Institutional Repository - Research Portal
Dépôt Institutionnel - Portail de la Recherche

researchportal.unamur.be

University of Namur

THESIS / THÈSE

DOCTEUR EN SCIENCES

Enseignement à l’Université, perspective institutionnelle et contrat didactique. Le cas de la dualité en algèbre linéaire

De Vleeschouwer, Martine

Award date:
2010

Awarding institution:
Universite de Namur

Link to publication

General rights
Copyright and moral rights for the publications made accessible in the public portal are retained by the authors and/or other copyright owners and it is a condition of accessing publications that users recognise and abide by the legal requirements associated with these rights.

- Users may download and print one copy of any publication from the public portal for the purpose of private study or research.
- You may not further distribute the material or use it for any profit-making activity or commercial gain
- You may freely distribute the URL identifying the publication in the public portal ?

Take down policy
If you believe that this document breaches copyright please contact us providing details, and we will remove access to the work immediately and investigate your claim.

Download date: 03. Jul. 2025

FACULTES UNIVERSITAIRES NOTRE-DAME DE LA PAIX
FACULTE DES SCIENCES
DEPARTEMENT DE MATHEMATIQUE

Enseignement à l'Université, perspective institutionnelle et contrat didactique.
Le cas de la dualité en algèbre linéaire

ANNEXES

Thèse présentée par
Martine DE VLEESCHOUWER
en vue de l'obtention du grade
de Docteur en Sciences

Composition du Jury :
Jean-Luc DORIER
Ghislaine GUEUDET (Directeur)
Valérie HENRY
Marc ROMAINVILLE
Suzanne THIRY (Promoteur)
Carl WINSLØW

Septembre 2010

© Presses universitaires de Namur & Martine De Vleeschouwer
Rempart de la Vierge, 13
B - 5000 Namur (Belgique)

Toute reproduction d'un extrait quelconque de ce livre,
hors des limites restrictives prévues par la loi,
par quelque procédé que ce soit, et notamment par photocopie ou scanner,
est strictement interdite pour tous pays.

Imprimé en Belgique

ISBN : 978-2-87037-691-1
Dépôt légal: D / 2010 / 1881 / 38

Facultés Universitaires Notre-Dame de la Paix
Faculté des Sciences
rue de Bruxelles, 61, B-5000 Namur, Belgium

TABLE DES MATIERES DES ANNEXES

Annexe 1. Description des livres et manuels analysés au Chapitre 3

Nous présentons ici brièvement les manuels que nous avons retenus en vue d'analyser la dualité comme savoir à enseigner (Chapitre 3). Rappelons que notre souci n'a pas été l'exhaustivité, mais une variété de présentations des notions de dualité. Nos choix pour les manuels retenus seront brièvement expliqués au fur et à mesure des descriptions.

1. Le polycopié de Toint

Le polycopié intitulé "*Algèbre*" (Toint 2007, 219 pages, Belgique), rédigé par Philippe Toint, professeur au département de mathématiques à l'université de Namur, est le support des notes du cours d'algèbre linéaire que suivent les étudiants inscrits en première année mathématique ou physique à l'université de Namur en Belgique (voir Annexe 4 pour un plan de ce cours). Ce manuel reprend les motivations, illustrations, définitions et théorèmes concernant les notions vues au cours théorique.

Il est complété par un recueil d'exercices reprenant des exercices répertoriés par chapitre selon les notions visées. L'avant dernier chapitre du recueil d'exercices est consacré à des exercices récapitulatifs, et le dernier chapitre reprend les tests et examens écrits des deux dernières années académiques.

Ces notes de cours s'adressent donc à des étudiants en fin de cycle du secondaire, et ne requièrent aucune notion préliminaire d'algèbre linéaire.

2. Le livre de Halmos

"*Finite-Dimensional Vector Spaces*", de Paul R. Halmos (Halmos 1974, 200 pages, Etats-Unis) est le livre dont s'est principalement et initialement inspiré Ph. Toint pour la rédaction du polycopié associé à son cours d'algèbre linéaire à l'université de Namur. La seconde édition de ce livre, datant de 1958 et rééditée en 1974, se distingue de la première (datant de 1942) principalement par le nombre d'exercices présentés. Ces derniers sont positionnés tout au long du livre, regroupés à la fin de sections de chapitres.

Dans sa préface, l'auteur annonce que le but qu'il poursuit est de traiter les transformations linéaires (sur des espaces vectoriels de dimension *finie*) par le biais de méthodes de théories plus générales, tout en essayant d'adopter une vision géométrique. Le livre ne demande pas de prérequis particulier pour qui veut s'initier à l'algèbre linéaire par son intermédiaire.

De plus, la première édition de ce livre a une composante historique : le livre d'Halmos est, avec le livre "*Survey of Modern Algebra*" de Birkhoff & Mac Lane édité en 1941, l'outil qui a permis la diffusion des idées propres à l'algèbre linéaire auprès des chercheurs et dans l'enseignement universitaire de l'époque (Dorier 1997, p.95).

Ce manuel est analysé plus en détail au chapitre 3, § 2.2.

3. Le livre de Birkhoff & Mac Lane

Le livre de G. Birkhoff et S. Mac Lane, composé de deux volumes (1er volume : Birkhoff & Mac Lane 1971, 408 pages, France), a été sélectionné pour la raison historique présentée à la section ci-avant. Cependant, pour notre analyse, nous n'avons pas considéré la première édition du livre de Birkhoff & Mac Lane dont il est fait mention ci-avant (§ 2). Nous avons privilégié la traduction de la troisième édition, datant de 1971. En effet, cette troisième édition a permis de corriger et d'améliorer le texte initial, l'esprit de l'ouvrage restant par ailleurs le même. De fait, les auteurs présentent une approche très axiomatique de l'algèbre. La notion de dualité y est tout d'abord présentée par le biais du dual d’un diagramme, puis du dual d'un module, le dual d'un espace vectoriel en étant alors un produit dérivé.

La traduction française de la troisième édition se présente sous deux volumes, le premier reprenant les chapitres 1 à 9 dans un tome intitulé "Structures fondamentales". Le deuxième tome, "Les grands théorèmes", reprend la traduction des chapitres 10 à 16 de l'ouvrage original "Algebra", à laquelle les auteurs ont ajouté un chapitre supplémentaire sur la "Théorie de Galois". Lors de notre analyse, nous nous sommes concentrée sur le premier volume.

4. Le livre de Grifone

Nous avons également considéré "*Algèbre Linéaire - 2^e^ édition*", de Joseph Grifone (Grifone 2002, 416 pages, France). Partant du constat selon lequel les programmes actuels de l'enseignement dans le secondaire ne comportent presque plus d'algèbre linéaire, Grifone se sert de son expérience de plusieurs années d'enseignement de l'algèbre linéaire en premier cycle d'université pour essayer de combler cette lacune.

Les différentes notions sont présentées de façon à mettre en évidence leur raison d'être et leur utilité. Une attention particulière est portée sur la signification géométrique. Chaque notion et chaque énoncé sont illustrés par des exemples (présentés dans différents cadres) et des exercices résolus. Chaque chapitre se termine par une série d'énoncés d'exercices se rapportant à l'entièreté du chapitre (toutes sections confondues), suivie ensuite par une série d'indications se rapportant à ces énoncés.

5. Le livre d'Escofier

"*Toute l'algèbre de la licence : Cours et exercices corrigés*", de Jean-Pierre Escofier (Escofier 2006, 674 pages, France) est, dans sa seconde édition[1], un ouvrage récent. Il reprend l'ensemble des notions d'algèbre abordées dans les trois premières années d'université d'un étudiant de mathématique. L'auteur, constatant que les notions élémentaires en mathématiques ne font généralement pas l'objet d'attentions particulières, a écrit ce livre à l'intention d'étudiants « à l’aise et moins à l’aise en mathématiques », en espérant transmettre à ces derniers le goût pour les mathématiques.

Les notions présentées sont accompagnées de récits et d'anecdotes historiques, ainsi que d'applications récentes. Chaque chapitre se termine par des énoncés d'exercices (statuts variés et cadres différents), suivis ensuite par la résolution détaillée de ceux-ci.

Ce manuel est analysé plus en détail au chapitre 3, § 2.2.

6. Le livre de Pham & Dillinger

Le livre de F. Pham et de H. Dillinger (Pham & Dillinger 1996, 347 pages, France) a été sélectionné pour l'approche différente qu'il présente par rapport aux autres ouvrages déjà cités. Dans leur "Avertissement au lecteur", les auteurs annoncent que leur but n'est pas de transmettre des techniques mais bien des idées, des concepts qui pourront être utiles pour résoudre d'autres problèmes. Ils indiquent également que, bien que présenté de manière originale, le contenu du livre correspond au programme traditionnel d'un cours d'algèbre de

[1] La première édition date de 2002.

première année d'université, et que le slogan "*dualité entre géométrie et calcul*" résume leur principale préoccupation.

Ce manuel est analysé plus en détail au chapitre 3, § 2.2.

7. Le livre de Lax

Le livre de Peter D. Lax a pour titre "*Linear Algebra and its applications*". Sa deuxième édition est très récente (2007, 376 pages, Etats-Unis).

Dans sa préface, l'auteur précise que cet ouvrage constitue un support confortable pour un cours complémentaire[2] sur l'algèbre linéaire, supposant donc que le lecteur a déjà eu l'occasion de se confronter aux premières notions d'algèbre linéaire.

L'intérêt de cet ouvrage réside non seulement dans la présentation qui y est faite de la dualité, mais également dans les applications de celle-ci qui y sont présentées.

8. Le livre de Lang

On pourrait affirmer que Serge Lang a écrit une trilogie sur l'algèbre linéaire, si l'on considère " *Introduction to Linear Algebra* " (1986), " *Linear Algebra* " (1987), " *Algebra* " (2002). Les deux premiers livres cités sont du niveau des premières années d'université, alors que le troisième livre, " *Algebra* ", est à destination de personnes ayant déjà été confrontées à l'algèbre ou ayant une maturité mathématique appropriée. Ce dernier ouvrage est du niveau *graduate*.

L'auteur n'introduit pas la dualité dans "*Introduction to Linear Algebra*" (1986), il n'y fait mention que de la transposée d'une matrice, sans aucun lien avec la dualité. C'est dans "*Linear Algebra*" (1987) que la dualité est présentée en algèbre linéaire. Dans le troisième ouvrage de Lang considéré, "*Algebra*" (2002), la dualité y est aussi présentée dans un cadre plus vaste (groupe dual, module dual, …) étant donné le caractère spécifique de cet ouvrage.

Etant donné le sujet de notre recherche, nous nous sommes concentrés sur le deuxième ouvrage de Lang (1987, 296 pages, Etats-Unis) présenté ici.

9. Le livre de Merlin

Xavier Merlin, dans son livre "*Methodix - Algèbre : 250 méthodes, 250 exercices corrigés*" (Merlin 1995, 400 pages, France) présente une liste de méthodes, qui peut être interprétée comme un cours "orienté exercices". Il consacre un chapitre entier à la dualité. La démarche est originale, et l'auteur précise tout de même qu'il ne suffit pas de connaître une méthode, encore faut-il savoir quand elle s'applique ou quand elle est inopérante...

Ce manuel est analysé plus en détail au chapitre 3, § 2.2.

10. Le livre d'Etienne

Le livre de Damien Etienne, intitulé "*Exercices corrigés d'algèbre linéaire - tome 2*" (Etienne 2006, 359 pages, Belgique) est également un ouvrage récent. L'auteur a tiré profit de son expérience de plusieurs années d'enseignement de l'algèbre linéaire en licences scientifiques (France) pour la rédaction de cet ouvrage. Le tome 2 est bien évidemment précédé d'un premier tome, mais l'auteur a choisi de placer le secteur dualité dans le deuxième tome. La plupart des chapitres de ces deux ouvrages sont construits de la même manière : une première

[2] « …a second course on the subject » [Lax, 2007, p. xi]

partie reprenant quelques rappels de cours, suivie par une section reprenant des énoncés d’exercices, dont la correction est présentée dans la troisième partie du chapitre.

Comme le titre du livre le laisse percevoir, cet ouvrage est centré essentiellement sur les exercices.

11. Le livre de Uhlig

Ce livre (Uhlig 2002, 503 pages, Etats-Unis) est destiné à des étudiants d’un niveau débutant ou intermédiaire, dans un parcours scientifique. L’ouvrage a pour but d’aider les étudiants à développer une compréhension intuitive de l’algèbre linéaire et de leur présenter des concepts qui sont à l’origine de ce domaine des mathématiques.

Ce livre adopte une présentation non formelle de la dualité. On n’y parle d’ailleurs pas d’espace vectoriel dual. L’ouvrage d’Uhlig met l’accent sur des concepts d’algèbre linéaire et de théorie des matrices. Ainsi par exemple la notion de *rang* est introduite par la définition du rang d’une matrice A d’un système d’équations linéaires ($Ax = b$) comme étant le nombre de pivots dans la forme échelonnée par ligne[3] de la matrice A. Par conséquent, ce manuel ne sera pas analysé de la même manière que les autres ouvrages présentés ci-dessus ; mais il nous semblait intéressant d’en parler étant donnée l’omniprésence de l’approche naturelle[4] de la dualité dans l’ouvrage.

L’ouvrage a à l’esprit les applications de l’algèbre linéaire. C’est pourquoi la plupart des chapitres sont divisés en trois sections : la première reprenant le contenu d’un cours, suivi de problèmes ; la deuxième présentant des apports théoriques et mathématiques ; et la dernière partie présentant des applications d’algèbre linéaire.

Ce manuel est analysé plus en détail au chapitre 3, § 2.2.

[3] Les éléments a_{ij} d’une matrice (p,q) échelonnée par ligne sont tels que $a_{ij} = 0$ pour tout $i > j$, où $i = 1,\dots, p$ et $j = 1,\dots, q$.
[4] Voir Chapitre 2, § 4.6.

Annexe 2. Analyse synthétique et comparative de la dualité dans les manuels analysés

Cette annexe vient détailler ce qui est présenté en introduction au chapitre 3. Nous avons analysé, dans un premier temps, la manière dont le secteur dualité s'insère dans l'organisation des différents manuels considérés. Ensuite, nous avons regardé les parties de manuels où intervenait la dualité. Nous présentons ici une synthèse des résultats observés.

1. Section consacrée explicitement à la dualité

Le fait que la dualité soit présentée dans un *chapitre à part entière* dans un manuel pourrait créer ou accentuer l'idée d'un secteur isolé dans le domaine de l'algèbre linéaire. De plus, la *position relative* de la dualité par rapport à l'étendue du manuel peut nous renseigner sur la quantité de prérequis nécessaires à cette matière ou sur le degré de difficulté atrribué à cette matière par l'auteur. Enfin, le nombre de pages consacrées à la présentation de la dualité, ainsi que ce que ces pages représentent par rapport à l'entièreté du livre peut nous renseigner sur l'étendue de la description du secteur dans le manuel.

Nous nous posons donc les questions suivantes :

Dans les divers manuels analysés, le secteur dualité occupe-t-il un chapitre à part entière? Quelle est la position relative de l'apparition de la dualité dans le manuel? Quelle place relative occupe la section (chapitre) consacrée à la dualité à l'intérieur du manuel?

Remarquons que, vu la spécificité de l'ouvrage de Uhlig (2002), ce manuel ne sera pas analysé dans cette section. En effet, dans ce manuel, la dualité n'est pas présentée en tant qu'objet. Le concept est omniprésent dans les propos de l'auteur, mais il n'est pas formalisé : l'auteur ne parle pas par exemple d'espace vectoriel dual ou de base duale…

Dans le tableau ci-dessous, la première colonne reprend les noms des auteurs des manuels analysés. Le lecteur trouvera ensuite en deuxième colonne la réponse à la première des trois questions posées ci-dessus; dans les 3 colonnes suivantes la réponse à la deuxième de ces questions; et enfin les deux dernières colonnes permettent de répondre à la troisième question posée :

	Chapitre à part entière	***Nombre de pages (total) du manuel***	***Apparition du secteur dualité :***	***Position relative de la dualité***	***Etalé sur ... pages***	***Qui représentent, par rapport à l'entièreté du livre:***
Toint	Non ($\in$ chap.2 Applications)	219	Page 43	19.6%	9	4.1%
Halmos	Non ($\in$ chap.1 Spaces)	200	Page 20	10%	11+8	9,5%
Birkhoff & Mac Lane1	Non ($\in$ chap.7 Espaces vectoriels)	408	Page 36 (diagramme) Page 248 (module) Page 275 (esp.vect.)	67.4%	3+10+7	4.9%
Grifone	Non ($\in$ chap.3 Applications linéaires et	416	Page 82	19,7%	10 (ex. inclus)	2,4%

	Chapitre à part entière	*Nombre de pages (total) du manuel*	*Apparition du secteur dualité :*	*Position relative de la dualité*	*Etalé sur ... pages*	*Qui représentent, par rapport à l'entièreté du livre:*
	matrices					
Escofier	Oui	196 (première année)	Page 181	92,3%	13	6,6% (première année)
		674 (tout le livre)		26,8%		1,9% (tout le livre)
Pham & Dillinger	Non (∈ chap3 Dualité entre géométrie et calcul)	347	Page 127	36.6%	23	6.6%
Lax	Oui	376	Page 13	3.5%	6	1,6%
Lang	Non (∈ chap.5 produit scalaire et orthogonalité)	296	Page 125	42,2%	5	1,7%
Merlin	Oui	400	Page 61	15,2%	18	4,5%
Etienne	Oui	359	Page 129	35,9%	23 (ex. inclus)	6,4%

Tableau 2.I. Présentation de la section consacrée explicitement à la dualité en algèbre linéaire

Remarquons que les chiffres présentés dans la dernière colonne du Tableau 2.I ne tiennent compte que du nombre de pages de la section (ou du chapitre) consacré explicitement à la dualité. Ils ne tiennent donc pas compte du nombre de pages, présentes dans le manuel, où la dualité est utilisée, par exemple à titre d'illustration d'autres notions, ou à l'intérieur d'une démonstration, ou encore en comparaison avec une autre notion. Pour avoir une idée de l'étendue que revêt le secteur dualité sur l'entièreté du manuel, et non plus seulement dans la section (ou chapitre) qui lui est explicitement consacré(e), nous invitons le lecteur à se référer à la section suivante.

Nous pouvons déjà nous apercevoir de la grande diversité de l’importance accordée au secteur dualité dans les différents ouvrages sélectionnés. Certains auteurs y consacrent un chapitre, d’autres pas. L’apparition de la dualité peut se faire relativement tôt dans l’ouvrage, comme chez Lax ou Halmos, ou venir plus tard. De même, on peut constater qu’il n’y a pas de constante en ce qui concerne l’étalement de la partie de l’ouvrage consacrée à la dualité.

Il faut évidemment relativiser certains des chiffres présentés ci-dessus. On sait par exemple que l’ouvrage de Lax référencé ici s’adresse à des étudiants non novices en algèbre linéaire. Il est donc compréhensible que la dualité apparaisse si tôt dans l’ouvrage. Ce qui est plus surprenant, c’est la place accordée par Halmos à la dualité. Rappelons ici l’importance historique qu’à joué ce livre dans la diffusion de l’algèbre linéaire dans la communauté scientifique et l’enseignement supérieur.

2. Chapitres et sections où les thèmes de la dualité sont cités/utilisés

Le tableau suivant comporte, pour chacun des manuels analysés, deux parties: l'une consacrée aux chapitres, l'autre consacrée aux sections. Chacune de ces deux parties est composée de deux colonnes reprenant dans la première le nombre de chapitres/sections développant ou utilisant la dualité par rapport au nombre total de chapitres/sections repris(e)s dans le manuel; la seconde colonne de chaque partie reprend la part relative (en pourcentages) de ces chapitres/sections par rapport à l'entièreté du manuel.

	Chapitres		***Sections***	
Toint	3/10	30,0%	6/36	16,7%
Halmos	3/4	75,0%	23/93	24,7%
Birkhoff & Mac Lane1	5/9	55,6%	11/88	12,5%
Grifone	3/10	30,0%	5/87	5,7%
Escofier	Première année : 1/10 Tout le livre : 3/22	10,0% 13,6%	Première année : 9/79 Tout le livre : 9/198	11,4% 4,5%
Pham & Dillinger	1/5	20%	3/25	12,0%
Lax	9/18 (1/16 annexes)	50,0% (6,3%)	-	-
Lang	2/12	16,7%	2/56	3,6%
Merlin	5/18	27,8%	10/82	12,2%
Etienne	2/10	20,0%	4/17	23,5%

Tableau 2.II. Importance de la dualité dans l'ensemble d'un manuel

Le tableau ci-dessus nous montre que la dualité n'est généralement pas un secteur isolé en algèbre linéaire bien que les thèmes présentés et l'utilisation qui en est faite varient d'un auteur à l'autre. Remarquons toutefois dans le Tableau 2.II que c'est dans les livres « historiques » (Halmos ; Birkhoff & Mac Lane) que l'on retrouve la dualité dans un nombre relativement important de chapitres. On note que les livres récents font de moins en moins de place à la dualité. A l'université en France, celle-ci n'est plus abordée en première année. Ceci confirme la difficulté de ce sujet, qui peut difficilement rester présent si l'allégement des programmes au lycée nécessite la présentation en première année d'université de contenus qui relevaient jusque là du secondaire.

Annexe 3. Tables des matières et description de l'organisation mathématique globale/régionale dans les manuels analysés au chapitre 3, § 2.2.

Cette annexe se compose de deux parties :

Nous présentons dans un premier temps (§ 1) la table des matières des cinq livres présentés à la section 2.2 du chapitre 3, afin d'avoir une vue d'ensemble de ces manuels sélectionnés pour l'analyse globale, régionale et locale de la dualité en tant que savoir à enseigner. Afin d'avoir une vision d'ensemble de l'endroit d'introduction et/ou d'utilisation des thèmes liés à la dualité dans le domaine de l'algèbre linéaire, nous avons ajouté, à chacune des tables des matières, des notations entre crochets « **[ ]** ». Il s'agit des sujets et thèmes que nous avons définis pour le secteur dualité. Pour éviter toute ambiguïté avec les composantes de la table des matières elle-même, ces notations sont en <u>**caractères gras et soulignées**</u>. Des remarques ont aussi parfois été ajoutées. Elles sont également **en gras** mais ne sont quant à elles pas soulignées.

Dans un second temps (§ 2), nous décrivons plus en détail l'organisation mathématique globale/régionale qui est faite de la dualité dans chacun de ces cinq manuels. Cela permettra au lecteur curieux de mieux comprendre les articulations annoncées dans les tables des matières reprises à la première section de cette annexe.

1. Présentation des tables de matières

1.1. Table des matières du livre d'Halmos (1974) : *Finite-Dimensional Vector Spaces*

21. Quotient spaces [**dual**] [**annulateurs**] **: thèmes présents dans les énoncés d'exercices**
22. Dimension of a quotient space
23. Bilinear forms [**forme bilinéaire**]
24. Tensor products [**dual**] [**forme bilinéaire**]
25. Product bases [**dual**] [**forme bilinéaire**]
26. Permutations
27. Cycles
28. Parity
29. Multilinear forms
30. Alternating forms
31. Alternating forms of maximal degree

Chapitre 2. TRANSFORMATIONS

32. Linear transformations
33. Transformations as vectors [**dual**] **: thème présent dans l'énoncé d'un exercice**
34. Products
35. Polynomials
36. Inverses
37. Matrices
38. Matrices of transformations
39. Invariance
40. Reducibility
41. Projections
42. Combinations of projections
43. Projections and invariance
44. Adjoints [**dual**] [**bidual**] **[application transposée]**
45. Adjoints of projections [**dual**] **[application transposée] [annulateurs] [matrice transposée]**
46. Change of basis [**dual**] **[covariant/contravariant]**
47. Similarity [**dual**] [**transposée**] **: thèmes présents dans des énoncés d'exercices**
48. Quotient transformations
49. Range and null-space [**dual**] [**annulateur**] [**transposée**] [**image**] [**noyau**]
50. Rank and nullity [**transposée**] [**rang**]
51. Transformations of rank one [**base duale**]
52. Tensor products of transformations [**dual**]
53. Determinants
54. Proper values
55. Multiplicity
56. Triangular form [**dual**] [**transposée**] [**annulateur**]
57. Nilpotence
58. Jordan form

Chapitre 3. ORTHOGONALITY

59. Inner products
60. Complex inner products
61. Inner product spaces
62. Orthogonality
63. Completeness
64. Schwarz's inequality
65. Complete orthonormal sets

1.2. Table des matières du livre d'Escofier (2006) : *Toute l'algèbre de la licence*

Remarque : Dans la table des matières du livre d'Escofier, les sections de chaque chapitre sont citées. Pour une question de lisibilité, nous n'avons détaillé ici que les sections des chapitres où intervenaient les thèmes et sujets liés au secteur dualité.

1.3. Table des matières du livre de Pham&Dillinger (1996) : *Algèbre linéaire*

Remarque : Dans la table des matières du livre de Pham & Dillinger, les sections de chaque chapitre sont citées. Pour une question de lisibilité, nous n'avons détaillé ici que les sections des chapitres où intervenaient les thèmes et sujets liés au secteur dualité.

ii. Dualité [**dual**] [**formes linéaires** **(reprise sous le terme de *fonctions* linéaires de *E* à valeurs dans *IK*)**] [**bidual**] [**base duale** **(reprise sous les termes de système de coordonnées associé à une base)**] [**transposée** **(application et matrice)**] [**annulateur** **(repris sous les termes d'espace co-normal à un sous-espace vectoriel)**]

iii. L'algèbre des endomorphismes et le groupe linéaire

Solutions des exercices

1.4. Table des matières du livre de Merlin (1995) : *Methodix algèbre (250 méthodes, 250 exercices corrigés)*

Remarque : Dans la table des matières du livre de Merlin, les sections de chaque chapitre sont citées. Pour une question de lisibilité, nous n'avons détaillé ici que les sections des chapitres où intervenaient les thèmes et sujets liés au secteur dualité.

8. Thème 8 : Autres réductions classiques
9. Thème 9 : Exercices « n'ayant rien à voir avec la diagonalisation »

Chapitre 10 : "Best of" Vrai ou Faux : réduction des endomorphismes

Chapitre 11 : Méthodes de topologie matricielle

Chapitre 12 : Méthodes d'étude de l'exponentielle matricielle

Chapitre 13 : "Best of" : Méthodes d'études des matrices classiques

Chapitre 14 : Méthodes générales d'algèbre bilinéaire

1. Comment étudier les propriétés des formes
   - A) Problèmes de définitions
   - B) Décomposition de Gauss **[formes linéaires]**
   - C) Orthogonalité, cône isotrope et noyau **[annulateur (vu comme orthogonal)]**
   - D) Bases orthogonales [**base duale**]
2. Produit scalaire et norme
3. Base orthonormale et orthonormalisation de Schmidt

Chapitre 15 : Méthodes de détermination de la signature

Chapitre 16 : Méthodes d'étude des endomorphismes autoadjoints

Chapitre 17 : "Best of" : Endomorphismes classiques des espaces euclidiens et hermitiens

Chapitre 18 : L'essentiel de l'algèbre... en quatre pages [**on y parle de la transposée**]

1.5. Table des matières du livre d'Uhlig (2002) : *Transform Linear Algebra*

2. Présentation de l'organisation mathématique globale/régionale de la dualité

2.1. Le livre d'Halmos

Le livre de Halmos (1974), composé de 200 pages, comporte 4 chapitres. Il ne traite que des espaces vectoriels de dimension finie. Le cas réel (champ réel) et le cas complexe (champ complexe) sont tous deux abordés dans l'ouvrage.

Le **premier chapitre**, intitulé "Spaces" (Espaces), est constitué de 31 sections, parmi lesquelles on trouve en treizième position, et déjà à la page 20, la section intitulée "*Dual spaces*". Halmos aborde donc très vite la dualité : n'ont été présentées que les notions de champ, d'espace vectoriel, de dépendance linéaire, de combinaisons linéaires, de base et dimension, d'isomorphismes et de sous-espaces vectoriels.

Halmos commence la première section où est abordé le secteur dualité par la définition, d'une "linear functional", que nous appelons maintenant forme linéaire. Il définit ensuite l'espace vectoriel dual, qu'il note $\mathcal{V}'$.

Dans la section suivante ("*Brackets*"), Halmos introduit une notation, les crochets [ ], qui lui permettra plus tard de définir un élément du bidual ainsi que la transposée, et également de faire le lien entre la transposée et l'adjointe d'une application. Halmos définit ainsi, pour une forme linéaire y et un vecteur x, la notation $[x,y] = y(x)$. Ces crochets définissent ainsi une "bilinear functional" (forme bilinéaire). Viennent ensuite des exercices, proposés principalement dans le cadre analytique.

Toujours dans ce premier chapitre, la section 15 est intitulée " *Dual bases*". Trois théorèmes y sont présentés avec leur démonstration, et la définition de base duale, notée $\mathcal{X}'= \{y_1,\ldots,y_n\}$ d'une base $\mathcal{X} = \{x_1,\ldots,x_n\}$de $\mathcal{V}$ est donnée : $[x_i,y_j] = \delta_{ij}$ (où δ_{ij} est le symbole de Kronecker, qui vaut un si $i = j$ et qui vaut zéro si $i \neq j$). Quoi qu'il le démontre via la base duale, Halmos ne mentionne pas explicitement l'existence d'un isomorphisme entre un espace et son dual.

La section suivante est consacrée à la *réflexivité*, c'est-à-dire au fait qu'un espace vectoriel $\mathcal{V}$ est canoniquement isomorphe à son bidual $(\mathcal{V}')' = \mathcal{V}''$. Les crochets de dualité sont alors utilisés pour décrire un élément du bidual : pour x_0 fixé dans $\mathcal{V}$, $[x_0, .\,] \in \mathcal{V}''$. Halmos énonce et démontre le théorème concernant la « *natural correspondance* », et explique ces termes. Il explique alors qu'en dimension finie, on peut identifier $\mathcal{V}$ à $\mathcal{V}''$et qu'on peut se permettre de dire qu'un élément z_0 de $\mathcal{V}''$ est le *même* que l'élément x_0 de $\mathcal{V}$où l'on a : $z_0(y) = [x_0,y]$ pour tout y dans $\mathcal{V}$. Il se permet donc l'identification de la base du primal avec la base duale de la base duale : $\mathcal{X}''= \mathcal{X}$.

La section 17 est intitulée « Annihilators ». La notation $\mathcal{S}^0$ est utilisée pour l'annulateur d'un sous-ensemble (pas nécessairement sous-espace) $\mathcal{S}$ de vecteurs de $\mathcal{V}$. Halmos reprend sous forme de théorème qu'il démontre le fait que $\mathcal{M}^0$ est un sous espace de dimension (n-m) si $\mathcal{M}$ est une sous-espace de dimension m de $\mathcal{V}$, lui-même de dimension n. L'identification faite à la section précédente permet à l'auteur d'énoncé et de démontrer que $(\mathcal{M}^0)^0 = \mathcal{M}$.. Des exercices clôturent la section.

Les deux sections suivantes sont consacrées aux sommes directes d'espaces vectoriels (définis sur le même champ) et à leurs dimensions. Les notations $\langle x,y\rangle \in \mathcal{U} \oplus \mathcal{V}$, sont adoptées.

La section 20 s'intitule « *Dual of a direct sum* ». L'auteur utilise les résultats des deux sections précédentes pour énoncer et démontrer le théorème selon lequel si $\mathcal{M}$ et $\mathcal{N}$ sont des sous-espaces de l'espace vectoriels $\mathcal{V}$, et si $\mathcal{V} = \mathcal{M} \oplus \mathcal{N}$, alors $\mathcal{M}$ est isomorphe à $\mathcal{N}^0$ et $\mathcal{N}$ à $\mathcal{M}^0$, et $\mathcal{V}' = \mathcal{M}^0 \oplus \mathcal{N}^0$. Des exercices terminent la section.

Les deux sections suivantes sont consacrées aux espaces quotients et à leurs dimensions. La notation $\mathcal{U}/\mathcal{M}$ est utilisée pour désigner l'espace quotient de $\mathcal{U}$ modulo $\mathcal{M}$. Ces deux sections se clôturent par 5 énoncés d'exercices, dont le quatrième implique le dual de $\mathcal{U}/\mathcal{M}$ et $\mathcal{M}^0$ [outil illustration], et le dernier travaille sur $\mathcal{V} \oplus \mathcal{V}'$.

La section 23 s'intitule « Bilinear Forms ». Si $\mathcal{U}$ et $\mathcal{V}$ sont deux espaces vectoriels construits sur le même champ, Halmos note par $w(x,y)$ la valeur d'une fonction w en un élément $<x,y>$ de $\mathcal{W} = \mathcal{U} \oplus \mathcal{V}$. Il introduit les termes « *bilinear form (or bilinear functional)* » pour une fonction w définie sur $\mathcal{W}$ et à valeurs dans les scalaires. La dualité intervient dans cette section en tant qu'outil-illustration, en étant un cas particulier de l'espace $\mathcal{V}$ intervenant dans la définition d'une forme bilinéaire.

Les deux sections suivantes, « Tensor products » et « Product bases » font référence au dual et aux formes bilinéaires. La dualité intervient comme outil-définition pour le produit tensoriel $\mathcal{U} \otimes \mathcal{V}$ de deux espaces $\mathcal{U}$ et $\mathcal{V}$ de dimension finie définis sur le même champ[5]. Cela permet à l'auteur d'utiliser les théorèmes évoqués dans les sections présentant la dualité et les formes bilinéaires.

Le premier chapitre se termine avec les sections consacrées aux permutations, aux cycles, à la parité, aux formes multilinéaires, aux formes alternées et aux formes alternées de degré maximal. Les *k*-formes y sont mentionnées, mais sans référence explicite à la dualité.

Le **deuxième chapitre** du livre d'Halmos, intitulé "Transformations", reprend 27 sections, numérotées de 32 à 58. L'auteur y définit, à la section 32, les *transformations* linéaires. A la section 37, il définit une "matrice associée sous certaines conditions à une transformation linéaire". A la section 44, intitulée "Adjoints", il écrit : "*the linear transformation A' is called the* adjoint *(or dual) of A* ". Ce *A'* est ce que nous avons appelé $f^{\,t}$, la transformation "transposée de *f* ". C'est dans cette section que l'auteur énonce et démontre les propriétés de la transposée. La section suivante de ce deuxième chapitre est intitulée "Adjoints of projections". Dans ce cas particulier de "*adjoint*" (transposée), interviennent de nouveau les annulateurs, étant donné que "*if E is the projection on M along N, then E' is the projection on N° along M°* " (Halmos, 1974; p.80). C'est à la fin de cette section qu'il définit la matrice associée à la transformation transposée : "*this matrix [A'] is called the transpose of [A]* " (Halmos, 1974; p.81). Remarquons que, si l'auteur utilise le terme *adjoint* ou *dual* pour nommer la transformation transposée, c'est bien le terme *transpose* qu'il utilise pour désigner la matrice associé à la transformation transposée. On se rappelle que, historiquement, la matrice transposée a été définie bien avant que n'apparaisse le concept de transformation transposée (voir chapitre 2).

Dans la section 46 consacrée aux changements de base, Halmos utilise la dualité comme analogie pour l'interprétation du produit matriciel ; ce qui lui permet d'introduire la notion de vecteurs covariants et contravariants.

La section 49 du deuxième chapitre s'intitule "*Range and null-space*", ce qui se traduit en français par *image et noyau*. Les annulateurs interviennent donc encore dans cette section,

[5] Voir chapitre 1, § 2.1.

et le théorème fondamental de l’algèbre linéaire y est énoncé et démontré (Halmos ne donne pas de nom au théorème).

Remarquons que les exercices proposés à la fin des sections sont régulièrement proposés dans le cadre de l'analyse (opérateur différentiel,...), ce qui n'est pas sans rappeler le cadre qui a permis de développer les notions liées au dual.

La section suivante de ce chapitre, intitulée "*Rank and nullity*", fournit la définition du *rang* d'une transformation linéaire. La dualité y est encore présentée sous forme d’objet à travers le théorème affirmant que le rang d’une application et celui de sa transposée sont égaux. Halmos présente dans ce même théorème le fait que, pour une application linéaire, la dimension de son image plus la dimension de son noyau est égale à la dimension de l’espace de départ (appelé maintenant le théorème du rang).

La section 51 intitulée "*Transformation of rank one*" contient un théorème dont la démonstration utilise des bases duales [outil-démonstration].

On se rend donc déjà compte à ce stade qu’Halmos alterne très habilement les passages où il présente la dualité en tant qu’objet avec les passages où la dualité est considérée comme un outil, avec des finalités variées.

Le **<u>chapitre 3</u>** est intitulé « orthogonality ». Après avoir défini le produit scalaire et l’orthogonalité, Halmos annonce que l’on peut maintenant obtenir une correspondance *naturelle* entre $\mathcal{V}$ et $\mathcal{V}'$: il énonce et démontre théorème de représentation de Riesz (sans toutes fois lui donner ce nom), faisant ainsi le lien entre les formes linéaires et le produit scalaire. Grâce à ce théorème, Halmos définit aussi un produit scalaire sur $\mathcal{V}'$[6], à partir du produit scalaire sur $\mathcal{V}$. Le dual d’un espace euclidien (réel) ou unitaire (complexe) $\mathcal{V}$, muni du produit scalaire ainsi défini est noté $\mathcal{V}^*$. Il y a donc un isomorphisme conjugué naturel entre $\mathcal{V}'$ et $\mathcal{V}^*$. Halmos présente ensuite l’analogie entre les crochets de dualité [.,.] et la notation utilisée pour le produit scalaire (.,.). De même, avec l’introduction du produit scalaire, l’annulateur $M°$ (sous-espace de $\mathcal{V}'$ ou $\mathcal{V}^*$) est remplacé par l’orthogonal $M^{\perp}$ (sous-espace de $\mathcal{V}$) ; la base duale d’une base $\mathcal{X} = \{x_1,\ldots,x_n\}$de $\mathcal{V}$ est remplacée par une base $\mathcal{Y} = \{y_1,\ldots,y_n\}$de $\mathcal{V}$ telle que $(x_i,y_j) = \delta_{ij}$. Halmos définit ensuite la transformation linéaire A^* par analogie avec la transformation transposée A' qu’il avait définie dans le chapitre 2. Rappelons qu’Halmos appelait déjà A' la transformation *adjointe* de A (et non pas *transposée*). Il ne donne pas de nom particulier à A^*. Il démontre ensuite que $A=A^{**}$, alors que l’on ne pouvait écrire $A=A''$ qu’en invoquant le théorème de réflexivité.

Le chapitre 4 est dédié à l’analyse, cadre privilégié d’application pour les notions d’algèbre linéaire.

En conclusion de cette analyse, nous pouvons dire qu’Halmos introduit rapidement la dualité dans son ouvrage. Il alterne régulièrement les moments où il présente la dualité comme un objet et les moments où il utilise les thèmes de la dualité déjà introduits, que ce soit pour définir, introduire ou illustrer une nouvelle notion ou pour démontrer une propriété. Sans oublier les analogies qu’il fait à partir de la dualité. Pour Halmos, la dualité est tout aussi naturellement utilisée que le serait une notion élémentaire d’algèbre linéaire, telle une base ou une application linéaire.

[6] Soient $y_1', y_2' \in \mathcal{V}'$. Par le théorème de Riesz, il leur correspond les vecteurs y_1 et y_2 dans $\mathcal{V}$. Halmos définit alors le produit scalaire (y_1', y_2') comme étant égal à $\overline{(y_1, y_2)} = (y_2, y_1)$.

2.2. Le livre d'Escofier

Le livre d'Escofier (674 pages) comporte trois parties, pouvant correspondre respectivement aux trois premières années d'université du parcours d'un étudiant en mathématiques en France.

La première partie, correspondant donc à la première année, présente l'algèbre linéaire, ainsi que l'algèbre de base. Elle comporte 10 chapitres dont le dernier est consacré à la dualité.

Après un avant propos dans lequel il explique l'approche historique et généralisatrice de son livre, l'auteur consacre quatre chapitres à la présentation de ce qui pourrait lui servir de cadre par la suite : le premier chapitre est consacré aux *équations différentielles linéaires*, le deuxième aux *suites récurrentes linéaires*, le troisième à *l'espace vectoriel* $\mathbb{R}^n$ et le quatrième aux *systèmes linéaires*. Vient ensuite un chapitre intitulé "*Généralités sur les espaces vectoriels*", suivi d'un autre sur les "*bases et dimension*". C'est dans ce chapitre, à la section 6.5 traitant de la "*dimension*", que l'auteur définit un hyperplan d'un espace vectoriel E comme étant un sous-espace de dimension n-1. Le chapitre 7 est consacré aux applications linéaires. C'est à la section 7.9 ("*résolution d'un système linéaire*") de ce chapitre qu'un hyperplan est présenté comme étant le noyau d'une application linéaire $f:\mathbb{R}^p \to \mathbb{R}$, autrement dit, l'hyperplan est défini par l'équation $a_1x_1 + ... + a_px_p = 0$. L'auteur précise ensuite qu'on peut considérer la résolution d'un système d'équations linéaires comme la détermination de l'intersection de la famille d'hyperplans définis par les équations du système linéaire (p.123).

Vient ensuite le chapitre 8 consacré aux *matrices*. Le lien entre matrice et application linéaire est fait d'emblée à l'entrée de ce chapitre, suivi d'une composante historique et d'exemples. Si on y parle ensuite de matrice de la composée ou de matrice inverse, il n'est cependant pas fait mention de matrice transposée, les bases pour introduire cette notion n'ayant pas encore été posées.

Le chapitre 9 se termine par la remarque suivante :

> **Vers le chapitre 10**
>
> Le chapitre 9 termine ce qu'il semble raisonnable d'enseigner en première année de Licence au sujet de l'algèbre linéaire actuellement. Le chapitre 10 est un peu à part. Il présente des notions sur l'espace vectoriel formé par les hyperplans d'un espace vectoriel, appelé espace dual. Certains et certaines pourront le trouver un peu difficile, un peu abstrait; si sa seule lecture peut-être différée jusqu'au chapitre 16, il semble plus à sa place ici. (Escofier 2006, p.175).

Voici le lecteur prévenu!

Remarquons cependant que c'est à la fin du chapitre 9 et par l'intermédiaire de l'énoncé d'un exercice que l'auteur définit la transposée d'une matrice $M = (a_{ij})$ comme étant la matrice ${}^tM = (a_{ji})$. Il renvoie à la section 5 du chapitre 10 (*dualité*) pour une présentation de ces matrices.

Le chapitre 10, consacré à la "*Dualité*" ne comporte que 13 pages, incluant des énoncés et solutions d'exercices. Après une introduction à caractère historique, l'auteur définit l'espace vectoriel dual de E en dimension finie. Il le note E^*, et définit dans la foulée le bidual, E**.

La section 10.2 s'intitule "*Formes linéaires et hyperplans*". Une proposition reprend les liens entre ces deux notions. La section 10.3 est dédiée à la notion de "*Base duale*". Escofier y donne, sans vraiment le dire, l'expression générale d'une forme linéaire. L'auteur explique aussi à la fin de cette section, que les coordonnées des formes linéaires dans la base duale permettent de travailler avec des formes linéaires en lieu et place des équations.

Dans la section 10.4 ("*Orthogonal d'un sous-espace*"), l'auteur définit l'orthogonalité de formes linéaires et de vecteurs : une forme linéaire f de E^* et un vecteur u de E sont orthogonaux si $f(u) = 0$. Le terme *orthogonal* est expliqué par le fait que les coordonnées de u et f définissent dans $\mathbb{R}^n$ des vecteurs orthogonaux pour le produit scalaire usuel (l'auteur renvoie au chapitre 16 pour ces notions). Le terme *annulateur* n'est pas utilisé, Escofier lui préfère le terme *orthogonal* d'un sous-espace F de E. Il le note $F^{\perp}$. L'auteur explicite ensuite les liens entre forme linéaire de $F^{\perp}$, noyau et hyperplan. Un exemple est donné avec interprétation géométrique ($\mathbb{R}^3$). Escofier définit ensuite l'orthogonal d'un sous-espace G de E^* :

$$G^{\perp} = \{u \in E \mid \forall f \in G : f(u) = 0\}.$$

L'interprétation de cette définition est ensuite également faite en termes d'hyperplans.

Les propriétés qui suivent (dimension et orthogonal d'orthogonal) sont chaque fois énoncées pour les deux types d'orthogonal (d'un sous-espace de E ou de E^*). Evidemment, avec les définitions introduites, on a les propriétés suivantes : si F est un sous-espace de E et G un sous-espace de E^* : $\left(F^{\perp}\right)^{\perp} = F$ et $\left(G^{\perp}\right)^{\perp} = G$. Les notions sont illustrées par un exemple où $E = \mathbb{R}^3$, et le vocabulaire utilisé est clairement géométrique.

La section 10.5 s'intitule "*Transposée d'une application linéaire*". Après une définition formelle dans le registre générique de l'algèbre linéaire, c'est le registre graphique qui est utilisé pour "*visualiser*" la définition. L'auteur énonce et démontre dans le registre générique algébrique la linéarité de la transposée d'une application linéaire g, notée ${}^t g$. Il utilise par contre ensuite le registre graphique pour expliquer la transposée d'une composition de formes linéaires. La transposée d'une matrice est ensuite définie comme elle l'avait été dans un énoncé d'exercice situé la fin du chapitre 9. La proposition suivant la définition fait alors le lien entre la transposée de l'application et la transposition de la matrice de l'application, le tout présenté dans le registre générique algébrique.

Suivent ensuite des énoncés d'exercices variés, tant au niveau du statut des énoncés que des cadres dans lesquels ils sont formulés.

Après la présentation de la dualité faite au chapitre 10, il faut attendre le chapitre 16 consacré à l'orthogonalité pour que ce secteur soit à nouveau mentionné. On se situe alors, d'après la classification de l'auteur, dans la deuxième année d'enseignement. A la section 16.4, la transposition d'une matrice est utilisée dans l'expression du produit scalaire : si $(e_{1,} ..., e_n)$ est une base d'un espace euclidien E, et que $\Phi = (a_{ij})$ avec $a_{ij} = < e_i, e_j >$, alors $< u, v > = U^t \Phi V = V^t \Phi U$, où u, v sont des vecteurs de E, U et V étant leurs matrices colonnes associées (reprenant leurs coordonnées dans la base $(e_{1,} ..., e_n)$.

A la section 16.7 intitulée "*Orthogonalité de sous-espaces*", Escofier définit l'orthogonal d'un sous-espace F d'un espace <u>euclidien</u> E. Il s'agit bien entendu d'un sous-espace de E, et non de son dual. L'articulation entre les formes linéaires et le produit scalaire est faite à partir des formes bilinéaires, ces dernières ont été définies à la section 16.2 :

> Soit E un espace euclidien et soit u un vecteur non nul de E. Notons $\varphi : E \times E \to \mathbb{R}$ le produit scalaire. Pour tout u de E, l'application $\varphi_u : v \mapsto \varphi(u, v)$ est une application linéaire de E dans $\mathbb{R}$.C'est donc une

> forme linéaire sur *E*, autrement dit un élément de ce que nous avons appelé au chapitre 10 l'espace dual de *E* et que nous avons noté *E**. (Escofier 2006, p.341)

On y reconnaît ce que nous avons présenté sous le nom de théorème de Riesz dans le chapitre 1, § 2.2.

Le lien avec les hyperplans est ensuite fait en affirmant que l'orthogonal d'un vecteur u non nul de E est l'hyperplan $\ker(\varphi_u)$. L'isomorphisme entre E et E^* est alors précisé : $\varphi_g : E \to E^*$ tel que $u \mapsto \varphi_u$. La matrice associée à φ_g est ensuite précisée.

Remarquons que la dualité est considérée dans cette section comme un objet, et non comme un outil.

A la section 16.12 intitulée "*Endomorphisme adjoint et autoadjoint*", la matrice transposée est citée comme étant la matrice associée à l'endomorphisme adjoint (noté *f**) d'un endomorphisme *f* défini sur un espace euclidien *E*, par rapport à une base orthonormée de *E*. Pour démontrer cette proposition, la matrice transposée est introduite dans la démonstration à partir de la définition de l'adjointe de f ($< f(u), v >=< u, f^*(v) >$) et de l'expression du produit scalaire ($< u, v >= U^t \Phi V = V^t \Phi U$). Aucune référence n'est faite à la dualité.

Dans la section consacrée à la troisième année, le chapitre 22 est consacré aux "*Formes bilinéaires symétriques et quadratiques*". A la première sous-section de ce chapitre intitulée "*Compléments sur le groupe orthogonal d'un espace euclidien*", on trouve des thèmes et sujets de la dualité comme les hyperplans et les orthogonaux de sous-espaces, mais comme on travaille dans un espace euclidien, ce sont les notions définies au chapitre 16 du livre d'Escofier qui sont utilisées, et non les notions de la dualité dont elles sont dérivées. Ainsi, par exemple, l'orthogonal d'un sous-espace est considéré comme un sous-espace de *E* et non comme sous-espace du dual *E**.

Dans la deuxième section de ce chapitre 22, consacrée aux "*Formes bilinéaires et bilinéaires symétriques*", Escofier se sert de la dualité (espace vectoriel dual, forme linéaire et base duale) comme outil-analogie pour les formes bilinéaires symétriques : à toute forme bilinéaire symétrique φ sur un *K*-espace vectoriel *E* de dimension finie correspond (par un isomorphisme) une application linéaire $\psi : E \to E^*$ telle que $\forall u \in E$, $\psi(u) : v \mapsto \varphi(u, v)$. Il continue également de présenter dans cette section la dualité sous forme d'objet : si *B* est une base de *E*, que *B** est la base duale de *B*, et que *A* est la matrice dans la base *B* de la forme bilinéaire symétrique φ, alors *A* est également la matrice représentant l'application ψ par rapport aux bases *B* et *B** (c'est-à-dire $A = [\psi]_B^{B^*}$). Ensuite, à la septième section de ce chapitre, consacrée à l'"*Orthogonalité*", la notion d'orthogonalité (déjà définie entre des vecteurs et des formes linéaires dans le chapitre sur la dualité, et entre vecteurs à travers un produit scalaire) est généralisée au cas des formes bilinéaires symétriques et des formes quadratiques. On pourrait qualifier d'outil-analogie l'utilisation qui est faite ici de la dualité : elle permet, à travers les formes bilinéaires symétriques, de faire le lien entre l'orthogonal d'un sous-espace *F* (d'un espace vectoriel *E*) défini dans le chapitre consacré à la dualité (en fait $(\text{sous-espace de } E^*)^\perp \subseteq E$), et celui défini dans le chapitre consacré à l'orthogonalité ($F^\perp \subseteq E$). En effet, à toute forme bilinéaire symétrique φ, on peut associer une application linéaire $\psi : E \to E^*$, définie par $(\psi(u))(v) = \varphi(u, v)$. Ainsi, l'orthogonal d'un sous espace *F* de *E*, noté $F^\perp$ peut être défini des deux façons suivantes :

- $F^{\perp} = \{v \in E \mid \forall u \in F : \varphi(v,u) = 0\}$ ou, comme φ est symétrique :
- $F^{\perp} = \{v \in E \mid \forall u \in F : (\psi(u))(v) = 0\} \overset{not.}{=} (\psi(F))^{\perp}$. Comme $\psi(F) \subseteq E^*$, on reconnaît donc bien dans l'expression de $F^{\perp}$ donnée ici la définition de l'orthogonal d'un sous-espace du dual *E** qui, avec les définitions données par Escofier au chapitre 10 de son ouvrage, donne bien un sous-espace de E : $F^{\perp} \subseteq E$.

Escofier n'en parle pas, mais remarquons qu'on aurait pu écrire :

$$\begin{aligned} F^{\perp} &= \{v \in E \mid \forall u \in F : \varphi(v,u) = 0\} \\ &= \{v \in E \mid \forall u \in F : (\psi(v))(u) = 0\} \\ &= \{\psi(v) \in E^* \mid \forall u \in F : (\psi(v))(u) = 0\}, \end{aligned}$$

ce qui signifie alors que $F^{\perp} \subseteq E^*$. Les définitions adoptées par Escofier dans le chapitre 10 de son ouvrage pour l'orthogonal d'un sous-espace *F* de *E* ou d'un sous-espace *G* de *E** font en sorte que $(F^{\perp})^{\perp} = F$, ce qui permet une certaine liberté quant à l'interprétation à donner à $F^{\perp}$ comme nous l'avons vu ci-avant.

A titre d'information, voici la manière dont Escofier présente les choses dans son ouvrage :

> L'orthogonal d'un sous-espace *F* de *E* est l'ensemble des $v \in E$ tels que, pour tout $u \in F$, $\psi(u)(v) = 0$, autrement dit l'orthogonal de *F* au sens de l'orthogonalité défini par φ dans *E* est l'orthogonal de $\psi(F)$ au sens de 10.4 [il fait référence au chapitre 10, section 4 de son livre] , ce qu'on peut écrire $F^{\perp} = (\psi(F))^{\perp}$; ces deux sous-espaces sont inclus dans *E*, mais la notation mélange deux relations d'orthogonalités, la première étant celle définie par φ dans *E*, la seconde étant celle définie par la dualité entre vecteurs de *E* et formes linéaires de E^*; notons que certains auteurs choisissent deux symboles différents et notent $F^{\perp}$ et F^{o} les sous-espaces orthogonaux à *F* suivant qu'il s'agit de l'une ou l'autre des relations d'orthogonalité. L'utilisation d'un même signe n'est pas gênante, pourvu qu'on sache de quoi on parle, mais nous essaierons d'éviter ces ambiguïtés. (Escofier 2006, p.622).

Enfin, Escofier termine la septième section du chapitre 22, en présentant une proposition où le dual intervient comme un objet :

> Une forme bilinéaire symétrique φ est non dégénérée si et seulement si l'application linéaire $\psi : E \to E^*$ est injective. En dimension finie, cette propriété équivaut à dire que ψ est bijective ou que la matrice de φ est inversible. (Escofier 2006, p.622).

Dans la section 22.8 du chapitre 22 intitulée "*Espaces quadratiques réguliers*", le dual et l'orthogonal d'un sous-espace sont encore présents à travers l'application $\psi : E \to E^*$ associée à une forme bilinéaire symétrique $\varphi : E \times E \to E$.

En conclusion, nous pouvons dire que dans l'ouvrage d'Escofier, la dualité est principalement présentée sous un aspect géométrique. Pour preuve, on prendra par exemple la définition et la notation de l'orthogonal (annulateur) d'un sous-espace d'un espace vectoriel : $F^{\perp}$, qui est ici défini à la fois pour un sous-espace de *E* et pour un sous-espace de *E**. La dualité est présente dans l'ensemble de l'ouvrage, à la fois sous le statut d'objet, et sous le statut d'outil. Rappelons que le point de vue géométrique est très clairement privilégié !

2.3. Le livre de Pham & Dillinger

Ce livre (347 pages) comporte un prologue, quatre chapitres, un épilogue et trois annexes. De manière générale, les auteurs relèguent dans les annexes les parties qu'ils jugent trop techniques, comme la définition formelle des structures algébriques par exemple. Ainsi, c'est dans la troisième annexe que se trouvera présentée l'approche formelle de la dualité.

Dans le prologue, les auteurs présentent déjà l'activité mathématique du point de vue du calcul, et du point de vue de la géométrie, en considérant des systèmes d'équations linéaires. Ce double point de vue est une préoccupation des auteurs tout au long de leur ouvrage, comme ils l'annoncent dans l'*Avertissement au lecteur enseignant* : « *Notre principal souci, que résume le slogan* dualité entre géométrie et calcul[7] *est d'amener peu à peu les étudiants à maîtriser les allers-retours entre la pensée géométrique et le monde des calculs. L'algèbre linéaire présente un magnifique formalisme unificateur de ces deux façons de penser. »*

Le premier chapitre, consacré à l'étude formelle des systèmes linéaires, présente des manipulations formelles sur les systèmes d'équations linéaires. Les notions d'indépendance linéaire et de rang[8] y sont définies pour les (systèmes d') équations linéaires. La $i^{ème}$ équation linéaire d'un système est appelée e_i, ce qui permet d'additionner deux équations entre elles, et d'un multiplier une par un scalaire. Le terme d'espace vectoriel n'est cependant pas encore évoqué.

Dans la dernière section du premier chapitre, intitulée "*Formes linéaires*", les auteurs ne définissent pas formellement la notion, mais la présentent comme étant une relation du type $a_1X_1 + ... + a_nX_n$ où les a_i désignent des constantes numériques (les "coefficients de la combinaison linéaire"), et où les lettres X_i sont à remplacer, selon le contexte, par les diverses lettres désignant les objets à combiner déjà considérés (équations, seconds membres,…). Après des explications écrites en langage courant (mais où aucune définition n'a été donnée), les auteurs écrivent : "*nous savons donc ce qu'est une forme linéaire à n indéterminées* $X_1, ..., X_2$*, à coefficients dans le corps* $\mathbb{K}$" (Pham & Dillinger 1996, p.75). La notion de fonction n'est pas clairement évoquée. Il semble d'ailleurs que pour Pham & Dillinger, la notion de "forme linéaire à *n* indéterminées" corresponde à l'application de la fonction linéaire de *E* dans *K* en un élément quelconque de *E*. Les termes de Pham & Dillinger ne correspondraient donc pas tout à fait à ce que nous avons appelé formes linéaires (voir chapitre 1, § 2.2). Ces dernières correspondraient à ce que les auteurs vont appeler plus tard des fonctions linéaires (voir ci-après).

Après avoir défini les opérations d'addition et de multiplication par un scalaire (décrites comme manipulant les coefficients des X_i), Pham & Dillinger disent qu'ils peuvent traduire dans le langage des formes linéaires le travail formel présenté jusqu'à présent sur les systèmes linéaires. Ils parlent alors de rang d'un système de formes linéaires comme étant le nombre maximal de formes linéaires indépendantes qu'on peut extraire de ce système.

[7] C'est le titre du chapitre 3 du livre de Pham & Dillinger.

[8] On appelle *rang* d'un système linéaire le nombre maximal de premiers membres linéairement indépendants de ce système. (Pham&Dillinger 1996, p.63)

Les auteurs définissent aussi une *relation entre p formes linéaires* par une forme linéaire à *p* indéterminées $l_1, ..., l_p$ qui, quand on substitue aux lettres l_i les formes linéaires que ces lettres désignent, donne la forme linéaire nulle : $c_1 l_1 + c_2 l_2 + ... + c_p l_p = 0$.

A partir de cette notion de relation entre *p* formes linéaires, les auteurs vont considérer ce que Frobenius (voir chapitre 2, § 2.5) appelait le système adjoint d'un système linéaire, bien que Pham & Dillinger n'utilisent pas ces termes. Ils notent (*S*) le système de formes linéaires $l_1, ..., l_p$, et (^tS) ce que Frobenius appelait le système adjoint. Pham & Dillinger n'expliquent cependant pas la motivation du choix des notations. Voici le raisonnement suivi par les auteurs :

Ils écrivent le système de formes linéaires sous la forme :

$$(S)\begin{cases} l_1 & : \quad a_{11}X_1 + a_{12}X_2 + ... + a_{1n}X_n \\ l_2 & : \quad a_{21}X_1 + a_{22}X_2 + ... + a_{2n}X_n \\ \cdots & \\ l_p & : \quad a_{p1}X_1 + a_{p2}X_2 + ... + a_{pn}X_n \end{cases}$$

En vue d'obtenir des informations sur le rang du système ($l_1, ..., l_p$), ils cherchent la *relation* la plus générale entre les $l_1, ..., l_p$ sous la forme

$$(\rho) \qquad c_1 l_1 + c_2 l_2 + ... + c_p l_p = 0 .$$

Ils affirment que dire que la relation ρ est vraie revient à dire que ses coefficients $c_1, c_2, ..., c_p$ sont solutions du système linéaire homogène (^tS) :

$$({}^tS)\begin{cases} c_1 a_{11} + c_2 a_{21} + ... + c_p a_{p1} & = & 0 \\ c_1 a_{12} + c_2 a_{22} + ... + c_p a_{p2} & = & 0 \\ \cdots & & \\ c_1 a_{1n} + c_2 a_{2n} + ... + c_p a_{pn} & = & 0 \end{cases}$$

Les auteurs montrent ensuite que le rang de ce système (^tS), noté *r*, est le même que le rang du système (*S*) , en utilisant la notion d'un *système complet de relations*.

Ainsi, à la fin du premier chapitre de cet ouvrage, Pham & Dillinger ont déjà présenté de nombreuses notions liées à la dualité, mais toujours en relation très étroite avec les systèmes d'équations linéaires. C'est une approche que nous avions qualifiée de naturelle dans le chapitre 2, § 4.6 de notre travail. Remarquons que naturalité ne rime pas nécessairement avec simplicité : les objets manipulés par Pham & Dillinger ne sont pas des plus simples : des formes linéaires, des relations de formes linéaires, des systèmes de relations de formes linéaires !

Le **chapitre 2**, intitulé "Espaces vectoriels et géométrie", continue de voir exposées principalement des idées, les côtés plus formels étant relégués dans les annexes de l'ouvrage. Bien sûr, des définitions et théorèmes sont présents, mais l'accent est mis sur une grande variété d'exemples. La géométrie reste le point de repère, bien que les objets manipulés ne soient pas tous de nature géométrique. C'est dans ce chapitre qu'un sous-espace vectoriel de *E* (espace vectoriel de dimension *n*) de codimension 1 est appelé hyperplan. Le lien est fait entre les espaces vectoriels et la géométrie affine (une section y est consacrée). Sont également présentées dans ce chapitre les fonctions linéaires (toujours considérées comme à valeurs dans $I\!K$) et les fonctions affines, ainsi que les applications linéaires. Les auteurs attachent de l'importance à l'interprétation graphique. C'est ainsi qu'ils précisent qu'au lieu d'écrire $F \xrightarrow{f} E \xrightarrow{g} G$, ils écriront $G \xleftarrow{g} E \xleftarrow{f} F$ de manière à avoir le même ordre que dans l'expression $g \circ f$.

La <u>première section</u> du **<u>chapitre 3</u>** "Dualité entre géométrie et calculs" s'intitule "Systèmes de coordonnées et dualité". Comme cela a été fait dans le chapitre précédent, le cas vectoriel et le cas affine sont tous deux présentés tout au long de ce chapitre également.

On y considère un espace vectoriel *E* de dimension *n*. La notion de système de coordonnées linéaires sur un espace vectoriel *E* associé à une base $(e_i)_{i=1}^n$ est ce que la plupart des auteurs appellent la base duale de $(e_i)_{i=1}^n$, mais Pham & Dillinger n'utilisent pas ces termes. Bien qu'ils disent qu'il s'agisse de fonctions, ils les notent x_i (que l'on pourrait confondre avec un vecteur de l'espace vectoriel *E* !), et n'y associent pas de symbole graphique (par exemple le symbole "flèche" : $\rightarrow$) ni d'expression analytique (comme par exemple $x_i : E \rightarrow K$). A l'approche formelle, Pham & Dillinger préfèrent l'intuition et présentent la notion de base duale à travers une finalité outil-résolution. Les systèmes de coordonnées sont aussi illustrés au moyen de dessins géométriques en dimension 2.

Pham & Dillinger enchaînent avec l'expression d'une fonction linéaire *l* sur *E* (présentée au chapitre précédent) à travers un système de coordonnées linéaires $(x_1, ..., x_n)$ sur l'espace vectoriel *E* : $l = a_1x_1 + a_2x_2 + ... + a_nx_n$, avec $a_i \in K$. Ce qui leur permet de faire le lien avec les formes linéaires à n indéterminées $x_1, ..., x_n$ présentées dans le premier chapitre. Les auteurs précisent que "*bien entendu, quand on voudra interpréter géométriquement les résultats obtenus il faudra se souvenir que les lettres* $x_1, ..., x_n$ *désignent les fonctions coordonnées considérées.*" (Pham & Dillinger 1996, p.130).

Pham & Dillinger justifient l'intérêt des systèmes de coordonnées en disant qu'ils permettent de résoudre par le calcul des problèmes de géométrie, à condition de trouver un système de coordonnées adapté au problème à traiter, c'est-à-dire permettant d'exprimer plus simplement les observations. Ils énoncent et démontrent le fait que, pour tout sous-espace *F* de codimension *p* d'un espace vectoriel (/affine) *E* de dimension *n*, il existe un système de coordonnées linéaires (/affines) $(x_1, ..., x_n)$ tel que *F* soit donné par le système d'équations

$$\begin{cases} x_1 = 0\,. \\ \quad ... \\ x_p = 0 \end{cases}$$

Seul le cas vectoriel va maintenant être présenté. Le cas affine fera l'objet d'une sous-section suivante. En disant que l'addition de deux fonctions linéaires est interne et que la multiplication d'une fonction linéaire par un scalaire est encore une fonction linéaire, Pham & Dillinger affirment que l'ensemble des formes linéaires sur *E* est un espace vectoriel. Ils l'appellent espace dual de *E* et le note *E**. Les *n* fonctions coordonnées $x_1, ..., x_n$ associées à une base $(e_1, ..., e_n)$ d'un espace vectoriel *E* forment donc une base de *E** ; elles sont dites duales l'une de l'autre (il cite la relation de dualité qui les lie). L'espace dual *E** est donc aussi de dimension *n*. Un exercice en dimension 2 est proposé afin d'illustrer géométriquement la dualité dans le plan.

Les auteurs font remarquer que si deux *n*-uplets $(e_1, ..., e_n)$ et $(x_1, ..., x_n)$, respectivement de *E* et *E** vérifient la relation de dualité $x_i(e_j) = \delta_{ij}$, on peut affirmer que ces *n*-uplets constituent des bases de leurs espaces respectifs.

Dans l'énoncé d'un lemme, Pham & Dillinger disent qu'un hyperplan vectoriel *F* est défini par l'annulation d'une fonction linéaire *l* non identiquement nulle. Un vocabulaire géométrique est utilisé en énonçant et démontrant la proposition suivante : le *lieu des zéros* dans *E* d'un système de *p* fonctions linéaires $l_1, ..., l_p$, linéairement indépendantes, est un sous-espace vectoriel *F* de codimension *p*. Ils complètent par la proposition suivante : sous les hypothèses de la proposition précédente, une fonction linéaire *l* sur *E* s'annule en restriction à *F* si et seulement si elle est combinaison linéaire de $l_1, ..., l_p$.

Un résultat plus général est alors présenté : le lieu des zéros d'un système de fonctions linéaires $(l_1, ..., l_p)$ est un sous-espace vectoriel dont la codimension est égale au *rang* de ce système, c'est-à-dire au nombre maximum de fonctions linéairement indépendantes qu'on peut en extraire. L'identification est alors faite entre le rang cité dans la proposition précédente et le rang de l'application linéaire $l: \begin{array}{ccc} E & \to & K^n \\ u & \mapsto & \left(x_1(u), \; ... \;, \; x_n(u)\right) \end{array}$.

Avant de présenter les derniers résultats pour le cas affine, Pham & Dillinger énoncent et démontrent qu'il est toujours possible d'extraire un système de coordonnées sur un sous-espace *F* ($F \subseteq E$) d'un système de coordonnées de l'espace vectoriel *E*.

La <u>deuxième section</u> du chapitre 3 a pour titre "Systèmes linéaires et géométrie". Les auteurs y présentent une interprétation géométrique des solutions d'un système linéaire à *n* inconnues $x_1, ..., x_n$. Pour ce faire, ils interprètent les lettres $x_1, ..., x_n$ dans le système linéaire comme représentant un système de coordonnées sur un espace vectoriel *E* de dimension *n*. Le membre de gauche d'une équation $a_1x_1 + a_2x_2 + ... + a_nx_n = b$ de ce système est la décomposition dans le système de coordonnées d'une fonction linéaire sur *E*. L'équation considérée représente donc un hyperplan affine de *E*. Ainsi, l'ensemble des solutions du système d'équations linéaires peut s'interpréter géométriquement comme l'intersection des hyperplans affines définis par chacune des équations du système. La dualité est donc présentée comme un outil-résolution.

Le cas des systèmes homogènes est d'abord interprété à travers les hyperplans vectoriels (espaces vectoriels) ; le cas des systèmes non homogène sera considéré au moyen d'intersections d'hyperplans affines. Dans les deux cas, l'ensemble des solutions du système linéaire s'interprète comme un sous-espace dont la dimension est la codimension du rang du système linéaire. Des exemples sont donnés dans $\mathbb{R}^3$, représentés par des dessins.

Une sous-section intitulée "Calculs dans un sous-espace vectoriel" explicite le lien entre les formes linéaires à *n* indéterminées : $l = a_1x_1 + a_2x_2 + ... + a_nx_n$, avec $a_i \in K$, et les fonctions linéaires : toute fonction linéaire sur l'ensemble *F* de solutions d'un système linéaire homogène est la restriction d'une fonction linéaire sur *E* qui peut être identifiée à une forme linéaire à *n* indéterminées, mais cette forme linéaire n'est pas unique. Les auteurs précisent que, jusqu'à la fin du paragraphe, ils utiliseront l'expression « forme linéaire » au lieu de fonction linéaire sur *E* (ce qui correspond à la terminologie que nous avons proposée dans le chapitre 1 de notre travail, et qui est partagée dans la plupart des manuels consultés). Ils définissent alors la notion de deux formes linéaires *l* et *l'* *congruentes modulo* un système linéaire homogène S_0 (qu'ils notent $l \overset{\text{mod}.S_0}{=} l'$) par le fait que $l - l' = 0$ est linéairement impliquée par S_0[9]. En conséquence, la donnée d'une fonction linéaire sur *F* équivaut à la

[9] Quatre pages avant de présenter la notion de congruence modulo S_0, Pham & Dillinger énonçaient et démontraient la proposition suivante (p.144) : *Une forme linéaire l est linéairement impliquée par S_0 (c'est-à-*

donnée d'une forme linéaire à *n* indéterminées à congruence modulo S_0 près. Bien entendu, la relation de congruence modulo S_0 près est une relation d'équivalence et est compatible avec l'addition et la multiplication par un scalaire définissant l'espace vectoriel des formes linéaires.

La sous-section suivante présente les résultats analogues pour un sous-espace affine.

La <u>troisième section</u> du chapitre 3 est consacrée au "Calcul matriciel", et reprend un "*point de vue purement formel*", sans "*interprétation géométrique*" (p.151). Le lien entre les systèmes d'équations linéaires et les matrices est fait explicitement : si on note

(1) $\begin{cases} y_1 &= a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + & \dots & +a_{1n}x_n \\ y_2 &= a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + & \dots & +a_{2n}x_n \\ \vdots & \quad \vdots \qquad \vdots & & \vdots \\ y_p &= a_{p1}x_1 + a_{p2}x_2 + & \dots & +a_{pn}x_n \end{cases}$, on appelle $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{p1} & a_{p2} & \dots & a_{pn} \end{pmatrix}$ la matrice de la relation fonctionnelle linéaire (1).

Il avait été précisé que $x_1, ..., x_n$ sont *n* variables scalaires, et que les $y_1, ..., y_p$ sont *p* variables scalaires qui sont *fonction linéaires* de $x_1, ..., x_n$, c'est-à-dire données en fonction de ($x_1, ..., x_n$) par un système de la forme (1). Vient ensuite une présentation des règles de calcul matriciel. C'est dans cette section qu'est définie la matrice transposée d'une matrice, ainsi que la formule ${}^t(BA) = {}^tA{}^tB$ où il faut faire "*attention*" à "*l'ordre inverse*" (p.156).

Après avoir parlé de la matrice inverse, les auteurs reviennent sue l'interprétation en termes de relation fonctionnelle (1), où $n = p$. La matrice inverse est présentée comme un changement de variables. Le rang d'une matrice est défini comme étant le nombre maximum de lignes linéairement indépendantes de cette matrice bien que les auteurs précisent que "*beaucoup d'auteurs définissent le rang comme le nombre maximum de colonnes linéairement indépendantes*" (p. 162). Viennent ensuite les notions de matrices réduites à la forme échelonnée, toujours sans référence aucune à des systèmes linéaires.

La <u>quatrième section</u> du chapitre 3 s'intitule "Calcul matriciel et géométrie". C'est dans cette section qu'est fait le lien entre les matrices et les applications linéaires. Les auteurs précisent qu'on peut faire ce lien selon deux versions : soit considérer une application linéaire de K^n dans K^p (où *K* est le corps des scalaires), soit considérer une application linéaire *f* d'un espace vectoriel *E*, muni d'un système de coordonnées ($x_1, ..., x_n$), dans un espace vectoriel *F*, muni d'un système de coordonnées ($y_1, ..., y_p$). Le lien entre ces deux considérations est expliqué sous forme de compositions de fonctions (sous forme analytique et graphique) :

$$\begin{array}{ccc} F & \overset{f}{\leftarrow} & E \\ \downarrow y & & \downarrow x \\ K^p & \overset{A}{\leftarrow} & K^n \end{array}$$

où la matrice *A* a été définie à la section 3 du chapitre 3 de Pham & Dillinger (en lien direct avec la relation fonctionnelle (1)), et où *x* (respectivement *y*) est l'isomorphisme entre l'espace vectoriel *E* de dimension *n* (resp. *F* de dimension *p*) et K^n (resp. K^p).

Dans la deuxième version présentant le lien entre les matrices et les applications linéaires, Pham & Dillinger précisent que si l'on change les systèmes de coordonnées, on

dire est combinaison linéaire des formes linéaires constituant S_0) si et seulement si *l'hyperplan vectoriel de E d'équation $l = 0$ contient le sous-espace vectoriel Sol(S_0).*

change les éléments de la matrice de l'application *f*. C'est pourquoi ils adopteront la notation $\mathrm{Mat}_y(f)_x$.

Les auteurs expliquent ensuite que les lignes de la matrice A s'interprètent en termes de fonctions coordonnées, et que les colonnes de la matrice A s'interprètent en termes de vecteurs de base, et tout cela de façon naturelle :

- Pour les lignes : se donner $f : E \to F$ revient à se donner $y \circ f : E \to K^p$, puisque *y* est un isomorphisme. Dans le système de coordonnées ($x_1, ..., x_n$), les *p* fonctions linéaires $y_1 \circ f, ..., y_p \circ f$ se décomposent sous la forme suivante :

$$\begin{cases} y_1 \circ f & = & a_{11}x_1 + ... + a_{1n}x_n \\ ... & = & ... \\ y_p \circ f & = & a_{p1}x_1 + ... + a_{pn}x_n \end{cases}$$

  C'est-à-dire : "*la i^{ème} ligne de la matrice A est formée par les coefficients du développement de $y_i \circ f$ comme combinaison linéaire de* $x_1, ..., x_n$." (p. 170).
- Pour les colonnes : Pham & Dillinger considèrent la base duale[10] $(e_1, ..., e_p)$ de ($x_1, ..., x_n$), et la base duale $(\varepsilon_1, ..., \varepsilon_p)$ de $(y_1, ..., y_p)$; ils disent ensuite que : " *la j^{ème} colonne de A est formée par les coordonnées du vecteur $f(e_j)$ dans la base $(\varepsilon_1, ..., \varepsilon_p)$ de F.* " (p.171).

Ainsi, les opérations matricielles présentées dans la section 3 du chapitre 3 du livre de Pham & Dillinger sont-elles interprétées maintenant en termes d'applications. Ce lien est chaque fois explicité sous forme de graphique dans le même genre que celui déjà évoqué plus haut :

$$\begin{array}{ccc} F & \xleftarrow{f} & E \\ \downarrow y & & \downarrow x \\ K^p & \xleftarrow{A} & K^n \end{array}$$

Ainsi, les changements de bases sont expliqués en termes de changement de systèmes de coordonnées.

Pour terminer le chapitre 3, Pham & Dillinger donnent une "*traduction géométrique*" du théorème de réduction des matrices qu'ils avaient donné à la section précédente, en termes d'application linéaire de rang *r*, d'espaces vectoriels, et de systèmes de coordonnées. Ils en présentent deux démonstrations, dont la deuxième utilise la dualité (système de coordonnées, espace dual).

La dualité est encore présente dans l'introduction du **chapitre 4** consacré aux "*Endomorphismes d'un espace vectoriel*" par l'intermédiaire des systèmes de coordonnées : une première fois en tant qu'outil-illustration (p.183), et une deuxième fois en tant qu'objet (p.185) pour signaler que les matrices d'un même endomorphisme dans divers systèmes de coordonnées sont toutes semblables.

Enfin, l'approche formelle de la dualité est présentée dans l'annexe C du livre de Pham & Dillinger, intitulée "*Structures algébriques*". Cinq pages y sont consacrées. Le bidual y est introduit en utilisant implicitement le théorème de réflexivité (qui est par ailleurs énoncé et démontré par après), par analogie avec le dual : un élément *l* de *E** est une fonction qui

[10] Rappelons nous que pour Pham & Dillinger, une base de *E* et une base de *E** liées par la relation de dualité sont dites duales l'une de l'autre. Une base duale n'est donc pas nécessairement dans le dual.

associe à un vecteur (variable) v de E un scalaire $l(v)$ dépendant linéairement de v. En considérant v comme fixé et l comme variable, on *vérifie facilement* que ce scalaire dépend linéairement de l.

Pham & Dillinger en concluent donc que l'application qui va de E* dans K (le corps des scalaires) et qui à l associe $l(v)$, est un élément du « bidual » (espace dual du dual), qui sera noté $\tilde{v}$: $\tilde{v}(l) = l(v)$.

La transposée d'une application linéaire est ensuite définie : soit $f : E \to F$, une application linéaire. $\forall l \in F^*$, $l \circ f \in E^*$. La correspondance $l \mapsto l \circ f$ est appelée l'application transposée de f. Pham & Dillinger la représentent par $E^* \xleftarrow{{}^t f} F^*$. Ils citent ensuite une propriété disant que si f est surjective, sa transposée ${}^t f$ est injective. Comme exemple (éclairant ?), ils donnent ensuite $f = \left(f_1, ..., f_p\right) : E \to K^p$, un k-uplet de fonctions linéaires à valeurs dans K. Ils définissent alors ${}^t f : K^p \to E^*$ telle que $\left(\lambda_1, ..., \lambda_p\right) \mapsto \lambda_1 f_1 + ... + \lambda_p f_p$.

Les coordonnées de la transposée d'une application linéaire $f : E \to F$ peuvent être données par l'intermédiaire des systèmes de coordonnées, si E et F sont de dimension finie : Si $(x_1, ..., x_n)$ est un système de coordonnées de E et que $(y_1, ..., y_p)$ est un système de coordonnées de F, alors, l'application transposée ${}^t f : F^* \to E^*$ est celle qui, à la fonction $l = \lambda_1 y_1 + ... + \lambda_p y_p$ associe la fonction $l \circ f = \lambda_1 (y_1 \circ f) + ... + \lambda_p (y_p \circ f) = \sum_{i=1}^{p} \sum_{j=1}^{n} \lambda_i a_{ij} x_j$ où $\left(a_{ij}\right)$ est la matrice de l'application linéaire f.

Pour affirmer que la matrice de l'application ${}^t f$ (dans les « bonnes bases ») est la transposée de la matrice de f, Pham & Dillinger se servent du fait que les coordonnées du vecteur ${}^t f(l)$ dans la base $(x_1, ..., x_n)$ sont $\sum_{i=1}^{p} \lambda_i a_{i1}$, …, $\sum_{i=1}^{p} \lambda_i a_{in}$; et que $\lambda_1, ..., \lambda_p$ sont les coordonnées du vecteur $l \in F^*$ dans la base $(y_1, ..., y_p)$.

Pham & Dillinger précisent ensuite que si les espaces E et F sont de dimension finie, la transposée d'une application linéaire injective est surjective.

Ils reprennent après un vocabulaire géométrique pour dire que dans le cas d'espaces vectoriels de dimension finie, "*la relation de dualité est symétrique* : si *E' est dual de E, alors E est dual de E'* " (p. 333), et qu'il en est de même pour la relation de transposition : "si l'application linéaire f 'est transposée de l'application linéaire f, alors f est transposée de f ' " (p.334). On remarquera que les notations utilisées ici ne correspondent plus aux notations introduites peu de temps auparavant : E* pour le dual de E, et ${}^t f$ pour l'application transposée de f.

Est ensuite introduite la notion d'*espace conormal* à un sous-espace vectoriel F de E : c'est l'ensemble des fonctions linéaires l sur E telles que $l \mid F = 0$. Il s'agit de ce que nous avons appelé l'annulateur de F. Pham & Dillinger le notent E^*_F. Ils énoncent et prouvent le fait qu'on a un isomorphisme canonique $F^*_E = (E/F)^*$, et que si E est de dimension finie, on a également un isomorphisme canonique $F^* = E^*/E^*_F$.

En conclusion, on peut dire que Pham & Dillinger, en reléguant l'aspect (très) formel des choses dans les annexes, se permettent de garder un point de vue intuitif et géométrique dans le développement des idées tout au long des chapitres de leur livre. Le cadre des systèmes d'équations linéaires est très privilégié pour l'introduction des notions de dualité, par exemple pour les formes linéaires à *n* indéterminées. L'interprétation géométrique est omniprésente, et l'interprétation en termes d'hyperplans est souvent présentée. On pourrait peut-être qualifier de plus difficiles les sujets et thèmes de la dualité que Pham & Dillinger ont choisi de ne présenter que dans l'annexe : le bidual (et le théorème de réflexivité) et l'application transposée.

2.4. Le livre de Merlin

Le livre de Merlin, 400 pages, comporte 18 chapitres, dont les 16 premiers exposent des méthodes concernant un secteur ou un sujet d'algèbre. L'avant dernier chapitre reprend un « best-of » concernant des endomorphismes, et le dernier chapitre reprend une synthèse, en quatre pages, de ce que l'auteur appelle l'essentiel de l'algèbre.

Après avoir exposé des méthodes concernant l'étude des polynômes et la décomposition d'une fraction rationnelle en éléments simples (chapitres 1 et 2), l'auteur présente un chapitre portant sur des *méthodes générales d'algèbre linéaire (espaces vectoriels et applications linéaires)*. C'est juste après que la dualité est abordée : un **chapitre** entier (le **quatrième**) lui est consacré. Il comporte quatre sections. Seuls les espaces vectoriels de dimension *finie* y sont étudiés.

Etant donnée la spécificité de l'ouvrage qui consiste en un exposé de méthodes, nous énumérerons les titres des méthodes proposées où intervient la dualité.

La première section s'intéresse aux *formes linéaires*. Trois méthodes y sont expliquées :

Méthode 1 : Comment montrer que φ est une forme linéaire

La notation du crochet de dualité est introduite : $\varphi(x) = \langle \varphi, x \rangle$[11], le dual d'un espace vectoriel *E* est noté *E**, et l'attention du lecteur est portée sur la différence existante entre une forme linéaire et une forme *n*-linéaire (comme le déterminant d'une matrice d'ordre n). La trace d'une matrice est donnée comme exemple de forme linéaire.

Méthode 2 : Utiliser le catalogue des formes linéaires.

Deux cas sont présentés : celui d'un espace euclidien et celui de l'espace des matrices carrées d'ordre *n* : $M_n(\mathbb{R})$. Dans le cas d'un espace euclidien, c'est le théorème de Riesz qui est cité (Merlin n'en donne pas le nom) :

$$\forall \varphi \in E^*, \exists ! a \in E \quad \text{tq:} \quad \forall x \in E \quad \varphi(x) = \langle a, x \rangle .$$

Merlin en donne une interprétation géométrique (p.62) : "*En gros, il suffit de bien choisir un vecteur directeur de l'orthogonal du noyau de la forme en question, qui est une droite (ou l'espace nul).*"

[11] Remarquons qu'il s'agit de la même notation $\langle .,. \rangle$ que celle qui est utilisée dans cet ouvrage pour le produit scalaire. Il précisera explicitement par la suite (p.64) que les arguments du crochet de dualité sont de nature duale : une forme linéaire et un vecteur, alors que les arguments du produit scalaire sont de même nature.

En ce qui concerne $M_n(\mathbb{R})$, Merlin annonce que toute forme linéaire sur cet espace s'écrit à l'aide de la trace : $\forall \varphi \in \mathcal{M}_n{}^*, \exists! A \in \mathcal{M}_n$ tq: $\forall M \in \mathcal{M}_n \quad \varphi(M) = \mathrm{Tr}(AM)$. Un exemple est donné.

Méthode 3 : Comment utiliser la définition d'une forme linéaire

Merlin présente les propriétés qui découlent de la définition d'une forme linéaire. Il parle alors d'hyperplan (p.63) :

(i) *Le noyau d'une forme linéaire* ***non nulle*** *est un* ***hyperplan***

(ii) *Tout hyperplan est le noyau d'(au moins) une forme linéaire* ***non nulle***

(iii) *Toute forme linéaire* ***non nulle*** *est surjective*

(iv) *Deux formes linéaires* $\neq 0$ *ont même noyau ssi elles sont proportionnelles*.

Un exemple est donné.

La <u>deuxième section</u> s'intitule "*Orthogonalité*"

Méthode 4 : Comment utiliser l'orthogonal d'un s-ev

Tout comme Escofier, Merlin donne la définition de l'orthogonal d'un sous-espace de E et d'un sous-espace de E^*, en utilisant la même notation ($\perp$) :

Si le sous-espace F est inclus dans E : $F^\perp = \{\varphi \in E^* \text{ tq : } \forall x \in F : \langle \varphi, x \rangle = 0\}$;

si le sous-espace G est inclus dans E^* : $G^\perp = \{x \in E \text{ tq : } \forall \varphi \in G : \langle \varphi, x \rangle = 0\}$.

Merlin rappelle que comme on est en dimension finie, on peut identifier E et son bidual. Il explique aussi la notation F° utilisée par d'autres auteurs pour l'orthogonal d'un sous-espace F (inclus dans E ou E^*). Il ajoute qu'il se permet d'utiliser la notation $F^\perp$ car à son avis, "*ce n'est pas une source de confusion puisqu'on sait toujours dans quel espace se trouve la partie en question. Ce serait plutôt l'accumulation de notations (* $F^\circ, F^\perp$ *) qui entraînerait cette confusion.*" (p.64).

Il cite ensuite quatre propriétés importantes impliquant les orthogonaux de sous-espaces :

(i) $F \subset G \Rightarrow \left(G^\perp \subset F^\perp \text{ et } \left(F^\perp\right)^\perp = F\right)$;

(ii) $\dim F^\perp = n - \dim F$, où n est la dimension de l'espace vectoriel dont F est sous-espace ;

(iii) $(F \cap G)^\perp = F^\perp + G^\perp$ et $(F + G)^\perp = F^\perp \cap G^\perp$;

(iv) $(\mathrm{Ker}\ \varphi)^\perp = \mathrm{Vect}(\varphi)$, où $\mathrm{Vect}(\varphi)$ est le sous-espace du dual engendré par φ. Cette propriété revient à dire que des formes linéaires qui ont même noyau sont proportionnelles.

Méthode 5 : Comment utiliser l'orthogonal d'une partie

Merlin présente une finalité outil-résolution des annulateurs : par exemple, lorsque les orthogonaux de deux sous-espaces sont simples à exprimer, montrer l'égalité de deux sous-espaces, revient à montrer l'égalité de leurs orthogonaux. Ou encore pour montrer qu'une famille de vecteurs est génératrice d'un espace vectoriel, on montre que l'orthogonal de l'espace engendré par ces vecteurs est réduit à l'origine, ce qui revient à montrer qu'une forme linéaire qui s'annule sur tous les vecteurs de la famille est nulle partout.

La troisième section du chapitre 4 présente les *bases duales*.

Méthode 6 : Comment déterminer la base duale

Merlin rappelle la définition de la base duale d'une base (e_i) de E. Il la note (e_i^*). Il rappelle le principe pour la détermination d'une base duale : il s'agit d'expliciter la définition en tenant compte de l'expression particulière des vecteurs et des formes sur l'espace envisagé. Il précise que statistiquement parlant, les exercices sur la dualité ont souvent pour cadre un espace de polynômes. Dans ces cas-là, il suggère de penser, non seulement à la base canonique, mais également à la base des polynômes interpolateurs de Lagrange.

L'auteur rappelle la propriété qui dit que si une famille de vecteurs de E et une famille de formes linéaires définies sur E vérifient la relation définissant les bases duales, ces deux familles sont automatiquement des bases de leurs espaces respectifs.

Des exemples sont donnés pour E = espace des polynômes.

La quatrième et dernière section du chapitre "Dualité" s'intéresse à la *transposée*.

Méthode 7 : Comment déterminer la transposée de f ?

Merlin rappelle la définition de la transposée d'une application linéaire $f: E \to F$ en termes de composition de fonctions : il s'agit de l'unique application linéaire de F^* dans E^* telle que : $\forall \psi \in F^* \quad {}^t f(\psi) = \psi \circ f$, ou dit de manière plus développée : $\forall \psi \in F^* \quad \forall x \in E \quad \left\langle {}^t f(\psi), x \right\rangle_E = \left\langle \psi, f(x) \right\rangle_F$. Merlin fait ensuite l'analogie avec la définition de l'adjoint d'un endomorphisme, "*pour ceux qui maîtrisent l'algèbre bilinéaire*". Un exemple est donné en prenant l'opérateur de dérivation sur l'espace des polynômes $\mathbb{R}_n[X]$.

L'auteur précise qu'il faut de la rigueur pour savoir dans quel espace on se trouve lorsqu'on traite des exercices faisant intervenir la transposée.

Méthode 8 : Comment utiliser la transposée

Pour répondre à la question posée dans le titre de la méthode, Merlin rappelle d'abord quatre propriétés concernant la transposée, dont le théorème fondamental de l'algèbre linéaire (ii) :

(i) $rg(f) = rg({}^t f)$

(ii) $\mathrm{Ker}({}^t f) = (\mathrm{Im}\, f)^\perp$ et $\mathrm{Im}({}^t f) = (\mathrm{Ker}\, f)^\perp$

(iii) ${}^t(g \circ f) = {}^t f \circ {}^t g$

(iv) F est stable[12] par $f \Leftrightarrow F^\perp$ est stable par ${}^t f$.

[12] On rappelle qu'un sous-espace F est stable par une transformation linéaire f si et seulement si $\forall v \in F$: $f(v) \in F$.

Merlin précise que la relation (iv) est souvent utilisée dans les démonstrations par récurrence car si $f(F) \subset F$ (sous espace F stable par f), on peut considérer la restriction de f à F. Un exemple géométrique est donné. Il ajoute que la transposée intervient comme outil-démonstration dans le théorème de trigonalisation qu'il présentera au chapitre 9 consacré aux méthodes de réduction théoriques.

Enfin, il dit en remarque qu'il y a égalité entre la transposée de la matrice d'une application linéaire f et la matrice de l'application transposée ${}^t f$ en précisant les bases par rapports auxquelles les matrices sont exprimées.

A la fin du chapitre 4 consacré à la dualité, Merlin cite des erreurs fréquemment commises, et des astuces pour la résolution d'exercices. Des exercices sont ensuite énoncés et corrigés. Parmi les erreurs citées, il y a la tendance à :

- considérer la composition de deux formes linéaires, ce qui n'a évidemment aucun sens ;
- travailler avec des matrices lorsqu'on aborde la dualité, ce qui est délicat car il ne faut pas oublier d'établir les bases par rapport auxquelles on se positionne ;
- oublier que les méthodes présentées concernent la dimension *finie*, où on peut considérer qu'il y a équivalence entre un espace vectoriel et son bidual, entre un sous-espace F et $\left(F^{\perp}\right)^{\perp}$;
- oublier le fait que le noyau de la *forme linéaire nulle* n'est pas un hyperplan, mais l'espace tout entier : un hyperplan est le noyau d'une forme linéaire *non nulle*.

On retrouve l'utilisation de la dualité au **chapitre 6** consacré aux méthodes de calculs matriciels (2$^{\text{ème}}$ partie). A la deuxième section dédiée à la trace, il énonce une méthode qui demande d'utiliser le fait que « toute forme linéaire est une trace ». Il s'agit là d'une finalité outil-résolution de la dualité. Il en est de même à la cinquième section de ce chapitre consacrée aux espaces stables dans la méthode 19 qui propose d'utiliser la transposition : l'intérêt est important dans le cas de recherche d'hyperplan stable par A : cela revient à rechercher des droites stables par ${}^t A$, c'est-à-dire des espaces propres.

C'est ensuite au **chapitre 9** que Merlin reparle de la dualité. Ce chapitre est consacré aux méthodes de réduction théorique. A la cinqième section de ce chapitre ("Réductions simultanées"), l'idée 8 propose d'utiliser une récurrence et la transposition comme outil-démonstration pour la propriété affirmant que deux endomorphismes trigonalisables qui commutent sont cotrigonalisables (c'est-à-dire trigonalisables dans une même base).

Enfin, au **chapitre 14** dédié aux méthodes générales d'algèbre bilinéaire, dans la première section qui explique comment étudier les propriétés des formes, se trouve la méthode 9 qui s'intéresse à la décomposition de Gauss d'une forme hermitienne. La finalité outil-définition est donc mise en œuvre puisque pour toute forme hermitienne, il existe une décomposition en somme de modules de formes linéaires (décomposition de Gauss).

Ensuite, la méthode 10 explique comment déterminer l'orthogonal d'une partie. L'orthogonal d'un sous-espace exprimé à l'aide d'une forme bilinéaire est comparé à l'orthogonal défini au sens de la dualité. C'est donc une finalité outil-analogie de la dualité qui est mise en œuvre.

Peu après, dans cette même section, la méthode 16 s'intéresse à la façon de déterminer une base orthonormale. Cette méthode suppose qu'on ait trouvé une décomposition de Gauss pour une forme quadratique q qui fasse intervenir n formes linéaires, où n est la dimension de l'espace considéré : $q(x)=\sum_{i=1}^{n}\alpha_i L_i(x)^2$. Par construction ces n formes sont linéairement indépendantes ; si on en détermine la base duale (donc une base de E), elle sera bien orthogonale, puisque la matrice de q dans cette base sera diagonale.

Enfin, au **chapitre 18** qui clôture son livre, Merlin résume en quatre pages ce qu'il considère comme l'essentiel de l'algèbre. Il y rappelle que lorsqu'on manipule des sous-espaces stables, il est bon de se servir de la transposée.

En conclusion, on peut dire que Merlin considère la dualité comme un outil à bien des égards : on y trouve des finalités outil-analogie, outil-résolution, outil-définition et outil-démonstration. On pouvait se douter que, vu la spécificité de son ouvrage, la dualité allait principalement être présente sous le statut d'outil.

2.5. Le livre de Uhlig : un cas particulier

Dans notre analyse de manuels, nous pouvons qualifier de *cas particulier* le livre d'Uhlig (2002) car cet auteur ne présente pas la dualité en tant qu'objet dans son ouvrage. Pourtant, elle y est belle et bien présente, tout au long des chapitres.

Dans sa préface, Uhlig annonce que son livre met l'accent sur les concepts d'algèbre linéaire et de la théorie des matrices. De fait, les matrices sont omniprésentes dans son ouvrage. Il met l'accent sur l'interprétation des concepts présentés. Dès le **premier chapitre**, consacré aux applications linéaires, il affirme très rapidement (p. 19) que les applications linéaires et les vecteurs sont les objets fondamentaux de l'algèbre linéaire. Peu de temps après (p. 22), il dit que les applications linéaires $f:\mathbb{R}^n\rightarrow\mathbb{R}^m$ sont constituées de *m* composantes : les fonctions $f_j:\mathbb{R}^n\rightarrow\mathbb{R}$. On a donc : $f=\begin{pmatrix} f_1\\ \vdots\\ f_m\end{pmatrix}$.

A la page 24, il présente le théorème de Riesz sous forme de lemme : une application $f(x):\mathbb{R}^n\rightarrow\mathbb{R}$ est linéaire si et seulement si $f(x)$ peut s'exprimer comme un produit scalaire $a\cdot x$ pour un vecteur fixé $a\in\mathbb{R}^n$ dépendant de *f* et pour tout $x\in\mathbb{R}^n$. Uhlig précise ensuite la manière dont le vecteur *a* est uniquement déterminé par *f* : $a=\begin{pmatrix} f(e_1)\\ \vdots\\ f(e_n)\end{pmatrix}$ où $\varepsilon=(e_1,...,e_n)$ est la base canonique de $\mathbb{R}^n$. Ce vecteur *a* ainsi défini est appelé le vecteur colonne de Riesz de *f* en rapport avec la base canonique ε de $\mathbb{R}^n$.

Grâce à cette interprétation, l'auteur effectuera une lecture des matrices aussi bien colonne par colonne que ligne par ligne, mettant en avant le caractère dual de l'interprétation.

A la page 25, il dit qu'il est plus facile de représenter le produit scalaire ***a . x*** comme le produit d'une représentation de ***a*** par un vecteur ligne et d'une représentation de *x* par un vecteur colonne. Il enchaîne en disant :

> This is done solely for convenience at this moment. This row-times-column convention for dot products enables us to use a magnificient **shorthand notation** for linear transformations.

A la page 29, il précise qu'il est capable de classifier toutes les applications linéaires $f:\mathbb{R}^n\rightarrow\mathbb{R}^m$ comme des multiplications d'une matrice et d'un vecteur : $f(x)=Ax$, pour une matrice $A_{m,n}$ fixée et dépendant de *f*, un vecteur arbitraire *x* de $\mathbb{R}^n$ et l'image $f(x)$ de $\mathbb{R}^m$ (il ne considère que les bases canoniques dans les six premiers chapitres). Cette remarque va lui permettre de traiter toutes les applications linéaires à travers les matrices, et il ne va pas s'en priver par la suite.

A la page 31, il décrit une transformation de $\mathbb{R}^3$ dans $\mathbb{R}^4$ à l'aide d'équations. Il utilise ensuite l'écriture matricielle pour réécrire la transformation. Il précise que la notation matricielle nous aide à décrire plus simplement des équations compliquées. Le lecteur peut alors constater que les lignes de la matrice reprennent les équations décrivant la transformation, ce que nous pouvons interpréter comme une référence à la dualité en algèbre linéaire. On peut percevoir là une finalité *outil-résolution* de la dualité.

Le **deuxième chapitre** du livre est consacré à la réduction d'une matrice à la forme échelonnée par lignes. C'est dans ce chapitre qu'il définit le rang d'une matrice *A* comme étant le nombre de pivots dans la forme échelonnée par la ligne de la matrice *A*.

Le **chapitre 3** est consacré aux équations linéaires. La compatibilité d'un système linéaire d'équations $Ax = b$ est présentée en termes de rang ; et l'unicité d'une solution est à la condition que chaque colonne de la matrice échelonnée par ligne de la matrice *A* contienne un pivot. Le noyau (d'une matrice *A*) est également défini dans ce chapitre, car il intervient pour décrire l'ensemble solution de l'équation matricielle $Ax = b$.

Le **chapitre 4** est dédié aux sous-espaces. L'auteur commence par définir l'image d'une matrice *A*. Il rappelle ensuite qu'en théorie des ensembles, tous les sous-ensembles d'un ensemble donné peuvent être représentés de deux façons intrinsèques et équivalentes, à savoir inclusivement ou exclusivement. Il écrit alors explicitement (p.115) :

> We apply this dual representation of sets to linear algebra.

Il donne tout d'abord la définition inclusive d'un sous-espace en définissant alors le "Span d'un ensemble de vecteurs", c'est-à-dire le sous-espace engendré par un ensemble de vecteurs comme étant l'ensemble des combinaisons linéaires de cet ensemble de vecteurs.

Pour introduire la représentation exclusive d'un sous-espace, il fait appel à la notion d'orthogonalité (qui sera davantage détaillée au chapitre 10 de son livre). L'auteur explique que dans $\mathbb{R}^n$, il est parfois plus adéquat de décrire un sous-espace *U exclusivement*, en demandant que tous les vecteurs *u* de ce sous-espace soient orthogonaux à quelques vecteurs directeurs $a_i \in \mathbb{R}^n$, exclus du sous-ensemble *U*. Uhlig définit alors le sous-espace $U^{\perp}$ complément orthogonal d'un sous-espace *U* de $\mathbb{R}^n$.

Le théorème 4.1 (p.118) affirme que tout sous-espace *U* de $\mathbb{R}^n$ peut être représenté de deux façons équivalentes et complémentaires :

→ comme un *span* de certains vecteurs de U :

$$U = Span\{u_1, ..., u_k\} = \mathrm{Im}\begin{pmatrix} | & & | \\ u_1 & \cdots & u_k \\ | & & | \end{pmatrix}$$

pour certains vecteurs $u_i \in U$;

→ ou comme un *noyau* :

$$U = Ker\begin{pmatrix} — & a_1^T & — \\ & \vdots & \\ — & a_l^T & — \end{pmatrix} = Span\{a_1,...,a_l\}^{\perp} = \{x_{\text{hom}}\}$$

pour certains vecteurs $a_i \in \mathbb{R}^n$; où $\{x_{\text{hom}}\}$ désigne les solutions du système linéaire homogène $\begin{pmatrix} — & a_1^T & — \\ & \vdots & \\ — & a_l^T & — \end{pmatrix} x = 0$.

Le théorème se termine en disant que si $U = Ker(A) = Span\{a_1,...,a_l\}^{\perp} \subset \mathbb{R}^n$ est définit de manière exclusive par une matrice $A_{l\ n}$, alors l'ensemble de toutes les solutions homogènes x_{hom} du système d'équations linéaires $Ax = 0$ engendre *U*.

On peut percevoir là une finalité *outil-définition* de la dualité.

L'auteur poursuit le chapitre en décrivant des méthodes permettant de passer d'une représentation inclusive (*Span*) à une représentation exclusive (*Noyau*) d'un même sous-espace.

Bref, tout au long de ce chapitre, la dualité est utilisée par l'auteur.

Le **chapitre 5** a pour titre « dépendance linéaire, bases et dimension ». On y retrouve une section expliquant comment trouver une base pour les deux représentations génériques d'un sous-espace.

Le **chapitre 6** est dédié à la composition d'applications linéaires, à la matrice inverse et à la matrice transposée. Attardons-nous un instant sur la présentation qu'Uhlig y fait de la transposée d'une matrice. Après avoir rappelé la définition de la transposée d'un vecteur ligne en un vecteur colonne qui avait été donnée dans l'introduction, l'auteur définit la transposée d'une matrice A (inversion des lignes et des colonnes). Viennent ensuite des théorèmes comme $B^T A^T = (AB)^T$ et $(A^T)^{-1} = (A^{-1})^T$. La transposée n'est ensuite plus présentée que pour la transposition d'une matrice de permutations utilisée dans la présentation de l'élimination de Gauss vue sous forme de produits de matrices.

L'auteur présente ensuite une vue duale de la multiplication matricielle *A.B* :

> The foregoing exposition gives us a **dual view** of matrix multiplication A times B. It depends on which object we focus on: either on the columns of the first matrix factor **A** or on the rows of the second one **B**. (Uhlig 2002, p.191).

Les égalités suivantes peuvent illustrer ces propos :

$$AB = \begin{pmatrix} | & & | \\ a_1 & \cdots & a_n \\ | & & | \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_{11} & \cdots & b_{1k} \\ \vdots & & \vdots \\ b_{n1} & \cdots & b_{nk} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} | & & | \\ \sum_{i=1}^{n} b_{i1} \begin{pmatrix} | \\ a_i \\ | \end{pmatrix} & \cdots & \sum_{i=1}^{n} b_{i1} \begin{pmatrix} | \\ a_i \\ | \end{pmatrix} \\ | & & | \end{pmatrix}$$ d'une part et

$$AB = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} - & b_1 & - \\ & \vdots & \\ - & b_n & - \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sum_{j=1}^{n} a_{1j} \begin{pmatrix} - & b_j & - \end{pmatrix} \\ \vdots \\ \sum_{j=1}^{n} a_{mj} \begin{pmatrix} - & b_j & - \end{pmatrix} \end{pmatrix}$$ d'autre part.

On peut reconnaître là une finalité *outil-illustration* de la dualité.

On perçoit aussi la dualité dans le **chapitre 7**, consacré aux coordonnées de vecteurs et aux changements de base, car l'auteur présente dans ce chapitre le théorème disant que le rang d'une matrice A et de sa transposée A^T sont les mêmes pour toute matrice $A \in \mathbb{R}^{m,n}$. La démonstration de ce théorème fait bien évidemment appel à la forme échelonnée par ligne de la matrice *A*, étant donné que c'est sous cet angle que sont abordés la plupart des concepts présentés dans cet ouvrage.

Cette propriété de la matrice transposée est utilisée dans la preuve[13] du corollaire suivant :

Soit $U = Span\{u_1, ..., u_k\} \subset \mathbb{R}^n$ et supposons que le vecteur $a \notin U$. Alors, il existe un vecteur $b \in \mathbb{R}^n$ tel que $b \perp U$. De plus, $0 \neq b \notin U$.

On voit donc intervenir la finalité *outil-démonstration* de la dualité dans l'ouvrage d'Uhlig.

Remarquons l'importance de ce corollaire qui, par exemple, motive la méthode des moindres carrés.

Dans le **chapitre 8**, qualifié d' « optionnel » par l'auteur, et intitulé « Déterminants et $\lambda -$matrices », on ne retrouve de la transposée que la propriété disant que le déterminant d'une matrice et de sa transposée sont égaux. Le chapitre suivant, dédié aux valeurs propres et vecteurs propres d'une matrice, ne fait pas référence à la dualité.

On aperçoit la dualité dans le **chapitre 10** consacré aux bases orthogonales et aux matrices orthogonales. Bien entendu on retrouve la transposée d'une matrice quand on parle de matrice orthogonale (cas réel), mais les propriétés présentées au chapitre 4 (représentations inclusive et exclusive d'un sous-espace vectoriel) du présent ouvrage mettent davantage en lumière l'apport d'une approche duale quand il s'agit de compléter un ensemble de vecteurs orthonormés pour obtenir une base de $\mathbb{R}^n$ (p.325). Un peu plus loin dans ce chapitre pour introduire la factorisation QR d'une matrice, l'auteur dit explicitement qu'il a utilisé à plusieurs reprises dans son ouvrage des concepts duaux (p. 334) :

> We study Householder matrices as generators of the orthogonal ones, all in view of general orthogonal matrix factorizations.
>
> Our early chapters were built on several twofold, or **dual, concepts**:
>
> > A matrix A was defined by its entries a_{ij}, or as the representation of a linear transformation $x \mapsto Ax$.

[13] Voir chapitre 3, § 1.1, « **Erreur ! Source du renvoi introuvable.** ».

> The solvability and unique solvability of a linear system $Ax = b$ were determined by row and by column properties of a REF[14] of A.
>
> The product of two matrices was viewed as a linear replacement of the columns of the first factor or as the same for the rows of the second matrix factor.
>
> Here is another dual concept for matrices: that of an additive and a multiplicative generation of matrices.

Nous n'explorerons pas davantage les chapitres suivants, consacrés aux valeurs propres de matrices symétriques et normales[15], aux valeurs singulières, et aux techniques numériques de base en algèbre linéaire, où la dualité n'est pas présente, ou tout au moins pas de manière aussi évidente que dans les chapitres précédents.

[14] REF : Row Echelon Form.

[15] Une matrice réelle A_{nn} est normale si $A^T A = AA^T$. Une matrice complexe A_{nn} est normale si $A^* A = AA^*$.

Annexe 4. Formule de quadrature pour un polynôme de degré inférieur à *n*

Au chapitre 3, pour illustrer le fait que des notions de dualité pouvaient être mises en fonctionnement à un niveau disponible (Robert 1998), nous avons proposé la tâche suivante :

Montrer que, si I est un intervalle réel, et que $t_1,...,t_n$ sont n points distincts, il existe n nombres $m_1,...,m_n$ tels que, pour tout polynôme p de degré inférieur n, on peut écrire :

$$\int_I p(t)dt = m_1 p(t_1) + ... + m_n p(t_n) \quad \text{(formule de quadrature).}$$

Pour mener à bien cette tâche, nous proposons la démonstration suivante, inspirée de Lax (2007, p. 17-18) :

Désignons par X l'espace vectoriel des polynômes $p(t) = a_0 + a_1 t + a_2 t^2 + ... + a_{n-1} t^{n-1}$ de degré inférieur à n. On a dim(X) = n.

Définissons n fonctions f_i $(i = 1,...,n)$ par $f_i : \begin{array}{ccc} X & \to & \mathbb{R} \\ p & & f_i(p) = p(t_i) \end{array}$.

On vérifie aisément qu'il s'agit de formes linéaires définies sur X, c'est-à-dire que les formes linéaires f_i appartiennent au dual de X que nous noterons X'.

Ces formes linéaires f_i $(i = 1,...,n)$ sont linéairement indépendantes. En effet :

> Montrons que $\sum_{i=1}^{n} \alpha_i f_i = 0 \Rightarrow \left(\forall i = 1,...,n : \alpha_i = 0\right)$.
>
> Or, $$\sum_{i=1}^{n} \alpha_i f_i = 0 \Leftrightarrow \left(\forall p \in X : \sum_{i=1}^{n} \alpha_i f_i(p) = 0\right)$$
> $$\Leftrightarrow \left(\forall p \in X : \sum_{i=1}^{n} \alpha_i p(t_i) = 0\right) \qquad (1)$$
>
> Définissons maintenant le polynôme q_k tel que $q_k(t) = \prod_{i \neq k} (t - t_i)$. Ce polynôme, de degré (n-1), appartient donc à X. Nous pouvons donc particulariser la relation (1) en prenant $p = q_k$. Comme de par sa définition, $\forall i \neq k : q_k(t_i) = 0$, la relation (1) particularisée à q_k donne :
>
> $$\alpha_k q_k(t_k) = 0 \qquad (2)$$
>
> Or, toujours par la définition de q_k, $q_k(t_k) \neq 0$. Par (2), on a donc que $\alpha_k = 0$.
>
> Comme ce raisonnement peut être tenu pour tout $k \in [1,...,n]$, on a bien que $\forall i = 1,...,n : \alpha_i = 0$.

On a donc n formes linéaires f_i $(i = 1,...,n)$ linéairement indépendantes dans un espace de dimension de dimension n (car dim X'= dim X = n). Les formes linéaires f_i $(i = 1,...,n)$

constituent donc une base de *X'*. Ainsi, tout élément du dual peut s'écrire comme combinaison linéaire des f_i $(i=1,\dots,n)$:

$$\forall f \in X' : \left(\exists m_i \in \mathbb{R} : f = \sum_{i=1}^{n} m_i f_i \right) \qquad (3)$$

Or, l'intégrale, sur un intervalle *I*, d'un polynôme est une forme linéaire définie sur *X*, et est donc un élément du dual *X'*. On peut donc particulariser (3) en remplaçant *f* par $\int_I \bullet \, dt$. On a donc bien : $\exists m_i \in \mathbb{R} : \quad \forall p \in X :$

$$\begin{aligned} f(p) &= \sum_{i=1}^{n} m_i f_i(p) \\ \int_I p(t)dt &= \sum_{i=1}^{n} m_i f_i(p) \\ &= \sum_{i=1}^{n} m_i p(t_i) \qquad \square \end{aligned}$$

Annexe 5. Contexte de l’enseignement de la dualité à l’université de Namur

Cette annexe se compose de deux parties :

1. Nous présentons dans un premier temps (§ 1) la table des matières du polycopié qui sert de support au cours théorique d’algèbre linéaire en première année pour les sections mathématique et physique à l’université de Namur (Belgique). Comme dans l’Annexe 3, afin d’avoir une vision d'ensemble de l'endroit d'introduction et/ou d'utilisation des thèmes liés à la dualité dans le domaine de l’algèbre linéaire, nous avons ajouté à la table des matières, des notations entre crochets (**[ ]**). Il s'agit des sujets et thèmes que nous avons définis pour le secteur dualité. Pour éviter toute ambiguïté avec les composantes de la table des matières elle-même, ces notations sont **<u>en caractères gras et soulignées</u>**.
2. Dans un second temps (§ 2), nous présentons les pages de ce polycopié (Toint 2007) concernant la dualité. Ces pages proviennent du polycopié d’une étudiante inscrite en première année en mathématiques à l’université de Namur en 2008-2009. Cette étudiante, en assistant au cours, complétait les informations reprises dans le polycopié par les explications que le professeur donnait au cours théorique.

1. Table des matières du livre de Toint (2007)

6.1.8. Rang, noyau et image des applications linéaires adjointes [**<u>théorème fondamental de l’algèbre linéaire</u>**]
6.2. Transformations unitaires
6.2.1. Transformations unitaires et changement de coordonnées orthogonales
6.2.2. Propriétés élémentaires des matrices unitaires
6.2.3. Réflecteurs et réduction à la forme triangulaire
6.2.4. Diagonalisation des matrices unitaires

Chapitre 7. Formes hermitiennes
7.1. Transformations auto-adjointes
7.1.1. Définition et matrice associée
7.1.2. Structure propre
7.1.3. Quotient de Rayleigh
7.1.4. Propriétés extrémales des valeurs propres
7.2. Classification des formes hermitiennes
7.2.1. Congruence et inertie
7.2.2. Matrices hermitiennes définies positives
7.2.3. Matrices semi-définies positives
7.3. Autres problèmes hermitiens
7.3.1. Problème aux valeurs propres généralisé et biréduction
7.3.2. Valeurs singulières

Chapitre 8. Normes matricielles : définitions et propriétés élémentaires
8.1. Normes matricielles compatibles
8.2. Quelques normes matricielles usuelles
8.3. La trace d’une matrice
8.4. Propriétés élémentaires des normes matricielles
8.5. Normes matricielles et matrices inverses

Chapitre 9. Projections et inverse généralisé
9.1. Projections
9.1.1. Projections dans un espace vectoriel
9.1.2. Projections orthogonales dans un espace métrique
9.2. L’inverse généralisé

Chapitre 10. Systèmes d’équations linéaires
10.1. Systèmes carrés
10.1.1. Règle de Cramer
10.1.2. Elimination de Gauss
10.1.3. Factorisation triangulaire
10.1.4. Permutations et pivotage
10.1.5. Factorisation orthogonale
10.2. Problèmes aux moindres carrés
10.2.1. Equations normales
10.2.2. Orthogonalisation
10.2.3. Décomposition en valeurs singulières

2. Pages du polycopié (Toint 2007) présentant la dualité

Nous présentons ici l'extrait du polycopié du cours d'algèbre linéaire (Toint 2007) annoté par une étudiante.

Théorème 2.21 Le produit AB de deux matrices rectangulaires A et B est défini comme la matrice associée au produit des applications linéaires représentées par A et B (par rapport aux mêmes bases) et aura donc un sens si et seulement si le nombre de lignes de B est égal au nombre de colonnes de A. La matrice produit aura le même nombre de lignes que A et le même nombre de colonnes que B.

$(n, m) \cdot (m, z) = (n, z)$

La règle de multiplication de matrices rectangulaires peut alors s'écrire, de manière tout à fait analogue à la multiplication des matrices carrées, comme

$$[fg]_{ij} = \sum_{k=1}^{dim(F)} [f]_{ik}[g]_{kj}, \quad \forall\, i = 1, \ldots,\ \dim(G), \quad \forall\, j = 1, \ldots,\ \dim(E).$$

Les règles de multiplication de matrices carrées et rectangulaires sont donc identiques.

2.5 Formes linéaires

Nous commencons par définir ce que nous entendons par forme linéaire.

Définition 38 *Une forme linéaire sur un espace vectoriel E est une application y de E dans $\mathbb{K}$ définie pour tout vecteur x et satisfaisant la propriété* à un vecteur, on fait correspondre un scalaire

$$\forall x, z \in E\ \forall \alpha, \beta \in \mathbb{K}\ \ y(\alpha x + \beta z) = \alpha y(x) + \beta y(z), \tag{2.4}$$

où $\mathbb{K}$ est le corps associé à l'espace vectoriel E.

Donnons quelques exemples de formes linéaires :

1. Choisissons n scalaires $\alpha_1, ..., \alpha_n$ dans $\mathbb{K}$. Alors la fonction de $\mathbb{K}^n$ dans $\mathbb{K}$ qui, à $x = (x_1, \ldots, x_n)$ dans $\mathbb{K}^n$ associe
$$y(x) = \alpha_1 x_1 + \cdots + \alpha_n x_n$$
est une forme linéaire sur $\mathbb{K}^n$.
2. En particulier, pour un j entre 1 et n fixé, la forme
$$y(x) = x_j$$
est une forme linéaire sur $\mathbb{K}^n$.
3. Remarquons qu'à partir d'une forme linéaire y_0 et d'un vecteur x_0 fixés, on peut toujours construire la transformation linéaire définie par
$$f(x) = y_0(x)x_0.$$

41

4. On remarque immédiatement que par linéarité, toute forme linéaire envoie l'origine de l'espace sur le zéro du corps associé

$$y(0+0) = y(0) = y(0) + y(0) \quad \Rightarrow \quad y(0) = 0.$$

Nous pouvons définir la somme de deux formes linéaires de manière naturelle par la relation

$$(y_1 + y_2)(x) = y_1(x) + y_2(x), \tag{2.5}$$

pour deux formes linéaires quelconques y_1 et y_2 et tout vecteur x. De même, on définira la multiplication scalaire par la relation

$$(\alpha y)(x) = \alpha y(x) \tag{2.6}$$

pour tout x et toute forme linéaire y.

Plus généralement, ces propriétés peuvent être résumées dans le théorème suivant :

Théorème 2.22 Toute combinaison linéaire de formes linéaires est une forme linéaire.

Matrice pr une forme linéaire : $E \to K \Rightarrow \dim K = 1$ ligne et $\dim E$ colonnes

Nous pouvons également associer, une fois les bases de E et du champ des scalaires $\mathbb{K}$ fixées, une matrice à une forme linéaire : par exemple, si nous considérons un espace vectoriel à champ de scalaires $\mathbb{C}$ ou $\mathbb{R}$, les applications linéaires de E dans $\mathbb{K}$ ne sont donc rien d'autre que les formes linéaires sur E. Il est alors facile de voir que la matrice associée à une forme linéaire (par rapport aux bases canoniques par exemple) possède une ligne et $dim(E)$ colonnes. Par exemple, si on choisit la base canonique $\{1\}$ dans $\mathbb{K}$, la matrice

$$(a_1\ a_2\ \dots\ a_n) \rightarrow n = \dim E$$

représente la forme linéaire y définie par la relation

$$y(x) = \sum_{i=1}^{n} a_i x_i, \quad \forall x \in E$$

en supposant que le vecteur x s'écrit :

$$x = \sum_{i=1}^{n} x_i e_i$$

dans la base $\{e_i\}$.

On obtient la valeur de cette forme linéaire appliquée à un vecteur x particulier en multipliant simplement le vecteur x par la matrice donnée ci-dessus, comme on peut le vérifier aisément. On peut donc dire qu'une forme linéaire peut se représenter comme un vecteur (ou une matrice) ligne.

$$y(x) = (a_1\ a_2\ \dots\ a_n) \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = [y]^1_e\ [x]^e = \sum_{i=1}^{n} a_i x_i$$

⚠ le crochet de dualité est $\boxed{\text{bilinéaire}}$

$$\star\ [\alpha x+\beta z, y] = \alpha[x,y] + \beta[z,y]$$

$\to y(\alpha x+\beta z) = \alpha y(x) + \beta y(z)$ → déf de forme lin

$$\star\ [x, \alpha y+\beta z] = \alpha[x,y] + \beta[x,z]$$

$\Rightarrow \alpha y+\beta z(x) = \alpha y(x) + \beta z(x)$ LINÉARITÉ (linéaire / à son 2ème arg).

Théorème 2.2.3 → ce n'est pas vraiment une démo mais qu'on [illegible]

$x \in E = \sum_{i=1}^{n} \beta_i x_i$ (→ unique)
→ unique

si $y \in E' \Rightarrow y(x) = [x,y] = y\left(\sum_{i=1}^{n} \beta_i x_i\right) = \sum \beta_i [x_i, y]$
→ unique

Ds le théo, on dit : $[x_i, y] = \alpha_i$
avec y qui est l'unique y [illegible]

$$\Rightarrow y(x) = \sum \beta_i [x_i, y] = \sum \underbrace{\beta_i \alpha_i}_{\text{UNIQUE}} \circledast$$

→ le critère unicité est respecté, il n'existe dc qu'une seule forme linéaire

$\circledast$ C'est une forme linéaire qui fait correspondre α_i et [illegible] unique car β_i est unique

persop42

Nous reviendrons à nouveau sur cette représentation par une matrice ligne dans le contexte des espaces métriques.

2.5.1 Espace dual

$\leadsto E' = \{$formes lin. sur $E, +, \cdot\}$ est un espace vect

Si l'on considère l'ensemble des formes linéaires sur un espace vectoriel E, en le munissant de l'addition et de la multiplication par un scalaire que nous venons d'envisager, on peut voir (à faire en exercice) que cet ensemble est bien un espace vectoriel. Il s'agit de *l'espace dual de E*.

Définition 39 *L'espace (vectoriel) dual E' d'un espace vectoriel E est composé de l'ensemble des formes linéaires sur E, muni de la loi interne d'addition (2.5) et de la multiplication par un scalaire (2.6).*

Les vecteurs de l'espace dual sont donc des formes linéaires.

Nous allons maintenant introduire une notation supplémentaire, mais qui va nous faciliter le travail. Au lieu de noter l'image des formes linéaires $y(x)$ comme plus haut, nous noterons

$[x, y]$

$$y(x) = [x, y].$$

Cette notation introduit une symétrie implicite entre les vecteurs de E et ceux de son dual E'. Nous pouvons alors réécrire la propriété (2.4) sous la forme

$$[\alpha x + \beta z, y] = \alpha[x, y] + \beta[z, y], \tag{2.7}$$

tandis que la propriété caractéristique des opérations sur les formes linéaires (les vecteurs du dual) s'écrit

$$[x, \alpha y + \beta z] = \alpha[x, y] + \beta[x, z]. \tag{2.8}$$

BILINÉAIRE

Nous prouvons ensuite deux propriétés importantes :

> **Théorème 2.23** Soit E un espace vectoriel de dimension n. Soit $\{x_i\}_{i=1}^n$ une base de E et soit $\{\alpha_i\}_{i=1}^n$ un ensemble de n scalaires. Alors, il existe une et une seule forme linéaire y dans E' telle que
>
> $$[x_i, y] = \alpha_i = y(x_i)$$
>
> pour $i = 1, \ldots, n$. $\exists!\, y \in E' : y(x_i) = \alpha_i$.

$\leadsto$ ∃ Pr un $\mathcal{E}$ de n scalaires α_i, il ∃ une et une seule forme lin telle que $y(x_i) = \alpha_i$

Preuve.
Chaque x de E peut s'écrire sous la forme

$$x = \sum_{i=1}^{n} \beta_i x_i$$

43

Dém. 2.2 ?

) Par le théorème précédent, on sait que pr chaque j ($\to$ pr chaque α_j), il existe un et un seul y_j qui peut répondre à ce qu'on veut démontrer.

) On veut mq $\{x_i\}_{i=1}^{n}$ et $\{y_i\}_{i=1}^{n}$ $\to$ base ? sont m̂ dim. $\to$ On sait déjà qu'ils ont le m̂ nombre de vecteurs. Reste à montrer que $\{y_i\}_{i=1}^{n}$ sont L.I. et générateurs

$\to$ $\{y_i\}_{i=1}^{n}$ L.I ?

Supposons une combinaison linéaire qui soit nulle :

$$\sum_{i=1}^{m} \alpha_i y_i(x) = 0 \overset{?}{\Rightarrow} \alpha_i = 0$$

$$\equiv$$

$$\forall x \in E \ [x, \sum \alpha_i y_i] \underset{lin}{=} \sum \alpha_i [x, y_i] = 0$$

Soit $x_j \in E$: $\sum \alpha_i [x_j, y_i] = 0$

Par la base qu'on s'impose :

$$\sum \alpha_i \delta_{ij} = 0 \Rightarrow \alpha_j = 0$$

donc $\{y_i\}_{i=1}^{n}$ sont bien L.I.

$\to$ $\{y_i\}_{i=1}^{n}$ générateurs ?

$\to$ Par le théorème précédent, on avait que pr un y qq qui appartient à E' : $[x_i, y] = \alpha_i$

$\to$ pour un certain $x \in E$ (unicité de la base) : $x = \sum_{i=1}^{n} \beta_i x_i$

Dc $[x, \underset{\text{vecteur qq}}{y}] = [\sum \beta_i x_i, y] = \sum \beta_i [x_i, y] = \sum \beta_i \alpha_i$

$$[x, \underset{\text{de la base}}{y_j}] = \sum \beta_i [\underbrace{x_i, y_j}_{\delta_{ij}}] = \beta_j \Rightarrow \beta_i = [x, y_i]$$

$\Rightarrow$ En remplaçant dans $\bigcirc$, on a dc $[x, y] = \sum [x, y_i] \alpha_i$

$$= [x, \sum \alpha_i y_i]$$

$\to$ Puisque x est arbitraire $\Rightarrow$ $y = \sum \alpha_i y_i$

Donc $\{y_i\}_{i=1}^{n}$ vérifie bien tous les critères de la base duale $\Rightarrow$ L I + GÉN $\Rightarrow$ BASE

verso p. 43

d'une et une seule manière. Donc, si y est une forme linéaire de E',

$$[x, y] = \sum_{i=1}^{n} \beta_i [x_i, y].$$

Comme les β_i sont uniques pour chaque x, et à cause de la relation imposée à y dans la thèse, on voit que le seul y satisfaisant nos conditions est défini par

$$[x, y] = \sum_{i=1}^{n} \beta_i \alpha_i$$

pour tout vecteur x de E. □

Théorème 2.24 Soit E un espace vectoriel de dimension n. Soit $\{x_i\}_{i=1}^{n}$ une base de E. Alors il existe une base $\{y_i\}_{i=1}^{n}$ du dual E' telle que

$$[x_i, y_j] = \delta_{ij}, \tag{2.9}$$

pour tous les i et j entre 1 et n.

= On peut trouver la base duale correspondant à une base primale qu'on fixe et la, grâce à δ_{ij}.

Preuve.
De la proposition 2.23, on peut déduire que, pour chaque $j = 1, \ldots, n$, il existe un seul y_j dans E' tel que (2.9) soit satisfaite. Il reste uniquement à vérifier que

$$X' = \{y_i\}_{i=1}^{n}$$

forme une base de E'. Vérifions d'abord que les vecteurs de X' sont linéairement indépendants. Pour cela, considérons une combinaison linéaire de ces vecteurs qui soit nulle. En d'autres mots, supposons que

$$[x, \sum_{i=1}^{n} \alpha_i y_i] = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i [x, y_i] = 0$$

pour tout x dans E. Alors, nous avons, en choisissant $x = x_j$,

$$0 = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i [x_j, y_i] = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \delta_{ij} = \alpha_j,$$

et ceci pour tout j entre 1 et n. Les vecteurs de X' sont donc linéairement indépendants. Considérons maintenant un vecteur y quelconque dans E' et notons

$$\alpha_i = [x_i, y] \quad (i = 1, \ldots, n),$$

ainsi que, pour un x quelconque de E,

$$x = \sum_{i=1}^{n} \beta_i x_i.$$

Thm 2.25

On l'a vu au thm 2.24 → à une base primale correspond une seule base duale (nous a bien prouvé au thm 2.24 que c'était une bij) et elles ont le même nombre de vecteurs. → même dim.

Thm 2.26

Nous savons que deux espaces vectoriels, si ils sont construits sur le même champ de scalaire et si ils ont même dimension, sont isomorphes.

Si E est esp vect sur K, alors, E' l'est aussi car on a construit des lois qui s'y prêtent $\Rightarrow (\alpha y)(x) = \alpha y(x)$

$\rightarrow (y + y')(x) = y(x) + y'(x)$.

$\Rightarrow$ même dim + construits sur le même champ de scalaire

$\Rightarrow$ isomorphisme

verso p 44

On obtient alors

$$[x,y] = [\sum_{i=1}^{n} \beta_i x_i, y] = \sum_{i=1}^{n} \beta_i \overbrace{[x_i, y]}^{\text{Lin}} = \sum_{i=1}^{n} \beta_i \alpha_i. \tag{2.10}$$

D'autre part,

$$[x, y_j] = \sum_{i=1}^{n} \beta_i [x_i, y_j] = \beta_j,$$

et donc, en rebaptisant l'indice,

$$\beta_i = [x, y_i].$$

En remplacant cette valeur dans (2.10), nous obtenons

$$[x,y] = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i [x, y_i] = [x, \sum_{i=1}^{n} \alpha_i y_i].$$

Comme x est arbitraire, on en tire que

$$y = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i y_i,$$

et tout y de E' est combinaison linéaire des vecteurs de X', ce qui achève la démonstration. □

Une conséquence très importante de ce résultat est le corollaire suivant :

Théorème 2.25 L'espace (vectoriel) dual E' d'un espace vectoriel E de dimension n est aussi de dimension n.

Preuve.

Evidente d'après la proposition 2.24. □

Une conséquence immédiate de la dernière proposition est exprimée dans la proposition suivante :

Théorème 2.26 Tout espace vectoriel de dimension finie E est isomorphe à son dual E'.

Preuve.

Ceci résulte directement du fait que si E est un espace vectoriel sur $\mathbb{K}$, alors E' l'est aussi, grâce aux lois que nous avons construites pour en faire un espace vectoriel (définies en (2.5) et (2.6)). Par le théorème 2.25, nous savons qu'ils sont de même dimension, ils sont donc isomorphes (par le théorème 2.4).□

La base de l'espace dual définie comme plus haut (cfr (2.9)) est aussi nommée la *base duale* associée à une base du primal. Nous présentons encore un corollaire facile de la proposition 2.24 :

<u>Lemme 2.27</u> → corollaire de $[x_i, y_j] = \delta_{ij}$.
[illegible]

⇔

$\forall x \in E$ et $x \neq 0$, $\exists y \in E'$: $[x, y] \neq 0$

$\equiv$

Si on a un vecteur de notre ensemble formé qui est $\neq 0$ alors, il existe une forme linéaire qui envoie cet x sur un scalaire non nul

On a $X = \{x_i\}_{i=1}^{n}$, $Y = \{y_j\}_{j=1}^{n}$ (ils satisfont de $[x_i, y_j] = \delta_{ij}$.
base duale de X

Soit $x = \sum \beta_i x_i$

On avait que $\beta_i = [x, y_i]$ car $[x, y] = [\sum \beta_i x_i, y] = \sum \beta_i \underbrace{[x_i, y]}_{\delta_i} = \sum \beta_i \gamma_i$

or,

pour un $\underset{\text{base duale}}{y_j}$: $[x, y_j] = [\sum \beta_i x_i, y_j]$

$= \sum \beta_i \underbrace{[x_i, y_j]}_{\delta_{ij}} = \beta_j$

En fait, on prouve cela par la contraposée :

$\forall y \in E' : [x, y] = 0 \Rightarrow \exists x = 0$

Donc, on a comme hyp que $\forall y \in E' : [x, y] = 0 \Rightarrow$ cela est vrai pr un y_j en particulier.

$$\text{or, } [x, y_j] = \beta_j$$

$$\Rightarrow [x, y_j] = \beta_j = 0$$

$$\Rightarrow \text{Puisque } x = \sum \underbrace{\beta_i}_{=0} x_i = 0$$

$$\text{Donc, } x = 0$$

cqfd.

<u>thm 228</u>

Def de la matrice $\Rightarrow f(x_j) = \sum_{k=1}^{n} a_{kj} x_k$

$$\Rightarrow [f(x_j), y_i] = [\sum a_{kj} x_k, y_i] = \sum a_{kj} \underbrace{[x_k, y_i]}_{\delta_{ki}} = a_{ij}$$

vrai car base duale.

Donc, $a_{ij} = [f(x_j), y_i]$.

verso p45

Théorème 2.27 Pour tout vecteur non nul x d'un espace vectoriel de dimension finie E, il existe une forme linéaire y dans E', le dual de E, telle que

$$[x, y] \neq 0.$$

Preuve.
Soient $\{x_i\}_{i=1}^n$ et $\{y_i\}_{i=1}^n$ une base de E et sa base duale dans E', (satisfaisant donc (2.9)). Si

$$x = \sum_{i=1}^{n} \beta_i x_i$$

(comme plus haut), alors $\beta_i = [x, y_i]$. Donc, si $[x, y]$ est nul pour tout y, et en particulier pour y_i $(i = 1, ..., n)$, alors tous les β_i sont nuls et x l'est aussi. □

On peut voir immédiatement que cette dernière proposition implique que si u et v sont deux vecteurs différents d'un espace vectoriel de dimension finie E, alors il existe une forme linéaire y dans E' telle que $[u, y] \neq [v, y]$. Il suffit en effet de substituer $x = u - v$ dans la proposition 2.27.

A partir de la base duale d'une base du primal X, on peut reconstruire la matrice associée à une transformation linéaire par rapport à cette base X par l'intermédiaire de crochets de dualité :

Théorème 2.28 Soit

$$X = \{x_1, \ldots, x_n\}$$

une base quelconque de l'espace vectoriel E (de dimension n). Soit

$$X' = \{y_1, \ldots, y_n\}$$

la base duale dans E' définie par la proposition 2.24. Soit, de plus, (a_{ij}) la matrice d'une transformation linéaire f sur E. Alors, $\hookrightarrow [x_i, y_j] = \delta_{ij}$

$$[f]_X = \quad a_{ij} = [f(x_j), y_i].$$

Preuve.
Cette propriété résulte directement de la définition d'une matrice associée à une transformation linéaire par rapport à une base. En effet, nous avons que

$$f(x_j) = \sum_{k=1}^{n} a_{kj} x_k \quad (j = 1, ..., n). \tag{2.11}$$

et donc

$$[f(x_j), y_i] = \sum_{k=1}^{n} a_{kj} [x_k, y_i] = a_{ij}$$

46

→ Pour trouver par ex a_{12} $\rightsquigarrow$ on trouve $f(x_2)$ et puis on fait $y_1(f(x_2))$

Situa°:

Primal:
$(E(K+.)\#.)$
$\boxed{ex}$: ens de dép contenant $\mathbb{R}^2$ (x_1, x_2)

Dual:
$(E'(K+.)\#.)$
ens de dép contenant des $y: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$.

bidual
$(E''(K+.)\#.)$
ens de dep contenant des $z: \mathbb{R}^{2'} \to \mathbb{R}$

ex: Si on dit que $r \in (\mathbb{R}^2)''$ dans $r: \mathbb{R}^{2'} \to \mathbb{R}$.

Thm 2.29

On sait que le bidual $\equiv$ le dual du dual.
OR, le primal et le dual sont isomorphes. $\Rightarrow$ le dual est iso au bidual $\leadsto$ par effet "miroir": le primal est isomorphe à son bidual.

Thm 2.30 $\to$ "Construct° d'une correspondance entre le primal et le bidual" $\leadsto$ Montrons juste qu'il est possible d'en construire une ($\to$ linéaire + applicat°)

Mq $\forall x \in E$: $\exists$ une correspondance telle que $z_x(y) = y(x)$

Soit $x \in E$:

Puisque z_x est un élém^t du bidual $\Rightarrow z_x$ a pour "domaine" E' et dc il est bien à valeurs ds K. Dc, z_x est bien une forme. Reste à savoir si elle est linéaire $\to$ On a défini des lois + et produit par un scalaire sur l'ensemble pour les formes linéaires et z_x est une forme linéaire car $z_x(\alpha y_1 + \beta y_2) = (\alpha y_1 + \beta y_2)(x)$

Puisque, par la thèse qu'on impose, $z(y) = y(x)$
$= \alpha y_1(x) + \beta y_2(x)$
$= \alpha z_x(y_1) + \beta z_x(y_2)$

$\Rightarrow$ la relat° $z_x(y) = y(x)$ définit bien une forme linéaire sur E'

Ns avons dc prouvé que cette forme peut exister. Mnt, prouvons que cette relat° est vraie pour TOUS les élém^t du bidual

verso p46

en vertu de la relation (2.11). □

Autrement dit, pour trouver l'élement ij de la matrice associée à f par rapport à la base X, il suffit d'appliquer f au $j$ème vecteur de X et d'appliquer le $i$ème vecteur de X' au résultat (un vecteur de X' est, en effet, une forme linéaire sur E).

2.5.2 Réflexivité

Considérons maintenant le dual du dual de E, soit E'', appelé le *bidual* de l'espace vectoriel E. Ses vecteurs sont donc des formes linéaires, définies sur l'espace des formes linéaires sur E. Une première conséquence immédiate de cette définition :

Théorème 2.29 Tout espace vectoriel de dimension finie E est isomorphe à son bidual E''.

Preuve.
En effet, E' est isomorphe à E par la propriété 2.26 ; si nous appliquons la même propriété à E' plutôt qu'à E, nous obtenons que E'' est isomorphe à E'. En combinant les deux isomorphismes, nous obtenons la thèse. □

Dans le paragraphe qui suit, nous allons préciser l'isomorphisme qui les lie et lui donner une forme explicite. Commençons par la construction d'une correspondance entre E et E''.

Théorème 2.30 Soit E est un espace vectoriel de dimension finie ; à tout vecteur x de E, on peut faire correspondre un élément z_x défini par la relation $z_x(y) = y(x)$ pour tout y dans E'. Cet élément z_x appartient alors au bidual de E.

Preuve.
Si nous supposons que x est fixé, nous voyons que la fonction z_x, définie sur E', qui associe à y la valeur $z_x(y) = [x, y]$, est bien à valeurs dans $\mathbb{K}$. Nous en concluons que z_x est bien une forme définie sur E'.
Les lois introduites sur le dual pour en faire un espace vectoriel (définies en (2.5) et (2.6)), montrent de plus que z_x est linéaire. En effet, $\forall y_1, y_2 \in E', \forall \alpha, \beta \in \mathbb{K}$:

$$\begin{aligned} z_x(\alpha y_1 + \beta y_2) &= (\alpha y_1 + \beta y_2)(x) \\ &= \alpha y_1(x) + \beta y_2(x) \\ &= \alpha z_x(y_1) + \beta z_x(y_2) \end{aligned}$$

En résumé, la relation $z_x(y) = [x, y]$ définit une forme linéaire sur E', càd que z_x est bien un élément de E''.□

Le raisonnement ci-dessus montre que les $z_x(\cdot) = [x, \cdot]$ sont des vecteurs de E''. Nous ne savons

__Thm 2.31__ : __Théorème de réflexivité__ :

Mq $\forall z \in E''$, $\exists!\, x \in E : z(y) = y(x) \quad \forall y \in E'$ ⟶ ISOMORPHISME NATUREL

$$\equiv$$

$$[y, z]_{E' \times E''} = [x, y]_{E \times E'}$$

En fait, le thm 2.30 montrait que le $z_x(\cdot) = [x, \cdot]$ est un élém^t du bidual.

⟶ Le thm de réflexivité montre qu'il __$\exists$ cette sorte là__ comme élém^t du bidual. et qu'__elle peut s'appliquer à chaque fois__ ⟶ c-à-d que pr __tous les z__ on peut trouver __un__ x tel qu'on a cette relat°.

Ce thm ns montre aussi que __cette correspondance__ entre le primal et le bidual __est linéaire et bijective__.

On pt considérer :

$\cdot\; E \xrightarrow{T} E''$

$x \rightsquigarrow z_x = [x, \cdot]$

$z_x(y) = [x, y] = y(x)$.

Mq ils sont isomorphes c-à-d qu'il $\exists$ une bijection linéaire

$\equiv$

On se demande si $T(E) = E$ [c-à-d si on pt faire $\supseteq$ de tous les z]

__Linéarité__ grâce à la lin. ds le dual :

(N.B. normalement : $g(\alpha x + \beta y) = \alpha g(x) + \beta g(y)$
ici (via T) ⟶ $z_{\alpha x + \beta y} = [\alpha x + \beta y, \cdot]$)

$\rightsquigarrow \forall y \in E' : z_{\alpha x_1 + \beta x_2}(y) = [\alpha x_1 + \beta x_2, y] \underset{\text{lin de } y}{=} \alpha [x_1, y] + \beta [x_2, y]$

$= \alpha z_{x_1}(y) + \beta z_{x_2}(y)$

$\Rightarrow z_{\alpha x_1 + \beta x_2}(y) = \alpha z_{x_1}(y) + \beta z_{x_2}(y)$

__injective__ : (déf : $\forall x, y \in E \quad x \neq y \Rightarrow g(x) \neq g(y)$)
ou
$g(x) = g(y) \Rightarrow x = y$

On voudrait que $z_{x_1} = z_{x_2} \Rightarrow x_1 = x_2$

__hyp__ : $\forall y \in E' : z_{x_1}(y) = z_{x_2}(y) \underset{\text{relat°}}{\equiv} y(x_1) = y(x_2)$

$\Rightarrow y(x_1) - y(x_2) = 0$ OR $y(x_1) - y(x_2) = y(x_1 - x_2)$

OR une fonct° linéaire est nulle à l'origine sur le 0 du simplement ...

verso p 47

cependant pas si TOUS les vecteurs de E'' sont de cette forme. La proposition suivante (appelée le Théorème de Réflexivité) vient apporter une réponse simple à cette question.

Théorème 2.31 Soit E est un espace vectoriel de dimension finie.
Pour toute forme linéaire z sur E' (càd $\forall z \in E''$), il existe un vecteur unique x dans E ($\exists! x \in E$) tel que

$$z(y) = [y, z]_{E' \times E''} = [x, y]_{E \times E'} = y(x)$$

pour tout y dans E'. De plus la correspondance ainsi définie entre x et z est un isomorphisme.

Cette correspondance est appelée *l'isomorphisme naturel* entre E et E''. Elle nous dit que tous les éléments z du bidual sont construits à partir d'un x du primal (tous les z sont bien des z_x) et que la correspondance entre le primal et le bidual est linéaire et bijective.

Preuve.
Considérons la correspondance comme allant de E dans E'' : à chaque x de E, elle fait correspondre un vecteur z_x de E'' tel que $z_x(y) = y(x)$ pour tout y dans E'.

Cette correspondance est linéaire : en effet, grâce à la linéarité des éléments y du dual, nous pouvons écrire, pour tout $y \in E'$:

$$z_{\alpha x_1 + \beta x_2}(y) = [\alpha x_1 + \beta x_2, y] = \alpha[x_1, y] + \beta[x_2, y] = \alpha z_{x_1}(y) + \beta z_{x_2}(y),$$

et donc

$$z_{\alpha x_1 + \beta x_2} = \alpha z_{x_1} + \beta z_{x_2}$$

Cette correspondance est injective : en effet, nous voulons démontrer que $z_{x_1} = z_{x_2}$ implique $x_1 = x_2$, avec x_1 et x_2 dans E. Mais dire que $z_{x_1} = z_{x_2}$, c'est dire que $z_{x_1}(y) = z_{x_2}(y)$ pour tout y de E', ou encore, comme $z_{x_1}(y) = y(x_1)$ et $z_{x_2}(y) = y(x_2)$,

$$y(x_1) - y(x_2) = y(x_1 - x_2) = 0 \quad \forall y \in E'.$$

La remarque qui suit le théorème 2.27 montre alors que $x_1 - x_2 = 0$ ou encore que $x_1 = x_2$. La correspondance est donc injective.

La correspondance est surjective : en effet, on vérifie facilement que l'ensemble des z_x de E'' forment un sous-espace de E''. De plus, ce sous-espace est isomorphe à E car la correspondance considérée plus haut est bijective si l'on restreint son ensemble d'arrivée à ce sous-espace et préserve bien les relations linéaires. Ce sous-espace est donc de dimension n, puisque E l'est. Or E'' est isomorphe à E et est donc aussi de dimension n. Le sous espace de E'' et E'' ont même dimension, ils ne peuvent qu'être identiques et la correspondance entre E et E'' est bijective. C'est donc bien un isomorphisme. □

Une remarque sur cet isomorphisme : si nous partons d'une base X du primal, que nous calculons sa base duale Y, ensuite la base duale de Y, notée Z, nous obtenons donc une base

48

$\Rightarrow x_1 = x_2$

Surjectivité :

On a dit $E \xrightarrow{T} T(E)$, $x \mapsto z_x = [x, \cdot]$ $\rightarrow T(E)$ est un ss-espace de E''

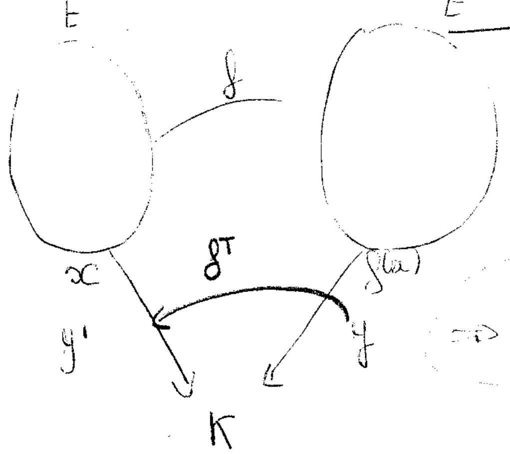
OR, $T(E)$ est isomorphe à E car si on [illegible] pour chaque [illegible], cet ensemble est bijectif. En effet, $T(E)$ est la partie atteinte donc, surjectivité ! ($\exists$ au moins un y).

$\Rightarrow T(E) \equiv E \Rightarrow \dim(T(E)) = \dim E$ OR, $\dim E = \dim E''$

$\Rightarrow \dim(T(E)) = \dim E'' \rightarrow T(E) = E''$

TRANSPOSÉES

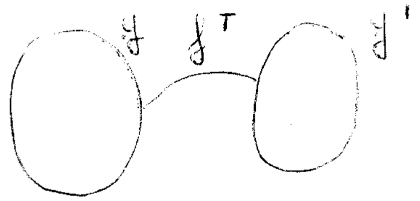
$E \Rightarrow$ la fonction est valable pour tous les z.



$\Rightarrow y(f(x)) = y'(x)$

$\rightarrow$ Donc $f^T(y) = y'$

On peut passer de y à y'.



- f^T est bien une transformation linéaire :
  - $\boxed{f^T : E' \rightarrow E'}$ $\mapsto$ [illegible]
  - linéaire : Si $y = \alpha_1 y_1 + \alpha_2 y_2$

$$\Rightarrow [x, f^T(y)] = [f(x), y] = [f(x), \alpha_1 y_1 + \alpha_2 y_2]$$

$$\begin{aligned} &= \alpha_1 [f(x), y_1] + \alpha_2 [f(x), y_2] \\ &= \alpha_1 [x, f^T(y_1)] + \alpha_2 [x, f^T(y_2)] \\ &= [x, \alpha_1 f^T(y_1) + \alpha_2 f^T(y_2)] \end{aligned}$$

voir p. 48

du bidual. Par l'isomorphisme décrit ci-dessus, les vecteurs de cette base Z sont envoyés sur des vecteurs du primal ; il est facile de vérifier que ces vecteurs du primal sont ceux de la base X.

Nous ne poursuivrons pas les développements théoriques à propos de la dualité plus loin. Il est cependant à noter que le dernier résultat que nous avons obtenu, à savoir que le bidual d'un espace vectoriel de dimension finie est naturellement isomorphe à l'espace lui-même, est une propriété fondamentale de beaucoup de secteurs des mathématiques.

→ travailler avec le primal revient à travailler dans le bidual. On a stoppé au bidual mais on aurait pu continuer

2.6 Transformations linéaires et transposées

Nous étudions, dans ce paragraphe, les relations entre la notion de transformation linéaire sur un espace vectoriel et l'espace vectoriel dual. Pour cela, choisissons un espace vectoriel E et y un vecteur quelconque de son dual E'. Nous définissons alors la forme linéaire

$$y'(x) = [f(x), y]$$

pour tout x dans E et pour une transformation linéaire f donnée. Nous pouvons alors noter

$$[f(x), y] = [x, y']$$

par définition de la notation $[\cdot, \cdot]$, puisque y composée avec f est bien une forme linéaire sur E. Si nous faisons maintenant varier y dans E', l'équation ci-dessus fait donc correspondre à chaque nouvel y un vecteur y' de E'. Notons, pour le moment abusivement,

$$y' = f^T(y).$$

Cette notation est abusive car elle implique que la transformation sur E' qui, à chaque y, fait correspondre un y' est une transformation linéaire. Si c'est le cas, rappelons que les équations ci-dessus impliquent alors que

$$\forall x \in E \; \forall y \in E' \; [f(x), y] = [x, f^T(y)]. \tag{2.12}$$

Nous démontrons facilement que cette transformation f^T sur E' est effectivement une transformation linéaire. En effet, si

$$y = \alpha_1 y_1 + \alpha_2 y_2,$$

alors

$$\begin{aligned} [x, f^T(y)] = [f(x), y] &= [f(x), \alpha y_1 + \beta y_2] \\ &= \alpha_1 [f(x), y_1] + \alpha_2 [f(x), y_2] \\ &= \alpha_1 [x, f^T(y_1)] + \alpha_2 [x, f^T(y_2)] \\ &= [x, \alpha_1 f^T(y_1) + \alpha_2 f^T(y_2)]. \end{aligned}$$

→ Donc $\forall x \in E$ $f^T(\alpha y_1 + \beta y_2) = \alpha f^T(y_1) + \beta f^T(y_2)$

Définition 40 *Si f est une transformation linéaire sur E, la transformation linéaire sur E' caractérisée par l'équation (2.12) est appelée transformation transposée de f et notée f^T.*

49

Thm 2.32

Mq si f et g sont 2 transfo lin :

$(fg)^T = g^T f^T$

On sait que $[f(x), y] = [x, f^T(y)]$

Dc, ici : $[f(g(x)), y] = [g(x), f^T(y)] = [x, g^T(f^T(y))] = g^T f^T$

appli sur $g(x)$ en fonction de f — car il change de côté

—

⚠ $f^{TT} \neq f$ car $f^{TT} : E'' \to E''$
$f : E \to E$

Thm 2.33

Rappels :

$f : E \to E$
$f^T : E' \to E'$

Thm 2.28 :

$a_{ij} = [f(x_j), y_i]$

base primale X — base duale de X

Thèse : Mq $[f^T]_{X'}^{X'} = [f]_X^{X^T}$

$\equiv$

$[f^T]_{ij} = [f]_{ji} = [f^T]_{ij}$

$[f^T]_{ij}$ (matrice) $\to$ Puisque $a_{ij} = [\underset{\in E}{f(x_j)}, \underset{\in E'}{y_i}]$ avec A correspondant à $f : E \to E$

et que $f^T : E' \to E' \to b_{ij} = [f^T(y_j), z_i] = [f^T]_{ij}$
(En montant d'un cran sup).

représente f^T

Dc, $[f^T]_{ij} \underset{\text{thm 2.28}}{=} [f^T(y_j), z_i]$

• De plus, par la déf de f^T : $[x, f^T(y)] = [f(x), y]$

$\to$ ici : $f = f^T$
$y = z_i$
$x = y_j$

$\Rightarrow [f^T(y_j), z_i] = [y_j, f^{TT}(z_i)]$

(verso p.19)

Nous donnons maintenant quelques propriétés des transformations transposées.

Théorème 2.32 Si f et g sont deux transformations linéaires sur un espace vectoriel E de dimension finie, alors

$$0_E^T = 0_{E'}, \tag{2.13}$$

$$id_E^T = id_{E'}, \tag{2.14}$$

$$(f+g)^T = f^T + g^T, \tag{2.15}$$

$$(\alpha f)^T = \alpha f^T, \tag{2.16}$$

$$(fg)^T = g^T f^T, \tag{2.17}$$

Preuve.

La preuve des relations (2.13)-(2.16) est facile et laissée en exercice. Prouvons seulement la relation (2.17). Nous observons que

$$[(fg)(x), y] = [gx, f^T(y)] = [x, g^T(f^T(y))],$$

pour tout x de E et tout y de E', ce qui prouve la propriété.□

Essayons également de caractériser $(f^T)^T$. On ne peut pas conclure que $(f^T)^T = f$; en effet, f est une transformation linéaire sur E tandis que $(f^T)^T$ est une transformation linéaire sur E''. Cependant il y a isomorphisme entre les deux espaces et le théorème de réflexivité implique que, pour tout x dans E et tout y dans E',

$$[f(x), y]_{E\times E'} = [x, f^T(y)]_{E\times E'} = [f^T(y), z_x]_{E'\times E''} = [y, (f^T)^T(z_x)]_{E'\times E''} \tag{2.18}$$

où z_x est le représentant de x dans E''. Ces deux transformations ont donc un même effet, dans le crochet de dualité, sur une forme linéaire quelconque y.

Nous terminerons ce paragraphe sur les transformations transposées par une discussion des matrices qui leur sont associées.

Théorème 2.33 Soit f une transformation linéaire sur E, un espace vectoriel de dimension n, alors

$$[f^T]_{ij} = [f]_{ji} = [f]^T_{ij}$$

où la matrice de la transformation f est relative à une base X et celle de f^T est relative à la base duale de X, soit X' (ce qui peut s'écrire $[f^T]_{X'}^{X'} = ([f]_X^X)^T$).

Preuve.

La démonstration de cette proposition est évidente : il suffit d'appliquer la proposition 2.28 dans

50

~~• $[y_j, (f^T)^T(z_i)] = [y_j, f(z_i)]$ car $f^{TT} = f$.~~

~~• $[y_j, f(z_i)] = [f(x_i), y_j]$ par le thm de réflexivité.~~

~~• $[f(x_j), y_j] = [f]_{j,i}$ par déf de $a_{ij} = [f(x_j), y_i]$.~~

so $[f^T]_{ij} = [y_j, f^{TT}(z_i)] = [y_j, f(z_i)]$ car ici, on utilise le thm de réflexivité! → grâce à lui, on peut identifier naturellemt (sans passer par une base) d'un élémt du primal à un élément du bidual. ~~Est~~ dc, on pt considérer que $E'' \simeq E$

dc • $[y_j, f(z_i)] = [f(x_i), y_j]$ par le thm de réflexivité

$[f(x_i), y_j] = [f]_{j,i}$ par déf de $a_{ij} = [f(x_j), y_i]$.

E' et de se rappeler que l'on peut identifier E et E''. Nous avons, en utilisant ((2.18)), que

$$[f^T]_{ij} = [f^T(y_j), z_i]_{E'\times E''} = [y_j, (f^T)^T(z_i)]_{E'\times E''} = [f(x_i), y_j]_{E\times E'} = [f]_{ji}.$$

où le vecteur z_i est le représentant de x_i dans E''. Les $\{z_i\}_{i=1}^n$ forment évidemment une base du bidual grâce à l'isomorphisme naturel qui les relie à la base X du primal. □

La matrice de f^T est donc bien la transposée de la matrice de A, au sens des matrices, càd la matrice obtenue en remplaçant les lignes de la matrice initiale par ses colonnes. Pour cette raison, la transformation f^T est appelée la transformation transposée de f.

Annexe 6. Composantes de l'enquête sur la dualité

Cette annexe comporte trois parties :

1. le formulaire ayant servi de base pour les interviews individuelles semi-structurées qui a permis d'éclairer, pour seize étudiants, les réponses au questionnaire « débutants » (voir chapitre 4, § 2.1).
2. l'énoncé du travail de groupe proposé aux étudiants de mathématiques ayant répondu au questionnaire « débutants » (voir chapitre 4, § 2.2).
3. le questionnaire à destination des étudiants de Master, appelé *questionnaire « master »* (voir chapitre 4, § 2.3).

1. Formulaire pour l'interview semi-structurée suivant le questionnaire « débutants » (mai 2008)

Questionnaire complémentaire proposé lors de l'interview d'étudiants ayant répondu au questionnaire « débutants » (mai 2008)

1. Voulez-vous inscrire une signification particulière lorsque vous écrivez un vecteur en colonne plutôt qu'en ligne? Y a-t-il des indications pour utiliser l'une ou l'autre notation?

2. Combien de relations (plus précisément combien d'égalités) ai-je lorsque j'écris :
   $y_i(x_j) = \delta_{ij}, \forall i, j = 1,\dots,n$

3. Avez-vous remarqué qu'il était fait mention de la base duale dans la question où il était demandé de trouver les coordonnées d'un vecteur dans une base non canonique ?
   Si oui :
    1. Quelle a été votre réflexion ?
    2. Vous êtes-vous demandé comment elle pouvait intervenir ?
    3. Pensez-vous maintenant que l'on peut se servir de la base duale pour répondre à la question ?
    4. Si vous avez changé d'avis, quelle en a été la cause ?

4. Concernant vos réponses au questionnaire : cfr questionnaire personnel

5. Voyez-vous un rapport entre la matrice transposée et l'application transposée ?

6. Voyez-vous un lien entre l'application transposée et des résultats du type : on peut passer des lignes aux colonnes (par exemple pour le calcul du déterminant, du rang d'une matrice,…)

7. Le travail de groupe a-t-il changé les réponses que vous apporteriez au questionnaire ?
   A-t-il changé vos conceptions sur la dualité ?
   Pourquoi (le fait de travailler la matière seul ? en groupe ? avec l'assistant au TG ? en classe de TD ?)

2. Enoncé du travail de groupe proposé aux étudiants ayant répondu au questionnaire « débutants » (mars 2008)

1ère BAC Mathématique Février-Mars 2008

Travail de groupe d'ALGEBRE

La dualité

M. De Vleeschouwer Ph. Toint

Quelques consignes…

- Les réponses aux questions doivent faire l'objet d'un rapport commun par groupe, clairement rédigé.
- Le travail est distribué le mardi 12 février 2008 ; il doit être remis avant le vendredi 14 mars 2008 à 14h.
- Chaque groupe doit consulter Martine De Vleeschouwer au minimum une fois entre le 15 février et le 22 février inclus (une feuille sera affichée sur la porte de son bureau (201 F) pour prendre rendez-vous).
  La semaine du 3 au 7 mars sera réservée à d'éventuelles consultations complémentaires.
- Après la remise du travail, une consultation obligatoire sera prévue la semaine du 17 mars afin d'évaluer la compréhension de chaque membre du groupe. Il sera donc demandé de prendre rendez-vous lors de la remise du rapport.
- Les travaux seront rendus aux étudiants avec une note indicative globale le jeudi 27 mars, le soin et l'orthographe interviendront dans cette note. L'originalité des exemples ou illustrations présentées dans le travail sera également prise en compte.
- Les connaissances acquises par ce travail font partie de la matière à connaître pour les examens de première et seconde sessions.

Des références

Pour ce travail, nous vous suggérons de consulter :

- Ph.L.Toint : « Algèbre » (syllabus pour les premiers baccalauréats en Sciences Mathématiques et Physiques, édité par la Librairie des Sciences 2007-2008).
- P.R.Halmos : « Finite-dimensional Vector Spaces », Undergraduate Texts in Mathematics, Springer-Verlag, New-York 1974.

N'hésitez pas à utiliser d'autres références que celles proposées.

Présentation du travail

Pour répondre aux questions ci-dessous, vous pouvez utiliser, à votre meilleure convenance, le langage mathématique formel, la langue française, des graphiques ou dessins, …

1. Considérons l'espace vectoriel $\mathbb{R}^4$, construit sur le champ des réels.
   a. Donner un exemple de forme linéaire définie sur $\mathbb{R}^4$.

b. Donner l'expression générale d'une forme linéaire définie sur $\mathbb{R}^4$.

c. Soient $x_1 = (1,2,0,4)$, $x_2 = (2,0,-1,2)$, $x_3 = (1,0,0,-1)$, $x_4 = (2,0,0,3)$; soit $X = \{x_1, x_2, x_3, x_4\}$. L'ensemble X constitue-t-il une base de $\mathbb{R}^4$? Si oui, déterminez-en la base duale.

d. Si l'ensemble $X = \{x_1, x_2, x_3, x_4\}$ défini ci-dessus est une base et que vous avez pu en calculer la base duale, quelles seraient les coordonnées du vecteur $(15,8,10,5)$ dans la base X ? Explicitez votre démarche.

e. Soit la transformation linéaire $f : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ telle que $f(x,y,z,t) = (2x-t, 2y-z, x-y-t, -3z)$.
Comment en définiriez-vous la transformation transposée ?

2. Considérons l'espace vectoriel $\mathcal{M}_{2x2}$, l'espace vectoriel des matrices 2 lignes, 2 colonnes, à coefficients réels, construit sur le champ des réels.

   a. Donner un exemple de forme linéaire définie sur $\mathcal{M}_{2x2}$.

   b. Donner l'expression générale d'une forme linéaire définie sur $\mathcal{M}_{2x2}$.

   c. Soient $M_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$, $M_2 = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$, $M_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$, $M_4 = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$;
   soit $X = \{M_1, M_2, M_3, M_4\}$. L'ensemble X constitue-t-il une base de $\mathcal{M}_{2x2}$? Si oui, déterminez-en la base duale.

   d. Si l'ensemble $X = \{M_1, M_2, M_3, M_4\}$ défini ci-dessus est une base et que vous avez pu en calculer la base duale, quelles seraient les coordonnées de la matrice $\begin{pmatrix} 30 & 20 \\ 16 & 10 \end{pmatrix}$ dans la base X ? Explicitez votre démarche.

   e. Soit la transformation linéaire $f : \mathcal{M}_{2x2} \to \mathcal{M}_{2x2}$ telle que $f\begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2a-d & a-b-d \\ 2b-c & -3c \end{pmatrix}$.
   Comment en définiriez-vous la transformation transposée ?

3. A votre avis, y a-t-il un lien entre les questions 1. et 2. ci-dessus ? Si oui, lequel ?
   Détaillez votre réponse.

4. Considérons un espace vectoriel *E* de dimension finie construit sur le champ *K*. Si vous deviez vous adresser à un étudiant n'ayant que des notions élémentaires en algèbre linéaire,

   a. Comment définiriez-vous une forme linéaire sur *E* ?

   b. Comment définiriez-vous le dual de *E* ?

   c. Comment feriez-vous pour donner l'expression générale d'une forme linéaire sur *E* ?

   d. Soit $X = \{x_1, x_2, x_3, x_4\}$ une base de *E*. Comment définiriez-vous une base duale de *X* ? Peut-il y en avoir plusieurs ?

   e. Si l'on dispose d'une base *X* de *E* et de la base duale dans *E'*, comment feriez-vous pour calculer les coordonnées d'un vecteur de *E* dans la base *X* ? Explicitez votre démarche.

   f. Soit *f* une transformation linéaire définie sur *E*. Comment définiriez-vous la transformation transposée f^t ? Pourriez-vous expliquer, sous forme de schéma ou autrement ce que représente la transformation transposée ?

g. Peut-on affirmer que $(f^t)^t = f$? Si non pourquoi ? Si oui, qu'est-ce qui vous permet de l'affirmer ?
h. Soit $S = \{s_1, s_2, \ldots, s_p\}$ un ensemble de vecteurs de E.
Considérons l'ensemble F défini par :
$F = \{ f : E \to K$ telle que (f linéaire) et $(\forall s_i \in S : f(s_i) = 0)\}$
On montre aisément que l'ensemble F est un sous-espace vectoriel. Mais de quel espace vectoriel est-il sous-espace ? Essayer de détailler le raisonnement que vous suivez pour répondre à cette question.

5. A quoi, selon vous, peut servir le dual ? Dans quelles circonstances intervient-il ?

6. Choisissez 3 exemples d'espaces vectoriels, différents de ceux qui sont présentés dans les énoncés ci-dessus.
Pour chacun d'eux, donnez un exemple de forme linéaire définie sur ces espaces et un exemple d'application qui ne soit pas une forme linéaire en expliquant chaque fois pourquoi.

7. Construisez un énoncé semblable[16] à celui de la question 2. pour un espace vectoriel que vous choisirez différent de ceux déjà présentés ou produits lors des énoncés ci-dessus.
Résolvez ensuite l'énoncé ainsi construit.

BON TRAVAIL !

[16] Par énoncé semblable, on entend un énoncé reprenant le même type de questions.

3. Questionnaire proposé aux étudiants de Master 1 et 2 en mathématique (mars 2009)

NOM : ……………………………….. Mars 2009

Prénom : ………………………………

Master 1 / Master 2 Mathématique

Questionnaire à destination des étudiants de première et deuxième Master en mathématique

1. Un élève de 1ère année n’a pas bien compris les notions reprises dans le tableau ci-dessous. Pour chacune de ces notions, pourriez-vous :
   a. situer le contexte ou le cours où ces notions ont été rencontrées et/ou utilisées ?
   b. écrire ce que vous diriez au jeune étudiant pour qu’il puisse comprendre ces notions ?

Notions	**Contexte ou cours** où la notion a été rencontrée et/ou utilisée	Comment expliqueriez-vous la notion au jeune étudiant ?
Base		
Forme linéaire		
Dual		
Base duale		

2. Aviez-vous déjà rencontré la notion de matrice transposée dans l’enseignement secondaire ? Si oui, vous rappelez-vous dans quel contexte ?

3. Un élève de 1ère année vient vous voir en disant qu'il n'a pas bien compris le lien entre *application transposée* et *matrice transposée*. Que lui répondriez-vous ?

4. A quoi, selon vous, peut servir une application transposée ? Dans quelles circonstances intervient-elle ?

5. Comment définiriez-vous le dual de l'espace vectoriel $\mathbb{R}^4$?

6. Donnez, si possible, (1) une base de $\mathbb{R}^4$, (2) une base de son dual, (3) une application linéaire définie sur $\mathbb{R}^4$ et (4) la transposée de cette application.
   Si cela ne vous est pas possible, pourriez-vous expliquer pourquoi ?

7. Dans un espace de votre choix (qui ne soit cependant pas de type $\mathbb{R}^n$ ou $\mathbb{C}^n$), donner une base et sa base duale, une application linéaire (définie sur l'espace que vous avez choisi) et sa transposée.
   S'il ne vous est pas possible de donner un de ces objets, pourriez-vous expliquer pourquoi ?

Annexe 7. Formulation de proposition pour l'introduction de l'application transposée

Nous présentons ici une proposition de situation d'introduction de l'application transposée dans différents cadres (Douady 1986) et registres (Duval 1995).

Comme suggéré au chapitre 5, § 1.2.f), on suppose que le cadre matriciel a été utilisé, dans un premier temps, pour susciter la curiosité intellectuelle des étudiants (Harel 2000) et pour installer une dialectique ancien-nouveau (Assude & Gelis 2002). Pour rappel, il s'agit de se demander, une fois des bases A et B fixées respectivement dans un espace vectoriel E et F, quel est le rapport existant entre une application linéaire f allant de E vers F, représentée par la matrice M ($M = [f]_A^B$), et l'application linéaire g (qui n'est autre que f^t …) représentée par la transposée de la matrice M (qui ne diffère que par la forme de la matrice M !).

Nous nous tournons donc ensuite vers le cadre des systèmes d'équations linéaires qui introduira le cadre formel.

Nous présentons le cas particulier d'une transformation linéaire de $\mathbb{R}^4$ (application linéaire de $\mathbb{R}^4$ vers lui-même). Nous préférons choisir un nombre d'équations différent de la dimension de l'espace vectoriel considéré ($\mathbb{R}^4$), afin d'éviter un amalgame malheureux entre ces deux nombres. Nous nous distançons donc de la référence historique qui considérait des systèmes carrés (comportant même nombre d'équations que d'inconnues). De plus, nous supposons que le lien entre un système d'équations linéaires et les formes linéaires a été présenté :

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = 0 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n = 0 \\ \dots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n = 0 \end{cases} \leftrightarrow \begin{cases} \varphi_1(x) = 0 \\ \varphi_2(x) = 0 \\ \dots \\ \varphi_m(x) = 0 \end{cases} \quad \text{où} \quad \begin{array}{l} x = (x_1, \dots, x_n) \\ \varphi_i \in (\mathbb{R}^n)' \,,\ 1 \le i \le m \end{array}$$

Figure 7.I : Relation entre système d'équations linéaires et formes linéaires

Prenons le cas particulier du système de trois équations linéaires à quatre inconnues donné à la Figure 7.II :

$$\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 - 5x_3 + 4x_4 = 7 \\ -x_1 + x_2 + 2x_3 + x_4 = 10 \\ x_1 - x_2 - 4x_3 - x_4 = 5 \end{cases}$$

Figure 7.II : Ecriture explicite d'un système d'équations linéaires

Nous savons que nous pouvons l'écrire sous la forme (voir Figure 7.I) :

$$\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 - 5x_3 + 4x_4 = 7 \\ -x_1 + x_2 + 2x_3 + x_4 = 10 \\ x_1 - x_2 - 4x_3 - x_4 = 5 \end{cases} \leftrightarrow \begin{cases} \varphi_1(x) = 7 \\ \varphi_2(x) = 10 \\ \varphi_3(x) = 5 \end{cases} \quad \text{où} \quad \begin{array}{l} \varphi_i \in (\mathbb{R}^4)' \\ x = (x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{R}^4 \end{array}$$

où $\forall(x_1,x_2,x_3,x_4)\in\mathbb{R}^4$: $\begin{aligned}\varphi_1(x_1,x_2,x_3,x_4) &= 2x_1+3x_2-5x_3+4x_4\\ \varphi_2(x_1,x_2,x_3,x_4) &= -x_1+x_2+2x_3+x_4\\ \varphi_3(x_1,x_2,x_3,x_4) &= x_1-x_2-4x_3-x_4\end{aligned}$

Considérons aussi une transformation linéaire *f*, transformant $\mathbb{R}^4$ en lui-même ; par exemple *f* telle que $(x_1,x_2,x_3,x_4)\mapsto f(x_1,x_2,x_3,x_4)=(2x_1-x_4,2x_2-x_3,x_1-x_2-x_4,-3x_3)$.

Si maintenant, à la place de considérer $\varphi_i(x)$, nous considérons $\varphi_i(f(x))$, nous obtenons un autre système d'équations linéaires auquel nous allons maintenant nous intéresser :

$$\begin{cases}\varphi_1(f(x))=7 & \text{où} \quad \varphi_i\in(\mathbb{R}^4)'\\ \varphi_2(f(x))=10 & \quad x=(x_1,x_2,x_3,x_4)\in\mathbb{R}^4\\ \varphi_3(f(x))=5 & \quad f:\mathbb{R}^4\to\mathbb{R}^4\end{cases}$$

Figure 7.III : Système linéaire considéré dans notre développement

Si nous souhaitons écrire de manière explicite ce système d'équations linéaires, nous pouvons bien entendu évaluer chaque φ_i en $f(x)$, pour tout $x=(x_1,x_2,x_3,x_4)\in\mathbb{R}^4$, et ensuite réécrire les expressions obtenues en mettant en évidence chaque composante de *x*. Ainsi, pour obtenir $\varphi_1(f(x))$, nous devrions effectuer les opérations suivantes :

$$\begin{aligned}\varphi_1(f(x_1,x_2,x_3,x_4)) &= \varphi_1(2x_1-x_4,2x_2-x_3,x_1-x_2-x_4,-3x_3)\\ &= 2(2x_1-x_4)+3(2x_2-x_3)-5(x_1-x_2-x_4)+4(-3x_3)\\ &= (4-5)x_1+(6+5)x_2+(-3-12)x_3+(-2+5)x_4\\ &= -x_1+11x_2-15x_3+3x_4\end{aligned}$$

Figure 7.IV : Calcul de $\varphi_1(f(x))$ en tant que composition de fonctions

L'opération que nous venons de faire se représente schématiquement par la situation suivante :

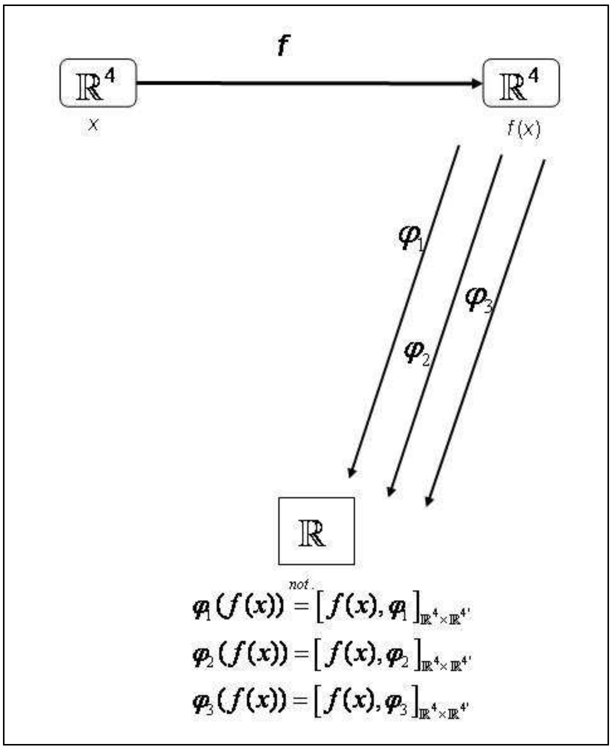


Figure 7.V : Représentation schématique de la composition de *f* et φ_i

Et qui, analytiquement, se conçoit comme la composition de deux applications linéaires, même si elles sont de natures différentes : une transformation linéaire et une forme linéaire : $\varphi_i \circ f : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}$. On montre facilement que la composition de deux applications linéaires est une application linéaire. Comme $\varphi_i \circ f$ va de $\mathbb{R}^4$ dans $\mathbb{R}$, il s’agit d’une forme linéaire, que nous pouvons noter $\varphi_{i,f}$ en raison de l’influence de *f* (pour une transformation linéaire *f* donnée, à toute forme linéaire φ_i est associée une forme linéaire $\varphi_{i,f}$ particulière). On peut donc compléter la Figure 7.V de façon à obtenir le schéma suivant :

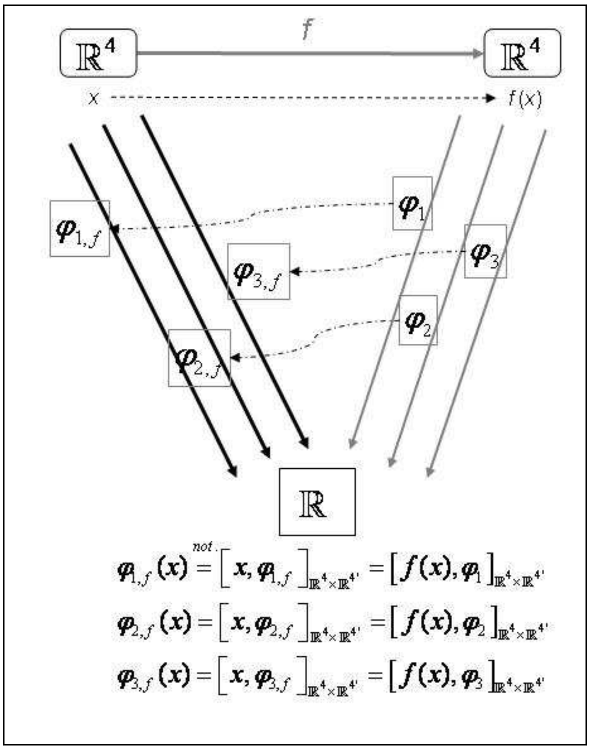


Figure 7.VI : Introduction des formes linéaires $\varphi_{i,f}$

Replaçons-nous maintenant dans le cadre des systèmes d'équations linéaires. On conçoit alors qu'à la place de calculer $\varphi_i(f(x_1, x_2, x_3, x_4))$ comme étant la composition de φ_i et f (voir Figure 7.IV), on se propose de calculer $\varphi_{i,f}(x_1, x_2, x_3, x_4)$ qui lui est équivalent (voir Figure 7.VI). C'est-à-dire que l'on propose de transformer directement la forme linéaire φ_i de manière à obtenir la forme linéaire $\varphi_{i,f}$. Autrement dit, on se propose de transformer directement le membre de gauche intervenant dans l'équation *i* du système linéaire initialement considéré (Figure 7.II). On considère donc une transformation du dual de $\mathbb{R}^4$, que nous nommons f^t, qui à chaque φ_i de $(\mathbb{R}^4)'$ associe $\varphi_{i,f}$. C'est ce que représente schématiquement la Figure 7.VII :

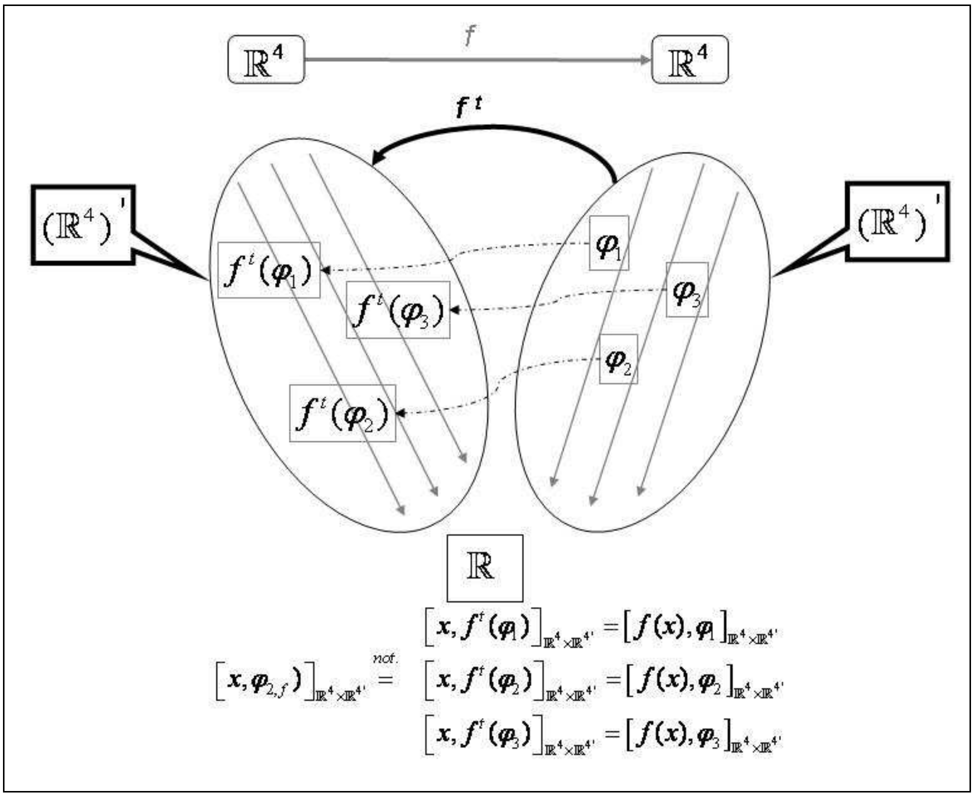


Figure 7.VII : Définition (sous forme de schéma) de l'application transposée de *f*

Il nous reste donc à définir analytiquement la transformation linéaire f^t :

$f^t : \mathbb{R}^{4\,'} \to \mathbb{R}^{4\,'}$ telle que $\forall \varphi_i \in \mathbb{R}^{4\,'} : \forall x \in \mathbb{R}^4 : \left[x, f^t(\varphi_i)\right]_{\mathbb{R}^4\times\mathbb{R}^{4\,'}} = \left[f(x), \varphi_i\right]_{\mathbb{R}^4\times\mathbb{R}^{4\,'}}$

où l'on peut détailler analytiquement chaque forme linéaire φ_i de $\mathbb{R}^{4\,'}$ par :

$$\varphi_i : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R} \text{ où } \forall x = (x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{R}^4 : [x, \varphi_i]_{\mathbb{R}^4\times\mathbb{R}^{4\,'}} = ax_1 + bx_2 + cx_3 + dx_4 \qquad (3)$$

Si nous particularisons à la transformation f considérée dans notre raisonnement :

f telle que $\forall x = (x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{R}^4 : f(x) = (2x_1 - x_4, 2x_2 - x_3, x_1 - x_2 - x_4, -3x_3)$, on obtient alors :

$$\begin{aligned}\left[x, f^t(\varphi_i)\right]_{\mathbb{R}^4\times\mathbb{R}^{4\,'}} &= \left[f(x), \varphi_i\right]_{\mathbb{R}^4\times\mathbb{R}^{4\,'}} \\ &= a(2x_1 - x_4) + b(2x_2 - x_3) + c(x_1 - x_2 - x_4) + d(-3x_3) \\ &= (2a + c)x_1 + (2b - c)x_2 + (-b - 3d)x_3 + (-a - c)x_4\end{aligned}$$

où a, b, c, d sont définis dans (3).

Autrement dit, nous pouvons à présent obtenir le membre de gauche de chaque équation du système présenté à la Figure 7.III, $\varphi_i(f(x)) \overset{not.}{=} \left[f(x), \varphi_i\right]$, en calculant directement $\left[x, f^t(\varphi_i)\right] \overset{not.}{=} (f^t(\varphi_i))(x)$ qui lui est égal par définition de l'application transposée f^t. Dit encore autrement, à la place de transformer les x_i par l'application *f*, on transforme les équations par l'application f^t.

En particularisant à la première équation du système considéré (Figure 7.III), et en nous rappelant que $\forall x=(x_1,x_2,x_3,x_4)\in\mathbb{R}^4 : [x,\varphi_1]_{\mathbb{R}^4\times\mathbb{R}^{4'}} = 2x_1+3x_2-5x_3+4x_4$ on obtient alors :

$$\begin{aligned}\varphi_1(f(x_1,x_2,x_3,x_4)) &\overset{\text{déf. de } f^t}{=} (f^t(\varphi_1))(x_1,x_2,x_3,x_4)\\ &=(2.2+(-5))x_1+(2.3-(-5)x_2+(-3-3(4))x_3+(-2-(-5))x_4\\ &=-x_1+11x_2-15x_3+3x_4\end{aligned}$$

Figure 7.VIII : Calcul de $\varphi_1(f(x))$ par la transposée de *f*

En comparant avec la première technique de calcul utilisée (voir Figure 7.IV), on se rend effectivement compte que ce sont directement les coefficients des membres de gauche des équations qui sont manipulés dans la dernière technique présentée, utilisant la transposée (Figure 7.VIII), et non plus les composantes de la variable *x* de $\mathbb{R}^4$.

Une fois la transposée d'une *transformation* linéaire ainsi introduite, on peut, si on le souhaite, facilement généraliser à la transposée d'une *application* linéaire (en ne considérant plus que le cadre formel, en registre analytique ou schématique).

On peut aussi reprendre la problématique proposée en introduction dans le cadre matriciel pour développer ensuite des propriétés concernant la transposée d'une application linéaire (matrice la représentant,…).

En introduisant la transposée de la sorte, nous nous sommes donc servie des cadres des matrices et des systèmes d'équations linéaires, pour les cadres contextualisés, et du cadre formel, abordé par les registres analytique et schématique. Nous pensons que la diversité des cadres et des registres est nécessaire à la compréhension du concept de transposée.

Annexe 8. Déroulement général des dispositifs mis en place à Namur en 2008-2009

En référence au chapitre 5, § 3.1, le Tableau 8.I présente un aperçu général du déroulement de l'enseignement de l'algèbre linéaire en première année de mathématique ou de physique à l'université de Namur lors de l'année académique 2008-2009. Nous n'avons repris le détail que pour les mois d'octobre, novembre et début décembre car il s'agit de la période concernée par l'enseignement de la dualité. Une colonne est dédiée aux mathématiciens, et une autre aux physiciens. Lorsqu'une séance est commune aux deux sections, les colonnes sont regroupées en une seule dans le tableau. Les séances concernent soit des cours théoriques (« CTh » et en grisé foncé dans le tableau), des travaux dirigés (« TD » et en grisé moyen dans le tableau), ou des séances tremplin (« Tr » et en grisé clair dans le tableau). La durée des séances est également reprise entre parenthèses. Les séances spécifiquement concernées par l'enseignement de la dualité (en tant qu'objet) sont indiquées en gras dans le tableau.

<table>
<tr><th>Dates</th><th>Mathématiciens</th><th>Physiciens</th></tr>
<tr><td rowspan="2">Au 30 sept. 2008</td><td colspan="2">CTh : Chap.1 -> Sous-espaces engendrés par un ensemble de vecteurs (Span)</td></tr>
<tr><td>TD : « Structures algébriques »</td><td>TD : « Structures algébriques »</td></tr>
<tr><td>Jeu 2 oct. 2008</td><td></td><td>Tr (2h) : correspondances et structures algébriques.</td></tr>
<tr><td>Ven 3 oct. 2008</td><td colspan="2">Tr (1h) : lin. dépendant, lin. indépendant, combinaisons linéaires.</td></tr>
<tr><td>Ven 3 oct. 2008</td><td>Dispositif d'enseignement « Les espaces vectoriels » : distribution du travail de groupe.</td><td></td></tr>
<tr><td>Lun 6 oct. 2008</td><td>Tr (30min) : sous-espaces engendrés par un ensemble de vecteurs (Span)</td><td></td></tr>
<tr><td>Mar 7 oct. 2008</td><td colspan="2">CTh (1h30) : Fin Chap.1 + Chap.2 -> section 2.1 appl. Linéaires</td></tr>
<tr><td>Mer 8 oct. 2008</td><td>Tr (1h) : mettre un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^4$ (donné avec des équations) sous forme de Span + illustration d'application linéaire de $\mathbb{R}^4$ vers $\mathbb{R}^3$, ker f et Im f</td><td></td></tr>
<tr><td>Lun 13 oct. 2008</td><td>TD (1h30) : Les sous-espaces vectoriels.</td><td></td></tr>
<tr><td>Mar 14 oct. 2008</td><td></td><td>TD (1h) : dépendance linéaire et dimension. Début des sous-espaces vectoriels (pas encore les Spans)</td></tr>
</table>

Dates	Mathématiciens	Physiciens
Mer 15 oct. 2008	Tr (1h) : somme directe + démonstrations du thm 2.3 « Tout espace vectoriel de dim finie construit sur le champ K est isomorphe à K^n » et du thm. 2.6 « Le complémentaire du noyau d'une application linéaire *f* est isomorphe à l'image de *f* »	Tr (1h) : mettre un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^4$ (donné avec des équations) sous forme de Span + Notion de ker *f* et Im *f*.
Ven 17 oct. 2008		Tr (1h) : calcul du noyau d'une application linéaire de $\mathbb{R}^4$ vers $\mathbb{R}^3$. Explication de somme directe et d'isomorphisme + démonstration du thm 2.3
Lun 20 oct. 2008	TD (1h30) : fin des exercices sur sous-espaces vectoriels et dimension	
Mar 21 oct. 2008	CTh (1h30) : Chapitre2 (suite) : Transformations linéaires ; Matrices et transformations linéaires.	
Mar 21 oct. 2008		TD (1h) : Sous-espaces vectoriels, Span et dimensions
Mer 22 oct. 2008		**Tr (1h) : Dispositif d'enseignement « Applications », question 1.**
Ven 24 oct. 2008	Tr (1h) : questions-réponses sur le chapitre 1.	
Lun 27 oct. 2008	TD (1h30) : Applications linéaires (noyau, image, calcul de f^3) + rappels sur la construction des matrices.	
Mar 28 oct. 2008	CTh (1h30) : Chapitre2 (suite) : Applications linéaires et matrices rectangulaires ; **Formes linéaires (espace dual, mais pas encore réflexivité).**	
Mar 28 oct. 2008		TD (1h) : fin des dimensions et sous-espaces vectoriels. A préparer par les étudiants : Ker et Image (sans avoir vu les rappels en TD).
Mer 29 oct. 2008	**Tr (1h) : Dispositif d'enseignement « Qu'est-ce qu'une matrice ? »** + correction du test de Novembre 2007, Q3. 3 et 4 (à préparer par les étudiants).	
Ven 31 oct. 2008	Tr (25 min) : Correction du test de Novembre 2007, Q2.2 (les étudiants doivent travailler les questions avant de venir en séance).	
Ven 31 oct. 2008		**Tr (30 min) : Dispositif d'enseignement « Applications » : fin (questions 2, 3 et 4).**

Dates	Mathématiciens	Physiciens
Lun 3 nov. 2008	TD (1h30) : suite des rappels sur les matrices (y compris changement de base) + ex. sur construction de matrice et calcul de $f(v)$ à partir de la matrice.	
Mar 4 nov. 2008		TD (1h supplémentaire) : Rappels sur appl. linéaires, surj., inj. Ker et Image + exercices sur Ker, Im f et f^2 + début de rappels sur la construction de matrices.
Mar 4 nov. 2008		TD (1h) : suite des rappels sur les matrices (y compris changement de base) + ex. sur construction de matrice et calcul de $f(v)$ à partir de la matrice.
Mer 5 nov. 2008		**Tr (1h) : Dispositif d'enseignement « Formes linéaires et dual » : activité sur les niveaux macro-micro pour introduire les formes linéaires et le dual.**
Ven 7 nov. 2008	**Tr (1h) : Dispositif d'enseignement « Formes linéaires et dual » : activité sur les niveaux macro-micro pour introduire les formes linéaires et le dual.**	
Semaine de tests (évaluation formative) pour les étudiants de première année		
Lun 17 nov. 2008	TD (1h30) : exercices sur les changements de base + ex: à partir d'une matrice, trouver la définition et les propriétés de f (inj., surj.,…)	
Mar 18 nov. 2008	**CTh (1h30) : Chapitre 2 suite : théorème de réflexivité ; transformations linéaires et transposées.** Chapitre 3 : Déterminants :3.1 : les permutations	
Mar 18 nov. 2008		TD (1h) : ex : matrices et changement de base + explication de l'ex : à partir d'une matrice, trouver la définition et les propriétés de f (inj., surj.,…)
Mer 19 nov. 2008	**Tr (1h) : Illustration « Primal, dual, bidual » : illustrations de ces notions (en prenant comme espaces vectoriels particuliers $\mathbb{R}^3$, $\mathcal{P}_6$, $\mathcal{M}_{2x3}$)**	
Lun 24 nov. 2008	**TD (2h) :** fin du dernier ex. sur les matrices **+ rappels sur formes linéaires et dual ; bases duales et matrices : exercices de calcul de base duale et exercice théorique pour obtenir l'expression générale d'une forme linéaire (FL)**	

Dates	Mathématiciens	Physiciens
Mar 25 nov. 2008		**TD (1h) :** correction des exercices sur les matrices ; **rappels sur formes linéaires et dual ; expliquer comment calculer base duale. Ex : calcul d'une base duale + exercice théorique sur l'expression générale d'une forme linéaire (FL)**
Mer 26 nov. 2008	Pas de tremplin algèbre car correction des tests d'autres cours + séminaire de méthodologie sur l'organisation de l'étude et de la session d'examens.	
Lun 1 déc. 2008	**TD (2h) : ex. sur l'expression de *y*(*x*) où les coord. de la FL *y* sont données (changement de base par rapport au dual) + Montrer qu'une forme linéaire appartient au bidual et trouver son correspondant dans le primal. Rappel sur la transposée + exercice de calcul de transposée par la définition (à faire à domicile : calcul $f^{\,t}$ par la matrice) + ex : étant donnée une FL, montrer qu'elle appartient au dual, montrer que deux FL sont LI, calculer Span et Dim, vérifier des lois sur l'espace dual**	
Mardi 2 déc. 2008	CTh (1h30) : Chapitre 3 (suite) : suite de 3.1 + 3.2 : déterminants	
Mar 2 déc. 2008		**TD (1h) : ex. sur l'expression de *y*(*x*) où les coord. de la FL *y* sont données (changement de base par rapport au dual) + montrer qu'une F.L. appartient au bidual et trouver son correspondant dans le primal. Rappel sur la transp.**
Mer 3 déc. 2008	Tr (1h) : correction du test de novembre (49 étudiants)	
Ven 5 déc. 2008		Tr (1h) : Explication du Thm « toute permutation est un produit de cycles disjoints 2 à 2 » + exercice complémentaire sur les changements de base.
Lun 8 déc. 2008	TD (1h30) : chap3 : rappels sur les déterminants. Exercices associés.	
Mar 9 déc. 2008	CTh (1h30) : Chapitre 3 (suite)	
Mar 9 déc. 2008		**TD (1h) : Rappels sur la transposée ; calcul de $f^{\,t}$ de 2 façons** ; rappels sur les déterminants. **(Pour certains « volontaires » : 30 min. de + : ex. suppl. sur base duale, transp.)**

Tableau 8.I : Présentation générale du planning d'algèbre linéaire concerné par la dualité en 2008-2009

Annexe 9. Proposition d'illustration des notions d'espace vectoriel primal, dual, bidual

En référence au chapitre 5, nous présentons ici un enseignement qui a pour but d'*illustrer* la notion d'espace vectoriel primal, dual et bidual en utilisant un répertoire d'exemples des espaces vectoriels. Cette présentation a également pour but d'illustrer le théorème de réflexivité, en explicitant les objets intervenant dans celui-ci, et ce, dans différents cadres (Douady 1986).

Méthodologie

L'activité proposée ici a été mise en place dans le cadre de l'opération tremplin conjointement pour les étudiants de mathématique et physique. Une séance tremplin commune (une heure) pour les deux sections a été organisée à cette fin (19 novembre 2008 ; 9 décembre 2009). Pour cette activité, il est recommandé que la classe (ou auditoire) soit munie d'un grand tableau afin que ce dernier puisse être séparé en trois parties : une première partie consacrée à l'espace primal, une deuxième à l'espace dual et une troisième au bidual. Le fait de pouvoir afficher sur un seul tableau ces trois parties permettra d'illustrer plus aisément le théorème de réflexivité dans lequel intervient des éléments de ces trois espaces.

L'illustration que nous proposons prend place après que le dispositif « Formes linéaires et dual » ait été mis en œuvre. Les étudiants qui y participent ont déjà vu au cours théorique le premier chapitre sur les espaces vectoriels et le deuxième chapitre sur les applications, transformations et formes linéaires. Le chapitre 3 sur les déterminants avait déjà été abordé. Cependant, il n'y a pas encore eu de travaux dirigés concernant la dualité. Un répertoire minimum d'exemples d'espaces vectoriels est requis afin de pouvoir illustrer dans différents cadres les notions impliquées dans cette activité. La notation des crochets de dualité a été introduite.

Présentation et analyse a priori

Nous avons expliqué dans la méthodologie que le tableau de la salle de cours sera partagé en trois parties. Nous présentons à la fin de cette Annexe 9 une proposition de tableau qui peut résulter de l'activité « Primal, dual et bidual » que nous détaillons maintenant.

Dans un premier temps, nous proposons d'illustrer en parallèle la notion d'espace vectoriel primal, dual et bidual. Dans un deuxième temps, nous illustrerons, sur base de ce qui aura déjà été présenté, le théorème de réflexivité.

Illustration des notions de primal, dual et bidual

Un rappel des notions concernées par cet enseignement est d'abord présenté dans le cadre générique. Ainsi, au début de l'activité, le tableau de la salle de cours ressemble au tableau présenté à la Figure 9.I, où les notions de primal, dual et bidual ont été resituées.

Primal	Dual	Bidual
E : espace vectoriel, construit sur champ K, de dimension n	$E' = \{y : E \to K \quad \text{et } y \text{ linéaire}\}$ E' : espace vectoriel, construit sur champ K, de dimension n	$E'' = (E')' = \{z : E' \to K \quad \text{et } z \text{ linéaire}\}$ E'' : espace vectoriel, construit sur champ K, de dimension n

Figure 9.I : Présentation initiale du tableau dans l'illustration "Primal, dual, bidual"

Nous proposons ensuite de présenter les notions considérées dans au moins trois cadres contextualisés, c'est-à-dire différents du cadre générique, dont un seul cadre algébrique ($\mathbb{R}^n, \mathbb{C}^n$) ou géométrique ($\mathbb{R}^2$ ou $\mathbb{R}^3$). En effet, la variété des cadres est recommandée pour la compréhension d'une notion (Douady 1986), et il est important de montrer le caractère unificateur des notions d'algèbre linéaire sur une diversité d'espaces non habituellement considérés par les étudiants. Un cadre géométrique, plus familier aux étudiants ou un cadre algébrique, qui en constitue une première généralisation, permet d'exprimer les éléments des espaces vectoriels (« vecteurs ») sous forme de *n*-uplet, sans autre symbole supplémentaire que des parenthèses ou des virgules par rapport aux composantes. De plus, si on veut indicer ces éléments, un seul indice est suffisant (contrairement aux notations usuelles des matrices par exemple).

En octobre 2008, nous avions par exemple exhibé les espaces vectoriels $\mathbb{R}^3$, $\mathcal{P}_6$ (espace vectoriel des fonctions polynomiales de degré maximum 6, construit sur le corps des réels), et $\mathcal{M}_{2x3}$ (espace vectoriel des matrices réelles rectangulaires à 2 lignes et 3 colonnes), chaque fois construits sur le champ des réels.

Illustration de la notion d'espace vectoriel (primal)

On propose d'inscrire, sur des lignes séparées, ces trois espaces dans la colonne correspondant à l'espace vectoriel primal (première colonne) et pour chacun de ces espaces, de présenter un « vecteur » (c'est-à-dire un élément de l'espace *vectoriel*) générique et un ou deux « vecteurs » particuliers. Par exemple, pour $\mathcal{M}_{2x3}$, on présentera respectivement $x = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{pmatrix}$ et $x_1 = \begin{pmatrix} -14 & -1 & 5 \\ \sqrt{2} & \frac{3}{2} & 0 \end{pmatrix}$ par exemple. En agissant de la sorte, les composantes des vecteurs sont mises en évidence, sous un aspect plus formel d'abord, et particulier (ou calculatoire) ensuite. Cette mise en évidence est importante : tout d'abord, afin de concrétiser plus avant le vecteur en question ; ensuite, afin de pouvoir expliciter (par après) des formes linéaires (éléments du dual) définies sur l'ensemble de ces vecteurs.

Illustration du dual

L'activité « Primal, dual et bidual » se poursuit ensuite : pour chacun des espaces vectoriels choisis, nous considérons maintenant son dual, en complétant maintenant la deuxième colonne du tableau. Comme cela a été fait pour l'espace primal, pour chacun des espaces duaux considérés, sont donnés un « vecteur » (c'est-à-dire ici une forme linéaire) générique et un « vecteur » (forme linéaire) particulier.

Ainsi par exemple une forme linéaire du dual de l'espace vectoriel $\mathcal{M}_{2\text{x}3}$ pourra s'écrire de manière générique $y: \begin{array}{ccc} \mathcal{M}_{2\times3} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & y(x) \overset{not.}{=} [x,y] = [x,y]_{\mathcal{M}_{2\times3}\times(\mathcal{M}_{2\times3})'} \end{array}$.

Et, en se rappelant que tout x de $\mathcal{M}_{2\text{x}3}$ peut s'écrire $x = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{pmatrix}$, on peut spécifier davantage l'expression $y(x) \overset{not.}{=} [x,y]$: $[x,y] = \alpha_1 a_{11} + \alpha_2 a_{12} + \alpha_3 a_{13} + \alpha_4 a_{21} + \alpha_5 a_{22} + \alpha_6 a_{23}$.

Si maintenant nous souhaitons exhiber une forme linéaire particulière, que nous noterons y_1, nous devons particulariser l'expression de $y_1(x) \overset{not.}{=} [x,y_1]$, en donnant des valeurs spécifiques aux différents α_i. Par exemple, en prenant $\alpha_1 = -\frac{3}{7}$, $\alpha_2 = -7$, $\alpha_3 = \alpha_5 = 0$, $\alpha_4 = 8$, $\alpha_6 = -\sqrt{5}$, on obtient :

$$[x,y_1] = -\frac{3}{7}a_{11} - 7a_{12} + 8a_{21} - \sqrt{5}a_{23}, \text{ où } x = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{2\times3} \quad \text{et} \quad y_1 \in (\mathcal{M}_{2\times3})'.$$

Comme cela était le cas dans un espace primal, le fait de devoir donner une forme linéaire particulière d'un espace dual considéré permet de mettre en évidence les composantes différenciant les formes linéaires les unes des autres à l'intérieur d'un même espace dual. Cette mise en évidence est importante, pour les deux mêmes raisons citées lors de la présentation des espaces vectoriels primaux, à savoir concrétiser tout d'abord ce qu'est une forme linéaire, et pouvoir par la suite définir des formes linéaires sur cet ensemble de formes linéaires, lorsque l'on prendra en compte le bidual.

Pour mettre davantage en avant les différentes composantes des vecteurs considérés, on peut utiliser pour ces dernières une couleur spécifique à chaque espace (primal ou dual). Cette couleur serait propre à chaque colonne du tableau, c'est-à-dire qu'elle correspondrait aux différents types d'espaces considérés : primal, dual (et bidual pour la suite). Ainsi, par exemple la couleur bleue pourra être utilisée pour représenter les composantes des « vecteurs » du primal ; la couleur verte sera réservée pour écrire les composantes des vecteurs du dual ; la couleur rouge sera utilisée pour écrire les composantes des vecteurs du bidual, qui seront considérés par la suite.

Nous pouvons de plus considérer l'application de y_1 en un élément particulier de $\mathcal{M}_{2\text{x}3}$, par exemple x_1, déjà défini plus haut. Nous obtenons alors :

$$
\begin{aligned}
[x_1, y_1]_{\mathcal{M}_{2\times3}\times(\mathcal{M}_{2\times3})'} &= -\frac{3}{7}a_{11} \quad -7a_{12} \quad +8a_{21} \quad -\sqrt{5}a_{23} \\
&= -\frac{3}{7}(-14) \quad -7(-1) \quad +8\left(\frac{3}{2}\right) \quad -\sqrt{5}(0) \\
&= \quad 6 \quad + \quad 7 \quad + \quad 12 \quad + \, 0 \\
&= \quad 25 \\
&\in \mathbb{R}
\end{aligned}
$$

On vérifie ainsi concrètement que $[x_1, y_1]_{\mathcal{M}_{2\times3}\times(\mathcal{M}_{2\times3})'}$ appartient bien à $\mathbb{R}$. Ainsi en est-il aussi pour $[x, y]_{\mathcal{M}_{2\times3}\times(\mathcal{M}_{2\times3})'}$ où x est quelconque dans $\mathcal{M}_{2\text{x}3}$ et y quelconque dans $(\mathcal{M}_{2\text{x}3})'$. Cette constatation sera utilisée pour illustrer le théorème de réflexivité.

Illustration du bidual

Après avoir présenté le dual des espaces vectoriels considérés dans l'activité, nous poursuivons avec le dual du dual, c'est-à-dire le bidual. On se propose ainsi de compléter la troisième et dernière colonne du tableau d'une manière identique à celle appliquée pour les autres colonnes. Les notations étant plus lourdes à manipuler (une forme linéaire d'une forme linéaire implique plusieurs éléments différents), nous pouvons nous contenter du cadre géométrique ou algébrique et d'un autre cadre contextualisé. Nous présentons donc un élément générique, ainsi qu'un élément particulier du bidual de deux espaces vectoriels choisis.

En reprenant l'exemple de l'espace vectoriel $\mathcal{M}_{2\text{x}3}$, nous définissons alors un élément générique z appartenant au bidual de $\mathcal{M}_{2\text{x}3}$ comme :

$$
\begin{aligned}
z: \quad (\mathcal{M}_{2\times3})' &\to \mathbb{R} \\
y &\mapsto z(y) \overset{not.}{=} [y, z] = [y, z]_{(\mathcal{M}_{2\times3})' \times (\mathcal{M}_{2\times3})''}
\end{aligned}
\qquad (5)
$$

Nous nous rappelons que tout y de $(\mathcal{M}_{2\text{x}3})'$ peut s'écrire :

$$
\begin{aligned}
y: \quad \mathcal{M}_{2\times3} &\to \mathbb{R} \\
x &\mapsto y(x) \overset{not.}{=} [x, y] = [x, y]_{\mathcal{M}_{2\times3}\times(\mathcal{M}_{2\times3})'}
\end{aligned}
$$

où, en sachant que $x = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{pmatrix}$, on avait pu spécifier davantage l'expression

$$
y(x) \overset{not.}{=} [x, y] \; : \; [x, y] = \alpha_1 a_{11} + \alpha_2 a_{12} + \alpha_3 a_{13} + \alpha_4 a_{21} + \alpha_5 a_{22} + \alpha_6 a_{23} .
$$

Nous sommes donc en mesure de préciser l'expression de $z(y) \overset{not.}{=} [y, z] \overset{not.}{=} [y, z]_{(\mathcal{M}_{2\times3})' \times (\mathcal{M}_{2\times3})''}$ dans (5). Nous obtenons alors :

$$
[y, z] = \beta_1\alpha_1 + \beta_2\alpha_2 + \beta_3\alpha_3 + \beta_4\alpha_4 + \beta_5\alpha_5 + \beta_6\alpha_6
$$

Si maintenant nous souhaitons donner un élément particulier du bidual (une forme linéaire), que nous noterons z_1 ($z_1 \in (\mathcal{M}_{2\times3})''$), nous devons particulariser l'expression de

$z_1(y) \overset{not.}{=} [y, z_1]$, pour tout $y \in (\mathcal{M}_{2\times3})'$, en donnant des valeurs particulières aux scalaires β_i.
En prenant par exemple $\beta_1 = 21$, $\beta_2 = 6$, $\beta_3 = -\frac{6}{5}$, $\beta_4 = -1$, $\beta_5 = 0$, $\beta_6 = 2\sqrt{5}$, on obtient :

$\forall y \in (\mathcal{M}_{2\times3})'$: $[y, z_1]_{(\mathcal{M}_{2\times3})' \times (\mathcal{M}_{2\times3})''} = 21\alpha_1 + 6\alpha_2 - \frac{6}{5}\alpha_3 - \alpha_4 + 2\sqrt{5}\alpha_6$, où l'expression analytique complète d'une forme linéaire y a été donnée dans la deuxième colonne, dédiée au dual :

$$\begin{array}{llll} y: & \mathcal{M}_{2\times3} & \to & \mathbb{R} \\ & x & \mapsto & [x, y]_{\mathcal{M}_{2\times3}\times(\mathcal{M}_{2\times3})'} = \alpha_1 a_{11} + \alpha_2 a_{12} + \alpha_3 a_{13} + \alpha_4 a_{21} + \alpha_5 a_{22} + \alpha_6 a_{23} \end{array}$$

$$\text{avec } x = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{pmatrix}.$$

Nous pouvons de plus considérer ici aussi l'application de z_1 en un élément particulier de ($\mathcal{M}$ 2x3)', par exemple y_1 défini plus haut. Nous obtenons alors :

$$\begin{aligned} [y_1, z_1]_{(\mathcal{M}_{2\times3})' \times (\mathcal{M}_{2\times3})''} &= 21\,\alpha_1 + 6\,\alpha_2 - \frac{6}{5}\,\alpha_3 - \alpha_4 + 2\sqrt{5}\,\alpha_6 \\ &= 21\left(-\frac{3}{7}\right) + 6(-7) - \frac{6}{5}(0) - (0) + 2\sqrt{5}\left(-\sqrt{5}\right) \\ &= -9 \quad -42 \quad -0 \quad -0 \quad -10 \\ &= -61 \\ &\in \mathbb{R} \end{aligned}$$

On vérifie ainsi concrètement que $[y_1, z_1]_{(\mathcal{M}_{2\times3})' \times (\mathcal{M}_{2\times3})''}$ appartient bien à $\mathbb{R}$, tout comme c'était le cas de $[x_1, y_1]_{\mathcal{M}_{2\times3}\times(\mathcal{M}_{2\times3})'}$. Il en est de même pour $[y, z]_{(\mathcal{M}_{2\times3})' \times (\mathcal{M}_{2\times3})''}$ où y est quelconque dans ($\mathcal{M}$ 2x3)' et z quelconque dans ($\mathcal{M}$ 2x3)''. Cela a donc un sens de comparer l'expression $[y, z]_{(\mathcal{M}_{2\times3})' \times (\mathcal{M}_{2\times3})''}$ à $[x, y]_{\mathcal{M}_{2\times3}\times(\mathcal{M}_{2\times3})'}$ car ces deux expressions représentent des réels (champ sur lequel a été construit l'espace vectoriel ($\mathcal{M}$ 2x3)').

Illustration du théorème de réflexivité

Les trois colonnes du tableau remplies selon la description ci-avant, il est alors plus facile d'illustrer le théorème de réflexivité, repris à la Figure 9.II.

> Soit E un espace vectoriel de dimension finie. Pour toute forme linéaire z définie sur E' (c'est-à-dire $\forall z \in E''$), il existe un vecteur unique x dans E ($\exists! x \in E$) tel que $\forall y \in E'$: $[x,y]_{E\times E'} = [y,z]_{E'\times E''}$. De plus, la correspondance ainsi définie entre x et z est un isomorphisme.

Figure 9.II : Théorème de réflexivité

En effet, en prenant par exemple l'élément z_1 du bidual de $\mathcal{M}$ 2x3 déjà défini avant ($z_1 \in$ ($\mathcal{M}$ 2x3)''), on peut se demander quel élément x_{z_1} lui correspond dans le primal

($x_{z_1} \in \mathcal{M}_{2x3}$) pour que, quelle que soit la forme linéaire *y* définie sur $\mathcal{M}_{2x3}$ ($\forall y \in \mathcal{M}_{2x3}$ ’), on ait :

$$\left[x_{z_1}, y\right]_{\mathcal{M}_{2\times3}\times(\mathcal{M}_{2\times3})'} = \left[y, z_1\right]_{(\mathcal{M}_{2\times3})' \times (\mathcal{M}_{2\times3})''}$$

En reprenant dans la colonne du milieu du tableau, l’expression générique d’une quelconque forme linéaire *y* du dual de $\mathcal{M}_{2x3}$:

$$\begin{array}{llll} y: & \mathcal{M}_{2\times3} & \rightarrow & \mathbb{R} \\ & x & \mapsto & [x, y]_{\mathcal{M}_{2\times3}\times(\mathcal{M}_{2\times3})'} = \alpha_1 a_{11} + \alpha_2 a_{12} + \alpha_3 a_{13} + \alpha_4 a_{21} + \alpha_5 a_{22} + \alpha_6 a_{23} \end{array}$$

$$\text{avec } x = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{pmatrix},$$

on obtient : $\forall y \in (\mathcal{M}_{2\times3})' \quad : \quad [y, z_1]_{(\mathcal{M}_{2\times3})' \times (\mathcal{M}_{2\times3})''} = 21\alpha_1 + 6\alpha_2 - \frac{6}{5}\alpha_3 - \alpha_4 + 2\sqrt{5}\alpha_6$ (6)

Comme nous cherchons l’élément $x_{z_1} = \begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} & x_{13} \\ x_{21} & x_{22} & x_{23} \end{pmatrix}$ appartenant à $\mathcal{M}_{2x3}$ tel que

$$\begin{array}{rcll} \forall y \in (\mathcal{M}_{2\times3})': \quad [x_{z_1}, y]_{\mathcal{M}_{2\times3}\times(\mathcal{M}_{2\times3})'} & = & \alpha_1 x_{11} + \alpha_2 x_{12} + \alpha_3 x_{13} + \alpha_4 x_{21} + \alpha_5 x_{22} + \alpha_6 x_{23} & \\ & = & 21\alpha_1 + 6\alpha_2 - \frac{6}{5}\alpha_3 - \alpha_4 + 2\sqrt{5}\alpha_6 & \text{(par (6))} \end{array}$$

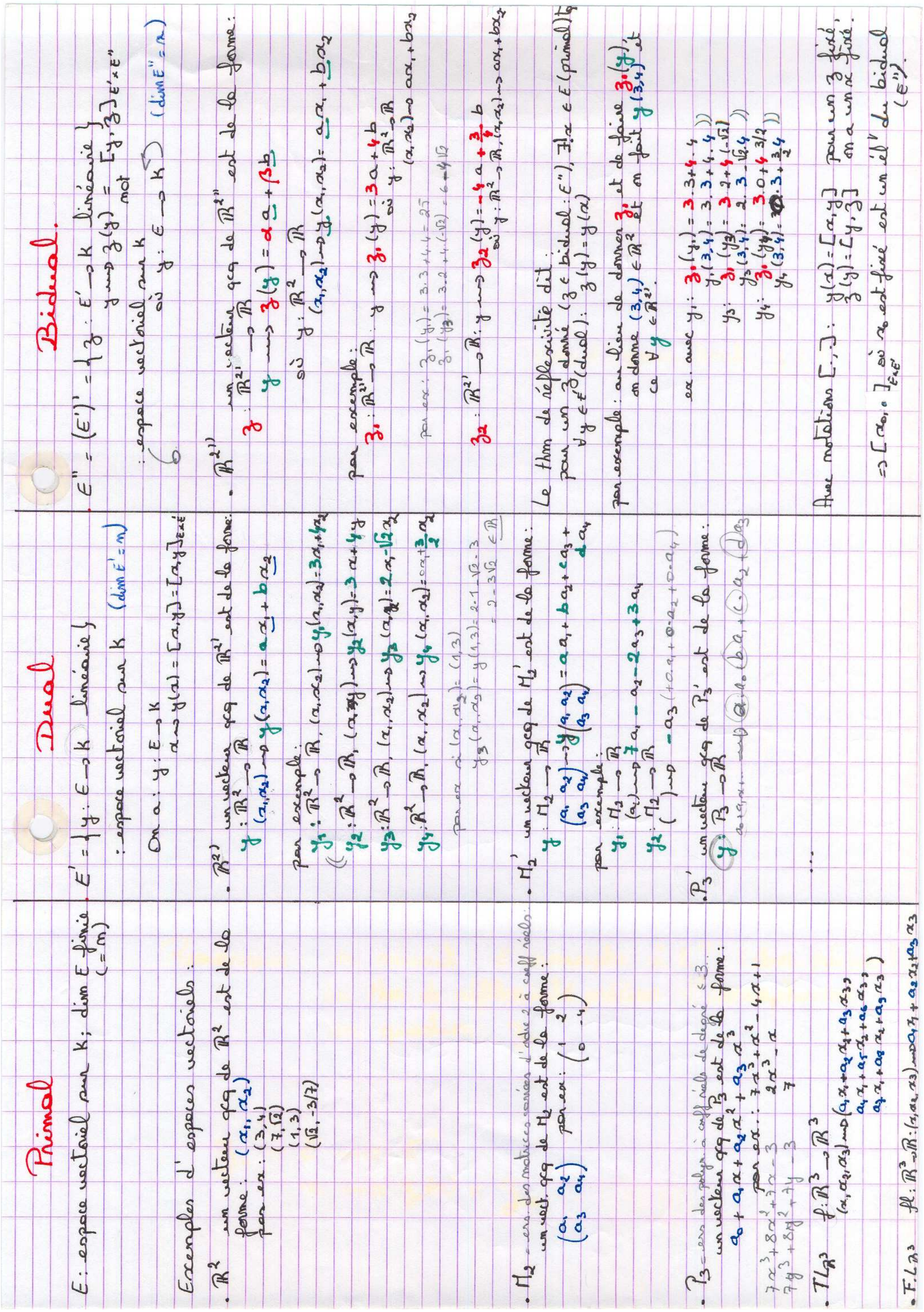
on identifie aisément les composantes de x_{z_1} :

$x_{11} = 21$ (coefficient de α_1), $x_{12} = 6$ (coefficient de α_2), $x_{13} = -\frac{6}{5}$ (coefficient de α_3),
$x_{21} = -1$ (coefficient de α_4), $x_{22} = 0$ (coefficient de α_5), $x_{23} = 2\sqrt{5}$ (coefficient de α_6).

Ainsi, en choisissant $x_{z_1} = \begin{pmatrix} 21 & 6 & -\frac{6}{5} \\ -1 & 0 & 2\sqrt{5} \end{pmatrix}$, on a bien $\left[x_{z_1}, y\right]_{\mathcal{M}_{2\times3}\times(\mathcal{M}_{2\times3})'} = \left[y, z_1\right]_{(\mathcal{M}_{2\times3})'\times(\mathcal{M}_{2\times3})''}$.

Par conséquent, nous avons bien illustré qu’à tout élément *z* du bidual (que nous avons illustré par z_1), nous pouvons faire correspondre un élément *x* du primal (que nous avons illustré par x_{z_1}) tel que pour tout *y* appartenant au dual, on ait : $[z, y] = [y, x]$.

Nous sommes bien consciente que la présentation de cet enseignement sous forme d’un texte narratif ne rend pas clairement compte de l’apport de celui-ci. Nous invitons le lecteur à consulter le tableau ci-après pour se rendre compte d’un exemple de remplissage du tableau à la fin de l’illustration.



Primal

E : espace vectoriel sur K ; dim E finie ($= n$)

Exemples d'espaces vectoriels :

. $\mathbb{R}^2$ un vecteur qcq de $\mathbb{R}^2$ est de la forme : (x_1, x_2)
par ex. : $(3,4)$, $(7,\sqrt{2})$, $(1,3)$, $(\sqrt{2}, -3/7)$

. M_2 = ens. des matrices carrées d'ordre 2 à coeff réels.
un vect. qcq de M_2 est de la forme : $\begin{pmatrix} a_1 & a_2 \\ a_3 & a_4 \end{pmatrix}$ par ex : $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -4 \end{pmatrix}$

. P_3 = ens. des polyn. à coeff réels de degré ≤ 3.
un vecteur qcq de P_3 est de la forme : $a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3$
par ex. : $7x^3 + x^2 - 4x + 1$; $2x^3 - x$; 7
$7x^3 + 8x^2 + 7x - 3$
$7y^3 + 8y^2 + 7y - 3$

. $TL_{\mathbb{R}^3}$ $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$
$(x_1, x_2, x_3) \mapsto (a_1 x_1 + a_2 x_2 + a_3 x_3,\ a_4 x_1 + a_5 x_2 + a_6 x_3,\ a_7 x_1 + a_8 x_2 + a_9 x_3)$

. $FL_{\mathbb{R}^3}$ $fl : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R} : (x_1, x_2, x_3) \mapsto a_1 x_1 + a_2 x_2 + a_3 x_3$

Dual

. $E' = \{ y : E \to K \text{ linéaire} \}$
: espace vectoriel sur K (dim $E' = n$)

On a : $y : E \to K$
$x \mapsto y(x) = [x, y] = [x, y]_{E \times E'}$

. $\mathbb{R}^{2'}$ un vecteur qcq de $\mathbb{R}^{2'}$ est de la forme :
$y : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$
$(x_1, x_2) \mapsto y(x_1, x_2) = a x_1 + b x_2$

par exemple :
$y_1 : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $(x_1, x_2) \mapsto y_1(x_1, x_2) = 3x_1 + 4x_2$
$y_2 : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $(x, y) \mapsto y_2(x, y) = 3x + 4y$
$y_3 : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $(x_1, x_2) \mapsto y_3(x_1, x_2) = 2x_1 - \sqrt{2} x_2$
$y_4 : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $(x_1, x_2) \mapsto y_4(x_1, x_2) = 0x_1 + \frac{3}{2} x_2$

par ex si $(x_1, x_2) = (1,3)$
$y_3(x_1, x_2) = y(1,3) = 2 \cdot 1 - \sqrt{2} \cdot 3 = 2 - 3\sqrt{2} \in \mathbb{R}$

. M_2' un vecteur qcq de M_2' est de la forme :
$y : M_2 \to \mathbb{R}$
$\begin{pmatrix} a_1 & a_2 \\ a_3 & a_4 \end{pmatrix} \mapsto y\begin{pmatrix} a_1 & a_2 \\ a_3 & a_4 \end{pmatrix} = a a_1 + b a_2 + c a_3 + d a_4$
par exemple :
$y_1 : M_2 \to \mathbb{R}$
$(a_i) \mapsto 7a_1 - a_2 - 2a_3 + 3a_4$
$y_2 : M_2 \to \mathbb{R}$
$(\ ) \mapsto -a_3 \ (+0 \cdot a_1 + 0 \cdot a_2 + 0 \cdot a_4)$

. P_3' un vecteur qcq de P_3' est de la forme :
$y : P_3 \to \mathbb{R}$
$a_0 + a_1 x + \ldots \mapsto a\, a_0 + b\, a_1 + c\, a_2 + d\, a_3$

...

Bidual.

. $E'' = (E')' = \{ z : E' \to K \text{ linéaire} \}$
$y \mapsto z(y) \underset{\text{not}}{=} [y, z]_{E' \times E''}$
: espace vectoriel sur K
où $y : E \to K$ (dim $E'' = n$)

. $\mathbb{R}^{2''}$ un vecteur qcq de $\mathbb{R}^{2''}$ est de la forme :
$z : \mathbb{R}^{2'} \to \mathbb{R}$
$y \mapsto z(y) = \alpha a + \beta b$
où $y : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$
$(x_1, x_2) \mapsto y(x_1, x_2) = a x_1 + b x_2$

par exemple :
$z_1 : \mathbb{R}^{2'} \to \mathbb{R} : y \mapsto z_1(y) = 3a + 4b$
où $y : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$
$(x_1, x_2) \mapsto a x_1 + b x_2$

par ex : $z_1(y_1) = 3 \cdot 3 + 4 \cdot 4 = 25$
$z_1(y_3) = 3 \cdot 2 + 4 \cdot (-\sqrt{2}) = 6 - 4\sqrt{2}$

$z_2 : \mathbb{R}^{2'} \to \mathbb{R} : y \mapsto z_2(y) = -4a + \frac{3}{4} b$
où $y : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, (x_1, x_2) \mapsto a x_1 + b x_2$

Le thm de réflexivité dit :
pour un z donné ($z \in$ bidual : E''), $\exists! x \in E$ (primal) tq $\forall y \in E'$ (dual) : $z(y) = y(x)$

par exemple : au lieu de donner z_1 et de faire $z_1(y)$, on donne $(3,4) \in \mathbb{R}^2$ et on fait $y(3,4)$ et ce $\forall y \in \mathbb{R}^{2'}$.

ex. avec y_1 : $z_1(y_1) = 3 \cdot 3 + 4 \cdot 4$
$y_1(3,4) = 3 \cdot 3 + 4 \cdot 4$
y_3 : $z_1(y_3) = 3 \cdot 2 + 4 \cdot (-\sqrt{2})$
$y_3(3,4) = 2 \cdot 3 - \sqrt{2} \cdot 4$
y_4 : $z_1(y_4) = 3 \cdot 0 + 4 \cdot 3/2$
$y_4(3,4) = 0 \cdot 3 + \frac{3}{2} \cdot 4$

Avec notations $[\cdot, \cdot]$: $y(x) = [x, y]$ pour un z fixé,
$z(y) = [y, z]$ on a un x fixé.

$\Rightarrow [x_0, \cdot]_{E \times E'}$ où x_0 est fixé est un élt du bidual (E'').

Annexe 10. Proposition d'enseignement pour l'introduction des bases duales

En référence au chapitre 5, nous présentons ici une proposition d'enseignement des bases duales que nous avons conçue afin d'introduire ce thème de la dualité par une finalité outil-résolution (voir chapitre 3, § 1).

Nous souhaitons avant situer le contexte dans lequel cette proposition est faite. Nous nous plaçons dans le contexte du cours d'algèbre donné à l'université de Namur aux élèves de première année en mathématique ou en physique. Nous reprenons tout d'abord (§ 1) la table des matières du cours suivi par ces étudiants (Toint 2007). Nous ne détaillons que les parties du cours qui ont déjà été présentés aux étudiants au moment où nous souhaitons introduire notre proposition d'enseignement des bases duales. Nous avons indiqué en gras et en italique la partie où s'insère notre proposition d'enseignement. Cette partie est ensuite présentée (§ 2).

1. Table des matières du polycopié d'algèbre linéaire – 1ère bac math&physique - Université de Namur

Nous présentons la table des matières du polycopié d'algèbre linéaire de l'université de Namur, pour les étudiants de première année mathématique et physique (Toint 2007). Nous n'avons détaillé que la partie précédant la dualité, et nous avons indiqué en gras et en italique l'emplacement où doit prendre place la proposition d'enseignement sur les bases duales.

2. Proposition d'enseignement des bases duales via une fonctionnalité outil

Ce qui suit pourrait prendre place dans le polycopié du cours d'algèbre linéaire dont la table des matières est donnée à la section précédente (Toint 2007). La structure présentée ci-après est conçue pour prendre place à l'intérieur de la section « 2.5. Formes linéaires » de ce cours d'algèbre, après qu'aient été définies les formes linéaires, et que la propriété affirmant que « toute combinaison linéaire de formes linéaires est une forme linéaire » ait été vue.

Bien entendu, nous nous sommes basée, pour notre proposition d'introduction des bases duales, sur la structure déjà proposée dans le polycopié du cours. En effet, c'est dans le cadre de ce cours que ce dispositif pourrait être mis en place. Ainsi, par exemple, le dernier théorème proposé dans la formulation ci-après (théorème 2.29) a été repris du polycopié déjà existant pour que la suite du cours reste cohérente Les notations adoptées dans notre proposition tiennent aussi compte des notations déjà introduites dans le polycopié du cours. Nous avons de plus respecté la philosophie du cours en ne présentant explicitement aucune méthode. Nous avons opté à la place pour un exercice résolu.

2.5.1 Espace dual

Si l'on considère l'ensemble E' des formes linéaires sur un espace vectoriel *E*, en le munissant de l'addition et de la multiplication par un scalaire que nous venons d'envisager, on peut voir (à faire en exercice) que cet ensemble est bien un espace vectoriel. Il s'agit de *l'espace dual* de *E*.

Définition 39 *L'espace (vectoriel) dual E' d'un espace vectoriel E est composé de l'ensemble des formes linéaires sur E, muni de la loi interne d'addition (2.5) et de la multiplication par un scalaire (2.6).*
L'espace vectoriel E est alors parfois appelé l'espace primal.

Les vecteurs de l'espace dual sont donc des formes linéaires.

Nous allons maintenant introduire une notation supplémentaire, mais qui va nous faciliter le travail. Au lieu de noter l'image d'un vecteur x par une forme linéaire *y* sous la forme *y*(*x*) comme plus haut, nous noterons

$$y(x) = [x, y],$$

ce qui peut se lire : « on prend *x* et on lui applique *y* ».
Cette notation introduit une symétrie implicite entre les vecteurs de *E* et ceux de son dual *E'*.
Nous pouvons alors écrire la propriété (2.4) sous la forme

$$[\alpha x+\beta z,\ y]=\alpha[x,\ y]+\beta[z,\ y] \quad , \tag{2.7}$$

tandis que la propriété caractéristique des opérations sur les formes linéaires (les vecteurs du dual) s'écrit

$$[x,\ \alpha y+\beta z]=\alpha[x,\ y]+\beta[x,\ z] \quad . \tag{2.8}$$

Bien que les mêmes symboles « [» «] » soient utilisés, remarquons qu'il ne faut pas confondre la notation du crochet de dualité, [*x*, *y*], avec la notation utilisée pour représenter les coordonnées d'un vecteur *v* dans une base X, $[v]^X$, ni avec la notation utilisée pour représenter une matrice, $[f]_X^Y$.

Formes coordonnées

Nous allons maintenant introduire la notion de ***formes coordonnées associées à une base*** d'un espace vectoriel *E*.
Considérons l'espace vectoriel $\mathcal{M}_{2x2}$ des matrices carrées d'ordre 2 à coefficients réels. Soit $X=\left\{\begin{pmatrix}2 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix},\ \begin{pmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix},\ \begin{pmatrix}0 & 0\\ 3 & 0\end{pmatrix},\ \begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 5\end{pmatrix}\right\}$ une base de $\mathcal{M}_{2x2}$. On sait que toute matrice carrée d'ordre 2 à coefficients réels peut alors s'écrire de façon unique comme combinaison linéaire de ces quatre vecteurs de base, c'est-à-dire :

$$\forall M\in\mathcal{M}_{2x2}: M=m_1\begin{pmatrix}2 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}+m_2\begin{pmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix}+m_3\begin{pmatrix}0 & 0\\ 3 & 0\end{pmatrix}+m_4\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 5\end{pmatrix}$$

ou encore, si on appelle x_i le $i^{ème}$ élément de la base X de $\mathcal{M}_{2x2}$ décrite ci-dessus, on a :

$$\forall M\in\mathcal{M}_{2x2}: M=m_1x_1+m_2x_2+m_3x_3+m_4x_4\,,$$

où les m_i sont les coordonnées de M dans la base X .
En particulier par exemple, la matrice $\begin{pmatrix}5 & -3\\ -9 & 5\end{pmatrix}$ s'écrit :

$$\begin{pmatrix}5 & -3\\ -9 & 5\end{pmatrix}=2\begin{pmatrix}2 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}-3\begin{pmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix}-2\begin{pmatrix}0 & 0\\ 3 & 0\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 5\end{pmatrix}.$$

On peut donc écrire : $\left[\begin{pmatrix}5 & -3\\ -9 & 5\end{pmatrix}\right]^X=\begin{pmatrix}2\\ -3\\ -2\\ 1\end{pmatrix}$, c'est-à-dire que les coordonnées de la matrice $\begin{pmatrix}5 & -3\\ -9 & 5\end{pmatrix}$ dans la base *X* sont 2, -3, -2 et 1.

Si, à la place de considérer $\begin{pmatrix}5 & -3\\ -9 & 5\end{pmatrix}$, nous considérons une autre matrice (c'est-à-dire un autre élément ou vecteur de $\mathcal{M}_{2x2}$), nous obtiendrons d'autres coordonnées. On peut donc dire que les scalaires que sont les coordonnées d'une matrice de $\mathcal{M}_{2x2}$ (ou plus généralement les coordonnées d'un vecteur d'un espace vectoriel) sont ***fonction de*** la matrice (ou du vecteur) en question.

Généralisons nos propos et considérons un espace vectoriel E de dimension n, et X = $\{x_1, x_2, ..., x_n\} \overset{\text{not.}}{=} \{x_i\}_{i=1}^{n}$ une base de E.
Tout vecteur v de E peut donc se décomposer de façon unique par rapport à la base X :

$$\forall v \in E : v = \boxed{?}\, x_1 + \boxed{?}\, x_2 + ... + \boxed{?}\, x_n \qquad (2.9)$$

où le contenu de la $j^{ème}$ boîte $\boxed{?}$ correspond à la $j^{ème}$ coordonnée de v dans la base X.
Les contenus de ces boîtes sont donc des scalaires qui dépendent du vecteur v choisi dans E. Ces scalaires sont donc « fonction » du vecteur v choisi. On peut dès lors écrire la relation (2.9) comme suit :

$$\forall v \in E : v = y_1(v)x_1 + y_2(v)x_2 + ... + y_n(v)x_n$$

où $\forall j = 1, ..., n : y_j(v)$ est bien un scalaire si nous écrivons :

$$\forall\ \mathrm{j} = 1, ..., n: \quad y_j : \begin{array}{ccc} E & \rightarrow & K \\ v & \mapsto & y_j(v) \end{array} \qquad (2.10)$$

où, pour tout v de E, $y_j(v)$ est la $j^{ème}$ coordonnée du vecteur v dans la base X.

Nous allons montrer que, une fois une base X de E fixée, on peut trouver n formes linéaires y_j telles que $\forall v \in E, y_j(v) =$ $j^{ème}$ coordonnée de v dans la base X. En vertu de cette caractéristique, on pourra appeler ces n formes linéaires « ***formes coordonnées associées à la base X***».

Montrons tout d'abord que, pour tout vecteur v de E, si on note $y_j(v)$ (avec $j = 1, ..., n$) la $j^{ème}$ coordonnée de v dans la base X, on obtient une application y_j qui est **linéaire**, c'est-à-dire :

$$\forall \alpha, \beta \in K, \forall u, v \in E : y_j(\alpha u + \beta v) = \alpha y_j(u) + \beta y_j(v) \qquad (2.11)$$

(2.11) exprime bien le fait que, $\forall \alpha, \beta \in K, \forall u, v \in E,$ la $j^{ème}$ coordonnée de $\alpha u + \beta v$ (dans la base X) est la somme de α fois la $j^{ème}$ coordonnée de u et de β fois la $j^{ème}$ coordonnée de v.
La linéarité des y_j se démontre alors de la manière suivante :

Soient $[u]^X = \begin{pmatrix} u_1 \\ \vdots \\ u_n \end{pmatrix}$ et $[v]^X = \begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix}$

On a : $\left.\begin{array}{l} u = \sum_{i=1}^{n} u_i x_i \\ v = \sum_{i=1}^{n} v_i x_i \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{array}{l} \alpha u + \beta v = \alpha \sum_{i=1}^{n} u_i x_i + \beta \sum_{i=1}^{n} v_i x_i \\ \qquad\qquad = \sum_{i=1}^{n} (\alpha u_i + \beta v_i) x_i \end{array}$

On a donc bien $[\alpha u + \beta v]^X = \begin{pmatrix} \alpha u_1 + \beta v_1 \\ \vdots \\ \alpha u_n + \beta v_n \end{pmatrix}$ □

Au regard de ce résultat et de (2.10), on peut donc dire que les n y_j sont des formes linéaires. Nous pourrons donc utiliser la notation du crochet de dualité qui a été introduite :

$$y_j(v) \overset{\text{not}}{=} [v, y_j].$$

Nous nous posons maintenant la question de savoir quelles conditions doivent remplir ces n formes linéaires pour que, pour *tout* vecteur v de E, $[v, y_j]$ corresponde à la $j^{ème}$ coordonnée de v dans la base X.
Pour répondre à cette question, appliquons tout d'abord notre raisonnement aux n vecteurs x_i de la base X, en commençant par le premier, x_1 :
On obtient alors très naturellement :

$$x_1 = \boxed{?}\,.\,x_1 + \boxed{?}\,.\,x_2 + \ldots \; \boxed{?}\,.\,x_n$$

$$= y_1(x_1).\ x_1 + y_2(x_1).\ x_2 + \ldots \; y_n(x_1).\ x_n$$

Ou, avec le crochet de dualité : $= [x_1, y_1].\ x_1 + [x_1, y_2].\ x_2 + \ldots \; [x_1, y_n].\ x_n$

Or, $x_1 = 1\ .\ x_1 + 0\ .\ x_2 + \ldots \; 0\ .\ x_n$

En vertu de l'unicité de la représentation d'un vecteur dans une base donnée, on doit alors imposer que $[x_1, y_j] = \delta_{1j}$ pour que $[x_1, y_j]$ représente la $j^{ème}$ coordonnée de x_1 dans la base X.
Le même raisonnement peut être appliqué aux différents vecteurs x_i de la base X, pour alors imposer que

$$\forall i,\ j = 1, ..., n :\ [x_i, y_j] = \delta_{ij}\ .$$

Par conséquent, en imposant que chaque forme linéaire y_j $(j = 1, ..., n)$ doit vérifier :

$$\forall i = 1, ..., n :\ [x_i, y_j] = \delta_{ij}\ , \tag{2.12}$$

on a défini effectivement que $\forall x_i \in X, [x_i, y_j]$ est la $j^{ème}$ coordonnée du $i^{ème}$ vecteur de la base X.

Nous allons maintenant démontrer que le résultat obtenu pour les éléments x_i de la base X est généralisable à tout vecteur v de E. C'est ce qu'exprime le théorème suivant.

Théorème 2.23 Soient E un espace vectoriel de dimension n, et $X = \{x_i\}_{i=1}^{n}$ une base de E. Soient n formes linéaires y_p $(1 \leq p \leq n)$ telles que

$$\forall i,\ j = 1, ..., n :\ [x_i, y_j] = \delta_{ij}\ . \tag{2.13}$$

Alors $\forall v \in E : [v, y_p]$ est la $p^{ème}$ coordonnée de v dans la base X.

Preuve.

Comme $X = \{x_i\}_{i=1}^{n}$ est une base de E, on peut écrire :

$$\forall v \in E\ \ \exists\,!\,\alpha_i (i = 1, ..., n)\ :\ [v]^X = \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{pmatrix}$$ (décomposition d'un vecteur dans une base)

c'est-à-dire : $v = \alpha_1 .\ x_1 + \alpha_2 .\ x_2 + ... + \alpha_n .\ x_n = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i x_i$

ou encore : $\forall p,\ \ \alpha_p$ est la $p^{ème}$ coordonnée de v dans la base X.

On a donc, pour tout y_p vérifiant les hypothèses : $y_p(v) \overset{\text{not}}{=} [v,\, y_p] = [\sum_{i=1}^{n} \alpha_i x_i,\, y_p]$

$$= \sum_{i=1}^{n} \alpha_i [x_i,\, y_p]$$
$$= \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \delta_{ip}$$
$$= \alpha_p \qquad \square$$

Nous avons donc démontré que, à toute base *X* de *E*, on peut associer *n* formes linéaires y_j telles que, si les conditions $\forall i,\ j = 1, ..., n:\ [x_i,\, y_j] = \delta_{ij}$ sont vérifiées, ces *n* formes linéaires y_j peuvent être qualifiées de « ***formes coordonnées associées à la base X*** », étant donné que la forme linéaire y_j appliquée à un vecteur quelconque *v* de *E* donne la $j^{ème}$ coordonnée de ce vecteur *v* dans la base *X* de *E*.

Nous allons maintenant démontrer que ces *n* formes linéaires associées à la base *X* de *E* par les relations (2.13), constituent une base de *E'*, le dual de *E*.

Théorème 2.24 Soient *E* un espace vectoriel de dimension *n*, et $X = \{x_i\}_{i=1}^{n}$ une base de *E*.
Soient *n* formes linéaires y_j telles que $\forall i,\ j = 1, ..., n:\ [x_i,\, y_j] = \delta_{ij}$.
Alors $\{y_i\}_{i=1}^{n}$ constitue une base de *E'*.

Preuve.

- Montrons tout d'abord que $(\sum_{i=1}^{n} \alpha_i y_i = 0) \Rightarrow (\forall i = 1, .., n : \alpha_i = 0)$.

Remarquons que $(\sum_{i=1}^{n} \alpha_i y_i = 0)$ signifie que $\forall v \in E : [v,\, \sum_{i=1}^{n} \alpha_i y_i] = [v,\, 0]$, ou encore : $\forall v \in E : \sum_{i=1}^{n} \alpha_i .[v,\, y_i] = 0$ par définition de la somme de formes linéaires et de la multiplication d'un scalaire et d'une forme linéaire (voir (2.8)).

Comme $X = \{x_i\}_{i=1}^{n}$ est une base de *E*, tout vecteur *v* de *E* peut donc s'écrire comme $v = \sum_{j=1}^{n} v_j x_j$ où les v_j sont les coordonnées de *v* dans la base *X* ($v_j \in K$).

On a alors :

$$\begin{aligned}
\forall v \in E : \sum_{i=1}^{n} \alpha_i .[v,\, y_i] = 0 \quad &\Leftrightarrow \quad \forall v_l \in K : \sum_{i=1}^{n} \alpha_i .\, [\sum_{j=1}^{n} v_j x_j,\, y_i] = 0 \\
&\Leftrightarrow \quad \forall v_l \in K : \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} \alpha_i v_j [x_j,\, y_i] = 0 \quad \text{(linéarité des } y_i\text{)} \\
&\Leftrightarrow \quad \forall v_l \in K : \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} \alpha_i v_j \delta_{i,\,j} = 0 \\
&\Leftrightarrow \quad \forall v_l \in K : \sum_{i=1}^{n} \alpha_i v_i = 0 \\
&\Rightarrow \quad \forall i = 1, ..., n : \alpha_i = 0
\end{aligned}$$

- Montrons ensuite que $\forall y \in E' : \exists \alpha_i \in K : y = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i y_i$, ce qui revient à démontrer que $\forall y \in E' : \exists \alpha_i \in K :\ \ \forall v \in E :\ [v,\, y] = [v,\, \sum_{i=1}^{n} \alpha_i y_i]$ ou encore :

$$\forall y \in E' : \exists \alpha_i \in K : \quad \forall v \in E : \ [v, y] = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i [v, y_i]$$

Comme $X = \{x_i\}_{i=1}^{n}$ est une base de E et que $\forall i, j = 1, ..., n : \ [x_i, y_j] = \delta_{ij}$, on sait que $\forall v \in E, \ y_j(v) \overset{\text{not}}{=} [v, y_j]$ représente la $j^{ème}$ coordonnée de v dans la base X. On a donc :

$$\forall v \in E : \quad v = \sum_{i=1}^{n} [v, y_i] x_i$$

Ceci entraîne que :

$$\begin{aligned} \forall y \in E' : \quad \forall v \in E : \quad [v, y] &= [\sum_{i=1}^{n} [v, y_i]\, x_i \ , \ y] \\ &= \sum_{i=1}^{n} [v, y_i]\, [x_i, y] \quad \text{car } y \text{ est linéaire et } [v, y_i] \in K. \end{aligned}$$

En posant $\forall i = 1, ..., n$, $\alpha_i = [x_i, y]$, on a alors :

$$\forall y \in E' : \quad \exists \alpha_i \in K : \ \forall v \in E : \quad [v, y] = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i [v, y_i] \qquad \square$$

La proposition 2.24 nous permet alors d'énoncer le résultat suivant :

Théorème 2.25 L'espace (vectoriel) dual *E'* d'un espace vectoriel *E* de dimension *n* est aussi de dimension *n*.

Théorème 2.26 Tout espace vectoriel de dimension finie *E* est isomorphe à son dual *E'*.

Preuve.

Ceci résulte directement du fait que si *E* est un espace vectoriel sur *K*, alors *E'* l'est aussi, grâce aux lois que nous avons construites pour en faire un espace vectoriel (définies en (2.5) et (2.6)). Par le théorème 2.25, nous savons qu'ils ont même dimension, ils sont donc isomorphes (par le théorème 2.4). $\square$

Définition 40 *La* ***base duale*** *d'une base* $X = \{x_i\}_{i=1}^{n}$ *d'un espace vectoriel E est la base Y =* $\{y_i\}_{i=1}^{n}$ *de l'espace dual vérifiant les relations* $\forall i, j = 1, ..., n : \ [x_i, y_j] = \delta_{ij}$.

Les éléments de la base duale d'une base *X* sont les formes linéaires que nous avions qualifiées de « ***formes coordonnées associées à la base X*** », étant donné que la $i^{ème}$ forme linéaire de la base duale *Y* appliquée à un vecteur quelconque de *E* fournit la $i^{ème}$ coordonnée de ce vecteur dans la base *X* (voir proposition 2.23).

Montrons un résultat plus global que la proposition 2.24 :

Théorème 2.27 Soit *E* un espace vectoriel de dimension *n*.
Soient $\{x_i\}_{i=1}^{n}$ un ensemble de *n* vecteurs de *E* et $\{y_j\}_{j=1}^{n}$ un ensemble de *n* formes linéaires définies sur *E*. Si les x_i et les y_j vérifient les relations

$$\forall i, j = 1, ..., n : \ [x_i, y_j] = \delta_{ij} ,$$

Alors $\{x_i\}_{i=1}^{n}$ constitue une base de *E* et $\{y_i\}_{i=1}^{n}$ constitue une base de *E'*.

Preuve.

Remarquons qu'il nous suffit de démontrer l'indépendance linéaire des *n* vecteurs x_i. Nous aurons alors démontré que $\{x_i\}_{i=1}^n$ forme une base de *E*, ce qui nous ramène alors dans les conditions du théorème précédent qui permet de conclure que $\{y_j\}_{j=1}^n$ est une base du dual.

Si, $\forall j = 1, ..., n$, nous appliquons y_j à la relation $\sum_{i=1}^n \alpha_i x_i = 0$, nous obtenons :

$$\begin{aligned} \forall j = 1, ..., n : \quad [\sum_{i=1}^n \alpha_i x_i, y_j] &= [0, y_j] \\ \sum_{i=1}^n \alpha_i [x_i, y_j] &= 0 \\ \sum_{i=1}^n \alpha_i \delta_{ij} &= 0 \\ \alpha_j &= 0 \qquad \square \end{aligned}$$

Remarque :

Soit *E*, un espace vectoriel de dimension *n* construit sur le champ *K*.

Soit $X = \{x_i\}_{i=1}^n$ une base de *E* et $X' = \{y_j\}_{j=1}^n$ sa base duale (qui est donc une base du dual *E'*).

Tout vecteur *v* de *E* peut donc s'écrire : $v = \sum_{i=1}^n v_i x_i$ où $v_i \in K \ (i = 1, ..., n)$.

Toute forme linéaire *y* de *E'* peut donc s'écrire : $y = \sum_{j=1}^n \alpha_j y_j$ où $\alpha_j \in K \ (j = 1, ..., n)$.

On a donc : $\forall y \in E' : \quad \forall v \in E : \quad [v, y]$

$$\begin{aligned} [v, y] &= [\sum_{i=1}^n v_i x_i , \sum_{j=1}^n \alpha_j y_j] \\ &= \sum_{i=1}^n v_i \sum_{j=1}^n \alpha_j \ [x_i , y_j] && \text{par (2.7) et (2.8)} \\ &= \sum_{i=1}^n v_i \sum_{j=1}^n \alpha_j \ \delta_{ij} && \text{car } X' \text{ est la base duale de } X \\ &= \sum_{i=1}^n \alpha_i v_i \end{aligned}$$

Nous obtenons là une <u>expression analytique</u> pour n'importe quelle forme linéaire, pour peu que l'on se munisse d'une base du primal (par exemple la base canonique) et de sa base duale. Cette expression analytique sera largement utilisée dans les exercices, comme nous le montre l'exercice suivant.

Exercice :

Déterminer la base duale de la base $X = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 5 \end{pmatrix} \right\}$ $\overset{not.}{=} \{x_1, x_2, x_3, x_4\}$ de l'espace vectoriel $\mathcal{M}_{2x2}$ des matrices carrées d'ordre 2 à coefficients réels.

Nous devons donc définir 4 formes linéaires $y_j \ (j = 1, ..4)$ qui vérifient $y_j(x_i) = \delta_{ij} \ (i, j = 1, ..., 4)$.

- Pour ce faire, nous devons tout d'abord écrire l'expression analytique d'une forme linéaire quelconque définie sur $\mathcal{M}_{2x2}$.

  La remarque ci-dessus nous y aide : $\forall y \in (\mathcal{M}_{2x2})', \forall M \in \mathcal{M}_{2x2} : y(M) = \sum_{i=1}^{4} \alpha_i m_i$ (2.14)

  où les m_i sont les coordonnées de M dans la base canonique (par exemple) de $\mathcal{M}_{2x2}$; les $\alpha_i \quad (i = 1, ..., 4)$ représentent quant à eux les coordonnées de y dans la base canonique duale (si c'est la base canonique qui a été choisie pour les m_i).

  Comme la relation (2.14) est vraie pour toute forme linéaire du dual, elle s'applique donc aussi aux formes linéaires $y_j \quad (j = 1, ..4)$ de la base duale :

  $\forall j \in \{1, 2, 3, 4\} : \forall M \in \mathcal{M}_{2x2} : y_j(M) = \sum_{i=1}^{4} \alpha_i m_i$.

  On a donc, pour $j = 1$: $\forall M \in \mathcal{M}_{2x2} : y_1(M) = \sum_{i=1}^{4} \alpha_i m_i$. (2.15)

  Il en est évidemment de même pour y_2, y_3, y_4 .

  Or, toute matrice de $\mathcal{M}_{2x2}$ est du type $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ avec $a, b, c, d \in \mathbb{R}$. La base canonique de $\mathcal{M}_{2x2}$ étant $\left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}$, les coordonnées d'une telle matrice quelconque $M \in \mathcal{M}_{2x2}$ sont $\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{pmatrix}$, c'est-à-dire que dans (2.15), $m_1 = a; m_2 = b; m_3 = c; m_4 = d$.

- Pour déterminer la première forme linéaire de la base duale à calculer (y_1), utilisons la relation (2.13) liant une base à sa base duale, particularisée à y_1 : $y_1(x_i) = \delta_{i1}$. Ceci va nous permettre de déterminer les $\alpha_i \quad (i = 1, ..., 4)$ dans (2.15).

  On obtient alors : $\begin{cases} y_1(x_1) = y_1 \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \alpha_1.0 + \alpha_2.1 + \alpha_3.1 + \alpha_4.0 = 1 \\ y_1(x_2) = y_1 \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \alpha_1.2 + \alpha_2.0 + \alpha_3.0 + \alpha_4.0 = 0 \\ y_1(x_3) = y_1 \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} = \alpha_1.0 + \alpha_2.1 + \alpha_3.3 + \alpha_4.4 = 0 \\ y_1(x_4) = y_1 \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 5 \end{pmatrix} = \alpha_1.1 + \alpha_2.0 + \alpha_3.0 + \alpha_4.5 = 0 \end{cases}$, ce qui constitue un système de 4 équations à 4 inconnues ($\alpha_i \quad (i = 1, ..., 4)$).

  En résolvant ce système, on trouve : $\alpha_1 = 0, \ \alpha_2 = \frac{3}{2}, \ \alpha_3 = \frac{-1}{2}, \ \alpha_4 = 0$. Par conséquent, y_1 est défini par : $y_1 :$

  $$\begin{aligned} \mathcal{M}_{2x2} &\rightarrow \mathbb{R} \\ M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} &\mapsto y_1(M) = \frac{3}{2} b - \frac{1}{2} c \end{aligned}$$

- On reprend ensuite le raisonnement ci-dessus, appliqué à y_2, y_3, y_4 .

Pour y_2, on résout $\begin{cases} y_2(x_1) = y_2\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \alpha_1.0+\alpha_2.1+\alpha_3.1+\alpha_4.0 = 0 \\ y_2(x_2) = y_2\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \alpha_1.2+\alpha_2.0+\alpha_3.0+\alpha_4.0 = 1 \\ y_2(x_3) = y_2\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} = \alpha_1.0+\alpha_2.1+\alpha_3.3+\alpha_4.4 = 0 \\ y_2(x_4) = y_2\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 5 \end{pmatrix} = \alpha_1.1+\alpha_2.0+\alpha_3.0+\alpha_4.5 = 0 \end{cases}$ pour trouver :

$$\begin{array}{llll} y_2 : & \mathcal{M}_{2x2} & \to & \mathbb{R} \\ & M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} & \mapsto & y_2(M) = \frac{1}{2}a - \frac{2}{10}b + \frac{2}{10}c - \frac{1}{10}d \end{array}$$

Pour y_3, on résout $\begin{cases} y_3(x_1) = y_3\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \alpha_1.0+\alpha_2.1+\alpha_3.1+\alpha_4.0 = 0 \\ y_3(x_2) = y_3\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \alpha_1.2+\alpha_2.0+\alpha_3.0+\alpha_4.0 = 0 \\ y_3(x_3) = y_3\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} = \alpha_1.0+\alpha_2.1+\alpha_3.3+\alpha_4.4 = 1 \\ y_3(x_4) = y_3\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 5 \end{pmatrix} = \alpha_1.1+\alpha_2.0+\alpha_3.0+\alpha_4.5 = 0 \end{cases}$ pour trouver :

$$\begin{array}{llll} y_3 : & \mathcal{M}_{2x2} & \to & \mathbb{R} \\ & M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} & \mapsto & y_3(M) = \frac{-1}{2}b + \frac{1}{2}c \end{array}$$

Pour y_4, on résout $\begin{cases} y_4(x_1) = y_4\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \alpha_1.0+\alpha_2.1+\alpha_3.1+\alpha_4.0 = 0 \\ y_4(x_2) = y_4\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \alpha_1.2+\alpha_2.0+\alpha_3.0+\alpha_4.0 = 0 \\ y_4(x_3) = y_4\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} = \alpha_1.0+\alpha_2.1+\alpha_3.3+\alpha_4.4 = 0 \\ y_4(x_4) = y_4\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 5 \end{pmatrix} = \alpha_1.1+\alpha_2.0+\alpha_3.0+\alpha_4.5 = 1 \end{cases}$ pour trouver :

$$\begin{array}{llll} y_4 : & \mathcal{M}_{2x2} & \to & \mathbb{R} \\ & M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} & \mapsto & y_4(M) = \frac{4}{10}b - \frac{4}{10}c + \frac{1}{5}d \end{array}$$

- On peut donc conclure que la base duale de $X = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 5 \end{pmatrix} \right\}$ est $\{y_1, \; y_2, \; y_3, \; y_4\}$ où les formes linéaires $y_j \;\; (j = 1, ..4)$ sont définies ci-dessus.

Remarquons que, grâce à l'exercice précédent et au théorème 2.23, on peut facilement obtenir les coordonnées d'un vecteur (une matrice !) quelconque de $\mathcal{M}_{2x2}$ dans la base X définie dans l'exercice ci-dessus. Par exemple, pour obtenir les coordonnées de la matrice $\begin{pmatrix} 10 & 7 \\ 3 & -8 \end{pmatrix}$ dans la base X, utilisons la propriété « formes coordonnées » des éléments de base duale $\{y_1, \; y_2, \; y_3, \; y_4\}$ déterminée dans l'exercice précédent :

La $1^{ère}$ coordonnée de $M = \begin{pmatrix} 10 & 7 \\ 3 & -8 \end{pmatrix}$ dans la base X sera $y_1(M) = y_1 \begin{pmatrix} 10 & 7 \\ 3 & -8 \end{pmatrix} = \frac{3}{2}.7 - \frac{1}{2}.3 = \boxed{9}$;

la $2^{ème}$ coordonnée de M dans la base X sera $y_2 \begin{pmatrix} 10 & 7 \\ 3 & -8 \end{pmatrix} = \frac{1}{2}.10 - \frac{2}{10}.7 + \frac{2}{10}.3 - \frac{1}{10}.(-8) = \boxed{5}$;

la $3^{ème}$ coordonnée de M dans la base X sera $y_3 \begin{pmatrix} 10 & 7 \\ 3 & -8 \end{pmatrix} = -\frac{1}{2}.7 + \frac{1}{2}.3 = \boxed{-2}$;

la $4^{ème}$ coordonnée de M dans la base X sera $y_4 \begin{pmatrix} 10 & 7 \\ 3 & -8 \end{pmatrix} = \frac{4}{10}.7 - \frac{4}{10}.3 + \frac{1}{5}.(-8) = \boxed{0}$.

Ce qui fait que $\left[\begin{pmatrix} 10 & 7 \\ 3 & -8 \end{pmatrix}\right]^X = \begin{pmatrix} \boxed{9} \\ \boxed{5} \\ \boxed{-2} \\ \boxed{0} \end{pmatrix}$,

c'est-à-dire que $\begin{pmatrix} 10 & 7 \\ 3 & -8 \end{pmatrix} = \boxed{9}.\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + \boxed{5}.\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + \boxed{-2}.\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} + \boxed{0}.\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 5 \end{pmatrix}$.

Etant donné que la base duale d'une base *X* d'un espace vectoriel *E* nous permet d'obtenir les coordonnées dans la base *X* d'un vecteur quelconque de *E*, nous allons pouvoir utiliser cette base duale pour la construction de la matrice d'une transformation linéaire par rapport à cette base *X* :

Théorème 2.28. Soit $X = \{x_1, ..., x_n\}$ une base quelconque de l'espace vectoriel *E* de dimension *n*. Soit $X' = \{y_1, ..., y_n\}$ la base duale dans *E'* (définie par la proposition (2.13)).
Soit, de plus, (a_{ij}) la matrice d'une transformation linéaire *f* sur *E*.
Alors, $a_{ij} = [f(x_j), y_i]$

Preuve.

Evident si on se rappelle que l'élément a_{ij} de la matrice dont il est question n'est autre que la $i^{ème}$ coordonnée dans la base *X* de $f(x_j)$. Or, y_i, en tant qu'élément de la base duale de *X*, n'est autre qu'une « forme coordonnée », c'est-à-dire qu'appliquée à un vecteur quelconque (et en particulier à $f(x_j)$) de *E*, elle en donne la $i^{ème}$ coordonnée dans la base *X*.

Citons encore un dernier résultat qui sera utilisé par la suite dans le cours :

Théorème 2.29 Pour tout vecteur non nul *x* d'un espace vectoriel de dimension finie *E*, il existe une forme linéaire *y* dans *E'*, le dual de *E*, telle que $[x, y] \neq 0$.

Preuve.

Soient $\{x_i\}_{i=1}^n$ et $\{y_i\}_{i=1}^n$ une base de *E* et sa base duale dans *E'*, (satisfaisant donc (2.13)). Soit *x*, un vecteur quelconque de *E*. On peut donc écrire $x = \sum_{i=1}^n \beta_i x_i$, où $\beta_i = [x, y_i]$, étant donné que les formes linéaires de la base duale de X sont des formes coordonnées (Théorème 2.23). Donc, si $[x, y]$ est nul pour tout *y*, et en particulier pour $y_i \quad (i = 1, ..., n)$, alors tous les β_i sont nuls et *x* l'est aussi. □

Remarque : On peut voir immédiatement que cette dernière proposition implique que si *u* et *v* dont deux vecteurs différents d'un espace vectoriel de dimension finie *E*, alors il existe une forme linéaire *y* dans *E'* telle que $[u, y] \neq [v, y]$. Il suffit en effet de substituer $x = u - v$ dans la proposition 2.29.

2.5.2. Réflexivité

Continuation normale du cours

Annexe 11. Guide d’entretien pour l’interview du professeur enseignant la dualité en 2009-2010

Nous présentons ici le guide d’entretien que nous avons suivi pour l’interview du professeur enseignant la dualité en 2009-2010 (voir chapitre 5, § 4.2).

1. Quel est votre parcours professionnel ?

2. Comment en êtes-vous arrivé à donner le cours d’algèbre linéaire aux étudiants inscrits en première année math/physique à l’université de Namur ?

3. Quel est votre point de vue sur l’enseignement des mathématiques (en général) qu’il faut apporter aux mathématiciens et physiciens ?

4. Quel est votre point de vue sur l’enseignement de l’algèbre linéaire ?

5. Qu’est-ce qui, selon vous, est important dans l’enseignement de l’algèbre linéaire ?

6. Quelle importance accordez-vous aux démonstrations et au formalisme ? Faites-vous des différences entre mathématiciens et physiciens ?

7. Quel est l’objectif de l’enseignement de la dualité en algèbre linéaire ?

8. Si vous étiez titulaire du cours, présenteriez-vous le cours de la même façon que dans le polycopié (Toint 2007) ?

9. Si vous étiez titulaire du cours, garderiez-vous encore la dualité ?

10. Quel est votre avis sur la partie du cours, concernant la dualité, présente dans le polycopié (Toint 2007) ?

11. Quelles sont les raisons des choix *a priori* sur la proposition de cours sur la dualité (dispositif « bases duales ») ?

12. Quelles sont vos impressions *a posteriori* sur la façon dont les étudiants ont perçu les parties reprises de la proposition d’enseignement sur les bases duales ?

Annexe 12. Détail du déroulement de l'enseignement des notions de dualité en 2009-2010 en première année math-physique à l'université de Namur

En référence au chapitre 5, § 4.2, nous présentons ici le détail du déroulement de l'enseignement des notions de dualité en 2009-2010 en première année, sections mathématique et physique, à l'université de Namur.

La partie du cours d'algèbre en MP1 concernant la dualité a débuté le 10 novembre 2009 avec la présentation des formes linéaires comme cas particulier des applications linéaires. Avant cette date, le cours théorique avait déjà présenté, depuis le début de l'année académique, les espaces vectoriels (structures algébriques, dépendance linéaire et dimension, sous-espaces vectoriels), les applications et transformations linéaires (noyau, image, matrices par rapport à des bases). Précisons que les étudiants n'ont pas encore abordé les notions de dualité en travaux dirigés.

Le cours suivant (17/11/2009) a permis de montrer que l'ensemble des formes linéaires pouvait être muni d'une structure d'espace vectoriel (le dual), et a introduit la notation du crochet de dualité. L'introduction des bases duales s'est faite après avoir appliqué un théorème suivant :

> Soient *E* un espace vectoriel de dimension *n* construit sur le champ *K*, et *y* est une forme linéaire définie sur cet espace ($y : E \to K$). Soient aussi $\mathrm{X} = \left\{x_1, ..., x_n\right\}$ une base de *E*, et un ensemble de *n* scalaires : $\left\{\alpha_1, ..., \alpha_n\right\} \subset K$. Si la forme linéaire *y* est définie en tous vecteurs de la base *X* par : $y(x_i) = \alpha_i$ pour $i = 1, ..., n$, alors la forme linéaire y est définie en tout vecteur de *E*.

Si l'on se munit d'une base *X* d'un espace vectoriel *E* de dimension *n*, la « construction » de *n* formes linéaires peut donc se faire en choisissant *n* ensembles de *n* scalaires particuliers : $\{1,0,0,...,0\}$, $\{0,1,0,...,0\}$, … , $\{0,0,0,...,1\}$. Il reste alors à démontrer que les *n* formes linéaires ainsi construites forment une base de l'espace dual de *E*.

C'est par cette démonstration que débute le cours du 24//11/09, après quelques rappels introductifs. Les deux espaces, *E* et *E'*, étant alors de même dimension, ils sont isomorphes. De plus, si l'on change la base *X* au départ du raisonnement, une autre base du dual sera établie. Les deux bases étant donc liées, cela motive l'appellation, pour la base du dual construite à partir de la base *X* de *E*, de « base duale de *X* ».

C'est pour expliquer le rôle du lien entre ces deux bases que le vocable « formes coordonnées » est utilisé par Prof.S., le professeur suppléant donnant le cours d'algèbre, en rapport avec notre proposition d'enseignement. Il montre en effet qu'une forme linéaire y_i, prise quelconque dans la base duale d'une base *X* d'un espace vectoriel *E*, associe à un vecteur *v* quelconque dans *E* sa $i^{\text{ème}}$ coordonnée dans la base *X*. Un exercice est alors énoncé et résolu par le professeur, dans le cadre de $\mathbb{R}^2$: le calcul de la base duale d'une base de $\mathbb{R}^2$. Ensuite, après avoir calculé les coordonnées dans la base *X* d'un vecteur de $\mathbb{R}^2$ donné, le professeur montre qu'on peut retrouver celles-ci en appliquant les formes linéaires de la base duale. Il fait ensuite le lien avec les recherches de composantes lors de la construction d'une matrice associée à une application linéaire (voir théorème présenté dans le Tableau 12.I).

Théorème 2.28. Soit $X = \{x_1, ..., x_n\}$ une base quelconque de l'espace vectoriel *E* de dimension *n*. Soit $X' = \{y_1, ..., y_n\}$ la base duale dans *E'* (définie par la proposition (2.13)). Soit, de plus, (a_{ij}) la matrice d'une transformation linéaire *f* sur *E*. Alors, $a_{ij} = [f(x_j), y_i]$

Tableau 12.I : Théorème faisant intervenir la fonctionnalité outil "formes coordonnées" des bases duales

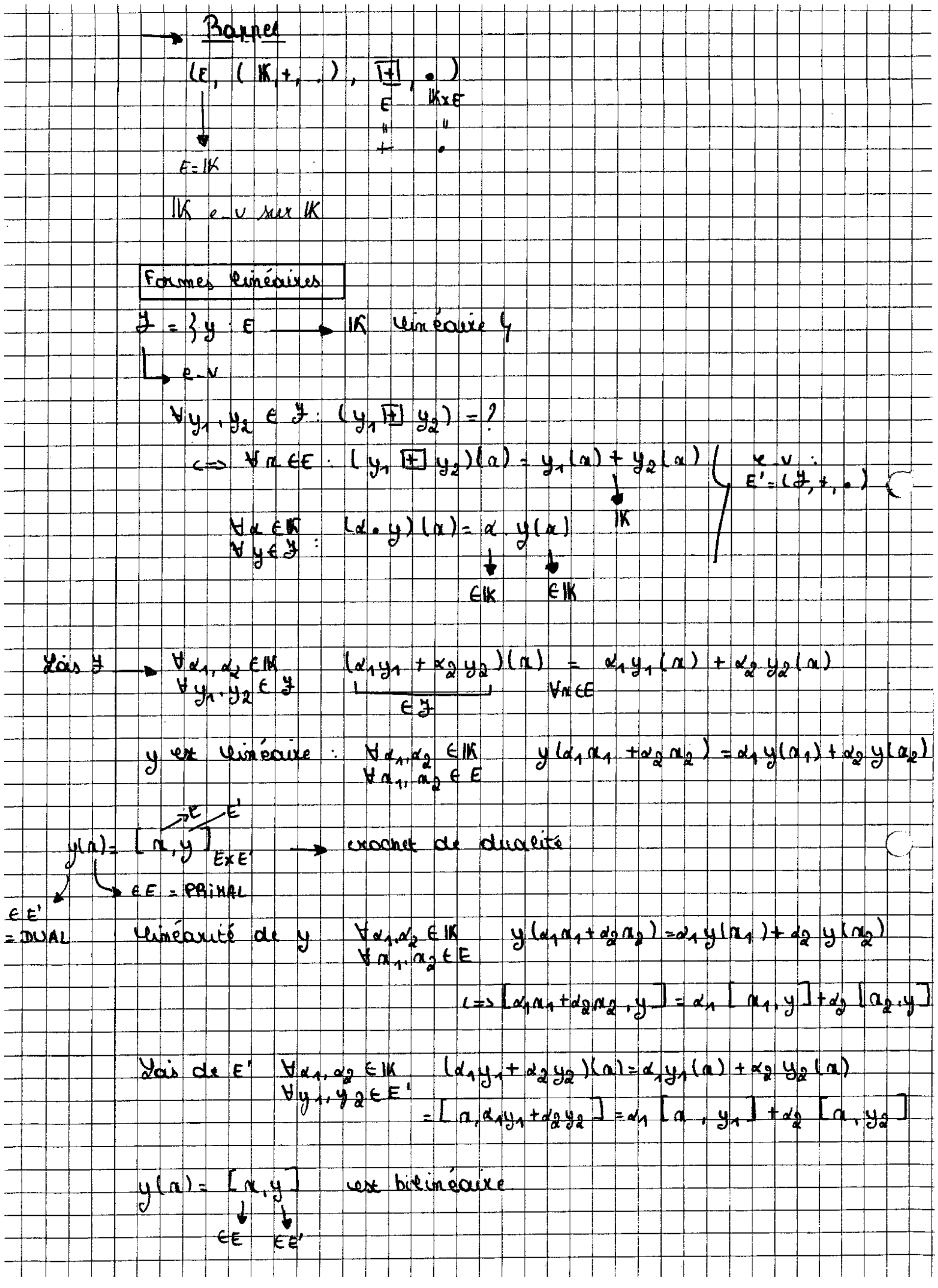
Après l'énoncé et la démonstration d'un lemme, le théorème de réflexivité est introduit dans ce cours : existence du bidual, isomorphisme existant entre le primal et le dual, entre le dual et le bidual, donc entre le primal et le bidual. Mais dans ce dernier cas, il s'agit d'un isomorphisme canonique, c'est-à-dire qui peut être définit sans obligation de référence à des bases.

Le cours du 1/12/09 est ensuite consacré à la démonstration du théorème de réflexivité, et à la présentation de l'application transposée et de ses propriétés.

Annexe 13. Notes de deux étudiants concernant l'introduction de la dualité et les bases duales en 2009-2010 en première année math-physique à l'université de Namur

En référence au chapitre 5, § 4.2, nous présentons ici les notes que deux étudiants ont prises au cours théorique lors de l'introduction de la dualité (formes linéaires et dual), de la présentation des bases duales et de la fonctionnalité outil des formes coordonnées (nous nous sommes arrêtées à la présentation du théorème de réflexivité).

1. Notes de l'étudiant 1



→ Rappel

$(E, (\mathbb{K}, +, .), \boxed{+}, \bullet)$

$\boxed{+} = +$ sur E ; $\bullet = \cdot$ sur $\mathbb{K} \times E$

$E = \mathbb{K}$

$\mathbb{K}$ e.v sur $\mathbb{K}$

$\boxed{\text{Formes linéaires}}$

$\mathcal{Y} = \{ y : E \longrightarrow \mathbb{K}$ linéaire $\}$ → e.v

$\forall y_1, y_2 \in \mathcal{Y} : (y_1 \boxed{+} y_2) = ?$

$\Leftrightarrow \forall x \in E : (y_1 \boxed{+} y_2)(x) = y_1(x) + y_2(x)$ ($\in \mathbb{K}$)

$\forall \alpha \in \mathbb{K}, \forall y \in \mathcal{Y} : (\alpha \bullet y)(x) = \alpha . y(x)$ ($\alpha \in \mathbb{K}$, $y(x) \in \mathbb{K}$)

e.v : $E' = (\mathcal{Y}, +, \bullet)$

Lois $\mathcal{Y}$ → $\forall \alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{K}, \forall y_1, y_2 \in \mathcal{Y}$ $\underbrace{(\alpha_1 y_1 + \alpha_2 y_2)}_{\in \mathcal{Y}}(x) = \alpha_1 y_1(x) + \alpha_2 y_2(x)$ $\forall x \in E$

y est linéaire : $\forall \alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{K}, \forall x_1, x_2 \in E$ $y(\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2) = \alpha_1 y(x_1) + \alpha_2 y(x_2)$

$y(x) = [x, y]_{E \times E'}$ → crochet de dualité

$x \in E$ = PRIMAL ; $y \in E'$ = DUAL

Linéarité de y $\forall \alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{K}, \forall x_1, x_2 \in E$ $y(\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2) = \alpha_1 y(x_1) + \alpha_2 y(x_2)$

$\Leftrightarrow [\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2, y] = \alpha_1 [x_1, y] + \alpha_2 [x_2, y]$

Lois de E' $\forall \alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{K}, \forall y_1, y_2 \in E'$ $(\alpha_1 y_1 + \alpha_2 y_2)(x) = \alpha_1 y_1(x) + \alpha_2 y_2(x)$

$= [x, \alpha_1 y_1 + \alpha_2 y_2] = \alpha_1 [x, y_1] + \alpha_2 [x, y_2]$

$y(x) = [x, y]$ est bilinéaire ($x \in E$, $y \in E'$)

Chapitre 2

26

E' = e.v dual

$y \in E'$ $\quad y : E \longrightarrow \mathbb{K}$ linéaire

* **Théorème 2.23**

base de E = $X = \{a_i\}_{i=1}^{m}$

Si $y(a_i) = \alpha_i$ $\quad i = 1, \dots, m$

$\Rightarrow$ y est $\begin{cases} \text{bien définie} \\ \text{connue partout} \end{cases}$

Dém.

$\forall x \in E \quad y(x) =$

$\hookrightarrow \exists \beta_i : x = \sum_{i=1}^{m} \beta_i a_i$

y linéaire

$$y(x) = y\left(\sum_{i=1}^{m} \beta_i a_i\right) = \sum_{i=1}^{m} \beta_i \boxed{y(a_i)} \quad \text{ok}$$

$$y(a_i) = \alpha_i$$

Exemple

$E = \mathbb{R}^2 \qquad X = \{(1,1),(1,-1)\}$ $\qquad y(x) = ?$

$y(1,1) = ?\ 13$

$y(1,-1) = ?\ 7$

$x \in \mathbb{R}^2 \longrightarrow x = (x_1, x_2)$

$= \beta_1 (1,1) + \beta_2 (1,-1)$

$= (\beta_1 + \beta_2,\ \beta_1 - \beta_2)$

$$\begin{cases} \beta_1 + \beta_2 = x_1 \\ \beta_1 - \beta_2 = x_2 \end{cases} \qquad (x_1, x_2) = \frac{x_1 + x_2}{2}(1,1) + \frac{x_1 - x_2}{2}(1,-1)$$

$2\beta_1 = x_1 + x_2 \qquad y(x_1, x_2) = \frac{x_1 + x_2}{2}\, y(1,1) + \frac{x_1 - x_2}{2}\, y(1,-1)$

$2\beta_2 = x_1 - x_2 \qquad\qquad y(1,1) = 13, \quad y(1,-1) = 7$

$= 10x_1 + 3x_2$

* Théorème 2.24

$y_j(x_i) = \delta_{ij} \quad \forall i \ \forall j$

↳ 1 si $i = j$
0 si $i \neq j$

$\Rightarrow \{y_1, \dots, y_n\} = Y$ = base de E' $\rightarrow$ Li + G

$\Rightarrow$ dim $E' = n$

Dém

$\boxed{\text{Li}}$ Si $\sum_{i=1}^{n} \alpha_i y_i = 0_{E'}$ Alors $\forall j = 1, \dots, n : \alpha_i = 0_{\mathbb{K}}$

$\Leftrightarrow \forall x \in E : \left(\sum_{i=1}^{n} \alpha_i y_i\right)(x) = 0_{E'}(x)$

$$\left[x, \sum_{i=1}^{n} \alpha_i y_i\right] = 0$$

$$\sum_{i=1}^{n} \alpha_i \, [x, y_i] = 0$$

Cas particulier : $x = x_j$ $\rightarrow$ $\sum_{i=1}^{n} \alpha_i \, [x_j, y_i] = 0 = \alpha_j$

fixé

$y_i(x_j) = \delta_{ij} \Rightarrow$ Nul partout sauf qd $i = j$

$\forall j = 1, \dots, n$

$\boxed{\text{G}}$ de E' $\quad \forall y \in E' : \exists ! \, \alpha_i \in \mathbb{K} : \quad y = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i y_i$

$\Leftrightarrow \forall x \in E : \quad y(x) = \left(\sum_{i=1}^{n} \alpha_i y_i\right)(x)$

$x = \sum_{j=1}^{n} \beta_j x_j$

connu

$y(x) = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \, y_i(x)$

$y\left(\sum_{j=1}^{n} \beta_j x_j\right) = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \, y_i \left(\sum_{j=1}^{n} \beta_j x_j\right)$ (*)

$\sum_{j=1}^{n} \beta_j \, y(x_j)$

$= \sum_{i=1}^{n} \beta_i \, y(x_i)$

(*) $= \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \sum_{j=1}^{n} \beta_j \, \underbrace{y_i(x_j)}_{\delta_{ij}}$

$= \beta_i$

$\Rightarrow \alpha_i = y(x_i)$

Chapitre 2

21\. $E \equiv E'$: $\underset{\downarrow \atop n}{\dim E} = \underset{\hookrightarrow \text{ dém. } 2.24}{\dim E'} \Leftrightarrow E \equiv E'$

$\sigma : E \longrightarrow E'$ applicat° linéaire bijective

$\boxed{\begin{matrix} E \equiv \mathbb{K}^n \\ E' \equiv \mathbb{K}^n \end{matrix}} \Rightarrow E \equiv E'$

$E \longrightarrow \mathbb{K}^n$

X

$x = \sum \alpha_i x_i \longrightarrow (\alpha_1, \dots, \alpha_n)$

$E \equiv \mathbb{K}^n$

$E' \equiv \mathbb{K}^n$

$X = \{x_i\}_{i=1}^{n}$ base de E

$\Downarrow$

$Y = \{y_j\}_{j=1}^{n}$ base de E'

$y_j(x_j) = \delta_{ij} \quad \forall i \ \forall j \longrightarrow$ la base duale de X = une base de E'

$X = \{x_i\}_{i=1}^{n} \longrightarrow Y = \{y_j\}_{j=1}^{n}$

$x \in E$

$\hookrightarrow x = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i x_i$

$y_j(x) = y_j\left(\sum_{i=1}^{n} \alpha_i x_i\right)$

$= \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \underbrace{y_j(x_i)}_{\delta_{ij}} = \alpha_j$

$\boxed{y_j} : E \longrightarrow \mathbb{K}$ formes "coordonnées"

$x \longrightarrow \alpha_j$

$E = \mathbb{R}^2$

$X = \{(1,1), (1,-1)\}$

$E' = (\mathbb{R}^2)' = \{y : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R} \text{ linéaire}\}$

$Y = \{y_1, y_2\}$

$y_1(1,1) = 1 \qquad y_2(1,1) = 0$

$y_1(1,-1) = 0 \qquad y_2(1,-1) = 1$

$$\begin{cases} y_1(a_1, a_2) = \alpha a_1 + \beta a_2 \\ y_1(1,1) = \alpha + \beta = 1 \\ y_1(1,-1) = \alpha - \beta = 0 \end{cases}$$

$\longrightarrow \alpha = \frac{1}{2} = \beta$

$\longrightarrow y_1(a_1, a_2) = \frac{1}{2} a_1 + \frac{1}{2} a_2$

$$\begin{cases} y_2(a_1, a_2) = \alpha a_2 + \beta a_2 \\ y_2(1,1) = \alpha + \beta = 0 \\ y_2(1,-1) = \alpha - \beta = 1 \end{cases}$$

$\longrightarrow \alpha = \frac{1}{2} = -\beta$

$\longrightarrow y_2(a_1, a_2) = \frac{1}{2} a_1 - \frac{1}{2} a_2$

$\varphi : \underset{X}{E} \longrightarrow \underset{X}{E}$ linéaire

$[\varphi]_X^X = (a_{ij})$

$\varphi(x_j) = \sum_{k=1}^{n} a_{kj} x_k$

$[\varphi(x_j)]^X = \begin{pmatrix} a_{1j} \\ a_{2j} \\ a_{3j} \\ \vdots \\ a_{nj} \end{pmatrix}$

$a_{ij} = y_i(\varphi(x_j)) = [\varphi(x_j), y_i]$ (Thm 2.28)

<u>Lemme 2.27</u>

$\forall x \neq 0 \; \exists y \in E' \; y(x) \neq 0_K$

<u>Démo</u> (par l'absurde)

$x \neq 0 \longrightarrow x = \sum_{i=1}^{n} \beta_i x_i$ → fixé

$\forall y \in E' : \underline{y(x) = 0}$

$y\left(\sum_{i=1}^{n} \beta_i x_i\right) = 0$

$\sum_{i=1}^{n} \beta_i \, y(x_i) = 0$

Chapitre 2

E 22.

Cas particulier $y = y_j \longrightarrow \sum_{i=1}^{m} \beta_i \underbrace{y_j(x_i)}_{\delta_{ij}} = 0 = \beta_j$

$j = 1, \dots, m$

$\longrightarrow \alpha = 0$

CONTRADICTION

$\underset{\text{e-v dim } m}{E} \equiv \underset{\text{e-v dim } m}{E'} \equiv \underset{\text{e-v}}{E''}$

$Z = \{g_k\}_{k=1}^{m}$

$X = \{x_i\}_{i=1}^{m}$ $\quad Y\{y_j\}_{j=1}^{m}$

$\underbrace{g_k}_{\in E''}(\underbrace{y_j}_{\in E'}) = [\underbrace{y_j}_{\in E'}, \underbrace{g_k}_{\in E''}] = \delta_{jk}$

$\underbrace{y_j}_{\in E'}(\underbrace{x_i}_{\in E}) = [\underbrace{x_i}_{\in E}, \underbrace{y_j}_{\in E'}]_{E \times E'} = \delta_{ij}$

Ccl. $\dim E = \dim E' = \dim E''$

$E \equiv E' \equiv E'' \equiv \dots$

primal dual bidual

$= \{g : E' \xrightarrow[\text{linéaire}]{} \mathbb{K}\}$

$E \equiv E''$ $\exists$ des bijections linéaires $|e|$ E et E''

$\longrightarrow \left\{ \begin{array}{l} \text{bijection linéaire naturelle} \\ \text{isomorphisme naturel} \end{array} \right.$ $|e|$ E et E''

déf. $\sigma : E \longrightarrow E''$

$x \longrightarrow \sigma(x) = g_x$

tq $\forall y \in E' :$ $\underbrace{\underbrace{g_x}_{\in E''}(\underbrace{y}_{\in E'})}_{\in \mathbb{K}} = \underbrace{\underbrace{y}_{\in E'}(\underbrace{x}_{\in E})}_{\in \mathbb{K}}$

$[y, g_x]_{E' \times E''} = [x, y]_{E \times E'}$

Réflexivité $[\boxed{x}, y]_{E \times E'} = [y, \boxed{g_x}]_{E' \times E''}$

2. Notes de l'étudiant 2

L'étudiant 2 a pris note en annotant le polycopié du cours d'algèbre linéaire (Toint 2007). Nous présentons donc l'extrait annoté par cet étudiant en rapport avec la partie qui nous intéresse. Nous avons laissé la même disposition que dans le polycopié : notes manuscrites de l'étudiant en vis-à-vis de la page du polycopié.

<u>linéarité de y :</u>

$$\left.\begin{array}{l}\forall \alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{K}\\ \forall x_1, x_2 \in E\end{array}\right\} \; y(\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2) = \alpha_1 y(x_1) + \alpha_2 y(x_2)$$

$$\parallel$$

$$[\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 , y] = \alpha_1 [x_1, y] + \alpha_2 [x_2, y]$$

<u>lois de E' :</u>

$$\left.\begin{array}{l}\forall \alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{K}\\ \forall y_1, y_2 \in E'\end{array}\right\} \; (\alpha_1 y_1 + \alpha_2 y_2)(x) = \alpha_1 y_1(x) + \alpha_2 y_2(x)$$

$$\parallel$$

$$\underbrace{[x, \alpha_1 y_1 + \alpha_2 y_2]}_{\text{crochet de dualité}} = \alpha_1 [x, y_1] + \alpha_2 [x, y_2]$$

$$y(x) = [\underset{\in E}{x}, \underset{\in E'}{y}]$$

est bilinéaire (2 arguments)

E' = e-v dual

$y \in E'$ $\quad y : E \to \mathbb{K}$ linéaire

Th 2.23 : base de $E = X = \{x_i\}_{i=1}^{n}$

Si $y(x_i) = \alpha_i \quad i = 1, \dots, n$

$\Rightarrow$ y est bien définie et connue partt

$\forall x \in E : y(x) = ?$

$\hookrightarrow \exists \beta_i : x = \sum_{i=1}^{n} \beta_i x_i$

$$y(x) = y\left(\sum_{i=1}^{n} \beta_i x_i\right) = \sum_{i=1}^{n} \beta_i y(x_i)$$

cqfd

Exemple : $E = \mathbb{R}^2 \quad X = \{(1,1)(1,-1)\}$ $\quad y(x) = ?$

$y(1,1) = 13$

$y(1,-1) = 7$

$x \in \mathbb{R}^{2}$

$\to x = \underbrace{(x_1, x_2)}$

$= \beta_1(1,1) + \beta_2(1,-1)$

$= (\beta_1 + \beta_2, \beta_1 - \beta_2)$

$\beta_1 + \beta_2 = x_1$

$\beta_1 - \beta_2 = x_2$

$2\beta_1 = x_1 + x_2 \quad 2\beta_2 = x_1 - x_2$

$(x_1, x_2) = \frac{x_1 + x_2}{2}(1,1) + \frac{x_1 - x_2}{2}(1,-1)$

$y(x_1, x_2) = \frac{x_1 + x_2}{2} \underset{\overset{\parallel}{13}}{y(1,1)} + \frac{x_1 - x_2}{2} \underset{\overset{\parallel}{7}}{y(1,-1)}$

$= 10 x_1 + 3 x_2$

Nous reviendrons à nouveau sur cette représentation par une matrice ligne dans le contexte des espaces métriques.

2.5.1 Espace dual $E' =$ e-v dual

Si l'on considère l'ensemble des formes linéaires sur un espace vectoriel E, en le munissant de l'addition et de la multiplication par un scalaire que nous venons d'envisager, on peut voir (à faire en exercice) que cet ensemble est bien un espace vectoriel. Il s'agit de *l'espace dual de E*.

Définition 39 *L'espace (vectoriel) dual E' d'un espace vectoriel E est composé de l'ensemble des formes linéaires sur E, muni de la loi interne d'addition (2.5) et de la multiplication par un scalaire (2.6).*

Les vecteurs de l'espace dual sont donc des formes linéaires.

Nous allons maintenant introduire une notation supplémentaire, mais qui va nous faciliter le travail. Au lieu de noter l'image des formes linéaires $y(x)$ comme plus haut, nous noterons

$$\underset{\in E'}{y}(\underset{\in E}{x}) = \underbrace{[\overset{\in E}{x}, \overset{\in E'}{y}]}_{\in E \times E'}.$$

Cette notation introduit une symétrie implicite entre les vecteurs de E et ceux de son dual E'. Nous pouvons alors réécrire la propriété (2.4) sous la forme

$$[\alpha x + \beta z, y] = \alpha[x, y] + \beta[z, y], \tag{2.7}$$

tandis que la propriété caractéristique des opérations sur les formes linéaires (les vecteurs du dual) s'écrit

$$[x, \alpha y + \beta z] = \alpha[x, y] + \beta[x, z]. \tag{2.8}$$

Nous prouvons ensuite deux propriétés importantes :

Théorème 2.23 Soit E un espace vectoriel de dimension n. Soit $\{x_i\}_{i=1}^n$ une base de E et soit $\{\alpha_i\}_{i=1}^n$ un ensemble de n scalaires. Alors, il existe une et une seule forme linéaire y dans E' telle que

$$[x_i, y] = \alpha_i$$

pour $i = 1, \ldots, n$.

Preuve.

Chaque x de E peut s'écrire sous la forme

$$x = \sum_{i=1}^{n} \beta_i x_i$$

43

$E \longrightarrow X = \text{base} = \{x_i\}_{i=1}$

$\boxed{y_1}$ $y_1(x_1) =$, $y_1(x_2) =$, $y_1(x_3) =$, $\vdots$, $y_1(x_n) =$ $\longrightarrow$ choisi

y_1 : OK

$\boxed{y_2}$ $y_2(x_1) =$, $y_2(x_2) =$, $y_2(x_3) =$, $\vdots$, $y_2(x_n) =$

y_2 : OK

$\cdots\cdots$ $\boxed{y_n}$ $y_n(x_1)$, $\vdots$, $y_n(x_{n-1}) =$, $y_n(x_n) =$

y_n : OK

$$y_j(x_i) = \delta_{ij} \quad \forall i, \forall j = 1, \dots, n$$

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 1 & i = j \\ 0 & i \neq j \end{cases}$$

$\longrightarrow \{y_1, \dots, y_n\}$ = base de $E' = Y$

d'une et une seule manière. Donc, si y est une forme linéaire de E',

$$[x,y] = \sum_{i=1}^{n} \beta_i [x_i, y].$$

Comme les β_i sont uniques pour chaque x, et à cause de la relation imposée à y dans la thèse, on voit que le seul y satisfaisant nos conditions est défini par

$$[x,y] = \sum_{i=1}^{n} \beta_i \alpha_i$$

pour tout vecteur x de E. □

Théorème 2.24 Soit E un espace vectoriel de dimension n. Soit $\{x_i\}_{i=1}^{n}$ une base de E. Alors il existe une base $\{y_i\}_{i=1}^{n}$ du dual E' telle que

$$[x_i, y_j] = \delta_{ij}, \tag{2.9}$$

pour tous les i et j entre 1 et n.

Preuve.

De la proposition 2.23, on peut déduire que, pour chaque $j = 1, \ldots, n$, il existe un seul y_j dans E' tel que (2.9) soit satisfaite. Il reste uniquement à vérifier que

$$X' = \{y_i\}_{i=1}^{n}$$

forme une base de E'. Vérifions d'abord que les vecteurs de X' sont linéairement indépendants. Pour cela, considérons une combinaison linéaire de ces vecteurs qui soit nulle. En d'autres mots, supposons que

$$[x, \sum_{i=1}^{n} \alpha_i y_i] = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i [x, y_i] = 0$$

pour tout x dans E. Alors, nous avons, en choisissant $x = x_j$,

$$0 = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i [x_j, y_i] = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \delta_{ij} = \alpha_j,$$

et ceci pour tout j entre 1 et n. Les vecteurs de X' sont donc linéairement indépendants. Considérons maintenant un vecteur y quelconque dans E' et notons

$$\alpha_i = [x_i, y] \quad (i = 1, \ldots, n),$$

ainsi que, pour un x quelconque de E,

$$x = \sum_{i=1}^{n} \beta_i x_i.$$

44

th 2.25 : Y = base de E $\Rightarrow$ $\dim E' = n$

ⅰ) L I : Si $\sum_{i=1}^{n} \alpha_i y_i = 0_{E'}$ Alors $\forall j = 1, \dots, n : \alpha_j = 0_{\mathbb{K}}$

$$\Leftrightarrow \forall x \in E : \underbrace{\left(\sum_{i=1}^{n} \alpha_i y_i\right)(x)} = 0_{E'}(x)$$

$$= \left[x, \sum_{i=1}^{n} \alpha_i y_i\right] = 0$$

$$= \sum_{i=1}^{n} \alpha_i [x, y_i] = 0$$

Cas particulier

$$\rightarrow \sum_{i=1}^{n} \alpha_i [x_j, y_i] = 0 = \alpha_j \quad \forall j = 1, \dots, n$$

$$y_i(x_j) = \delta_{ji}$$

$\forall j = 1, \dots, n$

x Générateurs de E'

$$\forall y \in E' : \exists ? \alpha_i \in \mathbb{K} : y = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i y_i$$

$$\Leftrightarrow \forall x \in E : y(x) = \left(\sum_{i=1}^{n} \alpha_i y_i\right)(x)$$

$$\underset{\text{linéaire}}{=} \sum_{i=1}^{n} \alpha_i y_i(x)$$

$$x = \sum_{j=1}^{n} \underbrace{\beta_j}_{\text{connus}} x_j$$

$$y\left(\sum_{j=1}^{n} \beta_j x_j\right) = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i y_i \left(\sum_{j=1}^{n} \beta_j x_j\right)$$

linéaire

$$\sum_{i=1}^{n} \beta_i y(x_i) = \sum_{j=1}^{n} \beta_j \, y(x_j) = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \boxed{\sum_{i=1}^{n} \beta_i \underbrace{y_i(x_j)}_{=\delta_{ij}}}$$

$$= \beta_i$$

$$\Rightarrow \alpha_i = y(x_i)$$

cqfd

th 2.26 : $E \overset{\text{isomorphe}}{\equiv} E'$

$$\underbrace{\dim E}_{n} = \underbrace{\dim E'}_{\text{Preuve th 2.25}} \Leftrightarrow E \equiv E'$$

$$\boxed{\begin{array}{l} E \equiv \mathbb{K}^n \\ E' \equiv \mathbb{K}^n \end{array}} \Rightarrow E \equiv E'$$

$$E \rightarrow \mathbb{K}^n$$
$$x = \sum \alpha_i x_i \mapsto (\alpha_1, \dots, \alpha_n)$$

par transitivité $E \equiv \mathbb{K}^n$, E' ///

On obtient alors

$$[x,y] = [\sum_{i=1}^{n} \beta_i x_i, y] = \sum_{i=1}^{n} \beta_i [x_i, y] = \sum_{i=1}^{n} \beta_i \alpha_i. \tag{2.10}$$

D'autre part,

$$[x, y_j] = \sum_{i=1}^{n} \beta_i [x_i, y_j] = \beta_j,$$

et donc, en rebaptisant l'indice,

$$\beta_i = [x, y_i].$$

En remplacant cette valeur dans (2.10), nous obtenons

$$[x,y] = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i [x, y_i] = [x, \sum_{i=1}^{n} \alpha_i y_i].$$

Comme x est arbitraire, on en tire que

$$y = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i y_i,$$

et tout y de E' est combinaison linéaire des vecteurs de X', ce qui achève la démonstration. □

Une conséquence très importante de ce résultat est le corollaire suivant :

Théorème 2.25 L'espace (vectoriel) dual E' d'un espace vectoriel E de dimension n est aussi de dimension n.

Preuve.

Evidente d'après la proposition 2.24. □

Une conséquence immédiate de la dernière proposition est exprimée dans la proposition suivante :

Théorème 2.26 Tout espace vectoriel de dimension finie E est isomorphe à son dual E'.

Preuve.

Ceci résulte directement du fait que si E est un espace vectoriel sur $\mathbb{K}$, alors E' l'est aussi, grâce aux lois que nous avons construites pour en faire un espace vectoriel (définies en (2.5) et (2.6)). Par le théorème 2.25, nous savons qu'ils sont de même dimension, ils sont donc isomorphes (par le théorème 2.4).□

La base de l'espace dual définie comme plus haut (cfr (2.9)) est aussi nommée la *base duale* associée à une base du primal. Nous présentons encore un corollaire facile de la proposition 2.24 :

$X = \{x_i\}_{i=1}^{n} \longrightarrow Y = \{y_j\}_{j=1}^{n}$

$x \in E$

$\hookrightarrow x = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i x_i \qquad y_j(x) = y_j\left(\sum_{i=1}^{n} \alpha_i x_i\right)$

$= \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \underbrace{y_j(x_i)}_{= \delta_{ij}} = \alpha_j$

$y_j = E \rightarrow \mathbb{K}$
$x \rightarrow x_j$ forme "coordonnées"

$E' = (\mathbb{R}^2)' = \{y : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R} \text{ linéaire}\}$

Exemples : 1) $E = \mathbb{R}^2$
$X = \{(1,1), (1,-1)\} \qquad Y = \{y_1, y_2\}$

$y_1(1,1) = 1 \qquad y_2(1,1) = 0$
$y_1(1,-1) = 0 \qquad y_2(1,-1) = 1$

$y_1(e_1, e_2) = \alpha \cdot e_1 + \beta \cdot e_2 \qquad y_2(e_1, e_2) = \alpha e_1 + \beta e_2$

$y_1(1,1) = \alpha + \beta = 1 \qquad y_2(1,1) = \alpha + \beta = 0$

$y_1(1,-1) = \alpha - \beta = 0 \qquad y_2(1,-1) = \alpha - \beta = 1$

$\rightarrow \alpha \text{ et } \beta = \frac{1}{2} \qquad \rightarrow \alpha = 1/2 = -\beta$

$\rightarrow y_1(e_1, e_2) = 1/2\, e_1 + 1/2\, e_2 \qquad \rightarrow y_2(e_1, e_2) = 1/2\, e_1 - 1/2\, e_2$

$\neq$ car LI

2 formes linéaires indépendantes.

<u>th 2.28</u> : $f : E \rightarrow E$ linéaire
$\qquad X \quad X$

$[f]_X^X = (e_{ij})$

$f(x_j) = \sum_{k=1}^{n} e_{kj} x_k$

$[f(x_j)] = \begin{pmatrix} e_{1j} \\ e_{2j} \\ \vdots \\ e_{nj} \end{pmatrix}$

$e_{ij} = y_i(f(x_j)) = [f(x_j), y_i]$

<u>th 2.27</u> : $\forall x \neq 0 : \exists y \in E' : y(x) \neq 0_{\mathbb{K}}$

Par l'absurde $\longrightarrow x = \sum_{i=1}^{n} \beta_i x_i$

$x \neq 0$
$\forall y \in E' : y(x) = 0$

$y\left(\sum_{i=1}^{n} \beta_i x_i\right) = 0$
linéarité

$\sum_{i=1}^{n} \beta_i y(x_i) = 0$

CP : $y = y_j \rightarrow \sum_{i=1}^{n} \beta_i \underbrace{y_j(x_i)}_{} = 0 = \beta_j \qquad j = 1, \dots, n \rightarrow \boxed{x = 0}$ Contradiction !

Théorème 2.27 Pour tout vecteur non nul x d'un espace vectoriel de dimension finie E, il existe une forme linéaire y dans E', le dual de E, telle que

$$[x, y] \neq 0.$$

Preuve.
Soient $\{x_i\}_{i=1}^n$ et $\{y_i\}_{i=1}^n$ une base de E et sa base duale dans E', (satisfaisant donc (2.9)). Si

$$x = \sum_{i=1}^{n} \beta_i x_i$$

(comme plus haut), alors $\beta_i = [x, y_i]$. Donc, si $[x, y]$ est nul pour tout y, et en particulier pour y_i $(i = 1, ..., n)$, alors tous les β_i sont nuls et x l'est aussi. □

On peut voir immédiatement que cette dernière proposition implique que si u et v sont deux vecteurs différents d'un espace vectoriel de dimension finie E, alors il existe une forme linéaire y dans E' telle que $[u, y] \neq [v, y]$. Il suffit en effet de substituer $x = u - v$ dans la proposition 2.27.

A partir de la base duale d'une base du primal X, on peut reconstruire la matrice associée à une transformation linéaire par rapport à cette base X par l'intermédiaire de crochets de dualité :

Théorème 2.28 Soit

$$X = \{x_1, \ldots, x_n\}$$

une base quelconque de l'espace vectoriel E (de dimension n). Soit

$$X' = \{y_1, \ldots, y_n\}$$

la base duale dans E' définie par la proposition 2.24. Soit, de plus, (a_{ij}) la matrice d'une transformation linéaire f sur E. Alors,

$$a_{ij} = [f(x_j), y_i].$$

Preuve.
Cette propriété résulte directement de la définition d'une matrice associée à une transformation linéaire par rapport à une base. En effet, nous avons que

$$f(x_j) = \sum_{k=1}^{n} a_{kj} x_k \quad (j = 1, ..., n). \tag{2.11}$$

et donc

$$[f(x_j), y_i] = \sum_{k=1}^{n} a_{kj} [x_k, y_i] = a_{ij}$$

46

$$\underset{\substack{e\text{-}v\\ \dim n}}{E} \equiv \underset{\substack{e\text{-}v\\ \dim n}}{E'} \equiv \underset{e\text{-}v}{E''}$$

$$X = \{x_i\}_{i=1}^{n} \quad Y = \{y_j\}_{j=1}^{n} \quad Z = \{z_k\}_{k=1}^{n}$$

$$y_j(x_i) = [x_i, y_j] = \delta_{ij} \qquad z_k(y_j) = [y_j, z_k] = \delta_{jk}$$

$\dim E = \dim E' = \dim E''$

$E \equiv E' \equiv E'' \equiv \dots = \{z : E' \to \mathbb{K} \text{ linéaire}\}$

(Exemple : $E = \mathbb{R}^2$

$E' = (\mathbb{R}^2)' = \{y : \mathbb{R}^2 \xrightarrow[\text{linéaire}]{} \mathbb{R} : (e_1, e_2) \mapsto \alpha e_1 + \beta e_2\}$

$E'' = (\mathbb{R}^2)'' = \{z : (\mathbb{R}^2)' \to \mathbb{R} \text{ linéaire}\}$

$z : (\mathbb{R}^2)' \to \mathbb{R}$

$y \to z(y) = 5 = 3 + 2 = \alpha + \beta$

tq $y(e_1, e_2) = \underset{\alpha}{3}e_1 + \underset{\beta}{2}e_2$)

$E \equiv E''$ $\exists$ des bijections linéaires entre E et E''

$\to$ { bijection linéaire naturelle / isomorphisme naturel } entre E et E''

Th 2.30 : $\sigma : E \to E''$

$x \to \sigma(x) = z_x$

tq $\forall y \in E' : z_x(y) = y(x)$

$$[y, z_x] = [x, y]$$

$$[\boxed{x}, y] = [y, \boxed{z_x}]$$

réflexivité

$\sigma : E \to E''$?

$x \to z_x$

$\to z_x \in ? E'' = \{z : E' \to \mathbb{K} \text{ linéaire}\}$

$\forall y \in E' : z_x(y) = y(x)$

$\to z_x$ défini sur E'

en vertu de la relation (2.11). □

Autrement dit, pour trouver l'élement ij de la matrice associée à f par rapport à la base X, il suffit d'appliquer f au $j$ème vecteur de X et d'appliquer le $i$ème vecteur de X' au résultat (un vecteur de X' est, en effet, une forme linéaire sur E).

2.5.2 Réflexivité

Considérons maintenant le dual du dual de E, soit E'', appelé le *bidual* de l'espace vectoriel E. Ses vecteurs sont donc des formes linéaires, définies sur l'espace des formes linéaires sur E. Une première conséquence immédiate de cette définition :

Théorème 2.29 Tout espace vectoriel de dimension finie E est isomorphe à son bidual E''.

Preuve.
En effet, E' est isomorphe à E par la propriété 2.26 ; si nous appliquons la même propriété à E' plutôt qu'à E, nous obtenons que E'' est isomorphe à E'. En combinant les deux isomorphismes, nous obtenons la thèse. □

Dans le paragraphe qui suit, nous allons préciser l'isomorphisme qui les lie et lui donner une forme explicite. Commençons par la construction d'une correspondance entre E et E''.

Théorème 2.30 Soit E est un espace vectoriel de dimension finie ; à tout vecteur x de E, on peut faire correspondre un élément z_x défini par la relation $z_x(y) = y(x)$ pour tout y dans E'. Cet élément z_x appartient alors au bidual de E.

Preuve.
Si nous supposons que x est fixé, nous voyons que la fonction z_x, définie sur E', qui associe à y la valeur $z_x(y) = [x, y]$, est bien à valeurs dans $\mathbb{K}$. Nous en concluons que z_x est bien une forme définie sur E'.
Les lois introduites sur le dual pour en faire un espace vectoriel (définies en (2.5) et (2.6)), montrent de plus que z_x est linéaire. En effet, $\forall y_1, y_2 \in E', \forall \alpha, \beta \in \mathbb{K}$:

$$\begin{aligned} z_x(\alpha y_1 + \beta y_2) &= (\alpha y_1 + \beta y_2)(x) \\ &= \alpha y_1(x) + \beta y_2(x) \\ &= \alpha z_x(y_1) + \beta z_x(y_2) \end{aligned}$$

En résumé, la relation $z_x(y) = [x, y]$ définit une forme linéaire sur E', càd que z_x est bien un élément de E''.□

Le raisonnement ci-dessus montre que les $z_x(\cdot) = [x, \cdot]$ sont des vecteurs de E''. Nous ne savons

47