

3. Poser

$$\alpha(x) = \frac{-L_f^n h(x)}{L_g L_f^{n-1} h(x)} \quad \text{et} \quad \beta(x) = \frac{1}{L_g L_f^{n-1} h(x)}.$$

4. Poser

$$\Phi(x) = (h(x) \ L_f h(x) \ \dots \ L_f^{n-1} h(x)).$$

On a alors défini un feedback d'état  $u = \alpha(x) + \beta(x)v$  sur  $U$  et une transformation de coordonnées  $z = \Phi(x)$  également sur  $U$  tels que le système en boucle fermée correspondant

$$\dot{x} = f(x) + g(x)\alpha(x) + g(x)\beta(x)v$$

soit linéaire et contrôlable dans les coordonnées  $z = \Phi(x)$ , c'est-à-dire tel que

$$\begin{aligned} \left[ \frac{\partial \Phi}{\partial x} (f(x) + g(x)\alpha(x)) \right]_{x=\Phi^{-1}(z)} &= Az \\ \left[ \frac{\partial \Phi}{\partial x} (g(x)\beta(x)) \right]_{x=\Phi^{-1}(z)} &= B \end{aligned}$$

où la matrice  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$  et le vecteur  $B \in \mathbb{R}^n$  sont tels que

$$\operatorname{rg}(C) = \operatorname{rg}(B \ AB \ \dots \ A^{n-1}B) = n.$$

## 2.6 Linéarisation partielle

Il est sensé de se demander ce qu'il se passerait dans le cas où on ne peut pas trouver de fonction de sortie telle que le degré relatif soit égal à  $n$ . Pour un système de degré  $r < n$ , la forme normale développée dans la section 2.3 nous donne la description suivante

$$\begin{aligned} \dot{z}_1 &= z_2 \\ &\vdots \\ \dot{z}_{r-1} &= z_r \\ \dot{z}_r &= b(z) + a(z)u \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\dot{z}_{r+1} &= q_{r+1}(z) \\ &\vdots \\ \dot{z}_n &= q_n(z).\end{aligned}$$

En appliquant le feedback trouvé dans la section 2.4, on voit que le système peut être transformé en un système partiellement linéaire. En effet, si on considère

$$u = \frac{1}{a(z)}(-b(z) + v),$$

on obtient le système

$$\begin{aligned}\dot{z}_1 &= z_2 \\ &\vdots \\ \dot{z}_{r-1} &= z_r \\ \dot{z}_r &= v \\ \dot{z}_{r+1} &= q_{r+1}(z) \\ &\vdots \\ \dot{z}_n &= q_n(z) \\ y &= z_1,\end{aligned}$$

linéaire dans les  $r$  premières équations, et sans dépendance explicite au signal de contrôle dans les  $n - r$  dernières. Remarquons que le sous-système linéaire de dimension  $r$  est seul responsable du comportement entrée-sortie du système et que le sous-système non-linéaire de dimension  $n - r$  n'affecte pas la sortie.

Si on pose  $\xi = (z_1 \dots z_r)^T$  et  $\eta = (z_{r+1} \dots z_n)^T$ , le système devient

$$\begin{aligned}\dot{\xi} &= A\xi + bv \\ \dot{\eta} &= q(\xi, \eta) \\ y &= C\xi\end{aligned}\tag{2.7}$$

$$\text{où } A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \\ \vdots & & \ddots & 1 \\ 0 & \dots & \dots & 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{r \times r}, \quad b = (0 \dots 0 \ 1)^T \in \mathbb{R}^{r \times 1},$$

$$q(\xi, \eta) = (q_r(\xi, \eta) \dots q_n(\xi, \eta))^T \quad \text{et} \quad C = (0 \dots 0 \ 1) \in \mathbb{R}^{1 \times r}.$$

Le sous-système linéaire de dimension  $r$

$$\begin{aligned}\dot{\xi} &= A\xi + bv \\ y &= C\xi\end{aligned}$$

est complètement contrôlable et donc stabilisable. On se demande alors si le système complet, exprimé dans les nouvelles coordonnées, peut être stabilisé. Le résultat suivant propose une réponse à cette question.

**Proposition 2.3.** *Soit le feedback  $v = K\xi$  où  $K = (-k_0 \dots -k_{r-1})$ . Si la dynamique des zéros du système (2.7) est asymptotiquement stable en  $\eta = 0$  et si les racines du polynôme  $p(s) = \lambda^r + k_{r-1}\lambda^{r-1} + \dots + k_1\lambda + k_0$  ont des parties réelles strictement négatives, alors le feedback  $v = K\xi$  stabilise le système en  $(\xi, \eta) = (0, 0)$ .*

On peut trouver la preuve, qui est relativement aisée, de cette proposition dans [7, 185-186].

Précisons à présent ce qui est entendu par dynamique des zéros et rappelons le concept de stabilité asymptotique.

La dynamique des zéros du système (2.7) est obtenue à partir du problème qui consiste à trouver une entrée et une condition initiale qui maintiennent la sortie nulle. À partir de la forme normale, imposer  $y(t) = 0$  revient à imposer  $z_1(t) = 0$ , ce qui implique

$$\dot{z}_1(t) = \dot{z}_2(t) = \dots = \dot{z}_r(t) = 0.$$

On obtient donc  $\xi(t) = 0$  pour tout  $t > 0$ .

L'entrée qui permet de maintenir la sortie nulle est alors trouvée par l'équation

$$0 = b(0, \eta(t)) + a(0, \eta(t))u(t),$$

c'est-à-dire

$$u(t) = -\frac{b(0, \eta(t))}{a(0, \eta(t))}$$

où  $\eta(t)$  est gouvernée par l'équation différentielle

$$\dot{\eta} = q(0, \eta(t)) \text{ avec la condition initiale } \eta(0) = \eta^o. \quad (2.8)$$

Cette dernière équation est appelée **dynamique des zéros** du système (2.7).

Parlons à présent de la stabilité asymptotique.

On dit de  $x_e$  qu'il est un équilibre stable du système  $\dot{x} = f(x)$  au sens de Lyapunov si

$$\forall \epsilon > 0 \exists \delta > 0 : \|x^o - x_e\| < \delta \Rightarrow \|x(t) - x_e\| < \epsilon$$

où  $x(t)$  est solution de  $\dot{x} = f(x)$  avec  $x(0) = x^o$ .

Il est asymptotiquement stable s'il est (Lyapunov) stable et que

$$\exists \delta > 0 : \|x^o - x_e\| < \delta \Rightarrow x(t) \rightarrow x_e, t \rightarrow \infty.$$

## 2.7 Généralisation de la théorie de linéarisation exacte au cas à deux entrées

Le développement précédemment explicité peut être généralisé aux cas où on considère plusieurs entrées et plusieurs sorties. Dans l'analyse que nous allons effectuer, nous appliquerons cette théorie au cas avec deux entrées et deux sorties. Nous

allons donc présenter ce cas en considérant le système suivant

$$\begin{aligned} \dot{x} &= f(x) + g_1(x)u_1 + g_2(x)u_2 \\ y_1 &= h_1(x) \\ y_2 &= h_2(x). \end{aligned} \tag{2.9}$$

### 2.7.1 Degré relatif et mise sous forme normale

Généralisons la notion de degré relatif et analysons à nouveau son impact sur les dérivées de fonctions de sortie pour obtenir un changement de coordonnées similaire à celui construit pour le cas à une entrée - une sortie.

**Définition 2.6** ((vecteur de) degré relatif). Le système non-linéaire multi-varié de la forme (2.9) a un **(vecteur de) degré relatif**  $\{r_1, r_2\}$  à un point  $x^o$  si

- (i)  $L_{g_j}L_f^k h_i(x) = 0$  pour  $j = 1, 2$ , pour  $i = 1, 2$ , pour tout  $k < r_i - 1$  et pour tout  $x$  dans un voisinage de  $x^o$  ;
- (ii) la matrice

$$A(x) = \begin{pmatrix} L_{g_1}L_f^{r_1-1}h_1(x) & L_{g_2}L_f^{r_1-1}h_1(x) \\ L_{g_1}L_f^{r_2-1}h_2(x) & L_{g_2}L_f^{r_2-1}h_2(x) \end{pmatrix}$$

est non-singulière en  $x^o$ .

Après un développement similaire à celui effectué à la section 2.3, nous obtenons une généralisation de la proposition 2.2.

**Proposition 2.4.** *Supposons qu'un système de la forme (2.9) ait un vecteur de degré relatif  $\{r_1, r_2\}$  en  $x^o$ . Alors*

$$r_1 + r_2 \leq n.$$

Posons pour  $i = 1, 2$

$$\begin{aligned} \Phi_1^i(x) &= h_i(x) \\ \Phi_2^i(x) &= L_f h_i(x) \\ &\vdots \\ \Phi_{r_i}^i(x) &= L_f^{r_i-1} h_i(x). \end{aligned}$$

Si  $r = r_1 + r_2$  est strictement inférieur à  $n$ , il est toujours possible de trouver  $n - r$  fonctions  $\Phi_{r+1}(x), \dots, \Phi_n(x)$  telles que l'application

$$\Phi(x) = [\Phi_1^1(x), \dots, \Phi_{r_1}^1(x), \Phi_1^2(x), \dots, \Phi_{r_2}^2(x), \Phi_{r+1}(x), \dots, \Phi_n(x)]$$

ait une matrice jacobienne non-singulière en  $x^o$  et soit par conséquent candidat comme changement de coordonnées local dans un voisinage de  $x^o$ . La valeur en  $x^o$  de ces fonctions additionnelles peut être fixée arbitrairement. De plus, si la distribution

$$G = \text{span}\{g_1, g_2\}$$

est non-singulière, il est toujours possible de les choisir telles que

$$L_{g_j} \Phi_i(x) = 0 \quad (2.10)$$

pour  $r + 1 \leq i \leq n$ , pour  $j = 1, 2$  et  $x$  dans un voisinage de  $x^o$ .

La possibilité de choisir  $n - r$  fonctions telles que (2.10) soit vérifiée est démontrable à l'aide du théorème de Frobenius, voir [7, pp. 237-238] pour les détails.

À partir de la définition des  $\Phi_i^j(x)$ , on peut développer leurs dérivées respectives au temps, de la même façon que dans le cas précédent. Nous obtenons

$$\begin{aligned} \frac{d\Phi_1^1}{dt} &= \Phi_2^1(x(t)) \\ &\vdots \\ \frac{d\Phi_{r_1-1}^1}{dt} &= \Phi_{r_1}^1(x(t)) \\ \frac{d\Phi_{r_1}^1}{dt} &= L_f^{r_1} h_1(x(t)) + \sum_{j=1}^2 L_{g_j} L_f^{r_1-1} h_1(x(t)) u_j(x(t)). \end{aligned}$$

Remarquons que les coefficients des  $u_j(x)$  dans la dernière équation sont les éléments  $A_{1,j}(x)$ .

En appliquant le changement de coordonnées  $z = \Phi(x)$ , avec

$$z = (z_1^1, \dots, z_{r_1}^1, z_1^2, \dots, z_{r_2}^2, z_{r+1}, \dots, z_n),$$

on obtient la description du système suivante, pour  $i = 1, 2$ ,

$$\begin{aligned} \dot{z}_1^i &= z_2^i \\ &\vdots \\ \dot{z}_{r_i-1}^i &= z_{r_i}^i \\ \dot{z}_{r_i}^i &= b_i(z) + \sum_{j=1}^2 a_{i,j}(z) u_j \\ y_i &= z_1^i \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{où } a_{i,j}(z) &= L_{g_j} L_f^{r_i-1} h_i(\Phi^{-1}(z)) \\ b_i(z) &= L_f^{r_i-1} h_i(\Phi^{-1}(z)). \end{aligned}$$

Pour les coordonnées restantes ( $z_{r+1} \dots z_n$ ), il n'y a pas de forme particulière attendue. On les écrit, pour  $k = r + 1, \dots, n$ ,

$$\dot{z}_k = q_k(z) + \sum_{j=1}^2 p_{k,j}(z) u_j$$

si la distribution générée par les vecteurs  $g_1$  et  $g_2$  n'est pas involutive et

$$\dot{z}_k = q_k(z)$$

si elle est involutive et que des fonctions additionnelles telles que

$$L_{g_j} \Phi_i(x) = 0$$

ont été considérées, le système étant alors exprimé sous sa forme normale.

## 2.7.2 Linéarisation exacte par feedback d'état

Si la somme  $r$  des éléments du vecteur de degré relatif est égale à  $n$ , on obtient la description d'état suivante, pour  $i = 1, 2$ ,

$$\begin{aligned} \dot{z}_1^i &= z_2^i \\ &\vdots \\ \dot{z}_{r_i-1}^i &= z_{r_i}^i \\ \dot{z}_{r_i} &= b_i(z) + \sum_{j=1}^2 a_{i,j}(z)u_j \\ y_i &= z_1^i \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{où } a_{i,j}(z) &= L_{g_j} L_f^{r_i-1} h_i(\Phi^{-1}(z)) \\ b_i(z) &= L_f^{r_i-1} h_i(\Phi^{-1}(z)). \end{aligned}$$

On tente comme précédemment à rendre ce système linéaire et contrôlable, au moyen d'un feedback d'état. On cherche donc à trouver les  $u_i(z)$ ,  $i = 1, 2$ , tels que

$$v_i = b_i(z) + \sum_{j=1}^2 a_{i,j}(z)u_j.$$

En posant

$$v = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix}, \quad u = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad A = \begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} \\ a_{2,1} & a_{2,2} \end{pmatrix},$$

on obtient le système à résoudre suivant

$$v = b(z) + A(z)u.$$

Comme, dans un voisinage de  $z^o = \Phi(x^o)$ ,  $A(\Phi^{-1}(x))$  est non-singulière (par la définition de degré relatif), ce système est résoluble dans ce voisinage. Le feedback aura donc comme forme

$$u = A^{-1}(z)[-b(z) + v].$$



Le système en boucle fermée exprimé dans les nouvelles coordonnées aura donc la description suivante, pour  $i = 1, 2$ ,

$$\begin{aligned} \dot{z}_1^i &= z_2^i \\ &\vdots \\ \dot{z}_{r_i-1}^i &= z_{r_i}^i \\ \dot{z}_{r_i} &= v_i \\ y_i &= z_1^i, \end{aligned}$$

qui est linéaire et contrôlable.

Cette discussion est résumée dans le théorème suivant, qui généralise le théorème 2.2.

**Théorème 2.4.** *Tout système non-linéaire multi-varié ayant un vecteur de degré relatif à un point  $x^o$ , dont la somme des éléments vaut exactement  $n$ , peut être transformé, à l'aide d'un changement de coordonnées  $z = \Phi(x)$  et d'un feedback d'état, en un système qui, dans un voisinage du point  $z^o = \Phi(x^o)$ , est linéaire et contrôlable.*

### 2.7.3 Question de la fonction de sortie

Nous nous posons à nouveau la question de la possibilité de linéariser un système qui n'a pas de fonction de sortie, dans le cas à deux entrées, c'est-à-dire en considérant le système suivant

$$\dot{x} = f(x) + g_1(x)u_1 + g_2(x)u_2. \quad (2.11)$$

Nous allons voir qu'encore une fois la théorie développée pour le cas à une entrée s'étend au cas à deux entrées, avec des hypothèses généralisées. Premièrement la condition suffisante de l'existence de fonctions de sortie telles que la somme des éléments du vecteur de degré relatif du système soit  $n$  est ici encore également nécessaire. Les conditions d'existence de ces fonctions sont résumées dans le théorème suivant.

**Théorème 2.5.** *Supposons que la matrice  $g(x^o) = [g_1(x^o), g_2(x^o)]$  soit de rang 2. Alors, il existe deux fonctions de sortie  $\lambda_1(x)$  et  $\lambda_2(x)$  telles que le vecteur de degré relatif du système (2.11) associé à ces deux fonctions soit égal à  $\{r_1, r_2\}$  avec  $r_1 + r_2 = n$  en  $x^o$  si et seulement si les conditions suivantes sont vérifiées*

- (i) pour  $0 \leq i \leq 2$ , la distribution  $G_i$  est de dimension constante dans un voisinage de  $x^o$ ,
  - (ii) la distribution  $G_2$  est de dimension 3,
  - (iii) pour  $i = 0, 1$ , la distribution  $G_i$  est involutive
- où  $G_i = \text{span}\{ad_f^k g_j : 0 \leq k \leq i, 1 \leq j \leq 2\}$ .

La preuve de ce résultat est similaire à celle du théorème 2.3 au niveau conceptuel, mais est plus compliquée. Pour plus de détails, voir [7, pp. 249-256].

# Chapitre 3

## Cas à une entrée - taux de dilution

Passons à présent à la partie applicative de notre travail. Ce chapitre a pour but l'application de la théorie vue précédemment au modèle de chemostat (1.1) lorsqu'on considère une entrée, le taux de dilution  $D$ , et que l'on fixe la seconde  $S_{en}$ . Ce choix est celui fréquemment fait dans la littérature, voir notamment [5], pour construire des actions sous forme de feedback, comme c'est le cas dans notre propos.

### 3.1 Adaptation du modèle

Considérons le cas à une seule entrée, le taux de dilution  $D$ . On peut alors considérer le modèle simplifié

$$\begin{aligned}\dot{s} &= D(1-s) - x_1 f_1(s) - x_2 f_2(s) \\ \dot{x}_1 &= x_1(f_1(s) - D) \\ \dot{x}_2 &= x_2(f_2(s) - D),\end{aligned}$$

développé au chapitre 1, avec lequel nous allons travailler dans ce chapitre. Ce modèle peut être réécrit sous forme

$$\begin{aligned}\dot{s} &= -x_1 f_1(s) - x_2 f_2(s) + D(1-s) \\ \dot{x}_1 &= x_1 f_1(s) - D x_1 \\ \dot{x}_2 &= x_2 f_2(s) - D x_2\end{aligned},$$

c'est-à-dire

$$\dot{x} = F(x) + g(x)u$$

où

$$x = \begin{pmatrix} s \\ x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}, \quad F(x) = \begin{pmatrix} -x_1 f_1(s) - x_2 f_2(s) \\ x_1 f_1(s) \\ x_2 f_2(s) \end{pmatrix}, \quad g(x) = \begin{pmatrix} 1-s \\ -x_1 \\ -x_2 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad u = D,$$

pour être exprimé comme dans le chapitre 2.

## 3.2 Application de la théorie de linéarisation par feedback d'état

### 3.2.1 Linéarisation exacte

Nous allons à présent tenter d'appliquer la théorie de linéarisation exacte explicitée au chapitre 2. Cherchons par conséquent d'appliquer le théorème 2.3. Vérifions-en préalablement les hypothèses. Développons pour ce faire la matrice

$$G(x) = \begin{pmatrix} g(x) & \text{ad}_F g(x) & \text{ad}_F^2 g(x) \end{pmatrix}.$$

Dans un souci de clarté et de concision, nous n'allons plus spécifier les dépendances en  $s$  des fonctions  $f_i$  et de leurs dérivées. Nous écrirons par exemple  $f_1'(s) \stackrel{\text{not}}{=} f_1'$ . Après quelques calculs se trouvant à la page 69 des annexes, on obtient

$$G(x) = \begin{pmatrix} 1-s & (1-s)(x_1 f_1' + x_2 f_2') \\ -x_1 & (s-1)x_1 f_1' \\ -x_2 & (s-1)x_2 f_2' \\ (x_1 f_1 + x_2 f_2) [x_1 (f_1' + (s-1)f_1'') + x_2 (f_2' + (s-1)f_2'')] + (1-s)(x_1 f_1' + x_2 f_2')^2 \\ x_1 [-(x_1 f_1 + x_2 f_2) (f_1' + (s-1)f_1'') + (s-1)f_1' (x_1 f_1' + x_2 f_2')] \\ x_2 [-(x_1 f_1 + x_2 f_2) (f_2' + (s-1)f_2'') + (s-1)f_2' (x_1 f_1' + x_2 f_2')] \end{pmatrix}.$$

L'hypothèse (i) du théorème 2.3 est résumée par le lemme suivant, dont le développement fort calculatoire se trouve à la page 71 des annexes.

**Lemme 3.1.** *La matrice  $G(x)$  est de rang plein si le point initial  $x^o$  vérifie les conditions suivantes*

- (i)  $x_1, x_2 \neq 0$ ,  $s \neq 1$  et  $s + x_1 + x_2 \neq 1$ ;
- (ii)  $x_1 f_1(s) + x_2 f_2(s) \neq 0$ ;
- (iii)  $f_1'(s)f_2''(s) - f_2'(s)f_1''(s) \neq 0$ .

La seconde hypothèse du théorème 2.3 demande que la distribution

$$\Delta = \text{span}\{g, \text{ad}_F g\}$$

soit involutive dans un voisinage du point initial  $\Omega \ni x^o$ . Par la remarque 2.1, si cette distribution est non-singulière,  $\Delta$  est involutive si et seulement si  $[g, \text{ad}_F g] \in \Delta$ .

Les conditions de la non-singularité de  $\Delta$  se trouvent reprises dans le lemme suivant, également développé en annexe, à la page 72.

**Lemme 3.2.** *La distribution  $\Delta$  est non-singulière sur  $\Omega$  si les points de  $\Omega$  vérifient les conditions suivantes*

- (i)  $s \neq 1$ ;
- (ii)  $x_1 + x_2 \neq 0$ ;
- (iii) si  $x_1 = 0$ ,  $s + x_2 \neq 1$ ;

- (iv) si  $x_2 = 0$ ,  $s + x_1 \neq 1$  ;
- (v)  $f'_1(s) \neq f'_2(s)$  ou  $s + x_1 + x_2 \neq 1$ .

La distribution  $\Delta$  est donc non-singulière sur cet ensemble réduit. Vérifions à présent son caractère involutif. Par la remarque 2.1, et comme la distribution est non-singulière,  $\Delta$  est involutive si et seulement si  $[g, \text{ad}_F g] \in \Delta$ . Les conditions du caractère involutif de  $\Delta$  se trouvent dans le lemme suivant, dont le développement se trouve à la page 73 des annexes.

**Lemme 3.3.** *La distribution  $\Delta$  est involutive sur  $\Omega$  si tous les points de  $\Omega$  vérifient une des conditions suivantes :*

- soit  $s = 1$  ;
- soit  $x_1 = 0$  ; soit  $x_2 = 0$  ;
- soit  $f'_1(s)f''_2(s) - f'_2(s)f''_1(s) = 0$  ;
- soit  $s + x_1 + x_2 = 1$ .

Comme cette distribution doit être involutive sur tout l'ensemble  $\Omega$ , il faut définir cet ensemble pour qu'il prenne en compte une de ces dernières conditions.

On voit bien que le point initial, avec les conditions requises dans le lemme 3.1, ne peut pas appartenir à l'ensemble  $\Omega$  dont les restrictions sont décrites au lemme 3.3. Or cet ensemble est censé être un voisinage de ce point initial. Résumons ce résultat dans le théorème suivant.

**Théorème 3.1.** *Il n'existe pas de point initial  $x^o$  ni de voisinage  $\Omega$  de ce point qui vérifie les hypothèses du théorème 2.3 pour ce modèle. Il n'est donc pas possible de trouver une fonction de sortie qui confère au système un degré relatif  $n$  et le problème de linéarisation exacte par feedback d'état n'est donc pas possible dans le cas à une entrée.*

Au vu de cette conclusion, deux options s'offrent à nous. La première consiste à construire un système partiellement linéarisé ; la seconde consiste à considérer un autre cas, avec deux entrées. Nous allons maintenant examiner ces deux options, la première dans le prochain point et la seconde au chapitre suivant.

Remarquons qu'il est malgré tout possible d'obtenir un contrôle au moyen du seul taux de dilution, et ce par d'autres méthodes. Voir par exemple [5].

### 3.2.2 Linéarisation partielle

Comme on ne peut trouver de fonction de sortie qui confère au système (2.4) un degré relatif plein, nous allons essayer de construire une fonction de sortie telle que le degré relatif soit égal à deux, c'est-à-dire une fonction  $h : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  telle que

$$\begin{aligned} L_g L_F^0 h(x) &= 0 \quad \forall x \in \Sigma \text{ (voisinage de } x^o) \\ L_g L_F^1 h(x) &\neq 0 \quad \forall x \in \Sigma. \end{aligned}$$

Nous avons déterminé une fonction qui convient par essai - erreur au vu de la structure du système. La fonction choisie est

$$h(s, x_1, x_2) = \ln \left( \frac{x_1}{x_2} \right).$$

Cela implique que nous travaillions uniquement avec des valeurs strictement positives pour  $x_1$  et  $x_2$ .

Vérifions que cette fonction de sortie confère bien un degré relatif deux au système.

$$\begin{aligned} L_g h(x) &= \frac{\partial h}{\partial s} g_1(x) + \frac{\partial h}{\partial x_1} g_2(x) + \frac{\partial h}{\partial x_2} g_3(x) \\ &= 0 + \frac{1}{x_1}(-x_1) + \frac{-1}{x_2}(-x_2) = 0. \\ L_g L_F h(x) &= L_g \left( \frac{\partial h}{\partial s} F_1(x) + \frac{\partial h}{\partial x_1} F_2(x) + \frac{\partial h}{\partial x_2} F_3(x) \right) \\ &= L_g \left( 0 + \frac{1}{x_1}(x_1 f_1(s)) + \frac{-1}{x_2}(x_2 f_2(s)) \right) \\ &= \frac{\partial f_1(s) - f_2(s)}{\partial x} g(x) = (f_1'(s) - f_2'(s))(1 - s) + 0 + 0. \end{aligned}$$

On ajoute ici deux conditions qui restreignent le voisinage du point, encore indéterminé,  $x^o$ .

1.  $f_1'(s) \neq f_2'(s)$ ;
2.  $1 \neq s$ .

Avec cette fonction de sortie, le système est de degré relatif deux et nous pouvons poursuivre notre développement. Définissons les fonctions de coordonnées

$$\begin{aligned} \Phi_1(x) &= h(x) \\ \Phi_2(x) &= L_F h(x). \end{aligned}$$

Par la proposition 2.2, on peut ajouter une fonction  $\Phi_3(x)$  telle que

$$\Phi(x) = \begin{pmatrix} \Phi_1(x) \\ \Phi_2(x) \\ \Phi_3(x) \end{pmatrix}$$

ait une jacobienne non-singulière en  $x^o$  et telle que  $L_g \Phi_3(x) = 0$ , et ce dans un voisinage de  $x^o$ .

Après une recherche à l'aide de la démonstration constructive de la partie suffisante du théorème de Frobenius, la fonction  $\Phi_3(x) = \frac{s-1}{x_1}$  semble convenir. En effet, d'une part, la jacobienne

$$J = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{x_1} & -\frac{1}{x_2} \\ f_1' - f_2' & 0 & 0 \\ \frac{1}{x_1} & -\frac{(s-1)}{x_1^2} & 0 \end{pmatrix}$$

a comme déterminant

$$|J| = -(f'_1 - f'_2) \left( 0 - \frac{1}{x_2} \frac{(s-1)}{x_1^2} \right).$$

Or les conditions imposées pour le degré relatif et pour la coexistence impliquent que ce déterminant est non-nul. D'autre part,

$$L_g \Phi_3(x) = \frac{\partial \Phi_3}{\partial x} g(x) = \frac{1}{x_1} (1-s) - \frac{(s-1)}{x_1^2} (-x_1) = 0.$$

Ces trois fonctions  $\Phi_i$  constituent un changement de coordonnées. On exprime les nouvelles coordonnées comme

$$\begin{aligned} z_1 &= \Phi_1(x) = \ln \left( \frac{x_1}{x_2} \right) \\ z_2 &= \Phi_2(x) = f_1(s) - f_2(s) \\ z_3 &= \Phi_3(x) = \frac{s-1}{x_1} \end{aligned}$$

Dans ces nouvelles coordonnées, la description de l'état devient

$$\begin{aligned} \dot{z}_1 &= z_2 \\ \dot{z}_2 &= b(z) + a(z)u(t) \\ \dot{z}_3 &= q_3(z). \end{aligned}$$

où

$$\begin{aligned} a(z) &= L_g L_f^{r-1} h(\Phi^{-1}(z)) \\ &= [(f'_1(s) - f'_2(s))(1-s)]_{x=\Phi^{-1}(z)} \\ b(z) &= L_f h(\Phi^{-1}(z)) \\ &= [(f'_1(s) - f'_2(s))(-x_1 f_1(s) - x_2 f_2(s))]_{x=\Phi^{-1}(z)} \\ q_3(z) &= L_f \Phi_3(\Phi^{-1}(z)) \\ &= \left[ \left( \frac{1-s}{x_1} - 1 \right) f_1(s) - f_2(s) \frac{x_2}{x_1} \right]_{x=\Phi^{-1}(z)}. \end{aligned}$$

Il s'agit donc à présent d'inverser le changement de coordonnées pour exprimer  $x$  en fonction de  $z$ . Pour cela, nous allons tenter d'exprimer  $s$  en fonction de  $z_2$  à l'aide du théorème des fonctions implicites.

**Théorème 3.2** (Fonctions implicites). *Soit  $G$  fonction de classe  $\mathcal{C}^p$ ,  $p \geq 1$  une fonction définie sur un ouvert  $U \subset \mathbb{R}^2$  à valeurs dans  $\mathbb{R}$ . S'il existe un point  $(\tilde{x}, \tilde{y}) \in U$  tel que  $G(\tilde{x}, \tilde{y}) = 0$  et  $\frac{\partial G}{\partial y}(\tilde{x}, \tilde{y}) \neq 0$ , alors il existe un ouvert  $V \subset U$  contenant  $(\tilde{x}, \tilde{y})$  et une fonction  $\varphi$  de classe  $\mathcal{C}^p$ , de  $\mathbb{R}$  dans  $\mathbb{R}$  telle que*

$$\forall (x, y) \in V \quad G(x, y) = 0 \Leftrightarrow \varphi(x) = y$$

et la dérivée de cette fonction vérifie

$$\frac{d\varphi}{dx}(\tilde{x}) = -\frac{\frac{\partial G}{\partial x}(\tilde{x}, \tilde{y})}{\frac{\partial G}{\partial y}(\tilde{x}, \tilde{y})}.$$

On peut trouver la preuve de ce théorème notamment dans [8].

Si on applique ce théorème à la fonction  $G(z_2, s) = z_2 - f_1(s) + f_2(s)$ , qui est  $\mathcal{C}^\infty$  par les hypothèses sur  $f_i$ , on a que, pour n'importe quel point  $(\tilde{z}_2, \tilde{s})$  dans le voisinage de  $(\Phi_2(x^o), s^o)$ ,  $G(\tilde{z}_2, \tilde{s}) = 0$  et  $\frac{\partial G}{\partial s}(\tilde{z}_2, \tilde{s}) \neq 0$ . Il existe donc un voisinage  $V$  autour de ce point et une fonction  $\varphi$  de classe  $\mathcal{C}^\infty$  telle que  $\varphi : V \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  et  $G(z_2, s) = 0 \Leftrightarrow \varphi(z_2) = s$ . Comme  $G(z_2, s) = 0$  sur tout le voisinage de  $x^o$ , on peut donc bien exprimer  $s$  en fonction de  $z_2$ .

Nous obtenons donc

$$\begin{aligned} s &= x_1 z_3 + 1 = \varphi(z_2) \\ x_1 &= e^{z_1} x_2 \\ x_2 &= e^{-z_1} x_1, \end{aligned}$$

c'est-à-dire

$$\begin{aligned} s &= \varphi(z_2) \\ x_1 &= \frac{\varphi(z_2) - 1}{z_3} \\ x_2 &= e^{-z_1} \frac{\varphi(z_2) - 1}{z_3}. \end{aligned}$$

Ce qui nous donne la description d'état suivante

$$\begin{aligned} \dot{z}_1 &= z_2 \\ \dot{z}_2 &= [f'_1(\varphi(z_2)) - f'_2(\varphi(z_2))] \left( -\frac{\varphi(z_2) - 1}{z_3} f_1(\varphi(z_2)) - e^{-z_1} \frac{\varphi(z_2) - 1}{z_3} f_2(\varphi(z_2)) \right) \\ &\quad + [f'_1(\varphi(z_2)) - f'_2(\varphi(z_2))] (1 - \varphi(z_2)) u(t) \\ \dot{z}_3 &= \left( \frac{1 - \varphi(z_2)}{\frac{\varphi(z_2) - 1}{z_3}} - 1 \right) f_1(\varphi(z_2)) - f_2(\varphi(z_2)) \frac{e^{-z_1} \frac{\varphi(z_2) - 1}{z_3}}{\frac{\varphi(z_2) - 1}{z_3}} \\ &= -(z_3 + 1) f_1(\varphi(z_2)) - f_2(\varphi(z_2)) e^{-z_1}. \end{aligned}$$

Définissons à présent le feedback

$$\begin{aligned}
u(t) &= \frac{1}{a(z)}(-b(z) + v) \\
&= \frac{-[f'_1(\varphi(z_2)) - f'_2(\varphi(z_2))] \left[ -\frac{\varphi(z_2)-1}{z_3} f_1(\varphi(z_2)) - e^{-z_1} \frac{\varphi(z_2)-1}{z_3} f_2(\varphi(z_2)) \right] + v}{[f'_1(\varphi(z_2)) - f'_2(\varphi(z_2))] (1 - \varphi(z_2))} \\
&= \frac{\frac{\varphi(z_2)-1}{z_3} f_1(\varphi(z_2)) + e^{-z_1} \frac{\varphi(z_2)-1}{z_3} f_2(\varphi(z_2))}{1 - \varphi(z_2)} + \frac{v}{[f'_1(\varphi(z_2)) - f'_2(\varphi(z_2))] (1 - \varphi(z_2))},
\end{aligned}$$

où  $v$  représente un signal de contrôle externe.

Ce feedback nous donne le système suivant

$$\begin{aligned}
\dot{z}_1 &= z_2 \\
\dot{z}_2 &= v \\
\dot{z}_3 &= -(z_3 + 1) f_1(\varphi(z_2)) - f_2(\varphi(z_2)) e^{-z_1} \\
y &= z_1,
\end{aligned}$$

linéaire dans les deux premières équations, et sans dépendance explicite au signal de contrôle dans la troisième. Remarquons que le sous-système linéaire de dimension 2 est seul responsable du comportement entrée-sortie du système et que le sous-système non-linéaire n'affecte pas la sortie.

### 3.2.3 Dynamique des zéros

Étudions à présent la dynamique des zéros de cette dernière équation non-linéaire, pour voir si la proposition 2.3 est applicable.

On cherche tout d'abord un équilibre  $x^o$  tel que  $x^o$  est tel que  $F(x^o) = 0$  et  $h(x^o) = 0$ . On choisit pour cela  $s^o = 0$  et  $x_1^o = x_2^o \neq 0$ , ce qui implique bien que  $F(x^o) = 0$  et  $h(x^o) = 0$ . Alors  $z_1^o = z_2^o = 0$ . On en conclut que si  $x^o$  est un équilibre pour le système de base, alors  $(0, 0, z_3^o)$  est un équilibre pour le système exprimé dans les nouvelles coordonnées. Cela implique que

$$\begin{aligned}
b(0, 0, z_3^o) &= 0 \\
q(0, 0, z_3^o) &= 0,
\end{aligned}$$

c'est-à-dire

$$\begin{aligned}
b(0, 0, z_3^o) &= (f'_1(\varphi(0)) - f'_2(\varphi(0))) \left( -\frac{\varphi(0)-1}{z_3^o} f_1(\varphi(0)) - e^0 \frac{\varphi(0)-1}{z_3^o} f_2(\varphi(0)) \right) \\
q(0, 0, z_3^o) &= -(z_3^o + 1) f_1(\varphi(0)) - f_2(\varphi(0)).
\end{aligned}$$

Comme  $f'_1(s) \neq f'_2(s)$  et  $s \neq 1 \Leftrightarrow \varphi(z_2) \neq 1$  sur tout le voisinage considéré, la première équation implique que

$$f_1(\varphi(0)) + f_2(\varphi(0)) = 0 \Leftrightarrow \varphi(0) = 0.$$



La seconde équation est alors également vérifiée.

La dynamique des zéros donne alors

$$\begin{aligned}\dot{z}_3 &= q(0, 0, z_3(t)) \\ &= -(z_3(t) + 1) f_1(\varphi(0)) - f_2(\varphi(0)) \\ &= 0\end{aligned}$$

avec  $z_3(0) = z_3^o$ . Cela nous donne la dynamique  $z_3(t) = z_3^o$ . N'importe quelle condition initiale ne donnera par conséquent pas un équilibre asymptotiquement stable, la proposition 2.3 n'est donc pas applicable.

Si on interprète cette dynamique des zéros, on a que, lorsqu'on force la nullité de la sortie, les variables  $s$  et  $x_1$  sont corrélées de façon linéaire. En effet,

$$\frac{s - 1}{x_1} = z_3^o \Leftrightarrow s = z_3^o x_1 + 1.$$

Comme, lorsque  $0 < s < 1$ ,  $z_3^o < 0$ , les deux variables auront un comportement opposé.

Remarquons que le point initial  $x^o$  ne doit pas forcément vérifier que  $x_1^o = x_2^o$ . Si l'on procède à un décalage de la fonction  $h(x)$  pour qu'elle devienne  $h(x) = \ln\left(\frac{x_1 x_2^o}{x_2 x_1^o}\right)$ , on peut choisir  $s^o = 0$  et  $x_1^o, x_2^o \neq 0$ . Remarquons que ce décalage apporte peu de changements au reste du développement, seulement l'ajout de constantes positives.

Il nous est donc impossible de garantir l'existence d'un feedback d'état qui stabiliserait l'entièreté du système. On peut cependant essayer de stabiliser le sous-système linéaire et voir de façon numérique si le système entier est stabilisé.

### 3.2.4 Stabilisation du sous-système linéaire

Analysons le système linéaire obtenu. Écrivons-le d'abord sous forme

$$\begin{aligned}\dot{z} &= Az + Bv \\ y &= Cz\end{aligned}$$

$$\text{où } A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \text{ et } C = (1 \ 0).$$

Ce système est, comme cité précédemment, complètement contrôlable. En effet, la matrice de contrôlabilité

$$\mathcal{C} = (B \ AB) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

est de rang 2.

Nous aimerions que ce sous-système se stabilise aux valeurs désirées. Étudions préalablement sa stabilité exponentielle sans contrôle.

Pour étudier la stabilité (exponentielle) interne, utilisons la caractérisation et calculons par conséquent les valeurs propres de la matrice  $A$ . Trivialement, on voit que  $\lambda_{1,2} = 0$ . Nous en concluons que le système n'est pas (exponentiellement) internement stable.

Pour étudier la stabilité (exponentielle) externe, nous allons développer la fonction de transfert du système

$$\hat{G}(s) = C(sI - A)^{-1}B.$$

On obtient

$$\hat{G}(s) = \frac{1}{s^2}.$$

L'unique pôle de cette fonction est en  $s = 0$ , dont la partie réelle n'est pas négative. Par conséquent, le système n'est pas non plus (exponentiellement) externement stable.

Comme le système est contrôlable, il est également stabilisable. On cherche donc un feedback statique d'état qui permette de stabiliser ce système. Il nous faut donc construire une matrice de gain  $K$  telle que le contrôle prenne la forme  $v = Kz + w$  où  $K \in \mathbb{R}^{1 \times 2}$  et  $w \in \mathbb{R}$ . Le système en boucle fermée donne alors

$$\begin{aligned} \dot{z} &= (A + BK)z + Bw \\ y &= Cz. \end{aligned}$$

Attardons-nous sur la détermination de la matrice  $K$ . Il s'agit de déterminer ses coefficients pour rendre le système (exponentiellement) internement stable, c'est-à-dire que les valeurs propres de la matrice  $A + BK$  aient une partie réelle strictement négative. Il existe plusieurs façons de choisir cette matrice de gain  $K$ .

On peut choisir des valeurs pour cette matrice et voir si les valeurs propres de  $A + BK$  sont de partie réelle strictement négative. Par exemple, la matrice  $K$  suivante convient.

$$K = \begin{pmatrix} -1 & -1 \end{pmatrix}$$

En effet, elle confère à la matrice  $A + BK$  les valeurs propres suivantes

$$\lambda_1 = \frac{-1 + \sqrt{3}i}{2} \quad \lambda_2 = \frac{-1 - \sqrt{3}i}{2}$$

qui ont toutes deux une partie réelle strictement négative. Précisons que toute matrice de la forme

$$K = \begin{pmatrix} k_1 & k_2 \end{pmatrix},$$

où  $k_1$  et  $k_2$  sont négatifs, convient. En effet,

$$A + BK = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ k_1 & k_2 \end{pmatrix},$$

donc

$$\det(A + BK - \lambda I) = \lambda^2 - k_2\lambda - k_1$$

et  $k_1, k_2 < 0$  nous assure dans tous les cas possibles des valeurs propres dont la partie réelle est négative.

Une autre façon de trouver cette matrice est d'utiliser le théorème d'assignabilité spectrale (appelé également placement des pôles).

**Théorème 3.3** (Assignabilité spectrale). *Pour tout polynôme monique  $\Pi \in \mathbb{R}[\lambda]$  de degré  $n$ , il existe une matrice  $K$  d'asservissement telle que  $\chi_{A+BK} = \Pi$  si et seulement si  $(A, B)$  est complètement contrôlable.*

La preuve de ce résultat peut être trouvée dans [10, section 3.1].

On procède alors par identification des coefficients.

On cherche la matrice

$$K = \begin{pmatrix} k_1 & k_2 \end{pmatrix}$$

telle que  $\sigma(A + BK) = \{\lambda_1, \lambda_2\}$  où  $\text{Re}(\lambda_i) < 0$  pour  $i = 1, 2, 3$ . En développant d'une part le polynôme caractéristique de  $A + BK$  et d'autre part l'expression

$$(\lambda - \lambda_1)(\lambda - \lambda_2),$$

on obtient l'identification de coefficients suivante

$$\begin{aligned} \lambda_1 + \lambda_2 &= k_2 \\ \lambda_1\lambda_2 &= -k_1. \end{aligned}$$

Si on veut que les valeurs propres soient égales à  $\lambda_i = -1$  pour  $i = 1, 2$ , les conditions deviennent

$$\begin{aligned} -2 &= k_2 \\ -1 &= k_1. \end{aligned}$$

et la matrice recherchée est

$$K = \begin{pmatrix} -1 & -2 \end{pmatrix}.$$

La dernière façon de construire un feedback que nous allons proposer est celle du feedback LQ (linéaire-quadratique), c'est-à-dire trouver la matrice de gain  $K$  optimale tel que le feedback  $v = Kz$  minimise la fonction de coûts quadratique

$$J(u) = \int_0^\infty (x^T Q x + u^T R u) dt \quad (3.1)$$

où  $R$  est une matrice symétrique définie positive et  $Q$  est une matrice symétrique semi-définie positive. Cette matrice de gain sera, lors des simulations numériques,

déterminée à l'aide de la fonction `lqr` du logiciel `Matlab`. On obtient, si on choisit par exemple  $Q = I_{2 \times 2}$  et  $R = 1$ ,

$$K = \begin{pmatrix} -1 & -1.732 \end{pmatrix}.$$

Les matrices  $Q$  et  $R$  permettent d'accorder plus de poids dans la fonction de coûts respectivement à l'état et au contrôle. On peut donc pondérer ceux-ci selon les besoins ou contraintes physiques.

Réfléchissons à présent à la valeur qu'on pourrait donner au nouveau contrôle externe,  $w$ . Nous avons à présent la description suivante :

$$\dot{z} = (A + BK)z + Bw.$$

A l'équilibre, la première équation donne

$$\dot{z}_1 = z_2 = 0;$$

la seconde donne par conséquent

$$\dot{z}_2 = k_1 z_1 + k_2 z_2 + w = 0.$$

Dans le premier choix fait ci-dessus pour  $K$ ,

$$K = \begin{pmatrix} -1 & -1 \end{pmatrix},$$

nous obtenons, à l'équilibre,

$$z_1 = -w.$$

Nous pouvons donc donner à  $w$  l'opposé de notre valeur objectif  $z_{1g}$ .

Pour les autres choix de feedbacks, on adapte la valeur de  $w$ , comme suit

$$w = -k_{11} z_{1g}$$

Cette analyse montre également qu'il ne est pas possible de fixer un objectif pour  $z_2$ , donc pas d'objectif sur  $s$  dans les coordonnées d'origine. L'équilibre en  $s$  sera déterminé par l'équation

$$z_2 = 0 \Leftrightarrow f_1(s) = f_2(s),$$

qui a comme solution  $s = 0$ , solution triviale -qui ne nous intéresse pas d'un point de vue physique-, et qui peut avoir une autre solution  $s = \tilde{s}$  selon la forme et le paramétrage des fonctions de croissance. L'existence de cette seconde solution conditionne par conséquent la possibilité de coexistence.

Remarquons également qu'on doit avoir  $f_1'(s) \neq f_2'(s)$  et  $s \neq 1$  sur tout le voisinage de  $s^o$  pour assurer le degré relatif. Pour avoir le résultat attendu, il faut donc

également que cet équilibre non-nul  $\tilde{s}$  se trouve dans un voisinage du point initial  $s^o$  qui ne comprenne ni le point  $\hat{s}$  déterminé implicitement par  $f'_1(\hat{s}) = f'_2(\hat{s})$ , si celui-ci existe, ni le point  $s = 1$ . Ces remarques restreignent donc le choix de la condition initiale en  $s$ .

Nous illustrerons l'importance de ce choix de conditions initiales de façon numérique dans le chapitre 5.

### 3.2.5 Retour aux coordonnées d'origine

Ré-exprimons à présent le système en boucle fermée, avec les deux feedbacks, dans les coordonnées d'origine.

Le modèle de base s'écrit

$$\begin{aligned}\dot{s} &= -x_1 f_1(s) - x_2 f_2(s) + (1-s)u \\ \dot{x}_1 &= x_1 f_1(s) - x_1 u \\ \dot{x}_2 &= x_2 f_2(s) - x_2 u.\end{aligned}$$

On y remplace désormais les termes suivants :

$$\begin{aligned}u &= \frac{[f'_1(s) - f'_2(s)](x_1 f_1(s) + x_2 f_2(s)) + v}{[f'_1(s) - f'_2(s)](1-s)} \\ &= \frac{x_1 f_1(s) + x_2 f_2(s)}{1-s} + \frac{v}{[f'_1(s) - f'_2(s)](1-s)} \\ v &= [(k_1 z_1 + k_2 z_2 + w)]_{z=\Phi(x)} \\ &= k_1 \ln\left(\frac{x_1}{x_2}\right) + k_2 (f_1(s) - f_2(s)) + w \\ w &= [(-k_{11} z_{1g})]_{z=\Phi(x)} \\ &= -k_{11} \ln\left(\frac{x_{1g}}{x_{2g}}\right).\end{aligned}$$

Nous obtenons alors le système

$$\begin{aligned}\dot{s} &= -x_1 f_1(s) - x_2 f_2(s) + x_1 f_1(s) + x_2 f_2(s) + \frac{v}{f'_1(s) - f'_2(s)} \\ &= \frac{k_1 \ln\left(\frac{x_1}{x_2}\right) + k_2 (f_1(s) - f_2(s)) + w}{f'_1(s) - f'_2(s)} \\ &= \frac{k_1 \ln\left(\frac{x_1 x_{2g}}{x_2 x_{1g}}\right) + k_2 (f_1(s) - f_2(s))}{f'_1(s) - f'_2(s)} \\ \dot{x}_1 &= x_1 \left[ f_1(s) - \frac{x_1 f_1(s) + x_2 f_2(s)}{1-s} - \frac{v}{[f'_1(s) - f'_2(s)](1-s)} \right] \\ &= x_1 \left[ f_1(s) - \frac{x_1 f_1(s) + x_2 f_2(s)}{1-s} - \frac{k_1 \ln\left(\frac{x_1 x_{2g}}{x_2 x_{1g}}\right) + k_2 (f_1(s) - f_2(s))}{[f'_1(s) - f'_2(s)](1-s)} \right]\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\dot{x}_2 &= x_2 \left[ f_2(s) - \frac{x_1 f_1(s) + x_2 f_2(s)}{1-s} - \frac{v}{[f'_1(s) - f'_2(s)](1-s)} \right] \\
&= x_2 \left[ f_2(s) - \frac{x_1 f_1(s) + x_2 f_2(s)}{1-s} - \frac{k_1 \ln \left( \frac{x_1 x_{2g}}{x_2 x_{1g}} \right) + k_2 (f_1(s) - f_2(s))}{[f'_1(s) - f'_2(s)](1-s)} \right].
\end{aligned}$$

Comme la proposition 2.3 n'est pas applicable, on ne sait pas prédire si les contrôles appliqués stabilisent ou non le système. Nous verrons dans le chapitre 5 quelques simulations illustrant le comportement de ce système en boucle fermée.

# Chapitre 4

## Cas à deux entrées - taux de dilution et concentration d'entrée de substrat

### 4.1 Adaptation du modèle

Considérons à présent le cas à deux entrées, le taux de dilution  $D$  et la concentration d'entrée de substrat  $S_{en}$ . Il est toujours possible en effectuant une mise à l'échelle de simplifier le modèle (1.1). On pose par conséquent

$$s = S, \quad x_i = \frac{X_i}{\gamma_i} \quad \text{et} \quad f_i(s) = F_i(S),$$

et on obtient le système simplifié suivant

$$\begin{aligned} \dot{s} &= D(S_{en} - s) - x_1 f_1(s) - x_2 f_2(s) \\ \dot{x}_1 &= x_1(f_1(s) - D) \\ \dot{x}_2 &= x_2(f_2(s) - D). \end{aligned}$$

Ce modèle peut être réécrit, en considérant  $u_1 = D$  et  $u_2 = S_{en}D$  (choix qui offre une analyse plus simple),

$$\begin{aligned} \dot{s} &= -x_1 f_1(s) - x_2 f_2(s) - u_1 s + u_2 \\ \dot{x}_1 &= x_1 f_1(s) - x_1 u_1 \\ \dot{x}_2 &= x_2 f_2(s) - x_2 u_1 \end{aligned}$$

c'est-à-dire

$$\dot{x} = F(x) + g_1(x)u_1 + g_2(x)u_2$$

$$\text{avec} \quad F(x) = \begin{pmatrix} -x_1 f_1(s) - x_2 f_2(s) \\ x_1 f_1(s) \\ x_2 f_2(s) \end{pmatrix}, \quad g_1(x) = \begin{pmatrix} -s \\ -x_1 \\ -x_2 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad g_2(x) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

## 4.2 Application de la théorie de linéarisation

### 4.2.1 Linéarisation exacte

Pour pouvoir appliquer le théorème de linéarisation exacte 2.4, il s'agit de trouver des fonctions de sorties qui confèrent au système considéré un vecteur de degré relatif dont la somme des éléments vaut 3.

Pour s'assurer de l'existence de ces fonctions de sortie, on peut vérifier les hypothèses du théorème 2.5, ce qui peut se révéler fastidieux, ou simplement trouver des fonctions qui conviennent. C'est ce que nous développerons ci-après. Remarquons que le fait de trouver ces fonctions revient à prouver les hypothèses du théorème, car celui-ci est formulé sous forme d'une condition nécessaire et suffisante.

On cherche donc deux fonctions de sortie  $h_1$  et  $h_2$  qui confèrent au système un vecteur de degré relatif  $(2, 1)$ .

Pour la première fonction, il faut que  $h_1$  vérifie les deux égalités suivantes

$$L_{g_1}h_1 = 0 = L_{g_2}h_1,$$

c'est-à-dire

$$\begin{aligned} \frac{\partial h_1}{\partial s}(-s) + \frac{\partial h_1}{\partial x_1}(-x_1) + \frac{\partial h_2}{\partial x_2}(-x_2) &= 0 \\ \frac{\partial h_1}{\partial s} &= 0. \end{aligned}$$

On propose la fonction  $h_1(s, x_1, x_2) = \ln\left(\frac{x_1}{x_2}\right)$ . Ce choix nous impose à nouveau de travailler avec des états tels que  $x_1, x_2 > 0$ .

La dérivée de Lie de cette fonction le long du champ de vecteurs  $F(x)$  donne

$$L_F h_1(x) = f_1(s) - f_2(s).$$

En ce qui concerne la seconde,  $h_2$ , une fonction qui soit indépendante de  $h_1(x)$  et de  $L_F h_1(x)$  convient, par la structure de  $g_2(x)$ . Par exemple,  $h_2(x) = x_1$  convient. En effet, le système

$$\begin{aligned} \dot{x} &= F(x) + g_1(x)u_1 + g_2(x)u_2 \\ y_1 &= \ln\left(\frac{x_1}{x_2}\right) \\ y_2 &= x_1 \end{aligned}$$

est de vecteur de degré relatif  $\{2, 1\}$ , car

$$\begin{aligned} L_{g_1}h_1 &= 0(-s) + \frac{1}{x_1}x_1 + \frac{-1}{x_2}x_2 = 0 \\ L_{g_2}h_1 &= 0 + \frac{1}{x_1}0 + \frac{-1}{x_2}0 = 0 \end{aligned}$$



et

$$A = \begin{pmatrix} -s(f'_1 - f'_2) & f'_1 - f'_2 \\ -x_1 & 0 \end{pmatrix}$$

est non-singulière partout sauf pour  $s$  tel que  $f'_1(s) - f'_2(s) = 0$ . Comme cette condition doit être vérifiée en  $x^o$ , elle restreint le choix de ce dernier.

On définit alors le changement de coordonnées

$$\Phi(x) = \begin{pmatrix} \Phi_1(x) \\ \Phi_2(x) \\ \Phi_3(x) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \ln\left(\frac{x_1}{x_2}\right) \\ f_1(s) - f_2(s) \\ x_1 \end{pmatrix}.$$

Dans les nouvelles coordonnées  $z = (z_{1,1}, z_{1,2}, z_{2,1}) = \Phi(x)$ , la description d'état s'écrit

$$\begin{aligned} \dot{z}_{1,1} &= z_{1,2} \\ \dot{z}_{1,2} &= L_F h_1(\Phi^{-1}(z)) + L_{g_1} L_F h_1(\Phi^{-1}(z))u_1 + L_{g_2} L_F h_1(\Phi^{-1}(z))u_2 \\ \dot{z}_{2,1} &= h_2(\Phi^{-1}(z)) + L_{g_1} h_2(\Phi^{-1}(z))u_1 + L_{g_2} h_2(\Phi^{-1}(z))u_2, \end{aligned}$$

c'est-à-dire

$$\begin{aligned} \dot{z}_{1,1} &= z_{1,2} \\ \dot{z}_{1,2} &= [(f'_1 - f'_2)(-x_1 f_1 - x_2 f_2) + (f'_1 - f'_2)(-s)u_1 + (f'_1 - f'_2)u_2]_{x=\Phi^{-1}(z)} \\ \dot{z}_{2,1} &= [x_1 f_1 - x_1 u_1]_{x=\Phi^{-1}(z)}. \end{aligned}$$

On peut à présent trouver les fonctions de contrôle  $u_1$  et  $u_2$ , dépendant de  $v_1$  et  $v_2$ , pour que le système ait la forme

$$\begin{aligned} \dot{z}_{1,1} &= z_{1,2} \\ \dot{z}_{1,2} &= v_1 \\ \dot{z}_{2,1} &= v_2. \end{aligned}$$

On obtient, exprimé en  $x$ , le feedback linéarisant suivant

$$\begin{aligned} u_1 &= f_1 - \frac{v_2}{x_1} \\ u_2 &= \frac{v_1}{f'_1 - f'_2} + x_1 f_1 + x_2 f_2 + s u_1. \end{aligned}$$

Remarquons que, comme on désire construire un feedback sur tout le voisinage de  $x^o$  considéré, les vecteurs de ce voisinage devront être tels que

$$f'_1(s) - f'_2(s) \neq 0.$$

## 4.2.2 Stabilisation du système linéaire

Analysons le système linéaire obtenu. Écrivons-le d'abord sous forme

$$\begin{aligned}\dot{z} &= Az + Bv \\ y &= Cz\end{aligned}$$

$$\text{où } A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ et } C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Ce système est bien complètement contrôlable. En effet, la matrice de contrôlabilité

$$\mathcal{C} = (B \ AB \ A^2B) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

est de rang 3.

Comme dans le cas à une entrée, étudions la stabilité exponentielle de ce système sans contrôle. Calculons dès lors les valeurs propres de la matrice  $A$ . Trivialement, on voit que  $\lambda_{1,2,3} = 0$ . Nous en concluons que le système n'est pas (exponentiellement) intérieurement stable.

Développons à présent la fonction de transfert du système pour étudier sa stabilité (exponentielle) externe. On obtient

$$\hat{G}(s) = \begin{pmatrix} \frac{1}{s^2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{s} \end{pmatrix}.$$

L'unique pôle de cette fonction est en  $s = 0$ , dont la partie réelle n'est pas négative. Par conséquent, le système n'est pas non plus (exponentiellement) extérieurement stable.

On cherche à présent un feedback statique d'état qui permette de stabiliser ce système. Nous construisons donc une matrice  $K$  telle que le contrôle prenne la forme  $v = Kz + w$  où  $K \in \mathbb{R}^{2 \times 3}$  et  $w \in \mathbb{R}^2$ . Le système en boucle fermée donne alors

$$\begin{aligned}\dot{z} &= (A + BK)z + Bw \\ y &= Cz.\end{aligned}$$

Nous développons dans ce cas à deux entrées les trois manières vues au chapitre précédent pour choisir la matrice  $K$ .

On choisit premièrement des valeurs pour cette matrice et on voit si les valeurs propres de  $A + BK$  ont des parties réelles strictement négatives. Par exemple, la matrice  $K$  suivante convient.

$$K = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

En effet, elle confère à la matrice  $A + BK$  les valeurs propres suivantes

$$\lambda_1 = -1 \quad \lambda_2 = \frac{-1 + \sqrt{3}i}{2} \quad \lambda_3 = \frac{-1 - \sqrt{3}i}{2}$$

qui ont toutes trois une partie réelle strictement négative. Remarquons que toute matrice de la forme

$$K = \begin{pmatrix} k_1 & k_2 & 0 \\ 0 & 0 & k_0 \end{pmatrix},$$

où  $k_0, k_1$  et  $k_2$  sont négatifs, convient. En effet,

$$A + BK = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ k_1 & k_2 & 0 \\ 0 & 0 & k_0 \end{pmatrix},$$

donc

$$\det(A + BK - \lambda I) = (k_0 - \lambda)(\lambda^2 - k_2\lambda - k_1)$$

et  $k_0, k_1, k_2 < 0$  nous assure des valeurs propres dont les parties réelles sont négatives.

Deuxièmement, on peut utiliser le théorème d'assignabilité spectrale (théorème 3.3). On procède pour cela à l'identification des coefficients. On cherche par conséquent la matrice

$$K = \begin{pmatrix} k_{11} & k_{12} & k_{13} \\ k_{21} & k_{22} & k_{23} \end{pmatrix}$$

telle que  $\sigma(A + BK) = \{\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3\}$  où  $\operatorname{Re}(\lambda_i) < 0$  pour  $i = 1, 2, 3$ . En développant d'une part le polynôme caractéristique de  $A + BK$  et d'autre part l'expression

$$(\lambda - \lambda_1)(\lambda - \lambda_2)(\lambda - \lambda_3),$$

on obtient l'identification de coefficients suivante

$$\begin{aligned} \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 &= k_{12} + k_{23} \\ \lambda_1\lambda_2 + \lambda_1\lambda_3 + \lambda_2\lambda_3 &= k_{12}k_{23} - k_{13}k_{22} - k_{11} \\ \lambda_1\lambda_2\lambda_3 &= k_{13}k_{21} - k_{11}k_{23}. \end{aligned}$$

Si on veut que les valeurs propres soient égales à  $\lambda_i = -1$  pour  $i = 1, 2, 3$ , les conditions sont

$$\begin{aligned} -3 &= k_{12} + k_{23} \\ 3 &= k_{12}k_{23} - k_{13}k_{22} - k_{11} \\ -1 &= k_{13}k_{21} - k_{11}k_{23}; \end{aligned}$$

et, par exemple, la matrice

$$K = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & -2 \end{pmatrix}$$

convient.

Troisièmement, on peut construire un feedback LQ, c'est-à-dire trouver la matrice de gain  $K$  optimale tel que le feedback  $v = Kz$  minimise la fonction de coûts quadratique 3.1. Cette matrice de gain sera également déterminée à l'aide de la fonction `lqr` du logiciel `Matlab`. On obtient, si on choisit par exemple  $R = I_{2 \times 2}$  et  $Q = I_{3 \times 3}$ ,

$$K = \begin{pmatrix} -1 & -1.732 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Le choix de ces matrices de poids sera discuté lors du chapitre 5.

Pour la valeur du nouveau contrôle externe  $w$ , nous regardons la description en boucle fermée

$$\dot{z} = (A + BK)z + Bw.$$

A l'équilibre, la première équation donne

$$\dot{z}_1 = z_2 = 0.$$

Les deux autres donnent par conséquent

$$\begin{aligned} \dot{z}_2 &= k_{11}z_1 + k_{13}z_3 + w_1 = 0 \\ \dot{z}_3 &= k_{21}z_1 + k_{23}z_3 + w_2 = 0. \end{aligned}$$

On peut dès lors donner à ces contrôles les valeurs

$$\begin{aligned} w_1 &= -k_{11}z_{1g} - k_{13}z_{3g} \\ w_2 &= -k_{21}z_{1g} - k_{23}z_{3g} \end{aligned}$$

où  $z_{1g}$  et  $z_{3g}$  sont les objectifs exprimés dans les nouvelles coordonnées.

Par exemple, dans le premier choix de  $K$ ,

$$K = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix},$$

on donnera la valeur  $w = (-z_{1g} \quad -z_{3g})$ .

Cette analyse montre à nouveau qu'il ne sera pas possible de fixer un objectif pour  $z_2$ , donc sur  $s$  dans les coordonnées d'origine. L'équilibre en  $s$  est déterminé par l'équation

$$z_2 = 0 \Leftrightarrow f_1(s) = f_2(s).$$

Cette équation a comme solution  $s = 0$ , la solution triviale qui ne nous intéresse pas, et peut avoir une autre solution  $s = \tilde{s}$ . L'existence de cette seconde solution conditionne dans ce cas également la possibilité de coexistence.

Remarquons par ailleurs que, par la définition de  $u$ , on doit avoir  $f'_1(s) \neq f'_2(s)$  sur tout le voisinage de  $s^o$ . Pour avoir le résultat attendu, il faut donc que cet équilibre non-nul  $\tilde{s}$  soit dans un voisinage du point initial  $s^o$  qui ne comprenne pas le point  $\hat{s}$  déterminé implicitement par  $f'_1(\hat{s}) = f'_2(\hat{s})$ , si celui-ci existe. Ces remarques restreignent donc le choix de la condition initiale en  $s$ . À nouveau, nous illustrerons nos propos de façon numérique.

### 4.2.3 Retour aux coordonnées d'origine

Ré-exprimons à présent le système en boucle fermée, avec les deux feedbacks, dans les coordonnées d'origine.

Le modèle de base s'écrit

$$\begin{aligned}\dot{s} &= -x_1 f_1(s) - x_2 f_2(s) - s u_1 + u_2 \\ \dot{x}_1 &= x_1 f_1(s) - x_1 u_1 \\ \dot{x}_2 &= x_2 f_2(s) - x_2 u_1.\end{aligned}$$

On y remplace désormais les termes suivants :

$$\begin{aligned}u_1 &= f_1(s) - \frac{v_2}{x_1} \\ u_2 &= \frac{v_1}{f'_1(s) - f'_2(s)} + x_1 f_1(s) + x_2 f_2(s) + s u_1 \\ v_1 &= [(k_{11} z_1 + k_{12} z_2 + k_{13} z_3 + w_1)]_{z=\Phi(x)} \\ &= k_{11} \ln\left(\frac{x_1}{x_2}\right) + k_{12} (f_1(s) - f_2(s)) + k_{13} x_1 + w_1 \\ v_2 &= [(k_{21} z_1 + k_{22} z_2 + k_{23} z_3 + w_2)]_{z=\Phi(x)} \\ &= k_{21} \ln\left(\frac{x_1}{x_2}\right) + k_{22} (f_1(s) - f_2(s)) + k_{23} x_1 + w_2 \\ w_1 &= [(-k_{11} z_{1g} - k_{13} z_{3g})]_{z=\Phi(x)} \\ &= -k_{11} \ln\left(\frac{x_{1g}}{x_{2g}}\right) - k_{13} x_{1g} \\ w_2 &= [(-k_{21} z_{1g} - k_{23} z_{3g})]_{z=\Phi(x)} \\ &= -k_{21} \ln\left(\frac{x_{1g}}{x_{2g}}\right) - k_{23} x_{1g}.\end{aligned}$$

Nous obtenons le système

$$\begin{aligned}\dot{s} &= -x_1 f_1(s) - x_2 f_2(s) - s u_1 + \frac{v_1}{f'_1(s) - f'_2(s)} + x_1 f_1(s) + x_2 f_2(s) + s u_1 \\ &= \frac{v_1}{f'_1(s) - f'_2(s)} \\ &= \frac{k_{11} \left[ \ln\left(\frac{x_1}{x_2}\right) - \ln\left(\frac{x_{1g}}{x_{2g}}\right) \right] + k_{12} (f_1(s) - f_2(s)) + k_{13} (x_1 - x_{1g})}{f'_1(s) - f'_2(s)}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{k_{11} \ln \left( \frac{x_1 x_{2g}}{x_2 x_{1g}} \right) + k_{12} (f_1(s) - f_2(s)) + k_{13} (x_1 - x_{1g})}{f_1'(s) - f_2'(s)} \\
\dot{x}_1 &= x_1 f_1(s) - x_1 \left( f_1(s) - \frac{v_2}{x_1} \right) = v_2 \\
&= k_{21} \ln \left( \frac{x_1 x_{2g}}{x_2 x_{1g}} \right) + k_{22} (f_1(s) - f_2(s)) + k_{23} (x_1 - x_{1g}) \\
\dot{x}_2 &= x_2 f_2(s) - x_2 \left( f_1(s) - \frac{v_2}{x_1} \right) \\
&= x_2 \left( f_2(s) - f_1(s) + \frac{k_{21} \ln \left( \frac{x_1 x_{2g}}{x_2 x_{1g}} \right) + k_{22} (f_1(s) - f_2(s)) + k_{23} (x_1 - x_{1g})}{x_1} \right).
\end{aligned}$$

Dans l'hypothèse où on choisit la matrice de gain

$$K = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix},$$

on obtient le système

$$\begin{aligned}
\dot{s} &= \frac{\ln \left( \frac{x_2 x_{1g}}{x_1 x_{2g}} \right) + (f_2(s) - f_1(s))}{f_1'(s) - f_2'(s)} \\
\dot{x}_1 &= x_{1g} - x_1 \\
\dot{x}_2 &= x_2 \left( f_2(s) - f_1(s) + \frac{x_{1g} - x_1}{x_1} \right).
\end{aligned}$$

Pour la matrice

$$K = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & -2 \end{pmatrix},$$

le système devient

$$\begin{aligned}
\dot{s} &= \frac{\ln \left( \frac{x_2 x_{1g}}{x_1 x_{2g}} \right) + f_2(s) - f_1(s) + x_1 - x_{1g}}{f_1'(s) - f_2'(s)} \\
\dot{x}_1 &= \ln \left( \frac{x_1 x_{2g}}{x_2 x_{1g}} \right) + 2x_{1g} - 2x_1 \\
\dot{x}_2 &= x_2 \left( f_2(s) - f_1(s) + \frac{\ln \left( \frac{x_1 x_{2g}}{x_2 x_{1g}} \right) + 2x_{1g} - 2x_1}{x_1} \right).
\end{aligned}$$

L'ensemble des actions effectuées dans le cas à deux entrées peut être représenté schématiquement comme sur la figure 4.1.

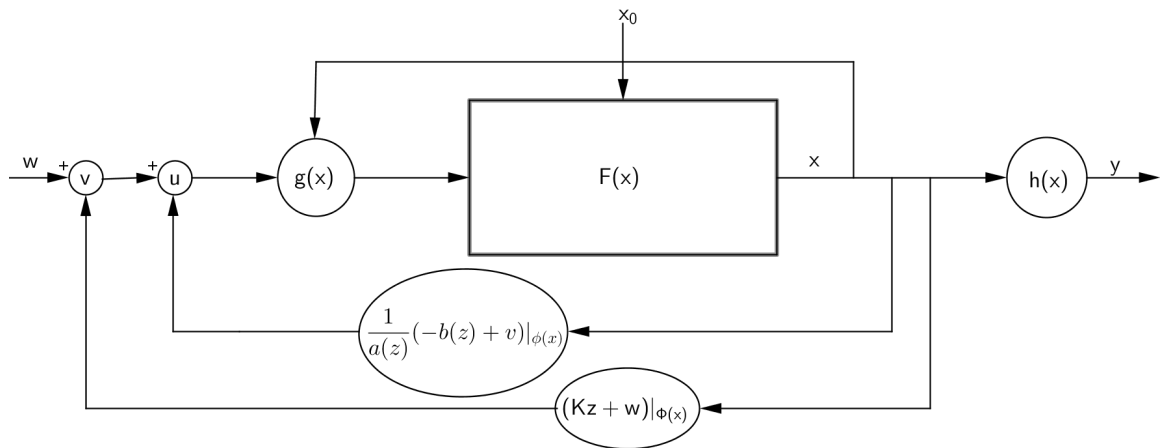


FIGURE 4.1 – Représentation du système en boucle fermée

Dans le cas à deux entrées, la linéarisation exacte a donc pu être effectuée. Cependant, la stabilisation du système en boucle fermée à un équilibre d'intérêt est soumise à certaines conditions. L'existence d'une solution strictement positive à l'équation  $f_1(s) = f_2(s)$  est nécessaire, mais la présence de deux solutions pour cette équation implique que le changement de coordonnées et le feedback ne sont pas globaux. Si le système linéarisé peut être stabilisé à toute valeur pour toute condition initiale, ce n'est donc pas le cas du système exprimé dans les coordonnées d'origine. Cette affirmation sera illustrée dans le chapitre suivant.

# Chapitre 5

## Analyse et simulations numériques

Ce chapitre comporte, pour les deux cas considérés, une analyse et des simulations numériques des systèmes en boucle fermée obtenus. L'analyse nous permet de dégager des conditions pour la stabilisation, et les simulations illustrent ces conditions et les résultats.

### 5.1 Cas à une entrée

#### 5.1.1 Analyse

Dans le cas à une entrée, notre système en boucle fermée est décrit par

$$\begin{aligned}\dot{s} &= \frac{k_1 \ln \left( \frac{x_1 x_{2g}}{x_2 x_{1g}} \right) + k_2 (f_1(s) - f_2(s))}{f'_1(s) - f'_2(s)} \\ \dot{x}_1 &= x_1 \left[ f_1(s) - \frac{x_1 f_1(s) + x_2 f_2(s)}{1-s} - \frac{k_1 \ln \left( \frac{x_1 x_{2g}}{x_2 x_{1g}} \right) + k_2 (f_1(s) - f_2(s))}{[f'_1(s) - f'_2(s)] (1-s)} \right] \\ \dot{x}_2 &= x_2 \left[ f_2(s) - \frac{x_1 f_1(s) + x_2 f_2(s)}{1-s} - \frac{k_1 \ln \left( \frac{x_1 x_{2g}}{x_2 x_{1g}} \right) + k_2 (f_1(s) - f_2(s))}{[f'_1(s) - f'_2(s)] (1-s)} \right].\end{aligned}$$

Analysons cette description. Cherchons tout d'abord les équilibres, en résolvant  $\dot{s} = \dot{x}_1 = \dot{x}_2 = 0$ . Remarquons premièrement que

$$\dot{s} = 0 \Leftrightarrow k_1 \ln \left( \frac{x_1 x_{2g}}{x_2 x_{1g}} \right) + k_2 (f_1(s) - f_2(s)) = 0.$$

Cela implique que, comme  $x_1, x_2 \neq 0$ ,

$$\dot{x}_1 = 0 \Leftrightarrow f_1(s) - \frac{x_1 f_1(s) + x_2 f_2(s)}{1-s} = 0$$



et

$$\dot{x}_2 = 0 \Leftrightarrow f_2(s) - \frac{x_1 f_1(s) + x_2 f_2(s)}{1 - s} = 0.$$

La combinaison de ces deux équations implique que  $f_1(s) = f_2(s)$ . Cela signifie que s'il existe un  $\tilde{s} \neq 0$  tel que  $f_1(\tilde{s}) = f_2(\tilde{s})$ , on a deux équilibres en  $s$ . On en conclut également que, pour  $\tilde{s} \neq 0$ ,

$$1 - \frac{x_1 + x_2}{1 - \tilde{s}} = 0$$

c'est-à-dire  $\tilde{s} + x_1 + x_2 = 1$ . Les deux équilibres sont donc  $(0, x_1, x_2)$  et  $(\tilde{s}, x_{1e}, x_{2e})$  où  $\tilde{s} + x_{1e} + x_{2e} = 1$ .

Remarquons que pour pouvoir se stabiliser en  $\tilde{s}$ ,  $s$  doit rester dans l'intervalle  $[\hat{s}, 1]$ , sinon la stabilisation échoue. Pour se stabiliser en  $s = 0$ ,  $s$  doit rester sous  $\hat{s}$ .

Nous allons procéder à des simulations numériques pour observer la dynamique des concentrations à proximité de ces équilibres et voir si les points singuliers  $s = \hat{s}$  et  $s = 1$  sont franchis.

### 5.1.2 Simulations

Comme annoncé précédemment, le modèle utilisé est celui de Monod, avec des fonctions de croissance de type Michaelis-Mentens. Les paramètres utilisés dans ce cas sont tirés de [2] et sont les suivants

$$m_1 = 1.2, \quad a_1 = 0.6, \quad m_2 = 0.83 \quad \text{et} \quad a_2 = 0.2.$$

Les simulations seront faites à l'aide du logiciel `Matlab`, avec comme intégrateur `ode45` qui utilise la formule de Runge-Kutta(4,5).

Prenons tout d'abord une condition initiale proche de l'équilibre  $(x_{1e}, x_{2e}, \tilde{s})$ , par exemple  $(0.1, 0.2, 0.65)$  et des concentrations-objectifs qui valident l'équilibre, par exemple  $(0.2, 1 - \tilde{s} - 0.2)$ . En cette condition initiale, on a  $\dot{s} > 0$  et la dérivée de  $s$  ne change plus de signe par la suite.  $s$  passe donc par la valeur  $s = 1$  et de ce fait les concentrations en  $x_1$  et  $x_2$  ne sont plus définies. La figure 5.1 illustre la croissance accélérée de  $s$ , mais pas le fait que  $x_1$  et  $x_2$  ne sont plus définies. En effet, l'intégration s'effectue pas par pas et il n'y a pas eu d'évaluation à la valeur exacte  $s = 1$ .

Pour d'autres conditions initiales, par exemple  $(0.2, 0.1, 0.65)$  avec les objectifs  $(0.1, 1 - \tilde{s} - 0.1)$ , on observe un autre comportement. À la condition initiale,  $\dot{s} < 0$  et  $s$  passe par la valeur  $\hat{s}$ .  $s$ ,  $x_1$  et  $x_2$  ne sont alors plus définis. Ce cas est illustré à la figure 5.2. On remarque que, comme  $s$  ne prend pas la valeur exacte de  $\hat{s}$  lors de l'évaluation, on observe des « oscillations raides » autour de  $\hat{s}$  car  $\dot{s}$  change de signe avec une valeur absolue très grande.

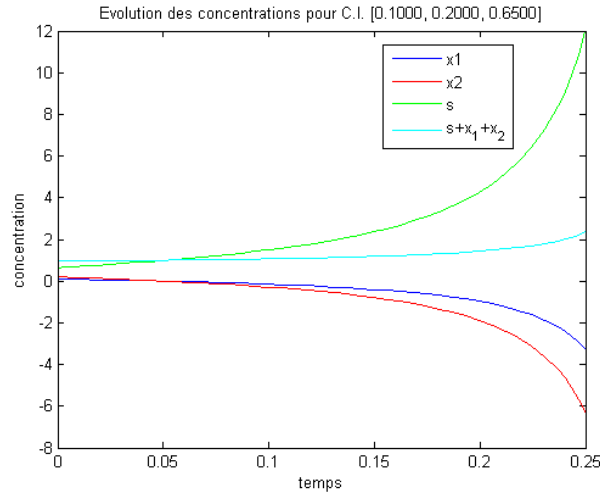


FIGURE 5.1 – Échec de la stabilisation à l'équilibre d'intérêt -  $s = 1$  franchi

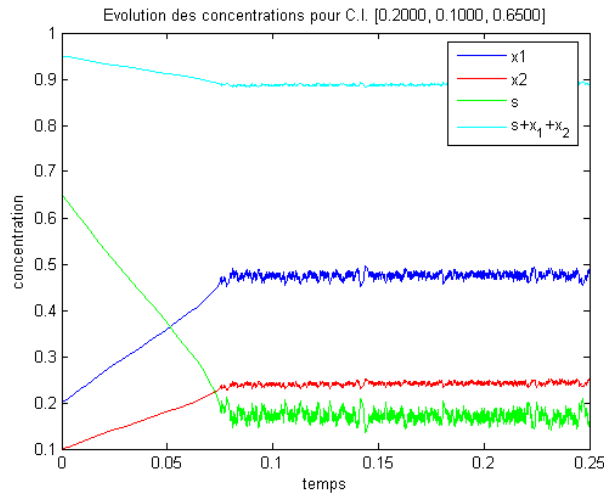


FIGURE 5.2 – Échec de la stabilisation à l'équilibre d'intérêt -  $s = \hat{s}$  franchi

Les deux cas pré-cités peuvent également se produire si on prend une condition initiale légèrement supérieure à  $\tilde{s}$ . Illustrons à la figure 5.3 ce qui se passe avec les conditions initiales  $(0.1, 0.2, 0.7)$  et les concentrations-objectifs  $(0.2, 1 - \tilde{s} - 0.2)$ . De façon similaire, on obtient un résultat comparable à celui représenté à la figure 5.2 en choisissant  $(x_{1e}, x_{2e}, \tilde{s}) = (0.2, 0.1, 0.7)$  et  $(x_{1g}, x_{2g}) = (0.1, 1 - \tilde{s} - 0.1)$ .

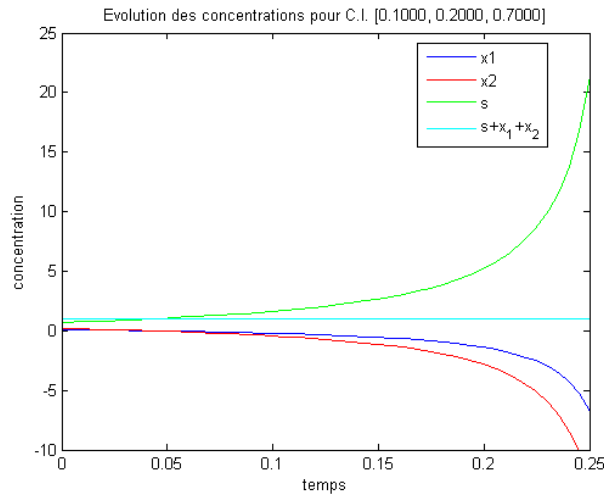


FIGURE 5.3 – Échec de la stabilisation à l'équilibre d'intérêt -  $s = 1$  franchi

On en conclut donc que la stabilisation à cet équilibre ne peut être obtenue. Voyons à présent le cas de l'équilibre trivial. Prenons par exemple les conditions initiales  $(0.3, 0.5, 0.1)$  et les concentrations-objectifs  $(0.4, 0.6)$ . La concentration en  $s$  diminue, prend des valeurs négatives et passe finalement par  $\hat{s}$ . Ce comportement est illustré à la figure 5.4.

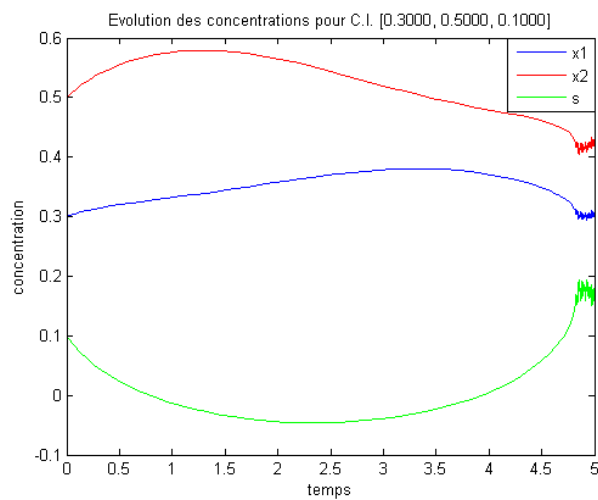


FIGURE 5.4 – Échec de la stabilisation à l'équilibre trivial -  $s$  négatif et  $s = \hat{s}$  franchi

Si on prend d'autres conditions initiales, par exemple  $(0.3, 0.5, 0.1)$ , et les concentrations-objectifs  $(0.4, 0.4)$ ,  $s$  croit et passe par  $\hat{s}$ . Ceci est représenté à la figure 5.5.

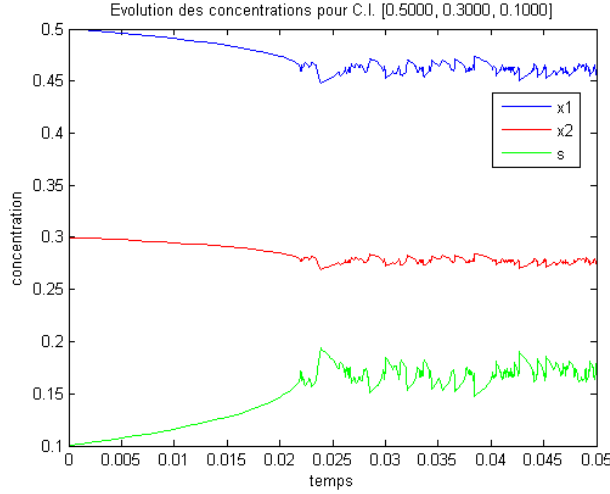


FIGURE 5.5 – Échec de la stabilisation à l'équilibre trivial -  $s = \hat{s}$  franchi

On voit donc que la stabilisation dans le cas où on considère uniquement le taux de dilution comme entrée échoue. Nous attribuons cet échec au comportement non-asymptotiquement stable de la dynamique des zéros. La stabilisation du sous-système linéaire n'a donc pas stabilisé l'entièreté du système.

## 5.2 Cas à deux entrées

### 5.2.1 Analyse

Analysons à présent le système en boucle fermée pour le cas à deux entrées

$$\begin{aligned} \dot{s} &= \frac{k_{11} \ln \left( \frac{x_1 x_{2g}}{x_2 x_{1g}} \right) + k_{12} (f_1(s) - f_2(s)) + k_{13} (x_1 - x_{1g})}{f_1'(s) - f_2'(s)} \\ \dot{x}_1 &= k_{21} \ln \left( \frac{x_1 x_{2g}}{x_2 x_{1g}} \right) + k_{22} (f_1(s) - f_2(s)) + k_{23} (x_1 - x_{1g}) \\ \dot{x}_2 &= x_2 \left( f_2(s) - f_1(s) + \frac{k_{21} \ln \left( \frac{x_1 x_{2g}}{x_2 x_{1g}} \right) + k_{22} (f_1(s) - f_2(s)) + k_{23} (x_1 - x_{1g})}{x_1} \right). \end{aligned}$$

Pour trouver les équilibres, résolvons  $\dot{s} = \dot{x}_1 = \dot{x}_2 = 0$ . Notons que  $\dot{x}_1 = 0$  implique, comme  $x_2 \neq 0$ , que

$$\dot{x}_2 = 0 \Leftrightarrow f_2(s) - f_1(s) = 0.$$

Les autres équations deviennent alors

$$\begin{aligned} k_{11} \ln \left( \frac{x_1 x_{2g}}{x_2 x_{1g}} \right) + k_{13} (x_1 - x_{1g}) &= 0 \\ k_{21} \ln \left( \frac{x_1 x_{2g}}{x_2 x_{1g}} \right) + k_{23} (x_1 - x_{1g}) &= 0, \end{aligned}$$

dont les concentrations-objectifs  $x_{1g}$  et  $x_{2g}$  sont solutions pour tous les choix de matrice de gain proposés au chapitre précédent.

Dans le cas où il existe  $\tilde{s} \neq 0$  tel que  $f_2(\tilde{s}) - f_1(\tilde{s}) = 0$ , nous avons donc deux équilibres,  $(0, x_{1g}, x_{2g})$  et  $(\tilde{s}, x_{1g}, x_{2g})$ . Pour en étudier la stabilité, développons la jacobienne du système, évaluée en ces équilibres.

$$J(x_e) = \begin{pmatrix} k_{12} & \frac{k_{11}}{(f_1'(s) - f_2'(s))x_1} & \frac{-k_{11}}{(f_1'(s) - f_2'(s))x_2} \\ k_{22}(f_1'(s) - f_2'(s)) & \frac{k_{21}}{x_1} + k_{23} & \frac{-k_{21}}{x_2} \\ x_2(f_1'(s) - f_2'(s)) \left( -1 + \frac{k_{22}}{x_1} \right) & x_2 \left( \frac{k_{21}}{x_1^2} + \frac{k_{23}}{x_1} \right) & \frac{-k_{21}}{x_1} \end{pmatrix}$$

Comme cette forme est compliquée, ses valeurs propres n'ont été calculées que de façon numérique, ce qui nous a permis d'être convaincus de la stabilité de ces deux équilibres.

Au vu de la complexité de la description d'état en boucle fermée, il est difficile de prédire lequel de ces deux équilibres stables sera atteint pour chaque condition initiale. Remarquons cependant que s'il existe  $\tilde{s} \neq 0$ , le système admet un point singulier  $\hat{s}$  défini implicitement comme  $f_1'(\hat{s}) = f_2'(\hat{s})$ , qu'il faut considérer dans le choix des conditions initiales. En effet, si  $s$  s'approche de ce point singulier, et que ce dernier est attracteur, la stabilisation échouera. Il faut donc que  $\dot{s} > 0$  si  $s$  se trouve légèrement au dessus de  $\hat{s}$ , c'est-à-dire

$$\frac{k_{11} \ln \left( \frac{x_1 x_{2g}}{x_2 x_{1g}} \right) + k_{12} (f_1(s) - f_2(s)) + k_{13} (x_1 - x_{1g})}{f_1'(s) - f_2'(s)} > 0.$$

Si  $s$  se trouve légèrement en dessous de  $\hat{s}$ , la dérivée de  $s$  doit être négative. Ce  $\hat{s}$ , s'il n'est pas attracteur, constitue par conséquent une frontière entre les conditions initiales qui permettent une stabilisation à l'un ou l'autre des équilibres stables. Pour que  $\hat{s}$  soit répulsif, le choix des concentrations initiales et concentrations-objectifs doit tenir compte de cette condition et donc dépendre non seulement des fonctions de croissance, mais aussi de la matrice de gain choisie.

Cette condition n'est cependant pas suffisante pour assurer la stabilisation. En effet, si la dérivée de  $s$  doit être positive entre  $\hat{s}$  et  $\tilde{s}$ , elle doit, après  $\tilde{s}$ , retrouver

une valeur négative pour que  $s$  tende vers  $\tilde{s}$ , sinon  $s$  croît sans arrêt. Il faut donc mettre une condition sur  $x_1$  et  $x_2$ , que  $x_1 > x_2$ , sinon  $x_2$  croît trop rapidement, ce qui est dû au terme en  $\frac{x_2}{x_1}$ . Si  $x_2 \gg x_1$ , alors  $\ln\left(\frac{x_1 x_2 g}{x_2 x_1 g}\right)$  est « trop » négatif et  $k_{11} \ln\left(\frac{x_1 x_2 g}{x_2 x_1 g}\right) > k_{12} (f_1(s) - f_2(s))$  même après  $\tilde{s}$ . Cette remarque sera illustrée dans le point suivant.

## 5.2.2 Simulations

Passons à présent aux simulations numériques. Nous illustrerons d’abord l’analyse et les remarques faites ci-dessus, puis nous discuterons du choix de la matrice de gain.

Les deux jeux de paramètres considérés sont tirés de [1] et de [2], et sont les suivants

	$m_1$	$a_1$	$m_2$	$a_2$
1	6	0.5	5	0.25
2	1.2	0.6	0.83	0.2

Remarquons que le premier jeu de paramètres est celui qui a été utilisé dans les illustrations du principe d’exclusion compétitive dans le premier chapitre et que le second est utilisé dans les simulations pour le cas à une entrée (voir section 5.1).

### Illustrations de l’analyse

Comme la question de la matrice de gain sera abordée dans le point suivant, le raisonnement du présent point s’effectuera entièrement avec le premier choix de matrice de gain, c’est-à-dire

$$K = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Illustrons d’abord la stabilisation aux deux équilibres stables. Considérant le premier jeu de paramètres et le premier choix de matrice de gain, la figure 5.6 montre la stabilisation à l’équilibre d’intérêt avec comme valeurs initiales  $x_1^o = x_2^o = 0.1$  et  $s^o = 0.2053$ , donc légèrement supérieure à  $\hat{s}$ . La figure 5.7 illustre quant à elle la stabilisation à l’équilibre trivial avec les mêmes valeurs initiales en  $x_1$  et  $x_2$  et une valeur initiale en  $s = 0.2052$  inférieure à  $\hat{s}$ . Remarquons que cette seconde stabilisation est non-pertinente physiquement car la concentration de substrat prend des valeurs négatives avant de se stabiliser en 0. Notons que dans les deux cas illustrés, si les contrôles sont calculés sans modification, ceux-ci prennent des valeurs négatives, non-physiques. Ce problème peut facilement être résolu en annulant tout contrôle négatif. La stabilisation n’en est pas affectée.

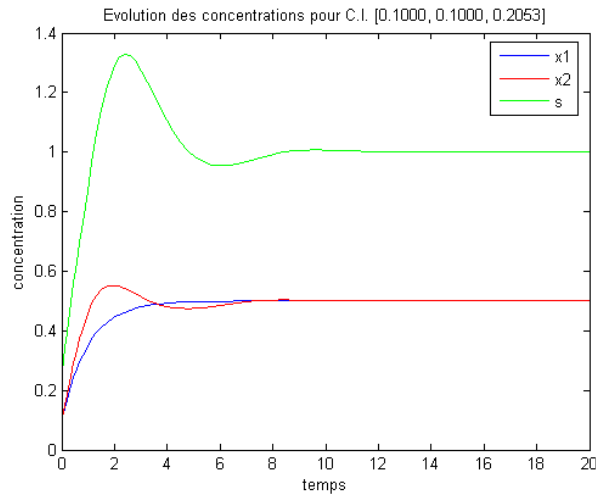


FIGURE 5.6 – Stabilisation à l'équilibre d'intérêt

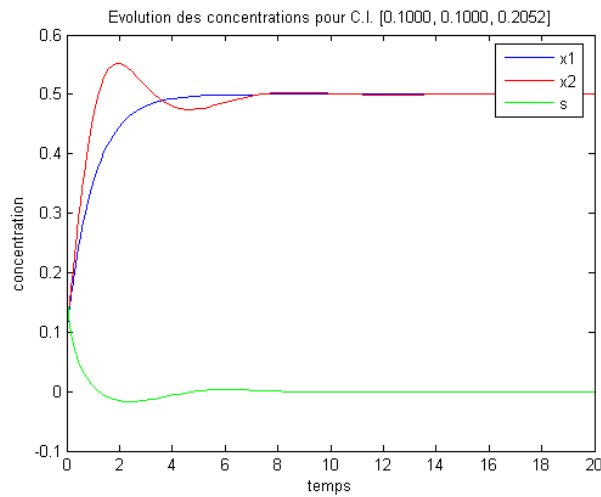


FIGURE 5.7 – Stabilisation à l'équilibre trivial

Des résultats similaires peuvent être obtenus avec le second jeu de paramètres pour la stabilisation à l'équilibre d'intérêt et à l'équilibre trivial, respectivement aux figures 5.8 et 5.9. Les remarques sur les contrôles négatifs et sur l'aspect non-physique de la seconde stabilisation s'appliquent également dans ce cas.

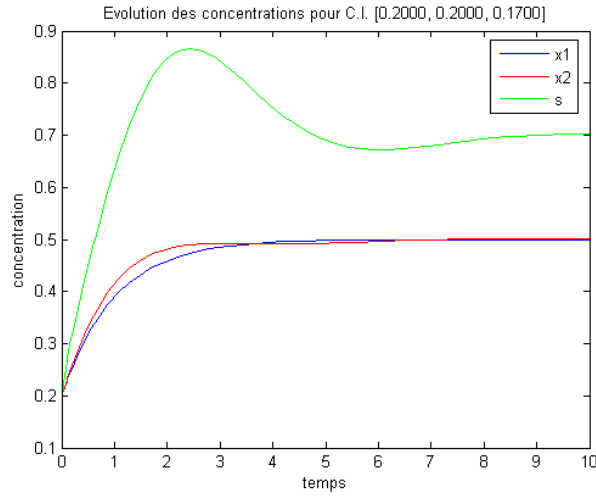


FIGURE 5.8 – Stabilisation à l'équilibre d'intérêt

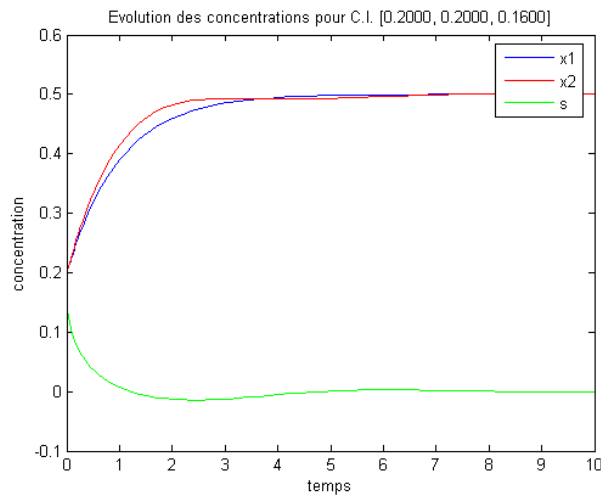


FIGURE 5.9 – Stabilisation à l'équilibre trivial

Nous illustrons à présent l'échec de la stabilisation dans le cas où  $s$  est légèrement supérieur à  $\hat{s}$  et que  $\dot{s} < 0$ . Prenons par exemple pour le premier jeu de paramètres les concentrations initiales  $(x_1^o, x_2^o, s^o) = (0.2, 0.1, 0.3)$ . Nous avons que  $\dot{s} = -0.389$ . L'illustration de ce cas se fait aux figures 5.10 et 5.11. Si la stabilisation semble réussie à la figure 5.10, ce n'est dû qu'à la méthode d'intégration. En effet, on voit clairement après agrandissement (figure 5.11) que la valeur de  $s$  passe par  $\hat{s}$  et que  $\dot{s}$  n'est donc pas défini. On obtient des résultats semblables pour le second jeu de paramètres.



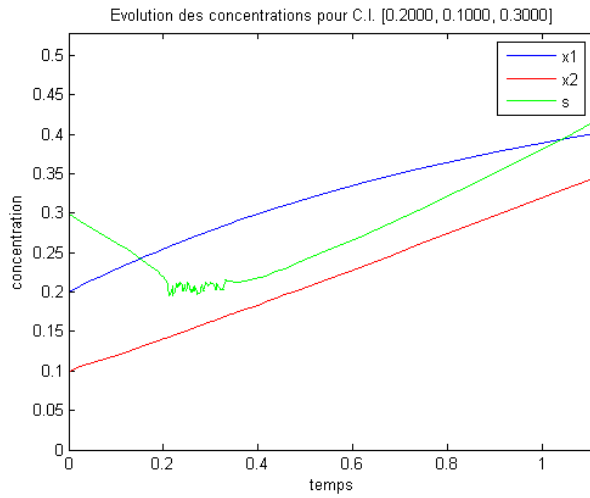


FIGURE 5.10 – Échec de la stabilisation

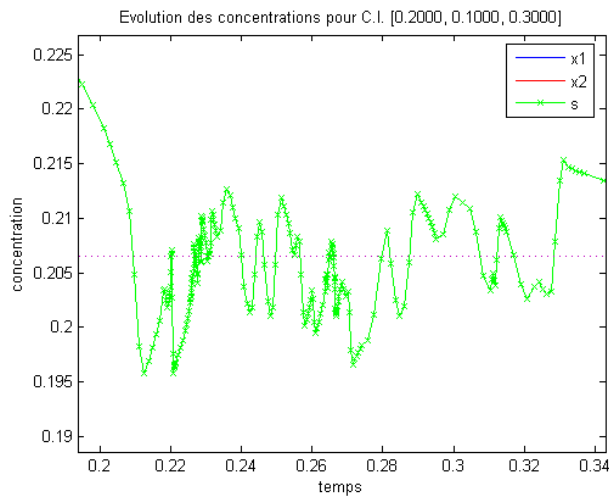


FIGURE 5.11 – Échec de la stabilisation(zoom)

Enfin, illustrons le cas où  $s$  croît sans cesse. Prenons l'exemple du premier jeu de paramètres, avec les concentrations initiales  $(x_1^o, x_2^o, s^o) = (0.1, 0.6, 0.2053)$  et les concentrations-objectifs  $x_{1g} = x_{2g} = 0.5$ . L'évolution des concentrations est représentée à la figure 5.12. Le même type de comportement est obtenu avec le second jeu de paramètres, avec par exemple les conditions initiales  $(x_1^o, x_2^o, s^o) = (0.2, 0.4, 0.2)$  et les concentrations-objectifs  $x_{1g} = 0.4$  et  $x_{2g} = 0.5$ .

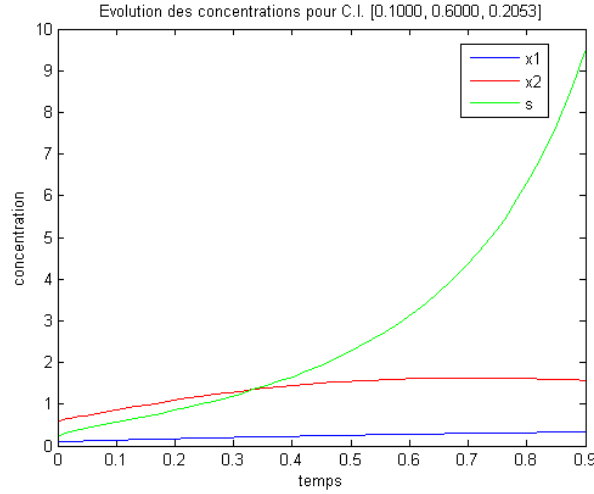


FIGURE 5.12 – Échec de la stabilisation

### Choix de la matrice de gain

Abordons à présent le choix de la matrice de gain. Représentons à la figure 5.13 les trois choix présentés dans le chapitre 4 pour le premier jeu de paramètres, ainsi que les mêmes conditions initiales que pour l'illustration de la stabilisation à l'équilibre d'intérêt, c'est-à-dire  $(x_1^o, x_2^o, s^o) = (0.1, 0.1, 0.2053)$ . Remarquons que, pour la matrice de gain déterminée par la minimisation de la fonction de coûts (3.1), les matrices de pondération considérées sont

$$Q = \mathbb{I}_{3 \times 3} \quad \text{et} \quad R = \mathbb{I}_{2 \times 2}.$$

On remarque aisément que la matrice de gain optimale donne une stabilisation plus rapide que les autres choix.

On peut également se poser la question des valeurs données aux matrices de pondération. Le choix d'une matrice de gain qui optimiserait le temps de stabilisation n'est pas l'objet de ce travail, mais on peut voir, comme illustré à la figure 5.14, que la stabilisation peut être obtenue plus rapidement et avec moins de variation en  $s$  en pondérant plus l'état. Cependant, les contrôles, qui ont moins de poids, prennent alors des valeurs plus grandes, particulièrement  $D.S_{en}$  qui prend selon les trois choix des valeurs allant respectivement jusqu'à 1080, 2525 et 4525. On peut par conséquent jouer sur ces matrices de pondération pour obtenir des contrôles qui soient plus physiques.

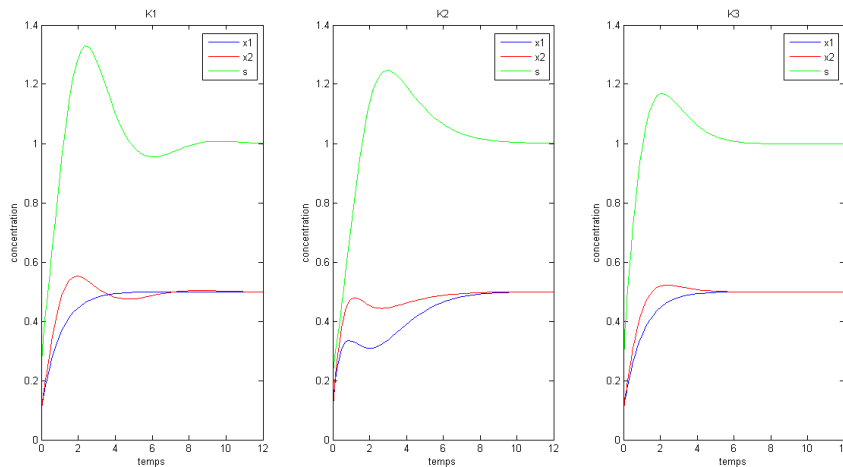


FIGURE 5.13 – Comparaison selon le choix de  $K$

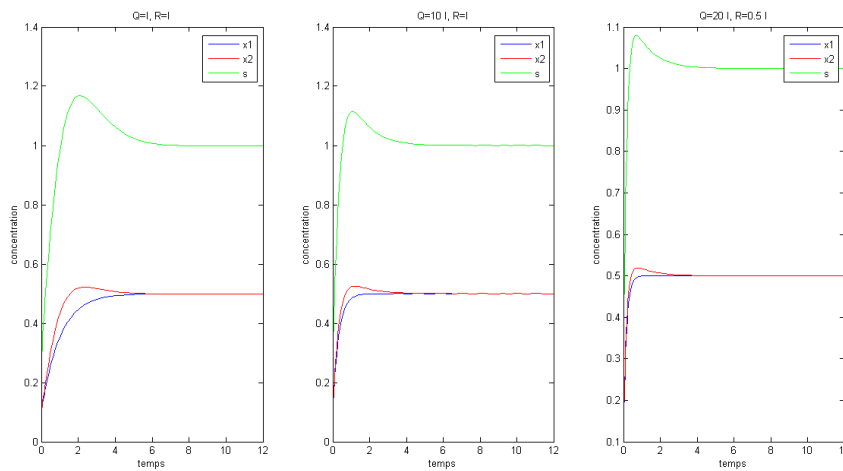


FIGURE 5.14 – Comparaison selon le choix de  $Q$  et  $R$

### Changement d'objectifs

Ce dernier point d'illustration concerne le changement de concentrations-objectifs en cours de stabilisation. C'est un point très intéressant, car s'il y a des restrictions sur les premiers objectifs, les objectifs en cours d'intégration subissent moins de contraintes. C'est également une bonne façon d'avoir un premier aperçu de la robustesse du feedback appliqué.

Reprenons par exemple le cas illustré à la figure 5.12. Avec les conditions initiales  $(0.1, 0.6, 0.2053)$ , et les objectifs  $(0.5, 0.5)$ , la stabilisation échoue. Néanmoins, si on prend des concentrations-objectifs de  $(0.2, 0.5)$  et qu'on change les objectifs à  $(0.5, 0.5)$

après un petit temps ( $t = 10$  par exemple), on obtient la stabilisation voulue. C'est ce qui est illustré à la figure 5.15.

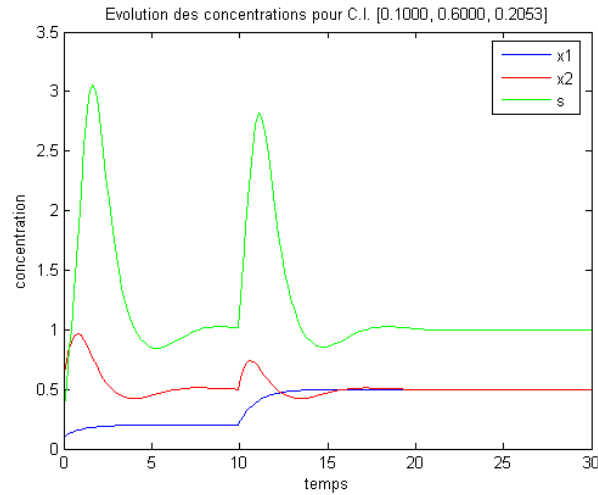


FIGURE 5.15 – Stabilisation après changement de concentrations-objectifs

On en conclut que pour les concentrations initiales telles que  $s > \hat{s}$ , on peut arriver aux concentrations-objectifs souhaitées, en passant au besoin par des objectifs temporaires qui remplissent les conditions décrites au point 5.2.1.

Ce chapitre a donc confirmé l'échec de toute stabilisation dans le cas à une entrée, et exprimé dans le cas à deux entrées des conditions sur les concentrations initiales et concentrations-objectifs qui permettent d'assurer la stabilisation à l'équilibre d'intérêt. Ces conditions ont été par la suite amoindries par la possibilité de changement de concentrations-objectifs.

# Conclusion et perspectives

L'objet de ce travail était d'appliquer la possibilité de linéarisation exacte par feedback d'état au cas du chemostat, dans le but d'assurer au sein de celui-ci la coexistence de deux espèces en compétition. Cette tentative s'est avérée être une réussite partielle, pour deux raisons. D'une part, seul le cas où deux entrées sont considérées s'est révélé concluant et, d'autre part, la coexistence ne peut être assurée que par la présence de conditions sur les concentrations initiales et objectifs. Nous allons à présent résumer les axes majeurs de ce travail et les résultats obtenus.

Dans notre premier chapitre, nous avons introduit le chemostat, réacteur biologique, ainsi que la problématique d'intérêt, la coexistence d'espèces en compétition indirecte pour un même substrat. Nous avons également présenté le modèle considéré et décrit les variables et paramètres en présence. Le principe d'exclusion compétitive, qui motive notre travail, y a aussi été énoncé et illustré.

Le second chapitre constituait la partie théorique de notre travail. Nous y avons développé la théorie de linéarisation exacte par feedback d'état. Le concept de degré relatif et le théorème de Frobenius nous ont permis de construire un changement de coordonnées et un feedback non-linéaire locaux. Dans le cas où le degré relatif est plein, nous avons montré que ce feedback linéarise exactement le système exprimé dans les nouvelles coordonnées en vue de le stabiliser à un équilibre d'intérêt. Comme le degré relatif dépend également de la fonction de sortie considérée, la question du choix de cette fonction a également été discutée. Nous avons aussi abordé le cas où aucune fonction ne permet d'avoir un degré relatif plein. Cette théorie ayant été développée pour un système à une entrée et une sortie, nous l'avons généralisée au cas à deux entrées et deux sorties.

La partie applicative fut mise en œuvre dans les troisième et quatrième chapitres, traitant respectivement des cas à une et deux entrées.

Dans le cas à une entrée -le taux de dilution- l'impossibilité d'obtenir un degré plein a été démontrée et une linéarisation partielle a été effectuée. Après analyse de la partie non-linéaire du système, la stabilisation n'a pu être assurée.

En ce qui concerne le cas à deux entrées -le taux de dilution et la concentration de substrat d'entrée- la linéarisation exacte a été effectuée avec succès.

Le dernier chapitre analyse et illustre les résultats précédemment obtenus, à l'aide de simulations numériques. Dans sa première section, nous avons illustré que la stabilisation échoue dans le cas à une entrée, pour toutes conditions initiales considérées. Dans la seconde section, nous avons exposé les succès et échecs de stabilisation dans le cas à deux entrées, et mis en avant des conditions que doivent respecter les concentrations initiales et les concentrations-objectifs pour assurer la stabilisation. Nous avons également évoqué le choix de la matrice de gain et son influence sur la stabilisation. Dans le dernier point, nous avons exprimé la possibilité de changer les objectifs en cours de stabilisation, ce qui permet d'accroître de façon significative l'ensemble des conditions initiales et des objectifs qui permettent d'obtenir la stabilisation.

La théorie de linéarisation appliquée au modèle de chemostat à deux entrées et deux sorties nous permet par conséquent d'assurer la coexistence des deux espèces, et cela pour un large éventail de concentrations initiales et objectifs. Ce travail répond donc aux attentes initialement formulées.

Cependant, certains points devraient être complétés et/ou développés. Il nous semble qu'une formulation exacte des critères que doivent respecter conditions initiales et concentrations-objectifs de base serait la première amélioration à apporter. Une analyse plus poussée du système obtenu et un test de robustesse approfondi de la méthode appliquée viennent ensuite. Troisièmement, bien que nous nous soyons penchés sur le taux de dilution comme entrée unique, on pourrait envisager la question de la linéarisation exacte en considérant uniquement la concentration de substrat d'entrée comme contrôle. Finalement, notre analyse a porté sur la problématique de coexistence de deux espèces en compétition pour un substrat, mais qu'en serait-il pour le cas de  $n$  espèces en compétition pour  $m$  substrats ? Nous laissons toutes ces questions et améliorations potentielles en perspective pour d'éventuelles recherches futures.

# Annexes

## A Vérification des hypothèses de linéarisation exacte dans le cas à une entrée

### A.1 Calcul de la matrice $G(x)$

$$G(x) = \begin{pmatrix} g(x) & \text{ad}_F g(x) & \text{ad}_F^2 g(x) \end{pmatrix}.$$

Calculons tout d'abord  $\text{ad}_F g(x)$  et  $\text{ad}_F^2 g(x)$ .

$$\text{ad}_F g(x) = [F, g](x) = \frac{\partial g}{\partial x} F(x) - \frac{\partial F}{\partial x} g(x).$$

$$\frac{\partial g}{\partial x}(x) = \begin{pmatrix} \frac{\partial g_1}{\partial s} & \frac{\partial g_2}{\partial s} & \frac{\partial g_3}{\partial s} \\ \frac{\partial g_1}{\partial x_1} & \frac{\partial g_2}{\partial x_1} & \frac{\partial g_3}{\partial x_1} \\ \frac{\partial g_1}{\partial x_2} & \frac{\partial g_2}{\partial x_2} & \frac{\partial g_3}{\partial x_2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} = -\mathbb{I}_{3 \times 3}.$$

$$\frac{\partial F}{\partial x}(x) = \begin{pmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial s} & \frac{\partial F_2}{\partial s} & \frac{\partial F_3}{\partial s} \\ \frac{\partial F_1}{\partial x_1} & \frac{\partial F_2}{\partial x_1} & \frac{\partial F_3}{\partial x_1} \\ \frac{\partial F_1}{\partial x_2} & \frac{\partial F_2}{\partial x_2} & \frac{\partial F_3}{\partial x_2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -x_1 f_1' - x_2 f_2' & -f_1 & -f_2 \\ x_1 f_1' & f_1 & 0 \\ x_2 f_2' & 0 & f_2 \end{pmatrix}.$$

$$\frac{\partial g}{\partial x} F(x) - \frac{\partial F}{\partial x} g(x) = \begin{pmatrix} (1-s)(x_1 f_1' + x_2 f_2') \\ (s-1)x_1 f_1' \\ (s-1)x_2 f_2' \end{pmatrix}. \quad (1)$$

$$\text{ad}_F^2 g(x) = [F, [F, g]](x) = \frac{\partial [F, g]}{\partial x} F(x) - \frac{\partial F}{\partial x} [F, g](x).$$

$$\frac{\partial [F, g]}{\partial x}(x) = \begin{pmatrix} -(x_1 f_1' + x_2 f_2') + (1-s)(x_1 f_1'' + x_2 f_2'') & (1-s)f_1' & (1-s)f_2' \\ x_1 f_1' + (s-1)x_1 f_1'' & (s-1)f_1' & 0 \\ x_2 f_2' + (s-1)x_2 f_2'' & 0 & (s-1)f_2' \end{pmatrix}.$$

$$\begin{aligned} \left[ \frac{\partial [F, g]}{\partial x} F(x) \right]_1 &= (-(x_1 f_1' + x_2 f_2') + (1-s)(x_1 f_1'' + x_2 f_2'')) (-x_1 f_1 - x_2 f_2) \\ &\quad + (1-s)x_1 f_1 f_1' + (1-s)x_2 f_2 f_2' \\ &= (x_1 f_1 + x_2 f_2) [x_1 (f_1' + (s-1)f_1'') + x_2 (f_2' + (s-1)f_2'')] \\ &\quad + (1-s)(x_1 f_1 f_1' + x_2 f_2 f_2'). \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\left[\frac{\partial[F, g]}{\partial x}F(x)\right]_2 &= (x_1f_1' + (s-1)x_1f_1'')(-x_1f_1 - x_2f_2) + (s-1)x_1f_1f_1' \\ &= x_1(-[x_1f_1 + x_2f_2][f_1' + (s-1)f_1''] + (s-1)f_1f_1').\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\left[\frac{\partial[F, g]}{\partial x}F(x)\right]_3 &= (x_2f_2' + (s-1)x_2f_2'')(-x_1f_1 - x_2f_2) + (s-1)x_2f_2f_2' \\ &= x_2(-[x_1f_1 + x_2f_2][f_2' + (s-1)f_2''] + (s-1)f_2f_2').\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\left[\frac{\partial F}{\partial x}[F, g](x)\right]_1 &= (-x_1f_1' - x_2f_2')(1-s)(x_1f_1' + x_2f_2') \\ &\quad - (s-1)x_1f_1f_1' - (s-1)x_2f_2f_2' \\ &= (s-1)\left((x_1f_1' + x_2f_2')^2 - x_1f_1f_1' - x_2f_2f_2'\right).\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\left[\frac{\partial F}{\partial x}[F, g](x)\right]_2 &= (1-s)(x_1f_1' + x_2f_2')x_1f_1' + (s-1)x_1f_1f_1' \\ &= (1-s)x_1f_1'(x_1f_1' + x_2f_2' - f_1).\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\left[\frac{\partial F}{\partial x}[F, g](x)\right]_3 &= (1-s)(x_1f_1' + x_2f_2')x_2f_2' + (s-1)x_2f_2f_2' \\ &= (1-s)x_2f_2'(x_1f_1' + x_2f_2' - f_2).\end{aligned}$$

Nous obtenons donc

$$\begin{aligned}\left[\frac{\partial[F, g]}{\partial x}F(x) - \frac{\partial F}{\partial x}[F, g](x)\right]_1 &= (x_1f_1 + x_2f_2)[x_1(f_1' + (s-1)f_1'') \\ &\quad + x_2(f_2' + (s-1)f_2'')] + (1-s)(x_1f_1f_1' + x_2f_2f_2') \\ &\quad - (s-1)\left((x_1f_1' + x_2f_2')^2 - x_1f_1f_1' - x_2f_2f_2'\right) \\ &= (x_1f_1 + x_2f_2)[x_1(f_1' + (s-1)f_1'') \\ &\quad + x_2(f_2' + (s-1)f_2'')] + (1-s)(x_1f_1' + x_2f_2')^2,\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\left[\frac{\partial[F, g]}{\partial x}F(x) - \frac{\partial F}{\partial x}[F, g](x)\right]_2 &= x_1(-[x_1f_1 + x_2f_2][f_1' + (s-1)f_1''] + (s-1)f_1f_1') \\ &\quad - (1-s)x_1f_1'(x_1f_1' + x_2f_2' - f_1) \\ &= x_1[-(x_1f_1 + x_2f_2)(f_1' + (s-1)f_1'') \\ &\quad + (s-1)f_1'(x_1f_1' + x_2f_2')], \text{ et}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\left[\frac{\partial[F, g]}{\partial x}F(x) - \frac{\partial F}{\partial x}[F, g](x)\right]_3 &= x_2[-(x_1f_1 + x_2f_2)(f_2' + (s-1)f_2'') \\ &\quad + (s-1)f_2'(x_1f_1' + x_2f_2')].\end{aligned}$$



Finalement, nous obtenons

$$G(x) = \begin{pmatrix} 1-s & (1-s)(x_1f'_1 + x_2f'_2) \\ -x_1 & (s-1)x_1f'_1 \\ -x_2 & (s-1)x_2f'_2 \\ (x_1f_1 + x_2f_2) [x_1(f'_1 + (s-1)f''_1) + x_2(f'_2 + (s-1)f''_2)] + (1-s)(x_1f'_1 + x_2f'_2)^2 \\ x_1[-(x_1f_1 + x_2f_2)(f'_1 + (s-1)f''_1) + (s-1)f'_1(x_1f'_1 + x_2f'_2)] \\ x_2[-(x_1f_1 + x_2f_2)(f'_2 + (s-1)f''_2) + (s-1)f'_2(x_1f'_1 + x_2f'_2)] \end{pmatrix}.$$

## A.2 Développement du lemme 3.1

Pour nous assurer que le rang de  $G(x)$  soit plein, nous allons forcer la non-nullité de son déterminant. Pour calculer ce dernier, nous allons diviser la tâche en 4 parties.

- (1) Calcul de  $G_{1,1}(x) \cdot \det(G_{2,3;2,3}(x))$
- (2) Calcul de  $-G_{2,1}(x) \cdot \det(G_{1,3;2,3}(x))$
- (3) Calcul de  $G_{3,1}(x) \cdot \det(G_{1,2;2,3}(x))$
- (4) Calcul de la somme des trois éléments précédents.

$$\begin{aligned} (1) &= (1-s)((s-1)x_1f'_1 \cdot x_2[-(x_1f_1 + x_2f_2)(f'_2 + (s-1)f''_2) \\ &\quad + (s-1)f'_2(x_1f'_1 + x_2f'_2)] - (s-1)x_2f'_2 \cdot x_1[-(x_1f_1 + x_2f_2) \\ &\quad (f'_1 + (s-1)f''_1) + (s-1)f'_1(x_1f'_1 + x_2f'_2)]) \\ &= (s-1)^3x_1x_2(x_1f_1 + x_2f_2)(f'_1f'_2 - f'_2f''_1). \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (2) &= -(-x_1)((1-s)(x_1f'_1 + x_2f'_2) \cdot x_2[-(x_1f_1 + x_2f_2)(f'_2 + (s-1)f''_2) \\ &\quad + (s-1)f'_2(x_1f'_1 + x_2f'_2)] - (s-1)x_2f'_2 \cdot (x_1f_1 + x_2f_2) \\ &\quad [x_1(f'_1 + (s-1)f''_1) + x_2(f'_2 + (s-1)f''_2)] + (1-s)(x_1f'_1 + x_2f'_2)^2) \\ &= (1-s)x_1x_2(x_1f_1 + x_2f_2)(-(x_1f'_1 + x_2f'_2)[f'_2 + (s-1)f''_2] \\ &\quad + f'_2[x_1(f'_1 + (s-1)f''_1) + x_2(f'_2 + (s-1)f''_2)]) \\ &= (1-s)^2x_1^2x_2(x_1f_1 + x_2f_2)(f'_1f'_2 - f'_2f''_1). \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (3) &= (-x_2)((1-s)(x_1f'_1 + x_2f'_2) \cdot x_1[-(x_1f_1 + x_2f_2)(f'_1 + (s-1)f''_1) \\ &\quad + (s-1)f'_1(x_1f'_1 + x_2f'_2)] - (s-1)x_1f'_1 \cdot (x_1f_1 + x_2f_2) \\ &\quad [x_1(f'_1 + (s-1)f''_1) + x_2(f'_2 + (s-1)f''_2)] + (1-s)(x_1f'_1 + x_2f'_2)^2) \\ &= (1-s)^2x_1x_2^2(x_1f_1 + x_2f_2)(f'_1f'_2 - f'_2f''_1). \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (4) &= (s-1)^3x_1x_2(x_1f_1 + x_2f_2)(f'_1f'_2 - f'_2f''_1) \\ &\quad + (1-s)^2x_1^2x_2(x_1f_1 + x_2f_2)(f'_1f'_2 - f'_2f''_1) \\ &\quad + (1-s)^2x_1^2x_2(x_1f_1 + x_2f_2)(f'_1f'_2 - f'_2f''_1) \\ &= (s-1)^2x_1x_2(x_1f_1 + x_2f_2)(f'_1f'_2 - f'_2f''_1)(s-1+x_1+x_2). \end{aligned}$$

### A.3 Développement du lemme 3.2

Pour cela, nous devons trouver un entier  $d$  tel que

$$\dim(\Delta(x)) = d$$

pour tout  $x$  dans le voisinage du point initial.

Trouvons l'ensemble de points  $x \in \mathbb{R}_+^3$  tels que  $\dim(\Delta(x)) = 2$ , c'est-à-dire que  $g(x)$  et  $\text{ad}_F g(x)$  sont linéairement indépendants. Pour ce faire, nous allons exclure les points qui rendent  $g(x)$  et  $\text{ad}_F g(x)$  linéairement dépendants, c'est-à-dire qu'il existe  $\gamma \in \mathbb{R}$  tel que

$$g(x) = \gamma \text{ad}_F g \Leftrightarrow \begin{cases} 1 - s &= \gamma(1 - s)(x_1 f'_1 + x_2 f'_2) \\ -x_1 &= \gamma(s - 1)x_1 f'_1 \\ -x_2 &= \gamma(s - 1)x_2 f'_2. \end{cases}$$

Si  $s = 1$  ou si  $x_1 = x_2 = 0$ , alors  $\text{ad}_F g = 0$  et on a donc une dépendance linéaire. Donc,  $\{(1, \alpha, \beta) \text{ où } \alpha, \beta \in \mathbb{R}_+\}$  et  $\{(\alpha, 0, 0) \text{ où } \alpha \in \mathbb{R}_+\}$  sont à éliminer de notre ensemble.

Si  $s \neq 1$ ,  $x_2 \neq 0$ , mais que  $x_1 = 0$ , le système devient

$$\begin{cases} 1 &= \gamma x_2 f'_2 \\ 0 &= 0 \\ 1 &= \gamma(1 - s)f'_2 \end{cases}$$

Et donc, le système a une solution si  $1 - s = x_2$ , c'est-à-dire  $s + x_2 = 1$ . Le triplet  $\{(\alpha, 0, 1 - \alpha) \text{ où } \alpha \in \mathbb{R}_+\}$  est donc aussi à éliminer.

Par un raisonnement analogue, le triplet  $\{(\alpha, 1 - \alpha, 0) \text{ où } \alpha \in \mathbb{R}_+\}$  est à éliminer également.

Dans les autres cas, le système devient

$$\begin{cases} 1 &= \gamma(x_1 f'_1 + x_2 f'_2) \\ 1 &= \gamma(1 - s)f'_1 \\ 1 &= \gamma(1 - s)f'_2. \end{cases}$$

Pour que le système soit résoluble, il faut que

$$\frac{1}{x_1 f'_1 + x_2 f'_2} = \frac{1}{(1 - s)f'_1} = \frac{1}{(1 - s)f'_2},$$

c'est-à-dire que  $f'_1(s) = f'_2(s)$  et que  $(1 - s) = x_1 + x_2$ , c'est-à-dire que  $s + x_1 + x_2 = 1$ .

En regroupant nos conditions, et comme  $s, x_1, x_2 \geq 0$  par définition, nous ne considérerons ci-après que les  $x = (s, x_1, x_2) \in \mathbb{R}_+^3$  qui vérifient

- $s \neq 1$ ;
- $x_1 + x_2 \neq 0$ ;
- $s + x_1 + x_2 \neq 1$  ou  $f'_1(s) \neq f'_2(s)$ .

## A.4 Développement du lemme 3.3

Pour cela, nous allons montrer que le rang de la matrice

$$\begin{pmatrix} g & \text{ad}_F g & [g, \text{ad}_F g] \end{pmatrix}$$

n'est pas plein.

Il nous faut tout d'abord calculer  $[g, \text{ad}_F g]$ .

$$\begin{aligned} [g, \text{ad}_F g] &= \frac{\partial \text{ad}_F g}{\partial x} g(x) - \frac{\partial g}{\partial x} \text{ad}_F g(x). \\ \frac{\partial \text{ad}_F g}{\partial x}(x) &= \begin{pmatrix} -(x_1 f'_1 + x_2 f'_2) + (1-s)(x_1 f''_1 + x_2 f''_2) & (1-s)f'_1 & (1-s)f'_2 \\ x_1 f'_1 + (s-1)x_1 f''_1 & (s-1)f'_1 & 0 \\ x_2 f'_2 + (s-1)x_2 f''_2 & 0 & (s-1)f'_2 \end{pmatrix}. \\ \frac{\partial \text{ad}_F g}{\partial x} g(x) &= \begin{pmatrix} (s-1)((x_1 f'_1 + x_2 f'_2) + (s-1)(x_1 f''_1 + x_2 f''_2) + x_1 f'_1 + x_2 f'_2) \\ (1-s)(x_1 f'_1 - (1-s)x_1 f''_1 + x_1 f'_1) \\ (1-s)(x_2 f'_2 - (1-s)x_2 f''_2 + x_2 f'_2) \end{pmatrix}. \\ \frac{\partial g}{\partial x} \text{ad}_F g(x) &= -\text{ad}_F g(x) = \begin{pmatrix} (s-1)(x_1 f'_1 + x_2 f'_2) \\ (1-s)x_1 f'_1 \\ (1-s)x_2 f'_2 \end{pmatrix}. \\ \frac{\partial \text{ad}_F g}{\partial x} g(x) - \frac{\partial g}{\partial x} \text{ad}_F g(x) &= (s-1) \begin{pmatrix} (s-1)(x_1 f''_1 + x_2 f''_2) + x_1 f'_1 + x_2 f'_2 \\ -(s-1)x_1 f''_1 - x_1 f'_1 \\ -(s-1)x_2 f''_2 - x_2 f'_2 \end{pmatrix}. \\ (g \quad \text{ad}_F g \quad [g, \text{ad}_F g]) &= \begin{pmatrix} 1-s & (1-s)(x_1 f'_1 + x_2 f'_2) & (s-1)((s-1)(x_1 f''_1 + x_2 f''_2) + x_1 f'_1 + x_2 f'_2) \\ -x_1 & (s-1)x_1 f'_1 & (s-1)(-(s-1)x_1 f''_1 - x_1 f'_1) \\ -x_2 & (s-1)x_2 f'_2 & (s-1)(-(s-1)x_2 f''_2 - x_2 f'_2) \end{pmatrix}. \end{aligned} \tag{2}$$

Pour montrer que le rang de cette matrice n'est pas plein, nous allons montrer que son déterminant est nul.

$$\begin{aligned} \det[(2)] &= (1-s) [(s-1)x_1 f'_1 \cdot (-(s-1)^2 x_2 f''_2 - (s-1)x_2 f'_2) \\ &\quad - (s-1)x_2 f'_2 \cdot (-(s-1)^2 x_1 f''_1 - (s-1)x_1 f'_1)] \\ &\quad - (-x_1) [(1-s)(x_1 f'_1 + x_2 f'_2) \cdot (-(s-1)^2 x_2 f''_2 - (s-1)x_2 f'_2) \\ &\quad - (s-1)x_2 f'_2 \cdot ((s-1)^2(x_1 f''_1 + x_2 f''_2) + (s-1)(x_1 f'_1 + x_2 f'_2))] \\ &\quad + (-x_2) [(1-s)(x_1 f'_1 + x_2 f'_2) \cdot (-(s-1)^2 x_1 f''_1 - (s-1)x_1 f'_1) \\ &\quad - (s-1)x_1 f'_1 \cdot ((s-1)^2(x_1 f''_1 + x_2 f''_2) + (s-1)(x_1 f'_1 + x_2 f'_2))] \\ &= (s-1)^4 x_1 x_2 [f'_1 f''_2 - f'_2 f''_1] \\ &\quad + (s-1)^3 x_1 x_2 [(x_1 f'_1 + x_2 f'_2) f''_2 - f'_2 (x_1 f''_1 + x_2 f''_2)] \\ &\quad - (s-1)^3 x_1 x_2 [(x_1 f'_1 + x_2 f'_2) f''_1 - f'_1 (x_1 f''_1 + x_2 f''_2)] \\ &= (s-1)^3 x_1 x_2 [(f'_1 f''_2 - f'_2 f''_1) ((s-1) + x_1 + x_2)] \end{aligned}$$

Pour rencontrer l'hypothèse (ii) du théorème 2.3, c'est-à-dire que la distribution  $\Delta$  soit involutive, il faut donc que

- soit  $s = 1$  ;
- soit  $x_1 = 0$  ; soit  $x_2 = 0$  ;
- soit  $f_1'(s)f_2''(s) - f_2'(s)f_1''(s) = 0$  ;
- soit  $s + x_1 + x_2 = 1$ .

# Bibliographie

- [1] M. BALLYK, E. BARANY et H. NOUSSI : Stabilization of chemostats using feedback linearization. *In Proceedings of the 46th Conference on Decision and Control*, pages 2313–2318, New Orleans, LA, USA, décembre 2007.
- [2] C. BEAUTHIER : *The LQ-Optimal Control Problem for Invariant Linear Systems*. Thèse de doctorat, Facultés Universitaires Notre-Dame de la Paix, Namur, mai 2011. <http://hdl.handle.net/2078.2/76840>.
- [3] G. J. BUTLER et G. S. K. WOLKOWICZ : A Mathematical Model of the Chemostat with a General Class of Functions Describing Nutrient Uptake. *SIAM Journal on Applied Mathematics*, pages 138–151, 1985.
- [4] P. DE LEENHEER : The Chemostat. Lectures notes. Topics in mathematical and Systems Biology, Graduate School in Systems, Optimization, Control and Networks, Université Catholique de Louvain, Louvain-La-Neuve, octobre 2011. <http://sites.uclouvain.be/socn/pmwiki/uploads/Courses/deleenheer2-v2>.
- [5] P. DE LEENHEER et H. SMITH : Feedback control for chemostat models. *Mathematical Biology, Springer-Verlag*, pages 48–70, 2002.
- [6] M.-T. HO, Y.-W. TU et H.-S. LIN : Controlling a Ball and Wheel System Using Full-State-Feedback Linearization. *IEEE Control Systems Magazine*, pages 93–101, octobre 2009.
- [7] A. ISIDORI : *Nonlinear Control Systems, An Introduction*. Springer-Verlag, Berlin, 2<sup>e</sup> édition, 1985.
- [8] J.-P. SCHNEIDERS : Analyse III (1<sup>re</sup> partie). Notes du cours de la troisième année de bachelier en sciences mathématiques. Université de Liège, 2007.
- [9] H. SMITH et P. WALTMAN : *The Theory of the Chemostat. Dynamics for Microbial Competition*. Cambridge University Press, Cambridge, 1995.
- [10] J. WINKIN : Systèmes, Contrôle et Optimisation. Notes de cours à l'attention des étudiants. Facultés Universitaires Notre-Dame de la Paix, Namur, 2009.