DOCTEUR EN SCIENCES

Une ingénierie pour l'étude de la proportionnalité et de la non-proportionnalité au début de l'enseignement secondaire

Lambrecht, Pauline

Award date:
2016

Awarding institution:
Universite de Namur

Université de Namur
Faculté des Sciences
Département de Mathématique

Une ingénierie pour l'étude de la proportionnalité et de la non-proportionnalité au début de l'enseignement secondaire

Thèse présentée par

Pauline Lambrecht

en vue de l'obtention du grade de Docteur en Sciences

Composition du jury

Viviane Durand-Guerrier	
Christiane Hauchart	
Valérie Henry	(Promotrice)
Catherine Houdement	
Anne Lemaître	(Présidente)
Marc Romainville	
Suzanne Thiry	

Septembre 2016

Rempart de la Vierge, 13
B - 5000 Namur (Belgique)

Imprimé en Belgique

ISBN : 978-2-87037-956-1
Dépôt légal: D/2016/1881/40

Université de Namur
Faculté des Sciences
Rue de Bruxelles, 61
B - 5000 Namur (Belgium)

Ingénierie pour l'étude de la proportionnalité et de la non-proportionnalité au début de l'enseignement secondaire

par Pauline LAMBRECHT

Résumé : Ce travail de thèse propose une analyse de l'insertion d'une séquence didactique sur la proportionnalité dans les classes du début du secondaire. L'analyse est menée en trois temps qui sont répartis dans les trois parties de cet ouvrage : le cadre de la recherche qui expose les analyses préalables, les outils théoriques utilisés (principalement la méthodologie d'ingénierie didactique d'ARTIGUE, basée sur la théorie des situations didactiques de BROUSSEAU) et la séquence didactique ; la validation interne qui détaille l'analyse *a priori*, la méthodologie des expérimentations ainsi que l'analyse *a posteriori* ; la validation externe dans laquelle sont développés le protocole expérimental et quelques résultats.

Cette ingénierie se base sur une séquence didactique qui a pour enjeu d'amener l'apprenant à établir le lien entre phénomène linéaire, tableau de proportionnalité et graphique en ligne droite d'une part et phénomènes non linéaires, tableaux de données non proportionnelles et graphiques de fonctions non linéaires d'autre part. Pour cela, il est proposé aux élèves d'étudier, à partir de manipulations, la variation du volume d'un cylindre en fonction de sa hauteur dans un premier temps et en fonction de son diamètre dans un second temps. Cela permet d'observer et de construire avec les élèves les caractéristiques d'un phénomène proportionnel par comparaison avec un phénomène qui ne l'est pas.

Mots-clés: proportionnalité, linéarité, non-proportionnalité, non-linéarité, ingénierie didactique, théorie des situations didactiques, manipulations

Dissertation doctorale en Sciences mathématiques
Date : 12/09/2016
Département de Mathématique
Promoteur : Prof. Valérie HENRY

Engineering for the study of proportionality and non-proportionality in early secondary education

by Pauline LAMBRECHT

Abstract: This thesis work offers an analysis of the insertion of a didactic sequence on proportionality in lower secondary school classes. The analysis is conducted in three steps which are presented in the three parts of this work: the research framework that outlines the preliminary analyses, the theoretical tools used (mainly ARTIGUE's didactic engineering, based on BROUSSEAU's theory of didactic situations) and the didactic sequence; the internal validation that details the *a priori* analysis, the methodology of experimentations and the *a posteriori* analysis; the external validation in which the experimental protocol and results are presented.

This engineering is based on a didactic sequence which aims to lead learners to establish the link between linear phenomenon, proportionality table and straight line graph on the one hand and non-linear phenomena, non-proportional data tables and graphs of non-linear functions on the other hand. To that purpose, students are proposed to examine, through handlings, the volume variation of a cylinder according to its height at first and depending on its diameter in a second time. This allows to observe and build with students the characteristics of a proportional phenomenon compared with a phenomenon that is not.

Keywords: proportionality, linearity, non-proportionality, non-linearity, didactic engineering, theory of didactic situations, handlings

Doctoral dissertation (Ph.D. thesis in Mathematics)
Date : 2016-09-12
Department of Mathematics
Advisor : Prof. Valérie HENRY

« Apprendre en mathématiques
c'est avant tout comprendre »

Thierry DIAS

Remerciements

Suite à une première année de travail au Centre de Recherche sur l'Enseignement des Mathématiques (CREM), Nicolas ROUCHE m'a fait réfléchir à la possibilité de mener une thèse. Il n'est plus présent pour en voir l'aboutissement, mais mes remerciements s'adressent à lui en premier car, sans lui, je n'aurais pas imaginé aller à la rencontre de Valérie HENRY pour lui parler de ce projet.

C'est tout naturellement toi que je remercie ensuite Valérie : tout d'abord pour la confiance que tu m'as donnée rapidement en acceptant d'encadrer cette recherche et, bien sûr, pour l'exigence que tu m'as menée à avoir tant concernant les idées que les textes que je t'ai soumis. Tu as toujours fait preuve de discernement envers mes propos afin de me remettre sur la bonne voie. Merci donc aussi pour ta patience !

Cette thèse n'aurait jamais vu le jour sans le soutien du CREM qui m'a autorisée à commencer et poursuivre ce travail en son sein. Je remercie ainsi les membres du Conseil d'Administration qui ont accepté ce projet, Christian en particulier. Merci aussi à l'ensemble des chercheurs avec qui j'ai pu travailler au cours de ces années sur différents projets et réflexions. Petit clin d'œil à Sylvie, ma partenaire de bureau pendant plusieurs années, qui m'a toujours permis de trouver réponse à mes questions, juste grâce à son oreille attentive... Je ne peux terminer mes remerciements au CREM sans une attention particulière pour Marie-France. La rigueur d'écriture que j'ai acquise au fil des années est sans aucun doute liée au travail à tes côtés, grand merci.

Travailler au CREM, c'est également la possibilité de rencontrer de nombreux chercheurs. L'occasion m'a été donnée de partager le travail en cours avec des didacticiens. Parmi eux, je remercie particulièrement Viviane DURAND-GUERRIER et Catherine HOUDEMENT pour la pertinence de leurs questions qui m'ont apporté l'éclairage nécessaire pour la poursuite du travail. Je profite de ces lignes pour remercier les autres membres du jury, Christiane HAUCHART, Suzanne THIRY et Marc ROMAINVILLE pour leurs conseils avisés lors de nos rencontres, et Anne LEMAÎTRE qui a accepté de présider le jury.

En remerciant Marie pour sa relecture attentive, je remercie à nouveau Marie-France et bien évidemment Valérie pour leurs critiques constructives suite à leurs multiples relectures.

De très nombreux enseignants ont accepté de me confier leurs classes afin d'expérimenter la séquence didactique, je remercie chacun d'eux. Je ne citerai que quelques prénoms pour ne pas allonger ces pages et respecter la confidentialité des classes, elles se reconnaîtront : Isabelle et Julie qui ont été les premières volontaires pour les classes de Bruxelles, Françoise qui a introduit notre équipe dans l'école de Namur et Sylvie qui m'a permis de collaborer avec l'équipe enseignante de l'école de Sambreville.

Je terminerai ces remerciements par ceux envers ma famille et mes amis. Mon souhait a toujours été de leur laisser une grande place dans ma vie et que mon travail de thèse n'empiète pas sur ce terrain (ce qui ne m'a donc pas aidée à le finaliser rapidement !).

Merci donc à chacun de vous qui, par vos prises de nouvelles, m'avez soutenue, épaulée, rassurée, ... et avec qui j'ai pu me changer les idées et décompresser par ces nombreux moments bien à nous.

Merci enfin à mes hommes, petits et grand, qui ont toujours fait preuve de compréhension quand, malgré ce que je m'étais imposée, je m'enfermais quand-même un peu dans mon bureau. Mon adorable Charlie, je garderai à jamais cette image de toi m'y retrouvant avec ton petit ordinateur pour venir « travailler » à côté de moi... Sam, merci pour ta disponibilité quand j'en ai eu besoin. Merci enfin à Simon qui, par ses belles siestes matinales, m'a permis de mettre la touche finale à ce travail. En route pour la vie à quatre maintenant !

Pauline

Table des matières

Introduction

Ce travail de thèse a vu le jour au Centre de Recherche sur l'Enseignement des Mathématiques (CREM) [1] lors de discussions sur un projet de recherche. Ce projet avait l'ambition de proposer des manipulations dans les cours de mathématiques, il a pris forme en septembre 2009 sous le nom de « *Math & Manips* ». Comme toutes les recherches menées au CREM, il propose des activités pour les élèves des classes maternelles jusqu'à celles de la fin de l'enseignement secondaire (18 ans).

Sans s'étendre dans cette introduction sur les particularités de cette recherche, développées dans la section 3.1.1, soulignons les éléments qui nous ont incités à choisir les prémices d'une activité pour en faire la séquence didactique au cœur de cette thèse.

L'enseignement au début du secondaire nous a intéressés car il est souvent sujet à discussions en conséquence de sa rupture avec l'enseignement primaire. Les manipulations sont effectivement souvent encore présentes dans les classes des plus jeunes élèves mais le recours à celles-ci s'estompe au fur et à mesure de l'avancement dans la scolarité. Nous avons jugé que cette année charnière serait un bon choix pour une réflexion particulière.

Une des idées du projet en développement était de prendre la notion de grandeur comme fil conducteur. Il a alors été question de développer une séquence didactique relative à la proportionnalité, suite à la lecture de diverses études identifiant les difficultés de son apprentissage. Ce point est amplement développé à la section 1.1.2.

La séquence proposée vise ainsi à ébranler les convictions des élèves de 12-13 ans (première année de l'enseignement secondaire belge, grade 7) envers le modèle proportionnel en exploitant différents cadres, par l'introduction de manipulations et la confrontation à une situation de non-proportionnalité. Elle est décrite dans la section 3.2.

Dans toute recherche didactique, il est indispensable de se baser sur des analyses préalables et important de mener des analyses *a priori* et *a posteriori* pour que les activités proposées puissent être solides. Malheureusement, les financements des-

1. www.crem.be

quels elles dépendent et le temps qui peut y être consacré ne laissent pas toujours l'opportunité de mener ces analyses comme elles se doivent ou d'avoir l'occasion de les rédiger. Ce travail de thèse nous a permis d'investiguer davantage et donne l'occasion de développer par écrit l'ensemble de ces analyses.

Nous tenons à souligner cet aspect car Brousseau a écrit (1989, p. 61) :

> [...] la recherche est lente ! Les faits ne sont pas exploités, les études ne sont pas écrites, les textes ne sont pas publiés, ou le sont mal... Par exemple, les corpus d'observations restent dans les documents privés : les comptes-rendus de la mise au point des situations d'enseignement sont systématiquement éliminés des publications et même des thèses PAR LEURS AUTEURS bien que la conception et la mise au point de ces situations leur aient réclamé des dizaines d'heure d'un travail où les connaissances didactiques sont effectivement mises en œuvre de la façon la plus visible.

Il donne deux raisons à ce phénomène. La première est que les spécialistes « ne sont pas assez nombreux à lire ce genre de travaux pour justifier l'effort des mises au point nécessaires pour une publication » (*Ibid.*, p. 61) et que les non-spécialistes ne cherchent pas à lire ces textes. Il insiste sur une deuxième raison qui est celle, selon lui, d'une société qui demande aux didacticiens des travaux destinés à la formation des maîtres ou des productions d'aide à l'enseignement qui vont « tuer l'objet de sa recherche » (*Ibid.*, p. 61) notamment parce que, bien souvent, écrits dans un langage plus proche du public.

Par ce travail de thèse, l'occasion nous a ici été donnée de rédiger un document décrivant toute l'étude menée pour la séquence didactique, en parallèle de la publication à destination des enseignants qui reprend l'ensemble des activités, dans une écriture plus ciblée sur les attentes de tels lecteurs.

Cette thèse est articulée en trois grandes parties. La première place le cadre de la recherche et s'attache ainsi à partager, dans un premier chapitre, l'ensemble des analyses préalables, les questions de recherche, ainsi que la méthodologie pour y répondre. Un deuxième chapitre développe les outils théoriques sur lesquels reposent nos analyses, principalement la théorie des situations didactiques de Brousseau et la méthodologie d'ingénierie didactique d'Artigue. Le troisième chapitre de cette première partie présente la séquence didactique, avec les éléments liés à sa conception.

La deuxième partie, pièce majeure de la thèse, est consacrée à la validation interne. Un chapitre développe toute l'analyse *a priori* de la séquence didactique, un autre expose les expérimentations réalisées et l'analyse *a posteriori* qui en a résulté.

La troisième et dernière partie de la thèse concerne la validation externe. Après une description du protocole suivi pour élaborer cette validation dans le sixième chapitre, des résultats sont commentés, avec les précautions liées au choix de ce type de méthodologie, dans le septième et dernier chapitre.

La conclusion de la thèse expose les éléments importants qui ressortent de l'ensemble de ce travail et tente de donner quelques pistes qui seraient intéressantes à poursuivre.

La bibliographie permet sans surprise d'identifier les différents ouvrages consultés sur lesquels reposent nos propos. Cependant, certaines références se trouvent en note de bas de page au cours du texte. Elles correspondent aux références données par les auteurs que nous citons.

Première partie

Cadre de la recherche

Chapitre 1

Analyses préalables et questions de recherche

Sommaire

Ce chapitre a pour objectif de présenter, dans une première section, les différentes analyses qui ont été menées au début de ce travail de thèse. Il s'agit notamment de donner un aperçu de différents travaux sur la proportionnalité liés à la difficulté de l'apprentissage de cette notion mais aussi à la problématique de l'illusion de linéarité. Nous présentons également dans cette première section les origines de cette recherche ainsi que les objectifs de la séquence didactique proposée.

Après ces premières pages qui expliquent l'orientation que nous avons choisi de suivre, nous exposons dans la seconde section nos questions de recherche ainsi que la méthodologie mise en place.

1.1 Analyses préalables

1.1.1 Quelques définitions de la proportionnalité

Sans intention de dresser un tableau complet de l'histoire de la proportionnalité, présentons quelques définitions proposées par Euclide qui, 300 ans avant notre ère, consacrait le livre V de ses « Éléments » aux proportions. Ces définitions sont issues de la traduction de l'ouvrage, écrite et commentée par Vitrac (Euclide, 1994, pp. 36-41).

> Définition 3. Un *rapport* est la relation, telle ou telle, selon la taille, [qu'il y a] entre deux grandeurs du même genre.
>
> Définition 4. Des grandeurs sont dites avoir *un rapport l'une relativement à l'autre* quand elles sont capables, étant multipliées, de se dépasser l'une l'autre.
>
> Définition 5. Des grandeurs sont dites *être dans le même rapport*, une première relativement à une deuxième et une troisième relativement à une quatrième quand des équimultiples de la première et de la troisième ou simultanément dépassent, ou sont simultanément égaux ou simultanément inférieurs à des équimultiples de la deuxième et de la quatrième, selon n'importe quelle multiplication, chacun à chacun, [et] pris de manière correspondante.
>
> Définition 6. Et que les grandeurs qui ont le même rapport soient dites *en proportion*.

On trouve déjà ici la notion de relation entre grandeurs et, pour parler de proportion, l'auteur considère quatre grandeurs.

Les définitions d'Euclide ont été abondamment utilisées au fil des siècles et il est difficile de tracer l'évolution qui a conduit aux définitions d'aujourd'hui. Nous ne nous aventurons pas sur ce terrain. Regardons par contre certaines définitions plus actuelles.

Une définition proposée par Brousseau dans l'un de ses textes de 1995 (p. 11) a certes évolué depuis celles d'Euclide mais s'en inspire clairement :

> « proportionnel » veut dire « relatif à une proportion » ou qui est « déterminé par une proportion », et pour définir une proportion il faut quatre nombres a ; b ; c ; d ; tels que a/b = c/d.

Dans l'ouvrage *Des grandeurs aux espaces vectoriels, la linéarité comme fil conducteur* dans lequel des propriétés de la proportionnalité sont mises en évidence par divers exercices (CREM, 2002), les auteurs mentionnent la considération suivante (p. 565), bien qu'ils élargissent leurs propos pour guider leur travail.

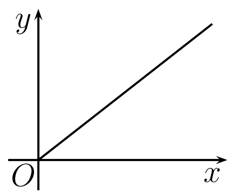
> Qui dit *rapport* évoque une certaine relation entre deux choses. Qui dit *proportion* évoque l'égalité de deux rapports et renvoie donc à quatre choses.

On retrouve à nouveau ici quatre éléments pour identifier deux grandeurs proportionnelles.

Les définitions enseignées à ce jour en Communauté française de Belgique sont proches des suivantes, issues du manuel « Le nouvel Actimath 1-2, Théorie du premier degré » (Ancia & *al.*, 2007).

> Deux grandeurs directement proportionnelles sont deux grandeurs telles que si l'une est multipliée (divisée) par un nombre, alors l'autre est multipliée (divisée) par le même nombre.

> Les points du graphique représentant deux grandeurs directement proportionnelles sont alignés avec l'origine du repère cartésien.



> Le coefficient de proportionnalité (k) entre deux grandeurs directement proportionnelles (x et y) est le quotient de deux quantités correspondantes de y et de x.

Nous souhaitons nuancer cette dernière définition mais nous nous en expliquerons à la section 6.2.2 car nous y discuterons de définitions issues d'autres manuels auxquelles nous n'adhérons pas pleinement.

À ce propos, nous pouvons également déjà observer l'illustration graphique du deuxième cadre qui fournit une représentation légèrement différente de ce qui est défini. Il est récurrent, dans les divers manuels belges utilisés en première secondaire (grade 7), d'utiliser une demi-droite partant de l'origine du repère pour illustrer graphiquement le concept. La section 6.2.2 s'attachera aussi à développer ce point.

La définition du premier cadre porte sur la multiplication interne (ou scalaire), celle du troisième évoque le coefficient de proportionnalité, relatif à la multiplication externe.

On trouve régulièrement dans les manuels des définitions similaires à la suivante (Adam & *al.*, 1997).

> Deux grandeurs sont directement proportionnelles (ou simplement proportionnelles) lorsque
> – la première devenant 2, 3, 4, ..., n fois plus grande, la seconde devient aussi 2, 3, 4, ..., n fois plus grande ;
> – la première devenant 2, 3, 4, ..., n fois plus petite, la seconde devient aussi 2, 3, 4, ..., n fois plus petite.

Simard (2012a) a repéré dans un cours de Philippe et Dauchy de 1920 [2] une trace de telles définitions.

> Deux suites de nombres qui se correspondent un à un sont proportionnelles lorsque les rapports de deux nombres correspondants sont égaux.

Simard pointe le fait que le couple $(0, 0)$ est passé sous silence dans cette définition.

Les quelques définitions relevées dans cette section permettent d'entrevoir quelques éléments de l'évolution de celle d'Euclide. Tout d'abord, une propriété graphique en a découlé et est à ce jour utilisée au même titre qu'une autre définition afin de déterminer si deux grandeurs sont proportionnelles. La reconnaissance d'un coefficient de proportionnalité le permet également. Un autre point concerne le saut de l'identification de quatre nombres à celle de deux suites de nombres pour caractériser deux grandeurs proportionnelles.

1.1.2 Précédents travaux sur la proportionnalité

Après ce rapide aperçu de définitions relatives à la proportionnalité, examinons différents travaux qui se sont centrés sur cette notion.

Rouche a consacré une partie de son ouvrage *Du quotidien aux mathématiques* à l'étude de la proportionnalité entre grandeurs mesurées, selon que les grandeurs mises en correspondance sont ou non de même nature. Il y émet la réflexion suivante : « Toute mesure met en correspondance terme à terme, moyennant le choix d'une unité, des grandeurs et des nombres. Cette correspondance ne serait-elle pas une proportionnalité ? » (2006, p. 224).

Cette réflexion met en évidence que la proportionnalité se trouve effectivement partout autour de nous. Néanmoins, les paragraphes suivants montrent que l'acquisition de ce concept pose problème dans l'enseignement. D'un côté, de nombreux auteurs soulignent la difficulté d'apprentissage de cette matière, de l'autre, des chercheurs attirent l'attention sur le fait que la proportionnalité est tellement naturelle que nombreuses sont les situations où elle est appliquée à mauvais escient. Ces deux points de vue, contradictoires en apparence, sont présentés ci-dessous.

2. Philippe, P. & Dauchy, F. (1920). *Cours d'arithmétique*. Dunod.

Difficulté de l'apprentissage de la proportionnalité

De nombreux documents ayant trait à l'apprentissage de la proportionnalité ont été rédigés ces dernières années et ont nourri notre réflexion. Beaucoup d'entre eux évoquent la difficulté de cette notion. Développons ce premier point de vue à partir d'un constat de Dupuis & Pluvinage (1981, p. 167).

> Dans l'enseignement des concepts liés aux acquisitions numériques, la proportionnalité occupe une position certainement particulière. D'un côté, il s'agit d'un concept dont l'utilité générale est indéniable : non seulement il joue un rôle fondamental en mathématique, mais ses applications sont innombrables et présentes dans tous les secteurs d'activité humaine. À ce titre, il est donc le prolongement naturel des « quatre opérations » arithmétiques. D'un autre côté, il n'est pas certain que son apprentissage suive, dans la population scolaire, une courbe en J qui signifierait son acquisition par la quasi-totalité des élèves, après un certain temps d'apprentissage.

Intéressons-nous dès lors aux raisons qui expliqueraient ces difficultés d'apprentissage du concept de proportionnalité en prenant appui sur les écrits de différents auteurs.

L'ouvrage de Boisnard, Houdebine, Julo, Kerbœuf & Merri (1994) *La proportionnalité et ses problèmes* atteste de l'existence de ces difficultés et les auteurs émettent l'idée « qu'il est normal que sa compréhension ne soit pas immédiate » (p. 5). Dans cette publication, après avoir réalisé un bilan de l'enseignement de la proportionnalité depuis quelques décennies, les auteurs s'intéressent à l'apprentissage de la proportionnalité qui « pose problème », selon leurs termes. Ils commencent par dresser une liste de procédures de résolution : manipulation des rapports, tableau de proportionnalité, propriété des écarts constants, propriété d'additivité, propriété de multiplicativité et coefficient de proportionnalité. Sans prétendre être exhaustifs, les auteurs montrent la diversité des démarches et relèvent la question du choix d'une procédure face à un problème. Les auteurs proposent alors de mettre en évidence des classes de problèmes. La citation suivante (Boisnard & *al.*, 1994, p. 63) énonce les critères choisis pour cette catégorisation.

> Nous avons choisi, tout d'abord, de distinguer deux grandes catégories de critères. Les premiers sont liés à la *structure du problème*, c'est-à-dire à l'analyse des dimensions qui les caractérisent, ainsi qu'au type de relation qui unit les grandeurs en jeu. Dans la seconde catégorie, nous placerons à la fois des critères liés aux *relations numériques* entre les grandeurs et à la *nature des nombres* en jeu, des critères liés à la nature *de la question* et du *but*, ainsi que des critères qui paraissent davantage liés au *domaine de référence*.

Ensuite, les auteurs classent les problèmes en deux catégories, l'une réunit les problèmes où il n'y a que deux grandeurs en jeu, l'autre ceux où il y en a plus de deux. À l'intérieur de ces catégories, ils s'inspirent de la classification de Vergnaud présentée ci-dessous.

Ce type de classification est important car il permet aux enseignants de se rendre compte de la diversité des types de problèmes de proportionnalité et de donner alors l'occasion aux élèves de rencontrer plusieurs démarches de résolution, ce qui est essentiel pour l'apprentissage de cette notion.

BOISNARD & *al.* répertorient également, dans leur ouvrage, les différents langages utilisés pour exprimer les propriétés de la proportionnalité : le langage des proportions, les tableaux, le langage des opérateurs, la représentation graphique, le langage algébrique et celui des fonctions. Ils ajoutent que « les changements de langages sont un moyen privilégié de changer de cadre : par exemple, quand on traduit un tableau de proportionnalité en un graphique, on est amené à passer d'un cadre purement numérique à un cadre géométrique. Les écarts proportionnels vont se traduire par l'alignement. Une droite passant par l'origine va exprimer que, dans le tableau, 0 correspond à 0. La croissance de la fonction, qui peut être cachée dans le tableau parce que les données ne sont pas rangées, va devenir évidente sur le graphique » (*Ibid.*, p. 149). De tels changements de cadre sont importants à prendre en considération, nous reviendrons donc sur ce sujet lorsque le contenu de la séquence didactique aura été présenté.

Intéressons-nous à la classification des problèmes de type multiplicatif de VERGNAUD. Dans son ouvrage *L'enfant, la mathématique et la réalité* (1981a), ce dernier consacre un chapitre à ces problèmes de type multiplicatif. Il y distingue deux grandes formes de relations multiplicatives : l'isomorphisme de mesures et le produit de mesures. La première est « une relation quaternaire entre quatre quantités : deux quantités sont des mesures d'une certaine sorte et les deux autres des mesures d'une autre sorte » (p. 161), la seconde est « une relation ternaire entre trois quantités dont l'une est le produit des deux autres » (p. 171). Voici quelques exemples issus de l'ouvrage en guise d'illustration.

Exemples d'isomorphisme de mesures :

I_a) J'ai 3 paquets de yaourts. Il y a 4 yaourts dans chaque paquet. Combien ai-je de
yaourts ?

I_b) J'ai payé 12 francs pour 3 bouteilles de vin. Quel est le prix d'une bouteille ?

I_c) Pierre a 12 francs et veut acheter des paquets de bonbons à 4 francs le paquet. Combien de paquets peut-il acheter ?

Exemples de produit de mesures :

P_a) Une pièce rectangulaire fait 4 m de long et 3 m de large. Quelle est son aire ?

P_b) En changeant seulement de pull et de foulard, Anne peut avoir 15 tenues différentes. Elle a trois pulls, combien a-t-elle de foulards ?

Pour les premiers exemples, il précise qu'ils « sont d'une inégale difficulté [. . .] mais ils peuvent tous être représentés par un schéma analogue » (VERGNAUD, 1981a, p. 162), comme les tableaux ci-dessous le montrent.

I_a)

paquets	yaourts
1	4
3	x

I_b)

bouteilles	francs
1	x
3	12

I_c)

paquets	francs
1	4
x	12

On reconnaît ici les tableaux de type proportionnalité qui correspondent à la première forme de relations multiplicatives.

Dans la suite de l'ouvrage, VERGNAUD propose de distinguer trois principales classes de problèmes qui se subdivisent chacune en sous-classes. Nous ne détaillons pas cette classification ici car il l'a adaptée au fil du temps. Une catégorisation plus récente est développée dans les prochains paragraphes. Cependant, soulignons que, si VERGNAUD s'attache à cette classification, c'est parce qu'il pense que « la distinction de ces différentes classes et leur analyse doivent être soigneusement abordées afin d'aider l'enfant à reconnaître la structure des problèmes et à trouver la procédure qui conduira à leur solution. Il ne faut pas sous-estimer la difficulté de certaines notions comme celles de rapport, de proportion, de fraction et de fonction qui appellent des précautions didactiques importantes bien au-delà de l'enseignement élémentaire » (*Ibid.*, p. 180). Remarquons que le discours de BOISNARD & *al.* ne s'est pas beaucoup écarté de l'assertion de VERGNAUD, une bonne dizaine d'années plus tard. Le discours n'est d'ailleurs pas différent aujourd'hui, comme nous allons le mettre en évidence dans les propos d'autres auteurs par la suite.

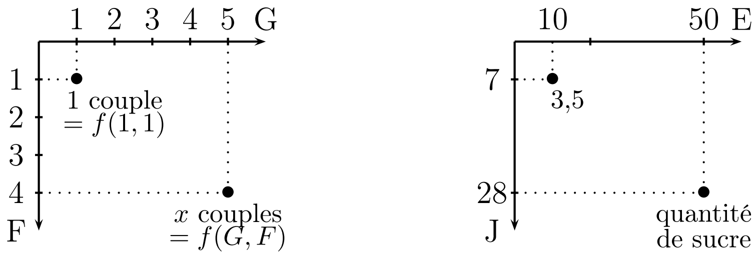
En 1994, VERGNAUD écrit avec LEVAIN un article dans lequel ils caractérisent un peu différemment les structures et considèrent clairement le lien avec la proportionnalité. Pour commencer, ils conscientisent les lecteurs au fait que « le passage, au cours de l'apprentissage, des problèmes additifs aux problèmes multiplicatifs est relativement difficile. L'enfant doit faire face à la fois à une augmentation importante du nombre de catégories de problèmes, et à une complexité plus grande des procédures et des concepts qui permettent de les résoudre » (LEVAIN & VERGNAUD, 1994, p. 56). Ils identifient plusieurs facteurs qui rendent un problème plus ou moins complexe : sa structure mathématique, les valeurs numériques impliquées et la familiarité avec le domaine de référence de l'énoncé (*Ibid.*, p. 56).

Attachons-nous plus particulièrement aux structures mathématiques du problème. En se basant sur la théorie des champs conceptuels de VERGNAUD (1991), les auteurs proposent une classification qui fait intervenir quatre structures. Reprenons leurs descriptions et exemples (LEVAIN & VERGNAUD, 1994, pp. 58-60, 63) :

- la structure de proportion simple met en jeu quatre quantités appartenant à deux espaces de mesure différents (*4 stylos coûtent 6 francs. Combien coûtent 10 stylos ?*) ;
- la structure de proportion simple composée résulte de la composition de deux ou plusieurs proportions simples (*Une institutrice commande 4 boîtes de feutres. Dans chaque boîte il y a 8 feutres. Un feutre coûte 3 francs. Combien l'institutrice paye-t-elle en tout ?*) ;
- la structure du produit de mesures renvoie à la composition cartésienne de deux espaces de mesure en un troisième (*À l'anniversaire de Nicolas, il y a en tout 5 garçons et 4 filles. Combien peuvent-ils former de couples si chaque garçon danse avec une fille, et chaque fille avec chaque garçon ?*) ;
- la structure de proportion double est proche du produit de mesure à la seule différence que $f(1,1)$ n'est plus nécessairement égal à 1 (*La consommation de sucre*

de 10 enfants par semaine est de 3,5 kg. Quelle quantité de sucre consommeront 50 enfants pendant 28 jours ?).

La première structure s'apparente au cas d'isomorphismes de mesures présenté en amont. La deuxième se distingue facilement. Les deux dernières structures méritent sans doute de plus amples explications. Les auteurs signalent que la troisième structure peut être analysée en termes d'une double proportion. Les schémas ci-dessous aident à le comprendre.



On peut dès lors lire plus facilement que, pour l'exemple de la troisième structure, le nombre de couples qui peuvent être formés est proportionnel au nombre de garçons ainsi qu'au nombre de filles.

En 1997, Vergnaud réécrit sa classification. Il consacre un chapitre aux problèmes multiplicatifs dans *Le Moniteur de Mathématiques* (Vergnaud, 1997). Il y indique que les problèmes multiplicatifs sont des « problèmes arithmétiques simples qui se résolvent par une multiplication ou une division (ou ces deux opérations) [, ils] relèvent de ce que nous appelons le "champ conceptuel" des structures multiplicatives » (p. 111). Il identifie clairement que « la difficulté de résolution de tels problèmes est moins due à la nature de l'opération utilisée qu'à la nature des données du problème et des relations qui existent entre ces données », ce qu'il appelle « structure mathématique du problème » (*Ibid.*, p. 111).

À ce moment, il identifie quatre grandes classes, qui ne sont pas exactement les mêmes que dans ses catégorisations précédentes (*Ibid.*, pp. 113-120) :
– les problèmes de comparaison multiplicative de grandeurs, pour lesquels un seul domaine de grandeurs est en jeu (*Dans un groupe de touristes, il y a 18 femmes et trois fois plus d'hommes. Combien y a-t-il d'hommes ?*) ;
– les problèmes de proportionnalité simple, pour lesquels deux domaines de grandeurs sont en jeu (*J'ai payé 48 F pour 3 kg de raisin. Combien coûtent 7,5 kg de raisin ?*) ;
– les problèmes de proportionnalité simple composée, pour lesquels trois domaines de grandeurs sont en jeu, deux relations de proportionnalité simple sont définies, la situation conduit à composer ces deux relations (exemple tout à fait similaire à celui donné en 1994 pour cette même classe : commande de feutres d'une institutrice) ;
– les problèmes de proportionnalité double, pour lesquels deux domaines de grandeurs indépendants sont en jeu, une relation leur associe une mesure d'une troisième grandeur, la « grandeur produit » (exemple du nombre de couples formés par des garçons et des filles).

La deuxième classe de problèmes (proportionnalité simple) correspond à la classe « isomorphisme de mesures » que VERGNAUD avait identifiée en 1981. Ce qu'il avait appelé « produit de mesures » correspond pour sa part à la quatrième classe (proportionnalité double), ce qui permet d'observer qu'il a décidé de ne plus faire de distinction entre les troisième et quatrième structures définies en 1994. Pour chacune de ces quatre classes, VERGNAUD indique les différentes catégories qui existent, ce qui montre l'étendue des types de problèmes qui sont rassemblés sous un même nom « problèmes de proportionnalité » sans que les enseignants ne se rendent toujours compte de la diversité de problèmes que cela recouvre.

Sur base d'une première classification de VERGNAUD et avant la parution de l'article de 1994, LEVAIN avait réalisé une étude au cours de laquelle il avait présenté une série de problèmes à un échantillon d'élèves. Il indique, dans l'article écrit avec VERGNAUD, que les « résultats montrent que la structure du problème détermine dans une large mesure la réussite ou l'échec des élèves » (LEVAIN & VERGNAUD, 1994, p. 61).

À ce propos, les auteurs citent TOURNIAIRE[3] qui souligne que « dès huit ou neuf ans 50% des élèves réussissent des problèmes simples de type recherche d'une quatrième proportionnelle, lorsque le domaine est familier et que les nombres sont petits et entiers » (*Ibid.*, p. 55).

Plus récemment, dans une publication sur l'enseignement de la proportionnalité destinée aux enseignants belges (GÉRON, STEGEN & DARO, 2007), les auteurs ont rassemblé des données de diverses recherches en didactique des mathématiques qui font état du constat suivant : « beaucoup d'élèves débutent leur scolarité dans l'enseignement secondaire en éprouvant encore bien des difficultés avec le concept de proportionnalité » (p. 7). La classification de VERGNAUD donne à penser que ces difficultés peuvent être liées à la complexité pour les élèves d'identifier les types de problèmes de proportionnalité face auxquels ils se trouvent. S'y ajoute ce que GÉRON & *al.* indiquent ensuite : « si, dans l'introduction du document de référence [Ministère de la Communauté française, 1999a], il est clairement fait mention d'une construction de tableaux et de graphiques, au niveau de la définition des compétences, on ne parle plus que de représentations à l'aide de tableaux ; les graphiques semblent avoir disparu » (GÉRON & *al.*, p. 15). Il paraît pourtant important de présenter aux élèves un maximum d'outils pour aborder cette notion.

De très nombreux ouvrages, articles ou autres travaux traitent de la proportionnalité et de cette problématique qui vient de la diversité des problèmes. Il est impossible de tous les référencer mais nous proposons encore ci-dessous un rapide commentaire sur quelques-uns d'entre eux.

HERSANT a consacré sa thèse (2001) aux pratiques d'enseignement en lien avec les problèmes de proportionnalité. Dans la première partie, elle dresse notamment un aperçu de différents travaux sur ce sujet. Nous y renvoyons pour de plus amples ren-

3. TOURNIAIRE, F. (1986). Proportions in elementary school. *Educational Studies in Mathematics*, 17, 401-411.

seignements. Elle étudie ensuite l'utilisation d'un logiciel pour aider à l'apprentissage de la proportionnalité.

Nowak, Tran & Zucchetta présentent, dans leur publication de 2001, différentes procédures de résolution observées chez les élèves de différents pays. Parmi elles, on trouve le retour à l'unité, l'utilisation d'une même référence, de pourcentages, de tableaux avec coefficient de proportionnalité, de tableaux avec produits en croix et la procédure de type quatrième proportionnelle.

Dans le cadre spécifique du Rallye Mathématique Transalpin, le groupe de travail s'intéressant aux problèmes de proportionnalité soulève une difficulté qui reflète l'étude de Vergnaud : « avant de placer correctement les quatre nombres (les trois données et l'inconnue) d'un problème classique de proportionnalité [...], il faut analyser la situation, la décontextualiser pour en extraire les données numériques pertinentes, distinguer les deux couples de nombres en relation, se poser des questions sur la nature de cette relation » (Jaquet, 2006, p. 202). L'auteur ajoute le constat suivant (*Ibid.*, p. 203).

> Trop souvent, les élèves s'engagent dans un problème de proportionnalité sans se rendre compte qu'il y a deux grandeurs en relation. Ils se basent sur des indices leur permettant de se lancer immédiatement dans des calculs, sans analyser la situation et sans identifier de relation.

Dans un article de 2002, Comin pointe encore un autre problème : les enseignants n'utiliseraient pas de manière adéquate le vocabulaire attaché à la proportionnalité. De cette hypothèse et suite à une première enquête, l'auteur affirme que les difficultés des élèves « étaient davantage liées à des questions d'enseignement et de culture qu'à des problèmes d'apprentissage » (Comin, 2002, p. 143). Dans la suite du texte, Comin caractérise notamment différents modèles de la proportionnalité : méthode des proportions, méthode de réduction à l'unité, fonction linéaire, suites proportionnelles, tableau de proportionnalité et produits en croix. De là, il étudie l'évolution des programmes et émet l'hypothèse suivante : « les professeurs ne peuvent pas traiter correctement la proportionnalité car les réformes successives ont fait disparaître de leur culture toute une organisation de savoirs et de connaissances – fondée en partie sur la notion de grandeur – autour des notions de rapport et de proportionnalité » (*Ibid.*, p. 164).

Pour terminer, notons encore que Simard reprend deux catégories de procédures (2012b, p. 36).

> La première, basée sur la théorie des proportions, englobe les procédures suivantes ; utilisation du rapport commun, retour à l'unité, règle de trois et produit en croix. La seconde, basée sur la linéarité, englobe les procédures qui font appel à l'utilisation de la propriété additive et de la propriété multiplicative. À l'intersection de ces deux catégories se trouvent l'utilisation du coefficient de proportionnalité comme opérateur et l'utilisation de la fonction linéaire associée (dont on identifie le coefficient directeur). Enfin, de manière plus anecdotique on trouve la

> procédure graphique qui, si elle est justifiée, revient à une utilisation fine de la fonction linéaire associée.

Simard et Géron & *al.* semblent d'accord sur ce caractère peu présent de la procédure graphique.

Prégnance du modèle linéaire

Nous venons de mettre en évidence la difficulté de l'enseignement de la proportionnalité. Attachons-nous maintenant à l'autre point de vue qui est celui de la rémanence de la linéarité.

Notre angle de travail a été fortement inspiré par la lecture de travaux relatifs à cette prégnance du modèle linéaire. Dans leur ouvrage de 2007, De Bock, Van Dooren, Janssens & Verschaffel étudient le phénomène qu'ils appellent « illusion de linéarité » à l'aide de questions telles que celles retranscrites ci-dessous auxquelles de nombreux élèves répondent en utilisant le modèle proportionnel. Elles ont été posées à des élèves issus des grades 2 à 8, l'équivalent de la deuxième primaire à la deuxième secondaire en Belgique.

Pour catégoriser les questions, les auteurs donnent quelques exemples (De Bock & *al.*, 2007, p. 9).

> *Additive problem* : Ellen and Kim are running around a track. They run equally fast but Ellen started later. When Ellen has run 5 laps, Kim has run 15 laps. When Ellen has run 30 laps, how many has Kim run ? [4]
>
> *Affine problem* : The locomotive of a train is 12 m long. If there are 4 carriages connected to the locomotive, the train is 52 m long. How long is the train if there are 8 carriages connected to the locomotive ? [5]
>
> *Constant problem* : Mama put 3 towels on the clothesline. After 12 hours they were dry. Grandma put 6 towels on the clothesline. How long did it take them to get dry ? [6]

Les problèmes que les auteurs appellent « additifs », « affins » et « constants » font partie des « solvable problems », problèmes qu'ils distinguent des « unsolvable problems » qui sont pour leur part des problèmes pour lesquels il n'existe pas de liens logico-mathématiques précis entre les données et pour lesquels il n'est pas possible de donner une réponse exacte au problème, comme dans l'exemple suivant que les auteurs appellent problème de « pseudo-proportionnalité » (*Ibid.*, p. 7).

4. Ellen et Kim courent autour d'une piste. Elles courent à la même vitesse mais Ellen a commencé plus tard. Quand Ellen a couru 5 tours, Kim a couru 15 tours. Quand Ellen a couru 30 tours, combien de tours a couru Kim ?

5. La locomotive d'un train fait 12 m de long. S'il y a 4 wagons accrochés à la locomotive, le train fait 52 m de long. Quelle est la longueur du train s'il y a 8 wagons accrochés à la locomotive ?

6. Maman a placé 3 serviettes sur la corde à linge. Après 12 heures elles étaient sèches. Grand-mère a placé 6 serviettes sur la corde à linge. Combien de temps leur faudra-t-il pour sécher ?

> *Pseudoproportionality problem* : A shop sells 312 Christmas Cards in December. About how many do you think it will sell altogether in January, February and March ? [7]

Les auteurs soulignent que, pour répondre à ce dernier problème, « rather than taking into account their common-sens knowledge and realistic considerations about the situation described in the problem, the students simply play the 'game of school word problems', in which the players are assumed not to attend too much to the realities of the problem situation but merely to identify the arithmetic operation(s) with the given numbers yielding the supposedly correct answer [8] » (*Ibid.*, p. 7).

De Bock, Van Dooren, Janssens & Verschaffel ont réalisé diverses études au cours desquelles ils ont proposé des problèmes de proportionnalité mêlés à d'autres, notamment des différents types évoqués ci-dessus. L'une de ces études [9] montre que, pour un certain type de problème, le pourcentage de réponses correctes diminue de 30% du grade 3 au 5. Au grade 8 (deuxième secondaire), il y a toujours plus de $\frac{1}{5}$ des réponses qui montrent une mauvaise application de la proportionnalité (De Bock & *al.*, 2007, p. 9).

Les auteurs soulignent ainsi que « students' tendency towards linear modelling is very strong, deep-rooted and resistant to change [10] » (*Ibid.*, p. 21). Selon eux, plusieurs facteurs peuvent être à l'origine de ce fait : la nature intuitive du modèle linéaire en est un et les expériences vécues par les élèves dans leur classe en est un autre (*Ibid.*, p. 22).

Après plusieurs études, De Bock, Van Dooren, Janssens & Verschaffel font le constat suivant (*Ibid.*, p. 85).

> To sum up, all studies reported so far showed that the vast majority of 12-16-year-old students failed on non-proportional word problems about length, area, and volume of similar plane figures, because of their alarmingly strong tendency to apply proportional reasoning 'anywhere'. [11]

Plusieurs hypothèses pourraient expliquer cette tendance. Les auteurs en proposent

7. Une boutique vend 312 cartes de Noël en décembre. Combien pensez-vous qu'elle en vendra en janvier, février et mars ensemble ?

8. Plutôt que de prendre en compte leurs connaissances liées au sens commun et les éléments réalistes de la situation décrite dans le problème, les élèves jouent simplement le « jeu des problèmes verbaux de l'école », dans lequel les joueurs sont supposés ne pas prendre en compte trop de choses de la réalité de la situation-problème, mais plutôt identifier la ou les opération(s) arithmétiques avec les nombres donnés permettant d'obtenir la réponse supposée correcte.

9. Van Dooren, W., De Bock, D., Hessels, A., Janssens, D., & Verschaffel, L. (2005). Not everything is proportional : Effects of age and problem type on propensities for overgeneralization. *Cognition and Instruction*, 23 (1), 57-86.

10. La tendance des élèves à appliquer un modèle linéaire est vraiment forte, profondément enracinée et résistante au changement.

11. En résumé, toutes les études rapportées ici ont montré que la grande majorité des élèves de 12-16 ans ont échoué sur les problèmes de non-proportionnalité liés aux grandeurs, aires et volumes de figures semblables à cause de leur tendance alarmante à appliquer un raisonnement proportionnel « en toutes circonstances ».

une : « students reasoned proportionally simply because they did not invest sufficient mental effort in solving the problems[12] » (*Ibid.*, p. 39). Cette hypothèse rejoint ce qu'évoque Rouche (2006, p. 243) : « souvent, à défaut de regarder les choses d'assez près, on croit avoir à faire à une proportionnalité alors que ce n'est pas le cas. La proportionnalité, c'est tellement simple et régulier qu'il est parfois difficile de s'en détacher ».

Par exemple, le groupe de travail « Mathématiques et Réalités » de l'IREM de Bordeaux note que (1987, p. 13) « la proportionnalité et la linéarité font obstacle à d'autres modèles de sorte que

$$(a+b)^2 = a^2 + b^2,\ \sqrt{a+b} = \sqrt{a} + \sqrt{b} \text{ ou encore } \frac{1}{x+y} = \frac{1}{x} + \frac{1}{y}$$

toutes renforcées par

$$(ab)^2 = a^2b^2,\ \sqrt{ab} = \sqrt{a}\sqrt{b} \text{ et } \frac{1}{xy} = \frac{1}{x} \times \frac{1}{y} \text{ ».}$$

Conclusion

La première partie de cette section insiste sur la difficulté d'apprentissage de la proportionnalité alors que la lecture de la deuxième partie laisse paraître que la proportionnalité est tellement naturelle qu'elle est employée à outrance. Comment comprendre cet apparent paradoxe ?

Ces deux tendances, apparemment contradictoires, semblent en fait relever de la mauvaise acquisition de ce concept, constat avancé par Gille dans un article de 2008 : « La proportionnalité, aussi essentielle qu'elle soit, n'est pas acquise à l'entrée en seconde[13]. » (p. 18).

Il ajoute : « Du fait du caractère flou de leur appréhension de la notion, les élèves ont tendance à utiliser les méthodes de proportionnalité de manière systématique, que la situation le justifie ou non. [...] Sans doute travaille-t-on trop peu (travaillait-on trop peu ?), lors de l'apprentissage de la proportionnalité, sur des situations de non-proportionnalité. » (Gille, 2008, pp. 11-12).

La réflexion quant à l'adéquation d'un modèle n'est pas spécifique à la proportionnalité. Nous renforçons cette deuxième explication par les propos de Schneider (2008, p. 99) relatifs à l'algèbre au collège. Elle identifie l'absence de sens qui « se solde aussi par une standardisation des comportements de l'élève obtenus à la baisse comme des sortes de réflexes pavloviens par la répétitivité de circonstances identiques. C'est la pseudo-algorithmicité, ainsi nommée par Chevallard [...] ».

Ce constat rejoint alors le reproche de Chevallard (2007, p. 441) : « ce qui s'enseigne sous le nom de proportionnalité a été détaché de l'ensemble des usages qui en faisaient autrefois le sel en rendant la chose *socialement désirable* ».

12. Les élèves raisonnent proportionnellement simplement parce qu'ils n'investissent pas un effort mental suffisant dans la résolution de problèmes.

13. La seconde en France correspond à la quatrième secondaire en Fédération Wallonie-Bruxelles.

L'ensemble de ces lectures nous ont ainsi menés à nous poser la question d'un enseignement de la proportionnalité ouvrant la porte à un apprentissage réfléchi.

1.1.3 Autres origines de la recherche

Pour parvenir à une proposition permettant un tel enseignement, ce travail de thèse s'est attaché à divers aspects. Le premier a trait à l'expérimental, notamment par l'introduction de matériel dans les cours de mathématiques. Le deuxième concerne la recherche du sens dans les activités mathématiques. Le troisième porte sur l'introduction de situations de non-proportionnalité dans l'enseignement de la proportionnalité.

Les paragraphes ci-dessous présentent ces trois points à la lumière de différents auteurs.

Laboratoires et utilisation de matériel, l'expérimental

Lors d'une conférence prononcée à Paris en 1904, Borel proposait déjà la mise en place de laboratoires de mathématiques, au même titre que des laboratoires de physique ou de chimie. Lors de cet exposé, il a cherché à « montrer l'intérêt, le rôle et la nécessité des exercices pratiques qui permettent d'introduire "plus de vie et de sens du réel" dans l'enseignement des mathématiques » (Borel, 2002, introduction à son texte p. 48). Borel dit notamment : « il semble que la valeur éducative de l'enseignement mathématique ne pourra qu'être augmentée si la théorie y est, le plus souvent possible, mêlée à la pratique » (*Ibid.*, p. 61) ou encore « une éducation mathématique à la fois théorique et pratique [...] peut exercer la plus heureuse influence sur la formation de l'esprit » (*Ibid.*, p. 63).

Ces idées sont étayées par l'ouvrage écrit par les membres du bureau de la Commission Internationale pour l'Étude et l'Amélioration de l'Enseignement des Mathématiques (Gattegno & *al.*, 1958) dans lequel l'usage du matériel est appuyé par la complémentarité de la perception et de l'action, par le nécessaire va-et-vient entre le concret et l'abstrait dans l'activité et enfin par l'importance du recours à l'objet et à l'action notamment dans l'enseignement de la géométrie intuitive. Plus particulièrement, pour Gattegno, « la perception et l'action sont parties intégrantes [de l'activité mathématique] » et, pour Castelnuovo, « le rendement est meilleur, pour l'ensemble des élèves, si on introduit une conception dynamique de l'apprentissage et qu'on donne à l'activité des élèves eux-mêmes une place plus grande » (Gattegno & *al.*, 1958, pp. 5-6).

La position de Matheron, lors de la présentation d'un séminaire lié à la mémoire dans l'étude des mathématiques (2014), reflète encore un aspect important de l'introduction de manipulations dans les activités mathématiques. Il est important de ne pas opposer les activités « de l'esprit » et « celles de la main », les concepts et les instruments, ce qui ne peut être qu'évoqué et ce qui est perçu.

Dias a développé dans sa thèse l'aspect expérimental. Il évoque évidemment les laboratoires de Borel mais, pour définir sa terminologie de laboratoire, il fait référence à Hacking [14] qui fait du laboratoire « le lieu significatif de l'expérimentation » (Dias, 2008, p. 101). Il y écrit les propos suivants (*Ibid.*, p. 102).

> L'idée est que le matériel ne doit pas être l'élément fort de ces laboratoires, mais rester au service du questionnement scientifique, et éventuellement support à la représentation. [...] L'idée de ces salles d'expérimentation en mathématiques dépasse selon nous le simple caractère matériel d'un lieu au sein d'un établissement scolaire. Il s'agit plutôt de créer un dispositif d'enseignement/apprentissage ayant ses propres particularités, ses variables didactiques, ses caractéristiques pédagogiques et psychologiques.

Il espère insuffler un nouvel élan à l'introduction de l'expérimental dans les classes car « bien que l'idée des laboratoires de mathématiques ait été reprise par la commission de réflexion sur l'enseignement des mathématiques (présidée par Jean-Pierre Kahane), puis par Jacques Lang, alors ministre de l'éducation nationale, elle n'a été que peu suivie d'effet » (*Ibid.*, p. 243).

Avec Durand-Guerrier, Dias soutient « l'intérêt et la possibilité de concevoir des situations d'apprentissage mettant en œuvre le recours à l'expérience dans la perspective de favoriser l'accès aux connaissances mathématiques pour le plus grand nombre d'apprenants » (Dias & Durand-Guerrier, 2005, p. 61).

Pelay évoque un autre point qui concerne le côté captivant des expériences (2011, pp. 43-44).

> Alors que les chimistes peuvent réaliser des expériences étonnantes, que les physiciens peuvent proposer des constructions (fusées, ballons expérimentaux, cerfs-volants, robots, etc.), que les biologistes peuvent s'appuyer sur des observations de l'environnement (plantes, animaux, etc.), les mathématiques semblent éprouver des difficultés à trouver des activités aussi captivantes que les expérimentations et les constructions.

Par l'insertion dans les classes de la séquence didactique décrite dans le chapitre 3, nous espérons montrer qu'il est possible d'introduire le côté captivant des expériences en mathématiques.

Recherche du sens

Dans son texte qui invite à la mise en place de laboratoires, Borel (2002, pp. 57-58) annonce déjà le deuxième point que nous voulons aborder dans ce paragraphe, il souligne toute l'importance de la réflexion que doivent avoir les élèves par rapport à leurs réponses.

> [...] on peut signaler bien des moyens qui pourraient être employés pour introduire plus de vie et de sens du réel dans notre enseignement mathé-

14. Hacking I. (1989). *Concevoir et expérimenter*. Christian Bourgeois : Paris.

> matique [...] Par exemple, on peut demander à chaque élève d'apporter dans sa poche un mètre en ruban ; lui faire mesurer les deux côtés d'un rectangle (du tableau noir, d'une table, etc.), et lui faire calculer la diagonale, puis vérifier le résultat. On peut, de même, faire calculer expérimentalement le rapport de la circonférence au diamètre, le volume d'un vase de forme simple, etc. On habituera aussi les élèves à évaluer les longueurs et les angles à vue d'œil. [...] en résumé, on doit rechercher toutes les occasions de faire mesurer à nos élèves des grandeurs concrètes : longueurs, temps, angles, vitesses, etc., de manière qu'ils appliquent le calcul à des réalités et se rendent compte par eux-mêmes que les Mathématiques ne sont pas une pure abstraction.

Dans un même ordre d'idées, Verschaffel et de Corte discutent, dans un ouvrage collectif de 2005, une série d'études visant à investiguer le phénomène de mise entre parenthèses du sens. Les auteurs y abordent le sujet de problèmes qu'ils appellent « verbaux ». Les élèves ne prennent malheureusement pas assez en considération la réalité liée au contexte de ces problèmes d'application, avec habillage (description verbale). Selon les auteurs, cela peut être expliqué par le fait que la modélisation est un processus complexe. De tels problèmes impliquent l'articulation de différentes techniques, ce à quoi les élèves sont peu familiarisés. Ces différentes recherches montrent de manière générale que les élèves ont très fortement tendance à exclure leurs connaissances du monde réel dans la résolution de problèmes et cela, même s'ils ont été mis en garde auparavant.

Par contre, lorsque les élèves sont placés dans une situation plus authentique et en présence d'un matériel concret, les auteurs déclarent qu'une amélioration dans leurs réponses et dans leur prise en compte du réel est observée : « La plupart des élèves semblent se débarrasser de leur tendance à répondre [...] de façon stéréotypée, vide de sens, sans prêter attention aux contraintes réalistes qui rendent les solutions routinières inadéquates. » (Verschaffel & de Corte, 2005, p. 163).

Le groupe de travail « Mathématiques et Réalités » de l'IREM de Bordeaux émet, quant à lui, l'avis suivant : « D'après notre pratique, il nous apparaît que la "réalité" doit intervenir nécessairement à un certain moment dans notre enseignement des mathématiques, pour lui donner du sens, en particulier pour placer l'acquisition du savoir dans un contexte, – une histoire – propre à chaque élève et sans lequel le savoir ne peut se construire. » (1987, p. 4).

Nous conclurons ce paragraphe avec un extrait du texte de Simard (2012a, p. 58).

> L'apprentissage des techniques de la proportionnalité [...] n'a de sens que si l'élève sait reconnaître, au moins intuitivement les situations de proportionnalité. En effet, tout élève peut être très compétent techniquement mais ne pas savoir quand utiliser ces techniques ou alors les utiliser à mauvais escient. Ainsi, parallèlement à l'apprentissage des techniques, le rôle de l'enseignant est de faire acquérir le sens de la proportionnalité aux élèves. Pour cela, le maître doit confronter ses élèves à des situations de proportionnalité et à des situations de non-proportionnalité.

Cette remarque conduit directement au troisième point sur lequel nous souhaitons réfléchir.

Non-proportionnalité

Comme Simard le souligne ci-dessus, la plupart des recherches mentionnées à la section 1.1.2 s'entendent pour dire qu'il est important d'introduire des situations de non-proportionnalité dans l'étude de la proportionnalité. Citons pour autre exemple Géron & *al.* (2007, p. 80).

> Pour pouvoir résoudre correctement un problème et utiliser les outils de résolution les plus efficaces, il est impératif que les enfants perçoivent la relation qui existe (ou non) entre deux grandeurs. Il n'est pas concevable d'appliquer les procédures propres à la proportionnalité, telles que le rapport interne, le rapport externe ou les propriétés de linéarité, à des problèmes qui ne relèvent pas de cette catégorie. Il est donc primordial de confronter assez rapidement les enfants à des problèmes de non-proportionnalité afin d'aiguiser leur esprit de réflexion et d'analyse de manière à éviter l'usage abusif du modèle multiplicatif.

Dans le même ordre d'idée, Rouche note : « Non seulement ces situations [de non-proportionnalité] différentes des précédentes sont intéressantes par elles-mêmes, mais en outre elles montrent ce que la proportionnalité n'est pas. » (2006, p. 205).

Les propos de Brousseau appuient cette idée : « une notion apprise n'est utilisable que dans la mesure où elle est reliée à d'autres, ces liaisons constituant sa signification, son étiquette, sa méthode d'activation » (1976, p. 103).

1.1.4 Objectifs de la construction de la séquence

Suite aux lectures qui ont mené aux différents points de vue présentés dans la section précédente, nous avons cherché à construire une séquence didactique qui s'appuie sur ces trois idées.

Tout d'abord, il nous a donc semblé important de penser cette séquence en lien avec l'introduction d'une composante expérimentale, par le biais de manipulations. Nous adhérons ainsi aux idées de Borel, concernant les laboratoires, qui plaide pour mêler la pratique à la théorie, tout en rejoignant les conceptions de Dias notamment quand il dit que le matériel doit « rester au service du questionnement scientifique ».

L'activité expérimentale débouche nécessairement sur un relevé d'informations qui doivent être traitées de diverses manières. Dans l'élaboration de la séquence, on a été attentif à utiliser diverses représentations : les résultats sont analysés et décrits dans le langage courant, intégrés dans des tableaux de nombres et interprétés sous forme de graphiques. Ceci rejoint les propos de Géron & *al.* qui indiquent effectivement que « la proportionnalité peut être envisagée dans trois cadres différents, qui souvent peuvent être mis en relation : le cadre des grandeurs, le cadre numérique (dans lequel on s'intéresse uniquement aux relations entre nombres) et le cadre graphique (dans lequel on représente la relation entre les grandeurs ou entre les nombres dans un système d'axes gradués) » (2007, p. 17).

Pelay souligne dans ses propos repris plus haut que « les mathématiques semblent éprouver des difficultés à trouver des activités aussi captivantes que les expérimentations et les constructions ». Par l'élaboration de la séquence didactique dont il est question dans cette thèse, nous espérons pouvoir affirmer qu'il est possible de concevoir de telles activités.

La deuxième idée développée dans la section précédente concerne la réalité. Nous avons ainsi souhaité proposer une séquence didactique qui donne du sens aux activités mathématiques, et donc à l'apprentissage de la proportionnalité. Verschaffel et de Corte soulignent la forte tendance des élèves à exclure leurs connaissances du monde réel dans la résolution de problèmes. Notre expérience nous amène à partager largement l'avis des auteurs. Notre espoir est que la séquence, requérant le passage par la manipulation matérielle, pousse les élèves à prendre conscience du sens réellement présent dans les mathématiques et à relier les expériences vécues à leur apprentissage de la proportionnalité.

À ce propos, Vergnaud souligne que « les connaissances des élèves sont façonnées par les situations qu'ils ont rencontrées et maîtrisées progressivement, notamment par les premières situations susceptibles de donner du sens aux concepts et aux procédures qu'on veut leur enseigner » (1991, p. 150).

La théorie des situations didactiques, développée dans le prochain chapitre, nous permet de poursuivre cet objectif. Selon Brousseau, ce type d'enseignement « a pour ambition de faire passer les questions du domaine de l'enseignant à celui de l'élève, d'enseigner les questions autant que les réponses, et autant que possible d'enseigner les connaissances avec leur sens » (1988, p. 327).

Le troisième thème abordé dans la section précédente est celui de la confrontation à la non-proportionnalité. Il nous paraît en effet primordial de considérer la question de l'adéquation d'un modèle dans la séquence didactique. Prendre conscience que la proportionnalité n'est pas toujours d'application devrait amener les élèves à mieux cerner le concept en lui-même. C'est pourquoi la volonté a été de créer une séquence qui intègre une situation de non-proportionnalité.

Comme nous l'avons souligné plus haut, plusieurs recherches s'accordent sur la nécessité d'introduire des situations de non-proportionnalité dans l'étude de la proportionnalité. Cependant, il n'est jamais explicitement proposé d'introduire d'emblée de telles situations au début de cet enseignement. C'est pourtant le choix que nous avons fait en insérant une situation de non-proportionnalité très tôt dans la séquence didactique. Nous avons également souhaité utiliser les manipulations pour renforcer les conflits cognitifs créés par la confrontation entre résultats de l'expérience et conceptions initiales des élèves.

L'expérimentation liée à la situation de non-proportionnalité a donc été introduite dans la séquence afin de générer ce conflit entre les préconceptions des élèves et les résultats des expériences. Les nombreux exercices réalisés habituellement dans les classes sont sans doute un atout pour ancrer l'apprentissage de la proportionnalité mais nous craignons qu'ils ne soient efficaces qu'à court terme s'ils ne sont accompagnés de faits marquants créant des images mentales et permettant de fixer le concept. Nous avons l'espoir que la partie expérimentale de la séquence proposée puisse jouer ce rôle.

Notons encore que la construction de la séquence amène des élèves à utiliser un modèle linéaire dans une situation inappropriée et fait dès lors une place importante à l'erreur comme vecteur d'apprentissage. Ce point sera plus largement développé dans l'analyse *a priori* mais relevons déjà les propos de Brousseau à ce sujet (1998, pp. 320-321).

> Il est fréquent que les erreurs de l'élève soient interprétées par le professeur comme des signes d'une incapacité à raisonner en général ou au moins comme une erreur de logique : dans un contrat didactique large, le professeur prend en charge les représentations, le sens des connaissances, mais, dans des conditions plus dures, il est conduit à repérer simplement l'endroit de la réponse de l'élève qui est en contradiction avec les savoirs antérieurs, en évitant soigneusement tout diagnostic sur les causes de l'erreur. [...] La logique des enfants, la pensée « naturelle » sont déjà assez bien connues. Elles leur font commettre des erreurs que l'on peut recenser et observer régulièrement. Certaines de ces connaissances peuvent se constituer en obstacles (didactiques ? ontogénétiques ? épistémologiques ?) et donner lieu à des conflits cognitifs. Quelle place, quel statut, quelle fonction donner à ces représentations. Faut-il (peut-on et comment) : [...] les reconnaître, les exposer et leur faire explicitement une place dans le projet d'enseignement ?

Nous répondons évidemment à cette dernière question par l'affirmative. La façon d'y parvenir est développée au fil des chapitres.

1.1.5 Test préliminaire

Comme nous venons de le détailler, il est prévu que la séquence didactique intègre des manipulations et aborde une situation de non-proportionnalité.

Artigue déclare (1988, p. 291) : « Très souvent [...] un des points d'appui essentiels de la conception [d'une ingénierie didactique] réside dans l'analyse préalable fine des conceptions des élèves, des difficultés et erreurs tenaces, et l'ingénierie est conçue pour provoquer, de façon contrôlée, l'évolution des conceptions. », c'est précisément de cette analyse préalable des conceptions dont il est question dans cette section.

Les études menées par De Bock et son équipe à propos de l'illusion de linéarité sont un premier point d'appui mais, avant la mise au point de la séquence, nous avons toutefois préféré nous assurer d'être face au même type de comportement auprès du public avec lequel nous allions travailler.

Dans cette optique, nous avons établi un questionnaire qui permet de repérer si les élèves choisissent un modèle adéquat ou s'ils utilisent la proportionnalité dans des situations inappropriées. Pour cela, le questionnaire a été composé de questions dont la réponse s'obtient par application soit d'un modèle proportionnel, soit d'un autre modèle (inversement proportionnel par exemple), soit du bon sens.

Dans la famille de questions de type « proportionnel », certaines questions se résolvent plus simplement que d'autres, par exemple « Une paire de ciseaux pèse 50 grammes. Quel est le poids de deux paires de ciseaux ? ». Dans certains cas, le coefficient de proportionnalité n'est pas entier, comme dans l'exemple : « Pour faire de la mousse au chocolat pour 4 personnes, il faut 200 grammes de beurre. Combien de grammes de beurre faudra-t-il pour faire de la mousse au chocolat pour 7 personnes ? ».

La deuxième famille de questions est composée de certaines dont la solution s'obtient par application de la proportionnalité inverse : « Si 8 ouvriers ont été nécessaires sur un chantier pour construire une maison en 10 mois, combien d'ouvriers auraient été nécessaires pour la construire en 5 mois ? ». D'autres sont issues de la classification de De Bock & *al.* : « Sur une corde à linge, une chemise prend 1 heure pour sécher. Combien de temps faut-il pour faire sécher 3 chemises placées les unes à côté des autres sur cette corde ? » (constant problem).

La troisième famille reprend des questions que De Bock & *al.* qualifient de « unsolvable problems ». Ces questions ne peuvent trouver réponse par un raisonnement mathématique. Le bon sens des élèves doit les amener à dire clairement qu'il est impossible de répondre à la question. En voici deux exemples : « Il a fallu 5 lancers à un joueur de fléchettes pour atteindre le centre de la cible. Combien de lancers faudra-t-il à son voisin pour atteindre le centre de la cible ? » et « Un nouveau-né de 50 cm pèse 4 kg. Quel sera son poids quand il mesurera 1,50 mètre ? ». Cette dernière s'assimile selon nous à une question du type « pseudoproportionality problem » de De Bock & *al.*

Les questions ont été réparties suivant un ordre aléatoire dans le livret distribué aux élèves de deux classes de sixième primaire (grade 6). Il se trouve à l'annexe G, juste après la liste de toutes les questions, rassemblées selon la catégorisation donnée ci-dessus. Notons qu'une question supplémentaire a été insérée dans le livret « Si un carré a une aire de 1 cm^2, quelle sera l'aire du carré dont le côté est 3 fois plus long que celui du premier carré ? ». Elle l'a été dans le but d'avoir un premier aperçu du raisonnement des élèves face à une telle situation qui a été exploitée par la suite dans la séquence didactique.

Les résultats ont bien été ceux escomptés. Le taux de réussite pour les questions de type proportionnel avoisine les 90%, même pour les questions dont le coefficient de proportionnalité n'est pas entier, à l'exception de la suivante : « Au magasin, j'ai acheté 3 kg de pommes et ça m'a coûté 5 euros. Combien aurais-je payé si j'avais acheté 4,5 kg de ces pommes ? ». La procédure de retour à l'unité adoptée par la majorité des élèves pour la résolution a été une difficulté, l'utilisation de fractions leur faisant défaut. Seuls 65% des élèves interrogés ont réussi cet item.

Les réponses aux questions présentées ci-dessus dans la deuxième famille (ouvriers et chemises) ont été celles auxquelles on s'attendait. Les items sont réussis à moins de 50%, les réponses erronées étant obtenues par application d'un modèle proportionnel. Pour les questions de la troisième famille, les résultats sont éloquents : 74% des élèves appliquent le modèle linéaire pour répondre à la question du poids d'un adolescent connaissant son poids de bébé, et 85% utilisent ce même modèle pour répondre à la question « Carl Lewis, ancien champion du monde du 100 mètres, l'a couru en 10 secondes en 1984. Combien de temps lui aurait-il fallu pour courir un marathon de 50 km ? ». Notons qu'à l'item « Il a fallu 5 lancers à un joueur de fléchettes pour atteindre le centre de la cible. Combien de lancers faudra-t-il à son voisin pour atteindre le centre de la cible ? », question parfaitement absurde, près de 90% des élèves ont indiqué qu'il n'était pas possible de donner une réponse. Cette question a un statut différent car il n'y a pas suffisamment de données numériques pour inciter les élèves à effectuer des calculs.

Ces premiers résultats sont sujets à discussion que nous mènerons dans la troisième partie de cette thèse. Toutefois, ces observations nous ont incités à poursuivre notre travail, observant la forte tendance des élèves à appliquer le modèle proportionnel dans des situations inappropriées, tout comme l'ont précédemment fait observer De Bock & *al.*

1.2 Questions de recherche et méthodologie

Suite à ce qui vient d'être développé dans la première section de ce chapitre, nous nous sommes attachés à réfléchir à l'apprentissage de la proportionnalité au début de l'enseignement secondaire.

Nous sommes convaincus que tant la confrontation de la proportionnalité à la non-proportionnalité que l'intégration d'une partie expérimentale au sein de la séquence de cours (avec la volonté de renforcer, chez l'apprenant, le lien entre le monde sensible et ses apprentissages sur la proportionnalité) peuvent amener les élèves à un meilleur apprentissage de cette notion. Dans l'optique de développer la capacité des élèves à percevoir l'essence des problèmes qui leur sont proposés, l'ingénierie présentée à la section 3.2 a été mise au point. Nos questions de recherche s'expriment dès lors en ces termes.

> La confrontation entre situation de proportionnalité et de non-proportionnalité est-elle un apport pour les apprentissages liés à la proportionnalité ?

> La confrontation entre perceptions initiales des élèves et résultats expérimentaux est-elle un apport pour les apprentissages liés à la proportionnalité ?

> Une séquence qui intègre situation de non-proportionnalité et expériences permet-elle d'améliorer l'aptitude des élèves à renoncer au modèle proportionnel lorsqu'il ne convient pas ?

Afin de répondre aux deux premières questions, l'analyse de la séquence didactique est développée dans les chapitres 4 et 5. Elle suit la méthodologie d'ingénierie didactique proposée par Artigue et s'appuie sur le cadre de la théorie des situations didactiques de Brousseau.

Artigue définit la méthodologie qu'elle propose en ces termes (1988, p. 286).

> La méthodologie d'ingénierie didactique se caractérise [...], par rapport à d'autres types de recherche basés sur des expérimentations en classe, par le registre dans lequel elle se situe et les modes de validation qui lui sont associés. En effet, les recherches ayant recours à des expérimentations en classe se situent le plus souvent dans une approche comparative avec validation externe basée sur la comparaison statistique des performances de groupes expérimentaux et de groupes témoins. Ce paradigme n'est pas celui de l'ingénierie didactique qui se situe, à l'opposé, dans le registre des études de cas et dont la validation est essentiellement interne, fondée sur la confrontation entre analyse *a priori* et analyse *a posteriori*.

Le chapitre 4 de cette thèse présente l'analyse *a priori* de la séquence didactique, le chapitre 5 s'attache quant à lui à son analyse *a posteriori*.

Le paradigme de la validation externe, évoqué par Artigue, correspond à l'approche que nous adopterons pour tenter de répondre à la troisième question. Cette méthodologie est moins commune en didactique des mathématiques car de nombreuses variables entrent en jeu et elles ne sont pas toutes contrôlables. Schneider (2008, p. 161) souligne que « mesurer un quelconque impact des situations-problèmes ou des situations adidactiques sur le transfert des apprentissages est une entreprise *a priori* très périlleuse, voire utopique dans sa généralité ». Elle poursuit : « Cette question se doit d'être grandement spécifiée dans un cadre institutionnel donné, pour un savoir donné, ... et problématisée dans une théorie didactique qui octroie un sens opérationnel aux concepts tels que celui de situation-problème [...] ». C'est la raison pour laquelle, avant toute tentative de réponse à la troisième question, la plus grande partie de cette thèse est consacrée à la validation interne. Schneider termine en écrivant que « c'est aussi une question qui soulève d'énormes difficultés méthodologiques, comme on s'en doute ». Le dispositif complet mis au point dans l'optique de répondre à la troisième question sera présenté dans le chapitre 6, les observations qui en résultent au chapitre 7. Ces deux chapitres font l'objet de la troisième partie de la thèse.

Notons que nous ne nous attendons pas à ce que les résultats de la validation externe soient exceptionnels, d'autant que la séquence proposée dans les classes est une opération isolée. Pour ce point nous rejoignons Brousseau via les propos de Schneider (2008, p. 161) lorsqu'elle continue : « Là n'était pas l'entreprise de Brousseau. Tout au plus, il a établi que des élèves de l'école élémentaire ayant bénéficié d'un enseignement organisé autour de situations adidactiques réussissent aussi bien que les autres les épreuves nationales, ce qui n'est pas négligeable a-t-il dit lors d'une présentation de la TSD [15] à ICMI [16] en 2004, étant donné les “perturbations” apportées au système. ».

Bien que les deux premières questions de recherche soient traitées différemment de la troisième (validation interne ou externe), la question du long terme sera abordée du point de vue externe pour chacune des trois questions, tant au niveau des apprentissages que de l'utilisation inappropriée du modèle proportionnel.

15. Théorie des Situations Didactiques
16. International Commission on Mathematical Instruction

Chapitre 2

Outils théoriques en didactique des mathématiques

Sommaire

Avant de développer la séquence didactique évoquée dans le chapitre précédent, attachons-nous aux différents outils théoriques sur lesquels repose ce travail. Il s'agit principalement de la théorie des situations didactiques de Brousseau et de la méthodologie d'ingénierie didactique développée par Artigue.

Si nous avons choisi deux outils théoriques principaux, c'est parce que les liens entre ingénierie didactique et théorie des situations didactiques sont profonds, comme le souligne Artigue. Elle ajoute d'ailleurs : « L'ingénierie didactique est un objet imprégné de valeurs qui sont celles de la TSD. » (Artigue, 2011, p. 21).

Il existe de nombreux documents relatifs à la théorie des situations didactiques. Nous avons donc pris le parti de ne pas décrire cette théorie mais d'articuler une sélection de propos de différents auteurs. Cette sélection correspond à ce qui nous paraît le plus pertinent afin de rendre compte, au mieux, des liens entre notre recherche et les notions liées à ce cadre. L'analyse *a priori* développée au chapitre 4 explicitera davantage ces liens.

La première section est consacrée au cadre de la théorie des situations didactiques de Brousseau, la deuxième à la méthodologie d'ingénierie didactique d'Artigue. La troisième section s'attachera quant à elle à présenter les principaux éléments des théories de Douady et de Duval car elles ont également toutes deux leur importance dans l'élaboration et l'analyse de la séquence didactique.

2.1 Théorie des Situations Didactiques

La théorie des situations didactiques a été développée vers les années '80 par Brousseau. Au fil des années, il a écrit de multiples textes pour illustrer sa théorie. Nous puisons à travers eux un bon nombre de citations que nous n'utilisons pas nécessairement de manière chronologique, d'autant que certains textes ont été réédités et commentés ultérieurement. Autant que cela ait été possible, nous avons tâché d'utiliser les sources initiales.

Afin de caractériser la théorie des situations didactiques, Brousseau décrit le but d'un système didactique qui est « de transmettre une connaissance d'une institution à une autre ou de faire partager un savoir » (1995, p. 3 du cours n° 3). La connaissance dont il est question dans la suite de notre travail est bien entendu la notion de proportionnalité mais, par là même, la reconnaissance de la non-proportionnalité, connaissance qui n'est pas explicitement référencée dans les compétences listées dans les socles rédigés par le Ministère de la Communauté française de Belgique (1999a).

Brousseau indique que « chaque connaissance peut se caractériser par une (ou des) situation adidactique qui en préserve le sens », c'est ce qu'il appelle situation fondamentale (1986, p. 49). Bessot (2011, p. 48) indique quant à elle qu'« une situation fondamentale va donc générer une suite de situations que l'on va chercher à mettre en scène dans une classe, pour confronter la nécessité théorique à la contingence ». Sans intention de détailler ce qu'est une situation fondamentale, nous souhaitons par les propos de Brousseau et Bessot montrer que la « séquence didactique » présentée dans la suite du texte correspond à cet ensemble de situations, qui peuvent être *adidactiques* pour certaines.

Avant de développer ce premier terme (situation adidactique) de la théorie des situations didactiques, nous voulons souligner les propos de Brousseau ci-dessous (1986, p. 50), lesquels confortent cette idée.

> Cette situation ou ce problème choisi par l'enseignant est une partie essentielle de la situation plus vaste suivante : le maître cherche à faire dévolution à l'élève d'une situation adidactique qui provoque chez lui l'interaction la plus indépendante et la plus féconde possible. Pour cela, il communique ou s'abstient de communiquer, selon le cas, des informations, des questions, des méthodes d'apprentissage, des heuristiques, etc. L'enseignant est donc impliqué dans un jeu avec le système des interactions de l'élève avec les problèmes qu'il lui pose. Ce jeu ou cette situation plus vaste est la *situation didactique*.

Il attire l'attention sur l'existence d'une situation didactique plus vaste. Pour la présenter, Brousseau se repose sur des notions telles que *dévolution*, *institutionnalisation*, *milieu*, *contrat didactique*, ... Dès lors, nous allons nous attacher à développer chacune de ces notions dans les paragraphes suivants, en commençant par définir ce qui est appelé *situation adidactique*.

2.1.1 Situation adidactique

Brousseau définit les situations adidactiques comme « les situations d'apprentissage dans lesquelles le maître a réussi à faire disparaître sa volonté, ses interventions, en tant que renseignements déterminants de ce que l'élève va faire : ce sont celles qui fonctionnent sans l'intervention du maître au niveau des connaissances » (1998, p. 311). Il spécifie dans un autre texte que « ces problèmes, choisis de façon à ce que l'élève puisse les accepter doivent le faire agir, parler, réfléchir, évoluer de son propre mouvement. Entre le moment où l'élève accepte le problème comme sien et celui où il produit sa réponse, le maître se refuse à intervenir comme proposeur des connaissances qu'il veut voir apparaître » (Brousseau, 1986, p. 49).

En note de bas de page (*Ibid.*, p. 49), Brousseau explique pourquoi il a qualifié de telles situations d'« adidactiques » : « en ce sens que disparaît d'elle l'intention d'enseigner (elle est toujours spécifique d'un savoir) ». Il ajoute à ce propos qu'« une situation pédagogique non spécifique d'un savoir ne serait pas dite adidactique mais seulement non didactique ».

Dans son ouvrage de 2008, Schneider énumère ce qui, pour elle, caractérise une situation adidactique. Reprenons les points qui nous seront utiles dans l'analyse *a priori* du chapitre 4.

- La situation comporte « une question, un "problème" (au sens commun du terme) qui ne peuvent être résolus sans impliquer la construction d'un savoir, celui précisément visé par l'enseignement en cours » (p. 143).

- La situation « est susceptible d'être dévolue aux élèves » (p. 199), « le professeur se refusant à transmettre le savoir directement en abdiquant, pour un temps, de son intention d'enseigner » (p. 143). Ceci suppose « l'existence d'un milieu permettant à l'élève de se situer sans se référer aux attentes supposées du professeur. L'écueil majeur étant ce qu'on peut appeler les effets pervers du contrat didactique qui feraient prisonniers, tant le professeur que l'élève, d'un jeu de dupes dans lequel chacun des deux "négocierait" à la baisse le comportement attendu de l'autre » (p. 199).
- La situation « se doit de déboucher sur une phase d'institutionnalisation au cours de laquelle le professeur identifie, dans les activités de l'élève, "celles qui ont un intérêt, un statut culturel" » (p. 200).

L'auteur fait remarquer que ces caractéristiques sont nécessaires mais pas suffisantes en termes de bénéfice sur l'apprentissage des élèves (Schneider, 2008, p. 200), assertion à laquelle nous adhérons. Le travail à mener avec les élèves ne s'en tient effectivement pas à cette énumération.

2.1.2 Milieu

Poursuivons la présentation des différents termes par celle du « milieu ».

Brousseau appelle « milieu », dans une situation d'action, « tout ce qui agit sur l'élève ou ce sur quoi l'élève agit » (1998, p. 32). Il spécifie que « le milieu qu'il soit physique, social, culturel ou autre joue un rôle dans l'emploi et l'apprentissage des connaissances par l'enseignant et par l'élève, qu'on le sollicite ou non dans la relation didactique » (1988, p. 312).

En reprenant les propos de Conne, Dias (2008, p. 15) précise que l'enseignant fait partie de la situation en tant qu'élément du milieu, il ne peut enseigner sans interagir avec le milieu. Dias poursuit : « Cette conjecture nous permet de considérer que certaines interventions du professeur peuvent apparaître aux élèves comme une rétro-action du milieu, mais que cela est en lien avec la notion de contrat didactique au sein de la classe. Ainsi l'activité enseignante ne doit pas être considérée comme externe au processus d'apprentissage des élèves. ».

Nous reviendrons sur cette remarque de Dias à la section 4.3 du chapitre consacré à l'analyse *a priori*.

Bessot (2011, p. 34) propose une analyse intéressante à propos du milieu.

> La notion de milieu est incontournable pour comprendre et/ou provoquer l'apprentissage autonome de l'élève comme sujet dans une situation didactique : la non prise en compte du milieu dans l'analyse didactique revient à ignorer les *causes* de l'apprentissage de l'élève dans une situation.

Bloch (2005, p. 54) précise que la construction d'un milieu se fait par la détermination d'un choix de variables, de scénarios exploitables, de ce qui doit être joué effectivement et de ce qui peut être évoqué. Ces divers éléments seront développés au chapitre 4 après avoir donné un aperçu de la séquence, tout comme la description des deux niveaux de jeu que Bloch mentionne plus loin dans son texte. Elle montre l'importance d'un *milieu objectif* sur base du « jeu des envahisseurs », une situation fondamentale de la numération : « le premier niveau [de jeu] ne contient pas la connaissance visée : la fonction de ce jeu est donc d'installer la situation, et plus précisément le *milieu objectif*. Pour qu'un actant puisse jouer, il faut qu'il dispose de stratégies de base, celles qui vont lui permettre, dans le deuxième jeu, d'anticiper et de chercher les envahisseurs. Ceci ne veut évidemment pas dire que le milieu objectif est dépourvu de connaissances : il contient les connaissances *antérieures* des joueurs : celles qui leur permettent de s'engager dans le jeu. Dans une situation adidactique, le premier niveau de jeu ne doit pas exiger le recours à la connaissance visée afin que la situation soit bien une situation d'apprentissage de cette notion. Le deuxième niveau est celui qui contient la connaissance visée (en acte) comme nécessaire [. . .] » (Bloch, 2005, p. 94).

Dans la théorie des situations didactiques, Brousseau ajoute que « le *milieu* est le système antagoniste du système enseigné, ou plutôt, précédemment enseigné. » (1986, p. 89). Dias (2008, p. 49) précise que « l'adjectif d'antagoniste est choisi dans la volonté de montrer que, dans cet environnement, l'élève doit rencontrer des obstacles, ou pour le moins des résistances significatives ». Il spécifie que le milieu peut être antagoniste ou allié, « selon les choix didactiques et pédagogiques de celui qui enseigne, et selon les moments de l'enseignement. Dans un milieu allié [17] seule l'action est possible, dans un milieu antagoniste il y a rétroaction du milieu sur les actions du sujet. Dans une telle situation, l'élève agit sur le milieu grâce à ses connaissances, le milieu lui renvoie en retour des informations utiles à la résolution du questionnement inhérent à l'apprentissage » (*Ibid.*, p. 50).

Brousseau écrit encore : « L'élève apprend en s'adaptant à un milieu qui est facteur de contradictions, de difficultés, de déséquilibres, un peu comme le fait la société humaine. Ce savoir, fruit de l'adaptation de l'élève, se manifeste par des réponses nouvelles qui sont la preuve de l'apprentissage. » (1986, pp. 48-49). C'est notamment ce sur quoi la séquence didactique s'est centrée par la confrontation des situations de proportionnalité et de non-proportionnalité.

Dias complète ses propos : « La première condition permettant la qualification d'antagonisme est que le milieu doit être porteur de déséquilibres dans les rétro-actions qu'il fournit à l'activité de l'élève. Il faut entendre ici par déséquilibre un état provisoire de la pensée dû à la transformation des schèmes dans le processus d'accommodation (Piaget) qui se réalise contre des connaissances acquises auparavant. [. . .] C'est en présentant ces obstacles dans la situation que l'on provoquera l'adaptation de l'élève et par la même, la construction (appropriation) d'une connaissance. » (2008, p. 53).

Schneider (2008, p. 137) pointe encore une caractéristique importante d'un milieu antagoniste. Il permet en effet la neutralité de l'enseignant quand le milieu résiste

17. Margolinas C. (2002). Situations, milieux, connaissances, Analyse de l'activité du professeur. In *Actes de la XI^{e} école d'été de didactique des mathématiques*. La Pensée Sauvage.

à la première intuition de l'élève : « Ce milieu suffit, dans un premier temps, à assurer un "feedback" qui met en cause la première procédure proposée [...] ». C'est notamment sur cet aspect que la séquence repose, comme ce sera détaillé par la suite.

2.1.3 Variables didactiques

Il a été question ci-dessus de déterminer les variables didactiques pour construire le milieu. En effet, comme le dit DIAS, « le milieu est un système qui n'est pas neutre [...] il peut être ajusté grâce à des variables en fonction d'intentions d'enseignement » (2008, p. 50). Caractérisons ce qu'est une variable didactique.

ROBERT & *al.* (1999, p. 71) identifient une variable didactique à « un paramètre, numérique ou non, qui peut prendre des valeurs différentes (numériques ou autres), que l'enseignant peut choisir (sans changer le problème), et tel que différentes valeurs peuvent induire des procédures différentes chez les élèves ».

VERGNAUD mentionne à ce propos que « les procédures et les notions des enfants se forment en général pour des valeurs petites et entières ou pour des valeurs particulières des variables numériques ; le changement de valeur est de nature à faire échouer les procédures "locales" des élèves et à les obliger à élaborer des procédures plus puissantes » (1981b, p. 222).

Pour sa part, BLOCH fait remarquer que « dans l'organisation de la situation, certains choix se présentent comme des variables didactiques, dans la mesure où la détermination de ces paramètres change ce qui est à la charge des élèves, et le type de travail qu'ils seront amenés à faire [...] » (2005, p. 21). Ce sont tous ces choix que nous expliciterons à la section 4.4, dans l'analyse *a priori*.

Notons encore que, suivant les propos d'ARTIGUE (1988, p. 292), BROUSSEAU distingue dans sa thèse de 1986 les variables dites du problème des variables dites de situation reliées à l'organisation et à la gestion du milieu. Elle précise alors que les variables didactiques sont, parmi elles, celles dont la preuve de l'effet didactique a été attesté. C'est principalement de ces variables qu'il sera question dans le chapitre 4, même si nous nous attacherons également à détailler quelques contraintes organisationnelles.

2.1.4 Contrat didactique

Intéressons-nous maintenant à ce que BROUSSEAU dénomme « contrat didactique ».

Il définit le contrat didactique comme « la règle du jeu et la stratégie de la situation didactique. C'est le moyen qu'a le maître de la mettre en scène. [...] Le contrat didactique n'est pas un contrat pédagogique général. Il dépend étroitement des connaissances en jeu » (1986, p. 50). Il avait écrit précédemment, dans un autre article : « Dans une situation d'enseignement, préparée et réalisée par un maître, l'élève a en général pour tâche de résoudre le problème (mathématique) qui lui est présenté, mais l'accès à cette tâche se fait à travers une interprétation des questions posées, des informations fournies, des contraintes imposées qui sont des constantes de la façon d'enseigner du maître. Ces habitudes (spécifiques) du maître attendues par l'élève et les comportements de l'élève attendus par le maître, *c'est le contrat didactique.* » (Brousseau, 1980a, p. 181).

Vergnaud donne une définition du contrat didactique très semblable à celle de Brousseau. Le contrat didactique est pour lui « l'ensemble des attentes implicites qui règlent le fonctionnement de la classe et les rapports entre le maître et les élèves » (1981b, pp. 226-227).

On peut voir que les deux propos se rejoignent car les termes « interprétation » et habitudes et comportements « attendus » utilisés par Brousseau sont liés aux « attentes implicites » prises en compte par Vergnaud. Schneider écrit que ce caractère vient de l'objet du contrat didactique : « le savoir qui est, au départ, inconnu d'un des partenaires » (2008, p. 164).

Une autre citation de Brousseau mentionne ce caractère implicite : l'existence d'« un ensemble de règles le plus souvent implicites qui pèsent sur les élèves et sur l'enseignant, et qui conditionnent leur travail » (1989b, p. 58).

Dans le contrat didactique, on retrouve ainsi une part de la « relation qui détermine – explicitement pour une petite part, mais surtout implicitement – ce que chaque partenaire, l'enseignant et l'enseigné, a la responsabilité de gérer et dont il sera, d'une manière ou d'une autre, responsable devant l'autre. » (Brousseau, 1986, p. 51).

Relevons un paradoxe soulevé par Brousseau (1986, p. 66), tant du point de vue de l'enseignant que de celui de l'enseigné.

> Ce contrat didactique met donc le professeur devant une véritable injonction paradoxale : tout ce qu'il entreprend pour faire produire par l'élève les comportements qu'il attend, tend à priver ce dernier des conditions nécessaires à la compréhension et à l'apprentissage de la notion visée : si le maître dit ce qu'il veut, il ne peut plus l'obtenir. Mais l'élève est, lui aussi, devant une injonction paradoxale : s'il accepte que, selon le contrat, le maître lui enseigne les résultats, il ne les établit pas lui-même et donc il n'apprend pas de mathématiques, il ne se les approprie pas. Si, au contraire, il refuse toute information de la part du maître, alors, la relation didactique est rompue. Apprendre, implique, pour lui, qu'il accepte la relation didactique mais qu'il la considère comme provisoire et s'efforce de la rejeter.

Notons que cette conclusion est plus nuancée que celle de son texte de 1984 (p. 4) écrite d'une manière légèrement différente : « Apprendre implique pour [l'élève] [de] refuser le contrat mais aussi [d']accepter la prise en charge du problème. ». Il poursuivait alors en indiquant que l'apprentissage allait ainsi reposer « non pas sur le bon fonctionnement du contrat, mais sur ses ruptures ».

Un autre aspect du caractère paradoxal du contrat didactique est qu'il est « à la fois nécessaire et irrémédiablement illusoire », comme le déclare Brousseau dans la deuxième partie de son texte de 2010 (p. 16), écrite suite au cours donné en 1975.

Examinons à présent l'un des effets connus du contrat didactique. Une équipe de l'IREM de Grenoble a présenté à de jeunes élèves des problèmes tels que « sur un bateau, il y a 26 moutons et 10 chèvres. Quel est l'âge du capitaine ? ». Une très grande majorité des élèves interrogés répondent par un résultat issu d'une opération sur les deux nombres contenus dans l'énoncé. Brousseau remarque à ce propos qu'« ils font leur métier d'élèves : ils doivent répondre, et peut-être pensent-ils que la stupidité incombe à celui qui pose des questions idiotes, comme le dit le proverbe » (1989b, p. 58). En effet, lorsque l'équipe a interrogé les élèves par après, ceux-ci ont fait part de leur malaise vis-à-vis des questions posées. Près de la moitié des élèves les ont trouvées bizarres et même stupides « car l'âge du capitaine n'a rien à voir avec les moutons » (*Ibid.*, p. 58). Ce type de commentaire montre que les élèves ressentent donc apparemment une obligation de donner une réponse « mathématique » lorsqu'ils se trouvent face à un problème à résoudre en classe. Leur réponse serait peut-être toute autre si la question leur était posée en dehors d'un contexte scolaire.

Selon la classification de De Bock & *al.*, ce genre de questions fait partie des « unsolvable problems », tout comme les questions de la troisième famille, posées en test préliminaire (section 1.1.5). Précisons que si le taux de réponse cohérente (impossibilité de répondre à la question) est élevé pour une des questions, c'est notamment parce que nous avons pris la précaution, au début de la séance, de préciser aux élèves que le questionnaire contenait des questions sans réponse « mathématique », afin d'atténuer cet effet de contrat didactique.

Pour poursuivre cette section, intéressons-nous à certaines définitions de contrats spécifiques. Brousseau a répertorié de nombreux types de contrat (voir notamment 1995). Plusieurs d'entre eux nous intéressent pour l'analyse de notre séquence dans la suite du travail. Il s'agit, pour les deux premiers, de contrats que l'auteur caractérise de « fortement didactiques portant sur un savoir "nouveau" » dans le sens où « l'institution enseignante prend la responsabilité du résultat effectif de son action sur son élève » (Brousseau, 1995, pp. 21, 25).

> *Contrats d'apprentissages empiristes* : Dans ce cas la connaissance est supposée s'établir essentiellement par le contact avec le milieu auquel l'élève doit s'adapter. La responsabilité de l'apprentissage est renvoyée au milieu et à la nature.

> *Contrats constructivistes* : Situations non « naturelles ». Le professeur organise le milieu et délègue la responsabilité des acquisitions aux élèves. Ce milieu peut d'ailleurs être effectif ou fictif. Les savoirs (anciens) ne se manifestent que comme prérequis. Le recours à des phases adidactiques (d'action, de formulation ou de validation) pour faire créer diverses formes de connaissances est un exemple de ce contrat.

Les deux contrats suivants sont des contrats « basés sur la transformation des savoirs “anciens” » (Brousseau, 1995, pp. 26-27).

> *La révélation* : Le savoir ancien n'est évoqué, le plus souvent implicitement que pour servir de décor, de faire valoir, d'antinomie, au savoir nouveau et finalement être « péjoré » ou rejeté.
>
> *La reprise* : La forme ancienne est dans ce cas ouvertement mise en cause, dans sa forme, elle fait l'objet d'une formulation, ou d'une traduction, ou dans sa constitution même, elle est alors l'objet au moins d'un commentaire, souvent d'une explication, d'une remise en cause, d'une critique, ou même d'un rejet. La reprise place le savoir ancien dans une nouvelle dialectique.

Suite à la présentation des différents contrats, Brousseau nous dit que « la théorie des situations montre le caractère insuffisant de chacun de ces contrats pour construire à la fois un savoir canonique, les connaissances qui l'accompagnent et les pratiques qui caractérisent [sa] mise en œuvre, au cours de genèses souvent longues. L'enseignant, dans la relation didactique[,] se manifeste, localement, par le choix, la rupture et le remplacement des contrats suivant des indices et des stratégies de régulation qui échappent pour l'instant à nos moyens d'investigation » (1995, p. 26). Même s'il est difficile de percevoir distinctement les changements de contrats, nous tâcherons de définir, à la section 4.3.3, les différents contrats en jeu qui permettent de faire évoluer la séquence didactique proposée.

L'auteur insiste également sur la régulation des contrats « de façon à maintenir des équilibres et des conditions optimales et non pas à appliquer contre vents et marées une méthode, aussi sophistiquée soit elle » (Brousseau, 1995, p. 28).

Pour clôturer cette section sur le contrat didactique, remarquons que « l'analyse du contrat permet non seulement de déterminer si les conditions d'enseignement et d'apprentissage sont bien celles des situations adidactiques mais aussi d'analyser des leçons “ordinaires” qui échappent à ce modèle » (Schneider, 2008, p. 199) et que « tout ce qui est dit sur le contrat didactique n'est pas à prendre sur un mode moralisateur mais à penser dans le sens d'une contrainte inéluctable qui pèse sur le fonctionnement de toute institution didactique » (*Ibid.*, p. 182).

2.1.5 Dévolution

La notion de dévolution est centrale dans la théorie des situations didactiques. Introduisons-la à partir des propos de Brousseau (1988, p. 324) : « il a été envisagé de transformer le plus possible les situations d'enseignement en situations d'apprentissages. C'est dans le cadre de cette orientation intéressante que se déroulent les recherches sur l'acte qui consiste, pour le professeur, à se défaire de tout ou partie de sa responsabilité et à la faire accepter à l'élève ». À cela, il ajoute (à travers l'écrit de Bessot, 2011, p. 34) qu'« on ne peut pas enseigner si le sujet ne fonctionne pas de manière autonome à certains moments » [18].

Brousseau propose alors le raisonnement suivant qui aboutit à une définition du concept de dévolution (1998, p. 301).

> Pour qu'un enfant lise une situation comme nécessité indépendante de la volonté du maître, il faut une construction épistémologique cognitive intentionnelle. La résolution du problème est alors de la responsabilité de l'élève, il a la charge d'obtenir un certain résultat. Ce n'est pas si facile, il faut que l'élève ait un projet et accepte sa responsabilité. Notons qu'il ne suffit pas de « communiquer » un problème à un élève pour que ce problème devienne *son* problème et qu'il se sente seul responsable de le résoudre. Il ne suffit pas non plus que l'élève accepte cette responsabilité pour que le problème qu'il résout soit un problème « universel » dégagé de présupposés subjectifs. Nous appelons « dévolution » l'activité par laquelle le professeur cherche à atteindre ces deux résultats.

Plus succinctement, il donne la définition suivante qui nous paraît clairement donner en quelques mots toute la substance de cette notion : « La dévolution est l'acte par lequel l'enseignant fait accepter à l'élève la responsabilité d'une situation d'apprentissage (adidactique) ou d'un problème et accepte lui-même les conséquences de ce transfert. » (Brousseau, 1988, p. 325).

Dans la dévolution, Schneider voit « une forme d'abdication du professeur par rapport à sa tâche d'enseignement : celui-ci abandonne donc momentanément et en apparence du moins le rôle qu'on lui prête » (2008, p. 164). Elle dit ainsi que « la dévolution d'une situation adidactique est perçue comme une "rupture de contrat" » (*Ibid.*, p. 163). Notons que, comme l'a souligné Brousseau (1988, p. 322), « les moments de rupture permettent la mise en évidence expérimentale du contrat didactique ».

On peut dire que le contrat didactique consiste ainsi à « provoquer chez l'élève les apprentissages projetés en le plaçant dans des situations appropriées auxquelles il va répondre "spontanément" par des adaptations » (Brousseau, 1988, p. 323). Schneider précise alors le rôle de l'enseignant : « Il s'efface se contentant de faciliter la réalisation matérielle des tâches ou les échanges entre élèves comme un "bon" animateur, au sens de la dynamique de groupes : il s'en tient strictement à une directivité de procédure et évite toute intervention de fond. Mais cette démarche de dévolution tournerait court si les situations n'enclenchaient pas la construction d'un savoir précis qui constitue une solution optimale si ce n'est incontournable au problème posé [...] » (2008, pp. 143-144).

Une autre citation de Brousseau permet encore d'affiner la notion de dévolution : « Théoriquement, le passage de l'information et de la consigne du professeur à la réponse attendue, devrait exiger de la part de l'élève la mise en œuvre de la connaissance visée, qu'elle soit en cours d'apprentissage ou déjà connue. [...] Le maître doit

18. Brousseau G. (1993). *Connaissances et savoirs.* Entretien non publié, p. 8.

donc effectuer non la communication d'une connaissance, mais la dévolution du bon problème. Si cette dévolution s'opère, l'élève entre dans le jeu et s'il finit par gagner, l'apprentissage s'opère. » (1986, p. 51).

Comme cela a été spécifié dans le paradoxe relevé dans la section précédente, « pour permettre ce fonctionnement, l'enseignant ne peut pas dire, à l'avance, à l'élève exactement quelle réponse il attend de lui ; il doit donc faire en sorte que ce dernier accepte la responsabilité de chercher à résoudre des problèmes ou des exercices dont il ignore la réponse » (Brousseau, 1988, p. 325 : corollaire 1). On peut alors regarder ce paradoxe sous l'angle de la dévolution : « Le maître veut que l'élève ne tienne la réponse que de lui-même mais en même temps il veut, il a le devoir social de vouloir, que l'élève donne la bonne réponse. Il doit donc communiquer ce savoir sans avoir à le dévoiler, ce qui [est] incompatible avec une relation contractuelle. » (*Ibid.*, p. 325). On en vient ainsi à la rupture de contrat qui est nécessaire à la dévolution d'un problème.

La dévolution est étroitement liée au milieu. En effet, comme Schneider l'écrit (2008, p. 144), « on s'en doute, la dévolution d'une question à des élèves ne va pas de soi. Outre le caractère fondamental de la question, le succès de l'entreprise est lié à l'existence d'un milieu [...] ». Citons la déclaration 2 de Brousseau (1988, p. 325) pour compléter cette idée.

> L'élève acquiert ces connaissances [productions libres] par diverses formes d'adaptation aux contraintes de son environnement. En situation scolaire l'enseignant organise et constitue un milieu, par exemple un problème, qui révèle plus ou moins clairement son intention d'enseigner un certain savoir à l'élève mais qui dissimule suffisamment ce savoir et la réponse attendue pour que l'élève ne puisse les obtenir que par une adaptation personnelle au problème proposé. La valeur des connaissances acquises ainsi dépend de la qualité du milieu comme instigateur d'un fonctionnement "réel", culturel du savoir, donc du degré de refoulement adidactique obtenu.

Cette déclaration permet de se rendre compte de l'importance de l'articulation des différents concepts issus de la théorie des situations didactiques.

2.1.6 Institutionnalisation

Le concept d'institutionnalisation est étroitement lié à celui de dévolution. Avant de montrer cette interaction entre ces deux notions, définissons ce qu'est l'institutionnalisation à partir des propos de Brousseau (1998, p. 311).

> La prise en compte « officielle » par l'élève de l'objet de la connaissance et par le maître, de l'apprentissage de l'élève est un phénomène social très important et une phase essentielle du processus didactique : cette double reconnaissance est l'objet de l'institutionnalisation.

Cette institutionnalisation est nécessaire, surtout lorsque nous tenons compte de la remarque de Schneider qui souligne que l'enseignant apparaît aux yeux des élèves

« comme le seul garant pouvant attester que l'apprentissage visé est bien réalisé et que, par conséquent, l'enseignement a été effectif. Lui seul peut fournir cette confirmation, les élèves ignorant le but qu'il leur est assigné, ne fût-ce qu'à cause des options didactiques prises » (2008, p. 154).

Brousseau montre la relation entre institutionnalisation et dévolution : « Dans la dévolution, le maître met l'élève en situation adidactique ou pseudo adidactique. Dans l'institutionnalisation, il définit les rapports que peuvent avoir les comportements ou les productions "libres" de l'élève avec le savoir culturel ou scientifique et avec le projet didactique : il donne une lecture de ces activités et leur donne un statut. » (1986, p. 88).

Les propos ci-dessus confirment que « le processus d'institutionnalisation est [...] bien l'indice qu'un enjeu de savoir est visé par la (les) situation adidactique. Faisant pendant à la dévolution, ce processus signe aussi les intentions didactiques dont la situation adidactique est porteuse, même si, au cours de celle-ci, le professeur renonce en apparence à ces intentions » (Schneider, 2008, p. 200).

Ce lien entre dévolution et institutionnalisation nous permet de distinguer savoirs et connaissances. Schneider utilise les définitions de Rouchier [19] pour identifier les connaissances aux « réponses engagées par les élèves pour résoudre les problèmes qui leur sont dévolus » et les savoirs à « celles de ces réponses qui sont institutionnalisées au sens qui vient d'être précisé » (Schneider, 2008, p. 154). Bessot note bien que « l'intervention didactique du professeur est nécessaire pour que des connaissances locales puissent être converties en connaissances partagées, réutilisables, légitimées institutionnellement, c'est-à-dire en savoirs » (2011, p. 34). Nous montrerons à ce sujet, dans le chapitre consacré à l'analyse *a priori*, comment nous envisageons de faire évoluer les connaissances des élèves vers plus de conformité au savoir visé.

Les propos de Schneider (2008, p. 155) reformulent le lien qui unit dévolution et institutionnalisation.

> Les processus de dévolution et d'institutionnalisation apparaissent donc comme deux démarches symétriques qui forment ensemble une boucle partant des savoirs pour y revenir. Par le processus de dévolution, le professeur aménage les savoirs pour que leur construction soit à portée des élèves ; par le processus d'institutionnalisation, il reconnaît certaines des connaissances engagées par les élèves comme des savoirs.

Cette caractérisation est entièrement en adéquation avec la définition donnée par Brousseau au début de cette section, dans laquelle il mentionne la reconnaissance du savoir par l'élève et celle de l'apprentissage de l'élève par l'enseignant.

19. Rouchier A. (1991). *Étude de la conceptualisation dans le système didactique en mathématiques et informatiques élémentaires : proportionnalité, structures itérativo-récursives, institutionnalisation.* Thèse de doctorat, Université d'Orléans.

2.1.7 Obstacles

Une autre notion importante dans la théorie des situations didactiques, et étroitement liée aux précédentes, est celle d'obstacle, directement reliée à celle d'erreur.

Brousseau indique à ce sujet que « l'erreur et l'échec n'ont pas le rôle simplifié qu'on veut parfois leur faire jouer. L'erreur n'est pas seulement l'effet de l'ignorance, de l'incertitude, du hasard que l'on croit dans les théories empiriques ou béhavioristes de l'apprentissage, mais l'effet d'une connaissance antérieure, qui avait son intérêt, ses succès, mais qui, maintenant, se révèle fausse, ou simplement inadaptée. Les erreurs de ce type ne sont pas erratiques et imprévisibles, elles sont constituées en obstacles. Aussi bien dans le fonctionnement du maître que dans celui de l'élève, l'erreur est constitutive du sens de la connaissance acquise » (1976, p. 104).

En d'autres termes, Schneider (2008, pp. 229-230) établit que « les erreurs concernées ici ne sont donc pas des erreurs aléatoires, des "distractions de l'esprit fatigué" comme dirait Bachelard [20]. Ce sont des erreurs récurrentes, persistantes qui semblent s'expliquer par une "raison" plus profonde ».

Il est ainsi primordial de s'intéresser aux obstacles à franchir dans l'élaboration d'une séquence didactique. C'est l'idée que Brousseau met en avant dans la citation cidessous (1976, pp. 104-105).

> [...] l'intérêt d'un problème va dépendre essentiellement de ce que l'élève y engagera, de ce qu'il y mettra à l'épreuve, de ce qu'il y investira, de l'importance pour lui des rejets qu'il sera conduit à faire, et des conséquences prévisibles de ces rejets, de la fréquence avec laquelle il risquerait de commettre ces erreurs rejetées et de leur importance. Ainsi les problèmes les plus intéressants seront ceux qui permettront de franchir un véritable obstacle.

Comme le signale Schneider (2008, pp. 261-262), « la notion d'obstacle épistémologique doit son origine à Bachelard qui l'a définie dans le contexte des sciences expérimentales [...] Brousseau a transposé cette notion à la didactique des mathématiques ».

Voici comment Brousseau caractérise un obstacle en quelques mots : il relève qu'« un obstacle se manifeste [...] par des erreurs, mais ces erreurs ne sont pas dues au hasard. Fugaces, erratiques, elles sont reproductibles, persistantes. De plus ces erreurs, chez un même sujet, sont liées entre elles par une source commune, une manière de connaître, une conception caractéristique, cohérente, sinon correcte, ancienne et qui a réussi dans tout un domaine d'actions. [...] Il arrive [que ces erreurs] ne disparaissent pas radicalement, d'un seul coup, qu'elles résistent, qu'elles persistent puis resurgissent, se manifestent longtemps après que le sujet ait rejeté de son système cognitif conscient le modèle défectueux » (1976, pp. 105-106).

Il poursuit alors par une déclaration (*Ibid.*, p. 106) qui donne toute son importance à la construction de la séquence que nous avons mise en place : « le franchissement

20. Bachelard G. (rééd. 1980). *La formation de l'esprit scientifique*. Paris : J. Vrin.

d'un obstacle exige un travail de même nature que la mise en place d'une connaissance, c'est-à-dire des interactions [répétées], dialectiques de l'élève avec l'objet de sa connaissance. Cette remarque est fondamentale pour distinguer ce qu'est un vrai problème ; c'est une situation qui permet cette dialectique et qui la motive ». Plus loin dans son texte, Brousseau explique comment organiser ce franchissement, ce qui est au centre de l'étude réalisée pour l'élaboration de notre séquence didactique qui a entre autres pour objectif le franchissement de l'obstacle qu'est la prégnance de la linéarité (*Ibid.*, p. 109).

> Organiser le franchissement d'un obstacle consistera à proposer une situation susceptible d'évoluer et de faire évoluer l'élève selon une dialectique convenable. Il s'agira, non pas de communiquer les informations qu'on veut enseigner, mais de trouver une situation dans laquelle elles sont les seules à être satisfaisantes ou optimales – parmi celles auxquelles elles s'opposent – pour obtenir un résultat dans lequel l'élève s'est investi. Cela ne suffit pas : il faudra que cette situation permette d'emblée la construction d'une première solution ou d'une tentative où l'élève investira sa connaissance du moment. Si cette tentative échoue ou ne convient pas bien, la situation doit néanmoins renvoyer une situation nouvelle modifiée par cet échec de façon intelligible mais intrinsèque, c'est-à-dire ne dépendant pas de façon arbitraire des finalités du maître.

Pour compléter, après avoir noté qu'« on peut regarder les situations adidactiques comme une occasion pour l'élève de rencontrer un obstacle donné et de le franchir », Schneider ajoute : « Sans doute peut-on supposer [...] que l'intérêt majeur de la dévolution des questions inhérentes à ces situations est de permettre aux élèves de faire leur deuil personnel d'une telle connaissance qui a pu avoir son efficacité mais qui devient inopérationnelle en regard d'un nouveau problème posé. » (2008, pp. 152, 272).

La prégnance de la linéarité chez les élèves les amène à utiliser le modèle proportionnel dans des situations inappropriées. Nous sommes pleinement dans le type d'erreur relevé par Brousseau ou Schneider. Nous détaillerons plus amplement cette position dans le chapitre 4.

En 1983, Brousseau a complété par des commentaires et conclusions un de ses articles écrit en 1976. Il y reprend « les conditions que devrait satisfaire une connaissance pour pouvoir être déclarée un "obstacle" au sens de Bachelard » et y explique « l'intérêt de ce concept qu'il convient de distinguer de celui de "difficulté" » (Brousseau, 1998, p. 134).

> Très souvent, c'est parmi les « difficultés » qu'il faut chercher les indices d'un obstacle mais pour satisfaire la première condition qui dit qu'un *obstacle est une connaissance*, le chercheur devra faire un effort pour reformuler la « difficulté » qu'il étudie en termes, non pas de manque de connaissance, mais de connaissance (fausse, voire incomplète...). (*Ibid.*, p. 135)

> La connaissance obstacle a *son domaine de validité et d'efficacité*, et donc aussi un domaine où elle est *a priori* pertinente mais où elle se révèle fausse, inefficace, source d'erreurs, etc. (*Ibid.*, p. 136)

> C'est le sens de la troisième condition [*un obstacle résiste et reparaît*] qui stipule que l'attestation des résistances à la mise en place et au rejet d'une connaissance est indispensable pour établir son caractère d'obstacle. (*Ibid.*, p. 137)

> L'explication des résistances est le cœur de la recherche des obstacles épistémologiques [...] Cette recherche est toutefois facilitée dans le cas d'un véritable obstacle par le fait qu'*un obstacle épistémologique est constitutif de la connaissance achevée* [*du savoir*], en ce sens que son rejet doit finalement être incontournablement explicité, et par conséquent qu'il laisse des traces, parfois profondes dans le système des connaissances [...] Dans la mesure où la connaissance-obstacle est constitutive du savoir, où elle est présente dans les modèles spontanés des élèves, et dans la mesure où un traitement inadéquat dans l'enseignement entraîne des erreurs répétées et dommageables, il devient indispensable de la reconnaître et de la rejeter avec les élèves. (*Ibid.*, p. 140)

La section 4.2.2 du chapitre consacré à l'analyse *a priori* s'attache à l'étude de ces quatre conditions, mais aussi à la caractérisation du type d'obstacle, étant donné que Brousseau en distingue trois types différents, en fonction de leur origine (1976, p. 108).

- « Les obstacles d'origine ontogénique sont ceux qui surviennent du fait des limitations (neurophysiologiques entre autres) du sujet à un moment de son développement : il développe des connaissances appropriées à ses moyens et à ses buts. »
- « Les obstacles d'origine didactique sont ceux qui semblent ne dépendre que d'un choix ou d'un projet du système éducatif. »
- « Les obstacles d'origine proprement épistémologique sont ceux auxquels on ne peut, ni ne doit échapper, du fait même de leur rôle constitutif dans la connaissance visée. »

Schneider (2008 p. 210) précise que « les obstacles ontogéniques font référence aux recherches d'épistémologie génétique de Piaget qui portent sur le développement intellectuel des enfants et des adolescents ». Elle pointe également le fait que, « des obstacles ontogéniques aux obstacles didactiques, l'accent se déplace des élèves en développement intellectuel sur les savoirs mathématiques visés ou plus précisément leur transposition didactique qui serait source des difficultés d'apprentissage » (*Ibid.*, p. 219). De leur côté, « les obstacles épistémologiques mettent l'accent sur les difficultés d'apprentissage qui semblent inhérentes aux savoirs eux-mêmes. Les obstacles didactiques le font aussi tout en insistant sur le fait que ces difficultés pourraient s'atténuer ou s'aggraver sous l'effet de l'enseignement, éventuellement en être un pur produit » (*Ibid.*, p. 271).

On voit déjà ici que la frontière peut être mince pour qualifier un obstacle comme étant didactique ou épistémologique, ce à quoi nous nous intéresserons à la section 4.2.2.

Schneider remarque à ce propos qu'« il n'est pas rare de pouvoir interpréter la même erreur à la fois en termes d'obstacle didactique et en termes d'obstacle épistémologique » (2008, p. 266). Reprenons ci-dessous la citation dans laquelle elle s'explique (*Ibid.*, p. 267).

> C'est que la distinction est ténue entre les obstacles didactiques et les obstacles épistémologiques qui peuvent avoir la même apparence, se différenciant surtout par leur origine : « Un *obstacle didactique* est un obstacle qui a sa source dans la transposition didactique effectuée en vue de l'enseignement d'un certain contenu. Il a les mêmes caractères qu'un obstacle épistémologique, sauf qu'il peut être éliminé en agissant sur les situations d'enseignement proposées à l'élève. C'est un obstacle qui tient à des "variables de commande" dans une situation didactique, c'est-à-dire à des variables sur lesquelles l'enseignant peut agir, faisant ainsi changer le comportement de l'élève » (Bouazzaoui, 1988)[21]. Ce qui n'empêche qu'un obstacle épistémologique non « traité » devient en fait un obstacle didactique dans la mesure où l'enseignement tel qu'il est organisé n'aurait pas favorisé, chez les élèves, le franchissement de l'obstacle en question.

Un même obstacle peut avoir ainsi plusieurs origines, ce qui est le cas de la prégnance de la linéarité comme nous l'expliquerons à la section 4.2.2.

2.1.8 Action-formulation-validation

Il n'a que rapidement été évoqué les phases d'action, de formulation et de validation jusqu'ici or elles ont une place importante dans la théorie des situations didactiques. Ce sont les trois phases par lesquelles les élèves doivent passer lors de leur raisonnement.

Voici une première définition de chacun de ces termes.

> La succession d'interactions entre l'élève et le milieu constitue ce que nous appelons une « dialectique de l'action ». (Brousseau, 1998, p. 33)

> Une dialectique de la formulation consisterait à mettre au point progressivement un langage que tout le monde comprenne et qui prenne en compte les objets et les relations pertinentes de la situation de façon adéquate (c'est-à-dire en permettant les raisonnements utiles et les actions). (*Ibid.*, p. 36)

21. El Bouazzaoui H. (1988). *Conceptions des élèves et des professeurs à propos de la notion de continuité d'une fonction.* Thèse de doctorat, Université de Bordeaux I.

> [Dans une situation didactique de la validation,] l'enfant doit faire des déclarations [...] Mais ces déclarations doivent être soumises à un jugement de la part de l'interlocuteur [...] Ils doivent être donc tous les deux dans des positions *a priori* symétriques [...] Une dialectique de la validation pourra comporter diverses dialectiques particulières de l'action, ou de la formulation [...] Il est clair de toute façon qu'une dialectique de la validation est elle-même une dialectique de la formulation donc une dialectique de l'action. (*Ibid.*, pp. 40, 42)

Dans une dialectique de validation, il est question de la position symétrique de l'élève et de son interlocuteur. Précisons, suivant les propos de Schneider (2008, p. 141) qu'« il n'est pas exclu que le professeur joue le rôle d'interlocuteur pourvu qu'il sache faire momentanément abstraction de ses connaissances et donc de ne pas en jouer comme d'un argument d'autorité. Mais bien sûr, les partenaires privilégiés d'un élève sont ses propres pairs et, dans cette dynamique, le milieu matériel lui-même joue un rôle important [...] ». Nous verrons dans la deuxième partie de la thèse que le matériel a effectivement une place fondamentale dans la phase de validation de notre séquence.

Poursuivons avec les questions attachées aux définitions de ces trois dialectiques communiquées au début de cette section (Brousseau, 1998, pp. 127-128).

> *Questions de validation* : L'élève doit établir la validité d'une assertion, il doit s'adresser en tant que sujet à un autre sujet susceptible d'accepter ou de refuser ses assertions, de lui demander d'administrer des preuves de ce qu'il avance, de lui opposer d'autres assertions. Ces échanges contribuent à faire expliciter les théories mathématiques mais aussi à mettre en place les mathématiques en tant que moyen d'éprouver celles que l'on conçoit.
>
> *Questions de formulation* : Pour ses démarches de validation, la pensée doit s'appuyer sur des formulations préalables, même s'il faut pour cela les modifier.
>
> *Questions d'action* : [Les questions d'action] ou de décision mathématique sont celles où le seul critère est l'adéquation de la décision – le système d'élaboration de cette décision peut rester totalement implicite ainsi que sa justification. Il n'y a à ce sujet aucune contrainte ni de formulation ni de validation. C'est la dialectique la plus générale, les autres n'en sont que des cas particuliers. Elle aboutit à la construction chez le sujet de régularités, de schémas, de modèles d'action, le plus souvent inconscients ou implicites.

Remarquons que Brousseau définit cette fois les trois phases dans l'ordre inverse afin de montrer la dépendance qui existe entre les questions de validation, de formulation et celles d'action. Il ajoute d'ailleurs : « Bien sûr, aucune de ces dialectiques n'est indépendante des autres, au contraire. La formulation est souvent facilitée s'il existe un modèle implicite d'action : le sujet sait mieux formuler un problème qu'il a su résoudre. L'action est facilitée par une formulation convenable [...] L'action fournit un type de validation implicite fondamental et la formulation un autre... Mais inversement, chaque domaine peut faire obstacle à un progrès dans les autres. Certaines choses se font mieux qu'elles ne se disent. » (*Ibid.*, p. 128).

Les propos de DIAS (2008, pp. 46-47) fournissent un éclairage supplémentaire pour la compréhension des trois phases. La « phase d'action peut être vécue par les élèves comme une rencontre avec l'incertitude et le doute, chaque opération engagée s'inscrit dans un dialogue hypothétique avec les objets d'un milieu objectif. [...] La situation de formulation met en avant la communication entre les *joueurs* rendue nécessaire par la résolution des problèmes rencontrés. Tout se passe comme si plusieurs individus construisaient des expériences parfois similaires et parfois différentes dans un même milieu. Toute opération passe peu à peu sous le contrôle de l'ensemble des expérimentateurs, qui pour interpréter les réponses du milieu doivent formuler des connaissances en cours d'acquisition afin d'argumenter des choix d'action. [...] La situation de validation est dédiée à l'établissement de théorèmes consécutivement à l'énonciation de conjectures, de leur discussion par rapport à la vérité et de leur acceptation par la communauté des joueurs ». Rappelons que cette dernière phase reste à un niveau entre pairs. C'est dans la phase d'institutionnalisation que l'enseignant aura un rôle à jouer.

Nous avons mis au point la séquence didactique proposée avec l'intention d'inciter les élèves à passer par plusieurs phases d'action, de formulation et de validation. Dans le chapitre 5 consacré à l'analyse *a posteriori*, nous rendons compte de ce qu'il en a été de manière effective.

2.2 Ingénierie didactique

Après avoir exposé différents éléments de la théorie des situations didactiques qui nous ont guidés lors de l'élaboration de l'analyse *a priori* de la séquence didactique (présentée au quatrième chapitre de cette thèse), nous consacrons cette section à l'ingénierie didactique. La recherche s'est basée sur cette méthodologie. Notons que, comme nous l'avons évoqué auparavant, elle est fortement imprégnée de la théorie des situations didactiques de BROUSSEAU.

À l'interface de la recherche et de l'enseignement (comme l'indique PERRIN dans le titre de son article, 2011), l'ingénierie didactique se place « dans le cadre de l'évolution des recherches en didactiques des mathématiques depuis l'école d'été de 1982 où pour la première fois la question de la diffusion des produits de la recherche a été posée. [...] C'est en effet au travers du COREM [Centre d'Observation et de Recherche sur l'Enseignement des Mathématiques], conçu par Guy Brousseau à la fin des années soixante que la théorie des situations didactiques s'est construite dans un aller-et-retour constant en relation avec les ingénieries didactiques construites, expérimentées, observées et analysées » (MARGOLINAS & *al.*, 2011, p. 12).

ARTIGUE note qu'« à la fois source de constructions théoriques majeures et moyen de les mettre à l'épreuve, la notion d'ingénierie didactique a aussi porté une certaine vision de la diffusion des résultats de la recherche et de l'action didactique » (2011, p. 15). Elle souligne également l'évolution de la méthodologie d'ingénierie didactique, notamment en fonction des cadres théoriques auxquels elle s'est associée. Nous nous consacrons pour notre part à l'ingénierie didactique portée par la théorie des situations didactiques de Brousseau.

Perrin (2011, p. 59) est d'avis que l'ingénierie didactique « est plus qu'une méthodologie de recherche : on vise aussi une transposition didactique viable dans l'enseignement ordinaire. C'est-à-dire que l'ingénierie didactique comme produit est aussi importante que comme méthode ». Douady nous permet d'aller encore un peu plus loin : « L'élaboration d'un problème est un *pas* d'une ingénierie didactique. Dans ce contexte, le terme d'*ingénierie didactique* désigne un ensemble de séquences de classe conçues, organisées et articulées dans le temps de façon cohérente par un *maître-ingénieur* pour réaliser un projet d'apprentissage pour une certaine population d'élèves [...] Ainsi, l'ingénierie didactique est à la fois un *produit*, résultat d'une analyse *a priori*, et un *processus* au cours duquel le maître met en œuvre le produit en l'adaptant le cas échéant selon la dynamique de la classe. » (1994, p. 37).

Perrin souligne que l'ingénierie didactique « partage certaines caractéristiques de la recherche-action dans la mesure où elle prend en charge la mise en œuvre de situations dans des classes et où elle est amenée à en décrire le déroulement mais elle s'en démarque par le degré de généralité que la recherche qui l'a produite veut donner à son discours : celui-ci engage une responsabilité scientifique au lieu de laisser à l'enseignant qui les utilise toute la responsabilité de l'usage des situations qu'elle produit » (2011, p. 65).

Perrin nous donne alors une définition de l'ingénierie didactique à laquelle nous adhérons pleinement (*Ibid.*, p. 70).

> Nous parlerons d'ingénierie didactique si, dans le cadre d'une recherche, il y a construction et mise en œuvre dans une (ou plusieurs) classe(s), dans le temps scolaire d'une suite de séances et s'il y a un contrôle théorique de la construction et de la réalisation de ces séances. Le cadre théorique est mis à l'épreuve en même temps que les situations élaborées ainsi que leur réalisation.

Cette définition de Perrin correspond tout à fait aux deux principales caractéristiques relevées par Artigue (2011, p. 20) que nous reprenons ci-dessous étant donné leur pleine corrélation avec notre travail :

- « être une méthodologie basée sur des réalisations didactiques en classes, c'est-à-dire sur la conception, la réalisation, l'observation et l'analyse de séquences d'enseignement,
- être une méthodologie dont la validation est essentiellement interne, fondée sur la confrontation entre analyse *a priori* et analyse *a posteriori* (et non externe basée sur la comparaison des performances de groupes expérimentaux et témoins comme c'est le cas dans de nombreux travaux de didactique de l'époque, à l'étranger notamment) ».

Les propos de BESSOT résument clairement les idées qui régissent cette méthodologie : « L'ingénierie est donc une méthodologie pour faire apparaître des phénomènes didactiques mais aussi pour étudier et faire évoluer l'enseignement ordinaire. » (2011, p. 30). Elle poursuit : « dans la théorie des situations, il n'y a pas de séparation entre théorie, observation et pratique mais au contraire constante dialectique. Il n'y a pas d'un côté une théorie et de l'autre son application. L'observation des pratiques dans les ingénieries didactiques a même la primauté sur la théorie, au sens où certains résultats des ingénieries didactiques apparaissent comme des candidats à être des concepts théoriques : ils doivent alors être investis dans des situations pour être mis à l'épreuve » (*Ibid.*, p. 31). Nous verrons en effet que, suite à l'analyse *a posteriori*, certaines observations ont transformé les éléments de l'analyse *a priori* de départ qui a alors été repensée et expérimentée à nouveau. BESSOT complète encore ses propos : « La théorie est alors l'instrument de contrôle de la consistance des résultats afin d'éliminer les contradictions, non pas entre théorie et pratique, mais dans l'interprétation de ce qui est observé, entre le nécessaire et le contingent » (*Ibid.*, p. 32). C'est l'exercice auquel nous nous attellerons dans la deuxième partie de la thèse.

2.2.1 Les quatre phases d'une ingénierie didactique

Les quatre phases de ce processus méthodologique sont distinguées par ARTIGUE (1988, pp. 287-298). La première phase concerne les analyses préalables, la deuxième reprend la conception et l'analyse *a priori* des situations didactiques de l'ingénierie, la troisième est celle de l'expérimentation et la dernière correspond à l'analyse *a posteriori* ainsi qu'à l'évaluation.

Ces quatre phases sont brièvement décrites dans cette section. Les analyses préalables ont été explicitées dans le premier chapitre, la conception dont il est question dans la deuxième phase fait l'objet du chapitre suivant et l'analyse *a priori* de cette même phase se trouve dans le chapitre 4 qui lui est dédié. Le détail des expérimentations mentionnées dans la troisième phase ainsi que toute l'analyse *a posteriori* constituent le chapitre 5. Les deux dernières phases étant fortement liées, elles sont présentées ensemble ci-dessous.

Phase 1 : analyses préalables

Reprenons la liste dressée par ARTIGUE, dans son article de 1988 (pp. 287-288), des différentes analyses préliminaires à réaliser dans le cadre de la première phase : « Dans une recherche d'ingénierie didactique, la phase de conception s'effectue en s'appuyant sur un cadre théorique didactique général et sur les connaissances didactiques déjà acquises dans le domaine étudié, mais aussi en s'appuyant sur un certain nombre d'analyses préliminaires, le plus souvent :
– l'analyse épistémologique des contenus visés par l'enseignement,
– l'analyse de l'enseignement usuel et de ses effets,

– l'analyse des conceptions des élèves, des difficultés et obstacles qui marquent leur évolution,
– l'analyse du champ de contraintes dans lequel va se situer la réalisation didactique effective,
– et bien sûr en prenant en compte les objectifs spécifiques de la recherche. »

L'auteur précise que « les travaux réalisés par le chercheur pour servir de base à la conception de l'ingénierie, sont repris et approfondis au fil des différentes phases du travail, en fonction des besoins ressentis, et ils ne sont donc préalables qu'à un premier niveau d'élaboration » (*Ibid.*, p. 288). Elle indique également que ces différentes composantes d'analyses n'interviennent pas toutes de façon explicite.

En effet, la plupart de ces analyses se trouvent dans le premier chapitre de cette thèse, mais certains points ne sont développés que dans la suite. C'est notamment le cas de l'analyse du champ des contraintes (abordée dans le chapitre suivant et étayée dans le quatrième chapitre) ou de l'analyse de l'enseignement usuel et de ses effets qui intervient un peu plus loin.

Phase 2 : conception et analyse *a priori*

Avant d'expérimenter une séquence didactique, il est indispensable d'en faire une analyse *a priori* détaillée. C'est ce qui est souligné par Artigue lorsqu'elle précise, à propos de la deuxième phase de l'ingénierie didactique, qu'« une des originalités de la méthode d'ingénierie didactique [...] réside dans son mode de validation, essentiellement interne. C'est dès la phase de conception, via l'analyse *a priori* des situations didactiques de l'ingénierie, étroitement liée à la conception locale de cette dernière, que ce processus de validation va s'engager » (*Ibid.*, p. 293).

Ainsi, l'objectif de l'analyse *a priori* selon Artigue (*Ibid.*, p. 294) est de « déterminer en quoi les choix effectués permettent de contrôler les comportements des élèves et leur sens. Pour ce, elle va se fonder sur des hypothèses et ce sont ces hypothèses dont la validation sera, en principe, indirectement en jeu, dans la confrontation opérée dans la quatrième phase entre analyse *a priori* et analyse *a posteriori*. Traditionnellement, cette analyse qui comporte une partie descriptive et une partie prédictive est une analyse centrée sur les caractéristiques d'une situation adidactique que l'on a voulu constituer et dont on va chercher à faire la dévolution aux élèves :
– on décrit les choix effectués au niveau local (en les rapportant éventuellement à des choix globaux) et les caractéristiques de la situation adidactique qui en découlent,
– on analyse quel peut être l'enjeu de cette situation pour l'élève, en fonction en particulier des possibilités d'action, de choix, de décision, de contrôle et de validation dont il dispose, une fois opérée la dévolution, dans un fonctionnement quasi isolé du maître,
– on prévoit des champs de comportements possibles et on essaie de montrer en quoi l'analyse effectuée permet de contrôler leur sens et d'assurer en particulier que les comportements attendus, s'ils interviennent, résulteront bien de la mise en œuvre de la connaissance visée par l'apprentissage ».

Comme signalé plus haut, l'entièreté du chapitre 4 est consacrée à cette deuxième phase d'analyse *a priori*, dans laquelle le soin a été pris de développer chacun des points relevés ci-dessus par Artigue.

Phase 3 : expérimentation ; phase 4 : analyse *a posteriori* et validation

Dans son article de 1988, Artigue ne développe pas du tout la troisième phase qu'elle qualifie de classique. Elle détaille par contre la quatrième phase qui est celle de la validation via l'analyse *a posteriori*, qui s'appuie sur les données recueillies lors de l'expérimentation. Elle note qu'il s'agit des observations réalisées lors des séances d'enseignement et des productions d'élèves mais qu'elles sont souvent complétées par « des données obtenues par l'utilisation de méthodologies externes : questionnaires, entretiens individuels ou en petits groupes, réalisés à divers moments de l'enseignement ou à son issue » (*Ibid.*, p. 297).

Notre analyse *a posteriori* se base presqu'exclusivement sur les nombreuses expérimentations qui ont été menées. Les questionnaires dont il est question dans la troisième partie de la thèse sont d'un autre type et n'interviennent pas dans la validation interne. Par contre, plusieurs échanges informels, avec les enseignants des classes dans lesquelles ont été menées les expérimentations, ont contribué à l'analyse *a posteriori*.

Comme Artigue le soulève, « c'est sur la confrontation des deux analyses : analyse *a priori* et analyse *a posteriori* que se fonde essentiellement la validation des hypothèses engagées dans la recherche » (*Ibid.*, p. 297). Elle précise que « le processus de validation interne qui est ici en jeu, ne tombe certes pas dans le piège usuel des validations statistiques associées à des expérimentations en classe qui consiste à se fonder implicitement sur le principe que les différences mesurables constatées sont liées aux variables de commande sur lesquelles on a joué pour différencier classes expérimentales et classes témoins. Il n'est pas pour autant sans poser problème. [...] Les hypothèses mêmes engagées explicitement dans les travaux d'ingénierie sont souvent des hypothèses relativement globales, mettant en jeu des processus d'apprentissage à long terme, que l'ampleur de l'ingénierie ne permet pas nécessairement de faire entrer réellement dans une démarche de validation » (*Ibid.*, pp. 297-298).

Nous adhérons aux propos d'Artigue et c'est pourquoi nous avons tenu à distinguer les différentes parties de la thèse : la deuxième est consacrée à la validation interne, et donc aux analyses *a priori* et *a posteriori*, la troisième partie de la thèse aborde un autre type de validation basé sur le système de classes expérimentales et témoins, méthodologie qualifiée d'externe.

2.2.2 Orientations de l'ingénierie didactique

Cette section s'attache aux différentes orientations qu'on peut donner à une ingénierie didactique. Cette réflexion a été amorcée lors de la XV^{e} École d'Été de didactique des mathématiques qui s'est tenue en 2009. Dans l'introduction des actes de cette rencontre, Artigue (2011, p. 24) précise qu'il ne faut pas oublier « qu'une ingénierie didactique n'est pas un objet achevé, mais un objet dont la conception doit pouvoir se prolonger dans l'usage. Au-delà, ce qui est en jeu si on veut prendre au sérieux l'action didactique, c'est un questionnement plus profond de nos praxéologies de recherche, de nos hiérarchies de valeurs, c'est aussi accepter de s'engager dans des projets didactiques à une autre échelle, impliquant de multiples et nouvelles collaborations ».

Lorsqu'Artigue évoque l'évolution de la méthodologie d'ingénierie didactique, elle indique qu'elle a « continué à vivre et à évoluer, travaillée par diverses forces » (*Ibid.*, p. 22). Elle souligne ensuite que « l'ingénierie didactique reste [...] la méthodologie privilégiée dans notre communauté lorsqu'il s'agit pour nous d'explorer des formes de vie didactique qui ne peuvent être aisément observées dans des contextes ordinaires. [...] Mais c'est, dans le même temps, un objet bien moins uniforme qu'il ne l'était au début des années 90. Même si certains invariants demeurent [...], l'ingénierie didactique est devenue un objet aux contours flous » (*Ibid.*, p. 23). C'est à cette même conclusion que nous aboutirons après présentation de différentes orientations de l'ingénierie didactique et un essai de catégorisation de notre ingénierie.

Ingénierie phénoménotechnique VS de production et de développement

La première distinction est reprise, dans l'un des articles des actes de cette École d'Été, par Bessot (2011, p. 30) qui rappelle des propos de Brousseau [22]. Deux types d'ingénierie sont caractérisés : « l'ingénierie de production et de développement qui vise uniquement un enseignement ; l'ingénierie phénoménotechnique qui a pour objet de permettre l'étude empirique des phénomènes didactiques, dans des circonstances compatibles avec l'éthique de l'enseignement ». L'ingénierie didactique est ensuite identifiée comme : « l'indispensable instrument de confrontation de la science didactique avec la contingence ; l'instrument et l'objet des observations ; le moyen de mise en œuvre et de diffusion de ses résultats vers les enseignants et le public ».

Dans un autre article de ces mêmes actes, les propos de Perrin permettent de remarquer que la distinction entre ces définitions ne peut être aussi tranchée. En effet, « l'ingénierie phénoménotechnique produit des situations de classe qui diffusent dans l'enseignement ordinaire et [...] l'ingénierie de développement et de production peut ne pas viser uniquement un enseignement mais s'intégrer à une recherche qui étudie aussi les conditions de diffusion de cette production et son utilisation en formation des maîtres » (Perrin, 2011, p. 57).

Afin de situer l'ingénierie proposée dans cette thèse, il est nécessaire de développer davantage le point de vue de Perrin ainsi que celui de Hersant qui s'est intéressée également à la définition de ces deux types d'ingénierie dans un autre article du même ouvrage.

22. Brousseau G. & Brousseau N. (2006). *L'ingénierie didactique en mathématiques*. Séminaire du DAEST, Bordeaux (diaporama).

Ingénierie de première génération VS de deuxième génération

Perrin s'attache dans son article aux ingénieries didactiques visant le développement de ressources et la formation. Afin d'éviter de se restreindre à la définition donnée par Brousseau (rappelée ci-dessus), elle les appelle ingénieries didactiques *de deuxième génération* : « Deuxième génération à cause du temps écoulé et du développement des cadres théoriques pendant ce temps mais aussi parce qu'elle s'appuie sur une ingénierie didactique de première génération, au sens classique. En effet, quand une ingénierie est validée du point de vue de la recherche avec un bon contrôle des variables, comme permettant de faire émerger certaines connaissances chez les élèves, elle n'est pas forcément validée pour sa diffusion dans l'enseignement ordinaire. Reste justement à étudier comment peut être dévolu aux enseignants le contrôle des variables. » (Perrin, 2011, p. 68). Notons que, lorsque Perrin évoque la première génération d'une ingénierie, elle sous-entend une ingénierie didactique pour la recherche, et fait ainsi référence à une définition plus nuancée de l'ingénierie phénoménotechnique de Brousseau.

Hersant (2011, p. 305) propose elle aussi une caractérisation de ces deux « générations » d'ingénierie didactique : « dans les ingénieries didactiques *de première génération* le produit de la recherche est constitué de situations robustes du point de vue du milieu et du savoir qui cadrent fortement le déroulement en classe. Ces situations sont "testées" avec des enseignants chevronnés dont l'expertise permet qu'elles ne soient pas dénaturées. Les ingénieries de développement visent, quant à elles, la production de situations didactiques pour des classes tout venant. Il faut donc, d'une part, se donner les moyens de préserver les enjeux de savoir de la situation lors de sa réalisation en classe par des enseignants *lambda* (et en particulier, à l'école élémentaire, pas forcément spécialistes de mathématiques) et, d'autre part, compte tenu de ce que l'on sait actuellement des pratiques des enseignants dans les classes ordinaires, laisser des marges de manœuvre aux enseignants ». Elle continue en précisant qu'« ainsi, pour nous, une ingénierie de développement vise en particulier l'identification de déterminants d'une situation [23]. Une fois ce travail effectué, on peut penser que la migration de cette situation vers les classes ordinaires fera l'objet d'une communication aux enseignants de plusieurs types d'informations : les éléments retenus comme correspondant à des déterminants de la situation, les raisons pour lesquelles le respect de ces variables de la situation est essentiel, et, éventuellement, un ou des exemples de modalités de déroulement très local de la situation qui préservent ces déterminants » (Hersant, 2011, p. 306).

Avant de nous situer par rapport à la caractérisation de l'ingénierie développée dans cette thèse, examinons encore deux niveaux de questionnements repérés et définis par Perrin.

23. Hersant (2011, p. 314) définit le mot « déterminant » d'une situation comme les conditions à respecter pour préserver l'essence de la situation, les « passages obligés » de la situation.

Deux niveaux de questionnement

Perrin va un peu plus loin en distinguant deux niveaux de questionnement qui lui semblent nécessaires pour caractériser les ingénieries didactiques de développement. En effet, « avant d'essayer d'implanter une ingénierie didactique dans l'enseignement ordinaire, il est nécessaire de s'assurer de sa validité au niveau expérimental » (2011, p. 68). Elle identifie les objectifs pour chacun des niveaux (*Ibid.*, p. 68) :

- « premier niveau dans des conditions expérimentales spécifiques “protégées” pour tester la validité théorique des situations [...] et dégager les choix fondamentaux de l'ingénierie : qu'est-ce qui est essentiel, incontournable en référence au savoir visé, qu'est-ce qui relève du contexte choisi et pourrait être changé, adapté, ce qui relève du détail en somme ?
- deuxième niveau pour étudier l'adaptabilité des situations à l'enseignement ordinaire, la négociation de la première ingénierie [...] Sur quoi peut-on lâcher du lest dans la négociation ? Que va-t-on essayer de sauvegarder ? Pourquoi ? Comment exercer un contrôle sur ce qui peut se passer ? »

Perrin identifie ainsi le deuxième niveau à une adaptation à l'enseignement ordinaire, en associant à la recherche des enseignants qui ne reçoivent l'information que par le document mis à leur disposition. Elle indique à ce propos que « le document destiné aux enseignants doit être modifié mais sans être trop allongé ; il faut donc arriver à donner encore plus clairement les éléments essentiels des situations [...] et leurs liens avec le savoir visé sans entrer avec trop de détails dans la description du déroulement attendu » (*Ibid.*, p. 74).

Perrin retient plusieurs conditions pour le deuxième niveau d'une ingénierie didactique de développement parmi lesquelles se trouve celle-ci : « Laisser une certaine marge de manœuvre à l'enseignant. ». Elle l'explique par ceci : « Au deuxième niveau, il s'agit d'étudier comment l'enseignant adapte le document qui lui est fourni. L'expérience passée montre que les enseignants ne peuvent pas s'emparer de situations qu'ils ne peuvent pas adapter et insérer dans une progression éventuellement différente de celle qui a présidé à l'ingénierie didactique. » (*Ibid.*, p. 75), argument avec lequel nous sommes complètement en accord.

Elle précise que les deux niveaux ne peuvent exister l'un sans l'autre (Perrin, 2011, pp. 68-69).

> [...] dans un premier temps on peut ne considérer que le premier niveau correspondant à l'étude des situations dans des conditions relativement protégées. Cependant, le fait de prévoir un deuxième niveau prenant en charge l'adaptabilité à l'enseignement ordinaire, change aussi le premier niveau. En fait le deuxième niveau demande de prendre en compte les pratiques ordinaires et donc de poser le problème autrement : il s'agit de passer de l'idée de transmission qui pose le problème de façon descendante de la recherche vers l'enseignement à une idée d'adaptation beaucoup plus dialectique relativement aux pratiques ordinaires. Quand, éventuellement dans un deuxième temps, on vise des questions

> du deuxième niveau, on risque de remettre en question aussi le premier niveau de questionnement. C'est l'ensemble de ces deux niveaux qu'il faut considérer dans une ingénierie didactique pour le développement de ressources et la formation [...]

Ses propos nous amènent à faire remarquer que ces deux niveaux ne se distinguent pas si facilement l'un de l'autre, du moins d'un point de vue temporel.

Catégorisation de notre ingénierie

Après présentation de ces différentes caractérisations, nous tenons à faire observer que la frontière qui sépare les types d'ingénieries ou les niveaux n'est pas si nette en pratique. C'est généralement le but poursuivi par chacun des types d'ingénieries qui permet de différencier ces situations. Nous choisissons alors de nous appuyer sur les définitions suivantes de Perrin afin de distinguer les deux types d'ingénierie didactique principaux (2011, p. 69).

> Dans *l'ingénierie didactique pour la recherche*, on vise à produire des résultats de recherche avec des expérimentations [...] montées en fonction de la question de recherche sans souci immédiat d'une éventuelle diffusion plus large des situations utilisées pour les expérimentations [...]

> Pour *l'ingénierie didactique pour le développement et la formation*, l'objectif au moins dans un terme pas trop éloigné, est la production de ressource(s) pour les enseignants ou pour la formation des enseignants. L'objectif de recherche reste essentiel mais les questions de recherches ne sont pas motivées en premier lieu par la progression des cadres théoriques même si cela amènera sans doute à les questionner.

À ces définitions, Perrin semble associer respectivement les ingénieries de première et deuxième génération. Même si nous pouvons identifier notre travail à une ingénierie de première génération de par ses caractéristiques (situation robuste, validée au niveau de la recherche), nous nous appuyons sur les dernières définitions pour nous positionner et caractériser l'ingénierie dont il est question dans cette thèse comme une ingénierie didactique pour le développement et la formation. Nous préférons éviter d'utiliser le terme « deuxième génération » car une étape de première génération n'a pas clairement été isolée dans l'étape de conception.

Soulignons encore que, même si un questionnement de deuxième niveau a bien entendu contribué au développement de la séquence, l'ingénierie didactique pour le développement et la formation développée dans cette thèse n'a pu atteindre, selon nous, que le premier niveau dans la pratique, dans le sens où nous avons accompagné les enseignants dans chacune des expérimentations, quand ce n'était pas nous-mêmes qui endossions le rôle d'enseignant. Une étude plus approfondie de l'adaptabilité de la situation aux enseignants *lambda* resterait à faire.

2.3 Autres outils théoriques

Les deux théories principales utilisées pour la construction de la séquence didactique ont été développées dans les sections ci-dessus. Toutefois, deux autres théories ont eu une place importante dans l'élaboration de cette suite d'activités. Il s'agit des « jeux de cadres » de Douady ainsi que des « registres de représentations sémiotiques » de Duval. Nous en dressons les principaux éléments dans les quelques lignes ci-dessous.

2.3.1 Jeux de cadres

La séquence didactique développée au sein de notre ingénierie engage les élèves dans diverses représentations des modèles proportionnels et non proportionnels. Douady a montré tout l'intérêt des changements de cadres pour améliorer les apprentissages. Donnons un rapide aperçu de cette théorie.

Dans un article de 1986, elle reprend une partie des propos développés dans sa thèse, notamment sur les « jeux de cadres ». Elle y donne la définition suivante (Douady, 1986, p. 6).

> Les *jeux de cadres* sont des changements de cadres provoqués à l'initiative de l'enseignant, à l'occasion de problèmes convenablement choisis, pour faire avancer les phases de recherche et évoluer les conceptions des élèves.

Douady spécifie que « le mot “cadre” est à prendre au sens usuel qu'il a quand on parle de cadre algébrique, cadre arithmétique, cadre géométrique…, mais aussi cadre qualitatif ou cadre algorithmique. Disons qu'un *cadre* est constitué des objets d'une branche des mathématiques, des relations entre les objets, de leurs formulations éventuellement diverses et des images mentales associées à ces objets et ces relations. […] Deux cadres peuvent comporter les mêmes objets et différer par les images mentales et la problématique développée » (*Ibid.*, pp. 10-11). Lorsque Douady signale que « la familiarité, l'expérience peuvent conduire à des conflits entre ce qu'on attend et ce qui se produit effectivement et par suite à renouveler les images ou les faire évoluer » (*Ibid.*, p. 11), c'est précisément ce qui est attendu par la séquence didactique mise en place.

La notion de cadre est à concevoir « comme une notion dynamique. Le *changement de cadres* est un moyen d'obtenir des formulations différentes d'un problème qui sans être nécessairement tout à fait équivalentes, permettent un nouvel accès aux difficultés rencontrées et la mise en œuvre d'outils et techniques qui ne s'imposaient pas dans la première formulation » (*Ibid.*, p. 11).

Douady souligne que « les concepts sont en général présentés dans un cadre, et les applications demandées n'en sortent pas. On pratique la séparation des cadres » (*Ibid.*, p. 12). Il est vrai que, dans l'étude de la proportionnalité, les exercices mêlant différents cadres sont peu courants. La séquence didactique réalisée a notamment pour objectif de proposer une telle activité.

2.3.2 Registres de représentations sémiotiques

Quelques années plus tard, Duval a développé une théorie qui suit la même idée que celle de Douady mais plus ciblée. Il s'agit de faire travailler les élèves sur différents registres de représentations sémiotiques et, tout comme le suggère Douady pour les changements de cadres, de les encourager à passer d'une de ces représentations à une autre afin de consolider leur perception des objets mathématiques.

Commençons par décrire ce que sont les représentations sémiotiques selon Duval. Dans un article de 1993, il définit les représentations sémiotiques comme « des productions constituées par l'emploi de signes appartenant à un système de représentation qui a ses contraintes propres de signifiance et de fonctionnement. Une figure géométrique, un énoncé en langue naturelle, une formule algébrique, un graphe sont des représentations sémiotiques qui relèvent de systèmes sémiotiques différents ». Il dit qu'« on accorde beaucoup plus d'importance aux représentations mentales qu'aux représentations sémiotiques » en définissant les représentations mentales comme recouvrant « l'ensemble des images et, plus globalement, des conceptions qu'un individu peut avoir sur un objet, sur une situation, et sur ce qui leur est associé » (Duval, 1993, pp. 38-39). Notons qu'il catégorise les représentations sémiotiques comme des représentations à la fois conscientes et externes, et les représentations mentales comme des représentations conscientes mais internes (Duval, 1995, p. 27).

Nous sommes en complète adéquation avec l'auteur lorsqu'il souligne que « les diverses représentations sémiotiques d'un objet mathématique sont absolument nécessaires. En effet, les objets mathématiques ne sont pas directement accessibles dans la perception, ou dans une expérience intuitive immédiate, comme le sont les objets communément dit[s] "réels" ou "physiques" ! Il faut donc pouvoir en donner des représentants. Et, en outre, la possibilité d'effectuer des traitements sur les objets mathématiques dépend directement du système de représentation sémiotique utilisé. [...] Les représentations sémiotiques jouent un rôle fondamental dans l'activité mathématique » (Duval, 1993, p. 38).

Dans son ouvrage de 1995, Duval parle ainsi de « registres de représentation sémiotique » lorsque les systèmes sémiotiques permettent d'accomplir trois activités cognitives fondamentales (p. 21) :

- « constituer une trace ou un assemblage de traces perceptibles qui soient identifiables comme *une représentation de quelque chose* dans un système déterminé » ;
- « transformer les représentations par les seules règles propres au système de façon à obtenir d'autres représentations pouvant constituer un apport de connaissance par rapport aux représentations initiales » ;
- « convertir les représentations produites dans un système en représentations d'un autre système, de telle façon que ces dernières permettent d'expliciter d'autres significations relatives à ce qui est représenté ».

Il utilise les expressions suivantes pour caractériser ces trois activités. La première correspond à la « formation d'une représentation identifiable », la deuxième au « traitement d'une représentation » et la troisième à la « conversion d'une représentation ».

Il note que le traitement est une transformation interne à un registre tandis que la conversion est une transformation externe au registre de départ (Duval, 1993, pp. 41-42).

Comme le souligne Duval, remarquons que « tous les systèmes sémiotiques ne permettent pas ces trois activités cognitives fondamentales, par exemple le morse ou le code de la route. Mais le langage naturel, les langues symboliques, les graphes, les figures géométriques, etc. les permettent » (Duval, 1995, p. 21). De plus, « le langage naturel et les langues symboliques ne peuvent pas être considérées comme formant un seul et même registre. De même les schémas, les figures géométriques, les graphes cartésiens ou les tableaux. Ce sont des systèmes de représentation très différents entre eux et qui posent chacun des questions d'apprentissage spécifiques » (*Ibid.*, pp. 21-22).

Il est important de s'approprier de multiples registres car « il est essentiel, dans l'activité mathématique, soit de pouvoir mobiliser plusieurs registres de représentation sémiotique [. . .] au cours d'une même démarche, soit de pouvoir choisir un registre plutôt que l'autre » (Duval, 1993, p. 40). L'auteur poursuit son idée en déclarant que, « indépendamment de toute commodité de traitement, *ce recours à plusieurs registres semble même une condition nécessaire pour que les objets mathématiques ne soient pas confondus avec leurs représentations et qu'ils puissent aussi être reconnus dans chacune de leurs représentations* ». Il ajoute que, « en phase d'apprentissage, la conversion joue un rôle essentiel dans la conceptualisation » (*Ibid.*, p. 47) car « la conceptualisation implique une coordination des registres de représentation » (*Ibid.*, p. 50).

Duval indique que « cette coordination est loin d'être naturelle », on peut effectivement, comme l'a fait remarquer Douady à propos des cadres, « observer à tous les niveaux un cloisonnement des registres de représentation chez la très grande majorité des élèves ». Duval poursuit son idée : « ce cloisonnement subsiste même après un enseignement sur des contenus mathématiques ayant largement utilisé ces différents registres. Naturellement, l'absence de coordination n'empêche pas toute compréhension. Mais cette compréhension, limitée au contexte sémiotique d'un seul registre, ne favorise guère les transferts et les apprentissages ultérieurs : elle rend les connaissances acquises peu ou pas mobilisables dans toutes les situations où elles devraient réellement être utilisées. En définitive, cette compréhension mono-registre conduit à un travail à l'aveugle, sans possibilité de contrôle du "sens" de ce qui est fait » (*Ibid.*, p. 52).

Ajoutons une remarque de Duval à propos d'un registre auquel on ne pense pas souvent en priorité en mathématiques : « il n'est pas possible de négliger ou d'écarter la langue naturelle dans le cadre de l'enseignement des Mathématiques, elle est un registre aussi fondamental que les autres registres, et plus particulièrement que ceux qui permettent des traitements de type calcul » (*Ibid.*, p. 64). Cependant, il indique qu'une des activités les plus complexes pour lui concerne « l'activité de conversion dans laquelle la représentation de départ est un énoncé en langue naturelle ou un texte » (*Ibid.*, p. 62).

Notons à ce sujet que c'est un point d'entrée que nous avons choisi pour les questions qui ont servi aux tests de la validation externe dont il est question dans la troisième partie de la thèse.

Portons attention à une autre observation intéressante de DUVAL : « L'existence de plusieurs registres permet de changer de registre, et ce changement de registre a pour but de permettre d'effectuer des traitements d'une façon plus économique et plus puissante. » (*Ibid.*, p. 49). C'est une idée importante à mettre en place avec les élèves, notamment vis-à-vis de la proportionnalité et de ses différents modes de représentation.

Pour clore ce chapitre, citons DUVAL (1995, p. 44) qui met en garde sur la difficulté de ce type de travail.

> [...] *la conversion des représentations sémiotiques constitue l'activité cognitive la moins spontanée et la plus difficile à acquérir chez la grande majorité des élèves.* Non seulement le changement de registres soulève des obstacles qui sont indépendants de la complexité du champ conceptuel dans lequel on travaille, mais en outre l'absence de coordination entre différents registres crée très souvent un handicap pour les apprentissages conceptuels.

Comme nous le verrons dans les prochains chapitres, une attention particulière a été accordée à faire œuvrer les élèves sur différents registres de représentation sémiotiques et à les inviter à convertir les représentations d'un registre à un autre. La séquence didactique qui en rend compte est présentée dans le chapitre suivant.

Chapitre 3

Séquence didactique

Sommaire

Ce chapitre s'attache à la présentation de la séquence didactique élaborée afin de répondre aux questions de recherche exposées dans le premier chapitre. Il nous a semblé important de commencer par partager quelques aspects du contexte de la recherche. Des liens entre la recherche *Math & Manips* entreprise au CREM (insertion de manipulations dans les cours de mathématiques) et cette thèse sont bien présents même s'il est évident que ce sont deux entreprises différentes avec des objectifs finaux distincts. Les réflexions qui ont guidé la recherche menée au CREM ont nourri les idées qui sous-tendent cette thèse et c'est la raison pour laquelle ces orientations sont également abordées dans ce chapitre.

La première section porte ainsi sur la conception de la séquence didactique, à partir des spécificités de la recherche *Math & Manips* du CREM. On y expose également, à partir des documents officiels (Ministère, 1999a et 1999b), les compétences principalement développées pour l'élaboration de cette séquence. La deuxième section se consacre quant à elle à sa description sommaire. Elle reprend les points essentiels qui permettront la lecture des analyses *a priori* et *a posteriori* de la deuxième partie de la thèse, dans laquelle seront fait les liens avec les outils théoriques du chapitre précédent. Pour le détail de la séquence didactique, nous renvoyons à l'annexe B.

3.1 Conception de la séquence

3.1.1 Dans l'esprit d'une *Math & Manip* (recherche du CREM)

La séquence dont il est question dans cette thèse est ainsi en lien avec une des recherches menées au CREM de Nivelles.

De 2010 à 2013, une équipe de chercheurs a reçu un financement pour mettre au point et diffuser des activités, appelées *Math & Manips* (Guissard, Henry, Lambrecht, Van Geet, Vansimpsen & Wettendorff, 2014), intégrant des manipulations destinées à diverses tranches d'âge de l'enseignement, de 2 ans et demi à 18 ans. Les auteurs indiquent que « l'intérêt de cette recherche est de présenter aux enseignants l'apport d'une activité expérimentale dans le processus de construction des savoirs mathématiques » (*Ibid.*, p. 4).

Ces séquences présentent une forte composante adidactique et visent à provoquer chez les élèves de la curiosité par des expérimentations dont les résultats semblent en contradiction avec leurs connaissances antérieures. Elles veulent amener les élèves à entrer dans un processus de questionnement visant à faire émerger un modèle qui correspond au mieux à la réalité de la situation.

Cette thèse et la recherche *Math & Manips* ont une origine et des objectifs communs. En plus des idées développées dans le premier chapitre de cette thèse, la recherche *Math & Manips* a pour origine les éléments supplémentaires présentés ci-dessous et poursuit les objectifs spécifiques explicités plus loin.

Origine

Différents documents sont à l'origine du projet. Le texte de Borel (2002) dont il est question à la section 1.1.3 en fait partie, mais d'autres documents tel que le rapport Danblon (1990) ont également contribué à l'émergence de la recherche. Les documents officiels de la Communauté française de Belgique (Ministère, 1999a et 1999b) ont évidemment tenu un rôle important dans l'élaboration des *Math & Manips*. La section 3.1.2 leur est entièrement consacrée.

Il est important de mentionner que, « depuis sa création en 1992, le CREM s'est attaché à identifier les difficultés d'apprentissage liées aux mathématiques et à développer des outils permettant aux enseignants de détecter ces difficultés et d'y remédier » (Guissard & *al.*, 2014, p. 3). Les résultats de ces recherches se trouvent notamment dans les documents du CREM de 1995, 2002, 2004, 2005 et 2011.

Ces ouvrages ont été pensés avec, en arrière-plan, l'espoir de répondre à ce qui est relaté dans le préambule du rapport Danblon (1990).

> Les mathématiques sont mal perçues d'une partie du public même cultivé : elles sont trop souvent à la fois rejetées et objet de préjugés profonds. (p. 6) [...] Or une fraction importante de la population recule devant les tâches mathématiques les plus élémentaires (et parfois en tire vanité) : l'analphabétisme mathématique doit être combattu. Dans la mesure où [...] les activités des citoyens relèveront toujours plus de la réflexion que des automatismes, l'éducation mathématique doit viser la compréhension plus que les exécutions d'algorithmes. (p. 8) [...] L'accident le plus fréquent dans l'apprentissage des mathématiques est la perte de sens et le repli de la forme sans contenu [...] (p. 9).

La recherche *Math & Manips* s'est plus particulièrement attelée à l'introduction, dans le cours de mathématiques, d'une dimension expérimentale qui puisse donner du sens aux apprentissages et, par là, offrir un nouveau cadre à l'apprentissage de diverses matières.

Objectifs

Le projet de la recherche *Math & Manips* a été développé pour rencontrer les objectifs et recommandations des documents qui servent de référence dans l'enseignement. Ainsi, dans le décret définissant les missions prioritaires de l'Enseignement Fondamental et de l'Enseignement Secondaire (Ministère, 1997), on trouve parmi les objectifs généraux l'article 6 (2°).

> Amener tous les élèves à s'approprier des savoirs et à acquérir des compétences qui les rendent aptes à apprendre toute leur vie et à prendre une place active dans la vie économique, sociale et culturelle.

La recherche *Math & Manips* « s'attache à étudier comment de telles compétences peuvent être développées par des activités où les élèves construisent eux-mêmes leurs savoirs à partir d'expérimentations » (Guissard & *al.*, 2014, p. 5). La section 3.1.2

développe plus en détail les compétences à atteindre mentionnées dans les documents de référence, spécifiquement pour la séquence didactique développée dans cette thèse.

Suivant les propos de ROUCHE (*in* BKOUCHE & *al.*, 1991), « l'enseignement doit partir (mais pas camper) sur le terrain familier de l'élève et dans sa langue ». C'est dans cet esprit que les activités proposées dans la recherche *Math & Manips* partent du quotidien des élèves et s'attellent à développer chez ceux-ci les compétences mathématiques visées.

Caractéristiques des *Math & Manips*

L'idée de la recherche *Math & Manips* est que chaque élève trouve l'occasion de se sentir à l'aise au cours de mathématiques. À travers les activités proposées, les élèves devraient s'exprimer dans le langage et le registre qui leur conviennent et apporter leur participation à la construction d'un concept. Dans le document issu de la recherche, GUISSARD & *al.* indiquent que « c'est par le va-et-vient permanent entre les aspects expérimentaux et théoriques que le concept mathématique se construit, que le modèle mathématique s'élabore. Les aspects pratiques et théoriques se complètent, chacun d'eux est nécessaire à l'autre et lui donne du sens » (2014, p. 6).

La recherche vise à réintroduire dans les classes du primaire « des activités où la nécessité de la manipulation est réellement motivée par le savoir visé, où l'expérimentation fournit la réponse à une question pertinente » (*Ibid.*, p. 8). Dans celles du secondaire « un espace où les liens entre le concret et les modèles mathématiques émergent des manipulations physiques réalisées par les élèves et où ces modèles deviennent une nécessité pour traiter les problèmes posés plutôt qu'une donnée préexistante » est recherché (*Ibid.*, p. 8).

Contrairement aux laboratoires décrits par BOREL, les *Math & Manips* ne doivent pas nécessairement être menées dans un local spécifique, séparé du lieu de cours habituel. Le souhait est de mener de telles expériences au sein même de la classe car elles font partie intégrante de l'activité mathématique. De plus, « une *Math & Manip* doit pouvoir être menée à bien par n'importe quel enseignant et ne devrait pas prendre trop de temps, les professeurs étant déjà contraints à suivre des programmes assez chargés. Le matériel utilisé doit pouvoir être soit acquis à moindres frais, soit fabriqué facilement avec des matériaux "bon marché" » (*Ibid.*, p. 6). À ce sujet, la recherche adopte le même point de vue que BOREL qui recommande de créer un laboratoire qui « ne doit pas coûter cher ; les appareils coûteux et encombrants n'y sont pas à leur place » (BOREL, 2002, p. 59).

Notons enfin que « les *Math & Manips* se définissent soit comme action de découverte, soit comme renforcement des acquis, elles intègrent pratique et théorie. [...] [Elles sont ainsi] des activités où les élèves sont confrontés par le milieu à des phénomènes interpellants, et qui constituent une suite bien construite d'épisodes pour lesquels le recours à l'expérimentation avec divers matériels pédagogiques est propice à une meilleure compréhension. L'activité expérimentale a pour but d'ancrer un nouveau concept dans la réalité. Elle débouche nécessairement sur un relevé d'informations qui doivent être traitées de diverses manières selon l'âge des élèves. Les informations recueillies sont décrites dans le langage courant, intégrées dans des tableaux de nombres, ou encore interprétées sous forme de graphiques » (Guissard & *al.*, 2014, p. 7).

3.1.2 Compétences

Comme la section 3.1.1 l'a présenté, la séquence didactique a été élaborée pour les besoins d'une recherche-action qui puisse répondre aux attentes des différents documents officiels de la Communauté française de Belgique.

L'enseignement est organisé selon une approche par compétences et il est fréquent que les enseignants ne soient pas conscients des compétences exercées dans certaines des activités menées. C'est pourquoi le CREM s'attache à les mettre en exergue dans ses publications.

Une réflexion sur ces compétences a donné lieu à un article publié dans la revue Repères-IREM (Henry & Lambrecht, 2012). Tout au long de cette section, nous reprenons quelques propos de cet article pour illustrer les fondements de la séquence didactique présentée à la section 3.2.

En 1997, le Décret Missions (Ministère, 1997) a défini les missions prioritaires de l'enseignement pour la Communauté française de Belgique. Les documents officiels qui en ont découlé sont les « socles de compétences » (Ministère, 1999a) pour l'enseignement fondamental et le premier degré de l'enseignement secondaire ainsi que les « compétences terminales » (Ministère, 1999b) pour les deux derniers degrés de l'enseignement secondaire. Les programmes actuels suivent ainsi une approche par compétences. Nous présentons ci-dessous quelques points qui nous intéressent plus particulièrement au vu de leur importance pour le développement des compétences au premier degré du secondaire.

Décret Missions

Le Décret Missions (Ministère, 1997) définit les missions prioritaires de l'enseignement fondamental et de l'enseignement secondaire. On y retrouve dans le chapitre II, consacré aux objectifs généraux de l'enseignement fondamental et de l'enseignement secondaire, l'article 6 qui mentionne les objectifs suivants (p. 3) :

> 1° promouvoir la confiance en soi et le développement de la personne de chacun des élèves ;
> 2° amener tous les élèves à s'approprier des savoirs et à acquérir des compétences qui les rendent aptes à apprendre toute leur vie et à prendre une place active dans la vie économique, sociale et culturelle ;
> 3° préparer tous les élèves à être des citoyens responsables, capables de contribuer au développement d'une société démocratique, solidaire, pluraliste et ouverte aux autres cultures ;
> 4° assurer à tous les élèves des chances égales d'émancipation sociale.

Pour atteindre ces objectifs, l'article 8 énonce une série de démarches à mettre en place par les établissements dont les trois premières nous intéressent particulièrement (*Ibid.*, pp. 3-4) :

- mettre l'élève dans des situations qui l'incitent à mobiliser dans une même démarche des compétences transversales et disciplinaires y compris les savoirs et savoir-faire y afférents ;
- privilégier les activités de découverte, de production et de création ;
- articuler théorie et pratique, permettant notamment la construction de concepts à partir de la pratique.

Dans l'article 5, une compétence est définie comme une « aptitude à mettre en œuvre un ensemble organisé de savoirs, de savoir-faire et d'attitudes permettant d'accomplir un certain nombre de tâches ». Les compétences transversales y ont la définition suivante : « attitudes, démarches mentales et démarches méthodologiques communes aux différentes disciplines à acquérir et à mettre en œuvre au cours de l'élaboration des différents savoirs et savoir-faire ; leur maîtrise vise à une autonomie croissante d'apprentissage des élèves ».

Le Décret Missions propose, via son chapitre III, des objectifs communs à l'enseignement fondamental et au premier degré de l'enseignement secondaire, définis notamment par les socles de compétences (Ministère, 1999a). Ces socles accordent la priorité, entre autres, à l'apprentissage de la lecture centrée sur la maîtrise du sens et à la maîtrise des outils mathématiques de base dans le cadre de la résolution de problèmes. Une attention particulière à ces deux points a évidemment été portée dans l'élaboration de la séquence.

Socles de compétences

Dans une première version des socles de compétences (Mahoux, 1994), antérieure au Décret Missions, nous retrouvions déjà la volonté d'établir la continuité entre la fin du primaire et le début du secondaire.

Dans cette version, que l'on pourrait qualifier d'expérimentale, la problématique de l'apprentissage des mathématiques était bien établie. Nous y lisons, entre autres, le texte suivant (*Ibid.*, pp. 53-54).

> À l'école fondamentale, l'étude de la mathématique s'effectue au départ d'objets, de faits vécus et observés dans le réel. L'accent est mis, non sur une accumulation quantitative et répétitive d'exercices, mais sur une véritable formation mathématique au travers de la construction et du développement d'une compétence essentielle : relever des défis à l'intelligence, résoudre des situations problématiques en recourant tant à l'intuition qu'à la mise en évidence des liens logiques. [...] Par vrai défi à l'intelligence, par situation problématique, il faut comprendre toute situation « déstabilisante », nouvelle ou non, dont les modalités de réadaptation n'apparaissent pas immédiatement.

Par la suite, les auteurs de ce document ajoutent que la situation problématique est, premièrement, « personnelle (elle peut piquer la curiosité de l'un, ne pas intéresser un autre ou ne pas constituer un obstacle pour un troisième) », deuxièmement, elle n'existe « qu'à un moment donné (une fois résolue, elle n'est plus un problème, et si elle se représente, elle n'aura plus la même intensité) », troisièmement, elle doit « être un défi à l'intelligence de l'apprenant mais doit rester adaptée à son bagage cognitif si on veut qu'il puisse s'y investir vraiment » et, quatrièmement, elle est « dynamisée par l'interaction sociale, la confrontation des idées » (*Ibid.*, p. 54).

Concernant plus particulièrement le premier degré du secondaire, nous lisons ceci (*Ibid.*, pp. 126-127).

> Pour être porteur de compétences, l'enseignement doit :
> – susciter l'enthousiasme en proposant tout au long du degré des situations stimulantes qui engagent l'activité de tous et éveillent la curiosité ;
> – rencontrer l'intérêt des jeunes pour ce qui est neuf [...] ;
> – recourir aux supports pratiques [...] ;
> – utiliser des représentations [...] ;
> – donner l'occasion de relever des défis [...] ;
> – maintenir intérêt et enthousiasme en valorisant à chaque étape la participation des élèves [...].

La conclusion de cette première version des socles de compétences résume particulièrement bien ce que toute activité mathématique se doit de viser (*Ibid.*, p. 133).

> Toutes ces compétences contribuent à façonner une personnalité capable :
> – de clarifier ses hypothèses et contrôler son intuition avant d'émettre un jugement ;
> – d'éviter les généralisations abusives ;
> – de fonder sa conviction sur un raisonnement chaque fois que c'est nécessaire ou utile ;
> – d'user d'esprit critique et de rigueur.
>
> C'est ainsi que la formation mathématique épanouit les qualités nécessaires à toute activité intellectuelle avec les exigences et l'éthique qu'elle comporte.

Tout ce qui vient d'être souligné se résume dans les quelques lignes, reprises de l'introduction de la partie destinée à la formation mathématique de la version actuelle des socles de compétences (Ministère, 1999a, p. 23).

> La formation mathématique s'élabore au départ d'objets, de situations vécues et observées dans le réel, de questions à propos de faits mathématiques. Le cours de mathématiques ne se limite pas à transmettre des connaissances. De l'école fondamentale à la fin du premier degré du secondaire, solliciter l'imagination, susciter la réflexion et développer l'esprit critique à propos de ces observations, conduisent l'élève à comprendre et à agir sur son environnement.

Compétences visées

Visant l'implantation dans l'enseignement ordinaire, la séquence respecte les contraintes institutionnelles et développe donc diverses compétences issues des socles de compétences (Ministère, 1999a), tant disciplinaires que transversales. Les compétences disciplinaires, propres à chaque partie de la séquence, sont directement présentées dans le corps du texte destiné aux enseignants (annexe B). Afin de faciliter la lecture des paragraphes suivants, elles sont rassemblées ci-dessous.

Les nombres
- Relever des régularités dans des suites de nombres.
- Identifier et effectuer des opérations dans des situations variées avec des entiers, des décimaux et des fractions [...], y compris l'élévation à la puissance.
- Estimer, avant d'opérer, l'ordre de grandeur d'un résultat.
- Utiliser les conventions d'écriture mathématique.

Les solides et figures
- Associer un point à ses coordonnées dans un repère.

Les grandeurs
- Effectuer le mesurage en utilisant des étalons familiers et conventionnels et en exprimer le résultat.
- Établir des relations dans un système pour donner du sens à la lecture et à l'écriture d'une mesure.
- Reconnaître un tableau de proportionnalité directe parmi d'autres.
- Déterminer le rapport entre deux grandeurs, passer d'un rapport au rapport inverse.

Les compétences disciplinaires liées aux nombres sont principalement exercées au travers de tableaux de nombres réalisés avec les résultats des expériences. L'une de ces compétences relève l'importance d'estimer l'ordre de grandeur d'un résultat. Dans la séquence proposée, un regard attentif à été porté à cette compétence. Toutefois, elle est utilisée dans deux optiques différentes. L'une d'elles est liée à l'intérêt de faire des estimations correctes, l'autre est de faire entrer les élèves en conflit avec leurs conceptions initiales, nous reviendrons sur ce point dans l'analyse *a priori* au chapitre 4.

Le cadre graphique est exploité au-delà de ce qui est préconisé dans les compétences. Au cours de la séquence didactique, les élèves sont en effet amenés à distinguer les graphiques de situations de proportionnalité des autres.

Le thème des grandeurs est quant à lui exploré grâce à l'exploitation des objets étalons que nous avons appelés « mesurettes ». Les compétences liées à l'apprentissage de la proportionnalité sont pour leur part au centre de la séquence.

Les compétences transversales sont quant à elles communes à plusieurs activités proposées dans la recherche du CREM. Elles sont donc présentées dans le préambule de l'ouvrage (Guissard & *al.*, 2014), nous les reprenons ci-dessous.

Analyser et comprendre un message
- Se poser des questions.
- Distinguer, sélectionner les informations utiles des autres ; percevoir l'absence d'une donnée nécessaire et la formuler.

Résoudre, raisonner et argumenter
- Raccrocher la situation à des objets mathématiques connus.
- Agir et interagir sur des matériels divers (tableaux, figures, solides, instruments de mesure, ...).
- Utiliser un schéma, un dessin, un tableau, un graphique lorsque ces supports sont pertinents.
- Estimer le résultat, vérifier sa plausibilité.
- Exposer et comparer ses arguments, ses méthodes ; confronter ses résultats avec ceux des autres et avec une estimation préalable.

Appliquer et généraliser
- Évoquer et réactiver des connaissances, des démarches, des expériences en relation avec la situation.
- Créer des liens entre des faits ou des situations.
- Reconnaître des situations semblables ou dissemblables.
- Se poser des questions pour étendre une propriété, une règle, une démarche à un domaine plus large.
- Combiner plusieurs démarches en vue de résoudre une situation nouvelle.

Structurer et synthétiser
- Procéder à des variations pour en analyser les effets sur la résolution ou le résultat et dégager la permanence de liens logiques.

Le travail de l'ensemble de ces compétences transversales est inhérent à la conception-même de la séquence.

3.1.3 Mises au point de la séquence

La réflexion pour la conception de la séquence a commencé au CREM en collaboration avec les chercheurs du projet *Math & Manips*. Un travail conjoint a été mené avec deux enseignantes de terrain d'une école de Namur avec qui nous avons pu échanger sur les attentes des enseignants ainsi que sur la pertinence de notre proposition de séquence.

Ensuite, et tout au long de la construction de la séquence didactique, des interactions avec des enseignants ont été permanentes, que ce soit via les expérimentations, les formations ou les colloques.

Lorsque l'écriture de la séquence n'en était encore qu'à ses débuts, deux enseignantes de Bruxelles ont accepté de nous accueillir dans leur classe, en première et deuxième complémentaires[24] (grades 7 et 8). Une première analyse a pu être réalisée, ce qui nous a permis d'aller expérimenter dans une nouvelle classe, dans le Brabant wallon.

Une première version plus complète de la séquence étant alors au point, l'ensemble des enseignants d'une même école de Namur nous ont acceptés pour l'expérimenter dans leurs classes (quatre classes de première année ainsi que cinq classes de deuxième). Après analyses et réécriture, une autre équipe d'enseignants nous a ouvert les portes de leurs classes (cinq classes de premières), dans une école de Sambreville.

Cette dernière série d'expérimentations a permis de rectifier et consolider la séquence didactique sur des points importants. Toutes ces analyses sont développées dans le chapitre 5 consacré à l'analyse *a posteriori*. Des demandes d'expérimentation provenant d'enseignants d'autres écoles nous ont par la suite donné l'occasion de vérifier cette ultime version de la séquence qui a été expérimentée dans dix classes d'une école de Stavelot (de première et deuxième année), dans trois classes de première année d'une école de la région bruxelloise et dans quatre classes de première année d'une école nivelloise.

L'annexe A présente un tableau récapitulatif de ces diverses expérimentations de la séquence didactique. Il facilite la lecture de la suite de la thèse, qui développera également des éléments liés à la passation de différents tests.

Tout au long de ces années d'expérimentation, nous avons proposé des journées de formation (réseau, inter-réseau et en Hautes Écoles) et participé à différents colloques (en Belgique et à l'étranger) au cours desquels nous avons pu échanger avec des enseignants. Lors de ces différentes journées, nous avons également eu l'occasion de partager nos réflexions avec d'autres chercheurs, formateurs d'enseignants, inspecteurs et conseillers pédagogiques.

3.2 Description de la séquence

Rappelons que cette section présente uniquement une courte description de la séquence didactique, dans le but de permettre la lecture des analyse *a priori* et *a posteriori* des chapitres suivants. Le texte complet et détaillé de cette séquence didactique est repris à l'annexe B. Il est directement issu de la publication *Math & Manips* (Guissard & *al.*, 2014) et s'adresse donc principalement aux enseignants.

Avant d'entrer dans cette description, lisons ce que Brousseau pense de la rédaction d'un tel document.

> Il est très difficile pour un chercheur ou un professeur, de publier à l'intention de ses collègues, mais aussi de lire, la description détaillée des

24. Ces années complémentaires ont été créées au bénéfice des élèves en difficulté, au terme de la première ou de la deuxième année commune : « l'année complémentaire doit aider l'élève à combler les lacunes constatées et à s'approprier des stratégies d'apprentissage efficaces » (Fédération Wallonie-Bruxelles, 2014b).

> conditions nécessaires à une situation d'enseignement (dans l'état actuel de la didactique, cette description demande au moins une trentaine de pages). La coutume le conduit à n'en décrire, et de façon succincte, que le déroulement et les effets, ce qui est tout à fait insuffisant pour une bonne reproduction [...] Alors que la description demande des efforts considérables, toutes ces précisions apparaissent comme superflues et même offensantes pour le lecteur, elles sont reçues comme un discours de cuistre. (Brousseau, 1989b, p. 53)

Tout à fait conscients de cet écueil, nous avons tout de même fait le pari que les enseignants puissent s'approprier un document rédigé de la manière la plus complète possible afin qu'ils aient suffisamment d'indications pour mener à bien la séquence didactique. C'est l'un des objectifs que nous nous sommes fixés en proposant une ingénierie didactique pour le développement et la formation. Nous n'en avons développé que le premier niveau mais c'est bien avec l'intention d'atteindre le deuxième niveau défini par Perrin qu'elle a été mise au point.

Pour y parvenir, le choix a été de faire abstraction de certaines analyses qui ont permis sa mise au point. Bien que ces informations auraient pu être également très enrichissantes pour un enseignant, elles auraient sans doute entravé sa lecture et auraient vraisemblablement rendu le document indigeste à ses yeux. L'ensemble de toutes les analyses constituent dès lors le corps de la deuxième partie de cette thèse.

La séquence, intitulée « Des cylindres », s'adresse à des élèves du premier degré de l'enseignement secondaire (12-14 ans). L'expérience proposée consiste à faire étudier aux élèves la variation du volume d'un cylindre en fonction de sa hauteur dans un premier temps et en fonction de son diamètre dans un second temps. Elle leur fait notamment découvrir *in fine* que le volume d'un cylindre ne se modifie pas de la même manière si c'est sa hauteur ou son diamètre qui varie.

Les tableaux de nombres issus des relevés expérimentaux ainsi que les graphiques qui en découlent permettent d'observer et de construire avec les élèves les caractéristiques d'un phénomène proportionnel par comparaison avec un phénomène qui ne l'est pas. L'accent est mis sur la confrontation des deux situations.

Un enjeu important de cette séquence est en effet d'établir le lien entre phénomène linéaire, tableau de proportionnalité et graphique en ligne droite d'une part et phénomènes non linéaires, tableaux de non-proportionnalité et graphiques de fonctions non linéaires d'autre part.

3.2.1 Des cylindres... et leur hauteur

Pour commencer, une situation d'introduction est réalisée collectivement de sorte que les élèves se familiarisent avec le matériel qu'ils vont utiliser par la suite. Il s'agit du remplissage d'une casserole cylindrique jusqu'à la moitié de sa hauteur dans un premier temps et jusqu'à sa hauteur totale dans un second temps. Avant toute expérimentation, il est demandé aux élèves d'estimer le nombre de verres qui leur sera nécessaire pour atteindre ces différentes hauteurs.

Cette première partie de la séquence a pour objectif de mettre en évidence des points essentiels d'une démarche scientifique : placement des repères, précision, utilisation d'un matériel adéquat, ...

Ensuite, les élèves forment des groupes. Chacun des groupes reçoit un récipient cylindrique assez haut dans lequel les élèves versent un certain nombre de mesurettes, deux par exemple. Après avoir marqué la hauteur atteinte par le liquide, ils font deux nouvelles marques au double et au triple de la hauteur initiale. Les élèves estiment alors et vérifient ensuite par expérimentation les nombres de mesurettes qu'il faudra verser dans le cylindre pour atteindre ces différentes hauteurs. Ils écrivent leurs résultats dans un tableau.

Il est alors demandé aux élèves de repérer et d'écrire individuellement les différents liens qu'ils observent entre les valeurs du tableau, en les symbolisant par des flèches. Cette consigne peut susciter principalement deux types de réactions : l'observation dans ce tableau de liens de type multiplicatif, ou le repérage d'écarts constants.

	Hauteur (en cm)	Nbre de mes.	
×2	initiale = 3,5	2	×2
×3	double = 7	4	×3
	triple = 10,5	6	

	Hauteur (en cm)	Nbre de mes.	
+3,5	initiale = 3,5	2	+2
+3,5	double = 7	4	+2
	triple = 10,5	6	

Les relations entre les lignes des tableaux doivent permettre aux élèves d'imaginer combien de mesurettes seraient nécessaires pour atteindre quatre fois, cinq fois voire dix fois la hauteur initiale. Une fois les réponses obtenues à ces questions, il leur est demandé de construire un graphique reprenant ces différents résultats.

Une discussion menée avec l'enseignant amène les élèves à convenir que la multiplication est plus générale en ce sens que les additions dépendent des valeurs initiales (et de l'organisation du tableau) tandis que les liens multiplicatifs internes sont les mêmes pour tous les groupes, quelles que soient les valeurs de départ. Les liens de type multiplicatif permettent également de calculer le nombre nécessaire de mesurettes pour atteindre n'importe quelle hauteur sans recourir aux étapes intermédiaires.

La réalisation du graphique permet aux élèves d'observer que les points sont alignés.

3.2.2 Des cylindres... et leur diamètre

La deuxième partie de la séquence didactique consiste à formuler des conjectures puis observer et comprendre ce qui se passe lorsque le diamètre d'un cylindre varie, pour une hauteur fixée. L'importance du principe expérimental qui consiste à ne changer qu'une seule variable à la fois doit être explicitée.

Les élèves reçoivent trois cylindres pour leur travail en groupe. Un premier, utilisé comme mesurette étalon, et deux autres de diamètres double et triple du premier.

La question posée est la suivante : combien de fois faut-il verser l'eau contenue dans le petit récipient cylindrique pour remplir des récipients de diamètres double et triple jusqu'à la même hauteur que celle du cylindre de départ ? Après avoir noté leurs estimations dans un tableau de manière individuelle, les élèves effectuent la manipulation en groupe pour vérification.

Il est prévu que de nombreuses réponses reflètent l'attente de l'obtention de rapports simple, double et triple comme lorsque les élèves ont fait varier la hauteur. En réalisant l'expérience, les élèves observent que, contrairement à la plupart des conceptions initiales, quatre et neuf mesurettes sont nécessaires pour remplir les cylindres de diamètres double et triple jusqu'à une même hauteur. Pour que ce conflit cognitif soit porteur d'apprentissage, il est important que les élèves ne se contentent pas d'observer mais qu'ils s'interrogent sur la raison pour laquelle ces résultats ne correspondent pas à leurs estimations.

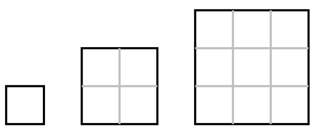
Comme pour le travail concernant la variation de la hauteur, il est demandé de placer, dans un tableau, les résultats obtenus par expérimentation pour la variation du diamètre. À nouveau, les liens découverts entre ces différentes valeurs sont mis en évidence afin d'en dégager les valeurs correspondant à des diamètres par exemple quatre ou cinq fois plus grands de celui de départ.

	Diamètre	Nbre de mes.	
	initial	1	
$\times 2$	double	4	$\times 2^2$
$\times 3$	triple	9	$\times 3^2$
$\times 4$	quadruple	16	$\times 4^2$
$\times 5$	quintuple	25	$\times 5^2$
	...	...	
$\times 10$	décuple	100	$\times 10^2$

hauteur fixe

Les liens mis en évidence par les élèves, comme dans le tableau ci-dessus, font suite à une discussion au sein de la classe.

L'analogie avec des récipients parallélépipédiques à base carrée permet d'observer à quoi correspondent les facteurs multiplicatifs 4, 9 et de conjecturer les nombres de verres qui seront nécessaires au remplissage d'autres cylindres.



Les résultats sont ensuite placés dans un graphique. C'est une fois de plus l'occasion de réfléchir avec les élèves à la modélisation de la situation. Le va-et-vient que les élèves ont l'occasion de faire avec l'expérience vécue permet de donner du sens aux différents éléments du graphique (points reliés ou non, par des segments ou par une courbe, ...).

3.2.3 Des cylindres... leur hauteur et leur diamètre

Une synthèse est réalisée collectivement sur base des tableaux et graphiques construits au cours de la séquence. Elle met notamment en évidence des caractéristiques permettant de distinguer les phénomènes proportionnels des autres et donne l'occasion à l'enseignant d'installer le vocabulaire adéquat.

3.2.4 Un outil supplémentaire : le coefficient de proportionnalité

Le travail réalisé à partir des manipulations sur les cylindres conduit à des tableaux organisés de manière spécifique. Face à des tableaux de nombres présentés dans le désordre, il peut se révéler plus difficile de contrôler l'ensemble des rapports internes pour vérifier s'il s'agit de tableaux de proportionnalité ou non. Il se peut aussi que le critère graphique ne permette pas de trancher à cause de l'imprécision du dessin.

C'est pour ces différentes raisons qu'il est important que les élèves découvrent un outil supplémentaire : le coefficient de proportionnalité. À cette fin, on propose aux élèves le tableau de données suivant et on leur demande de déterminer si les deux grandeurs sont proportionnelles.

grandeur 1	grandeur 2
10	30
2	6
5	15
7	21

Les élèves, à la suite du travail qui a précédé, disposent de plusieurs moyens pour y répondre. Soit ils placent les points dans un système d'axes qui leur est proposé sur la feuille de travail, soit ils relèvent les liens multiplicatifs qui existent entre les différents couples de données ou encore, ils repèrent l'existence d'un rapport constant qui permet de passer des valeurs d'une grandeur aux valeurs correspondantes de l'autre grandeur. Le choix des valeurs placées dans le tableau est explicité dans l'analyse *a priori* (section 4.4.3).

Grâce à la confrontation des différentes méthodes utilisées pour répondre à la question, les élèves rencontrent tous l'utilité d'un coefficient de proportionnalité dans certains cas. Il leur est alors proposé de revenir sur les tableaux de nombres des deux situations (variations de la hauteur et du diamètre d'un cylindre) afin de repérer un coefficient externe, lorsqu'il existe.

3.2.5 D'autres récipients

Pour compléter cette démarche relative à la distinction des situations de proportionnalité et de non-proportionnalité, d'autres solides sont présentés aux élèves. La question suivante leur est posée en leur demandant de justifier leur réponse : pour quels récipients le volume est-il proportionnel à la hauteur ?

FIGURE 3.1 – Échantillon de boîtes pour l'activité de réinvestissement

S'interroger sur cette question revient à se demander quels sont les récipients dont la section parallèle à la base est constante tout le long de la hauteur.

Présenter aux élèves une boîte du même style que celle en forme de vague de la figure 3.1 les amène à débattre et à argumenter.

Deuxième partie

Validation interne

Chapitre 4

Analyse *a priori*

Sommaire

SUIVANT ce qu'a établi ARTIGUE, le processus pour construire une ingénierie se compose de quatre phases. La première concerne les analyses préalables qui, comme nous l'avons déjà souligné, constituent le premier chapitre de la thèse. Mise à part la conception de la séquence qui a été abordée dans le précédent chapitre, le contenu propre aux trois phases suivantes est exposé dans cette deuxième partie.

ARTIGUE soutient que « l'ingénierie didactique est dès son origine fondamentalement liée à des réalisations didactiques dans les classes prenant la forme de séquences de leçons, mais ces réalisations se veulent l'incarnation, la mise à l'épreuve d'un travail théorique » (2011, p. 20). Ce travail théorique qu'elle mentionne correspond notamment à l'analyse *a priori*, de la deuxième phase de la construction de l'ingénierie, qui est au cœur de ce chapitre. Une autre part de ce travail tient en l'écriture de la séquence exposée brièvement à la section 3.2 et présentée à l'annexe B.

L'analyse *a priori* complète est ainsi détaillée dans ce chapitre. Les différentes sections s'attacheront à développer les différentes composantes didactiques que sont les savoirs visés, l'obstacle de la prégnance de la linéarité, les composantes spécifiques du milieu, les variables didactiques de la séquence ainsi que les contraintes. Une section est consacrée à la part de la dimension expérimentale dans les activités et une autre à la présentation des stratégies attendues pour chacune des situations de la séquence didactique.

Cette analyse, couplée à celle effectuée *a posteriori*, est un élément de validation.

Ce travail théorique est important car, comme le souligne VERGNAUD (1981b, p. 228), « l'expérimentation en classe, comme toute expérimentation, n'a de sens que si on la conduit avec une problématique claire en tête, c'est-à-dire si l'on a fait un choix réfléchi du thème et des aspects étudiés. [...] Ni le choix du matériel, ni le choix des valeurs des variables, ni l'enchaînement des questions, ni leur formulation ne peuvent être laissés au hasard. C'est à cette condition seulement que nos observations prennent un sens et sont suffisamment précises. Sans cette condition, l'observation demeure vague, peu fiable et peu répétable ».

4.1 Savoirs visés

Il n'y aurait pas de situation didactique s'il n'y avait pas de savoir en jeu. SCHNEIDER (2008, p. 9) parle de « situations didactiques » lorsqu'on peut les caractériser « par le fait qu'elles supposent l'existence d'une intentionnalité didactique, une personne ayant l'intention de faire apprendre à une autre ou un groupe de personnes un savoir nouveau pour elles et tout ce qui est associé en termes de pratiques ».

Les deux principaux apprentissages visés à travers la séquence sont
– la reconnaissance d'une situation de proportionnalité et de quelques-unes de ses caractéristiques ;
– la prise de conscience que la proportionnalité ne s'applique pas en toutes circonstances.

En conséquence de ces deux points, le repérage d'une situation de non-proportionnalité sera également travaillé.

Tous ces apprentissages sont fortement liés car ils contribuent les uns et les autres, selon nos analyses préalables, à l'acquisition du concept de proportionnalité.

Dans la séquence didactique, il est question de reconnaître, dans des tableaux numériques, des liens qui unissent différents couples de valeurs. Soulignons dès à présent que la découverte de la fonction du second degré qui correspond à l'une des situations n'est pas l'un des apprentissages recherchés.

Présentons dans les sections suivantes les savoirs visés par la séquence.

4.1.1 Proportionnalité

La séquence proposée ne prétend pas à une étude complète de la proportionnalité mais à une meilleure compréhension du concept. La situation relative à la variation des hauteurs admet, selon la classification de VERGNAUD, une structure de proportion simple. La situation met effectivement en jeu des quantités appartenant à deux espaces de mesure différents : la hauteur en cm et le volume en « nombre de mesurettes ».

Les données obtenues par les élèves suite aux expériences sont organisées de manière particulière dans leur tableau, elles sont ordonnées. Cela est dû aux observations qu'on demande aux élèves de réaliser sur l'évolution du volume de l'eau contenue dans un cylindre en fonction de la progression des hauteurs.

Nous avons repris, à la page 11 de ce texte, la liste des procédures de résolution d'un problème de proportionnalité identifiées par BOISNARD & *al.* Les activités de la séquence expérimentale permettent de rencontrer, parmi elles, les tableaux de proportionnalité ainsi que quelques-unes de leurs propriétés : écarts constants, propriétés d'additivité et de multiplicativité scalaire. Ces auteurs citent également les coefficients de proportionnalité mais la situation initiale proposée dans cette séquence didactique ne favorise pas leur rencontre. En effet, la première hauteur étant fixée en fonction d'un nombre de mesurettes donné, il est peu probable que les élèves remarquent un rapport externe « simple ». C'est pour cette raison que la séquence a été complétée par une activité consacrée à la découverte du coefficient de proportionnalité (section 3.2.4). On revient à l'analyse de cette activité à la section 4.7.5.

Le CREM soulignait dans une recherche de 2002 (pp. 112-113) que « la richesse d'un tableau de proportionnalité est telle que les élèves ne peuvent en percevoir toutes les propriétés sur un seul exemple : le choix de chaque situation est donc particulièrement important pour favoriser l'émergence de telle ou telle propriété ». Ces propos nous confortent dans l'idée d'avoir séparé la procédure liée aux coefficients de proportionnalité des autres.

BOISNARD & *al.* ont également répertorié les différents langages utilisés pour exprimer des propriétés de la proportionnalité (voir page 12 de ce texte). L'activité permet d'aborder le langage des proportions et celui des opérateurs à travers les tableaux lorsque les élèves pointent par exemple que, quand la hauteur est multipliée par un nombre, le volume est multiplié par ce même nombre ou lorsqu'ils repèrent les écarts constants. La représentation graphique est encore un autre langage qui permet aux élèves de repérer la propriété d'alignement des points. À ce sujet, GÉRON & *al.* ont pointé l'absence des graphiques dans les compétences (page 15) et, dans un même ordre d'idées, SIMARD catégorise la procédure graphique comme anecdotique (page 16). La séquence didactique dont il est question dans cette thèse a tenu à donner une place importante à ce cadre car il permet notamment d'avoir un autre regard sur la proportionnalité comme nous venons de le souligner. DOUADY et DUVAL ont d'ailleurs tous deux pointé l'importance de diversifier les cadres et registres de représentation afin d'améliorer l'apprentissage.

BOISNARD & *al.* ont également souligné que ces différentes procédures permettent des changements de cadres (page 12). En effet, en partant du domaine empirique, les élèves utilisent les données contenues dans un tableau pour placer des points dans un graphique. Ils passent ainsi du cadre des grandeurs au cadre numérique puis au cadre géométrique.

Les situations relatives à la variation des dimensions d'un cylindre permettent ainsi aux élèves de réfléchir à des propriétés de tableaux, à différentes particularités des graphiques mais pourraient également mener à raisonner avec des formules.

Nous avons signalé que la variation de la hauteur d'un cylindre suit une structure de proportion simple et amène à un tableau organisé de données. Cette réduction du champ de travail lié à la proportionnalité a été choisie afin de centrer les élèves sur la confrontation des modèles proportionnel et non proportionnel.

Les graphiques qui découlent des deux situations donnent la possibilité de s'interroger sur le caractère discret ou continu de la situation. Notons que le passage de l'un à l'autre ne va pas de soi (ARTIGUE, 2008), comme l'ont relevé BROUSSEAU et ROBERT, dans le contexte de l'apprentissage des décimaux (BROUSSEAU, 1980b) et des suites (ROBERT, 1982) respectivement.

Lors des phases de formulation ou de validation, les élèves pourraient s'appuyer sur la formule du volume d'un cylindre $V_{\text{cyl}} = \pi\, r^2\, h$. Elle fait effectivement partie de leurs connaissances antérieures et, bien qu'elle n'ait pas été démontrée, si ce n'est expérimentalement, elle peut constituer un élément de validation du caractère proportionnel de la variation du volume d'un cylindre en fonction de sa hauteur et de la non-proportionnalité entre volume et diamètre d'un cylindre. Dans ce dernier contexte, elle peut également conduire à identifier le modèle quadratique.

Le recours à la formule permet d'envisager un troisième cas qui n'a pas été abordé dans la séquence didactique. Plutôt que de s'intéresser aux rapports entre les dimensions volume et longueur d'un cylindre, la question de la proportionnalité entre les dimensions volume et aire d'un cylindre peut être posée. Il est effectivement possible de s'intéresser à la variation de la base d'un cylindre. L'analyse de la formule $V_{\text{cyl}} = \text{base} \times h$ permet de mettre en évidence la proportionnalité entre les grandeurs base et volume d'un cylindre.

Remarquons qu'il est encore possible d'examiner d'autres dimensions du cylindre. Si on considère les longueurs, nous pouvons réfléchir au caractère proportionnel de la variation du volume en fonction du périmètre de la base. En optant pour la dimension aire, la réflexion peut se poursuivre avec la surface latérale d'un cylindre.

Ces observations n'ont pas été exploitées dans la séquence didactique.

4.1.2 Modélisation

Comme évoqué plus haut, la notion de proportionnalité en tant que telle n'est pas le seul savoir visé par la séquence. La question de percevoir que le modèle proportionnel ne s'applique pas à toute situation est également en jeu. Notre séquence est ainsi proposée avec l'objectif d'amener les élèves à questionner l'adéquation du modèle proportionnel.

Nous rejoignons ainsi les propos de Brousseau (1989b, p. 68) qui affirme qu'« une des fonctions de la didactique pourrait être alors [...] de contribuer à mettre un frein, enfin, à un processus qui consiste à transformer le savoir en algorithmes utilisables par des robots ou des humains sous-employés et à diminuer la part de réflexion noble dans toutes les activités humaines pour en faire dévolution à quelques-uns ».

La situation correspondant à la variation du diamètre d'un cylindre mène les élèves à postuler que le modèle n'est pas proportionnel. La simple expérience du remplissage des cylindres de diamètres double et triple les place face au constat que les grandeurs diamètre et volume d'un cylindre ne sont pas proportionnelles mais c'est l'enchaînement des situations et la justification de ce modèle non proportionnel qui accompagnent les élèves dans la compréhension du concept de proportionnalité. L'expérience met donc en défaut leur réflexe du choix, parfois inconscient, du modèle proportionnel pour cette situation.

À ce propos, Bernard dit que « la science ne s'établit que par voie de comparaison » (1865, p. 26). Plus loin dans le texte, il écrit : « Mais l'homme ne se borne pas à voir ; il pense et veut connaître la signification des phénomènes dont l'*observation* lui a révélé l'existence. » (*Ibid.*, p. 33). Bernard parle ici des expériences menées dans des laboratoires de sciences. Ce raisonnement s'adapte tout à fait à notre séquence, notamment parce qu'elle a été conçue dans l'esprit des laboratoires décrits par Borel, mentionnés dans le premier chapitre.

Suite à une réunion de travail, Rouche a écrit qu'un caractère principal de la science expérimentale correspond à cette suite d'épisodes : « on a un savoir qui fait problème sur certains points, on se pose des questions, on fait des hypothèses sur les réponses possibles, *on travaille à concevoir une ou des expériences* qui permettent de trancher, puis on réalise ces expériences. En général, on repart avec de nouvelles questions » (2007). La séquence didactique a été élaborée dans cette optique. Elle s'appuie sur des activités qui, dans un premier temps, suscitent le questionnement chez les élèves (choses qui ne fonctionnent pas, qui ne sont pas claires), qui, dans un deuxième temps, aident à comprendre clairement la question de départ et qui, dans un troisième temps, amènent à des réponses, produites par les élèves avec l'aide de leur enseignant, et qui ont un avenir mathématique en ce sens qu'elles seront réinvesties dans le cursus. Cette dernière étape correspond au réinvestissement de la question de l'adéquation ou non d'un modèle proportionnel dans le cadre de la résolution d'un problème.

Au cours de la séquence, les élèves sont amenés à approcher d'autres apprentissages que ceux directement visés lors de son élaboration. Par exemple, la séquence didactique permet aux élèves de rencontrer des fonctions des premier et second degrés, sans pour autant en faire une étude approfondie.

La séquence donne également la possibilité d'étendre les activités à la rencontre d'autres fonctions. En effet, si le travail sur la variation du volume en fonction du diamètre ou de la hauteur d'un cylindre permet de rencontrer la fonction linéaire et celle du second degré, une simple modification de l'expérience de départ permettrait de rencontrer une fonction affine par exemple. Il suffirait de partir d'un cylindre contenant de l'eau avant même de verser le nombre initial de mesurettes. Cette variante n'a pas été exploitée.

Par contre, un autre apprentissage qui fait partie intégrante de la séquence concerne le cadre graphique. Si les élèves recourent aux systèmes d'axes placés sur les feuilles de travail, ils doivent intégrer que la hauteur initiale et le diamètre initial sont représentés par 1 centimètre par convention et adapter leurs graphiques en conséquence. Les élèves sont ainsi amenés à se familiariser à l'utilisation de conventions de représentation graphique.

Un dernier point concerne des apprentissages ultérieurs. Il est lié à l'activité de réinvestissement dans laquelle on demande aux élèves de repérer les solides pour lesquels volume et hauteur sont proportionnels. Cette activité donne des images mentales (sections parallèles à la base) qui pourraient être mobilisées plus tard lors du calcul d'un volume par intégrale définie.

4.2 De l'erreur à l'obstacle

Au vu de la forte tendance des élèves à appliquer le modèle linéaire dans des situations inappropriées, relevée dans les analyses préalables, notre volonté a été de proposer un milieu antagoniste afin que les élèves soient confronté à l'obstacle. Il nous a dès lors semblé pertinent d'intégrer une situation de non-proportionnalité à l'apprentissage de la proportionnalité.

La séquence a en effet été construite pour que les élèves entrent en rupture avec leurs conceptions erronées, qui peuvent se trouver renforcées par la première situation qui est de proportionnalité.

4.2.1 Statut de l'erreur

Cette confrontation à l'erreur a été à l'origine de la conception de la séquence. À la section 2.1.7, les notions d'obstacle et d'erreur ont déjà été reliées. Ajoutons ici quelques éléments qui appuient la démarche suivie.

Trop souvent, comme Dan Draghici l'écrit (2002, p. 1) dans un travail sur un ouvrage d'Astolfi, « symptôme d'une incompétence quelconque, l'erreur est [...] synonyme de "faute" ». Il faudrait plutôt, selon lui, « transformer l'erreur en tremplin afin de débloquer les démarches d'apprentissage », propos auquel nous adhérons pleinement et que nous avons mis en œuvre dans la séquence didactique.

Brousseau annonce également qu'« il faut laisser aux enfants une chance de découvrir leurs erreurs », il précise d'ailleurs que « c'est une nécessité dans la construction de la connaissance » (1998, p. 42). Dans un article écrit suite au cours de 1975, il indique qu'« il ne s'agit pas de faire la promotion des erreurs mais de leur laisser jouer leur rôle au sein des connaissances » (2010, p. 14). C'est une des raisons pour lesquelles nous avons décidé de placer la situation de non-proportionnalité à la suite de la situation de proportionnalité. Provoquer l'erreur chez les élèves a pour but de les placer face à leurs conceptions erronées et de les aider à les dépasser.

Citons encore Astolfi (1997, p. 15) qui mentionne que « les *modèles constructivistes* [...] s'efforcent [...] de ne pas évacuer l'erreur et de lui conférer un statut beaucoup plus positif. [...] le but visé est bien toujours de parvenir à les éradiquer des productions des élèves, mais on admet que pour y parvenir, il faut les laisser apparaître – voire même quelquefois les provoquer – si l'on veut réussir à les mieux traiter ». Il poursuit en signalant que « les erreurs commises ne sont plus des fautes condamnables ni des bogues regrettables : elles deviennent les *symptômes* intéressants d'obstacles auxquels la pensée des élèves est affrontée ». Ces propos correspondent tout-à-fait à la direction que nous avons souhaité prendre.

4.2.2 Obstacle de la prégnance de la linéarité

Outre ce qui a été développé jusqu'ici, complétons par des propos qui permettent de préciser nos choix en lien à la confrontation de l'obstacle qu'est la rémanence de la linéarité.

Dan Draghici écrit que, « pour donner à l'erreur un statut positif, il faudrait comprendre la "logique" de l'erreur afin d'en tirer parti pour améliorer les apprentissages » (2002, p. 4). C'est ce qui a été fait face au constat de la persistance des élèves à utiliser le modèle proportionnel même lorsque la situation ne s'y prête pas. Le premier chapitre de la thèse en fait part.

Selon Bachelard (1934, p. 17), « on connaît contre une connaissance antérieure, en détruisant des connaissances mal faites ». Comme cela a été répété à plusieurs reprises, la séquence a ainsi été construite, avec cette intention de permettre aux élèves de commettre l'« erreur » de penser à un modèle proportionnel pour un cas où il n'est pas d'application, dans le but final d'améliorer les savoirs visés.

Une idée supplémentaire, qui s'appuie sur les propos de Brousseau, vient des auteurs du « Livre blanc ». Ils notent (SBPMef, 1991, p. 17) qu'« il ne faut pas croire que les élèves parcourent la suite des modèles correspondant à un concept donné d'une façon linéaire ni qu'un modèle soit jamais définitivement abandonné. Sous l'influence d'une perturbation, un élève peut régresser, revenir à un modèle antérieur, donner l'impression qu'il n'a rien compris. C'est aussi sous l'influence d'une perturbation qu'il peut progresser, accéder à un modèle plus élaboré ». C'est encore pour ces raisons que nous avons choisi de confronter les élèves à l'obstacle de la prégnance de la linéarité.

La rémanence de l'utilisation des propriétés de la linéarité nous semble ainsi un obstacle indispensable à franchir afin d'avoir une meilleure connaissance du concept de proportionnalité.

Les quatre conditions pour être qualifié d'obstacle, relevées par Brousseau et détaillées à la page 44 de ce texte, sont :

1. un obstacle est une connaissance ;
2. la connaissance obstacle a son domaine de validité et d'efficacité ;
3. un obstacle résiste et reparaît ;
4. un obstacle épistémologique est constitutif de la connaissance achevée, du savoir.

Montrons ce pourquoi nous estimons que la « prégnance du modèle linéaire » peut être qualifiée d'obstacle. Notons que nous sommes dans un cas particulier où l'obstacle et le savoir visé s'entremêlent.

La prégnance du modèle linéaire, et par là l'utilisation de règles simples de proportionnalité, est bien une connaissance qui a son domaine de validité (situations de proportionnalité), les élèves investissent d'ailleurs le modèle proportionnel dans la première situation proposée (variation de la hauteur d'un cylindre) et dans nombre de situations de la vie courante. Les deux premières conditions sont rencontrées. La troisième l'est aussi car la prégnance de la linéarité est résistante au changement comme De Bock et son équipe l'ont mis en évidence (page 18 de ce texte). Quant à la quatrième condition, même si nous ne pouvons confirmer nous trouver face à un obstacle épistémologique, c'est par la reconnaissance de circonstances dans lesquelles il ne s'applique pas que les élèves construisent une connaissance plus profonde du modèle proportionnel.

Il est donc important de rencontrer cet obstacle et de le traiter dans l'enseignement, ce que nous proposons via cette séquence didactique. Il a une part de didactique. En effet, comme nous l'avons évoqué dans le premier chapitre, l'utilisation de la proportionnalité à outrance peut s'expliquer par son caractère naturel ou intuitif mais aussi par les expériences vécues dans les classes comme le disent De Bock et ses co-auteurs. On peut y ajouter que la proportionnalité est presque omniprésente, on la rencontre autant dans l'environnement direct qu'à l'école. Elle fait partie des connaissances quotidiennes des élèves et c'est d'ailleurs un modèle très fréquemment usité dans l'enseignement primaire. Sans se cantonner à ce niveau d'enseignement, de nombreuses matières utilisent les propriétés de la proportionnalité, sans nécessairement les citer. Il n'est dès lors pas si étonnant que les élèves les utilisent même lorsque les situations ne s'y prêtent pas.

Page 44, nous citions Brousseau qui indiquait que le franchissement d'un obstacle exige un travail de même nature que la mise en place d'une connaissance. Reprenons ses propos.

> Organiser le franchissement d'un obstacle consistera à proposer une situation susceptible d'évoluer et de faire évoluer l'élève selon une dialectique convenable. [...] il faudra que cette situation permette d'emblée la construction d'une première solution ou d'une tentative où l'élève investira sa connaissance du moment. Si cette tentative échoue ou ne convient pas bien, la situation doit néanmoins renvoyer une situation nouvelle modifiée par cet échec de façon intelligible mais intrinsèque, c'est-à-dire ne dépendant pas de façon arbitraire des finalités du maître.

La séquence proposée nous semble suivre cette organisation. La situation relative à la variation de la hauteur d'un cylindre invite les élèves à investir leurs connaissances relatives à la proportionnalité. Cette première situation incite certains élèves à réexploiter ces mêmes connaissances dans la situation suivante, celle qui fait varier le diamètre d'un cylindre. L'expérience met alors en défaut les prévisions des élèves, ils constatent par eux-mêmes que leur connaissance du moment ne peut être appliquée dans cette situation. De plus, la rétroaction du milieu fournit également un indice de la réponse attendue.

Un travail de réflexion doit faire suite à cette première partie de la séquence afin que les élèves prennent réellement conscience que le modèle proportionnel ne s'applique que lorsque la situation s'y prête.

4.3 Composantes spécifiques du milieu

Après nous être intéressés aux savoirs visés, et par là aux obstacles à franchir, identifions dans cette section les composantes du milieu nécessaires à la bonne mise en place de la séquence.

Brousseau a défini le milieu comme « tout ce qui agit sur l'élève ou ce sur quoi l'élève agit » (voir page 34). Les composantes du milieu sont ici nombreuses. Les connaissances engagées par les élèves, notamment le modèle proportionnel (bien que les élèves n'en aient pas pleinement conscience), ou les interactions entre élèves et enseignant font partie du milieu comme dans de nombreuses situations. Par contre, le recours au matériel, aux feuilles de travail et aux divers registres de représentation rencontrés au fil des situations de la séquence sont spécifiques de l'activité proposée. Nous développons ces points dans les sections suivantes.

4.3.1 Matériel

Dias précise que, pour lui, « le milieu doit comporter des objets matériels (sensibles) ou des objets mathématiques suffisamment familiers pour le sujet afin que celui-ci puisse s'engager dans l'action, en dégager des conjectures et les questionner » (2008, p. 99). L'utilisation de la casserole au début de la séquence, et ensuite des cylindres, a ce rôle, mais à deux niveaux différents. En effet, la toute première étape proposée aux élèves consiste à réfléchir à partir d'une casserole, objet familier. Cette introduction permet aux élèves de s'engager dans l'activité. La suite de la séquence est basée sur le remplissage de cylindres, objets mathématiques simples qui permettent aux élèves de dégager rapidement des conjectures lorsqu'ils travaillent sur la variation de la hauteur ou du diamètre. C'est dans ce dernier cas que les élèves sont réellement amenés à questionner leurs conjectures.

Dans la section 2.1.2, les milieux antagonistes ont été distingués des milieux alliés. Définissons devant quel type de milieu les élèves se trouvent en fonction des activités de la séquence didactique. Dans la première situation relative à la variation de la hauteur d'un cylindre, le milieu peut être qualifié d'allié étant donné que l'action répond aux prévisions des élèves. Par contre, dans la deuxième situation relative à la variation du diamètre d'un cylindre, le milieu est antagoniste. Cette réfutation pragmatique du modèle rappelle la situation du puzzle de Brousseau (1998, pp. 237-241) présentée succinctement à l'annexe C. Les résultats de l'expérience ne correspondent pas à ce qui est attendu par les élèves, ils vont à l'encontre de leurs intuitions et annoncent un modèle différent.

Pour Dias, « pour qu'il y ait construction de connaissances nouvelles [...], il faut que l'élève puisse d'abord engager les connaissances dont il dispose pour tenter de contrôler ce milieu. Il doit ensuite être en mesure d'en recevoir des rétroactions lui indiquant que ses moyens de contrôle sont encore insuffisants et que la résolution du problème ne sera pas instantanée » (*Ibid.*, p. 53). Notons que « tout le processus action/formulation/validation et institutionnalisation est basé sur l'antagonisme du milieu » comme l'indique Dias (*Ibid.*, p. 100). Nous développons plus amplement ce point dans le prochain chapitre, consacré à l'analyse *a posteriori*.

Suite à ces expériences, les élèves exploitent les résultats afin de déterminer des modèles qui puissent correspondre aux situations rencontrées. Pour cela, ils transcrivent leurs observations dans des tableaux numériques et sur des graphiques principalement. Ceci rejoint les propos de Caron-Pargue qui insiste sur l'importance de considérer les deux types de manipulations que sont la manipulation matérielle et la manipulation symbolique. La manipulation matérielle porte directement sur l'objet, ce qui occasionne donc un recueil important d'informations, tandis que la manipulation symbolique porte sur un substitut de l'objet, ce qui permet d'opérer un filtrage des opérations et de les organiser alors selon la structure du système symbolique. Elle ajoute que « le rôle positif de la manipulation matérielle ne tient pas à ce qu'elle résout des problèmes, mais à ce qu'elle en pose » (1981, p. 34). La considération de ces deux types de manipulations se rattache tout naturellement aux jeux de cadre de Douady en passant ici du domaine empirique aux cadres numériques et graphiques.

Pour prolonger ce que dit Caron-Pargue, mettons en évidence les propos de Dias (2008, p. 218) : « L'une des caractéristiques de la dimension expérimentale des mathématiques consiste en un travail spécifique sur la validation. Il est en effet connu et admis que la singularité d'une expérience n'est pas un élément suffisant pour accéder à la généralité d'une preuve en mathématiques. ». Plus haut dans son texte (*Ibid.*, p. 98), il anticipait cette réflexion en notant que « les manipulations de type expérimental rendues possibles par la présence du matériel ne suffisent pas à trancher ni sur le choix du bon raisonnement, ni même sur la validité de chacun d'entre eux. Ils peuvent au mieux nourrir l'intuition sous-jacente à la résolution », c'est ce à quoi sont vouées les expériences de la variation de la hauteur et du diamètre d'un cylindre. Les élèves sont amenés à observer que les résultats des expériences correspondent à leurs prévisions, basées sur le modèle proportionnel, dans le premier cas mais pas dans le deuxième.

Dias poursuit en soulignant qu'« il est nécessaire d'engager le débat entre élèves, avec ou sans participation du professeur, pour passer progressivement de la formulation à l'argumentation ». Dans la deuxième expérience de la séquence didactique, relative à la variation du diamètre d'un cylindre, les résultats issus des expériences encouragent les élèves à réfléchir à un modèle différent de celui de la proportionnalité et de débattre de ce qui justifie un tel choix.

Les expériences menées dans les différents groupes pourraient amener à différents résultats et, en cela, nous rejoignons les propos de Schneider : « La validation n'est donc pas une exigence du professeur mais devient pour les élèves un moyen incontournable pour transcender les désaccords. » (2008, p. 142). Il nous paraît donc indispensable de faire travailler les élèves par groupes pour espérer récolter des résultats qui ne soient pas tous identiques.

Dans les paragraphes précédents, deux temps distincts relatifs aux expériences à partir du matériel ont été mis en évidence : l'un concerne la constatation que les résultats coïncident ou non avec les prévisions de type « proportionnel » des élèves, le second relève de la formulation et de l'argumentation pour expliquer pourquoi ce modèle proportionnel ne convient pas. Selon Schneider (*Ibid.*, p. 141), nous pouvons qualifier de validation pragmatique ce qui est relatif au premier temps (« car venant de l'expérience même »), et de validation intellectuelle de nature sémantique ce qui correspond au deuxième temps (le raisonnement que l'élève met en œuvre lorsqu'il réalise que le modèle proportionnel ne peut correspondre aux résultats de l'expérience).

Cette section a commencé à développer la part d'adidacticité de la séquence à travers l'utilisation du matériel (cylindres) qui contribue à la dévolution de la situation aux élèves. Mais le seul apport de ce matériel dans la séquence ne pourrait permettre la dévolution. Des feuilles de travail – appelées fiches – ont également été proposées aux élèves. Elles ont le double objectif de donner une part d'autonomie aux élèves et de faciliter la structuration du savoir. L'utilisation de ces feuilles de travail favorise effectivement l'autonomie par le fait que s'y trouvent les informations nécessaires au déroulement des activités sans la nécessité de l'intervention explicite de l'enseignant ainsi que les questions qui permettent aux élèves d'évoluer dans leurs réflexions. Elles accompagnent ainsi les élèves dans leur démarche d'expérimentation en reprenant notamment les énoncés des questions, en laissant la place à l'écriture de leurs estimations, en proposant des tableaux à compléter avec les résultats des expériences qui peuvent alors être confrontés aux estimations, ... L'emploi des feuilles de travail participe également à la structuration du savoir à plusieurs niveaux. L'un est de permettre aux élèves de consacrer leur temps à la réflexion plutôt qu'à recopier divers éléments tels les consignes, les tableaux, les axes des repères. Un deuxième niveau est celui de garder une trace des expériences menées en classe. Un troisième tient en la proposition de feuilles de synthèse qui doit bien entendu être élaborée avec l'ensemble de la classe avant que ces feuilles ne soient distribuées.

Notons que l'ensemble de ces éléments de la composante matérielle contribue à ce que les élèves puissent recevoir des rétroactions du milieu, caractéristique importante. Effectivement, les feuilles de travail participent tout autant à cette rétroaction de par la trace des estimations qui rend possible la confrontation aux résultats de l'expérience.

Ce que nous venons de soulever relève du caractère adidactique tel que Dias le précise (2008, p. 46) : « [...] le qualificatif d'adidacticité renvoyant à la potentialité du milieu à assurer les rétroactions nécessaires à la construction des savoirs, sans s'appuyer sur l'omniprésence de l'enseignant ». La séquence a en effet été construite pour que, dans la situation relative à la variation du diamètre d'un cylindre, la plupart des élèves imaginent le modèle proportionnel comme celui correspondant à la situation. Il n'y a pas de nécessité d'intervention explicite de l'enseignant pour que les élèves s'aperçoivent que ce modèle ne convient pas, les résultats de l'expérience menée sont une rétroaction du milieu qui indiquent qu'ils doivent poursuivre leur raisonnement, en tâchant de comprendre pourquoi ce modèle est inapproprié.

Comme nous l'avons souligné, la composante matérielle n'est évidemment pas la seule à permettre pleinement cette dévolution de la situation. Nous reviendrons sur ce point à la section 4.6.2.

4.3.2 Cadres et registres de représentation convoqués

Le matériel utilisé au cours de la séquence didactique est ainsi spécifique au milieu que nous avons constitué. Une autre particularité de ce milieu est celle de passer d'un cadre à un autre afin de diversifier et de consolider la compréhension du concept de proportionnalité.

Nous avons souligné plus haut les propos de Duval liés à l'importance de recourir à plusieurs registres pour éviter que les objets ou les situations mathématiques ne soient confondus avec leurs représentations et pour qu'ils puissent être reconnus dans chacune de leurs représentations. C'est ce à quoi la séquence tend en amenant les élèves à exploiter différentes représentations sémiotiques pour mieux appréhender les situations de proportionnalité et de non-proportionnalité. Des énoncés en langue naturelle proposent aux élèves de récolter des données, à partir d'objets réels à caractère mathématique (des cylindres). Ces données sont rassemblées dans des tableaux de valeurs et traitées pour générer d'autres informations numériques. Les élèves convertissent ensuite ces tableaux numériques en graphiques qui représentent chacune des situations. Les registres de représentation exploités par les élèves sont ainsi nombreux.

Comme le dit Duval, la coordination des différents registres reste difficile mais, en évitant un cloisonnement des registres, ces situations mathématiques prennent du sens. Les élèves ont alors la possibilité de changer de représentation afin de traiter les problèmes auxquels ils seront confrontés par la suite soit d'une manière qui leur corresponde mieux, soit d'une manière qui s'avérerait plus économique.

À la page 23 de ce texte, nous avons cité Géron & *al.* qui annoncent qu'il est possible d'envisager la proportionnalité dans trois cadres différents. La séquence exerce effectivement la proportionnalité à travers les cadres que sont celui des grandeurs, le numérique et le graphique.

4.3.3 Contrats didactiques en jeu

Nous avons mentionné plus haut que, pour la situation correspondant à la variation du diamètre d'un cylindre, le milieu était antagoniste. À ce sujet, Dias précise que « les rapports de l'élève avec le milieu antagoniste s'inscrivent dans un contrat didactique spécifique. Ce type de contrat implique notamment un changement de posture de l'enseignant qui doit assumer les déséquilibres ou autres contradictions apportés par l'antagonisme du milieu. Dans une démarche de type expérimental, cela signifie aussi que les hypothèses (questionnement qui naît d'une volonté d'anticipation d'après les premières interactions avec le milieu dans la phase d'action) apparaissent comme issues du travail des élèves, l'enseignant s'interdisant toute validation ou rejet précipité » (2008, p. 55). C'est à cela que doit s'attacher l'enseignant lorsque les élèves lui proposent des solutions. Il doit s'empêcher d'intervenir, même en acquiesçant, pour laisser la possibilité aux élèves d'expliciter par eux-mêmes les raisons qui font qu'un modèle proportionnel ne peut s'appliquer (pour cette deuxième situation qui est celle de la variation du diamètre). Par contre, il peut facilement renvoyer les élèves au matériel qui leur sert pour les expériences.

Les différentes composantes du milieu amènent donc les élèves et l'enseignant à entrer dans diverses sortes de contrats didactiques, dont certains ont été présentés au chapitre 2. Avant de définir à quels types de contrat correspondent les différentes parties de la séquence, évoquons le « cas de Gaël » de Brousseau, repris dans la thèse de Pelay. Cet enfant « a un rapport superficiel avec la connaissance. Il évite les problèmes, échappe à la construction des connaissances, n'est pas sûr de ses réponses, et a une attitude de soumission par rapport au maître », soumission qui est caractéristique d'un contrat didactique classique pour lequel l'élève attend de l'enseignant qu'il lui transmette le savoir. Pelay poursuit : « Dans la séance suivante, l'intervenant va précisément chercher à introduire une rupture avec ces habitudes : Brousseau lui propose une situation qui exige des anticipations, des prévisions, des prises de responsabilité, c'est-à-dire un investissement de l'objet de la connaissance. » (2011, p. 266). C'est ce qui est visé dans notre séquence par la demande d'estimations et de prise de position quant aux résultats des expériences réalisées. La séquence, telle qu'elle est proposée, est donc en rupture avec un contrat didactique classique, notamment car l'enseignant laisse les élèves construire le savoir, en apparente indépendance, ce qui est caractéristique d'une situation adidactique.

Brousseau a défini de nombreux contrats. Nous avons repris la définition de quatre d'entre eux à la page 38 car ils permettent d'analyser la séquence et de percevoir son évolution.

Les contrats d'apprentissages empiristes sont ceux, suivant Brousseau, pour lesquels c'est le contact avec le milieu qui permet à la connaissance de s'établir chez l'élève par adaptation. Le milieu a la responsabilité de l'apprentissage contrairement aux contrats constructivistes où c'est le professeur qui délègue la responsabilité des acquisitions aux élèves en organisant le milieu. À un premier niveau, l'expérience menée sur la variation du diamètre d'un cylindre place les élèves dans un contrat empiriste. Le milieu à lui seul, sans quelqu'intervention que ce soit de l'enseignant, invite les élèves à repérer la non-proportionnalité. Par contre, à un deuxième niveau, pour ce qui concerne le savoir visé qui est celui de la prise de conscience que le modèle proportionnel ne s'applique pas en toute circonstance, c'est bien l'organisation du milieu – pensée par l'enseignant – qui mène à la construction de l'apprentissage. Il s'agit là d'un contrat constructiviste. En effet, l'enseignant a organisé le milieu pour que les élèves soient amenés à être confrontés à la non-proportionnalité et ressentent le besoin d'expliquer la non-concordance entre résultats et perceptions initiales. C'est parce qu'il a été prévu que les élèves rencontrent une situation de proportionnalité dans un premier temps que la deuxième situation peut espérer avoir un impact sur l'apprentissage des élèves.

Il en est de même pour les deux autres contrats dont il est question à la page 38. Ils relèvent des savoirs que Brousseau appelle anciens. Un de ces contrats porte le nom de « révélation », l'autre le nom de « reprise ». Dans le premier, le savoir ancien n'est qu'évoqué, parfois même implicitement, pour être par exemple rejeté, tandis que dans le second, c'est l'importance du raisonnement qui prime, quitte à ce que le savoir ancien soit remis en cause ou rejeté également. Dans notre situation, le savoir ancien tient en les premières connaissances liées à la proportionnalité, à remettre en cause dans le sens où il ne s'applique pas en toute circonstance. Dans un premier temps, le contrat est du type « révélation ». Les résultats de l'expérience sur la variation du diamètre permettent effectivement de rejeter le modèle proportionnel immédiatement. Mais, dans un deuxième temps, le contrat devient « reprise » car la proportionnalité doit être reconsidérée dans le sens où les élèves doivent dorénavant se poser la question de la pertinence du modèle choisi. Ils doivent ainsi argumenter pour identifier la situation face à laquelle ils se trouvent (application d'un modèle proportionnel ou non).

Remarquons que ces discussions, liées à l'argumentation, interviennent notamment grâce au travail qui est mené en groupes à plusieurs moments de la séquence, ce qui rejoint l'avis de Dias : « Pour l'enseignant, intégrer la dimension expérimentale des mathématiques signifie qu'il soit à même de proposer dans le milieu de la situation à la fois des possibilités matérielles d'anticipation et de confrontation au réel, mais aussi des conditions propices aux échanges langagiers sans lesquels le processus d'apprentissage n'est pas permis. Le tout sera possible avec un accompagnement rapproché du professeur qui garantit la réussite de cette adaptation de son enseignement. » (2008, p. 166).

Pour terminer cette section, bien que nous ne soyons pas dans un contexte d'animation, évoquons le contrat didactique et ludique élaboré par Pelay dans sa thèse pour lequel il donne la définition suivante (2011, p. 284).

> Le contrat didactique et ludique est l'ensemble des règles et comportements, implicites et explicites, entre un « éducateur » et un ou plusieurs « participants » dans un projet, qui lie de façon explicite ou implicite, jeu et apprentissage dans un contexte donné.

Ce qu'il spécifie par la suite permet de mieux comprendre ce pourquoi nous pouvons nous intéresser à ce contrat : « Jouer et apprendre sont deux processus qui peuvent interférer[,] se renvoyer l'un l'autre ; les pôles ne s'articuleront pas de la même façon selon le contexte et l'institution. De la même façon qu'il y a des éléments de contrat didactique dans le contrat ludique en contexte d'animation et de loisir, il y a des éléments de contrat ludique au sein du contrat didactique. » (Pelay, 2011, p. 284).

Un peu plus haut dans sa thèse, Pelay note que « jouer et apprendre sont deux activités essentielles de l'être humain. La coexistence de ces deux types d'activités soulève de vives questions et de nombreux débats dans de nombreux champs disciplinaires. Tout se passe comme si ces deux activités s'attiraient ou se repoussaient selon le contexte, les institutions, les contraintes, les circonstances, etc. » (2011, p. 280). Bien que certains pensent que le jeu n'a pas sa place dans l'institution scolaire au début du secondaire, son côté attrayant – retrouvé dans la mise en situation proposée avec les cylindres – invite de nombreux élèves à prendre part à l'activité et aux apprentissages qui s'ensuivent.

Au sein même d'un cours de mathématiques, il nous semble intéressant de s'attacher à certains éléments du contrat ludique. Dans notre séquence didactique, la proposition aux élèves de travailler avec du matériel les positionne dans un contexte très différent de ce qu'ils rencontrent d'ordinaire en classe. De plus, les faire réfléchir en groupe avec ce matériel les fait entrer dans une activité qu'ils peuvent considérer comme une sorte de jeu. L'articulation des enjeux didactiques et ludiques invite ainsi les élèves à entrer plus facilement dans le contrat didactique. Cette optique permet de concilier plaisir et apprentissage.

4.4 Variables didactiques de la séquence

Après avoir mis en évidence les différentes composantes spécifiques du milieu, intéressons-nous plus particulièrement aux variables didactiques de la séquence. Il s'agit des choix qui ont déterminé l'orientation du travail des élèves. Il en existe de plusieurs sortes comme cela a été souligné à la section 2.1.3. Durand-Guerrier identifie ces deux types distincts de variables en les nommant « variables didactiques mathématiques » et « variables didactiques organisationnelles ».

La définition qu'elle donne du premier type de variable rejoint évidemment les définitions partagées dans le deuxième chapitre : « une variable didactique mathématique pour un problème donné est un élément intrinsèquement lié au problème sur lequel l'enseignant peut jouer pour favoriser ou inhiber certaines procédures » (Durand-Guerrier, 2015, slide 17). Sans en spécifier une définition, elle évoque l'importance des variables didactiques de type « organisation de l'activité » pilotées par des enjeux d'apprentissage (*Ibid.*, slide 20). Notamment, l'organisation de la situation d'action est cruciale pour faire rencontrer aux élèves une résistance entre la méthode proposée et les résultats obtenus.

Ces deux types de variables sont traités dans les paragraphes ci-après.

4.4.1 Cylindres

Une première variable didactique mathématique est relative au choix du matériel que les élèves utilisent pour rencontrer les situations de proportionnalité et de non-proportionnalité. Notre choix s'est porté sur des objets de forme cylindrique pour plusieurs raisons. Il était nécessaire d'avoir un objet mathématique pour lequel la variation de deux paramètres distincts mène à deux modèles différents, l'un proportionnel, l'autre non proportionnel. C'est notamment le cas des cylindres et des parallélépipèdes à base carrée. Le risque de travailler avec une base carrée est que les élèves repèrent rapidement le modèle qui correspond à la situation et passent outre le réel objectif de la séquence qu'est la remise en question de l'utilisation du modèle proportionnel. Faire réfléchir les élèves aux raisons qui font que ce n'est pas un modèle proportionnel est essentiel. Nous avons alors opté pour un travail avec des cylindres. Suite aux résultats des expériences, il est difficile pour les élèves de se mettre d'accord rapidement sur le modèle correspondant à la variation du diamètre du cylindre. Les valeurs obtenues pour atteindre la hauteur triple peuvent osciller de huit à dix mesurettes et un débat doit être mené afin de déterminer le modèle qui correspond à la situation. C'est là tout l'intérêt de cette activité.

Un autre choix a dû être posé pour la situation d'introduction. Il y est proposé de faire des prévisions sur le remplissage d'une casserole, objet cylindrique qui fait partie du quotidien des élèves. Cette variable didactique peut être qualifiée d'organisationnelle car, même si une casserole a le défaut d'être opaque, elle est suffisamment large pour que les élèves puissent observer ce qu'il se passe lors de son remplissage, du moins pour les témoins proches du lieu de l'expérience. Les imprécisions liées au travail sur cet objet, dont il sera question dans l'analyse *a posteriori*, ont confirmé qu'il était intéressant d'aborder la situation avec un objet différent des cylindres utilisés par la suite. Nous y revenons dans la section 5.2.1.

La suite se déroule donc sur d'autres objets cylindriques. Ils sont transparents pour que les élèves puissent observer avec plus de facilité la variation du volume dans les récipients.

4.4.2 Paramètres et constantes

Au cours de la séquence, plusieurs variables liées aux dimensions d'un cylindre interviennent, mais pas au même moment. Comme nous l'avons mentionné précédemment, il est important d'expliquer aux élèves ce principe expérimental qui consiste à modifier la valeur d'une seule variable à la fois pour étudier l'influence de chacune d'elles indépendamment l'une de l'autre. Notons que les variables qui sont évoquées ici – hauteur et diamètre – sont celles dites « du problème » selon la désignation de Brousseau, par opposition aux variables dites « de situation ». Par contre, les valeurs données à ces variables sont bien pour leur part des variables de situation, et plus précisément des variables didactiques mathématiques comme les paragraphes ci-dessous le spécifient. Des choix différents auraient affecté la complexité de la situation.

Pour la variation de la hauteur d'un cylindre, le choix a été fait de fixer la première hauteur, non pas à une valeur donnée en centimètres au préalable, mais à la hauteur correspondant au niveau atteint par l'eau après avoir versé un nombre de mesurettes donné. Ce choix permet aux élèves de travailler avec des nombres de mesurettes entiers, ce qui ne serait probablement pas le cas avec une première hauteur fixée à l'avance.

Un autre choix a été posé pour l'expérience liée à la variation du diamètre, celui de faire correspondre la mesurette à verser dans les cylindres au contenu du cylindre de diamètre initial. Cela pose un léger problème aux élèves qui doivent concevoir ce double statut du cylindre initial mais cette difficulté est compensée par l'avantage de se baser sur des données simples pour la suite de leur réflexion. En optant pour un nombre de mesurettes à verser dans le cylindre de départ égal à un, on permet aux élèves d'identifier plus facilement le modèle utilisé.

4.4.3 Valeurs pour un coefficient de proportionnalité

Au vu des valeurs qui pourraient être récoltées lors des expériences sur la variation de la hauteur d'un cylindre, nous avons déjà soulevé l'intérêt de séparer la découverte des coefficients de proportionnalité du reste de l'activité. Le tableau présenté à la section 3.2.4 a alors été mis au point. Comme nous l'avons indiqué, les valeurs de ce tableau proposé aux élèves ont été choisies avec plusieurs objectifs.

La première intention est évidemment celle de permettre aux élèves de découvrir naturellement un coefficient de proportionnalité, mais pas seulement. Des liens internes doivent également pouvoir être repérés malgré les données non-ordonnées. De plus, la représentation graphique doit être facilement réalisable.

grandeur 1	grandeur 2
10	30
2	6
5	15
7	21

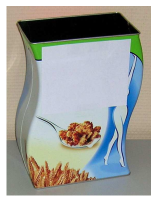
Notons que ce choix de valeur permet encore aux élèves d'observer une autre caractéristique de grandeurs proportionnelles : les liens additifs qui existent entre des lignes du tableau.

grandeur 1	grandeur 2
10	30
2	6
5	15
7	21

4.4.4 Boîtes pour l'activité de réinvestissement

Le choix des boîtes à présenter aux élèves lors de l'activité de réinvestissement, dont il est question à la section 3.2.5, a également été soumis à réflexion.

Il est effectivement important de présenter aux élèves différents types de boîtes. Certaines d'entre elles doivent avoir un volume proportionnel à leur hauteur, d'autres non. Parmi les premières, il est intéressant de trouver des cylindres pour que les élèves puissent s'appuyer sur ce qu'ils viendront de travailler, des prismes divers mais également des boîtes plus insolites telles que celle de la photo ci-contre.



Un tel type de boîte pourrait susciter des discussions argumentées auprès des élèves.

4.4.5 Organisation du travail

Une variable didactique, de type organisationnel cette fois, est liée au fonctionnement des élèves pendant la séquence : en individuel, en groupe ou en collectif. Certaines phases des activités ont été prévues pour être réalisées seul, d'autres en groupe de quatre ou cinq élèves et il a été prévu de mener d'autres temps de travail avec l'ensemble de la classe. Une autre organisation pendant ces divers moments aurait engendré des effets didactiques différents de ceux que nous avons ciblés.

Prenons différents exemples. Il est important de mener le début de la séquence, relative à la casserole, avec l'ensemble de la classe. S'il en est autrement (en travail de groupes par exemple), tous les élèves n'auraient pas toutes les informations utiles à la suite de l'activité. Un autre exemple montre les avantages d'une situation inverse, où le travail en groupes est plus bénéfique qu'en collectif. Il s'agit des expériences menées sur les cylindres, particulièrement lorsqu'il s'agit d'en faire varier le diamètre. Si la manipulation se produit devant toute la classe, il n'en ressortira qu'un seul résultat, ce qui est un sérieux frein au potentiel de discussions à mener avec les élèves.

4.5 Contraintes

Les variables didactiques présentées dans la section ci-dessus correspondent aux choix qui ont été posés afin d'atteindre les objectifs de la séquence. Notons que d'autres décisions ont dû être prises, mais sous contrainte. C'est l'objet de cette section.

4.5.1 Contrainte institutionnelle

Les apprentissages visés sont importants et la richesse de la situation permettrait de passer de nombreuses heures en classe sur ces sujets. Cependant, l'élaboration de la séquence didactique s'est inscrite dans une recherche visant à développer des activités à destination des enseignants (ingénierie didactique pour le développement et la formation). Il a donc été nécessaire de respecter une première contrainte d'ordre institutionnel. En effet, les enseignants sont d'avis que l'étude de la proportionnalité ne peut dépasser deux semaines de cours (c'est-à-dire 8 à 10 heures, évaluation comprise) au vu de leur programme chargé. La réalité de l'enseignement est telle que nous avons dû aller à l'essentiel dans le développement de la séquence pour qu'elle puisse se dérouler en classe en un temps limité.

Les feuilles de travail mentionnées dans le matériel, composante spécifique du milieu, contribuent largement à respecter cette contrainte. Leur utilisation par les élèves en séance de cours évite en effet de monopoliser trop de temps dans la retranscription des informations telles que énoncé, tableau de données ou encore pour la réalisation des graphiques et les synthèses qui peuvent directement être distribuées après la phase d'institutionnalisation réalisée en classe. De plus, ces feuilles de travail permettent de garder une trace des expérimentations menées en classe et, surtout, elles ont été conçues pour être efficaces au niveau de l'autonomie des élèves, comme cela a été mentionné dans la section 4.3.1.

La contrainte institutionnelle, liée à la recherche menée conjointement au CREM, invite à réfléchir à nouveau sur la catégorisation de l'ingénierie didactique dont il a été question à la page 56. Nous y avons indiqué que, selon nous, une ingénierie didactique pour le développement et la formation ne devait pas systématiquement être une ingénierie de deuxième génération. Le contexte de la recherche est tel qu'il a effectivement été nécessaire de mener de front la construction de la séquence et son adaptation à l'enseignement. Il n'a donc pas été possible de s'atteler, dans un premier temps, uniquement à la conception de la séquence pour concrétiser son insertion dans l'enseignement seulement dans un deuxième temps. Cette thèse s'est donc centrée sur le développement d'une ingénierie de première génération, mais avec un objectif de production de ressource. L'étude a été menée à un premier niveau mais, pour le deuxième, seul le questionnement lié à l'appropriation de la séquence par les enseignants de terrain a été abordé. Une réflexion plus profonde, et notamment un essai de communication de la séquence uniquement à partir du document décrivant la séquence sont encore à envisager.

4.5.2 Contraintes matérielles

À côté de la contrainte institutionnelle, la mise au point de la séquence didactique a été contrainte par des aspects matériels.

Au début de l'élaboration de cette séquence, la question s'est posée d'étudier la proportionnalité à partir de cylindres ou de parallélépipèdes à base carrée. Nous avons expliqué les raisons didactiques qui ont orienté le choix sur les cylindres dans la section 4.4.1. Il n'a pas été facile de trouver des cylindres dont les diamètres des bases étaient dans des rapports strictement double et triple. De tels récipients ont été trouvés mais pas nécessairement avec des hauteurs identiques, ce qui a été une contrainte matérielle lors des expérimentations menées dans les classes. De plus, le cylindre de diamètre initial est très étroit, ce qui rend plus difficiles les manipulations d'eau. La description de la séquence a tenu compte de ces différentes contraintes.

Il aurait été intéressant d'avoir un cylindre de diamètre quadruple de celui de départ afin que les élèves puissent s'appuyer sur davantage de données pour leur réflexion. Effectivement, Durand-Guerrier insiste sur l'importance de la dialectique de « faire pour comprendre » et de « comprendre pour faire » (2015, slide 46). Nous n'avons pas trouvé un tel cylindre et il n'a donc pas été possible de faire manipuler les élèves pour observer un résultat supplémentaire qui les aurait peut-être amenés plus facilement à détecter le modèle. La séquence a été construite en fonction de cette contrainte. Il n'a pas non plus été possible de trouver des cylindres de diamètre six ou sept fois plus grands, ce qui aurait permis aux élèves un retour à l'expérience après avoir postulé une théorie. Cette démarche inverse aurait eu un effet bénéfique sur les raisonnements des élèves. Durand-Guerrier déclare d'ailleurs à ce sujet : « à un moment donné, il faut absolument que les élèves puissent confronter les résultats du travail théorique avec les résultats de l'action effective pour se convaincre que le travail théorique rend compte des actions effectives » (*Ibid.*, 50e minute).

À ce jour, les imprimantes 3D auraient levé plusieurs de ces contraintes matérielles et, par là, aidé à entrer pleinement dans cette dialectique.

4.6 Dimension expérimentale

Au cours des premiers chapitres, nous nous sommes intéressés à la dimension expérimentale de la séquence didactique à travers divers aspects (laboratoire, matériel et donc milieu, ...), mais sans véritablement s'attacher à ce que recouvre explicitement cette expression.

Dias déclare que « recourir à la dimension expérimentale c'est permettre et surtout multiplier les allers et retours entre objets (réels et formels, sensibles et théoriques) par des confrontations (adéquation, non adéquation), des vérifications (confirmer ou infirmer une hypothèse), des argumentations (prouver un raisonnement, convaincre dans un débat) », autrement dit, « expérimenter c'est interagir avec des objets selon un rapport dialectique » (*Ibid.*, p. 28).

La dimension expérimentale est liée à « l'importance de la mémoire des circonstances de l'apprentissage » évoquée par BROUSSEAU qui « ne peut plus être ignorée et ne peut plus être exclue de la responsabilité de l'enseignement » (1998, p. 159). Il poursuit en affirmant que la compréhension des connaissances « est liée aux circonstances de l'apprentissage, et elle est nécessaire à la mise en œuvre des connaissances institutionnalisées. L'élève doit donc garder la mémoire des savoirs qui lui sont enseignés, mais aussi une certaine mémoire des circonstances de l'apprentissage qu'il organise à sa guise ». C'est ce à quoi nous espérons aboutir par la confrontation des conceptions initiales des élèves aux résultats des expériences.

Ce que dit BROUSSEAU est évidemment à relier au sens à donner aux apprentissages des élèves. À ce propos, DIAS affirme que « l'expérimentation telle que nous l'entendons n'a de sens que par ses articulations avec la formulation (dimension langagière) et la validation (par la preuve). Le va-et-vient entre théorie et expérience est précisément ce qui caractérise une démarche de type expérimentale » (2008, p. 27). Et cette démarche expérimentale a une place très importante dans l'apprentissage car, sinon, nous pourrions arriver au même constat que celui mentionné par BOISNARD & *al.* : « Certains font remarquer qu'avec les opérateurs on n'a fait que remplacer un stéréotype par un autre : de même que les élèves cherchaient à compléter mécaniquement les trous de la règle de trois [...], ils cherchent à remplir les cases du fameux tableau de proportionnalité et dessinent des flèches sans trop savoir à quoi cela correspond. » (1994, p. 17). Nous espérons que la séquence proposée évitera aux élèves d'en arriver à ce stade.

Dans la première partie de cette thèse, il a été question des laboratoires et la dimension expérimentale a déjà été évoquée, comme nous l'avons dit, à plusieurs reprises. DIAS relie ces deux éléments : « Le laboratoire se caractérise [...] par la culture du doute (hypothèses émises sur les rétroactions parfois inattendues, parfois antagonistes), et de l'expérimentation comme démarche de résolution des problèmes rencontrés. [...] le laboratoire possède un statut public guidé par une finalité de communication. L'activité mathématique des élèves au sein du laboratoire est fondée sur leurs interactions avec des objets dans les allers et retours du théorique au sensible, de l'abstrait au concret, du nouveau au familier. » (2008, p. 245).

Avant de détailler ce qu'il entend par expérimentation, notons que nous avons utilisé les termes « expérience » et « expérimentation » de manière distincte tout au long du texte, termes que nous devons expliciter. Pour cela, nous nous appuyons sur les propos de BERNARD qui écrit que, « dans la langue française, le mot *expérience* au singulier signifie d'une manière générale et abstraite l'instruction acquise par l'usage de la vie. [...] Ensuite on a donné par extension et dans un sens concret le nom d'*expériences* aux faits qui nous fournissent cette instruction expérimentale des choses » (1865, pp. 39-40). Il indique ensuite qu'« on peut acquérir de l'expérience sans faire des expériences, par cela seul qu'on raisonne convenablement sur les faits bien établis, de même que l'on peut faire des expériences et des observations sans acquérir de l'expérience, si l'on se borne à la constatation des faits » (*Ibid.*, p. 40). La séquence didactique proposée tente évidemment d'éviter la deuxième partie de sa remarque.

Les propos de Dias permettent de compléter la distinction entre expérience et expérimentation car il note que, avec la tournure de phrase « faire une expérience sur », « on place le sujet dans un projet d'expérimentation, dans un processus de connaissance et d'objectivité » (2008, p. 36). Il distingue ensuite la simple expérience de l'expérimentation car cette dernière a la particularité d'avoir un « lien étroit entretenu avec le processus de validation » (*Ibid.*, p. 41). Il parle ainsi d'expérience « en référence au jeu interrogatif sur des objets » alors qu'il propose d'employer la terminologie d'expérimentation « pour faire référence à un processus plus global de démarche de construction de connaissances incluant une phase déterminante de validation » (*Ibid.*, p. 43).

Nous avons ainsi utilisé le terme « expérience » lorsqu'il s'agissait de la phase locale de manipulations pour les élèves mais, lorsqu'on a fait référence au processus plus complet, nous avons utilisé le terme d'« expérimentation ».

4.6.1 Rôle des estimations et place de l'erreur

Nous avons donné une place importante aux estimations afin de renforcer le conflit cognitif, mais aussi avec l'intention d'apporter davantage de sens à la notion de proportionnalité. Au cours de la séquence didactique, les estimations interviennent avec deux objectifs différents. L'un est d'exercer l'aptitude des élèves à estimer, l'autre est de permettre la confrontation entre leurs conjectures et résultats.

Le temps qui précède le remplissage de la casserole correspond au premier objectif. On demande aux élèves de proposer une estimation du nombre nécessaire de verres pour remplir la casserole jusqu'à la moitié de sa hauteur, uniquement dans le but de développer leur capacité à donner un ordre de grandeur correct. Il est indispensable de confronter par la suite le résultat obtenu aux estimations préalables des élèves. Après avoir versé le premier verre, il est proposé aux élèves de revoir leur estimation.

Le second objectif est rencontré à plusieurs reprises. Avant de réaliser les expériences, les élèves sont invités à faire part de leurs conjectures. Dans le premier cas qui consiste à observer combien de mesurettes sont nécessaires pour atteindre les hauteurs double et triple, les résultats de l'expérience devraient coïncider avec leurs estimations. Par contre, lorsque les élèves réalisent l'expérience liée à la variation du diamètre d'un cylindre, tous les élèves qui auront formulé une estimation basée sur un modèle proportionnel s'apercevront que les résultats expérimentaux ne correspondent pas à leurs conjectures. Cette confrontation invite ainsi les élèves à réfléchir aux raisons qui peuvent expliquer que le modèle proportionnel n'est pas adapté à cette situation.

À ce propos, voici une réflexion du groupe de travail « Mathématiques et Réalités » de l'IREM de Bordeaux : « La réalité est perçue par tous à travers des modèles qui peuvent faire obstacle à la construction d'un nouveau modèle nécessaire à un certain stade de notre enseignement. À l'aide de situations didactiques spécialement organisées par le maître, le modèle insuffisant peut être mis à jour. Quand les situations problèmes portent sur des objets réels ou réalisés dans le cadre physique, le retour à la réalité par la confrontation entre les résultats prévus et la réalisation effective peut vaincre l'obstacle. Le nouveau modèle peut alors se construire. » (1987, p. 7). Comme nous l'avons développé dans la section 4.2.2, l'obstacle dont il est question est celui de la prégnance de la linéarité et le modèle à construire correspond quant à lui au savoir visé : le modèle proportionnel et, à travers lui, la reconnaissance de situations de non-proportionnalité. Une précision est cependant à donner lorsque les auteurs affirment que la confrontation peut vaincre l'obstacle, nous l'entendons pour notre part comme l'amorce de ce franchissement. C'est effectivement toute la réflexion qui s'ensuit qui permet de dépasser cet obstacle, via les phases de formulation et de validation.

Notons qu'il est donné aux élèves la possibilité de revoir leurs estimations après l'obtention du résultat correspondant au remplissage du cylindre de diamètre double.

Avec les estimations et les confrontations aux résultats de l'expérience, nous revenons de manière implicite sur le statut de l'erreur et le rôle qui lui est donné, ce qui a été le sujet de la section 4.2.1. Ajoutons un élément supplémentaire. Une autre place laissée à l'erreur se situe au niveau du milieu matériel. Bien que les élèves s'astreignent à être les plus rigoureux possible, on observe des résultats différents. C'est un atout pour la séquence car, si les élèves obtenaient dans tous les groupes exactement les mêmes résultats, il leur serait plus difficile d'admettre que l'expérience ne dicte pas la solution, ce qui freinerait le déclenchement des phases de formulation et de validation.

4.6.2 Dévolution de la situation

La dimension expérimentale de la séquence didactique nous a amenés à œuvrer avec un milieu spécifique et à choisir des variables didactiques particulières. L'ensemble de ces composantes permet de dévoluer la situation aux élèves à travers des phases adidactiques. L'enseignant reste, dans un premier temps et en apparence, en dehors du travail des élèves. Comme le dit Brousseau, « la situation est maintenue adidactique par le professeur, qui n'intervient que pour maintenir favorables les conditions non spécifiques du savoir : matériel, appétence, discipline... ». Il poursuit en indiquant que « l'élève peut considérer le savoir solution comme “objectivement” déterminé par le milieu seul et par ses connaissances et qu'il ne dépend plus du professeur » (2010, p. 13 de la 2e partie relative aux prolongements actuels, suite au cours de 1975). Tout au long de la séquence, l'enseignant est donc présent pour « faire fonctionner la machine » comme le dit Brousseau (1998, p. 311) « mais, sur la connaissance elle-même, ses interventions [sont] pratiquement annulées ».

Le milieu rend ainsi possible des étapes d'action, de formulation et de validation. Par exemple, dans la situation propre à la variation du diamètre d'un cylindre, les interactions avec le matériel invalident les premières conjectures des élèves et le processus continue par les interactions entre élèves, au sein de leur groupe ou lors des mises en commun qui amènent les élèves à prolonger leur réflexion.

En plus de l'apport du milieu qui a été mis en évidence, la séquence proposée comporte implicitement la question de la reconnaissance d'un modèle (proportionnel ou non) pour chacune des situations qui sont dévolues aux élèves. Ces questions impliquent la construction du savoir visé, celui de la proportionnalité. La séquence aboutit à une phase d'institutionnalisation développée à la section 4.7.4 et, pour y parvenir, engage une construction de différents temps de travail.

Comme cela a déjà été soulevé, certaines de ces phases sont menées individuellement, d'autres en petits groupes et d'autres encore en groupe-classe, que ce soit pour des mises en commun ou pour mener une expérience collective. Détaillons ces moments à travers lesquels on voit se former la possibilité de dévolution.

La première phase, qui correspond à la situation d'introduction du remplissage de la casserole, se déroule en commun. Il est important de la mener devant toute la classe car c'est à ce moment que l'enseignant établit avec les élèves les éléments clefs d'un processus expérimental. La réalisation de l'expérience par un élève devant ses camarades permet de mettre en évidence naturellement des questions qui sont amenées par les autres élèves qui observent l'expérience et qui sont invités à réagir. La prise de conscience de ces éléments devrait faciliter la dévolution de la suite de la séquence aux élèves car ils entrent, par cette situation d'introduction, dans une première appropriation du problème.

Afin que chaque élève puisse entrer dans le processus de dévolution, il est important qu'il s'investisse personnellement. Pour cela, avant toute expérience, les élèves donnent une estimation du résultat de manière individuelle. Il leur est demandé de noter ces estimations sur leur propre feuille de travail.

Ensuite, lorsqu'il s'agit de mener les expériences sur la variation de la hauteur ou du diamètre d'un cylindre, les élèves fonctionnent en groupe de quatre ou cinq élèves. Ils ont ainsi la possibilité de s'approprier pleinement la situation. La comparaison des résultats issus des différentes expériences qui s'ensuit fait entrer les élèves dans les processus de formulation et de validation. Ces phases de mise en commun se déroulent après chacune des expériences, avec un apport minimal de l'enseignant qui se limite à favoriser les interactions entre les élèves.

La succession de ces phases et de ces alternances entre travail collectif ou en petits groupes permet de dévoluer une partie de l'apprentissage aux élèves. Il sera ensuite complété par l'institutionnalisation, cadrée par l'enseignant. À la page 32, nous avons cité Bessot qui parle de « mise en scène » à propos de cette succession de situations car elle permet de confronter la nécessité d'un apport théorique à la variété des résultats issus des expériences. C'est dans la préparation de cette mise en scène que l'enseignant joue son rôle.

Dans le chapitre suivant, dédié à l'analyse *a posteriori*, nous listons ces divers moments, sur base d'un enregistrement de l'une des expérimentations.

Revenons à l'intérêt de la dévolution en citant Brousseau (1986, p. 66).

> [...] si l'élève produit sa réponse sans avoir eu à faire lui-même les choix qui caractérisent le savoir convenable et qui différencient ce savoir de connaissances insuffisantes, l'indice devient trompeur. Ceci se produit

> en particulier dans le cas où le professeur a été conduit à dire à l'élève *comment* résoudre le problème posé ou quelle réponse donner. L'élève n'ayant eu à effectuer ni choix, ni essais de méthodes, ni modification de ses propres connaissances ou de ses convictions, n'a pas donné la preuve attendue de l'appropriation visée. Il n'en a donné que l'illusion.

C'est ce qui arriverait si l'enseignant demandait par exemple aux élèves de reconnaître si telle ou telle situation est de proportionnalité ou de non-proportionnalité. Sans proposition de démarche supplémentaire, la correction de l'enseignant résonnerait chez les élèves comme un fait, sans aucun espoir d'une réelle réflexion. Clôturons cette section avec une autre réflexion de BROUSSEAU (1998, p. 300).

> Le travail du professeur consiste donc à proposer à l'élève une situation d'apprentissage afin que l'élève produise ses connaissances comme réponse personnelle à une question et les fasse fonctionner ou les modifie comme réponses aux exigences du milieu et non à un désir du maître. La différence est grande entre, s'adapter à un problème que le milieu vous pose, incontournable et, s'adapter au désir du professeur : la signification de la connaissance est complètement différente ; une situation d'apprentissage est une situation dans laquelle ce qu'on fait a un caractère de nécessité par rapport à des obligations qui ne sont pas arbitraires, ni didactiques.

Nous pensons avoir mis en évidence la nécessité que doivent ressentir les élèves de trouver le modèle qui correspond à la situation de la variation du diamètre, face aux résultats qui ne corroborent pas leurs prévisions. Toutefois, notons que BROUSSEAU soulève là un paradoxe car la situation ne devrait pas dépendre d'obligations didactiques or « toute situation didactique contient une part d'intention et de désir de la part du maître » (*Ibid.*, p. 300) puisque c'est lui qui choisit de mener cette séquence avec les élèves.

4.7 Stratégies attendues et particularités additionnelles

Suite à la description succincte de la séquence didactique dans la section 3.2, différentes composantes de l'analyse *a priori* ont été étayées dans les précédentes sections de ce chapitre. À travers ces composantes, certains éléments propres à la réalisation de la séquence ont eu l'occasion d'être abordés, d'autres non. Cette section a dès lors pour objectif de présenter ce qui n'a encore pu être développé, en particulier certaines des stratégies attendues *a priori*, et cela pour chacune des situations de la séquence. Pour ce faire, nous détaillons quelque peu le déroulement des activités lorsque c'est nécessaire.

4.7.1 Mise en place de l'activité expérimentale

La situation d'introduction relative au remplissage d'une casserole est destinée à ce que les élèves s'approprient le matériel mis à leur disposition et mettent en place le processus expérimental.

L'entrée dans la démarche expérimentale consiste ainsi, par une activité collective, à amener les élèves à se poser des questions telles que « jusqu'à quelle hauteur faut-il remplir le verre étalon ? » pour qu'ils se rendent compte qu'il est nécessaire de le remplir à chaque fois jusqu'à une même hauteur. Un autre élément de ce type de démarche consiste à réaliser qu'il est nécessaire de marquer au préalable la hauteur à atteindre dans le récipient afin de répondre à la question qui est de déterminer le nombre de verres à verser dans la casserole pour atteindre la moitié de la hauteur. Pour identifier cette hauteur moitié, on s'attend à ce que les élèves se posent d'autres questions comme celle de la hauteur à mesurer pour un tel récipient (intérieure ou extérieure), comment la mesurer, ...

La situation amène les élèves à s'apercevoir qu'il est nécessaire d'utiliser un outil différent d'une règle graduée dont le zéro ne coïncide généralement pas avec une de ses extrémités afin de mesurer la hauteur intérieure de la casserole. À défaut de prendre le temps de construire un tel instrument avec les élèves, le bâton gradué qui a été conçu pour la séquence (voir page 258, annexe B) leur est alors proposé.

Remarquons qu'il serait exceptionnel, pour atteindre la moitié de la hauteur de la casserole, que le nombre de verres versés soit entier. On s'attend donc à ce que les élèves donnent un résultat approché. Ensuite, lors de l'estimation du nombre nécessaire de verres pour atteindre le double de la hauteur – c'est-à-dire pour remplir entièrement la casserole – on imagine que les élèves multiplient naturellement par deux le résultat obtenu. C'est l'expérimentation qui confirmera leur proposition.

Comme Brousseau qui déclare, après les premières étapes de la situation du « jeu de la boîte » (qui est une ingénierie de dévolution à propos de la soustraction), que « le "jeu", son organisation et ses termes sont maintenant bien identifiés et institutionnalisés » (1988, p. 329), on espère qu'il en soit de même grâce à cette situation d'introduction.

Les propos de Pelay, bien que relatifs au contexte d'animation, s'appliquent à notre séquence : « Le lancement de l'activité est important car il met tout de suite les enfants dans des bonnes dispositions d'écoute et de disponibilité. S'ils ne sont pas motivés, ils peuvent être moins attentifs, indisciplinés, et décrocher avant même que l'activité ait vraiment commencé. Le début du jeu doit donc être particulièrement soigné [...] Avoir prévu le matériel, la disposition de l'espace de jeu, ne pas créer des moments d'attente dès le début du jeu. Lancement du jeu : les règles doivent être claires, précises, concises, comprises et équitables. » (2011, p. 115).

Pelay pense encore que l'animateur – qui serait l'enseignant dans notre cas – est conduit « à trouver un compromis entre les intentions didactiques et ludiques, et peut être amené à faire évoluer la variable didactique, en partant d'une situation simple et en la compliquant une fois que les enfants sont impliqués dans le jeu »

(2011, p. 308). C'est ce qui explique notre intention d'explorer la variation de la hauteur d'un cylindre en deux temps : une première situation avec la casserole et la situation dont il est question dans la section suivante.

4.7.2 Première phase adidactique : variation de la hauteur

L'intérêt de cette situation, qui emboîte le pas à celle d'introduction, tient en deux points comme nous l'avons évoqué plus haut. Le premier correspond à la rencontre d'une situation de proportionnalité, le deuxième est celui de la préparation des élèves au prochain conflit lié à la confrontation entre les résultats de la seconde expérience (variation du diamètre d'un cylindre) et leurs perceptions initiales.

Cette situation et la suivante correspondent aux deux niveaux de jeu dont il est question dans les propos de BLOCH (section 2.1.2). Le travail effectué sur la variation de la hauteur correspond à un premier niveau de jeu car il permet d'installer la situation, ce que BLOCH appelle « milieu objectif ». Il n'est en effet pas dépourvu de connaissance au vu du modèle proportionnel qui est nécessaire pour répondre à la situation, mais il n'est pas encore utile, à ce niveau de jeu, de s'intéresser à la pertinence de l'utilisation de ce modèle. Ce savoir visé est amené par le deuxième niveau de jeu, qui correspond à la situation de la variation du diamètre d'un cylindre.

Pour commencer, centrons-nous sur le premier niveau de jeu. Lors de cette première phase adidactique, les élèves collaborent en petits groupes pour réaliser l'expérience. Ce fonctionnement a plusieurs avantages comme cela a été annoncé dans la section 4.6.2 : l'un est de faire participer chacun des élèves plus activement à l'expérience (et donc de s'y investir), un autre est de permettre ensuite la comparaison des résultats des différents groupes de la classe.

Comme cela a été soulevé auparavant, le procédé qui consiste à demander aux élèves de verser un certain nombre de mesurettes pour fixer la première hauteur permet de travailler avec des nombres de mesurettes entiers, ce qui ne serait probablement pas le cas si la première hauteur était fixée au préalable. Il est souhaitable que le nombre de mesurettes à verser pour fixer la première hauteur ne soit pas le même pour chacun des groupes car cela permettra de remarquer des invariants dans les différents résultats de la classe lors de l'élaboration de la synthèse.

À partir des données issues de l'expérience, les élèves peuvent mettre en évidence divers liens :
– lorsque la hauteur est multipliée par deux, le nombre de mesurettes double également ;
– lorsqu'on ajoute la hauteur de départ à elle-même, le nombre de mesurettes correspondant est obtenu en ajoutant le nombre initial de mesurettes à lui-même.

Ces observations déterminent les différentes stratégies que les élèves utilisent pour obtenir les résultats ultérieurs.

Les élèves franchissent une étape supplémentaire lorsqu'ils recourent à l'expérience mentale qui passe notamment par l'utilisation des liens découverts dans les tableaux pour trouver le nombre de mesurettes à verser pour atteindre quatre, cinq, voire dix fois la hauteur de départ. Signalons à cet égard que les points représentés par la suite dans un graphique n'ont pas tous le même statut. Certains sont issus de l'expérimentation, d'autres sont obtenus par application du modèle proportionnel.

Lors de l'élaboration de la synthèse collective proposée par l'enseignant afin d'institutionnaliser les savoirs liés au premier niveau de jeu, des valeurs différentes de celles utilisées par les élèves dans leurs expérimentations sont choisies pour le nombre de mesurettes de départ ainsi que pour la hauteur initiale. Cela permet à l'enseignant de s'assurer que les élèves sont capables de réinvestir ce qu'ils ont découvert.

4.7.3 Deuxième phase adidactique : variation du diamètre

Le but recherché par cette deuxième phase adidactique est de faire rencontrer aux élèves une situation de non-proportionnalité, avec la volonté de les confronter à leurs perceptions initiales. Le milieu a ainsi été construit en ce sens car, comme le dit Brousseau : « Chaque étape s'appuie sur et souvent contre la précédente. » (1988, p. 332). Les élèves entrent ainsi dans le deuxième niveau de jeu.

Comme les élèves ont réfléchi à la variation de la hauteur d'un cylindre, on s'attend à ce que la plupart d'entre eux conjecturent, lors de cette étape individuelle, qu'il faut deux mesurettes pour remplir un cylindre de diamètre double et trois mesurettes pour un de diamètre triple. Ces estimations erronées mais naturelles, car basées sur un modèle linéaire, donnent tout son sens à l'activité. Ces élèves devraient alors être déstabilisés par la suite face aux résultats de l'expérience.

Notons que, puisque le seul matériel qui a pu être obtenu est constitué de cylindres de hauteurs différentes, nous avons pris la décision de ne pas donner aux élèves le matériel en main pendant la phase d'estimation et de leur présenter simplement les trois bases, face à eux. Nous sommes convaincus que, si nous leur laissions le matériel, les élèves pourraient difficilement faire abstraction de cette différence de hauteur pour donner une estimation.

Les groupes sont ensuite reformés afin de poursuivre l'expérimentation. Dès la première étape du remplissage, les pronostics incorrects, liés au modèle spontané, sont invalidés. La simple confrontation au matériel invalide effectivement les prévisions. Les élèves s'aperçoivent que quatre mesurettes sont nécessaires pour remplir le cylindre de diamètre double et non deux comme la plupart d'entre eux l'auront certainement imaginé. Suite à ce premier résultat, il est important de les laisser revoir leur estimation pour le cylindre de diamètre triple. Ces nouvelles prévisions seront peut-être à nouveau incorrectes car les élèves ne réaliseront pas immédiatement le réel impact de la modification du diamètre.

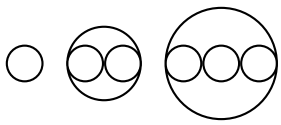
Cette étape est très importante car elle correspond à ce que Pelay appelle « l'accroche de curiosité » (2011, p. 114) pour les situations relatives au contexte d'animation. Dans notre cas, le résultat de l'expérience qui est contre l'idée première agit comme un déclencheur qui permet, nous l'espérons, de piquer la curiosité des élèves.

L'expérience réalisée avec le cylindre de diamètre triple devrait mener les élèves à observer des résultats compris entre huit et dix mesurettes versées pour atteindre la même hauteur que celle du cylindre de départ. Les récipients utilisés sont petits, ce qui implique d'une part que des gouttes parasites pourraient perturber l'expérience lors du remplissage des cylindres de diamètre triple, et d'autre part, que la présence de bulles d'air pourraient empêcher le cylindre de diamètre initial d'être rempli entièrement.

L'expérience n'uniformise ainsi pas nécessairement tous les résultats et c'est ce qui est à souhaiter. Un résultat unanime engagerait à une conclusion sans débat. Le recours à une argumentation mathématique raisonnée est nécessaire et doit alors être présentée comme validation ou invalidation des résultats obtenus par l'expérience. On peut effectivement parler d'invalidation, tout autant que de validation, comme le dit Schneider (2008, p. 142). Elle s'appuie pour cela sur les propos de Brousseau (1998) : « Les couples qui obéissent à la loi implicite ne donnent lieu à aucune remarque : ce sont les couples qui ne lui obéissent pas, qui, par l'accident qu'ils révèlent, rendent la formulation nécessaire : comme une théorie, le modèle se révèle par ses contradictions – apparentes ou réelles – avec l'expérience et non par ses accords. ».

Il est donc important que les élèves ne se contentent pas d'observer mais qu'ils s'interrogent sur la raison pour laquelle ces résultats ne correspondent pas à leurs estimations. Ils entreront alors dans les processus de formulation et de validation après celui d'action.

Certaines de leurs explications pourraient s'identifier à la possibilité de placer plus de deux cylindres de diamètre simple dans un cylindre de diamètre double, par exemple en s'appuyant sur un dessin de la base des cylindres. L'argumentation pour justifier qu'on ne peut verser uniquement trois cylindres de départ dans celui de diamètre triple peut être du même type. Voici un dessin qui illustrerait des propos d'élèves.



Pour se convaincre que c'est sur la suite de nombres 1, 4, 9 qu'il faut se baser pour trouver le nombre de mesurettes à verser pour remplir des cylindres de diamètres quatre ou cinq fois plus grands, on espère que les élèves puissent envisager l'analogie entre le cas d'un cylindre et celui d'un parallélépipède à base carrée. Puisque, dans l'expérimentation, la hauteur fixée est identique pour tous les récipients, les élèves pourraient s'intéresser uniquement à la base, comme dans les dessins ci-dessus. Si, lorsque le côté d'un carré est multiplié par deux, les élèves se représentent facilement que l'aire est multipliée par quatre, en construisant un carré de côté triple, ils se rendront compte que son aire est neuf fois plus grande que celle de départ.

On s'attend à ce que les élèves accèdent alors par analogie à l'intuition que, pour une hauteur constante, en doublant le diamètre d'un cylindre, on quadruple effectivement son volume et que, en triplant le diamètre d'un cylindre, on multiplie son volume par neuf. Un tel raisonnement leur permettra de continuer au-delà du facteur 3 et de remplir ainsi le tableau proposé sur leur feuille de travail en faisant apparaître les liens.

4.7.4 Synthèse pour une institutionnalisation des savoirs

Principalement à travers les propos de Brousseau (section 2.1.6), nous avons déjà soulevé toute l'importance de la phase d'institutionnalisation. Schneider (2008, p. 302) la relève également dans les programme de sciences [25] : « au terme de tout apprentissage, il est très utile pour les élèves de réfléchir à la manière dont ils ont procédé. Bien souvent les élèves ne sont pas conscients de leur cheminement. Mettre celui-ci en évidence est très important pour leur permettre de le pratiquer seuls dans d'autres situations d'apprentissage. Cette réflexion métacognitive leur permet également de prendre conscience de leurs difficultés ».

C'est une des raisons pour lesquelles une institutionnalisation des savoirs est requise à ce moment de la séquence. Cette synthèse, réalisée au terme des deux expérimentations, a entre autres pour objectif d'éviter que les élèves ne retiennent que les manipulations, elle doit amener les élèves des manipulations à la conceptualisation.

Une autre intention est de différencier les deux modèles issus des deux situations. Par là, la synthèse peut avoir un double apport. D'une part, les élèves ont la possibilité de relever des caractéristiques de la proportionnalité grâce à la confrontation des deux situations, d'autre part, ils repèrent des caractéristiques de situations non proportionnelles.

Pour ce faire, la comparaison des deux situations doit être réalisée collectivement. Elle ne dépendra ainsi pas des particularités des divers récipients utilisés et résultats issus des différents groupes. Les nombres de centimètres correspondant aux hauteurs ainsi qu'aux diamètres ne sont pas repris dans cette synthèse puisqu'ils varient d'un groupe à l'autre. Pour la première situation, comme cela a été soulevé, le nombre de mesurettes qui détermine la hauteur initiale n'étant pas nécessairement le même dans les différents groupes, l'enseignant fait la synthèse au tableau à partir d'un nombre différent de ceux utilisés dans les diverses expériences de la classe, trois par exemple.

Lors de cette mise en commun, le modèle multiplicatif doit à nouveau être privilégié par rapport aux liens additifs qui ont sans doute été repérés dans les tableaux de nombres. Pour cela, les élèves peuvent s'appuyer sur le fait que les liens multiplicatifs mis en évidence sont les mêmes pour tous les groupes contrairement aux liens additifs qui dépendent du nombre de mesurettes versées et de la hauteur initiale.

Cette synthèse donne l'occasion à l'enseignant d'utiliser le vocabulaire adéquat. Par exemple, tout au long de la séquence, il a été question de « nombre de mesurettes » à verser. À ce stade, l'enseignant familiarise les élèves avec le terme conventionnel « volume ».

25. Programme de sciences, FESeC, 2000.

Revenons sur la confrontation des deux situations, de proportionnalité et de non-proportionnalité, qui est le point clef de cette institutionnalisation. À l'instar de Simard (2012b, p. 36), nous soulignons à nouveau que « l'objectif de la confrontation de ces types de situations de proportionnalité et de non-proportionnalité est de créer du sens pour la notion elle-même ».

Nous partageons ainsi l'avis de Bloch qui a écrit, au sujet des limites de suites : « Il semble [. . .] qu'il serait souhaitable de leur présenter les deux cas [suites convergentes et se divergeant vers l'infini], afin [que les élèves] puissent construire des connaissances et des critères sur ce qui fait que ces deux suites diffèrent, et en quelque sorte se référer à l'une pour pouvoir affirmer que l'autre n'est pas de même nature. » (2005, p. 24). C'est ce qui est recherché en demandant aux élèves d'observer, dans un même temps, les caractéristiques graphiques et celles liées aux rapports internes, pour la situation de proportionnalité et celle qui ne l'est pas.

Nous suivons les mêmes objectifs que Lambelin (2014) lorsqu'elle développe le concept dénommé « Spok », créé de toutes pièces pour servir de support à une réflexion. À partir de cet exemple, elle aide les enseignants à se rendre compte de la difficulté pour les élèves d'acquérir un concept qui a été défini par d'autres. Tout comme ce sur quoi nous appuyons notre réflexion, elle indique que, généralement, la formation d'un concept se fait en regardant les critères de ressemblance, or il est nécessaire de considérer les différences. La figure 4.1 présente l'exemple auquel elle propose de s'intéresser pour tenter d'identifier ce concept imaginaire.

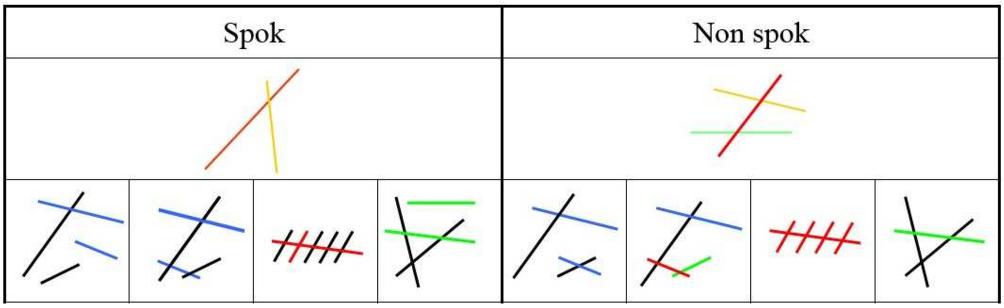


Figure 4.1 – Exemple du concept « Spok », Lambelin (2014)

La proposition de confronter les deux situations – de proportionnalité et de non-proportionnalité – sur les plans graphiques et numériques rejoint selon nous cet exemple. De plus, il éclaire la suite du travail à mener avec les élèves. En effet, pour déterminer les caractéristiques graphiques d'une situation de proportionnalité, plusieurs éléments sont à observer. Le premier est de remarquer que les points du graphique sont alignés, ce que les élèves devraient facilement constater par confrontation des deux situations. Par contre, pour identifier que les points sont alignés avec le point origine, ce qui correspond à une deuxième observation à réaliser, il paraît nécessaire que l'enseignant présente des contre-exemples aux élèves.

Pour clore cette section, remarquons que de nombreux manuels scolaires donnent une définition de la proportionnalité qui indique que le graphique présente une demi-droite d'origine $(0, 0)$. Nous n'adhérons pas à cette définition car nous pensons qu'elle pourrait porter préjudice aux apprentissages des élèves. Nous reviendrons sur ce point dans la section 6.2.2.

4.7.5 Rencontre du coefficient de proportionnalité

La situation expérimentale ne s'y prêtant pas *a priori*, la courte activité présentée à la section 3.2.4 a pour but de faire rencontrer le coefficient de proportionnalité aux élèves. Il sera effectivement rare, comme cela a déjà été souligné, de rencontrer cette notion au cours des phases expérimentales, étant donné qu'il est peu probable d'obtenir des mesures de hauteur qui soient dans un rapport simple avec le nombre de mesurettes versées dans le cylindre.

Comme cela a été présenté dans la section 4.4.3, les valeurs du tableau proposé aux élèves dans cet exercice ont ainsi été soigneusement choisies afin de leur faciliter la découverte d'un coefficient de proportionnalité. À partir de ce tableau de données, on s'attend donc à ce que les élèves observent divers éléments : un coefficient de proportionnalité, des rapports internes ou l'alignement des points avec l'origine grâce à l'utilisation du système d'axes mis à disposition.

Remarquons à nouveau que certains manuels scolaires avancent une définition trop restrictive selon nous du coefficient de proportionnalité. Ils se limitent au coefficient qui permet d'obtenir une valeur de la deuxième grandeur à partir de la valeur correspondante de la première grandeur, ce qui amène à des illustrations plutôt surprenantes telles que celle que nous présenterons à la section 6.2.2, lorsque ce point sera développé.

Après l'identification des données du tableau comme celles de deux grandeurs proportionnelles, rappelons qu'il est demandé aux élèves de revenir sur les deux situations qu'ils ont rencontrées (variation de la hauteur et du diamètre d'un cylindre) pour vérifier que ce qu'ils viennent de découvrir sur le coefficient de proportionnalité s'applique également à ces situations. Nous espérons que ce retour aux données des expérimentations puisse aider les élèves à consolider et enrichir leurs apprentissages relatifs à la proportionnalité.

4.7.6 Activité de réinvestissement

L'objectif de cette dernière partie de la séquence didactique est de vérifier si les élèves réinvestissent correctement le concept de proportionnalité entre deux grandeurs, en particulier la proportionnalité entre hauteur et volume d'un récipient. Il s'agit donc d'identifier des solides pour lesquels le volume varie proportionnellement à leur hauteur.

À travers cette activité, on s'attend à ce que les élèves puissent concevoir, en l'exprimant chacun à leur niveau, que le volume d'un solide est proportionnel à sa hauteur lorsque les sections parallèles à la base sont isométriques. Cette activité a également pour but d'éviter toute généralisation abusive en déterminant rapidement le domaine de validité de la proportionnalité entre volume et hauteur d'un récipient.

Ce chapitre a été consacré à la présentation de l'ensemble des choix posés et des attentes de la séquence didactique. Le suivant est destiné à rendre compte de ce qui s'est effectivement déroulé lors des expérimentions dans les classes ainsi que des ajustements qui s'en sont suivis.

Chapitre 5

Expérimentations et analyse *a posteriori*

Sommaire

Ce cinquième chapitre rend compte des troisième et quatrième phases du processus de construction d'une ingénierie. Elles sont respectivement celle de l'expérimentation et celle de l'analyse *a posteriori* et de la validation. Ces deux phases se sont répétées à plusieurs reprises. Grâce à son lien avec la recherche menée au CREM, la séquence didactique a eu l'occasion d'être testée de nombreuses fois afin d'être mise au point. Elle a été adaptée au fur et à mesure pour répondre aux questions suscitées par chacune des expérimentations.

Ce chapitre est une réponse au précédent. Comme le soulignent Margolinas & *al.* (2011, p. 11), « la didactique des mathématiques et d'une façon plus générale la didactique se construit dans une tension entre des élaborations liées *a priori* à des cadres théoriques et les réalités de l'enseignement d'une discipline ».

La première section de ce chapitre s'attache à développer la chronologie des expérimentations, accompagnée de la méthodologie choisie pour chacune d'elles, ainsi que les principaux constats relatifs à chaque expérimentation. La seconde, plus importante, s'étend plus largement sur les apports des expérimentations d'un point de vue didactique.

5.1 Méthodologie des expérimentations

Une vue d'ensemble de l'élaboration de la séquence et des expérimentations menées dans les classes a été proposée dans la section 3.1.3. Il est ici question de développer la méthodologie adoptée par chacune de ces expérimentations et de donner un aperçu de l'évolution de la séquence au fur et à mesure des expérimentations et discussions avec les enseignants.

Entre 2009 et 2013, il y a eu de nombreuses expérimentations qui n'ont cessé de faire évoluer la séquence didactique. Elles ont été menées auprès d'élèves, d'enseignants en formation ou de chercheurs, pour développer de nouvelles analyses au fur et à mesure.

La séquence didactique « Des cylindres », telle qu'elle est présentée dans l'annexe B, résulte ainsi de multiples réécritures. Chacune de ces mises au point a engendré de nouvelles analyses *a priori* et *a posteriori* avant et après ces expérimentations.

Les différentes prises de notes réalisées à la suite des expérimentations nous permettent de retracer l'évolution de la séquence. Deux séries de classes (expérimentations menées à Namur et à Sambreville) ont bénéficié d'enregistrements audio. Cela nous a permis de réaliser des retranscriptions qui sont utilisées dans la suite de ce chapitre. Notons qu'aucun enregistrement vidéo n'a été réalisé.

5.1.1 Mise à l'épreuve de la phase expérimentale

Dès le début du travail de thèse, nous avons souhaité tester assez rapidement le protocole expérimental de la séquence dans quelques classes afin de nous rendre compte de son adéquation à la réalité de l'enseignement.

Les expérimentations d'une première version ont ainsi eu lieu en novembre 2009 dans deux classes de Bruxelles, en première et deuxième complémentaire [26]. Pour référencer à ces classes dans la suite du texte, nous les nommerons Bx_1 et Bx_2. Les deux enseignantes se sont appropriées la séquence à partir d'un document écrit afin de la mener elles-mêmes dans leur classe. Elles nous ont ainsi donné l'occasion d'endosser pleinement un rôle d'observateur.

Dans la première classe, Bx_1, la plupart des élèves n'avaient pas le français pour langue maternelle. Ce fait nous a permis de détecter des améliorations à apporter à la première version des feuilles de travail que l'enseignante a utilisées pour accompagner son cours. Par exemple, sur une de ces feuilles présentant un tableau à remplir avec les données de l'expérience, il était question d'observer des liens entre des « lignes ». Sans spécifier que c'était celles du tableaux, ces élèves ne comprenaient pas de quoi il s'agissait, pensant aux lignes qu'il venaient de tracer sur leur récipient cylindrique. Un autre exemple est celui du vocabulaire employé pour référencer les différentes hauteurs à atteindre dans la casserole. Dans la première version, nous avions écrit « hauteur 1 » et « hauteur 2 » dans le tableau. L'incompréhension de certains de ces élèves nous a fait réaliser qu'il serait plus clair d'écrire « hauteur moitié » et « hauteur totale ».

Les méthodes de travail des deux enseignantes ont été différentes. La première a utilisé les feuilles de travail en support de son discours, les élèves ont réfléchi directement à partir de ces feuilles. L'enseignante de la classe Bx_2 a demandé à ses élèves de travailler en prenant des notes mais n'a distribué les feuilles qu'à la fin de son cours. Elles ont servi de synthèse.

Dans ces deux classes, les cylindres utilisés pour faire varier la hauteur, après l'activité introductive, étaient des verres à « long drink ». Ces verres n'étant pas suffisamment cylindriques, ils ont engendré des erreurs expérimentales qui ont plongé les élèves dans la confusion. Nous avons alors décidé de travailler avec du matériel moins approximatif lors des expérimentations ultérieures.

À la suite de ces deux premières expérimentations, nous avons dû constater également que, tant que les estimations restaient orales, elles n'étaient pas confrontées, par les élèves, aux résultats de l'expérience. Les prévisions se trouvaient ainsi oubliées et remplacées, dans la tête de l'apprenant, par les résultats de l'expérience. Nous avons alors inclus, dans les feuilles de travail, un tableau dans lequel les élèves écrivent leurs estimations, qui se trouvent ensuite confrontées aux résultats de l'expérimentation. C'est ce retour aux estimations qui donne son sens à l'activité. Ce point est plus largement développé dans la section 5.2.3.

À l'issue de ces expérimentations, nous avons modifié le document pour le mettre plus en adéquation avec le déroulement concret de la séquence. Après avoir notamment revu les feuilles de travail et modifié le matériel, nous avons tenu à expérimenter la séquence une nouvelle fois et avons eu l'occasion de le faire dans une classe de deuxième générale du Brabant wallon en janvier 2010, que nous appelerons Bw. Les

26. Rappelons que de telles années « complémentaires » ont été créées au bénéfice des élèves en difficulté, au terme de la première ou de la deuxième année commune.

élèves ont beaucoup mieux réagi au cours de l'expérimentation, particulièrement par rapport à la confrontation entre leurs estimations et les résultats de l'expérience avec les cylindres de diamètres différents.

5.1.2 Première expérimentation de la séquence complète

Lors des trois premières expérimentations, l'objectif principal a été de mettre au point la phase expérimentale. Seule la partie de la séquence concernant les manipulations a été testée. Lors des expérimentations à Namur en mars 2010, l'ensemble de la séquence didactique a été expérimentée dans de nombreuses classes : quatre classes de première secondaire (Na_1, Na_2, Na_3 et Na_4) et une de plus de deuxième secondaire (Na_5, Na_6, Na_7, Na_8 et Na_9).

Notre intention initiale était de laisser les enseignants s'approprier la séquence didactique mais une seule d'entre eux a accepté de le faire et de la mener dans ses classes. Dans les autres classes, nous avons donc endossé le rôle de l'enseignant. Certaines de ces classes avaient cours en même temps. Suite à cette contrainte horaire, il a donc été nécessaire que plusieurs intervenants prennent en charge la séquence didactique. Nous avons ainsi été deux chercheurs à nous partager les cours dans les autres classes.

Afin de récolter un maximum de réactions des élèves, le dispositif suivant a été adopté : chaque séance de cours a été enregistrée sur dictaphone et, lorsque l'horaire le permettait, un chercheur était présent dans la classe, en plus de la personne donnant le cours, pour prendre des notes.

Le grand nombre de classes qui ont expérimenté la séquence a donné l'opportunité de rencontrer de nombreux comportements d'élèves et de pouvoir ainsi les prendre en considération pour la réécriture de la séquence. Nous en faisons part plus explicitement à travers l'ensemble de la section 5.2.

5.1.3 Deuxième expérimentation de la séquence complète

Nous avons tenu à multiplier le nombre d'expérimentations, en continuant dans d'autres classes car, comme le souligne Hersant (2011, p. 310) : « à partir d'une ou plusieurs mises en œuvre d'une "même" situation nous envisageons des "améliorations" que nous testons ensuite dans d'autres classes avant de penser la migration à des classes ordinaires ». Suite aux constats des expérimentations menées jusque là, la séquence a ainsi été complétée et proposée à une nouvelle équipe d'enseignants. C'est une école de Sambreville qui nous a accueillis en son sein en février 2011, dans cinq de ses classes de première année secondaire (Sa_1, Sa_2, Sa_3, Sa_4 et Sa_5).

Nous avons fait le choix de changer d'école au fur et à mesure pour éviter notamment que les enseignants ne soient influencés par une expérimentation menée précédemment. Ceci rejoint la suite des propos de Hersant : « dans ce dispositif, le choix des enseignants qui participent à la recherche est important : il ne faut pas se réduire à des enseignants chevronnés sinon on prend le risque de ne pas observer de "dysfonctionnements" ». Malheureusement pour nos observations, aucun enseignant de cette école n'a souhaité prendre pleinement en charge la séquence didactique dans leurs classes. Ils ont préféré nous laisser la mener.

Comme pour l'école de Namur, nous avons donc réalisé des enregistrements audio des séances de cours afin de seconder les notes que nous prenions lorsque nous en avions la possibilité. L'aide d'un autre chercheur a également été requise dans cette série d'expérimentations.

Notons déjà que ces nouvelles expérimentations ont confirmé une observation importante relevée dans les classes expérimentales de l'année précédente. Le repérage des écarts constants dans la situation de proportionnalité (variation de la hauteur du cylindre) joue en défaveur de la compréhension du concept. Nos arguments sont développés dans la section 5.2.2.

5.1.4 Consolidation de la séquence

Suite à la constatation précédente, la séquence didactique a été adaptée et réécrite de sorte à éviter que les élèves ne restent focalisés uniquement sur les écarts constants généralement repérés dans la situation de proportionnalité.

Cette nouvelle version a été testée dans des écoles qui ont fait la demande de l'intervention de chercheurs du CREM dans certaines de leurs classes. La séquence a ainsi été expérimentée dans trois autres séries de classes : dix classes de première et deuxième année d'une école de Stavelot en janvier 2013 (St_1 à St_{10}), trois classes de première secondaire d'une école de la région bruxelloise en février 2013 (WB_1 à WB_3) et quatre classes, également de première, d'une école nivelloise en mars de la même année (Ni_1 à Ni_4).

Les multiples réécritures successives, afin notamment d'insérer un maximum de réflexions en rapport avec le travail des élèves, permettent, nous l'espérons, de faciliter l'appropriation de la séquence aux enseignants pour qu'ils comprennent, à travers la lecture du document, les enjeux et les raisons qui nous ont poussés à faire les choix didactiques posés.

5.2 Apports didactiques des expérimentations

Le chapitre précédent s'est intéressé à l'analyse *a priori*, notamment aux « observables » qui sont définis par Comiti et Grenier (1998, p. 86) comme le repérage de « ce qui est possible et ce qui ne l'est pas ». Ils développent en écrivant que « les observables sont alors des traces du possible. [...] La confrontation des observés à ces observables permet de distinguer ce qui est de l'ordre du contingent (ce qui survient en situation de classe mais aurait pu aussi bien ne pas survenir ou ce qui n'est pas survenu alors qu'il aurait dû le faire) ou du nécessaire (ce qui devait arriver ou ne pas arriver) ».

Ce chapitre, et plus particulièrement cette section, s'attache à ce qui correspond à la confrontation de la séquence didactique à la réalité de la classe pour distinguer le nécessaire du contingent. Selon Dias, « cette phase [de confrontation à la contingence] correspond davantage à un test des prédictions conduites dans le modèle expérimental *a priori*, mais aussi à un dispositif de régulation/modification des éléments décrits dans le modèle théorique. [...] Pour nous, cette phase est essentielle du fait de sa place dans l'articulation entre le prévisible et l'observé. [...] La mise à l'épreuve des situations construites par l'observation en classe permet non seulement des études comparatives entre les contextes d'enseignement/apprentissage visant à tester la robustesse des situations et dégager des invariants, mais aussi l'apparition de phénomènes inattendus, de surprises didactiques (Conne [27]) permettant d'enrichir en retour les phases de conception de chercheur » (2006, pp. 12-13). L'ensemble de cette section s'intéresse à développer ces phénomènes rencontrés lors de nos passages dans les classes.

Vergnaud soulève un point supplémentaire en posant la question de la possibilité « au niveau d'une séquence didactique relativement longue et complexe, et au niveau de toute une classe, d'observer des régularités dans les événements qui se produisent, régularités interprétables par l'analyse des conditions qui leur ont donné naissance, et pouvant comme telles être considérées comme des faits didactiques » (1981b, p. 228). Il y répond plus loin (*Ibid.*, p. 229) : « lorsqu'on répète la même séquence didactique avec plusieurs classes d'élèves, on constate des régularités très importantes, notamment au niveau des distributions de conduites, et les variations prennent elles-mêmes un sens par rapport à ces régularités. La répétition permet en tout cas d'améliorer la formulation des objectifs et des hypothèses, et de remettre en chantier les propositions didactiques qui ont fait l'objet de l'expérience ». Les nombreuses expérimentations réalisées permettent de mener à ce que Vergnaud décrit.

Les sections suivantes s'attachent ainsi à présenter nos observations qui s'apparentent à des régularités ou des « surprises didactiques ». Un rapide aperçu des modifications occasionnées par les premiers tests de la séquence a été donné dans la première section de ce chapitre. Les sections ci-dessous présentent chacun de ces points, dans un ordre qui correspond à l'évolution de la séquence didactique.

Nous ne reviendrons pas sur l'amélioration de la clarté des feuilles de travail qui a permis aux élèves une meilleure appropriation de la séquence, cela a été détaillé dans la section 5.1. Nous complétons simplement par la remarque de Brun : « Parmi les variables susceptibles d'influencer la résolution, une attention toute particulière doit être portée à la formulation des énoncés. Même s'il est difficile de dissocier cette formulation des structures relationnelles mêmes, certaines formes d'énoncés semblent rendre la structure d'un problème plus claire que d'autres, et donc plus facile à se représenter pour le sujet » (1989, p. 7).

27. Conne F. (2006). La didactique des mathématiques comme didactique d'une science étonnante. *Revue l'Éducateur*, numéro spécial, 31 mars 2006, pp. 21-26.

5.2.1 Mise en place de l'activité expérimentale

Rappelons que l'activité d'introduction, relative à la variation de la hauteur dans la casserole, a pour objectif de permettre aux élèves de s'approprier le matériel et d'entrer dans la démarche expérimentale.

Au cours des expérimentations réalisées dans les classes Bx_1 et Bx_2, nous avons remarqué que cette activité d'introduction, qui était alors réalisée en groupes, prenait beaucoup de temps, sans qu'il n'y ait de véritables échanges entre les élèves des différents groupes. Nous avons alors modifié son organisation et avons réalisé l'expérience avec l'ensemble de la classe lors des expérimentations suivantes. Cela a permis de faire bénéficier tous les élèves des interactions intéressantes entre pairs afin de mener la suite de la séquence de façon plus efficace. Les élèves ont ainsi été à l'écoute les uns des autres dans chacune des classes.

L'annexe D fournit le scénario d'une telle présentation : c'est la transcription de l'enregistrement des vingt premières minutes d'un cours donné dans une des classes de Namur en mars 2010 (Na_1). L'enseignant de cette classe n'avait pas souhaité mener la séquence, le terme « enseignante » repris dans l'annexe fait donc référence au chercheur. Les commentaires de cette section se basent sur ce script mais seront complétés par des illustrations issues des expérimentations réalisées dans d'autres classes, pour lesquelles un compte-rendu a chaque fois été produit.

L'apport d'un objet de la vie courante – une casserole – en classe déstabilise les élèves. Ils ont d'emblée une impression de faire autre chose que des mathématiques. Pourtant, dès la première question posée par l'enseignante, on leur demande de se plonger dans le monde mathématique en caractérisant mathématiquement l'objet.

1	enseignante	Pour commencer, vous voyez, on vous a amené du matériel, notamment une casserole. Quelle forme a-t-elle ?
2	élève	Cylindrique.
3	enseignante	C'est une casserole qui est cylindrique, elle a la forme d'un cylindre. Toute cette semaine nous allons travailler avec des cylindres. [...]

FIGURE 5.1 – Extrait d'un échange dans la classe Na_1

Ensuite, lorsque l'enseignante demande d'estimer le nombre de verres qui seront à verser dans la casserole pour la remplir jusqu'à la moitié de sa hauteur, on remarque que les élèves cherchent à donner une réponse convenable. L'un d'entre eux demande par exemple à mieux visualiser le verre étalon (ligne n° 6).

6	élève	On peut voir le verre ? Non, dans l'autre sens. [...]
7	enseignante	Chacun a une estimation ?

8	élève	18
9	élève	4
10	élève	4 aussi
11	élève	13
12	élève	10
13	élève	17

FIGURE 5.2 – Extrait d'un échange dans la classe Na_1

Les estimations sont très variées, ça a été le cas dans toutes les classes. Dans cette transcription, elles s'étendent de 4 à 18 verres. Ceci montre l'intérêt de tester plus fréquemment l'aptitude des élèves à estimer. Notons que les nombres proposés par les élèves sont systématiquement des nombres entiers. Un seul élève sur l'ensemble des classes s'est autorisé à exprimer un intervalle : « entre 7 et 10 » (Sa_3).

Après l'étape d'estimation, les élèves procèdent à l'expérience. Quelques élèves ont souhaité revoir leur estimation après que le premier verre ait été versé dans la casserole. Depuis lors, les élèves sont explicitement invités à modifier leur première estimation s'ils le souhaitent. L'expérience a toujours été recommencée à plusieurs reprises pour différentes raisons, par exemple l'oubli du dénombrement de verres versés, ce qui est notamment arrivé dans la première classe expérimentale. Une autre raison qui a systématiquement obligé le renouvellement de l'expérience est celle de ne pas avoir rempli le verre à la même hauteur chaque fois.

Lors de chacune des expérimentations, l'enseignante invite les élèves à réagir pendant le déroulement de l'expérience.

14	enseignante	[...] Vous regardez, vous réagissez en fonction de ce qui est fait, bien fait, pas bien fait. Ah, un premier me dit qu'il faudrait le tremper à fond, à votre avis ? On va d'abord discuter, tu continueras après [...] Pourquoi ça sera à fond ou pas ?
15	élève	Pour avoir toujours la même chose, la même quantité.

FIGURE 5.3 – Extrait d'un échange dans la classe Na_1

L'enseignante évite de cette façon de devoir intervenir elle-même comme le montrent les lignes ci-dessus où on comprend qu'un élève est intervenu pour signaler ce qui lui paraît être un mauvais procédé pour mener l'expérience correctement. Ensuite, c'est un autre élève qui avance l'argument qui en explique la raison (ligne n° 15).

Dans les premières classes expérimentales, les bassins qui permettaient de remplir le verre étalon n'étaient pas assez profonds. C'est ce qui a poussé les élèves à pointer le fait qu'il doit à chaque fois être rempli de la même façon. Dans une autre classe (Na_4), un élève a argumenté de cette manière : « si on ne le remplit pas à fond, on n'est pas sûr de mettre la même quantité d'eau dedans. Donc on doit mettre des verres entiers ». Dans une classe des expérimentations menées à Sambreville (Sa_5), les élèves se sont questionnés sur le choix de remplir l'étalon à ras-bord ou jusqu'à un certain niveau. Leur choix s'est porté sur le remplissage complet du verre car la limite du remplissage pouvait ainsi être visible par tous. Nous pouvons ajouter à cela que le remplissage est ainsi plus facile et précis. C'est ce choix qui a finalement été fait dans l'ensemble des classes.

Poursuivons le scénario de l'annexe D. Lorsque l'enseignante demande si l'expérience peut continuer de cette manière, un élève perçoit directement le problème.

17	élève	Non, parce que la première fois le verre n'était pas plein.

FIGURE 5.4 – Extrait d'un échange dans la classe Na_1

L'expérience a à peine le temps d'être recommencée qu'un élève intervient.

19	élève	Mais, on ne connaît pas la hauteur de la moitié.

FIGURE 5.5 – Extrait d'un échange dans la classe Na_1

L'oubli de la notation de la hauteur moitié de la casserole est une troisième cause de l'obligation de recommencer l'expérience à son début. Dans de nombreuses classes, les élèves remplissent la casserole jusqu'à un niveau qu'ils estiment être la moitié de la hauteur avant de se poser la question de la hauteur précise à atteindre.

Lorsque les élèves ont conscience de la nécessité de marquer la hauteur moitié, un élève est invité à le faire devant ses camarades.

26	enseignante	Prends de quoi mesurer.
27	élève	Qui a une latte ?
28	enseignante	Il y a une latte derrière toi que tu peux prendre.
29	enseignante 2	N'hésitez pas à intervenir, calmement, mais vous pouvez donner votre avis.
30	élève	La casserole n'est pas parfaitement droite, je dois faire une trace parce que sinon ça ne va pas aller. Ça doit être précis Madame ?
31	enseignante	Oui, sinon ça n'ira pas.
32	enseignante 2	Ah, écoutez un peu…
33	élève	Moi j'ai une latte qui commence à zéro tout pile parce que celle-là, il y a un petit peu, ça ne commence pas, je ne sais pas comment expliquer. Il y a un petit espace.
34	enseignante	Voilà, il y a un petit espace.

35	élève	Moi j'ai une équerre.
36	enseignante	L'équerre ce n'est pas l'idéal. On vous a préparé un petit matériel qu'on va vous montrer, mais je vois qu'il y a d'abord une question.
37	élève	On peut prendre un compas.
38	enseignante	Un compas, ce n'est pas une mauvaise idée du tout. Explique comment tu ferais.
39	élève	Je prendrais l'ouverture de la hauteur et puis je prendrais une latte et je mesurerais.
40	enseignante	C'est une très bonne manière de mesurer aussi [...] Pour vous faciliter le travail, on vous a préparé des petits bâtons gradués qui commencent à zéro [...] En noir on a fait tous les centimètres et en vert les demi-centimètres. Ça, c'est ce qui peut remplacer la latte qui commence à zéro. Je te laisse le faire. [...]

FIGURE 5.6 – Extrait d'un échange dans la classe Na_1

L'utilisation d'une règle graduée est la première réaction qu'ont tous les élèves. Afin de faciliter l'intervention des autres élèves pour réagir à cet outil inapproprié dans cette situation, la deuxième personne présente dans la classe prend la parole (ligne n° 29). C'est elle qui repère une intervention intéressante d'un élève (lignes n° 32 et 33). Cette première intervention en amène d'autres avec diverses idées des élèves (lignes n° 35 et 37) et le matériel préparé est alors présenté aux élèves. Dans d'autres classes, des élèves ont proposé d'utiliser par exemple un mètre ruban (Na_7). Même s'il a le désavantage d'être souple, la première graduation est au bord du ruban. Un élève qui avait pris sa règle pour mesurer la hauteur moitié devant le reste de la classe a dit à l'enseignante qu'il aurait préféré avoir une corde car, sur sa règle, il y avait « un bout en trop » (Na_4). Dans une autre classe (Bx_2), un élève a souhaité « couper un bout de la latte pour que ce soit exact ».

Dans la plupart des classes, il a été évident pour les élèves de mesurer la hauteur à l'intérieur de la casserole, vu que c'est l'intérieur du cylindre qui est à remplir d'eau. Il n'est d'ailleurs fait nullement mention de la distinction intérieur/extérieur dans le script. Toutefois, dans deux classes distinctes, il y a eu confusion entre cette hauteur intérieure et la hauteur extérieure de la casserole. En effet, dans une classe (Na_2), l'élève a placé la casserole au bord du banc pour faire dépasser sa règle et se débarrasser ainsi du problème du « bout en trop ». Ses camarades l'ont arrêté rapidement en lui indiquant l'épaisseur non négligeable du fond de la casserole.

L'ensemble de ces réactions qui obligent les élèves à recommencer l'expérience plusieurs fois leur montre ainsi l'importance de se poser les bonnes questions assez tôt que pour fixer le procédé expérimental d'une manière correcte.

Mentionnons encore une réaction surprenante qui est apparue dans plusieurs classes.

43	élève	Mais en fait Madame on n'a qu'à remplir le tout et puis diviser en deux.

FIGURE 5.7 – Extrait d'un échange dans la classe Na_1

Dans cette classe, l'enseignante ne s'étend pas sur le sujet. Par contre, lors d'une précédente expérimentation où certains élèves ont eu cette même réaction (Bx_1), nous leur avons proposé un récipient non cylindrique (une flûte à champagne) pour vérifier s'ils adoptaient le même raisonnement. Un élève a expliqué que ce n'était pas pareil parce que « c'est pas la même chose en bas qu'en haut ».

Lorsque tous ces questionnements ont surgi, l'expérience peut recommencer dans de bonnes conditions expérimentales. Un élève remplit ainsi à nouveau la casserole pendant que les autres comptent et commentent. C'est alors qu'ils remettent en question leurs estimations comme en attestent les lignes n° 54, 57 et 60 où l'élève tente d'anticiper le résultat.

51	élèves	1...
52	élèves	2...
53	élèves	3...
54	élève	C'est déjà pas quatre.
55	élèves	4...
56	élèves	5...
57	élève	C'est peut-être huit ou neuf.
58	élèves	6...
59	élèves	7...
60	élève	Ça fait dix.
61	élèves	8...
62	élèves	9...
63	élève	C'est neuf.
64	élève	Ça fait neuf.
65	élève	Wouai !
66	élève	C'est pas bon parce qu'il y avait de l'eau en plus [...]
67	enseignante	Tu trouvais qu'il y avait de l'eau qui tombait à chaque fois à côté. C'est pas très précis, on aurait pu améliorer ça. [...]
68	élèves	Et aussi, au-dessus de la casserole c'est un petit peu comme ça [évasé] et puis ça touche pas vraiment la ligne. [...]

FIGURE 5.8 – Extrait d'un échange dans la classe Na_1

Tandis qu'un des élèves est heureux d'avoir trouvé réponse à la question (ligne n° 65), un autre élève conteste le résultat (ligne n° 66). L'enseignante comprend par là que cet élève a repéré que l'expérience n'avait pas été très précise.

L'activité se poursuit en demandant aux élèves d'anticiper le nombre de verres qui doivent être versés pour remplir la casserole entièrement.

70	élève	18 parce que c'est le double, non, 19 parce qu'il y en a un peu plus que 9. [...]

FIGURE 5.9 – Extrait d'un échange dans la classe Na_1

Cet extrait illustre ce qui nous a surpris dès la première expérimentation. Les élèves sont très au clair avec la réalité de la situation. La plupart pense que la réponse mathématique correspond à doubler le nombre de verres versés mais que le résultat de l'expérience sera autre. Les élèves donnent divers arguments. Dans cette classe, l'un remarque que le nombre de verres à verser pour atteindre la moitié de la hauteur n'est pas exactement neuf, ce qui correspond à ce qui a été signalé juste avant par un autre élève lorsqu'il remarque que ça n'atteint pas exactement la marque (ligne n° 68).

Dans d'autres classes, ils dénoncent l'imprécision de l'expérience et surtout la forme de la casserole : « la casserole n'est pas tout à fait cylindrique » (Na_6), « la casserole est évasée » (Na_8) ou encore « le bord de la casserole est évasé » (Na_4). Un élève veut encore être plus précis : « la casserole s'ouvre un peu sur le dessus et, dans le bas, c'est un petit peu rentré » (Na_3). Toutes ces explications aboutissent à une prévision d'une unité supplémentaire par rapport au double du nombre de verres versés : « c'est évident vu qu'on double la hauteur et que le dessus de la casserole s'évase un peu » (Bx_2).

L'expérience a validé les prévisions des élèves dans la plupart des classes. Ça n'a pas été le cas pour la classe concernée par la transcription de l'annexe D. Le banc n'étant pas droit, il n'a pas été possible de remplir complètement la casserole. L'enseignante a alors clôturé cette activité d'introduction en rappelant l'importance de la précision pour mener correctement une expérience et l'intérêt de réaliser plusieurs expériences.

Pour terminer cette section, partageons une autre observation de ce qui s'est passé régulièrement dans les classes. Lorsque le niveau de l'eau atteint presque le bord de la casserole, les élèves ne remplissent plus le verre entièrement pour éviter que l'eau ne déborde et sont parfois amenés à verser plusieurs parties de verres pour finir l'expérience en obtenant ainsi une réponse tout à fait imprécise. Nous leur avons alors proposé de procéder en remplissant le verre entièrement mais en ne le vidant pas complètement afin de déterminer la fraction du dernier verre versé.

5.2.2 Écarts constants et liens multiplicatifs

Grâce aux diverses observations réalisées au cours de l'activité introductive, la suite de la séquence didactique se déroule comme attendu, sans incident lié au milieu matériel. Après le remplissage d'un tube cylindrique à différentes hauteurs et l'indication des résultats dans leur tableau de données, les élèves identifient des liens qui permettent de passer des éléments d'une ligne à ceux d'une autre. L'expérience se déroule en petits groupes mais la recherche de liens se fait individuellement pour en favoriser la diversité.

Dans toutes les classes, des liens de type additif et multiplicatif ont été trouvés. Prenons l'exemple d'un groupe d'élèves munis d'une petite mesurette à verser trois fois dans le cylindre pour la détermination de la première hauteur.

	Hauteur (en cm)	Nbre de mes.	
$\times 2$	initiale $=$ 4,5	3	$\times 2$
$\times 3$	double $=$ 9	6	$\times 3$
	triple $=$ 13,5	9	

	Hauteur (en cm)	Nbre de mes.	
$+4{,}5$	initiale $=$ 4,5	3	$+3$
$+4{,}5$	double $=$ 9	6	$+3$
	triple $=$ 13,5	9	

Un rapport externe a rarement été repéré. Lorsqu'il l'a été, c'est parce que les données de l'expérience donnaient un tableau avec des valeurs particulières comme celui-ci (une grande mesurette à verser deux fois pour identifier la première hauteur).

Hauteur (en cm)	Nbre de mes.
6	2
12	4
18	6

L'expérience ne se prêtant pas à rencontrer naturellement le coefficient de proportionnalité, le choix de consacrer une autre activité de la séquence à cet outil nous paraît donc avoir été le bon. Nous y revenons à la section 5.2.6.

Bien que les deux types de liens aient été repérés dans toutes les classes, notons la prégnance de l'addition face à la multiplication. La formulation de la question (« Combien faudra-t-il de mesurettes pour atteindre le double, puis le triple de la hauteur de départ ? ») oriente les élèves vers la multiplication et pourtant, ils sont nombreux à remarquer d'abord les écarts constants. Ils relatent l'expérience en disant par exemple « j'ai ajouté deux mesurettes en plus ». Cette prégnance du modèle additif est également relevée par Brousseau pour la situation du puzzle (1998, pp. 237-241).

Dans une classe (Bx_2), beaucoup d'élèves avaient remarqué l'écart constant de deux mesurettes pour passer d'une ligne à la suivante. L'une des élèves avait observé qu'on pouvait également dire qu'on multipliait par deux pour passer d'une ligne à l'autre mais, suite à l'interruption produite par la sonnerie et des réflexions de ses camarades, elle s'est rétractée et a affirmé par après qu'elle s'était trompée. Cette situation a été très frustrante car, étant à la fin du cours, nous n'avons pas eu la possibilité de revenir plus longuement sur la première réflexion de l'élève. Elle avait pourtant une idée très intéressante : « quand on doit faire quelque chose d'un côté, on doit faire pareil de l'autre ».

Dans cette classe, au cours suivant, les résultats et liens apparus jusque là (les écarts constants) ont été affichés au tableau noir. Pour que les élèves élargissent leur réflexion, des flèches supplémentaires ont été placées de part et d'autre du tableau afin d'illustrer et de faire remarquer les liens de type multiplicatif aux élèves. Le lien entre la manipulation qui avait été réalisée (doubler la hauteur) et le « $\times 2$ » que les élèves retrouvaient dans le tableau a alors pu être établi.

Dans un premier temps, nous n'avons pas imaginé l'inconvénient de laisser les élèves prendre note des différents liens envisagés. Au fur et à mesure des expérimentations, il est devenu évident qu'ils identifiaient les écarts constants à une caractérisation de la proportionnalité. Deux enseignantes nous ont d'ailleurs interpellés en fin d'année car plusieurs de leurs élèves utilisaient cette caractéristique pour repérer des grandeurs proportionnelles.

Face à ce constat, il a été impératif d'adapter l'écriture de la séquence didactique. Il n'est pas pertinent d'empêcher le repérage des écarts constants mais il est important de mettre en évidence des arguments en faveur des liens multiplicatifs.

Cette réflexion nous a paru primordiale à partager avec les enseignants qui s'approprieront la séquence. Nous avons alors décidé d'attirer l'attention sur le fait que des écarts constants apparaissent lorsque les valeurs de deux grandeurs proportionnelles sont organisées comme dans le tableau de gauche, mais également dans des tableaux comme celui de droite qui concerne des grandeurs liées par une fonction affine et non par une fonction linéaire.

	Hauteur	Nbre de mes.	
	4	2	
+4			+2
	8	4	
+4			+2
	12	6	
+4			+2
	16	8	

	Grandeur 1	Grandeur 2	
	1	2	
+4			+2
	5	4	
+4			+2
	9	6	
+4			+2
	13	8	

Les points du graphique représentant les grandeurs du deuxième tableau ne sont d'ailleurs pas alignés avec l'origine et il est impossible d'inscrire le couple (0,0) en conservant ces écarts constants, contrairement aux données du tableau de gauche.

Le repérage des écarts constants n'est ainsi pas une condition suffisante pour que les grandeurs soient proportionnelles. De même, il suffit de permuter des lignes dans le tableau de gauche pour remarquer que cette condition n'est pas non plus nécessaire.

Il n'est pas envisageable de présenter ces arguments aux élèves de cet âge, d'autres ont ainsi été envisagés pour les encourager à privilégier le modèle multiplicatif. Il s'agit notamment de remarquer que les écarts constants repérés dans un tableau organisé dépendent des valeurs initiales et que l'utilisation de liens de type additif nécessite parfois des étapes intermédiaires.

Il n'est pas toujours nécessaire d'intervenir, certains élèves s'aperçoivent de ces désagréments et les partagent avec le reste de la classe. Par exemple, lors d'une mise en commun de résultats où de nombreux élèves avaient trouvé des liens multiplicatifs, un élève est intervenu : « moi, j'ai fait plus mais c'est pas la même chose des deux côtés » (Sa_2). Un autre exemple vient d'un élève qui a utilisé les écarts constants pour remplir le début de son tableau et est passé à un lien multiplicatif ($\times 2$) pour calculer la hauteur décuple à partir de la hauteur quintuple. Il a été fier d'exposer sa solution devant ses camarades (Na_7).

Dans la classe Bx_2 où les élèves n'avaient repéré que les écarts constants (et avaient donc calculé les états intermédiaires entre les hauteurs quintuple et décuple), l'enseignante a ajouté une ligne au tableau.

hauteur 123 = cm	

C'est cet exemple qui semble avoir convaincu les élèves que les liens de type multiplicatif étaient plus efficaces.

La synthèse et les exercices proposés ensuite par les enseignants des classes dans lesquels la nouvelle version de la séquence didactique a été mise à l'épreuve (en 2013 : St, WB et Ni) se sont ainsi mieux déroulés.

5.2.3 Adéquation d'un modèle pour la variation du diamètre

Cette section s'intéresse à la partie de la séquence liée à la variation du diamètre. Elle est séparée en trois sous-sections qui s'attachent à trois temps distincts de l'activité.

La première fait part des diverses conjectures des élèves avec les explications y liées, ainsi qu'à la révision de ces estimations au cours de l'expérience. L'importance d'avoir inséré un tableau permettant aux élèves d'y inscrire leurs estimations y est développée.

La deuxième partage les explications avancées par les élèves pour justifier la non-concordance des résultats de l'expérience avec un modèle proportionnel, celui-ci correspondant aux conjectures de la plupart des élèves.

La troisième relate les tentatives de formulation des élèves pour trouver le modèle à associer à la variation du diamètre d'un cylindre.

De par la remise en question du modèle, l'ensemble de cette section est étroitement liée aux phases d'action, de formulation et de validation que les élèves ont mises en œuvre via la démarche expérimentale exploitée.

Estimations et nécessité d'un tableau d'estimation

Les élèves ont été invités à réfléchir sur le volume d'un cylindre lorsqu'on fait varier le diamètre, à partir de trois cylindres – de diamètres simple, double et triple – qui leur ont été présentés. Ils ont estimé individuellement le nombre de mesurettes nécessaires au remplissage des cylindres de diamètres simple, double et triple jusqu'à une même hauteur. Rappelons que la mesurette correspond au cylindre de diamètre initial. Les conjectures qui apparaissent le plus souvent à travers toutes les classes sont 1 - 2 - 3, ce qui montre la prégnance du modèle linéaire, mais il est aussi proposé d'autres estimations. Nous y revenons ci-après.

Dans une classe de deuxième (Bw), les réactions ne se sont pas fait attendre suite à notre demande d'estimation : « c'est facile, il faut deux et trois mesurettes », « c'est encore trop simple », « vous êtes sûres que c'est de la matière de deuxième qu'on est en train de faire ? », ... Dans une autre classe – toujours de deuxième (Na_5) – un élève a même rétorqué : « trop facile, pas besoin de vérifier ». Cet élève avait d'ailleurs déjà complété le tableau lié à l'expérience sans l'avoir réalisée tellement ça lui paraissait logique et inutile à expérimenter.

Ainsi, comme nous l'avions imaginé, une grande majorité des élèves prévoient des rapports simple, double et triple entre les cylindres et la mesurette. Cette observation est notamment liée selon nous à ce qu'avancent Boisnard & *al.* : « lorsqu'on a fait une série d'activités où des tableaux de proportionnalité interviennent, il est tout naturel d'appliquer les procédures que l'on vient de découvrir à n'importe quel tableau. Le discours, ici est inutile. Il est nécessaire que l'élève expérimente lui-même l'inadéquation du modèle » (1994, p. 154). C'est ce qui est évidemment proposé dans la suite de la séquence.

Cependant, comme évoqué plus haut, quelques élèves dans chacune des classes ont formulé d'autres conjectures. Rappelons que la séquence a été testée dans une trentaine de classes, ce qui correspond à plus de 600 élèves et explique une telle variété de propositions.

Il est intéressant d'observer que c'est dans les classes « complémentaires » (formées d'élèves dits en difficulté) qu'il y a eu le moins de conjectures « simple - double - triple ». Une explication peut être que ces élèves sont moins « scolaires » et donc moins tentés de réinvestir ce qu'ils viennent d'observer juste avant. Ils se basent davantage sur leurs observations.

Laverdure (2005, p. 26) distingue ainsi deux types d'élèves :

> [...] en maths, il n'y a pas que la rigueur et le raisonnement, mais aussi l'imagination et l'analogie. [...] faire des maths ce n'est pas toujours ce que l'on pense. Au-delà des manipulations de symboles, il existe cette capacité fondamentale à reconnaître le rôle des mathématiques dans notre environnement. Observons deux types d'élèves. Pour les élèves du premier type, les maths sont plus facilement accessibles par l'entremise de l'analogie, de situations provenant de leur vécu et grâce à des images mentales fortes. Ces élèves ne sont pas forcément bons en raisonnement. [...] Pour les élèves du second type, la capacité à visualiser et à faire preuve d'imagination ne vient pas facilement... Probablement parce que l'école les a rarement encouragés à être créatifs dans un domaine comme celui des maths [...] ils possèdent un type de pensée logique plutôt qu'analogique. En classe, [...] il est plutôt usuel de cibler la rigueur du raisonnement comme pierre d'assise de la pensée mathématique.

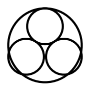
Cette habitude à « cibler la rigueur du raisonnement », repérée par Laverdure, correspond au contrat évoqué par Schneider qui s'appuie sur des propos de Castella & Mercier [28] : « Pour eux, cette plasticité du contrat est différentielle suivant la

28. Castella C. & Mercier A. (1994). Peut-on enseigner des méthodes ? Comment les élèves apprennent-ils des méthodes ? *Bulletin de la Commission Inter-IREM de didactique des mathématiques*, n° 1.

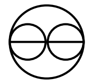
position que l'élève occupe dans la hiérarchie de la classe et les "bons" élèves sont ceux qui font le plus les frais des ruptures de contrat signalées plus haut, sans doute pour avoir développé un rapport personnel trop conforme au rapport attendu par l'institution scolaire jusqu'au moment où ce dernier rapport évolue pour attendre d'eux un rapport nouveau à un savoir ancien » (Schneider, 2008, p. 305).

Les expérimentations à Namur nous ont donné un bel aperçu de prévisions « non proportionnelles ». Certaines estimations n'ont pas été justifiées, c'était une impression de l'élève, un ressenti (par exemple : 1 - 2 - 4 ; 1 - 3 - 5 ; 1 - 3 - 6 ; 1 - 3 - 7 ; 1 - 4 - 6 ; 1 - 4 - 8 ; 1 - 4 - 16 ; 1 - 8 - 18). D'autres élèves ont donné des explications – correctes ou non – souvent illustrées. Voici quelques-unes d'entre elles.

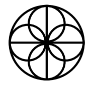
« 1 - 3 - 6 car 2, ça ne remplirait pas assez » (Na_4)

« 1 - 3 - 6 » avec ce dessin pour seule explication (Na_3) 

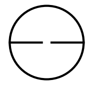
« 1 - 2.5 - 4 car, pour moi, on devrait mettre plus de 2 mesurettes dans un cylindre de diamètre double », « il y a de la place au-dessus et en-dessous », en faisant référence au dessin ci-contre (Na_8)



« il faudrait 4 mesurettes pour le cylindre de diamètre double car le diamètre double dans un sens [il montre une direction verticale avec ses mains] et dans l'autre [direction horizontale] » (Na_1), ce dessin aurait pu illustrer son explication



« 1 - 4 - 7 », par pressentiment selon l'élève, accompagné de ce dessin (Na_3)



« 1 - 4 - 16 car si le diamètre double, ça peut pas être deux mesurettes », l'élève s'est justifiée en réalisant un dessin avec ses doigts en représentant un diamètre double et le disque que ça représente. Elle visualisait qu'il y avait plus de place que pour les 2 cylindres avec le diamètre initial (Na_7)

« 1 - 4 - 12 ou 16 car quand on double, on quadruple toujours le volume » (Na_7)

« 1 - 4 - 9 » cet élève a pensé à la formule du volume d'un cylindre et calculé le nombre de mesurettes nécessaires (Na_6)

« 1 - 4 - 12, à cause du diamètre qu'on double. Vu que chaque diamètre est en fait deux fois le rayon, il faut multiplier par 4. » Dans un deuxième temps, l'élève s'est ravisé en pensant à la formule du volume d'un cylindre, il a entrevu le lien avec le r^2 (Na_4)

« la formule du volume est liée au rayon et, vu que le diamètre est égal à deux fois le rayon et qu'on double le diamètre, le rayon est multiplié par 4 » (Na_1)

Bien qu'il ait été nécessaire de discuter avec certains élèves quant aux formulations proposées, comme pour ces deux derniers élèves qui avaient basé leur raisonnement sur une connaissance erronée (ou l'élève dont il est question ci-dessous), les élèves nous ont impressionnés par leurs intuitions parfois bien argumentées.

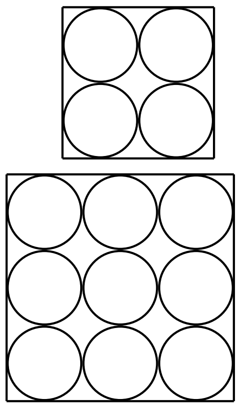
Par exemple, un élève (Bw) a tenté lui aussi d'utiliser une formule quelque peu « arrangée » du volume d'un cylindre. Il s'est basé sur $V_{cyl} = \pi d^2 h$, l'a transformée en $V_{cyl} = \pi(2r)^2 h$, ce qui a donné

$$\frac{\pi\,(4\,r)^2\,h}{\pi\,(2\,r)^2\,h} = 4 \quad \text{pour le volume du cylindre de diamètre double et}$$

$$\frac{\pi\,(6\,r)^2\,h}{\pi\,(2\,r)^2\,h} = 9 \quad \text{pour le volume du cylindre de diamètre triple.}$$

Signalons que quelques élèves évoquent le non-respect de la proportionnalité ou de la règle de trois mais sans développer davantage.

Partageons encore cette explication d'élève (Bw) dont la réflexion repose sur le carré : « lorsqu'on multiplie le côté d'un carré par deux, on multiplie l'aire de ce carré par 4 ». Il a illustré son rapprochement avec les disques par ce dessin.



Il s'est donc assuré d'obtenir un résultat de 9 mesurettes par un raisonnement analogue pour le cylindre de diamètre triple. Nous reviendrons à de telles explications dans la sous-section consacrée à la recherche du modèle approprié (page 134).

Lors des premières expérimentations, nous avons proposé aux élèves de partager leurs conjectures et premières formulations avec le reste de la classe. Nous avons remarqué que cette manière de procéder, et de faire ainsi déjà réfléchir les élèves à la possibilité de ne pas obtenir 1 - 2 - 3 comme résultats, diminuait l'impact de l'expérience. Nous avons alors décidé, pour la suite des expérimentations, de conserver cette part du travail uniquement en individuel. L'expérience proprement dite se déroule par contre en petits groupes.

Les procédures utilisées au sein des différents groupes pour réaliser l'expérience ont été plus variées que ce que nous avions imaginé. Nous relevons plusieurs techniques particulières ci-dessous.

La première, utilisée dans presque un groupe par classe, est économique en dénombrement de mesurettes et en temps. Pour remplir le cylindre de diamètre triple, les élèves utilisent le contenu du cylindre de diamètre double, rempli jusqu'à la hauteur indiquée, qu'ils savent contenir l'équivalent de quatre mesurettes. Il est possible de le verser deux fois dans le cylindre de diamètre triple et, pour les élèves qui ont été méticuleux, ils s'aperçoivent alors qu'on peut encore verser une fois le contenu du cylindre initial. Notons que cette technique n'a pas paru évidente aux yeux de tous les élèves. Certains ont ressenti le besoin de recommencer l'expérience pour s'assurer que c'était bien équivalent à neuf mesurettes en versant les mesurettes les unes après les autres. Remarquons aussi que, s'il y a eu une erreur commise lors du remplissage du cylindre de diamètre double, elle est reportée dans le résultat du cylindre de diamètre triple. C'est ce qui est arrivé à l'un des groupes qui avait dénombré cinq mesurettes pour le cylindre de diamètre double et a ainsi conclu à un résultat de onze mesurettes pour celui de diamètre triple.

Une technique intéressante, mais qu'on n'a vu apparaître qu'une seule fois, est celle d'un groupe qui a effectué le comptage de manière inverse. Les élèves ont rempli le cylindre de diamètre double jusqu'à la marque et puis l'ont vidé dans la mesurette pour compter combien de fois ils pouvaient la remplir. Ils ont expliqué qu'ils procédaient comme tel dans un souci de précision car ils avaient remarqué que l'eau ne coulait pas bien du petit tube. Suite à cette dernière observation, récurrente, nous avons décidé de montrer aux élèves, en début d'expérience, comment manipuler la mesurette très étroite pour éviter d'avoir des bulles d'air lors du remplissage ou comment faire s'écouler l'eau du tube.

Les élèves d'un groupe ont poussé la précision jusqu'à essuyer leur mesurette à chaque fois avant de la verser dans un autre cylindre. Un autre groupe nous en a fait observer une variante : un élève était chargé de remplir la mesurette dans le bassin d'eau et c'est un autre, qui avait les mains sèches, qui la versait dans un cylindre. Cette méthode évitant les gouttes « parasites » lors des transvasements d'eau d'un cylindre à un autre, nous avons jugé bon de la proposer dans les classes lors des expérimentations ultérieures.

Une autre technique qui a mérité d'être partagée dans les autres classes est celle qu'a suivie un groupe pour remplir plus précisément sa mesurette. Ce cylindre étant effectivement étroit, les élèves ont décidé d'utiliser une seringue pour le remplir, sans que l'eau ne soit bombée sur le dessus de la mesurette. Cette méthode a également été exploitée pour remplir un cylindre de diamètre double afin de verser son contenu dans un cylindre de diamètre triple.

Une dernière remarque se rapporte à l'oubli de marquer la hauteur à atteindre dans les cylindres de diamètre double et triple. Ceci a mené un groupe, qui avait estimé qu'il faudrait trois mesurettes pour remplir le cylindre de diamètre double, à verser ces trois mesurettes pour regarder seulement à cet instant si la hauteur obtenue correspondait à celle du cylindre initial, en plaçant les deux cylindres côte à côte. L'eau n'atteignant pas la hauteur souhaitée, les élèves ont ajouté le contenu d'une quatrième mesurette et se sont alors rendu compte qu'il était plus pratique et judicieux de marquer la hauteur au préalable pour s'assurer de l'avoir atteinte.

Comme prévu, les élèves dont l'estimation était de deux mesurettes pour remplir le cylindre de diamètre double jusqu'à la même hauteur que celle du cylindre initial, ont été surpris de la hauteur atteinte après avoir versé une première ou ces deux mesurettes. Dans de nombreux groupes, on a observé les élèves secouer avec énergie leur mesurette qu'ils ne pensaient pas vide, au vu de la hauteur atteinte par l'eau dans le cylindre de diamètre double après le premier transvasement. Le niveau de l'eau n'atteignait que le quart de la hauteur alors que les élèves s'attendaient à ce qu'il corresponde à la moitié de la hauteur totale. La plupart des élèves remarquant que la phase d'action ne correspondait pas à leurs conjectures, ils les ont alors remplacées par une nouvelle estimation. Après avoir terminé la manipulation pour le cylindre de diamètre double, une élève répétait « c'est vraiment bizarre que ce soit quatre, ça devrait être deux vu qu'on a doublé le diamètre » (Bw). Cette élève est restée perplexe devant l'expérience. Ce sont les explications de ses pairs, dont il est question dans la section suivante, qui lui ont permis de comprendre ce « phénomène » et de valider ainsi ce résultat.

De nombreux élèves ont réévalué leurs estimations : celle pour le cylindre de diamètre double après y avoir versé une mesurette comme mentionné ci-dessus, et l'estimation pour le cylindre de diamètre triple après acceptation du résultat de l'expérience pour le cylindre de diamètre double.

Les estimations pour le remplissage du cylindre de diamètre triple ont ainsi été revues à la hausse : elles se sont principalement portées à six et huit. Les élèves convaincus par le chiffre huit se sont souvent arrangés pour obtenir huit mesurettes comme résultat de l'expérience. D'autres ont remarqué qu'en utilisant la technique décrite plus haut (verser deux fois le contenu du cylindre de diamètre double dans celui de diamètre triple), la hauteur fixée n'était pas atteinte et qu'il restait de la place pour ajouter une mesurette. Avant de formuler une nouvelle conjecture, certains élèves ont préféré verser une première mesurette dans le cylindre de diamètre triple.

Si un tel étonnement a pu être occasionné, c'est grâce à l'insertion, dans les feuilles de travail, d'un tableau amenant les élèves à écrire leurs estimations. Dans les deux premières classes expérimentales (Bx_1 et Bx_2), ce tableau n'avait pas été prévu et les élèves faisaient part de leurs estimations uniquement oralement. Au cours des expériences, ils avaient alors une forte tendance à occulter leurs idées premières, ce qui réduisait l'effet positif du conflit cognitif induit par le milieu.

Ce tableau, destiné à l'écriture des estimations, permet ainsi aux élèves d'y être confrontés lorsqu'ils réalisent les expériences. Cette confrontation à la non-concordance entre prévisions et résultats de l'expérience est nécessaire à la construction de la connaissance. En effet, les résultats déstabilisent les élèves et les incitent à se poser davantage de questions ainsi qu'à chercher des justifications pour comprendre les résultats obtenus.

Explications de la non-concordance des résultats avec le modèle proportionnel

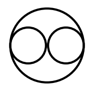
Quelques élèves, peu nombreux, ont anticipé les résultats de l'expérience grâce à des arguments corrects. D'autres, sans prévoir les résultats exacts, se sont rendu compte que les résultats ne pourraient suivre un modèle proportionnel. Comme souligné précédemment, beaucoup d'élèves ont toutefois imaginé obtenir les résultats 1, 2 et 3 pour le remplissage des cylindres. Ces conjectures ont été avancées de manière individuelle, sans les partager avec le groupe-classe (à partir des expérimentations de 2010 : Bw, Na, ...), ce qui a permis à la majeure partie des élèves d'être surprise de ne pas retrouver les résultats prévus (1 - 2 - 3).

Quelques arguments se sont parfois échangés pendant la phase de travail menée en groupe mais la phase collective a ensuite eu toute son importance. En effet, comme Dias le souligne, « chacun sait que la mise en mots (à l'oral) par les élèves est alors une phase déterminante en situation d'apprentissage, surtout lorsqu'elle accompagne une activité d'investigation qui nécessite la formulation d'hypothèses de résolution par exemple, ou la confrontation d'idées par la comparaison de procédures » (2008, p. 167).

Tout comme lors de la phase d'estimation, les diverses idées émises par les élèves, pour s'expliquer la non-concordance des résultats avec le modèle proportionnel, ont souvent été accompagnées de dessins géométriques comme illustration, ou plus simplement de gestes. Lors de cette phase de formulation, les élèves avancent des raisonnements basés tant sur des intuitions correctes que sur d'autres qui ne le sont pas.

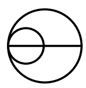
Par exemple, une élève, perturbée face aux résultats obtenus, aurait voulu faire « la même opération à gauche et à droite » du tableau, comme lors de la variation de la hauteur d'un cylindre, mais « ça ne fonctionnait pas ». Elle s'est demandée « pourquoi on fait $\times 2$ et $\times 3$ d'un côté et $\times 4$ et $\times 9$ de l'autre ? ». Un élève a tenté de lui expliquer : « c'est parce que le diamètre est beaucoup plus grand » (Bx_2). Dans d'autres classes, les élèves ont donné les explications suivantes : « c'est logique, c'est plus large donc l'eau s'étale plus » (Bw) et, plus embêtant, « il y en a plus que deux parce que l'eau s'aplatit sous le poids de l'eau » (Na_5).

Afin de valider ce pourquoi le nombre de mesurettes pour le diamètre double était plus grand que deux, un élève (Na_9) a avancé la raison suivante : « il y a plus de surface à remplir, il reste un petit peu », avec le dessin ci-contre qui lui a servi de support.



Cet argument avait été exprimé par des élèves d'autres classes lors de la phase d'estimation. Un complément a été donné par un élève d'une autre classe (Na_3) qui répondait à une de ses camarades qui trouvait les résultats « bizarres » : « mais non, le diamètre on doit pas faire $\times$ 2 car on voit que si on met le petit et un autre petit à côté, il y a encore de la place, le diamètre s'étend dans tous les sens c'est pour ça que 2 c'est pas suffisant ». Son dessin n'illustrait pas la fin de son intervention, c'était le même que celui ci-dessus, avec les diamètres tracés.

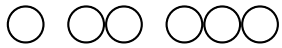
Par contre, un autre élève (Na_5) a réalisé le dessin ci-contre pour illustrer le fait que le disque s'agrandit dans toutes les directions.



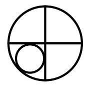
L'élève qui avait basé ses conjectures sur les dessins de disques dans un carré (page 130, Bw) a formulé son impression de devoir « multiplier par deux et puis encore par deux » en se basant sur le diamètre cette fois. Il a exprimé qu'il y avait « un diamètre vertical et un autre horizontal » et que c'était pour cette raison qu'il fallait multiplier par deux « dans les deux sens ». Cette explication, bien qu'incorrecte, est en adéquation avec les dessins réalisés.

D'autres formulations se sont basées sur des erreurs. Par exemple, un élève qui a obtenu neuf mesurettes alors qu'il en attendait huit a dit : « bizarre car on double puis on double » en pensant aux diamètres double et triple. Après quelques secondes de réflexion, il a réalisé tout seul : « ah non, on triple ! » (Na_9).

Une autre élève a tenu à se justifier par rapport à son erreur d'estimation. Elle s'attendait à 1, 2 et 3 mesurettes parce qu'elle imaginait les formes illustrées ci-dessous, non conformes à l'image de cylindres. Elle ne visualisait pas les cylindres de diamètre double et triple qui lui avaient pourtant été présentés (Na_5).



Une dernière explication que nous partageons ici est celle d'un autre élève qui explique que quatre mesurettes sont nécessaires pour remplir le cylindre de diamètre double car « le petit va dans $\frac{1}{4}$ de l'autre » (Na_1). Voici l'illustration de son explication, incorrecte.



À travers toutes ces formulations d'élèves, on observe qu'ils cherchent principalement à s'expliquer pourquoi les résultats de l'expérience ne suivent pas un modèle proportionnel. Certaines de ces explications ont pu être validées, d'autres ont été réfutées par les condisciples. Il y a peu d'essais de formulation relatifs à un modèle pour expliquer les résultats de l'expérience.

Revenons aux propos de Dias, soulevés à la page 89 de ce texte, relatifs à l'antagonisme du milieu qui est à la base du processus d'action, de formulation et de validation. C'est en effet face à des résultats contradictoires à leurs prévisions que les élèves peuvent ressentir la nécessité de réfléchir à un modèle en corrélation avec ces résultats, parfois inattendus.

Cette section a développé les phases de formulation et de validation liées à la reconnaissance d'un modèle non-proportionnel, la suivante s'attache à la formulation d'arguments pour identifier le modèle qui valide les résultats de l'expérience de la variation du volume d'un cylindre.

Recherche d'un modèle approprié

Les expériences terminées et les premières justifications exprimées pour expliquer la non-concordance des résultats avec ceux qui auraient résulté d'une situation de proportionnalité, l'enseignant amène les élèves à s'intéresser à un modèle qui corresponde à la situation.

Il a déjà été évoqué dans les sections précédentes que les cylindres utilisés étaient assez étroits. Cela a compliqué leur manipulation et des consignes ont donc été communiquées aux élèves afin d'obtenir des résultats les plus précis possibles. À ce jour, une idée serait de fabriquer avec une imprimante 3D des cylindres de diamètres – en rapports simple, double et triple – plus grands pour éviter cet inconvénient. Cependant, si les erreurs expérimentales étaient diminuées, on se retrouverait peut-être avec des classes dans lesquelles tous les groupes obtiendraient les mêmes résultats. Dans la situation de recherche qui a été mise au point, cela pourrait s'avérer gênant. En effet, l'obtention de résultats différents à la suite de l'expérience augmente l'intérêt de la recherche d'un modèle mathématique pour décrire l'expérience et fournir une réponse commune. Les élèves cherchent ainsi à comprendre le phénomène par un raisonnement et pas en se fiant à la seule observation. Les phases de formulation et de validation s'en trouvent enrichies.

Dans une classe (Na_3), un groupe a trouvé 1, 4 et 8 comme résultats. Les valeurs obtenues par tous les autres groupes étant 1, 4 et 9, les élèves du premier groupe se sont pliés à l'avis général et l'ont accepté sans aucune manifestation.

Fort heureusement, ça n'a pas été le cas dans les autres classes. Les répartitions de résultats obtenus dans les différentes classes ont été assez variées. Dans chacune des classes, les résultats des groupes ont été inscrits au tableau noir, pour être visualisés par tous les élèves, comme dans l'exemple ci-dessous, issu de la classe Bw.

diamètre	nombre de mesurettes par expérimentation
diamètre initial	1 1 1 1 1
diamètre double	4 4 5 4 4
diamètre triple	8 9 9 8 9

Cette diversité est déterminante pour que les élèves entrent et s'impliquent dans une phase de validation. Ils pourront alors formuler des conjectures pour les volumes des cylindres de diamètres plus grands et déterminer ainsi le modèle mathématique correspondant.

Pour que ces différents résultats apparaissent, il faut aussi que l'enseignant accepte les conséquences de la partie adidactique de la séquence et s'abstienne de toute réponse aux éventuelles questions des élèves concernant l'exactitude ou non des résultats trouvés. Les interactions entre élèves sont nombreuses. Ils cherchent parfois à se convaincre les uns les autres ou se demandent des explications entre eux. L'absence de réponse de l'enseignant crée une frustration chez les élèves qui renforce leur envie de comprendre les résultats de l'expérience.

Il est aussi arrivé que les élèves s'accusent. Par exemple, un élève s'est adressé à un groupe qui avait obtenu les résultats 1 - 4 - 8, « c'est parce que vous avez mal fait » (Na_8). Les élèves de ce dernier groupe ont rétorqué que leurs résultats « étaient mieux » parce que « 1 - 4 - 8 correspond à la table de quatre ». Il faut peut-être même imaginer que ces élèves, convaincus de devoir obtenir huit comme résultat, se sont « arrangés » pour l'avoir !

Ce genre de réflexions n'est évidemment pas propre à cette séquence, Schneider relève des faits similaires pour la situation du puzzle de Brousseau : « Les morceaux ne se recollent pas. Certains élèves incriminent d'abord le manque de soin avant de douter de l'efficacité de la procédure choisie. D'autres trichent en essayant de découper un puzzle "ressemblant" dans un cadre extérieur agrandi. » (2008, p. 136).

Il n'y a eu de discussion relative au résultat à valider pour le cylindre de diamètre double dans aucune des classes. Après le questionnement de la non-proportionnalité, sujet de la section précédente, il a été évident pour tous que le résultat à obtenir par expérience devait être quatre. Les quelques groupes qui avaient versé cinq mesurettes se sont incriminés eux-mêmes de manque de précision dans le déroulement de l'expérience.

Il n'en a pas été de même pour valider le résultat pour le cylindre de diamètre triple. Comme nous l'avons expliqué, c'est important que les élèves doutent pour qu'ils soient poussés à se poser des questions plutôt que d'accepter le résultat comme tel. Les arguments des uns et des autres se sont alors faits entendre. Tandis que les élèves ayant remarqué un lien avec la formule du volume d'un cylindre ou avec le carré (page 130) argumentaient en faveur du résultat neuf, les autres, persuadés qu'il fallait verser huit mesurettes pour atteindre une même hauteur dans un cylindre de diamètre triple, formulaient des arguments tels que celui donné plus haut, de la table de quatre.

Souvent, dans la phase de validation, la discussion entre élèves a amené à réaliser qu'il ne s'agissait pas de la table de quatre à cause du « un » correspondant au nombre de mesurettes versées dans le cylindre de diamètre initial. Les élèves ont alors cherché à trouver des liens pour compléter leur tableau à partir des couples (1,1), (2,4) et (3,9).

Plusieurs élèves ont proposé d'autres liens pour établir le modèle. Ils avaient repéré la suite des nombres impairs et complété leur tableau de la façon suivante.

	Diamètre (en cm)	Nbre de mes.	
	initial (= 0,8)	1	
+0,8	double (= 1,6)	4	+3
+0,8	triple (= 2,4)	9	+5
+0,8	quadruple (= 3,2)	16	+7
+0,8	quintuple (= 4)	25	+9

Ces liens sont apparus régulièrement dans les premières expérimentations sans doute parce que les élèves ne cherchaient que des liens d'une ligne à la suivante. Le passage de la première ligne à toutes les autres – pour mettre en évidence les liens multiplicatifs – ne leur paraissait pas évident.

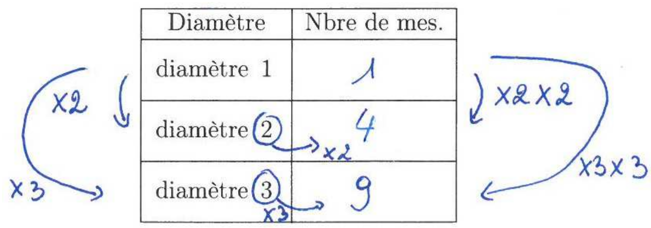
Pour les élèves qui ne repéraient pas les liens de type multiplicatif, une enseignante (Bx_1) a proposé de rechercher les nombres de mesurettes correspondant aux cylindres de diamètre six fois et sept fois plus grands. Les élèves ont dès lors pu compléter les valeurs assez facilement (sans toutefois y mettre des mots) et, à partir de cette suite de nombres un peu plus complète (1, 4, 9, 16, 25, 36, 49), un élève a exprimé : « c'est la suite des nombres carrés ! », comme une évidence. Suite à cette séance de cours, nous avons décidé d'allonger le tableau de la feuille de travail pour permettre à certains élèves de repérer plus facilement cette suite.

La recherche de liens se faisant de manière individuelle avant d'être partagée avec le reste de la classe, cette suite des nombres carrés est quand même apparue sur un bon nombre d'autres feuilles, mais souvent sans que les liens ne soient clairement identifiés et donc notés. Lorsqu'ils s'y trouvaient, les explications étaient du type

« j'ai fait le nombre fois le nombre » ou « j'ai fait le nombre fois lui-même ». Sur leur feuille, ces élèves ont tracé des flèches à côté desquelles ils ont inscrit $\times 2 \times 2$, $\times 3 \times 3$, … Un élève a fait observer aux autres que 4 correspondait à 1×2^2, 9 à 1×3^2 et 16 à 1×4^2 (Sa_4). Dans chaque classe, au moins un élève a repéré de tels liens et les a alors partagés avec ses condisciples.

À partir de ces liens, un élève a complété son tableau d'une manière inattendue. En partant de l'observation de $2 \times 3 = 6$, il a calculé le nombre de mesurettes pour un diamètre six fois plus grand par l'opération suivante $4 \times 9 = 36$.

Les explications formulées à travers les différentes classes ont parfois été correctes, mais pas toujours. Une confusion a notamment eu lieu avec les indices utilisés pour la dénomination des diamètres. Lors des premières expérimentations, les diamètres n'étaient pas qualifiés, dans les feuilles de travail, de « simple », « double » ou « triple ». Nous avions pensé faciliter la compréhension des élèves en inscrivant « diamètre 1 », « diamètre 2 », « diamètre 3 », … Ce choix s'est révélé déstabilisant pour certains élèves. En effet, ils ont utilisé ces indices pour formuler les liens qui expliquaient le passage des nombres d'une ligne à ceux d'une autre. Pour symboliser le lien « diamètre multiplié par trois, nombre de mesurettes multiplié par le carré de trois », ils ont utilisé la multiplication $\times 3 \times 3$, le premier $\times 3$ correspondant au facteur trois qui multiplie le diamètre, et le second $\times 3$ correspondant à l'indice du diamètre dans le tableau. Une élève (Bw) nous a d'ailleurs clairement affirmé : « pour obtenir le nombre de mesurettes, j'ai fait le nombre de mesurettes $\times 4$ (comme pour obtenir un diamètre quadruple) et puis, j'ai remultiplié par 4 car c'est le diamètre 4 ». De cette manière elle obtenait 16, ce qui correspond bien au nombre de mesurettes nécessaire pour remplir le cylindre de diamètre quadruple. Ces élèves ont inscrit une procédure similaire à celle du tableau ci-dessous sur leur feuille.



Diamètre	Nbre de mes.
diamètre 1	1
diamètre 2	4
diamètre 3	9

Le vocabulaire utilisé dans les tableaux des feuilles de travail a donc été modifié. C'est ce qui nous a menés à qualifier les diamètres de simple, double, triple, quadruple, … et même décuple. Bien que plusieurs de ces vocables ne soient pas familiers à un certain public d'élèves, nous pensons que c'est une solution pour éviter ce genre de confusion. De plus, c'est un apport supplémentaire à la séquence, aussi minime soit-il.

Revenons à la recherche d'un modèle. Même si les élèves repèrent les liens multiplicatifs, il est important qu'ils aient une image mentale qui les aide à s'expliquer la raison de l'apparition de ces facteurs. Nous avons évoqué plus haut un élève qui s'est servi du carré pour formuler ses conjectures (page 130, Bw). Il nous semble en effet pertinent que les élèves puissent envisager l'analogie entre le carré et le disque.

Cela a été développé dans l'analyse *a priori*, à la fin de la section 4.7.3. Après expérimentations, nous avons dû nous rendre compte que cette analogie ne vient pas naturellement des élèves. Nous avons alors mis au point une autre séquence didactique qui permet aux élèves de faire ce lien plus facilement. Les enseignants sont invités à la réaliser en début d'année pour faciliter ce passage du carré au disque. Elle n'a pas été intégrée dans notre séquence didactique car elle couvre un apprentissage plus large et mérite donc d'être développée dans une section à part entière de la publication du CREM (chapitre 6, « Des agrandissements », Guissard, Henry, Lambrecht & *al.*, 2013). Cette séquence propose de s'intéresser à l'influence de la duplication de la longueur des côtés d'un polygone sur son aire, à partir de la construction d'agrandissements de figures sur papier pointé. La mise en place de techniques efficaces de comparaison des aires, par pavages et découpages, conduit à la généralisation à d'autres facteurs entiers. Ce sujet est abordé par des activités qui peuvent être traitées soit par un travail papier-crayon, soit en utilisant le logiciel de géométrie dynamique gratuit *Apprenti Géomètre*.

Certains enseignants sont convaincus qu'il est intéressant d'expliquer aux élèves les liens multiplicatifs observés dans le tableau à partir de la formule du volume d'un cylindre. Notons que les nombres décimaux qui sont ceux de la mesure des diamètres des cylindres utilisés lors des expérimentations ne facilitent pas la tâche. Certains élèves font le lien d'eux-mêmes. Par exemple, un élève (Na_7) a souligné que, en remplissant les cylindres d'eau, on s'intéressait bien au volume. Il a alors rappelé la formule pour s'en servir. Un autre élève (Na_9) a également tenu à expliquer les résultats obtenus à partir de calculs sur les aires des bases des cylindres (qui étaient représentées au tableau). Voici les calculs qu'il a réalisés pour observer que l'aire du disque de diamètre double est bien quadruple de l'aire initiale et que l'aire de celui de diamètre triple est neuf fois supérieure :

$$\begin{aligned} A &= \pi r^2 \\ A_1 &= \pi(0,4)^2 = 0,503 \\ A_2 &= \pi(0,8)^2 = 2,011 \\ A_3 &= \pi(1,2)^2 = 4,52. \end{aligned}$$

Il a basé ses calculs sur le diamètre du cylindre de départ qui est de 0,8 cm et a vérifié les rapports entre les aires en s'aidant de sa calculatrice.

Pour ses élèves peu habitués aux puissances, une enseignante (Na_6) a décomposé la formule en $\pi \times r \times r \times h$ et a ensuite remplacé le r par $2\,r$ pour leur faire remarquer que le volume du cylindre de diamètre double était bien quatre fois plus grand. Elle a procédé de la même façon pour le cylindre de diamètre triple.

Ce retour aux formules rassure quelques élèves mais des dessins tels que celui des agrandissements d'un carré permettent, selon nous, de créer des images mentales porteuses de davantage de sens. Le passage d'un cadre à un autre – numérique, algébrique, géométrique ou encore graphique – est une étape importante à ne pas négliger dans la séquence didactique.

Tous ces retours d'élèves montrent qu'ils sont entrés naturellement dans la phase de formulation pour tenter de trouver un modèle qui corresponde aux résultats de l'expérience. Tout comme pour la réfutation du modèle proportionnel pour cette situation, certaines explications ont été validées, d'autres non. Pour cette phase de validation, il aurait été opportun que les élèves aient accès à des cylindres de diamètre quintuple ou sextuple par exemple. Ils auraient ainsi pu faire un retour aux expériences afin de valider leurs modèles. Le matériel faisant défaut, l'enseignant a, dans chacune des classes, enchaîné avec la phase d'institutionnalisation.

5.2.4 Richesse d'un questionnement sur les graphiques

Pour chacune des expériences, les élèves ont dû représenter les données par un graphique. Les différentes réalisations des élèves ainsi que les discussions qui ont suivi ont été très riches.

Nous rassemblons dans cette section l'ensemble de ces réactions par souci de cohérence mais contrairement au suivi de la chronologie des événements qui a été annoncé à la section 5.2. Ces deux graphiques ne sont effectivement pas réalisés à la suite l'un de l'autre, ils succèdent chacun à la phase de manipulation et aux réflexions sur les données numériques qui leurs sont propres.

Graphique du volume en fonction de la hauteur

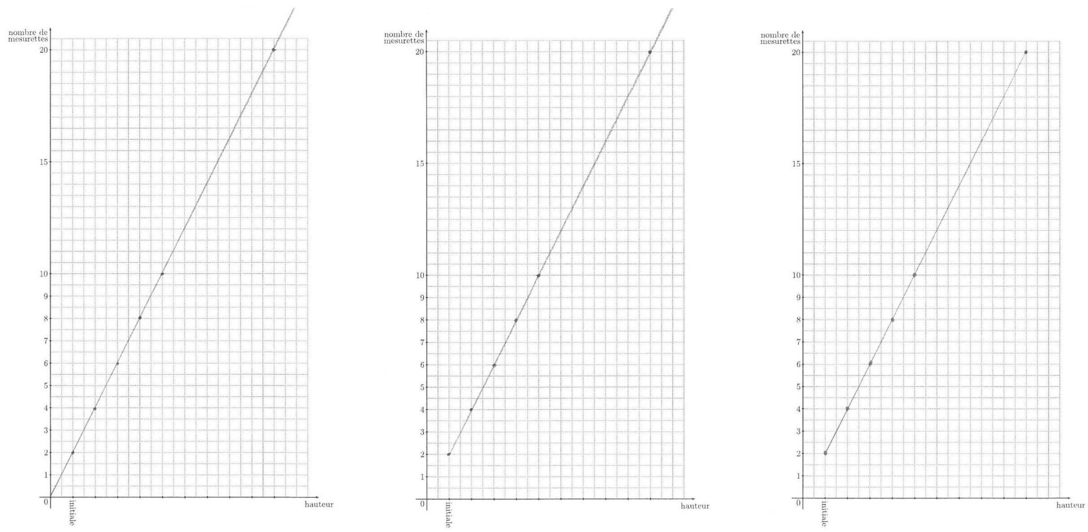
Deux types de graphique ont été imaginés *a priori* pour représenter les données liées à la variation de la hauteur d'un cylindre : l'un en vraie grandeur, l'autre se basant sur le système d'axes proposé sur les feuilles de travail. À part lors des toutes premières expérimentations (Bx_1, Bx_2 et Bw), les élèves ont utilisé les feuilles de travail, avec les conventions de représentation données par les graduations des axes.

Les enseignants craignaient que la réalisation de graphiques dans la séquence soit un frein à son déroulement. Dans sa majeure partie, l'ensemble des élèves a eu peu de difficultés. Deux ou trois élèves n'ont pas placé correctement le point correspondant à la hauteur décuple : le tableau de données répertoriant les hauteurs initiale, double, triple, quadruple, quintuple et décuple, ces élèves ont placés cette dernière hauteur « à côté » de la hauteur quintuple, sans se soucier des hauteurs intermédiaires. Quelques élèves ont mal placé un de leurs points, clairement par inattention. Par contre, un des élèves, pour placer ses points, s'est aidé du pas (« quand j'avance de un, je monte de trois », Sa_1). Il avait constaté que la croissance était toujours la même.

Certains élèves ont référencé sur leurs graphiques les points correspondant aux abscisses des hauteurs six, sept, huit et neuf fois plus grandes que la hauteur initiale, points pour lesquels le calcul du nombre de mesurettes n'avait pas été demandé.

À notre plus grande surprise, après avoir inscrit les points dans le système d'axes, la quasi totalité des élèves a relié les points. Lorsqu'on a demandé aux élèves pourquoi ils agissaient comme tel, ils ont répondu que c'est ce qu'on leur avait dit de faire au cours de sciences lorsque les points étaient alignés. Une réflexion sur la pertinence de relier les points d'un graphique ou non s'est alors imposée. Les élèves ont dû se questionner sur le sens de cette action et ont ainsi réfléchi à l'existence de points intermédiaires, en lien avec la situation concrète. Le tracé d'une droite représentant les données a été avalisé seulement après cette prise de conscience.

Plusieurs représentations de cette droite ont été réalisées et comparées sur base de la confrontation des copies d'élèves. Une partie d'entre eux avait tracé une demi-droite d'origine (0,0) comme dans la figure de gauche ci-dessous, tandis que les autres avaient fait commencer leur demi-droite au point correspondant au premier résultat de l'expérience. Certains n'avaient même tracé qu'un segment reliant le premier et le dernier points inscrits dans leur repère (figure de droite). Dans chacune des classes, au moins un élève a expliqué qu'il avait fait débuter sa demi-droite à l'origine du repère car le point (0,0) correspondait au nombre de mesurettes versé pour atteindre une hauteur nulle. Tous les élèves ont ainsi compris cette situation correspondant au cylindre vide.



L'ensemble des élèves a été convaincu de la nécessité de prolonger la demi-droite pour des hauteurs toujours plus grandes, tout comme ils ont été certains qu'il n'était pas sensé de la prolonger dans le troisième quadrant. Leurs explications ont été du type : « ça ne peut pas être moins que le vide » (Na_4), en faisant référence au remplissage du cylindre.

Graphique du volume en fonction du diamètre

Pour le graphique correspondant à la variation du volume d'un cylindre en fonction de son diamètre, il n'a pas immédiatement été question d'utiliser des conventions pour représenter les différents diamètres. En effet, au départ, il ne nous a pas semblé nécessaire d'employer des conventions car les mesures des différents diamètres permettaient de faire un graphique en vraie grandeur. Pour le réaliser, les élèves avaient sur leur feuille de travail un repère muni d'un quadrillage millimétré. La mesure du diamètre initial étant de 0,8 cm, beaucoup d'élèves ont fait des erreurs en plaçant leurs points dans le repère. Certains d'entre eux ont placé le premier point à 0,8 cm d'abscisse mais les suivants à 2 cm, 3 cm, ... sans doute à cause du quadrillage plus marqué à ces abscisses. D'autres ont fait l'inverse : le premier point placé à 1 cm d'abscisse, les suivants à 1,6 cm, 2,4 cm, ... Quelques élèves ont encore mélangé ces deux démarches. Nous avons alors décidé de modifier la feuille de travail en proposant un repère dans lequel la mesure du diamètre initial était représentée par 1 cm, par convention.

Les élèves ont complété leur graphique sans autre difficulté, mais ils se sont étonnés de ne pouvoir placer tous les résultats. Les graduations de l'axe des ordonnées s'arrêtant effectivement à 40 mesurettes, il n'est pas possible de placer le point correspondant au diamètre décuple, ou d'autres coordonnées que les élèves calculent (à partir du diamètre sept fois plus grand).

Rapidement, les élèves se sont manifestés pour signaler que les points n'étaient pas alignés, contrairement à ceux du graphique de la situation précédente. Beaucoup d'entre eux se sont alors demandé s'ils pouvaient être reliés. À chacune des classes, nous avons posé la question de la pertinence de relier ces points, non pas parce qu'ils n'étaient pas alignés, mais bien en réponse à l'interprétation de la situation. Les élèves se sont facilement convaincus qu'il était tout à fait possible de concevoir des cylindres de tout diamètre et d'en calculer les nombres de mesurettes correspondants.

La question suivante posée par les élèves a été de savoir si les points devaient être reliés à la règle – par segments – ou à main levée. Ces deux tracés ont été observés dans chacune des classes. C'est d'ailleurs cette confrontation des réalisations qui a mené les élèves à se poser cette question. Pour y répondre, on leur propose de s'intéresser à un point intermédiaire, d'abscisse 1,5 par exemple, pour vérifier s'il appartient ou non au segment tracé entre deux points. Les élèves ont bien intégré le modèle recherché à la phase précédente car ils se sont presque tous empressés de calculer $1{,}5^2$ (ou $1{,}5 \times 1{,}5$) à la calculatrice afin de déterminer la valeur de l'ordonnée correspondante. Ils se rendent ainsi compte que ce nouveau point, théorique, ne se trouve pas sur le segment. Il permet par contre de préciser la forme à donner à la courbe qui passe par l'ensemble des points.

Deux sortes de graphiques sont à nouveau observés. Certaines courbes relient le premier point des données au dernier, d'autres commencent à l'origine. Des questions similaires à celles survenues lors de la réalisation du graphique lié à la variation de la hauteur d'un cylindre se sont posées. Tout d'abord, le couple (0,0) a-t-il un sens pour la situation ? Autant la situation de la hauteur nulle correspondant à un cylindre dans lequel aucune mesurette n'avait été versée nous paraissait évidente à faire accepter aux élèves, autant celle-ci nous semblait *a priori* plus difficile à faire imaginer. Pourtant, dès que la question s'est posée, tous les élèves ont trouvé normal de valider le point (0,0) représentant un cylindre de diamètre nul dans lequel il n'est pas possible de verser de mesurette, ce qui correspond à zéro mesurette : « si on avait un diamètre de zéro centimètre, on devrait verser zéro mesurette » (Na_4). Ensuite, les élèves ont également validé le fait qu'il n'y avait aucun sens à prolonger cette courbe pour des diamètres négatifs.

5.2.5 Synthèse pour une institutionnalisation des savoirs

Après la réalisation des expériences et les premières observations, le temps a été à l'institutionnalisation des savoirs.

Au début de chacun des cours, l'enseignant en charge de la classe a demandé aux élèves d'expliquer le contenu du cours précédent. Les interventions des élèves ont souvent été d'un type descriptif : « il y avait un cylindre, on a noté plusieurs hauteurs, puis on a rempli avec de l'eau, ... ». À ce moment du déroulement de la séquence, les propositions d'élèves ont été plus élaborées. Ils ont communiqué les grandeurs en jeu, l'impact que leur variation avait eu sur le volume du cylindre, ... Il a dès lors été possible d'envisager une synthèse avec l'ensemble des élèves.

Depuis le début de la séquence, nous avons parlé de hauteur, diamètre et de « nombre de mesurettes ». Les élèves ont ici été amenés à utiliser un vocabulaire plus approprié. Ils ont proposé « capacité » (car ils avaient manipulé de l'eau) ou « volume », terme repris pour la synthèse.

Comme cela a largement été détaillé auparavant, le savoir visé tient en la compréhension du concept de proportionnalité. Pour y arriver, notre choix a été de présenter ces deux situations – de proportionnalité et l'autre de non-proportionnalité – pour qu'elles puissent être placées côté à côte et comparées. La phase d'institutionnalisation est ainsi consacrée à cette confrontation. Des propos de BLOCH ont déjà été soulignés à ce sujet au chapitre 4 (page 110), ils montrent toute l'utilité de confronter deux situations afin de « se référer à l'une pour pouvoir affirmer que l'autre n'est pas de même nature ».

La confrontation des deux situations a payé. Sans que ce ne soit l'enseignant qui amène le terme « proportionnalité », certains élèves en ont parlé spontanément lorsqu'ils ont comparé les deux tableaux de données et les liens qui en étaient ressortis. Dans une classe, un élève a dit en observant le tableau correspondant à la variation du diamètre d'un cylindre : « mais, ce n'est pas proportionnel » (Bx_1) et un autre : « le volume du cylindre n'est pas proportionnel à son diamètre car on fait $\times 2$ dans une colonne et $\times 2^2$ dans l'autre » (Sa_4). Le terme « proportionnel » n'a toutefois pas été évoqué par les élèves dans toutes les classes. Dans certaines d'entre elles, c'est plutôt la « règle de trois » qui a été mentionnée par les élèves.

Lorsque les élèves comparent les graphiques issus des deux situations, ils distinguent l'un : « ça monte de la même façon », « les points sont en ligne droite », ... de l'autre : « il monte de plus en plus fort », « il va très loin », « les points ne sont pas en ligne droite », ... (réflexions issues de la classe Bx_2). Un élève (Sa_4) annonce même, pour le graphique se rapportant à la variation de la hauteur d'un cylindre, qu'« on pourrait prendre n'importe quel point, il serait toujours aligné avec les autres », un autre encore (Sa_2) : « si je choisis un autre point qui n'est pas cité, je sais qu'il sera sur la droite car les points sont tous alignés ».

Suite à toutes ces réflexions d'élèves, notons que l'alignement des points n'a fait aucun doute pour identifier une situation de proportionnalité mais que l'alignement des points avec l'origine du repère n'a jamais été remarqué par les élèves directement. Cela n'est pas étonnant. Nous avons effectivement signalé, dans l'analyse *a priori* (section 4.7.4), qu'il serait certainement nécessaire de montrer des contre-exemples afin que les élèves puissent repérer cette caractéristique graphique des situations de proportionnalité. Des graphiques similaires à ceux ci-dessous ont été présentés aux élèves dans cette optique.

5.2.6 Rencontre du coefficient de proportionnalité

Dans la phase d'institutionnalisation, il est question de la caractérisation de grandeurs proportionnelles uniquement graphiquement et à travers le repérage de liens multiplicatifs particuliers. On ne peut concevoir l'apprentissage de la proportionnalité sans faire découvrir aux élèves l'outil « coefficient de proportionnalité ». En cela, nous rejoignons l'avis de Géron & *al.* (2007, p.21).

> Les élèves ont le choix entre plusieurs procédés de résolution : utilisation du rapport interne, du rapport externe, des propriétés de linéarité, ... Il n'existe pas de méthode unique de résolution à privilégier. Pour que les élèves aient réellement le choix, il est indispensable qu'ils aient rencontré et travaillé tous les procédés en question. Dans un premier temps, il faut donc orienter et diversifier les démarches de résolution pour que les élèves les maîtrisent et puissent faire leur choix en connaissance de cause.

Dans l'analyse *a priori*, nous avons expliqué que les élèves ne rencontraient pas le coefficient de proportionnalité de manière naturelle lors de l'étude des résultats des expériences menées. Il a alors été décidé de compléter la séquence avec une autre activité (décrite rapidement à la section 3.2.4). Celle-ci a été mise au point tardivement et n'a ainsi pas été testée de nombreuses fois (seulement à partir des expérimentations dans les classes de Sambreville). L'analyse *a posteriori* s'en trouve limitée.

L'idée de cette activité est de mener les élèves à réaliser que plusieurs méthodes sont possibles pour repérer si deux grandeurs sont proportionnelles ou non. Deux d'entre elles ont déjà été identifiées, la troisième – celle du coefficient de proportionnalité – est utilisée rapidement par de nombreux élèves. En effet, sans connaître cet outil, ils ont remarqué très vite qu'on obtenait les nombres de la seconde colonne en multipliant ceux de la première par un même nombre. Certains ont également repéré que les nombres de la première colonne étaient obtenus en divisant ceux de la seconde par ce même nombre. Ils en ont déduit que les deux grandeurs représentées par ces données étaient proportionnelles, sans même savoir que c'en était une propriété. Les valeurs du tableau paraissent donc avoir été bien sélectionnées.

De nombreux élèves ayant d'abord repéré un coefficient de proportionnalité, nous avons souvent dû intervenir pour pousser les élèves à répertorier les autres méthodes qui permettaient également de se convaincre que ces grandeurs étaient proportionnelles. Lorsqu'ils se sont intéressés à la représentation graphique, les élèves ont placé, pour la plupart, les points correctement. Plusieurs ont demandé s'ils pouvaient tracer une droite pour vérifier s'ils étaient alignés. Une discussion a alors eu lieu sur le sens de relier de tels points qui correspondent à des données appelées « grandeur 1 » et « grandeur 2 », sans savoir à quoi elles se rapportent. Suite à cet échange, ils ont donc simplement placé leur règle sur leur graphique pour vérifier l'alignement des points.

En ce qui concerne les rapports internes, il est à souligner qu'il a été difficile pour les élèves de relier le couple (7,21) aux autres données du tableau. Cela nécessite l'utilisation de fractions avec lesquelles on voit que les élèves ne sont pas à l'aise. C'est une des raisons qui a permis d'argumenter auprès des élèves l'intérêt de connaître diverses méthodes pour caractériser des grandeurs proportionnelles.

La partie se rapportant au retour vers les expériences n'a été conçue qu'après les expérimentations dans les classes. Elle mériterait d'être expérimentée mais nous n'en avons pas eu l'occasion.

5.2.7 Activité de réinvestissement

La dernière activité de la séquence est celle de réinvestissement. Les élèves sont-ils capables d'identifier des récipients pour lesquels le volume est proportionnel à la hauteur ? Dans toutes les classes, cette activité a amené les élèves à formuler de très bonnes réflexions.

Tout d'abord, les élèves ont rapidement distingué les prismes droits des autres récipients. Il y avait des briques de jus, de lait, des boîtes à base hexagonale (de biscuits ou de pastilles en chocolat), ... Dans différentes classes, un élève a soulevé le fait que le volume était proportionnel à la hauteur « mais seulement jusqu'au bouchon ». Notons que la boîte de fromage (cylindre « plat »), présente dans les récipients disposés sur la table devant les élèves, a souvent pris du temps avant d'être repérée comme objet dont le volume et la hauteur étaient proportionnels. Bien souvent, les élèves constataient tardivement que cette boîte était tout simplement un cylindre.

Les récipients tels qu'une flûte à champagne et la bouteille de soupe de la photo ci-contre ont clairement été catégorisés par les élèves comme des récipients dont le volume n'est pas proportionnel à la hauteur : « le verre ça ne fonctionne pas car c'est plus fin en bas » (Na_8), « la boîte de soupe c'est non proportionnel : ça s'élargit, ça rétrécit, ça s'élargit » (Na_9).

La célèbre boîte de chocolat suisse à base triangulaire a prêté à discussion dans toutes les classes. En effet, le volume de cette boîte est reconnu comme proportionnel à la hauteur tant qu'elle est placée sur une de ses bases triangulaires : « la boîte de chocolat, ça marche à condition de la tenir correctement » (Na_8). Mais, si la boîte est posée sur une de ses faces rectangulaires (présentation classique de ce produit), les élèves considèrent la hauteur du triangle comme la hauteur de l'objet. Ils pensent alors que le volume de la boîte n'est pas proportionnel à la hauteur. Il convient à ce moment de distinguer avec les élèves la hauteur d'un objet mathématique, de la hauteur qui peut être évoquée dans leur quotidien, liée à la verticalité. Il a alors été parfois nécessaire de rappeler que cet objet était un prisme droit dont la hauteur correspond, par convention, à la longueur des arêtes perpendiculaires à la base triangulaire.

Le solide qui a mené à un vrai débat dans l'ensemble des classes a été la boîte de céréales évoquée dans l'analyse *a priori*, à la page 97. Sa forme en vague interpelle les élèves. Ceux qui ne reconnaissent pas la proportionnalité entre volume et hauteur de la boîte le justifient très souvent par « les côtés ne sont pas droits » (Sa_3). Ils comprennent leur erreur de jugement grâce aux interventions de leurs condisciples qui avancent des arguments en faveur de la proportionnalité des grandeurs hauteur et volume pour cette boîte. Pour exemple, reprenons un échange qui a eu lieu dans la classe Na_5. La question qui venait de leur être posée est « le volume est-il proportionnel à la hauteur de cette boîte ? ».

élève 1	Oui parce que les bases sont toujours les mêmes.
élève 2	Oui car la hauteur est la même de chaque côté.
élève 3	Quand ça s'allonge d'un côté c'est raccourci de l'autre et ainsi de suite donc ça marche.
enseignante	Quand il manque un morceau d'un côté c'est ce qu'on retrouve de l'autre.

FIGURE 5.10 – Extrait d'un échange dans la classe Na_5

Après des arguments pas toujours très explicites, l'enseignante a tenté de reformuler les propos du dernier élève. Ensuite, pour illustrer le glissement des sections, la titulaire a empilé des journaux de classes et leur a appliqué un glissement latéral. Cette manipulation a convaincu le reste des élèves.

En rassemblant les propos tenus dans les différentes classes, les élèves ont avancé ces deux types d'arguments :
- l'un basé sur la compensation
  - « le morceau de trop à gauche peut être remis à droite et le creux compense la bosse » (Sa_3) ;
  - « ce que l'on prend d'un côté, on le remet de l'autre » (Sa_2) ;
  - « quand la boîte rentre d'un côté, elle sort de l'autre » (Na_9) ;
- l'autre se référant à la section constante de la boîte
  - « c'est le même rectangle à chaque tranche » (Sa_3) ;
  - « si on regarde la boîte par en-dessous, on se dit bien qu'il y a le même rectangle tout le long de la hauteur de la boîte » (Na_2).

La plupart des réflexions des élèves ont été accompagnées de gestes pour illustrer leurs propos.

À la fin de cette activité, un élève a même tenté de synthétiser les observations sur les différentes boîtes. Pour expliquer que la section doit être la même tout au long de la hauteur, il a dit « pour que ce soit proportionnel, il faut que ce soit la même base partout » (Sa_3).

5.2.8 Synthèse de l'évolution de la séquence didactique

Tout au long des diverses expérimentations, nous avons ainsi été confrontés à la nécessité de faire évoluer la séquence didactique. Cette section rassemble ces diverses modifications. Elles sont reprises ici en suivant la chronologie de la séquence (et en fonction de la filiation des sujets abordés) et non celle des expérimentations.

Entre la première expérimentation de la situation d'introduction – relative au remplissage d'une casserole – et sa rédaction finale, de nombreuses adaptations ont été apportées.

Commençons par rappeler que le vocabulaire employé sur les feuilles de travail a dû être adapté, tant au niveau des consignes qu'au niveau des termes employés dans les tableaux. Ceci a également été nécessaire pour les autres tableaux relatifs aux hauteurs et aux diamètres. Dans le dernier cas, « diamètre 3 » a été remplacé par « diamètre triple » par exemple afin d'éviter aux élèves une confusion entre dénomination des diamètres et opération à effectuer pour obtenir le volume correspondant.

Ensuite, il s'est avéré nécessaire d'ajouter des emplacements sur les feuilles de travail pour inviter les élèves à inscrire leurs estimations. La situation d'introduction n'est à nouveau pas la seule concernée par cet apport à la séquence. Une place a été prévue pour l'écriture des estimations lors de la variation de la hauteur, mais surtout un tableau d'estimations a été ajouté pour la phase de la séquence propre à la variation du diamètre, ce qui permet d'intensifier l'impact du conflit cognitif lors de la confrontation aux résultats des expériences.

La phase de travail qui se déroulait en groupes dans la situation d'introduction a été transformée en phase collective dans le but de faire profiter chacun des élèves de la classe des réflexions de leurs condisciples. Par contre, une phase prévue initialement en collectif a dû être, suite à l'analyse *a posteriori*, menée en individuel. Il s'agit de la phase d'estimation lors de la variation du diamètre d'un cylindre. Cette modification a assuré l'impact du conflit cognitif mentionné dans le paragraphe précédent.

Notons au passage que nous avons également dû changer de matériel. Les verres utilisés pour la situation correspondant à la variation de la hauteur ne correspondaient pas suffisamment à des cylindres et engendraient de trop grandes erreurs expérimentales.

Poursuivons la revue des évolutions de la séquence didactique avec une modification majeure. Il est apparu primordial d'amener les élèves à aller au-delà du repérage des écarts constants. La prégnance de l'addition face à la multiplication entraînait en effet de nombreux élèves à considérer les écarts constants comme une caractérisation de la proportionnalité. Or ce n'est ni une condition nécessaire, ni une condition suffisante comme nous l'avons illustré à la section 5.2.2.

Relevons encore l'allongement du tableau relatif à la variation du diamètre, avec l'objectif de permettre aux élèves de conjecturer plus facilement le modèle correspondant.

Une autre adaptation concerne le système d'axes proposé pour le graphique propre à la variation du diamètre d'un cylindre. Il s'est avéré que l'utilisation d'un repère où les valeurs des différentes grandeurs ont été mises à l'échelle engendrait moins de difficultés qu'une représentation en vraie grandeur.

Le dernier élément que nous reprendrons dans cette synthèse des évolutions de la séquence didactique se rapporte à la création d'une séquence « Agrandissements » pour tenter de mettre en évidence l'analogie entre la situation expérimentale vécue et la variation de l'aire d'un carré en fonction de la longueur de son côté.

5.3 Confrontation à l'analyse *a priori*

Suite à la présentation des apports didactiques des expérimentations, revenons à l'analyse *a priori* de la séquence et confrontons-la aux analyses *a posteriori* qui nous ont révélé quelques « surprises didactiques ».

La situation d'introduction a été mise au point avec l'intention de mettre en place le processus expérimental et que les élèves s'approprient correctement le matériel. Ces objectifs semblent avoir été atteints lors de chacune des expérimentations. Nous avons pu l'observer notamment à travers l'implication des élèves dans le processus réflexif lié à la situation. Peu d'éléments ont dû être avancés par les enseignants.

Une première réaction, retrouvée dans chacune des classes dans lesquelles ont été menées les expérimentations, nous a étonnés. Contrairement à ce que nous avions prévu dans l'analyse *a priori*, des élèves ont estimé que, pour remplir la casserole au double de sa hauteur, le double de verres seraient nécessaires, « plus un ». Cette clarté d'esprit face au matériel, dont le bord était effectivement légèrement évasé, nous a agréablement surpris.

Pour la situation relative à la variation de la hauteur d'un cylindre, nous nous attendions à ce qu'apparaissent deux sortes de liens pour montrer les relations existantes dans les tableaux de nombres. C'est bien ce qu'il est ressorti dans les classes mais nous avons signalé, plus tôt dans ce chapitre, que l'importance accordée aux écarts constants avait joué en défaveur de la différenciation des situations de proportionnalité et de non-proportionnalité.

Dans l'analyse *a priori*, nous avons peu développé l'aspect graphique, mise à part l'importance de recourir à différents cadres pour étudier la proportionnalité. L'analyse *a posteriori* a révélé la richesse du questionnement des élèves faces à ce cadre graphique. Suite à la confrontation des propositions émanant des élèves, la question de relier ou non les points s'est naturellement posée. Cette question du passage du discret au continu, fondamentale en mathématiques, n'a pas été véritablement approfondie par la séquence. Ici, le retour à l'expérience a été invoqué pour justifier que des points intermédiaires étaient valides expérimentalement et a conduit les élèves à choisir de relier les points.

Lorsque nous avons demandé aux élèves d'estimer le nombre de mesurettes à verser pour remplir des cylindres de diamètres double et triple, la plupart des estimations se sont basées sur le modèle proportionnel, ce qui correspond à l'analyse réalisée *a priori*. Dans une classe de deuxième secondaire, nous avons été confrontés à une réaction que nous n'avions pas du tout anticipée. Persuadés que l'expérience mènerait aux résultats 1, 4 et 9, certains élèves ont refusé de mener celle-ci dans un premier temps. Nous les avons alors encouragés à la réaliser, ce qu'ils ont accepté à contre cœur, jusqu'à la découverte du premier résultat interpellant qui les a incités à poursuivre avec enthousiasme.

Dans l'analyse *a priori*, nous avons évoqué l'idée que les élèves utilisent la formule du volume du cylindre dans les phases de formulation ou de validation des résultats mais c'est dès les estimations que deux ou trois élèves y ont recouru. Ce sont ces mêmes élèves qui se sont servis de cette formule dans les phases de formulation et de validation.

Notons que, dans l'ensemble, l'expérience sur la variation du diamètre a eu l'effet escompté. Les élèves ont effectivement été déstabilisés au vu de leurs réactions (lorsqu'ils secouaient leur mesurette en espérant que de l'eau s'en écoule encore, quand ils ont marqué leur étonnement suite aux résultats, ...), leur curiosité a bel et bien été piquée. Toutefois, suite au résultat obtenu pour le cylindre de diamètre double (quatre mesurettes et non deux comme beaucoup l'ont imaginé), les élèves continuent à se baser sur leur intuition pour réviser leur estimation relative au diamètre triple, sans envisager de réflexion plus poussée à ce stade de l'expérimentation. C'est la diversité des résultats, obtenue dans chacune des classes comme espéré, qui les incite à formuler le modèle mathématique correspondant.

Contrairement à ce que nous avons annoncé dans l'analyse *a priori*, l'analogie avec les carrés n'est pas venue naturellement des élèves dans toutes les classes. C'est une des raisons qui nous a incités à rédiger la séquence « Agrandissements ». Son impact n'a pu être observé car nous n'avons pas eu l'occasion de la tester dans les classes concernées par les expérimentations de la séquence « Cylindres » dont il est question dans ce travail.

Le recours à la formule n'a pas non plus été proposé par les élèves dans les phases de formulation et de validation, sauf par les quelques élèves qui l'avaient utilisée pour les estimations. Ces rares élèves l'ont utilisée dans le cadre algébrique, en remplaçant le « r » de la formule par $2\,r$ et $3\,r$.

Soulevons un dernier point concernant la variation du diamètre. Nous avons déjà souligné la richesse du cadre graphique pour la variation de la hauteur d'un cylindre, il l'est tout autant relativement à la variation du diamètre. Cependant, un phénomène nous a étonnés dans la plupart des classes. Lorsque les élèves se sont interrogés sur le point de départ de la courbe, ils ont accepté avec facilité le point (0,0) en se référant au matériel, ce qui aurait pu, *a priori*, leur poser question.

Dans la phase d'institutionnalisation, les élèves des différentes classes ont généralisé les résultats de leurs expériences sans difficulté et ont ainsi pu mettre en exergue les premiers éléments de la caractérisation d'une situation de proportionnalité par confrontation des deux situations. Du point de vue graphique, ils repèrent rapidement l'alignement des points. Pour ce qui est de cet alignement avec l'origine, il a effectivement été nécessaire de montrer aux élèves des contre-exemples (tels que ceux présentés dans l'analyse *a priori*, page 143) afin qu'ils distinguent les graphiques de situations de proportionnalité d'autres correspondant à des situations affines.

Nous clôturons cette confrontation entre analyses *a priori* et *a posteriori* en soulignant à nouveau que les valeurs utilisées dans le tableau de la fiche 29 de la séquence didactique, reprise dans l'annexe B, paraissent avoir été idéalement choisies afin de faire découvrir les coefficients de proportionnalité aux élèves. Pour ce qui est de l'activité de réinvestissement, nous marquons que les élèves réinvestissent correctement le concept développé dans la séquence et que leurs réactions relatives à la boîte particulière présentée à la page 97 nous ont positivement surpris.

Troisième partie

Validation externe

Chapitre 6

Protocole

Sommaire

Cette troisième partie de la thèse s'intéresse à la validation externe. Pour mener ce type d'analyse, une organisation de classes expérimentales et classes témoins a été mise en place. La première section de ce chapitre s'attache à décrire ce dispositif. La deuxième section expose l'évolution des questions qui constituent le pré-test et les deux post-tests (à court et à long terme).

6.1 Dispositif expérimental

6.1.1 Au niveau des classes

Dans l'optique d'une analyse quantitative des résultats, nous avons souhaité soumettre les questionnaires à un grand nombre d'élèves. Pour ce faire, l'accord d'une école et de son équipe éducative a été nécessaire car il était important de fonctionner avec les élèves de classes d'une même école pour deux raisons distinctes. La première concerne les acquis des élèves qui sont davantage susceptibles d'être équivalents au sein d'un même établissement. Nous avons d'ailleurs, pour cet aspect, choisi de ne travailler qu'avec des classes d'enseignement général. La deuxième est organisationnelle : les élèves suivent ainsi, dans un même temps et à une même période de l'année, une suite de leçons, sans que les expérimentateurs ne doivent passer d'une implantation d'école à une autre.

Dans un premier temps, en 2010, ce sont les enseignants d'une école du namurois qui ont accepté d'adhérer au projet proposé. L'année qui a suivi, en 2011, c'est une école de Sambreville qui s'est engagée dans le projet.

Dans la première école, toutes les classes de première et deuxième secondaire (grades 7 et 8) ont participé, soit dix-sept classes. Nous avons fixé deux semaines avec les enseignants pendant lesquelles une séquence sur la proportionnalité serait suivie par les élèves. La moitié des classes (quatre de première et quatre de deuxième année) ont réalisé la séquence prévue initialement par leur enseignant, les neuf autres classes (quatre de première et cinq de deuxième année) ont expérimenté la séquence didactique présentée dans cette thèse. Les huit premières classes sont qualifiées de « classes témoins », les neuf suivantes de « classes expérimentales ». Notons que ces neuf dernières classes sont les classes de Namur dont il est fait mention dans les deux premières parties de la thèse (Na_1 à Na_9).

Les élèves des dix-sept classes ont répondu à un premier questionnaire. L'école avait réservé une plage horaire commune à l'ensemble des classes pour la passation de ce pré-test. Les élèves ont ensuite suivi soit le cours de leur enseignant soit la séquence expérimentale. Les deux semaines de cours ont été clôturées dans chacune des classes par une évaluation formative, qui n'était autre que le post-test à court terme. Il a été décidé de ne pas réaliser un post-test à long terme dans cette première école, nous nous en expliquons à la section 7.1.3.

L'année suivante, les dix classes de première secondaire de la deuxième école ont pris part au projet. Cinq d'entre elles ont été « classe témoin », les cinq autres ont expérimenté la séquence didactique (ce sont les cinq classes de Sambreville dont il est question dans les deux premières parties de la thèse : Sa_1 à Sa_5). Tout comme pour les classes de l'année précédente, un pré-test a été passé par l'ensemble des élèves en amont des expérimentations et un post-test (à court terme) leur a été présenté à la fin de la séquence de cours, sous forme d'évaluation formative. En fin d'année, des questions ont été insérées dans les feuilles de révision des élèves. Il s'agissait là des questions du post-test à long terme.

Le dispositif élaboré dans les deux écoles a ainsi été le suivant, le post-test à long terme n'ayant été proposé que dans les classes de l'école de Sambreville.

Pré-test
classes de 1^{e} (ou 2^{e}) secondaire

classes **expérimentales**	classes **témoins**
séquence didactique	cours de l'enseignant
8 (ou 10) heures	8 (ou 10) heures

Post-test
court terme

Post-test
long terme

Les cours prévus par les enseignants pour l'apprentissage de la proportionnalité sont généralement basés sur ce qui est proposé dans les manuels. Les enseignants de l'école namuroise utilisaient le manuel « Le nouvel Actimath » (Ancia & *al.*, 2006 et 2007). Les élèves des classes témoins ont ainsi réalisé une même série d'exercices, reprise à l'annexe E. Dans la première activité, différentes quantités sont à déterminer à partir des ingrédients d'une recette. La deuxième amène les élèves à compléter des tableaux de proportionnalité et à identifier un coefficient de proportionnalité pour chacun d'eux. La troisième propose de représenter graphiquement des données relatives à des grandeurs proportionnelles. L'activité suivante (4a uniquement) donne l'occasion de comparer une situation de proportionnalité à une autre dont la représentation graphique est une fonction affine. Dans le cinquième exercice, les élèves doivent résoudre plusieurs problèmes de proportionnalité en utilisant la « règle de trois » (indication donnée par le titre). La dernière activité réalisée en classe (6b) consiste à identifier si des tableaux de données sont de proportionnalité ou non (par repérage d'un coefficient de proportionnalité quand c'est possible). La théorie a ensuite été exposée à partir de celle fournie par le manuel (Ancia & *al.*, 2007).

La séquence didactique présentée dans cette thèse permet d'aborder plusieurs de ces points. Pour la compléter et mettre les élèves des classes expérimentales face à un même bagage d'apprentissage, notre séquence a été complétée par les exercices 4 et 6 (rencontre de la fonction affine et identification de tableaux de proportionnalité).

Notons que ce type de dispositif (classes expérimentales et témoins) permet également de donner une réponse aux nombreux enseignants qui s'inquiètent du temps que peut prendre une telle séquence didactique dans leur planning. Borel soulignait déjà : « on gagnera largement le temps consacré aux exercices pratiques, car les élèves comprendront plus vite la théorie » (2002). On remarque ici que la séquence didactique couplée aux autres exercices n'occupe pas plus de périodes d'enseignement qu'une séquence de cours plus classique.

Les enseignants de l'école de Sambreville ne suivaient pas de manuel, mais avaient composé un cours à partir d'extraits de différents ouvrages (repris à l'annexe F). La séquence des classes témoins commence par une activité qui fait rencontrer une situation de proportionnalité (problème de change) ainsi qu'une autre qui ne l'est pas (taille et âge d'un enfant), par représentation graphique et repérage d'un coefficient de proportionnalité quand il y a lieu. La deuxième activité présente graphiquement deux autres grandeurs proportionnelles et demande aux élèves de repérer un coefficient de proportionnalité dans un tableau de données qui en est issu. Après une synthèse, les élèves ont divers exercices à résoudre : identification de grandeurs proportionnelles d'abord sans autres données que les grandeurs en question (exercice 1), puis à partir de tableaux de données avec possibilité de représentation graphique (exercice 5), repérage de tableaux de proportionnalité via l'existence d'un coefficient de proportionnalité (exercice 3), remplissage de tableaux de proportionnalité (exercice 4), etc. Notons que l'exercice 8 consiste à analyser graphiquement et numériquement les grandeurs longueur et aire d'un carré.

Des exercices réalisés dans les classes témoins ont été ajoutés à la séquence didactique proposée aux classes expérimentales pour la compléter : le repérage de grandeurs proportionnelles à partir d'un tableau de données avec possibilité de représentation graphique, l'identification et le remplissage de plusieurs tableaux de proportionnalité (exercices 3, 4a et 5 de l'annexe F).

En 2010, dans l'école de Namur, tous les enseignants avaient au moins deux classes d'une même année. Nous avons trouvé opportun de répartir les classes expérimentales et témoins uniformément entre les enseignants. Chacun d'eux avait ainsi une classe expérimentale et une classe témoin d'une même année. La répartition des classes expérimentales et témoins de chaque enseignant s'est alors faite en fonction de la compatibilité des horaires. Nous nous sommes rendu compte par la suite que certains enseignants se sont inspirés de ce qu'ils ont observé dans la séquence expérimentale pour modifier la synthèse proposée aux élèves des classes témoins. Ces derniers ont ainsi eu l'attention attirée par les situations de non-proportionnalité, ce qui n'était apparemment pas initialement prévu.

Lors de la deuxième série d'expérimentations, à Sambreville en 2011, nous avons alors décidé d'adopter une organisation différente. Le rôle de classe témoin a été attribué aux classes de deux enseignants, et celui de classe expérimentale à celles des deux autres enseignantes. La répartition des deux types de classes s'est appuyée sur l'affinité des enseignants pour la séquence proposée. Dès que nous avons découvert le projet de cours des classes témoins, nous avons remarqué que leur séquence de cours prenait en considération la comparaison d'une situation de proportionnalité et d'une autre qui ne l'est pas. Même si nos observations risquaient d'en être diminuées, cela indiquait un cours en adéquation avec nos intentions.

Suite à ce que nous venons de relever dans les paragraphes précédents, observons d'ores et déjà qu'il n'a donc pas été possible de répondre, du point de vue d'une analyse quantitative, à la première question de recherche concernant l'apport de l'insertion d'une situation de non-proportionnalité et de sa confrontation avec une situation de proportionnalité. Cette insertion de la non-proportionnalité dans les cours n'a effectivement pas pu être un élément différenciateur entre les classes expérimentales et témoins ni à Namur, ni à Sambreville.

L'envergure de telles expérimentations a mené au choix d'enregistrer chacun des cours sur dictaphone (classes expérimentales et témoins). Les séances se déroulant parfois dans trois classes en parallèle, il ne nous a pas été possible d'assister personnellement à chaque cours. Toutefois, avec l'aide de chercheurs du CREM (une personne chacune des deux années), nous avons tâché autant que possible d'avoir une présence dans chaque classe.

6.1.2 Au niveau des questionnaires

La section précédente s'est attachée à détailler le dispositif mis en place au niveau des classes : répartition et rapide aperçu du contenu des séquences. Intéressons-nous maintenant au dispositif élaboré pour l'évaluation des apprentissages. Des questionnaires ont été mis au point afin de faire passer aux élèves un pré-test en amont de la séquence de cours et un ou deux post-tests en aval de cette séquence. Ils ont pris différentes formes, comme nous l'avons évoqué ci-dessus.

Le pré-test est composé de questions inspirées de celles proposées par l'équipe de De Bock (section 1.1.2, page 17) et que Verschaffel et de Corte appellent problèmes verbaux. Elles ont été choisies dans le but d'observer si les élèves appliquent le modèle proportionnel dans des situations inappropriées. Nous sommes conscients que les nombreux implicites présents dans ces problèmes verbaux pourraient renforcer les effets de contrat. Toutefois, nous avons recouru à de tels problèmes car ils sont utilisés dans certaines évaluations.

Le post-test à court terme est constitué pour sa part de deux parties : l'une propose des questions du même type que celles du pré-test, l'autre des questions relatives à l'utilisation de la proportionnalité afin d'observer les apprentissages qui lui sont liés. Le post-test à long terme est similaire à celui à court terme, avec moins de questions. Ces trois questionnaires ont évolué au fur et à mesure de la recherche. Leurs contenus successifs sont développés à la section 6.2.

Afin de les mettre au point, plusieurs étapes se sont succédé. Un premier questionnaire, sous forme de livret, a été élaboré et passé par les élèves de deux classes de sixième primaire (grade 6). Il s'agit du test préliminaire de la section 1.1.5. Certains items ont été abandonnés, d'autres modifiés et d'autres encore ajoutés. La section suivante s'attache à détailler ces modifications.

Le livret de questions a ensuite été proposé en prémices des expérimentations menées dans les deux classes de Bruxelles qui ont mis à l'épreuve la phase expérimentale (Bx_1 et Bx_2). D'autres modifications se sont alors imposées pour élaborer le pré-test.

Avant de mener l'expérimentation avec les nombreuses classes de Namur, il a été nécessaire de vérifier l'équivalence des questions utilisées dans le pré-test et la première partie du post-test. Les élèves de deux classes ont répondu à ces questions. Entre les expérimentations de Namur et celles de Sambreville, l'équivalence des questions a une nouvelle fois été évaluée, dans deux autres classes, suite aux modifications apportées.

Comme nous l'avons évoqué dans la section 6.1.1, un post-test à long terme a été proposé en fin d'année dans les classes de l'école de Sambreville.

Après analyse de l'ensemble des données (voir chapitre 7), certaines interrogations nous sont restées quant aux réponses des élèves à certaines questions. Nous avons alors demandé l'autorisation à l'une des enseignantes des classes dans lesquelles la séquence didactique a été consolidée (WB_3) d'insérer une sélection de questions dans ses révisions. Suite à l'analyse rapide des réponses, un court entretien individuel a été mené avec les élèves, pour leur demander d'expliciter leur raisonnement. Nous développons ce point aux sections 7.1.4 et 7.2.4.

Le tableau de l'annexe A, repris ci-dessous, donne une vue plus synthétique des différents tests menés.

Classes	Pré-test	Séquence didactique	Post-test CT	Post-test LT
2 classes de grade 6	06.2009			
Bruxelles (Bx_1) Bruxelles (Bx_2) Brabant wallon (Bw)	10.2009 11.2009	11.2009 11.2009 01.2010		
Namur (Na_1-Na_9 + 8 autres classes)	03.2010	03.2010	04.2010	
Sambreville (Sa_1-Sa_5 + 5 autres classes)	02.2011	02.2011	03.2011	06.2011
Stavelot (St_1-St_{10}) Bruxelles (WB_1-WB_3) Nivelles (Ni_1-Ni_4)		01.2013 02.2013 03.2013		 06.2013 (uniquement WB_3)

Les questionnaires relatifs à la vérification de l'équivalence des questions des pré et post-tests effectués en 2010 et en 2011 dans d'autres classes n'apparaissent pas dans ce tableau.

6.2 Évolution et choix des questions

Nous nous attachons à présenter dans cette section les choix posés ainsi que l'évolution du contenu des différents questionnaires. L'analyse des résultats comparatifs des classes expérimentales et témoins sera développée dans le chapitre suivant.

6.2.1 Pré-test

Commençons par la présentation de l'évolution des questions du pré-test. Trois versions ont précédé le pré-test proposé dans les classes de l'école namuroise. Nous détaillons les différentes étapes qui ont mené à l'écriture des questionnaires utilisés lors des deux séries d'expérimentations, à Namur et à Sambreville.

Version préliminaire n° 1 (juin 2009)

Le questionnaire présenté aux élèves de sixième primaire est à l'origine du pré-test. Cette toute première version (juin 2009) était ainsi constituée de questions issues de trois familles distinctes, présentées à la section 1.1.5 : résolution par application d'un modèle proportionnel pour la première famille de questions, par application d'un autre modèle que le proportionnel pour la deuxième et par application du « bon sens » (qui révèle une impossibilité de réponse) pour la troisième famille.

La première famille était composée de quatre questions dans lesquelles le coefficient de proportionnalité était entier et de deux autres qui nécessitaient l'utilisation de fractions (annexe G). Mise à part la difficulté qu'ont eu certains élèves avec les fractions, les questions de cette famille ont été très bien réussies, comme évoqué à la section 1.1.5. Ces questions n'ont été que peu modifiées car elles permettent de contrôler si l'élève applique correctement le modèle proportionnel lorsqu'il est l'outil adéquat.

Dans la deuxième famille, certains taux de réussite pour des questions faisant appel *a priori* à un même modèle ont été très différents d'une question à l'autre. Il s'agit notamment des questions suivantes.

> Si 8 ouvriers ont été nécessaires sur un chantier pour construire une maison en 10 mois, combien d'ouvriers auraient été nécessaires pour la construire en 5 mois ?

> Un rectangle dont la longueur et la largeur font respectivement 6 cm et 4 cm a une aire égale à 24 cm^2. Si on veut un rectangle de même aire dont la longueur fait 12 cm, quelle sera la largeur de ce rectangle ?

Près de 60% des élèves ont répondu à la première par application d'un modèle linéaire et ont donné la réponse « 4 ouvriers » alors que moins de 10% ont fait cette erreur à la seconde question. Les élèves se sont tout simplement appuyés sur l'utilisation de la formule de l'aire et le résultat indiqué dans l'énoncé (24 cm^2) pour calculer la largeur du rectangle, à partir de sa longueur.

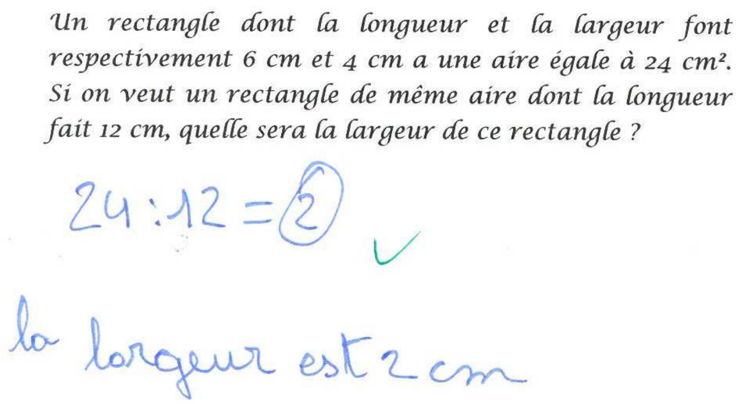


FIGURE 6.1 – Résolution d'un élève de 6^{e} primaire

Cette dernière question a été remplacée dans la version du pré-test qui a suivi.

Les questions de la troisième famille ont été abandonnées. Nous avions essayé d'atténuer la teneur du contrat didactique en expliquant d'emblée aux élèves que certaines questions pouvaient ne pas avoir de réponse mathématique et que, si c'était le cas, il suffisait de l'écrire en lieu et place de réponse. Cependant, de très nombreux élèves (environ 80%) ont utilisé un modèle linéaire pour trouver un résultat aux questions que DE BOCK & *al.* classent dans les « unsolvable problems », de type « pseudo-proportionnalité ».

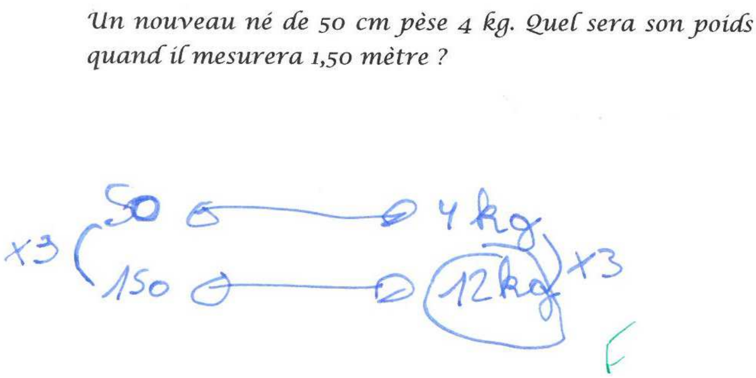


FIGURE 6.2 – Résolution d'un élève de 6^{e} primaire, par application d'une règle de trois

Pour éviter des effets de contrat didactique qui nous paraissent incontrôlables dans ce cas, nous avons choisi de privilégier, dans les versions suivantes du questionnaire, des questions qui se résolvent mathématiquement par un modèle différent du linéaire, comme celles de la deuxième famille.

Version préliminaire n° 2 (octobre 2009, Bx_1)

Une deuxième version préliminaire du questionnaire a alors été présentée aux élèves d'une classe de la région de Bruxelles dans laquelle la séquence a été mise à l'épreuve (Bx_1). Les « unsolvable problems » ont donc été écartés et la question que nous avions qualifiée de « proportionnalité inverse », relative aux aires, remplacée par la suivante.

> Quatre amis s'achètent ensemble un gros paquet de chocolats. Chacun paie 2 euros. S'ils avaient été huit amis, combien auraient-ils payé chacun pour ce paquet de chocolat ?

La diminution du nombre de questions a ainsi rendu possible l'insertion de nouvelles dont les réponses sont basées sur la reconnaissance d'un modèle affin.

> Yvan va chez un ami qui habite à 150 m de chez lui. Ensuite, il rentre à la maison où sa maman lui demande d'aller chercher des œufs à la ferme. Revenu de la ferme, Yvan tombe et casse les œufs. Il doit donc retourner à la ferme une 2^e^ fois. Sur la journée, Yvan a marché en tout 600 m. Si sa maman lui avait demandé d'aller une 3^e^ fois à la ferme pour chercher du lait, combien de mètres aurait-il marché en tout ?

> J'ai été à la foire en bus et le trajet aller-retour m'a coûté 3 euros. À la foire, chaque activité coûte le même prix. J'ai fait 6 activités et ma journée complète – trajet compris – m'a coûté 24 euros. Combien ma journée m'aurait-elle coûté si j'avais fait seulement 4 activités à la foire en y allant aussi en bus ?

La longueur des questions de ce type étant plutôt importante, nous avons imaginé dans un premier temps qu'elle soit la cause du taux d'abstention avoisinant les 20% pour chacune, résultat que nous n'avions pas anticipé. Nous avons alors prévu pour la version suivante du pré-test une question qui permettrait d'observer l'impact de la longueur de l'énoncé d'une question. Ce point est développé ci-dessous.

L'annexe H reprend l'ensemble des questions de la deuxième version préliminaire du pré-test.

Version préliminaire n° 3 (novembre 2009, Bx_2)

L'effet inattendu de l'insertion des questions reprises dans le cadre ci-dessus qui a engendré un taux élevé d'absence de réponse aurait donc pu s'expliquer par la longueur de la question. Une solution rapide pour observer l'influence de la longueur d'un énoncé a été d'allonger une question de la première famille (réponse utilisant le modèle proportionnel). La question « Une bouteille d'eau de deux litres coûte

1 euro. Combien coûtent 5 de ces bouteilles d'eau de deux litres ? » est devenue la suivante.

> Mon frère est allé au grand magasin pour acheter des bouteilles d'eau. Une grande bouteille d'eau de deux litres coûte 1 euro. Il prend 5 bouteilles d'eau de deux litres dans son panier. Il ne fait aucun autre achat. Combien doit-il payer à la caissière pour ces 5 bouteilles d'eau ?

Une autre décision a été de diminuer le nombre de questions dont l'énoncé implique une réponse suivant un modèle proportionnel au vu du taux de réussite de chacune d'elles (suppression de la question relative à l'impression de pages).

Les questions dont la réponse suit un modèle linéaire ont toujours été aussi bien réussies. La longueur de l'énoncé d'une question ne semble pas avoir eu d'influence sur la résolution : la question du cadre ci-dessus avait été placée en dernière place du questionnaire et pourtant tous les élèves y ont donné une réponse – correcte qui plus est – contrairement aux questions suivant le modèle affin (environ 20% d'abstention de nouveau).

Version de la première série d'expérimentations (2010, Namur)

Le questionnaire a une nouvelle fois été adapté pour sa passation dans les classes de l'école de Namur. La modification principale est celle des questions sollicitant une réponse suivant le modèle affin. Ces questions étaient inutilement compliquées et les contextes pas nécessairement bien choisis. Elles ont été remplacées par les suivantes.

> Je suis allé au magasin avec mes parents qui m'ont acheté une console de jeu pour mon anniversaire. La console coûtait 160 €. En plus, ils m'ont acheté 2 jeux. Tous les jeux de cette console coûtent le même prix. Ils ont payé pour le tout 200 €. Combien auraient-ils payé s'ils m'avaient acheté 4 jeux en plus de la console ?

> Charles est allé au bowling avec des amis. La location de ses chaussures lui a coûté 4 € pour la soirée. Chaque partie de bowling coûte le même prix et il a joué 2 parties. La soirée de bowling lui a coûté 16 € en tout. Combien sa soirée aurait-elle coûté s'il avait joué 3 parties ?

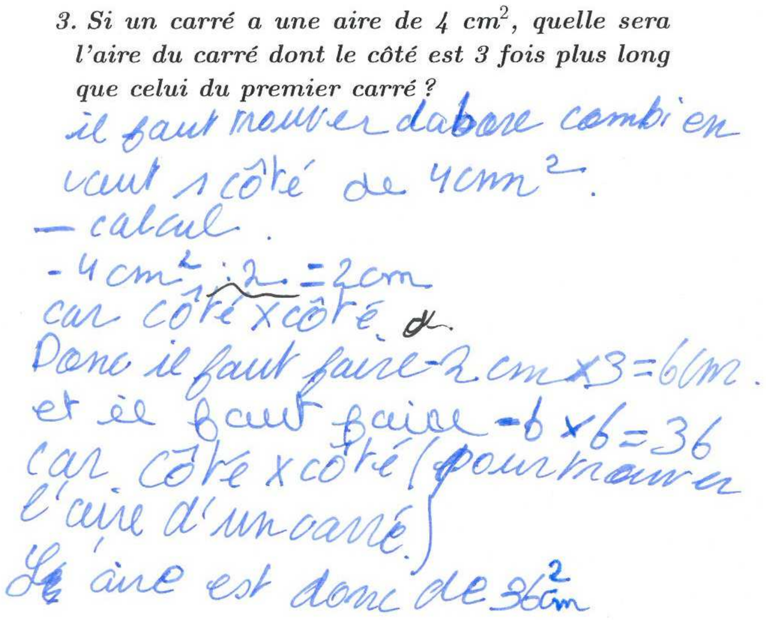
Cette dernière question a encore posé problème, le contexte de bowling n'étant peut-être pas adapté aux élèves de cet âge.

D'autres ajustements ont eu lieu concernant le choix des questions du pré-test pour Namur. L'hypothèse de la longueur de la question n'étant apparemment pas celle qui expliquait le taux d'abstention aux questions de type « affin », une autre a été testée : celle de la difficulté des élèves à sélectionner des informations dans un énoncé long. Nous avons ainsi ajouté une information inutile dans la question qui avait déjà été allongée, dans le but d'observer si cela pouvait avoir une influence sur la résolution.

> Mon frère est allé au grand magasin pour acheter des bouteilles d'eau. Une bouteille d'eau de deux litres coûte 1 €. Il va dans ce magasin car, dans un autre commerce, une bouteille d'eau de deux litres coûte 1,20 €. Il prend 5 bouteilles d'eau de deux litres dans son panier. Il ne fait aucun autre achat dans ce grand magasin. Combien doit-il payer à la caissière pour ces 5 bouteilles d'eau ?

Cet ajout d'information superflue n'a aucunement perturbé les élèves. La question a toujours été aussi bien réussie. Nous avons alors décidé de ne pas la conserver pour la version suivante du pré-test.

Le peu de réponses correctes à la question « Si un carré a une aire de 4 cm^2, quelle sera l'aire du carré dont le côté est 3 fois plus long que celui du premier carré ? », utilisée dans les versions préliminaires n° 2 et 3 du pré-test, n'avait pas encore été questionné. Le choix de la valeur des variables ne nous a pas paru judicieux, suite à l'analyse des copies des élèves. Plusieurs copies sont semblables à la suivante.


3. Si un carré a une aire de 4 cm^2, quelle sera l'aire du carré dont le côté est 3 fois plus long que celui du premier carré ?

il faut trouver dabore combien vaut 1 côté de 4cm^2.
— calcul.
- 4cm^2 : 2 = 2cm
car côté x côté
Donc il faut faire 2 cm x 3 = 6cm.
et il faut faire 6 x 6 = 36
car côté x côté (pour trouver l'aire d'un carré)
Le aire est donc de 36cm^2

FIGURE 6.3 – Résolution d'un élève de 1^e secondaire

En se basant uniquement sur cette résolution, il est impossible de savoir si l'élève utilise une procédure correcte ou erronée pour calculer la longueur du côté du premier carré. Nous avons dès lors opéré une modification de la valeur de la variable afin qu'une telle division par 2 soit le reflet d'une procédure erronée si elle apparaissait à nouveau. L'énoncé est devenu le suivant.

> Un carré ABCD a une aire de 9 cm^2. Le côté d'un carré A'B'C'D' est 2 fois plus long que le côté du carré ABCD. Quelle est l'aire du carré A'B'C'D' ?

D'autres énoncés ont été modifiés afin d'ôter la teneur conditionnelle des phrases. Par exemple, la question « Si 8 ouvriers ont été nécessaires sur un chantier pour construire une maison en 10 mois, combien d'ouvriers auraient été nécessaires pour la construire en 5 mois ? » est devenue « Pour construire une maison en 10 mois, le chef de chantier prévoit 8 ouvriers. Combien d'ouvriers le chef de chantier doit-il prévoir pour construire une maison semblable en 5 mois ? ».

Les questions du pré-test présenté aux élèves de l'école de Namur se trouvent à l'annexe I.

Version de la seconde série d'expérimentations (2011, Sambreville)

Sans entrer dans le détail de l'analyse des résultats, ce que nous laissons pour le chapitre suivant, nous attirons l'attention sur les quelques autres modifications qui se sont imposées pour adapter le pré-test pour sa passation dans l'école de Sambreville.

Les élèves rencontrent une réelle difficulté pour la résolution d'un problème lorsque le passage à l'unité, par lequel ils s'obligent à passer, ne donne pas un nombre entier comme résultat. L'utilisation d'un facteur non entier est ici en cause et non l'utilisation de la proportionnalité à bon escient. Ainsi, l'énoncé des versions antérieures « Au magasin, j'ai acheté 3 kg de pommes et ça m'a coûté 4 €. Combien aurais-je payé si j'en avais acheté 4,5 kg ? » ne nous donnant pas d'information pertinente par rapport à nos questions de recherche, il a été écarté du pré-test.

Pour d'autres questions du pré-test, certaines réponses d'élèves nous ont encore surpris. Par exemple, à la question ci-dessous, nous nous attendions à avoir principalement de bonnes réponses (figure 6.4) et d'autres où l'élève applique un modèle proportionnel (figure 6.5).

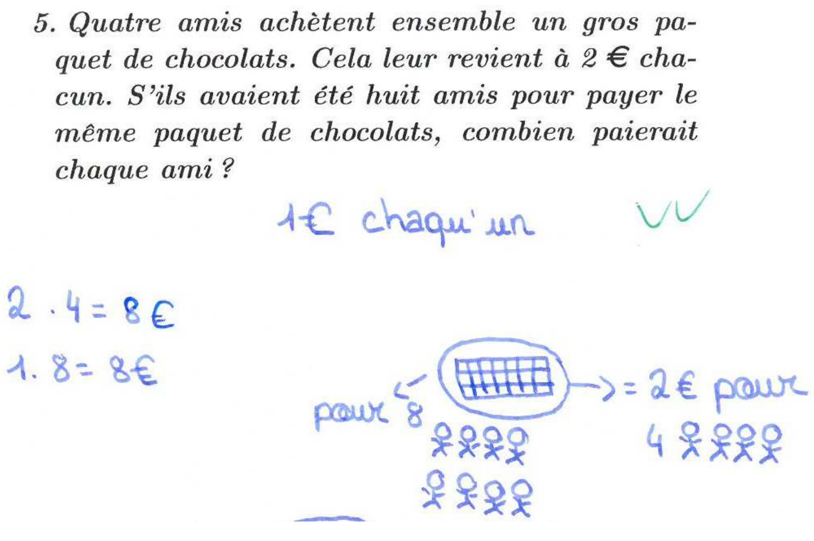


FIGURE 6.4 – Résolution correcte d'un élève de 1^{e} secondaire

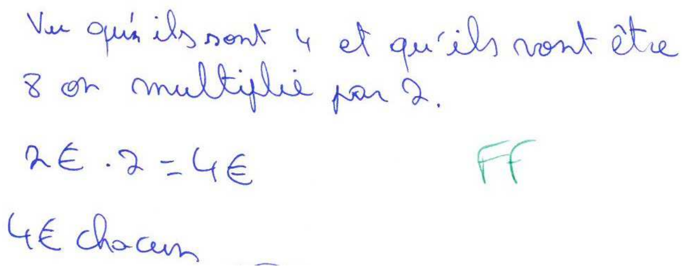


FIGURE 6.5 – Résolution erronée d'un élève de 1e secondaire

Mais de nombreuses réponses ont été tout autres, peut-être à cause de la formulation de cette question. La figure 6.6 en montre trois exemples. Certains élèves ont même choisi de ne pas répondre.

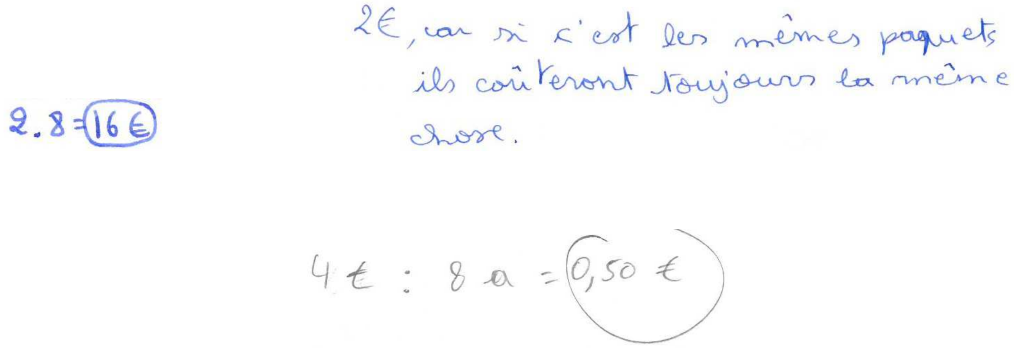


FIGURE 6.6 – Résolutions d'élèves de 1e secondaire

Face à l'incompréhension de certaines de ces réponses parfois récurrentes, nous avons préféré remplacer la question, pour cette nouvelle version du pré-test, par une autre afin qu'elle concorde mieux avec nos objectifs. La voici.

> Avec un gros sac de bonbons, j'ai pu faire 6 sachets de 300 grammes. Combien de sachets de 100 grammes aurais-je pu faire ?

Ensuite, nous nous sommes interrogés sur la pertinence de la question « Un bébé reste environ 9 mois dans le ventre de sa maman avant de naître. Environ combien de temps restent des triplés dans le ventre de leur mère ? ». Contrairement à la question de la même famille (temps de séchage de vêtements sur une corde à linge), le fait de tripler le nombre de fœtus a une influence sur la durée de la grossesse. Bien que cette question ait été particulièrement bien réussie, le contexte ayant peut-être aidé les élèves, nous avons préféré la remplacer par une autre question.

> Dans mon jardin, je plante 1 graine de tournesol. Il faut 1 mois pour que le tournesol fleurisse. Si j'avais planté 2 graines de tournesol, combien de temps aurait-il fallu pour qu'ils fleurissent ?

Le contexte des questions semble tenir un rôle important comme nous avons déjà pu le faire observer préalablement. La question relative au bowling a été remplacée pour cause de probable incompréhension des élèves. Le principe de location unique de chaussures pour l'ensemble des parties n'évoquant apparemment rien aux élèves, nous avons pensé qu'un contexte de sortie au zoo serait plus adapté.

> Charles est allé au zoo avec Hugo. L'entrée au zoo coûte 10 € à chacun. Charles a acheté 5 paquets de cacahuètes pour nourrir les animaux. Il a payé sa sortie au zoo 20 € en tout. Hugo a acheté 3 paquets de cacahuètes. Combien Hugo a-t-il payé pour sa sortie au zoo ?

Une autre adaptation du pré-test fait suite à la suppression évoquée plus haut de deux questions (dont la réponse s'obtient par application du modèle proportionnel). Une question semblable à « Un carré ABCD a une aire de 9 cm^2. Le côté d'un carré A'B'C'D' est 2 fois plus long que le côté du carré ABCD. Quelle est l'aire du carré A'B'C'D' ? » a été ajoutée, en la dotant d'un contexte.

> Arod, un cheval, est dans un pré en forme de carré de 15 mètres de côté. Il mange toute l'herbe de son pré en 3 jours. Diesel, un cheval qui a le même appétit, est dans un pré carré dont le côté est 2 fois plus long que celui d'Arod. Combien de jours faudra-t-il à Diesel pour manger toute l'herbe de son pré ?

Pour cette nouvelle question, il est nécessaire de remarquer le rapport qui existe entre les deux aires, il ne suffit pas d'appliquer uniquement une formule d'aire, comme c'est possible pour répondre à la question précédente.

L'ensemble des questions présentées au pré-test des classes de Sambreville se trouve à l'annexe J et quelques résultats sont développés dans le chapitre suivant.

6.2.2 Post-test à court terme

La présentation de l'évolution des pré-tests terminée, intéressons-nous à celle des post-tests. Ils n'ont pas eu de version préliminaire à proprement parler mais les réflexions menées pour l'élaboration des différentes versions du pré-test ont évidemment largement impacté sur la mise au point des post-tests. Elles ont été complétées par l'analyse des réponses de tests d'équivalence de questions (pré-test/post-test).

Le questionnaire prévu pour le post-test a été mis au point pour répondre à deux questionnements différents. Le premier est relatif à l'apprentissage de la proportionnalité (volet « situations »), le second à la persistance des élèves à appliquer le modèle proportionnel dans des situations inappropriées (volet « problèmes »).

Faisant suite à la présentation des questions du pré-test, nous commençons par développer l'évolution des questions du volet « problèmes », consacré à la vérification du choix d'un modèle adéquat.

Volet « problèmes » (choix d'un modèle adéquat) : Namur

Ce volet est ainsi constitué de questions similaires à celles du pré-test. Ce dernier ayant évolué au fil du temps, le questionnaire du post-test a également subi des modifications, les unes suite aux réflexions pour le pré-test, d'autres pour des raisons qui sont développées dans cette section (notamment à propos de l'équivalence des questions).

Commençons par présenter le questionnaire développé pour le post-test passé dans les classes de l'école namuroise. Le tableau ci-dessous présente les questions arrêtées pour le pré-test réalisé à Namur (celles reprises dans l'annexe I) et celles que nous avons construites sur un même modèle pour le post-test.

Les questions ont été rassemblées par type et spécificité éventuelle. L'ordre dans lequel elles apparaissent dans le questionnaire est repris dans la colonne de droite. Remarquons que nous avons choisi de garder la même numérotation pour les questions du pré-test et du post-test, afin que l'ordre dans lequel elles sont posées n'ait pas d'incidence sur les résultats.

type (spécificité)	question pré-test	question post-test	n^o
quadratique	Un carré ABCD a une aire de 9 cm^2. Le côté d'un carré A'B'C'D' est 2 fois plus long que le côté du carré ABCD. Quelle est l'aire du carré A'B'C'D' ?	Un carré QRST a une aire de 4 cm^2. Le côté d'un carré Q'R'S'T' est 3 fois plus long que le côté du carré QRST. Quelle est l'aire du carré Q'R'S'T' ?	Q.3
proportionnalité	Une paire de ciseaux pèse 50 grammes. Quel est le poids de deux paires de ciseaux ?	Une bobine de fil contient 10 mètres de fil. Combien de mètres contiennent 2 bobines de fil ?	Q.1
proportionnalité	Un litre d'essence coûte 1,20 € pour le moment. Combien dois-je payer si je mets 20 litres d'essence dans le réservoir de ma voiture ?	Un tabouret pèse 1,2 kg. Quel est le poids de 4 tabourets ?	Q.10

proportionnalité (long)	Mon frère est allé au grand magasin pour acheter des bouteilles d'eau. Une bouteille d'eau de deux litres coûte 1 €. Il va dans ce magasin car, dans un autre commerce, une bouteille d'eau de deux litres coûte 1,20 €. Il prend 5 bouteilles d'eau de deux litres dans son panier. Il ne fait aucun autre achat dans ce grand magasin. Combien doit-il payer à la caissière pour ces 5 bouteilles d'eau ?	Luc va à l'épicerie en bas de la rue pour acheter du beurre. Dans cette épicerie, un paquet de beurre coûte 2 €. Au supermarché le prix d'un paquet est de 1,50 € mais le supermarché est trop loin. Luc veut acheter 3 paquets de beurre. Combien devra-t-il payer au marchand de l'épicerie pour ces 3 paquets de beurre ?	Q.12
proportionnalité (coefficient de proportionnalité non entier)	Pour faire de la mousse au chocolat pour 4 personnes, il faut 200 grammes de beurre. Combien de grammes de beurre faudra-t-il pour faire de la mousse au chocolat pour 7 personnes ?	Avec 6 litres d'essence, ma voiture peut parcourir 150 km. Combien de kilomètres pourrais-je rouler si j'ai 10 litres d'essence dans le réservoir de la voiture ?	Q.4
proportionnalité (coefficient de proportionnalité non entier)	Au magasin, j'ai acheté 3 kg de pommes et ça m'a coûté 4 €. Combien aurais-je payé si j'en avais acheté 4,5 kg ?	Au marché j'ai acheté 600 grammes d'olives et ça m'a coûté 8 €. Combien aurais-je payé si j'en avais acheté 900 grammes ?	Q.8
proportionnalité inverse	Quatre amis achètent ensemble un gros paquet de chocolats. Cela leur revient à 2 € chacun. S'ils avaient été huit amis pour payer le même paquet de chocolats, combien paierait chaque ami ?	Avec une bouteille d'eau, je remplis 6 verres de 20 cl. Combien aurais-je pu remplir de verres de 10 cl ?	Q.5

proportionnalité inverse	Pour construire une maison en 10 mois, le chef de chantier prévoit 8 ouvriers. Combien d'ouvriers le chef de chantier doit-il prévoir pour construire une maison semblable en 5 mois ?	Dans une usine, 12 personnes doivent travailler pendant 4 jours pour assembler une voiture. Si l'on n'avait eu que 2 jours pour assembler cette voiture, combien de personnes auraient dû travailler ?	Q.11
constant	Un bébé reste environ 9 mois dans le ventre de sa maman avant de naître. Environ combien de temps restent des triplés dans le ventre de leur mère ?	Pour cuire un œuf à la coque, il faut plonger l'œuf 3 minutes dans l'eau bouillante. Combien de temps doivent rester 2 œufs dans l'eau bouillante pour obtenir des œufs à la coque ?	Q.2
constant	Sur une corde à linge, une chemise prend 1 heure pour sécher. Combien de temps faut-il pour faire sécher 3 chemises placées les unes à côté des autres sur cette corde ?	Dans mon jardin, je plante 1 graine de tournesol. Il faut 1 mois pour que le tournesol fleurisse. Si je plante 2 graines de tournesol, combien de temps faut-il pour qu'ils fleurissent ?	Q.7
affin	Je suis allé au magasin avec mes parents qui m'ont acheté une console de jeu pour mon anniversaire. La console coûtait 160 €. En plus, ils m'ont acheté 2 jeux. Tous les jeux de cette console coûtent le même prix. Ils ont payé pour le tout 200 €. Combien auraient-ils payé s'ils m'avaient acheté 4 jeux en plus de la console ?	Mon abonnement de GSM me coûte 15 € par mois. J'ai dépassé mon forfait de 2 heures et j'ai donc dû payer 20 € en tout ce mois-ci. Combien aurais-je payé au total si j'avais dépassé mon forfait de 5 heures ?	Q.6

affin	Charles est allé au bowling avec des amis. La location de ses chaussures lui a coûté 4 € pour la soirée. Chaque partie de bowling coûte le même prix et il a joué 2 parties. La soirée de bowling lui a coûté 16 € en tout. Combien sa soirée aurait-elle coûté s'il avait joué 3 parties ?	Pierre est allé au cinéma. Sa place lui a coûté 6 €. Pendant l'entracte, il a acheté 3 friandises. Toutes les friandises coûtent le même prix. Sa sortie au cinéma lui a coûté en tout 12 €. Combien sa sortie au cinéma lui aurait-elle coûté s'il avait acheté 4 friandises ?	Q.9

Signalons que certaines questions de ce post-test présenté à Namur ont été utilisées pour le pré-test proposé aux classes de Sambreville, elles sont donc déjà apparues dans les sections précédentes. Suite à une première analyse des résultats des élèves pour des questions *a priori* équivalentes des pré-test et post-test de Namur, plusieurs d'entre elles se sont révélées non-équivalentes. Nous avons alors écrit de nouvelles questions et redistribué un ensemble de questions, nouvelles et anciennes, entre les deux questionnaires des pré et post-tests de Sambreville. La composition de ces questionnaires est détaillée dans les paragraphes suivants.

L'analyse de l'équivalence des questions utilisées à Namur a été basée sur les résultats des élèves namurois mais a été appuyée par les résultats de l'autre questionnaire, élaboré afin de juger de l'équivalence de ces questions. Le questionnaire destiné à la vérification de l'équivalence mêle les questions des deux tests des classes de Namur et a été passé par les élèves de deux classes d'une école du Brabant wallon. Cette équivalence n'a pas pu être évaluée avant la passation du post-test à Namur. Les observations issues de ces analyses ont donc été utilisées pour la constitution des tests pour l'école de Sambreville.

Volet « problèmes » (choix d'un modèle adéquat) : Sambreville

Les modifications apportées au pré-test ont été détaillées dans la section 6.2.1 (version de la seconde série d'expérimentations : 2011, Sambreville). Elles impliquent directement des changements pour le post-test. La suppression de deux questions en pré-test (celle de type long et celle pour laquelle le recours à l'unité ne permet pas d'obtenir un nombre entier) entraîne la même opération au post-test. De plus, comme signalé ci-dessus, deux énoncés du post-test présenté à Namur ont été utilisés pour le nouveau pré-test (un du type « proportionnalité inverse » et l'autre de type « constant »), ce qui induit l'insertion de deux nouvelles questions. Une question a été ajoutée pour le pré-test passé à Sambreville (contexte donné à la recherche de l'aire d'un carré dont la longueur du côté a été doublée : chevaux dans un pré), une question similaire a donc été insérée dans le post-test.

Certaines questions ont simplement été reformulées mais d'autres ont été remplacées. C'est le cas de la question 6 car le contexte d'abonnement de GSM n'était apparemment pas parlant pour les élèves.

Le post-test comprend aussi une question de plus que le pré-test, question liée à la séquence didactique : contextualisation de la recherche de l'aire d'un disque dont le rayon a été doublé.

Voici le tableau récapitulatif des questions des pré et post-tests présentés aux élèves de l'école de Sambreville. Les questions sont à nouveau présentées par type, et spécificité quand il en existe une. L'ordre dans lequel les questions apparaissent dans les questionnaires est repris dans la colonne de droite.

type (spécificité)	question pré-test	question post-test	n°
quadratique	Un carré ABCD a une aire de 9 cm^2. Le côté d'un carré A'B'C'D' est 2 fois plus long que le côté du carré ABCD. Quelle est l'aire du carré A'B'C'D' ?	Un carré QRST a une aire de 4 cm^2. Le côté d'un carré Q'R'S'T' est 3 fois plus long que le côté du carré QRST. Quelle est l'aire du carré Q'R'S'T' ?	Q.3
quadratique (contexte, carré)	Arod, un cheval, est dans un pré en forme de carré de 15 mètres de côté. Il mange toute l'herbe de son pré en 3 jours. Diesel, un cheval qui a le même appétit, est dans un pré carré dont le côté est 2 fois plus long que celui d'Arod. Combien de jours faudra-t-il à Diesel pour manger toute l'herbe de son pré ?	Léopold a un jardin de forme carrée de 5 mètres de côté. Il lui faut 20 minutes pour tondre la pelouse. Pour gagner un peu d'argent, il tond la pelouse du voisin avec sa tondeuse. Le jardin du voisin a la forme d'un carré dont le côté est 3 fois plus long que celui de Léopold. Combien de minutes faut-il à Léopold pour tondre le jardin du voisin ?	Q.11

quadratique (contexte, disque)		La chèvre Betty est attachée à une corde de deux mètres de long dont l'extrémité est fixée à un piquet planté au milieu d'un champ. Elle peut ainsi brouter une parcelle circulaire d'environ 12 m^2. La chèvre Dolly est attachée au milieu d'un autre champ avec une corde 2 fois plus longue. Quelle surface Dolly pourra-t-elle brouter (environ) ?	Q.12
proportionnalité	Une paire de ciseaux pèse 50 grammes. Quel est le poids de deux paires de ciseaux ?	Une bobine de fil contient 10 mètres de fil. Combien de mètres contiennent 2 bobines de fil ?	Q.1
proportionnalité	Un litre d'essence coûte 1,20 € pour le moment. Je mets 20 litres d'essence dans le réservoir de ma voiture. Combien dois-je payer ?	Un tabouret pèse 1,2 kg. Quel est le poids de 4 tabourets ?	Q.9
proportionnalité (coefficient de proportionnalité non entier)	Pour faire de la mousse au chocolat pour 4 personnes, il faut 200 grammes de beurre. Combien de grammes de beurre faudra-t-il pour faire de la mousse au chocolat pour 7 personnes ?	Avec 6 litres d'essence, ma voiture parcourt 150 km. Combien de kilomètres ma voiture parcourra-t-elle avec 10 litres d'essence dans le réservoir ?	Q.4
proportionnalité inverse	Avec un gros sac de bonbons, j'ai pu faire 6 sachets de 300 grammes. Combien de sachets de 100 grammes aurais-je pu faire ?	Avec une bouteille d'eau, je remplis 6 verres de 20 cl. Combien aurais-je pu remplir de verres de 10 cl ?	Q.5

proportionnalité inverse	Dans une usine, 12 personnes doivent travailler pendant 4 jours pour assembler une voiture. Si l'on avait 2 jours pour assembler cette voiture, combien de personnes devraient travailler ?	Un boulanger dispose de 2 fours pour cuire ses pains. Il a besoin de 6 heures pour cuire tous les pains qu'il vend. S'il avait eu 4 fours, combien de temps lui aurait-il fallu pour cuire la même quantité de pain ?	Q.10
constant	Dans mon jardin, je plante 1 graine de tournesol. Il faut 1 mois pour que le tournesol fleurisse. Si j'avais planté 2 graines de tournesol, combien de temps aurait-il fallu pour qu'ils fleurissent ?	J'ai planté 2 bulbes de tulipe. Après 2 semaines, j'ai eu deux belles tulipes dans mon jardin. Si j'avais planté 4 bulbes de tulipe, après combien de semaines auraient-elles poussé ?	Q.2
constant	Sur une corde à linge, une chemise prend 1 heure pour sécher. Combien de temps faut-il pour faire sécher 3 chemises placées les unes à côté des autres sur cette corde ?	Il a plu hier. Les 4 chaises que j'avais laissées dehors ont pris 15 minutes pour sécher. Aujourd'hui, j'ai sorti 8 chaises et il a plu à nouveau. Combien de temps faudra-t-il aux 8 chaises pour sécher ?	Q.7
affin	Je suis allé au magasin avec mes parents qui m'ont acheté une console de jeu pour mon anniversaire. La console coûtait 160 €. En plus, ils m'ont acheté 2 jeux. Tous les jeux de cette console coûtent le même prix. Ils ont payé pour le tout 200 €. Combien auraient-ils payé s'ils m'avaient acheté 4 jeux en plus de la console ?	Mes parents ont acheté à ma petite sœur l'album d'autocollants « Bob l'éponge » qui coûte 3 €. Ils lui ont acheté 2 pochettes d'autocollants en plus. Ils ont payé 5 € au total. Combien auraient-ils payé s'ils lui avaient acheté 4 pochettes d'autocollants et l'album ?	Q.6

affin	Charles est allé au zoo avec Hugo. L'entrée au zoo coûte 10 € à chacun. Charles a acheté 5 paquets de cacahuètes pour nourrir les animaux. Il a payé sa sortie au zoo 20 € en tout. Hugo a acheté 3 paquets de cacahuètes. Combien Hugo a-t-il payé pour sa sortie au zoo ?	Pierre est allé au cinéma avec Luc. L'entrée au cinéma coûte 6 € à chacun. Pendant l'entracte, Pierre a acheté 3 friandises. Toutes les friandises coûtent le même prix. Pierre a payé sa sortie au cinéma 12 € en tout. Luc a acheté 4 friandises. Combien a-t-il payé sa sortie au cinéma ?	Q.8

Volet « situations » (apprentissage de la proportionnalité) : Namur

Ce volet du post-test a été élaboré afin d'observer les apprentissages des élèves par rapport à la proportionnalité.

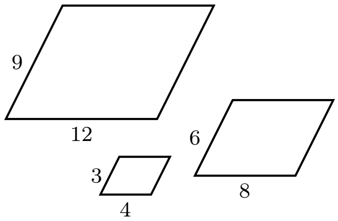
Les situations qui composent le questionnaire ont été choisies en fonction de diverses réflexions, sur le modèle de situations proposées dans la brochure « Des grandeurs aux espaces vectoriels » du CREM (2002, p. 127). La consigne est unique pour l'ensemble des situations.

> Les grandeurs des situations ci-dessous sont-elles proportionnelles ou non ?
>
> Pour chaque situation, entoure ce que tu penses (*proportionnalité* ou *non-proportionnalité*) et explique ton choix.

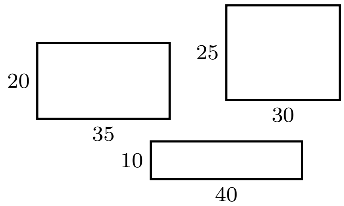
Afin de diversifier les cadres proposés, trois des situations sont graphiques, trois autres sont géométriques, quatre sont présentées sous forme de tableau et les deux dernières sont textuelles. L'annexe K présente les douze situations, nous expliquons certains de nos choix ci-dessous.

Pour chacun des cadres, certaines situations sont de proportionnalité, d'autres non. Voici quelques exemples.

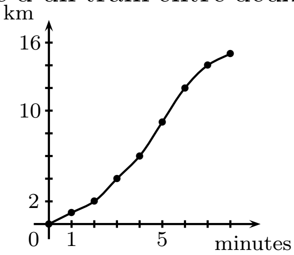
Situation 3
Des parallélogrammes



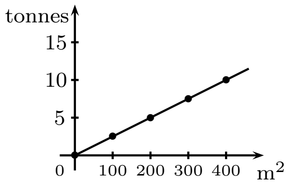
Situation 6
Des rectangles



Situation 8
Vitesse d'un train entre deux gares



Situation 11
Production de céréales en fonction de la taille d'un champ



Lorsque les données sont placées dans un tableau, nous avons prêté attention à les organiser en deux colonnes pour les unes, et en deux lignes pour les autres, comme dans les deux situations reprises ci-dessous.

Situation 2
Jean a repris dans le tableau ci-dessous sa taille à différents âges

Âge	10	12	14	16
Taille (en m)	1,40	1,55	1,68	1,74

Situation 10
Valeur du dollar au 10 février 2010

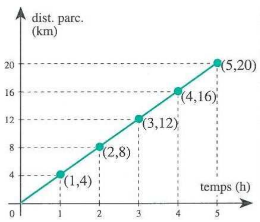
Prix en €	Prix en $
1	1,3753
5	6,8765
10	13,753
20	27,506
50	68,765
100	137,53

Volet « situations » (apprentissage de la proportionnalité) : Sambreville

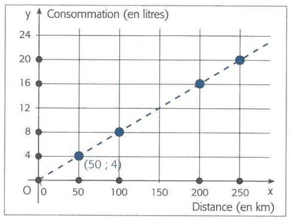
Les principales modifications apportées au test pour les expérimentations à Sambreville se sont basées sur des réflexions liées à une analyse de manuels scolaires, livres fréquemment utilisés pour la préparation des cours.

Dans ces manuels, on trouve régulièrement une définition graphique qui se rapporte à une demi-droite partant de l'origine. Nous n'adhérons pas à de telles définitions car, même si les grandeurs choisies dans les exemples ne prennent souvent que des valeurs positives, ce n'est pas une condition nécessaire.

Dans le plan cartésien, deux grandeurs proportionnelles sont représentées par des points situés sur une demi-droite partant de l'origine.



Les points du graphique sont alignés avec l'origine 0



Nous retenons que

> deux grandeurs (directement) proportionnelles sont représentées sur un graphique cartésien par une **demi-droite partant de l'origine**.

FIGURE 6.7 – Maths 1/2, CASTIAUX & *al.* (2008, éd. 2011), p. 28
Espace Math, ADAM & *al.* (1997), p. 20

Ces deux premiers exemples proviennent d'un même éditeur. Bien que la définition ait légèrement évolué après une dizaine d'années, il est toujours question de demi-droite. Les définitions issues d'autres manuels ne dérogent pas à la règle.

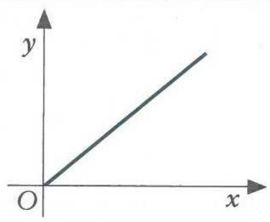
Représentation de deux grandeurs directement proportionnelles	
Sur un graphique cartésien d'origine O, deux grandeurs directement proportionnelles sont représentées par **une demi-droite dont l'origine est le point O.**	

FIGURE 6.8 – Astro-math, DANEL & *al.* (2011), p. 76

Dans l'exemple suivant, les auteurs ne réfèrent pas à une demi-droite, mais indiquent que la représentation doit correspondre à une droite. Nous ne sommes pas non plus tout à fait d'accord avec cette définition car les grandeurs ne sont pas nécessairement continues.

Le graphe qui décrit la variation de deux grandeurs proportionnelles est une droite qui passe par l'origine du repère.

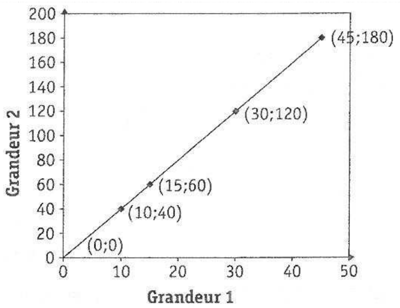
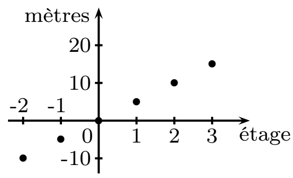


Figure 6.9 – RandoMaths, Postal & *al.* (2012), p. 278

Nous adhérons par contre à la définition donnée par Ancia & *al.* (page 9 de cette thèse) qui indique simplement que les points doivent être alignés avec l'origine. Remarquons toutefois que l'illustration donnée est une demi-droite.

Afin de vérifier que les élèves ne se sont pas construits de fausses idées à la suite des définitions rencontrées, nous avons tenu à insérer dans le post-test le graphique de la situation 11. Les données correspondent à des valeurs entières et ne se limitent pas à des nombres positifs.

Situation 11
Numéro d'un étage et niveau correspondant
(en mètres) par rapport au rez-de-chaussée



Nous avons également souhaité traiter une seconde observation récurrente dans les manuels : la définition du coefficient de proportionnalité. En voici quelques exemples.

Si deux grandeurs sont proportionnelles, alors il existe un nombre k par lequel il faut multiplier une valeur de la première grandeur pour obtenir la valeur correspondante de la deuxième grandeur.

Ce nombre k est appelé **coefficient de proportionnalité** des deux grandeurs.

Figure 6.10 – Maths 1/2, Castiaux & *al.* (2008, éd. 2011), p. 28

Deux grandeurs sont **proportionnelles** si on peut multiplier toutes les valeurs de la première grandeur par un même nombre pour obtenir les valeurs correspondantes de la seconde grandeur. Ce nombre est appelé **coefficient de proportionnalité.**

Figure 6.11 – RandoMaths, Postal & *al.* (2012), p. 277

Critère de proportionnalité	Exemple
On reconnaît une **situation de proportionnalité** s'il existe un nombre unique k, appelé **coefficient de proportionnalité,** par lequel on peut multiplier la **première grandeur** x pour obtenir la **seconde grandeur** y.	
Calcul du coefficient de proportionnalité	
Le **coefficient de proportionnalité** d'un tableau est obtenu en **divisant** la seconde grandeur y par la première grandeur x. ($k = \frac{y}{x}$) Le nombre k peut s'écrire sous forme décimale ou fractionnaire.	
Définition d'un tableau de correspondance	
Un tableau de correspondance est un tableau qui met en relation deux grandeurs.	

Exemple :

Première grandeur	x	2	5	11
Deuxième grandeur	y	6	15	33

$\cdot 3$

$k = \frac{6}{2} = 3$

FIGURE 6.12 – Astro-math, DANEL & *al.* (2011), p. 75

Ces définitions rendent compte d'un coefficient de proportionnalité unique qui correspond au quotient de la grandeur 2 par la grandeur 1. Cette description mène à des exemples tels que ceux ci-dessous, issus de ces mêmes manuels.

1ère suite de nombres	2e suite de nombres
100	5
200	10
300	15

x 0,05

400	a ?
b ?	35

Distance (en km)	Consommation (en litres)
100	8
x 0,08	
50	4
x 0,08	
200	16
x 0,08	
250	20
x 0,08	

FIGURE 6.13 – Espace Math, ADAM & *al.* (1997), p. 18
Maths 1/2, CASTIAUX & *al.* (2008, éd. 2011), p. 28

L'exemple de gauche est marquant. Il n'est pas naturel de chercher « le » coefficient de proportionnalité de 0,05 lorsqu'une simple observation permet de constater qu'il suffit de multiplier les nombres de la deuxième colonne par 20 pour obtenir ceux de la première.

Nous plaidons en faveur de la reconnaissance d'« un » coefficient de proportionnalité. Les élèves devraient avoir la liberté de le choisir en fonction de l'opération qui leur paraît la plus naturelle : obtenir les valeurs de la deuxième grandeur à partir de la première, ou inversement, tant que le sens de l'opération est affiché sans équivoque. HERSANT est du même avis. Elle écrit ceci dans sa thèse (2001, p. 23).

> Nous parlons souvent du coefficient de proportionnalité entre deux suites proportionnelles, mais en toute rigueur nous devrions parler d'un coeffi-

> cient de proportionnalité et dire « du » seulement lorsqu'on sait duquel on parle. En effet, à deux suites numériques proportionnelles correspondent deux suites d'égalités de rapports, inverses l'un de l'autre.

Il suffit d'indiquer quelle est la grandeur considérée comme la première et celle qui est la deuxième.

Afin d'observer si des définitions telles que présentées ci-dessus peuvent être un frein à la reconnaissance d'un tableau de proportionnalité, nous avons introduit dans le post-test un tableau de valeurs pour lequel un coefficient de proportionnalité est plus facile à repérer pour passer de la grandeur de la deuxième colonne à celle de la première.

Situation 2
Réduction (en €) en fonction du prix de différents objets

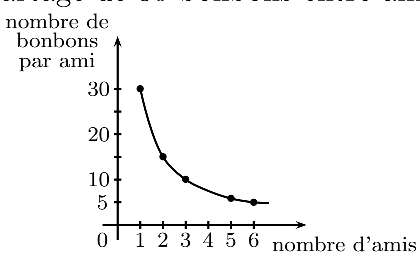
Prix (en €)	Réduction (en €)
2	0,5
6	1,5
10	2,5
12	3

Le choix de ces diverses questions du post-test est appuyé par la citation de Géron & *al.* (2007, pp. 24-25).

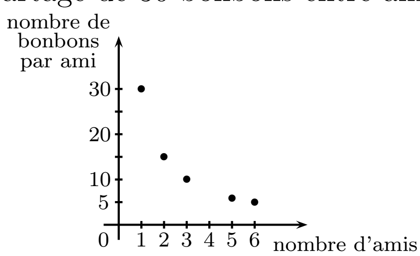
> La mise en tableau est une méthode schématique, visuelle et accessible pour les enfants tant du primaire que du secondaire. Deux formats sont possibles [...] Ceci influence la « position » du rapport externe puisque, dans le premier, c'est celui qu'on obtient quand on passe d'une ligne à l'autre alors que dans le second, c'est celui qu'on obtient en passant d'une colonne à l'autre. D'où l'importance de ne pas réduire les définitions et illustrations à un seul cas de figure pour permettre à chacun d'utiliser à bon escient les outils qui lui conviennent le mieux.

D'autres changements ont été opérés, notamment à la situation 4. Le graphique rend compte d'un partage de bonbons entre amis. Il n'y avait aucun sens à présenter un graphique dans lequel les points étaient reliés. La courbe a donc été supprimée dans la deuxième version du test.

Situation 4 (Namur)
Partage de 30 bonbons entre amis



Situation 4 (Sambreville)
Partage de 30 bonbons entre amis



L'annexe L reprend les douze situations présentées lors du post-test aux élèves de l'école de Sambreville.

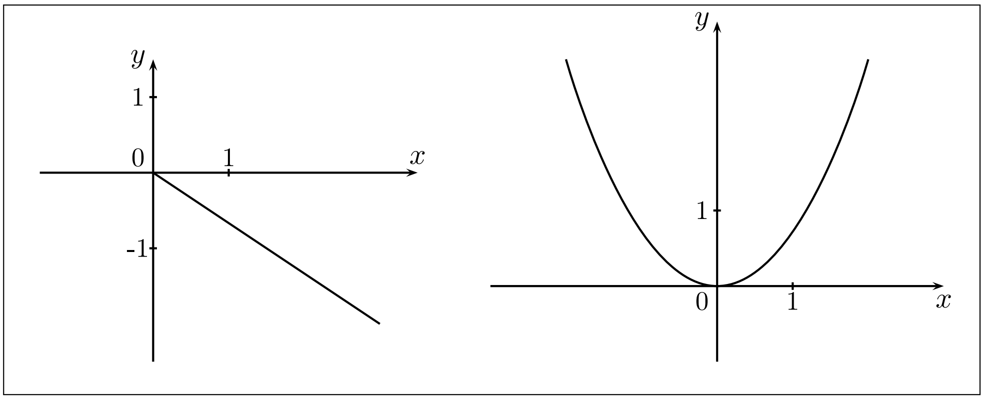
6.2.3 Post-test à long terme

Un second post-test a été présenté en fin d'année scolaire aux élèves de l'école de Sambreville, sous forme d'exercices de révision. Nous sommes conscients que les résultats que nous présentons dans le chapitre suivant sont critiquables au vu des diverses variables qui interviennent pendant le laps de temps entre le déroulement de la séquence didactique et ce deuxième post-test.

Nous avons toutefois souhaité réaliser ce dernier car il peut donner des informations sur la persistance de l'illusion de linéarité. En effet, la disparition de cet obstacle ne peut se faire radicalement. L'une des conditions pour qualifier un obstacle comme tel est bien qu'il « résiste et reparaît » (Brousseau, 1998, p. 137).

Le post-test à long terme est constitué de deux parties, tout comme le post-test effectué à court terme. L'une propose des questions qui permettent de vérifier les connaissances des élèves sur la proportionnalité (volet « situations »), l'autre des questions similaires à celles posées dans le pré-test destinées à vérifier la prégnance du modèle linéaire (volet « problèmes »).

Dans la première partie du post-test à long terme, il est d'abord demandé d'expliquer si les graphiques repris ci-dessous représentent des grandeurs proportionnelles.



Le graphique représentant deux grandeurs proportionnelles a été choisi pour sa propriété décroissante, situation que les élèves rencontrent peu.

Ensuite, les élèves doivent identifier si les quatre tableaux de données suivants représentent des grandeurs proportionnelles et justifier leurs choix.

x	y
100	5
300	15
50	2,5
200	10

x	y
1	4
3	12
5	15
7	28

x	2	9	3	6
y	6	27	9	18

x	0	2	4	6	8
y	0	5	7	9	11

Le deuxième tableau dont les données sont présentées verticalement a été inséré dans les questions afin de vérifier si les élèves prêtent attention à l'ensemble des données avant d'identifier un tableau comme étant de proportionnalité.

Nous avons également souhaité demander aux élèves de proposer deux situations, l'une avec deux grandeurs proportionnelles, l'autre avec deux grandeurs qui ne le sont pas.

Dans la deuxième partie du post-test à long terme, les questions sont du même type que celles du pré-test ainsi que celles qui leur sont équivalentes dans le post-test à court terme. Le planning de révisions des classes étant déjà bien chargé, nous avons diminué le nombre de questions. Celles pour lesquelles la réponse nécessite l'utilisation d'un modèle affin n'ont pas été utilisées dans le post-test à long terme car ce ne sont pas celles qui nous en ont appris le plus sur les raisonnements des élèves. Seulement deux questions de type proportionnalité (l'une avec un coefficient de proportionnalité entier, l'autre non entier) ont été utilisées. La question contextualisée sur la variation de l'aire en fonction du diamètre d'un cercle n'a pas non plus été retenue, celles sur la variation de l'aire en fonction de la longueur d'un côté d'un carré suffisant pour les analyses, à notre avis.

Le tableau suivant reprend les questions du post-test à long terme (post LT) avec leurs équivalentes du pré-test (pré) et du post-test à court terme (post CT). Au vu du nombre d'informations, nous avons choisi d'adopter une présentation du tableau sensiblement différente des précédentes. Le type, accompagné de sa spécificité éventuelle, se trouve toujours sur la gauche et la numérotation des questions sur la droite. L'ordre des questions est resté inchangé, le décalage dans la numérotation des questions du post-test à long terme est dû à la suppression de questions de certains types.

quadratique	pré	Un carré ABCD a une aire de 9 cm^2. Le côté d'un carré A'B'C'D' est 2 fois plus long que le côté du carré ABCD. Quelle est l'aire du carré A'B'C'D' ?	Q.3
	post CT	Un carré QRST a une aire de 4 cm^2. Le côté d'un carré Q'R'S'T' est 3 fois plus long que le côté du carré QRST. Quelle est l'aire du carré Q'R'S'T' ?	Q.3
	post LT	Un carré EFGH a une aire de 9 cm^2. Le côté d'un carré E'F'G'H' est 2 fois plus long que le côté du carré EFGH. Quelle est l'aire du carré E'F'G'H' ?	Q.3

quadratique (contexte)	pré	Arod, un cheval, est dans un pré en forme de carré de 15 mètres de côté. Il mange toute l'herbe de son pré en 3 jours. Diesel, un cheval qui a le même appétit, est dans un pré carré dont le côté est 2 fois plus long que celui d'Arod. Combien de jours faudra-t-il à Diesel pour manger toute l'herbe de son pré ?	Q.11
	post CT	Léopold a un jardin de forme carrée de 5 mètres de côté. Il lui faut 20 minutes pour tondre la pelouse. Pour gagner un peu d'argent, il tond la pelouse du voisin avec sa tondeuse. Le jardin du voisin a la forme d'un carré dont le côté est 3 fois plus long que celui de Léopold. Combien de minutes faut-il à Léopold pour tondre le jardin du voisin ?	Q.11
	post LT	Mr Leblanc a une cour en forme de carré de 4 mètres de côté. Avec l'aide de son voisin Mr Lebrun, il l'a carrelée en 6 heures. Mr Lebrun a aussi une cour carrée mais de côté 3 fois plus long. Combien de temps leur faudra-t-il à tous les deux pour carreler la cour de Mr Lebrun ?	Q.8
prop.	pré	Une paire de ciseaux pèse 50 grammes. Quel est le poids de deux paires de ciseaux ?	Q.1
	post CT	Une bobine de fil contient 10 mètres de fil. Combien de mètres contiennent 2 bobines de fil ?	Q.1
	post LT	Un pack de limonade contient 6 bouteilles. Combien de bouteilles y a-t-il dans 3 packs ?	Q.1
proportionnalité (coeff. prop. non entier)	pré	Pour faire de la mousse au chocolat pour 4 personnes, il faut 200 grammes de beurre. Combien de grammes de beurre faudra-t-il pour faire de la mousse au chocolat pour 7 personnes ?	Q.4
	post CT	Avec 6 litres d'essence, ma voiture parcourt 150 km. Combien de kilomètres ma voiture parcourra-t-elle avec 10 litres d'essence dans le réservoir ?	Q.4
	post LT	Pour faire des crêpes pour 6 personnes, il faut 300 grammes de farine. Combien de grammes de farine faudra-t-il pour faire des crêpes pour 8 personnes ?	Q.4
proportionnalité inverse	pré	Avec un gros sac de bonbons, j'ai pu faire 6 sachets de 300 grammes. Combien de sachets de 100 grammes aurais-je pu faire ?	Q.5
	post CT	Avec une bouteille d'eau, je remplis 6 verres de 20 cl. Combien aurais-je pu remplir de verres de 10 cl ?	Q.5
	post LT	Avec une grosse bobine de fil, j'ai fait 6 ficelles de 30 mètres de longueur. Combien de ficelles de 10 mètres de longueur aurais-je pu faire ?	Q.5

proportionnalité inverse	pré	Dans une usine, 12 personnes doivent travailler pendant 4 jours pour assembler une voiture. Si l'on avait 2 jours pour assembler cette voiture, combien de personnes devraient travailler ?	Q.10
	post CT	Un boulanger dispose de 2 fours pour cuire ses pains. Il a besoin de 6 heures pour cuire tous les pains qu'il vend. S'il avait eu 4 fours, combien de temps lui aurait-il fallu pour cuire la même quantité de pain ?	Q.10
	post LT	Dans un atelier de couture, 8 ouvrières travaillent pendant 10 heures pour produire des vêtements. S'il fallait réaliser la même quantité de vêtements en 5 heures, combien d'ouvrières devraient travailler ?	Q.7
constant	pré	Dans mon jardin, je plante 1 graine de tournesol. Il faut 1 mois pour que le tournesol fleurisse. Si j'avais planté 2 graines de tournesol, combien de temps aurait-il fallu pour qu'ils fleurissent ?	Q.2
	post CT	J'ai planté 2 bulbes de tulipe. Après 2 semaines, j'ai eu deux belles tulipes dans mon jardin. Si j'avais planté 4 bulbes de tulipe, après combien de semaines auraient-elles poussé ?	Q.2
	post LT	J'ai planté 10 oignons de jonquille. Après 10 jours, les dix jonquilles décoraient mon parterre de fleurs. Si j'avais planté 20 oignons de jonquille, combien de jours aurait-il fallu pour qu'ils fleurissent ?	Q.2
constant	pré	Sur une corde à linge, une chemise prend 1 heure pour sécher. Combien de temps faut-il pour faire sécher 3 chemises placées les unes à côté des autres sur cette corde ?	Q.7
	post CT	Il a plu hier. Les 4 chaises que j'avais laissées dehors ont pris 15 minutes pour sécher. Aujourd'hui, j'ai sorti 8 chaises et il a plu à nouveau. Combien de temps faudra-t-il aux 8 chaises pour sécher ?	Q.7
	post LT	Dix scouts partent en randonnée. Il se met à pleuvoir et ils sont trempés après 5 minutes. Un groupe de 20 scouts est parti marcher au même moment et a eu droit à la même averse. Après combien de minutes ont-ils été trempés ?	Q.6

Ce chapitre s'est attaché à présenter le dispositif expérimental dans son ensemble, ainsi que le contenu des différents questionnaires. Quelques premières analyses ont été partagées uniquement dans le but d'expliquer l'évolution de certaines questions. Le chapitre suivant présente une analyse des résultats du point de vue du comparatif entre classes expérimentales et témoins.

Chapitre 7

Résultats

Sommaire

SUITE à la présentation du contenu des divers questionnaires dans le chapitre précédent, celui-ci s'attache à développer quelques résultats qui permettent de comparer les acquis et l'évolution des élèves des classes expérimentales et témoins.

Lorsque les résultats portent sur la comparaison des élèves des classes expérimentales et témoins, la significativité a été vérifiée à partir du calcul de la variable d'estimation suivante : $(p_1 - p_2)/\sqrt{(\frac{p_1(1-p_1)}{n_1} + \frac{p_2(1-p_2)}{n_2})}$ où p_1 est le pourcentage de réussite des élèves des classes expérimentales, p_2 celui des élèves des classes témoins, n_1 correspond au nombre d'élèves des classes expérimentales et n_2 à celui des classes témoins (WONNACOTT, 1995, pp. 311, 874). La significativité des résultats portant sur l'évolution des comportements des élèves entre deux tests distincts a été vérifiée pour sa part à partir du test de MC NEMAR (voire sa version corrigée lorsque les hypothèses n'étaient pas satisfaites).

La première section de ce chapitre développe tout ce qui est relatif au choix d'un modèle approprié (en lien avec le pré-test et le volet « problèmes » des post-tests), la deuxième à l'apprentissage de la proportionnalité (volet « situations » des post-tests). La dernière section synthétise quant-à-elle les résultats de ces différentes analyses.

7.1 Choix d'un modèle approprié

Dans cette section, nous rapportons les observations relatives à l'évolution du raisonnement des élèves par rapport au choix d'un modèle approprié, à partir de leurs réponses au pré-test et aux post-tests à court et à long terme. La section 1.1.5 a mis en exergue la prédisposition des élèves à utiliser un modèle linéaire pour répondre à des questions qui se résolvent par l'utilisation d'un modèle non proportionnel. SIMARD (2012b, p. 36) fait remarquer à ce sujet que « souvent, dans les énoncés d'exercices de proportionnalité, que ce soit à l'école élémentaire ou au collège, le modèle proportionnel est implicite. Il est lié au contexte. [...] La proportionnalité relève d'un " savoir social " mais n'est pas explicité : dans une boulangerie, les baguettes sont vendues à l'unité et toutes au même prix. C'est cet argument qui justifie le modèle proportionnel mais qui n'est pas exprimé dans l'énoncé ». De la sorte, les élèves s'habituent à utiliser un modèle sans réellement réfléchir à son adéquation à la situation.

Afin d'analyser les réponses des élèves, nous avons choisi un système de codage des réponses particulier dans nos tableaux de résultats. À travers l'ensemble des réponses, il existe deux catégories de réponses correctes : les unes avec justification correcte et complète, les autres sans justification ou seulement une ébauche. Les premières ont été identifiées par le symbole « VV », les autres par « V... ».

Nous appelons « erreur » les réponses qui proviennent d'un raisonnement inadapté. Une réponse fausse amenée par une erreur de calcul peut donc être considérée comme correcte si le raisonnement l'est. Il est important de remarquer que la plupart des erreurs relevées dans les réponses des élèves proviennent d'un raisonnement linéaire appliqué à une situation non proportionnelle.

Les réponses incorrectes sont également de plusieurs types. Pour l'ensemble des questions d'un autre type que celui appelé « proportionnalité », le code « FF » correspond à l'utilisation du modèle linéaire pour répondre à la question. Ce code a été choisi pour attirer l'attention sur un raisonnement tout à fait inadapté. Les réponses fausses dont on n'a pas pu identifier le raisonnement sont étiquetées avec le symbole « F. . . ». Certaines questions sont restées sans réponse. Ces abstentions ont été encodées par le signe « - - ». Ces symboles se retrouvent dans les tableaux de résultats, notamment à l'annexe M.

7.1.1 Résultats des tests passés à Namur

Dans les classes de Namur, un contretemps nous a contraints à faire passer le pré-test juste avant de commencer les expérimentations. Il n'a donc pas été possible d'analyser les résultats avant de décider quelles classes seraient témoins et lesquelles seraient expérimentales. C'est la raison qui nous a fait opter pour une répartition uniforme des deux types de classes (témoin et expérimental) entre les différents enseignants. Nous nous sommes fiés aux dires des enseignants qui avaient, selon eux, des classes de même niveau.

Ce choix a engendré des difficultés pour exploiter les données de cette première expérimentation car, après analyse, il s'est avéré que les élèves des classes expérimentales avaient un niveau globalement plus faible que ceux des classes témoins, du moins du point de vue de leur comportement face à des questions demandant une réponse suivant un modèle différent du proportionnel.

Pour appuyer ces propos, voici un bref tableau des pourcentages de réussite aux questions du pré-test (annexe I), avant toute intervention dans les classes.

	Classes expérimentales	Classes témoins
Q.1	98,8 %	99,4 %
Q.2	93,6 %	94,6 %
Q.3	**33,5 %**	**49,4 %**
Q.4	93,6 %	96,4 %
Q.5	68,8 %	72,9 %
Q.6	94,8 %	95,8 %
Q.7	87,3 %	88,6 %
Q.8	**67 %**	**78,3 %**
Q.9	54,3 %	59,6 %
Q.10	97,7 %	99,4 %
Q.11	45,7 %	47,6 %
Q.12	87,9 %	89,8 %

Tableau 7.1 – Pourcentage de réussite aux questions du pré-test (Namur)

Le pourcentage de réussite des élèves des classes expérimentales est systématiquement en-dessous de celui des élèves des classes témoins, et de manière significative à 99% pour les questions 3 et 8.

Q.3 : Un carré ABCD a une aire de 9 cm^2. Le côté d'un carré A'B'C'D' est 2 fois plus long que le côté du carré ABCD. Quelle est l'aire du carré A'B'C'D' ?

Q.8 : Au magasin, j'ai acheté 3 kg de pommes et ça m'a coûté 4 €. Combien aurais-je payé si j'en avais acheté 4,5 kg ?

L'exploitation des résultats de cette première série de données pour une analyse comparative des classes expérimentales et témoins a été rapidement mise de côté pour d'autres raisons complémentaires. Elles ont déjà été évoquées dans le chapitre précédent. La première est que des enseignants ont apparemment adapté leur cours dans les classes témoins après avoir pris connaissance de la séquence didactique, l'introduction de la non-proportionnalité n'a dès lors plus eu la possibilité d'être un élément différenciateur. La deuxième raison est que la comparaison des résultats des pré et post-test à court terme a mis en avant un bon nombre de questions non équivalentes. Pour la consultation de ces questions des pré-test et post-test proposés dans les classes de Namur, nous invitons à consulter le tableau récapitulatif de la page 167.

Dans le chapitre précédent, nous avons fait le choix de ne pas insérer de tableaux de résultats afin de pouvoir exposer le plus succinctement possible les différentes évolutions des tests. Les modifications de questions se sont pourtant bien entendu appuyées sur des analyses dont deux exemples sont développés dans les paragraphes ci-dessous (questions 5 et 6).

Seules les indications les plus révélatrices des résultats du post-test sont affichées aux côtés de celles du pré-test pour les questions utilisées au travers des exemples.

Par souci de cohérence entre les résultats du pré-test et ceux du post-test, les pourcentages ont été calculés uniquement à partir des réponses des élèves ayant répondu au pré-test et au post-test. Sur les 397 élèves des classes impliquées, 339 étaient présents aux deux tests. Nous avons ainsi un échantillon de 173 élèves pour les classes expérimentales et de 166 pour les classes témoins.

Intéressons-nous aux résultats d'une question dont la réponse est obtenue par application de la proportionnalité inverse (Q.5) et d'une autre par l'utilisation d'un modèle affin (Q.6). L'évolution des taux de réponses qui reflètent l'utilisation de la proportionnalité dans une situation inappropriée (FF) nous a rapidement interpellés.

Q.5 (pré)	Quatre amis achètent ensemble un gros paquet de chocolats. Cela leur revient à 2 € chacun. S'ils avaient été huit amis pour payer le même paquet de chocolats, combien paierait chaque ami ?
Q.5 (post)	Avec une bouteille d'eau, je remplis 6 verres de 20 cl. Combien aurais-je pu remplir de verres de 10 cl ?

Q.6 (pré)	Je suis allé au magasin avec mes parents qui m'ont acheté une console de jeu pour mon anniversaire. La console coûtait 160 €. En plus, ils m'ont acheté 2 jeux. Tous les jeux de cette console coûtent le même prix. Ils ont payé pour le tout 200 €. Combien auraient-ils payé s'ils m'avaient acheté 4 jeux en plus de la console ?
Q.6 (post)	Mon abonnement de GSM me coûte 15 € par mois. J'ai dépassé mon forfait de 2 heures et j'ai donc dû payer 20 € en tout ce mois-ci. Combien aurais-je payé au total si j'avais dépassé mon forfait de 5 heures ?

	Classes expérimentales		Classes témoins	
Q.5 (FF)	pré	6,4 %	pré	4,2 %
	post	22 %	post	24,1 %
	Classes expérimentales		Classes témoins	
Q.6 (FF)	pré	2,9 %	pré	2,4 %
	post	24,3 %	post	26,5 %

Tableau 7.3 – Pourcentage de réponses utilisant la proportionnalité de manière erronée, questions de type « proportionnalité inverse » et « affin » (Namur)

Concernant les questions 5, il a paru étonnant d'observer beaucoup plus d'élèves au post-test qu'au pré-test utilisant la proportionnalité en situation inappropriée (différences significatives à 99%). L'analyse des réponses, partagée à la page 164, peut être selon nous une des explications à cette observation. En effet, à la question du pré-test, les réponses ont été très diverses, souvent erronées et basées sur des réflexions que nous n'avons pu interpréter. Nous n'avons ainsi pu identifier qu'un faible pourcentage d'élèves appliquant la proportionnalité à mauvais escient, contrairement à la question du post-test.

Les résultats obtenus aux questions 6 nous ont également interpellés car il paraît à nouveau anormal d'observer un plus grand nombre d'élèves au post-test qu'au pré-test appliquant la proportionnalité pour une situation inadaptée, classes témoins et expérimentales confondues (différences significatives également à 99%). Une interprétation possible, avancée dans le précédent chapitre, est que le contexte de l'achat de jeux pour une console serait plus parlant que celui d'un abonnement de GSM pour les élèves de cet âge. Pour lever ce doute, la dernière question a donc été remplacée avec l'espoir d'atténuer le biais lors des expérimentations à Sambreville.

Cette rémanence de la proportionnalité dans les questions du post-test reflète peut-être aussi un effet de contrat. C'est pour lever ces doutes que la question 5 du pré-test et la question 6 du post-test ont été remplacées pour l'année qui a suivi.

7.1.2 Comparatif classes expérimentales et témoins (Sambreville)

L'analyse des résultats du pré-test réalisé dans les classes de Sambreville nous a indiqué que les élèves désignés pour les classes expérimentales et témoins avaient des niveaux équivalents. Les différences entre les pourcentages ne sont pas significatives et les résultats des classes témoins ne sont pas systématiquement au-dessus de ceux des classes expérimentales, contrairement à ce qui a été observé pour les classes namuroises.

Pour éviter d'entraver la lecture du texte, nous avons opté pour le choix de ne pas réécrire les questions des pré et post-tests (à court terme) passés à Sambreville au fil du texte. Pour les retrouver, nous invitons à consulter la page 171 où elles ont été listées.

Les résultats des questions de type proportionnel (tableau 7.4) permettent de vérifier que tant les élèves des classes expérimentales que ceux des classes témoins maîtrisent les questions de type proportionnalité. Dès que le coefficient n'est pas entier (Q.4), les élèves ont néanmoins un peu plus de difficultés.

	Classes expérimentales		Classes témoins	
Q.1	pré	95,5 %	pré	97,9 %
	post	99,1 %	post	97,9 %
Q.9	pré	95,5 %	pré	99 %
	post	92,9 %	post	87,5 %
Q.4	pré	87,5 %	pré	85,4 %
	post	73,2 %	post	76 %

Tableau 7.4 – Taux de réussite aux questions de type proportionnalité (Sambreville)

La chute de pourcentages entre pré-test et post-test à court terme qui apparaît aux questions 4 et 9 correspond principalement à des abstentions de réponse.

Intéressons-nous au taux d'utilisation de la proportionnalité en situation inadéquate pour les questions dont la réponse s'obtient par application de la proportionnalité inverse (Q. 5 et 10), d'un modèle qu'on a qualifié de « constant » (Q. 2 et 7) et d'un modèle affin (Q. 6 et 8).

	Classes expérimentales		Classes témoins	
Q.5 (FF)	pré	24,1 %	pré	31,3 %
	post	39,3 %	post	33,3 %
Q.10 (FF)	pré	13,4 %	pré	19,8 %
	post	14,3 %	post	6,3 %

Tableau 7.5 – Pourcentage de réponses utilisant la proportionnalité de manière erronée, questions de type « proportionnalité inverse » (Sambreville)

	Classes expérimentales		Classes témoins	
Q.2 (FF)	pré	39,3 %	pré	31,3 %
	post	49,1 %	post	34,4 %
Q.7 (FF)	pré	38,4 %	pré	27,1 %
	post	49,1 %	post	35,4 %

Tableau 7.6 – Pourcentage de réponses utilisant la proportionnalité de manière erronée, questions de type « constant » (Sambreville)

	Classes expérimentales		Classes témoins	
Q.6 (FF)	pré	0 %	pré	5,2 %
	post	15,2 %	post	6,3 %
Q.8 (FF)	pré	3,6 %	pré	5,2 %
	post	2,7 %	post	4,2 %

Tableau 7.7 – Pourcentage de réponses utilisant la proportionnalité de manière erronée, questions de type « affin » (Sambreville)

Les résultats des tableaux 7.5 à 7.7 laissent imaginer que les élèves des classes expérimentales utilisent davantage la proportionnalité en situation inappropriée dans les questions du post-test, par rapport aux élèves des classes témoins (à une exception près) et que l'évolution de l'utilisation de la proportionnalité à mauvais escient entre les deux tests est plus marquée chez les élèves des classes expérimentales. Les différences de résultats au post-test entre classes expérimentales et témoins sont significatives à 95% pour les questions 2, 6, 7 et 10. L'évolution apparente des comportements des élèves des classes expérimentales entre le pré-test et le post-test est significative à 99% pour les questions 5 et 6 et à 95% pour les questions 2 et 7.

Ces résultats nous ont amenés à réaliser une analyse plus approfondie : la réalisation de tableaux croisés dynamiques. L'annexe M reprend l'ensemble des tableaux. Une telle analyse a permis d'identifier divers éléments qui expliquent de tels résultats et qui, surtout, permettent d'atténuer l'apparente différence entre les comportements des élèves des classes expérimentales et témoins.

Tout d'abord, le taux d'utilisation de la proportionnalité de manière inappropriée augmente fortement à la question 5 pour les élèves des classes expérimentales (tableau 7.5), mais on observe à travers les tableaux croisés dynamiques de l'annexe M que plus de 10% des élèves ayant répondu correctement au pré-test commettent cette erreur au post-test et ce, autant dans les classes expérimentales que dans les témoins. Si le taux de réponses utilisant la proportionnalité de manière erronée ne semble pas bouger pour ces dernières (il passe seulement de 31,3% à 33,3%), c'est parce qu'il y a également plus de 10% des élèves des classes témoins qui donnent une réponse correcte au post-test alors qu'ils avaient utilisés la proportionnalité à mauvais escient au pré-test, ce qui n'est pas le cas pour les élèves des classes expérimentales. Ainsi, les pourcentages similaires observés ne reflètent pas nécessairement un même groupe d'élèves.

Les résultats propres à la question 10 (tableau 7.5) laissent penser que les élèves des classes expérimentales n'ont pas changé leur comportement face à l'utilisation inadéquate de la proportionnalité alors que les élèves des classes témoins semblent plus réfléchis. Une analyse plus poussée à partir des tableaux croisés dynamiques permet l'observation de phénomènes interpellants. Reprenons les deux tableaux concernés [29].

Témoin/Test	Test					
Nombre de Q.10 usine - pré	**post-test**					
Pré-test	**--**	**f...**	**ff**	**v...**	**vv**	**Total général**
--	1,79%	0,00%	0,00%	0,00%	1,79%	3,57%
f...	0,00%	0,00%	0,89%	0,89%	0,89%	2,68%
ff	2,68%	0,89%	5,36%	0,00%	4,46%	13,39%
vv	10,71%	2,68%	8,04%	8,93%	50,00%	80,36%
Total général	**15,18%**	**3,57%**	**14,29%**	**9,82%**	**57,14%**	**100,00%**

Témoin/Test	Témoin					
Nombre de Q.10 usine - pré	**post-test**					
Pré-test	**--**	**f...**	**ff**	**v...**	**vv**	**Total général**
--	1,04%	0,00%	0,00%	0,00%	4,17%	5,21%
ff	4,17%	1,04%	2,08%	2,08%	10,42%	19,79%
v...	0,00%	0,00%	0,00%	0,00%	2,08%	2,08%
vv	11,46%	2,08%	4,17%	10,42%	44,79%	72,92%
Total général	**16,67%**	**3,13%**	**6,25%**	**12,50%**	**61,46%**	**100,00%**

La troisième ligne de nombres du premier tableau (long cadre foncé) nous indique que, dans les classes expérimentales, une petite moitié des élèves ayant utilisé la proportionnalité de manière erronée (FF) lors du pré-test, a conservé le même comportement au post-test, tandis qu'une autre petite moitié de ces élèves a répondu correctement à la question, ce qui est encourageant. Les autres se sont abstenus de

29. Dans ces analyses, les classes expérimentales ont été dénommées classes « test ».

répondre. S'il n'y a que 5,36% parmi les 13,39% qui ont conservé le même comportement, il est intriguant de constater que, pour arriver au pourcentage proche de 14,29% lors du post-test, ce sont en fait des élèves qui avaient répondu correctement au pré-test qui se sont trompés au post-test (cadre plus clair). Il s'est passé un phénomène assez semblable dans les classes témoins. Le deuxième tableau montre que près de 20% des élèves s'étaient trompés lors du pré-test et que, parmi ceux-ci, la moitié a répondu correctement au post-test. Seule une petite partie des élèves a conservé un raisonnement inapproprié. La majorité des réponses erronées obtenues au post-test provient des élèves qui avaient répondu correctement lors du pré-test (4,17% sur les 6,25%).

Cet échange de comportement des élèves, tant dans les classes expérimentales que témoins, face à cette question montre qu'il aurait pu être intéressant de réaliser également une analyse plus poussée pour évaluer l'équivalence des questions, ce qui n'a pas été fait.

Une dernière chose importante à observer dans ces tableaux de résultats propres à la dixième question est le taux élevé d'abstention lors du post-test : plus de 15% tant dans les classes expérimentales que témoins (entouré dans chacun des tableaux). De plus, cela concerne une grande majorité des élèves qui avaient répondu correctement lors du pré-test. Une des explications à donner est peut-être liée au fait que c'était une des dernières questions du test et que les élèves, proches de vacances scolaires, ne seraient pas restés concentrés. Remarquons en outre que ce taux d'abstention ne fait qu'augmenter aux questions qui suivent dans le questionnaire.

Des observations similaires peuvent être formulées à partir des résultats détaillés des questions 2 et 7 (voir tableau 7.6 et annexe M). Nous avons fait le choix de ne pas insérer chacun des tableaux croisés au fil du texte afin d'en alléger la lecture. Par contre, nous synthétisons ce qu'il en ressort. Parmi les élèves utilisant la proportionnalité dans une situation inadaptée au pré-test (FF), la plupart conserve le même comportement lors du post-test. Seule une petite partie modifie sa réaction face à ce type de questions et répond correctement. Entre 10 et 15% des élèves répondent correctement au pré-test mais utilisent, lors du post-test, la proportionnalité alors qu'elle n'est pas un modèle adéquat pour répondre aux questions. Ces observations valent pour les classes expérimentales comme pour les classes témoins, des différences de comportement ne se sont pas marquées.

Pour les questions 6 et 8, le pourcentage de réponses utilisant la proportionnalité de manière erronée est assez faible, déjà lors de la passation du pré-test (tableau 7.7). Il faut toutefois mentionner le saut de pourcentages relatifs aux réponses basées sur la proportionnalité à la question 6, du pré-test au post-test, chez les élèves des classes expérimentales (de 0 à 15%). En se référant au tableau détaillé de l'annexe M, on note qu'une bonne part de ces élèves avaient pourtant répondu correctement lors du pré-test, mais aussi que le pourcentage de réponses erronées non basées sur la proportionnalité (F...) est élevé (20%), ce qui est également le cas dans les classes témoins (près de 10%). De telles informations pourraient indiquer qu'il y a eu un manque de compréhension de cette sixième question du post-test, relative à une collection d'autocollants dans un album. Elle n'avait pas eu l'occasion d'être testée au préalable.

Intéressons-nous maintenant aux questions qualifiées de quadratiques (Q.3, Q.11 et Q.12). La douzième question posée lors du post-test n'a pas d'équivalent au pré-test. Nous n'avons ainsi pas de résultat relatif à l'évolution des comportements à partager. Cette question a remporté le plus haut pourcentage d'abstention de réponse : près de 30%, tant auprès des élèves des classes expérimentales que des classes témoins.

La onzième question n'a pas eu meilleur succès. Le taux de réponses correctes est très bas aux deux tests, tant chez les élèves témoins que chez ceux des classes expérimentales. On peut à nouveau pointer le taux élevé d'abstention de réponse, dans les deux types de classes, lors du post-test.

Pour les questions 3, nous retrouvons un comportement que nous avons dorénavant repéré à plusieurs reprises : une partie des élèves qui avaient utilisé la proportionnalité à mauvais escient au pré-test répond correctement à la question lors du post-test mais une partie équivalente d'élèves qui avaient répondu correctement à la question lors du pré-test répond en utilisant la proportionnalité à la question du post-test (détails à l'annexe M). Ce type d'observation indique qu'il est impératif de prendre beaucoup de précautions avec une analyse trop primaire des résultats qui n'auraient pu indiquer ce changement de comportements chez les élèves. Ajoutons encore qu'un taux d'abstention de réponse de près de 20% a été relevé lors du post-test.

Concernant la différentiation de résultats et d'évolution dans les comportements des élèves des classes expérimentales et témoins, ces trois questions ne nous apprennent rien de particulier.

Même si l'existence de situations de proportionnalité et de non-proportionnalité a été soulignée dans les synthèses des élèves des deux types de classe, est-ce que la réalisation d'un test sur le chapitre « proportionnalité » les pousserait à utiliser davantage ce modèle pour répondre aux diverses questions, et donc de manière abusive pour la plupart ? C'est une hypothèse que nous ne pouvons ni écarter, ni vérifier.

Pour l'ensemble des questions, des différences de comportement entre les élèves des classes expérimentales et ceux des classes témoins sont observables mais les résultats du post-test à court terme, relativement à ceux du pré-test, ne permettent en rien de distinguer un groupe par rapport à l'autre.

Nous avons souhaité observer ce qu'il en était à plus long terme du point de vue du raisonnement des élèves quant à l'application abusive de la proportionnalité. Les résultats sont développés dans la section suivante. Des entretiens ont également été menés dans le but d'éclairer quelques interrogations, ces résultats sont développés à la section 7.1.4.

7.1.3 Vue à plus long terme (Sambreville)

Dans cette section sont développés les résultats liés au post-test à long terme. Comme nous l'avons précisé précédemment, il n'a eu lieu que dans les classes de Sambreville. Nous avons en effet pris la décision de ne pas le présenter aux élèves de Namur car nous avions observé que les résultats ressortis des pré-test et post-test à court terme engendraient des modifications de ces deux premiers tests. Il était dès lors inutile d'espérer des résultats intéressants d'un post-test à long terme.

Nous avons fait remarquer dans le chapitre 6 que la numérotation des questions du post-test à long terme avait été modifiée, simplement suite à la diminution du nombre de questions. Cette numérotation ne correspond donc pas toujours à celle des questions des pré-test et post-test à court terme. Les énoncés des questions ne seront pas tous repris dans cette partie du chapitre. Pour les consulter, nous renvoyons à la page 181.

Nous ne nous étendrons pas sur les résultats relatifs aux questions de type proportionnel au vu des bons scores obtenus aux deux premiers tests.

Dans la section ci-dessus, lors de l'analyse des questions 5 de type proportionnalité inverse, nous avons attiré l'attention sur le changement de comportement des élèves face à des questions de ce type malgré les apparences des résultats globaux : des élèves différents réussissent au pré-test et au post-test à court terme. Il est dès lors intéressant de s'intéresser à ce qu'il advient à long terme pour cette question, en commençant par les résultats globaux.

Q.5	pré	Avec un gros sac de bonbons, j'ai pu faire 6 sachets de 300 grammes. Combien de sachets de 100 grammes aurais-je pu faire ?
	post CT	Avec une bouteille d'eau, je remplis 6 verres de 20 cl. Combien aurais-je pu remplir de verres de 10 cl ?
	post LT	Avec une grosse bobine de fil, j'ai fait 6 ficelles de 30 mètres de longueur. Combien de ficelles de 10 mètres de longueur aurais-je pu faire ?

Q.5	Classes expérimentales		Classes témoins	
Taux de réussite (VV + V...)	pré	55,7 %	pré	58,4 %
	post CT	45,3 %	post CT	58,4 %
	post LT	38,7 %	post LT	35,1 %
Taux d'utilisation, inadaptée, de la proportionnalité (FF)	pré	25,5 %	pré	32,5 %
	post CT	41,5 %	post CT	33,8 %
	post LT	36,8 %	post LT	35,1 %
Taux d'abstention (- -)	pré	7,5 %	pré	6,5 %
	post CT	7,5 %	post CT	5,2 %
	post LT	17 %	post LT	19,5%

TABLEAU 7.9 – Résultats des questions 5 (Sambreville)

Les pourcentages présentés dans ce tableau diffèrent légèrement des résultats partagés dans les premières sections de ce chapitre car ils ont été recalculés à partir des réponses des élèves présents aux trois tests : pré-test et post-tests à court et long terme. Il y avait initialement 112 élèves qui avaient présentés les deux premiers tests pour les classes expérimentales et 96 pour les classes témoins. Lorsque les élèves n'ayant pas répondu aux trois tests ont été écartés, il reste respectivement 106 et 77 représentants de ces deux groupes.

Il est ici plus difficile d'analyser finement les résultats car il est nécessaire de croiser les différents types de réponses pour trois questionnaires. Les tableaux croisés dynamiques ont donc été utilisés au cas par cas, afin de vérifier l'une ou l'autre hypothèse émise à partir des résultats primaires. Bien que plus globaux, nous employons des graphiques [30] afin d'aider à la visualisation de résultats.

Tout d'abord, on observe une chute des pourcentages de réussite à long terme, d'autant plus marquée (significative à 99%) entre les deux post-tests chez les élèves des classes témoins comme l'illustre le graphique ci-dessous.

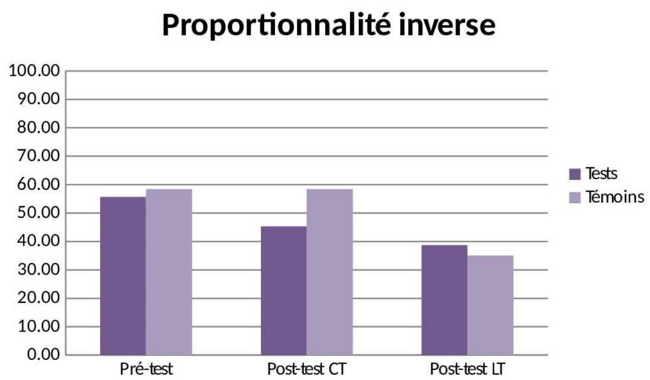


FIGURE 7.1 – Taux de réussite, question 5 (Sambreville)

Ensuite, les résultats liés à l'utilisation inadaptée de la proportionnalité (FF) semblent se stabiliser. Enfin, la forte augmentation du taux d'abstention pourrait donner une explication à la chute des réponses correctes. Pour s'en assurer, regardons les résultats des tableaux réalisés à partir du croisement des données des post-tests à court et à long terme [31].

30. Dans ces analyses, les classes expérimentales avaient également été dénommées classes « tests ».

31. Dans ces analyses, le post-test à court terme avait été dénommé « post A », celui à long terme « post B ».

Témoin/Test	Test

Nombre de Q.5 verres - post	post B				
post A	--	f...	ff	vv	Total général
--	3,77%	0,00%	0,94%	2,83%	7,55%
f...	0,00%	1,89%	1,89%	1,89%	5,66%
ff	5,66%	3,77%	24,53%	7,55%	41,51%
v...	0,00%	0,00%	0,94%	0,00%	0,94%
vv	7,55%	1,89%	8,49%	26,42%	44,34%
Total général	**16,98%**	**7,55%**	**36,79%**	**38,68%**	**100,00%**

Témoin/Test	Témoin

Nombre de Q.5 verres - post	post B				
post A	--	f...	ff	vv	Total général
--	1,30%	1,30%	1,30%	1,30%	5,19%
f...	2,60%	0,00%	0,00%	0,00%	2,60%
ff	3,90%	5,19%	19,48%	5,19%	33,77%
v...	0,00%	0,00%	1,30%	0,00%	1,30%
vv	11,69%	3,90%	12,99%	28,57%	57,14%
Total général	**19,48%**	**10,39%**	**35,06%**	**35,06%**	**100,00%**

Ces résultats permettent de constater qu'il y a effectivement de nombreux élèves qui avaient répondu correctement lors du post-test à court terme qui ne donnent aucune réponse lors du post-test à long terme, dans les classes expérimentales et encore plus dans les classes témoins (entouré dans les tableaux). On observe une fois de plus une inversion de comportement entre les élèves qui avaient répondu correctement et ceux qui avaient utilisé la proportionnalité de manière inadéquate (encadré dans les tableaux). Elle est très marquée chez les élèves témoins, ce qui explique la forte chute des réponses correctes dans les résultats du tableau 7.9, illustrés au graphique de la figure 7.1.

Nous ne poussons pas ces analyses plus loin car il y a de nombreux paramètres en jeu. Ces résultats sont sujets à des variables liées notamment au contexte des questions, à leur formulation, au moment de la passation des tests, ... Toutefois, nous reviendrons à ces questions 5 dans la section suivante qui fait part des entretiens individuels menés avec les élèves de la classe WB_3.

Examinons les résultats des questions dont la réponse s'obtient par application d'un modèle constant en commençant par la question 2.

Q.2	pré	Dans mon jardin, je plante 1 graine de tournesol. Il faut 1 mois pour que le tournesol fleurisse. Si j'avais planté 2 graines de tournesol, combien de temps aurait-il fallu pour qu'ils fleurissent ?
	post CT	J'ai planté 2 bulbes de tulipe. Après 2 semaines, j'ai eu deux belles tulipes dans mon jardin. Si j'avais planté 4 bulbes de tulipe, après combien de semaines auraient-elles poussé ?

	post LT	J'ai planté 10 oignons de jonquille. Après 10 jours, les dix jonquilles décoraient mon parterre de fleurs. Si j'avais planté 20 oignons de jonquille, combien de jours aurait-il fallu pour qu'ils fleurissent ?

Quel que soit l'angle sous lequel on étudie les résultats de ces questions (réussite, utilisation inadéquate de la proportionnalité, abstention), les pourcentages ne varient que très peu d'un test à un autre. Le graphique ci-dessous permet de visualiser la constance des pourcentages de réussite au sein des types de classe (aucune différence significative).

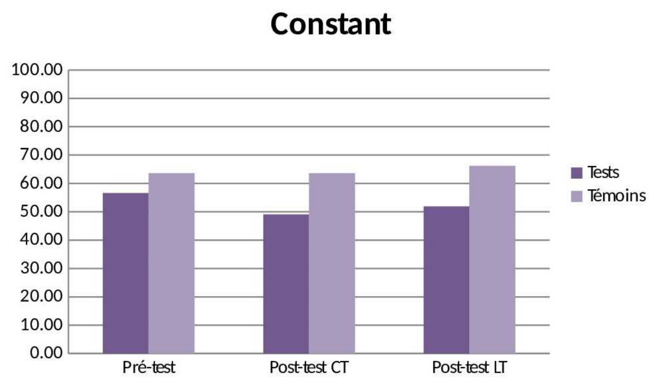


FIGURE 7.2 – Taux de réussite, question 2 (Sambreville)

Il met également en exergue la différence entre les résultats des classes expérimentales et témoins mais, étant donné qu'elle s'est marquée dès la passation du pré-test à 90% de significativité, elle n'est pas à prendre en considération.

L'analyse de l'autre question de ce même type (constant) – Q.7 en pré-test et post-test à court terme, Q.6 en post-test à long terme – donne des résultats intéressants.

Q.7	pré	Sur une corde à linge, une chemise prend 1 heure pour sécher. Combien de temps faut-il pour faire sécher 3 chemises placées les unes à côté des autres sur cette corde ?
	post CT	Il a plu hier. Les 4 chaises que j'avais laissées dehors ont pris 15 minutes pour sécher. Aujourd'hui, j'ai sorti 8 chaises et il a plu à nouveau. Combien de temps faudra-t-il aux 8 chaises pour sécher ?
Q.6	post LT	Dix scouts partent en randonnée. Il se met à pleuvoir et ils sont trempés après 5 minutes. Un groupe de 20 scouts est parti marcher au même moment et a eu droit à la même averse. Après combien de minutes ont-ils été trempés ?

Lors du post-test à court terme, les résultats avaient chuté dans les deux types de classes : diminution des taux de réussite et augmentation de l'utilisation inadéquate de la proportionnalité (tableau 7.6). À long terme, les résultats des deux types de classes indiquent une remontée des nombres de réponses correctes, couplée avec une diminution du nombre d'élèves qui utilisent la proportionnalité de façon inadaptée (tous ces résultats sont significatifs à au moins 90%). Les tableaux croisant les résultats des deux post-tests fournissent plusieurs précisions.

Témoin/Test	Test

Nombre de Q.7 chaises - post	**post B**				
post A	**--**	**f...**	**ff**	**vv**	**Total général**
--	0,94%	0,00%	2,83%	2,83%	6,60%
f...	0,00%	0,00%	0,94%	0,00%	0,94%
ff	6,60%	1,89%	23,58%	16,98%	49,06%
vv	2,83%	0,00%	0,94%	39,62%	43,40%
Total général	**10,38%**	**1,89%**	**28,30%**	**59,43%**	**100,00%**

Témoin/Test	Témoin

Nombre de Q.7 chaises - post	**post B**					
post A	**--**	**f...**	**ff**	**v...**	**vv**	**Total général**
--	0,00%	0,00%	1,30%	0,00%	2,60%	3,90%
ff	5,19%	1,30%	18,18%	0,00%	11,69%	36,36%
vv	2,60%	0,00%	0,00%	1,30%	55,84%	59,74%
Total général	**7,79%**	**1,30%**	**19,48%**	**1,30%**	**70,13%**	**100,00%**

Premièrement, très peu d'élèves ont utilisé la proportionnalité (FF) au post-test à long terme après avoir répondu correctement à court terme : moins de 1% dans les deux types de classe. Bien mieux, de nombreux élèves ayant utilisé la proportionnalité à mauvais escient au post-test à court terme ont donné une réponse correcte à long terme : près de 12% des élèves des classes témoins et 17% de ceux des classes expérimentales. Remarquons que, même si les résultats globaux semblent moins bons pour les élèves des classes expérimentales (réussite du post-test à long terme à 59,43% contre 70,13% pour les élèves des classes témoins), on identifie un nombre conséquent d'élèves des classes expérimentales (les 17% mentionnés ci-dessus) qui améliorent leur raisonnement en appliquant un modèle adéquat au post-test à long terme.

Les questions dont la réponse s'obtient par application d'un modèle quadratique ont également été testées à long terme. Les résultats globaux de la question 3 (du type carré QRST) aux trois tests ne nous apprennent rien car les taux ne varient pas significativement d'un test à l'autre. Dans la section précédente, nous avons tiré une information des tableaux croisant les données des pré-test et post-test à court terme : les profils d'élèves s'échangent entre ceux qui répondent correctement et ceux qui font une utilisation abusive de la proportionnalité. Les tableaux croisés dynamiques relatifs aux données des deux post-tests ne nous apprennent rien d'autre que cette même constatation. Par contre, le croisement des données du pré-test et du post-test à long terme fait apparaître que, parmi les élèves ayant répondu correctement à ce dernier test (grands rectangles dans les tableaux ci-dessous), ils sont nombreux à avoir modifié leur raisonnement inadapté utilisé lors du pré-test (petits rectangles), davantage dans les classes expérimentales que témoins. On relève aussi qu'il n'y a qu'un petit pourcentage d'élèves dans les classes expérimentales à avoir le comportement inverse (moins de 4%).

Témoin/Test	Test					
Nombre de Q.3 carré - pré	**post B**					
pré	**--**	**f...**	**ff**	**v...**	**vv**	**Total général**
--	3,77%	0,00%	3,77%	0,00%	1,89%	9,43%
f...	4,72%	0,00%	2,83%	0,00%	1,89%	9,43%
ff	13,21%	0,00%	37,74%	0,00%	11,32%	62,26%
v...	0,00%	0,00%	2,83%	0,00%	1,89%	4,72%
vv	0,94%	0,94%	3,77%	0,94%	7,55%	14,15%
Total général	**22,64%**	**0,94%**	**50,94%**	**0,94%**	**24,53%**	**100,00%**

Témoin/Test	Témoin				
Nombre de Q.3 carré - pré	**post B**				
pré	**--**	**f...**	**ff**	**vv**	**Total général**
--	3,90%	0,00%	5,19%	2,60%	11,69%
f...	0,00%	1,30%	2,60%	1,30%	5,19%
ff	14,29%	3,90%	27,27%	9,09%	54,55%
v...	1,30%	0,00%	0,00%	0,00%	1,30%
vv	3,90%	0,00%	7,79%	15,58%	27,27%
Total général	**23,38%**	**5,19%**	**42,86%**	**28,57%**	**100,00%**

Pour l'autre question de ce même type (quadratique avec contexte) – Q.11 au pré-test et post-test à court terme, Q.8 au post-test à long terme – ce sont les tableaux croisant les données des deux post-tests qui fournissent l'information la plus intéressante.

Témoin/Test	Test					
Nombre de Q.11 pelouse - post	**post B**					
post A	**--**	**f...**	**ff**	**v...**	**vv**	**Total général**
--	9,43%	0,00%	8,49%	0,00%	0,94%	18,87%
f...	2,83%	0,94%	0,94%	0,00%	0,00%	4,72%
ff	11,32%	7,55%	48,11%	0,94%	4,72%	72,64%
v...	0,00%	0,00%	0,94%	0,00%	0,00%	0,94%
vv	0,94%	0,00%	0,94%	0,00%	0,94%	2,83%
Total général	**24,53%**	**8,49%**	**59,43%**	**0,94%**	**6,60%**	**100,00%**

Témoin/Test	Témoin					
Nombre de Q.11 pelouse - post	**post B**					
post A	**--**	**f...**	**ff**	**v...**	**vv**	**Total général**
--	5,19%	1,30%	10,39%	1,30%	5,19%	23,38%
f...	1,30%	2,60%	3,90%	0,00%	0,00%	7,79%
ff	15,58%	3,90%	36,36%	2,60%	0,00%	58,44%
v...	1,30%	0,00%	1,30%	0,00%	0,00%	2,60%
vv	0,00%	0,00%	3,90%	3,90%	0,00%	7,79%
Total général	**23,38%**	**7,79%**	**55,84%**	**7,79%**	**5,19%**	**100,00%**

Dans la section précédente, nous avons soulevé que le taux de réussite à cette question était assez faible au pré-test et n'augmentait pas énormément au post-test à court terme. Il n'est pas non plus élevé au post-test à long terme et les taux d'abstention sont eux par contre toujours très élevés. Il est dès lors encourageant d'observer que ce sont principalement des élèves qui avaient utilisé incorrectement la proportionnalité à court terme qui fournissent une réponse juste à long terme dans les classes expérimentales. Par contre, il se passe un effet inverse dans les classes témoins.

7.1.4 Indications complémentaires

Diverses questions subsistent. Pour répondre à certaines d'entre elles, nous avons mené des entretiens individuels dans la classe WB_3. Ils étaient basés sur des questions, introduites dans les révisions des élèves, issues du post-test à long terme soumis dans les classes de Sambreville. Les entretiens se sont déroulés moins de deux heures après la passation de ce test écrit.

La conception du test proposé dans cette classe s'est basée sur les premières réflexions issues des résultats, avant d'avoir effectué l'analyse approfondie présentée dans les paragraphes ci-dessus avec la réalisation des tableaux croisés de données.

Les questions principales que nous nous sommes alors posées étaient de deux sortes. La première était de comprendre des raisons qui expliquent pourquoi les deux questions dont la réponse s'obtient par application de la proportionnalité inverse posées au post-test à long terme (voir questions 5 et 7 du post-test de Sambreville reprises dans le tableau ci-dessous) ont des taux de réussite si différents (moins de 40% et environ 60% respectivement). La seconde est relative aux scores très faibles des questions dont la réponse est obtenue par l'identification d'un modèle constant (voir notamment figure 7.2).

Nous avons donc inséré dans les questions de révisions des élèves de la classe WB_3 ces quatre questions, ainsi que deux questions de type proportionnalité afin de contrôler si le niveau de réussite de ces dernières était correct.

type (spécificité)	question post-test LT	n° (Sambr.)	n° (WB_3)
proportionnalité	Un pack de limonade contient 6 bouteilles. Combien de bouteilles y a-t-il dans 3 packs ?	Q.1	Q.1
proportionnalité (coefficient de proportionnalité non entier)	Pour faire des crêpes pour 6 personnes, il faut 300 grammes de farine. Combien de grammes de farine faudra-t-il pour faire des crêpes pour 8 personnes ?	Q.4	Q.3
proportionnalité inverse	Avec une grosse bobine de fil, j'ai fait 6 ficelles de 30 mètres de longueur. Combien de ficelles de 10 mètres de longueur aurais-je pu faire ?	Q.5	Q.4
proportionnalité inverse	Dans un atelier de couture, 8 ouvrières travaillent pendant 10 heures pour produire des vêtements. S'il fallait réaliser la même quantité de vêtements en 5 heures, combien d'ouvrières devraient travailler ?	Q.7	Q.6
constant	J'ai planté 10 oignons de jonquille. Après 10 jours, les dix jonquilles décoraient mon parterre de fleurs. Si j'avais planté 20 oignons de jonquille, combien de jours aurait-il fallu pour qu'ils fleurissent ?	Q.2	Q.2
constant	Dix scouts partent en randonnée. Il se met à pleuvoir et ils sont trempés après 5 minutes. Un groupe de 20 scouts est parti marcher au même moment et a eu droit à la même averse. Après combien de minutes ont-ils été trempés ?	Q.6	Q.5

La taille du nouvel échantillon est bien plus petite que pour les tests précédents, la classe interrogée était composée de 23 élèves. Les résultats des questions concernées sont cependant similaires. Les élèves ont répondu tout à fait correctement, comme attendu, aux deux questions de type proportionnalité. De plus, les résultats sont proches des 45% pour la première des questions de proportionnalité inverse (Q.5), de 55% pour l'autre (Q.7, ou Q.6 pour WB_3) et sont bien en-dessous des 50% pour les questions de type constant.

Les entretiens individuels ne se sont pas centrés uniquement sur ces questions. D'autres ont été posées, propres à l'apprentissage de la proportionnalité (voir section 7.2.4). Nous avions l'intention de retirer un maximum d'informations de ces interviews avec les élèves à partir de leurs réponses mais, la séance se déroulant pendant leur temps de midi, la durée de la rencontre avec chaque élève n'a pas été suffisante que pour avoir réponse à toutes nos questions.

Voici toutefois quelques éléments qui permettent de donner une part d'explication aux résultats observés.

La différence des pourcentages de réussite aux questions dont la réponse s'obtient par application de la proportionnalité inverse peut s'expliquer par la clarté des énoncés. Plusieurs élèves nous ont témoigné qu'ils n'avaient pas compris correctement la question relative aux ficelles.

Une autre élève a eu le comportement inverse (réponse correcte à la question des ficelles et pas à celles des ouvrières), ce qui nous a surpris par rapport à la majorité des réponses récoltées. Lors de l'entretien, elle nous a indiqué que, pour répondre correctement à la question sur les ficelles, elle a procédé par calcul ($6 \times 30 = 180 \Rightarrow 180/10 = 18$) or, pour l'autre question de la même catégorie (ouvrières), elle nous a avoué ne pas avoir « spécialement réfléchi ».

Une autre élève interviewée nous a expliqué oralement que « si la ficelle est plus longue, il y a moins de morceaux », et pourtant, elle n'avait pas répondu correctement sur sa feuille, utilisant la proportionnalité pour répondre à la question, comme en atteste le schéma ci-dessous, repris de sa feuille.

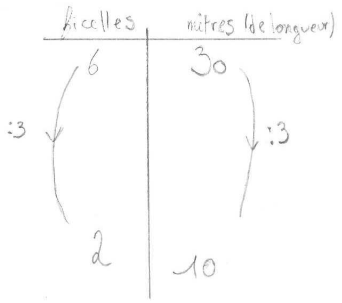


FIGURE 7.3 – Réponse d'une élève de WB_3, question 5

Ce genre de comportement rejoint ce qui est ressorti de plusieurs des autres entretiens. Beaucoup nous ont dit avoir appliqué la proportionnalité parce qu'ils n'ont pas « osé faire autrement » ou parce que c'est ce qu'ils pensaient « devoir appliquer ».

Selon nous, c'est donc en multipliant les expériences de ce type que les élèves s'affranchiront du modèle linéaire. La maturité joue évidemment un rôle important également. Les résultats de l'équipe de De Bock par rapport à l'illusion de linéarité (section 1.1.2, page 17) l'attestent. Ils montrent en effet que la prégnance de la linéarité évolue au fil de l'âge des élèves. Elle s'accentue notamment vers la fin du primaire.

Nous avons dès lors réalisé de rapides tests en 5^{e} primaire (grade 5) et 3^{e} secondaire (grade 9) pour observer si cette tendance à utiliser la proportionnalité de manière excessive semblait s'estomper avec l'âge. D'un côté, une collègue a accepté d'insérer des questions dans un test qu'elle présentait à des élèves de 5^{e} primaire pour ses propres recherches. De l'autre, une enseignante de Sambreville a accepté de proposer ces mêmes questions à ses classes de 3^{e} secondaire. Onze classes de 5^{e} primaire et deux classes de 3^{e} secondaire ont ainsi participé à ces tests, ce qui fait respectivement 219 et 43 élèves pour les deux échantillons.

Seules deux questions du pré-test leur ont été posées : l'une pour laquelle la réponse s'obtient par application d'un modèle constant, l'autre de proportionnalité inverse.

type	question
constant	Dans mon jardin, je plante 1 graine de tournesol. Il faut 1 mois pour que le tournesol fleurisse. Si j'avais planté 2 graines de tournesol, combien de temps aurait-il fallu pour qu'ils fleurissent ?
proportionnalité inverse	Avec un gros sac de bonbons, j'ai pu faire 6 sachets de 300 grammes. Combien de sachets de 100 grammes aurais-je pu faire ?

L'évolution des résultats obtenus (tableau 7.13) semble effectivement indiquer que, avec le temps, l'illusion de linéarité laisserait place à la réflexion, pour des questions telles que présentées dans ce travail. Les différences sont significatives à minimum 90%, à une exception près.

	5^{e} primaire	1^{e} secondaire		3^{e} secondaire
Q. tournesol (VV + V...)	45,7 %	exp.	56,6 %	90,7 %
		tém.	63,6 %	
Q. tournesol (FF)	49,3 %	exp.	38,7 %	9,3 %
		tém.	32,5 %	
Q. bonbons (VV + V...)	45,2 %	exp.	55,7 %	86,1 %
		tém.	58,4 %	
Q. bonbons (FF)	24,2 %	exp.	25,5 %	11,6 %
		tém.	32,5 %	

Tableau 7.13 – Résultats d'élèves à différents niveaux de la scolarité

Les résultats présentés pour la 1^{e} secondaire sont ceux des questions du pré-test, sur base des résultats des élèves ayant répondu aux trois tests (pré-test et post-tests à court et à long terme).

7.2 Apprentissage de la proportionnalité

Cette section s'attache à explorer les résultats relatifs à l'apprentissage de la proportionnalité. Nous adoptons la même structure que celle utilisée dans la section 7.1. On s'arrêtera ainsi sur les résultats des classes de Namur, puis sur ceux des classes de Sambreville (à court et à long terme) et on clôturera par quelques indications complémentaires.

Le codage des résultats diffère légèrement de celui employé jusqu'ici. Les réponses des élèves sont attendues à deux niveaux : le premier doit spécifier s'ils ont reconnu ou non une situation de proportionnalité, le second tient en la justification de leur réponse. Le code correspond à ces deux parties de la réponse. Ainsi, le symbole VF indique que l'élève a répondu correctement à la question mais n'a pas justifié sa réponse de manière adéquate, F- signifie que la réponse est fausse et que l'élève n'a pas donné de justification, ...

Les questions présentées en post-test à court terme à Namur se trouvent à l'annexe K et celles de Sambreville à l'annexe L.

7.2.1 Premier comparatif classes expérimentales et témoins (Namur)

Quatre types de questions ont été présentés aux élèves des classes namuroises. Les situations graphiques (4, 8 et 11), géométriques (3, 6 et 9) ainsi que les textuelles (1 et 12) ont été globalement bien réussies, avec un taux de bonne réponse (VV + VF + V-) au-dessus de 80%, à une exception près. Les pourcentages de réussite avec justification correcte (uniquement VV), surtout pour les situations graphiques, sont très peu en-deçà des taux de bonnes réponses.

	Classes expérimentales		Classes témoins	
S.4	VV	70,8 %	VV	64,1 %
	VV+VF+V-	81,5 %	VV+VF+V-	73,7 %
S.8	VV	73 %	VV	67,1 %
	VV+VF+V-	81,5 %	VV+VF+V-	80,2 %
S.11	VV	84,3 %	VV	82 %
	VV+VF+V-	93,8 %	VV+VF+V-	91 %
S.3	VV	77,5 %	VV	77,2 %
	VV+VF+V-	83,7 %	VV+VF+V-	84,4 %
S.6	VV	65,7 %	VV	68,9 %
	VV+VF+V-	88,2 %	VV+VF+V-	90,4 %
S.9	VV	67,4 %	VV	62,9 %
	VV+VF+V-	82,6 %	VV+VF+V-	82 %

S.1	VV	77 %	VV	73,7 %
	VV+VF+V-	91 %	VV+VF+V-	90,4 %
S.12	VV	73,6 %	VV	78,4 %
	VV+VF+V-	86 %	VV+VF+V-	87,4 %

Tableau 7.14 – Résultats des questions relatives à la proportionnalité (Namur)

Les différences observées entre les classes expérimentales et les classes témoins ne sont pas significatives (à l'exception de la situation 4 qui l'est à 90%).

En ce qui concerne les situations présentées sous forme de tableaux (2, 5, 7 et 10), les résultats sont plus mitigés et différents d'une situation à une autre.

	Classes expérimentales		Classes témoins	
S.2	VV	80,3 %	VV	82 %
	VV+VF+V-	92,1 %	VV+VF+V-	95,8 %
S.5	VV	59,6 %	VV	76 %
	VV+VF+V-	63,5 %	VV+VF+V-	83,8 %
S.7	VV	52,8 %	VV	64,1 %
	VV+VF+V-	58,4 %	VV+VF+V-	74,9 %
S.10	VV	66,9 %	VV	73,7 %
	VV+VF+V-	70,2 %	VV+VF+V-	83,8 %

Tableau 7.15 – Résultats des questions relatives à la proportionnalité, tableaux (Namur)

La situation 2 qui n'est pas de proportionnalité est majoritairement bien réussie. On observe par contre des taux de réussite plus bas pour les trois autres situations, et particulièrement dans les classes expérimentales. Une explication peut être donnée pour la situation 7, reprise dans le cadre ci-dessous.

Situation 7
Âge de deux amis à différentes dates

Âge Pierre	Âge Marc
1	4
3	6
5	8
7	10
9	12

La séquence didactique, telle qu'elle a été présentée aux classes de Namur, invitait les élèves à identifier les écarts constants au même titre que la reconnaissance des liens multiplicatifs dans les tableaux de proportionnalité. Les élèves n'ont pas été mis en garde relativement à l'importance de ne pas se baser uniquement sur ces écarts constants pour identifier une situation de proportionnalité. Ils ont alors cru reconnaître un tableau de proportionnalité dans cette situation.

Pour les situations 5 (correspondance pointure et longueur d'un pied) et 10 (tableau de change), le manque de pratique de la recherche d'un coefficient de proportionnalité dans les classes expérimentales est sans doute à mettre en cause.

Les observations issues de ces premiers résultats ont davantage contribué à l'amélioration de la séquence didactique qu'à la modification des questions du post-test. Ces dernières ont toutefois subi des changements pour leur passation dans les classes de Sambreville, mais c'est suite à l'analyse de manuels, comme explicité à la section 6.2.2 (à partir de la page 175).

7.2.2 Deuxième comparatif classes expérimentales et témoins (Sambreville)

Les principales modifications concernant les situations graphiques et les tableaux, nous ne nous étendons pas sur les résultats des situations textuelles et géométriques. Elles avaient effectivement été relativement bien réussies à Namur, elles l'ont été un peu moins dans les classes de Sambreville, mais le taux de bonne réponse (VV+V...+VF+V-) reste correct. Il faut toutefois mentionner que les résultats avec justifications correctes (VV) sont bien en-dessous dans l'ensemble, tant dans les classes témoins qu'expérimentales.

Quant aux situations graphiques, mise à part la situation qui a été modifiée que nous détaillons juste après, elles ont été tout aussi bien réussies, voire mieux que l'année précédente. Les résultats sont majoritairement au-dessus de ceux des classes de Namur (tableaux 7.14 et 7.16). Les résultats des classes expérimentales sont supérieurs à ceux des classes témoins, de manière significative à 95%, pour la situation 4. Notons l'apparition du code V... entre les expérimentations dans les classes de Namur et celles de Sambreville, résultat d'une légère adaptation du système de codage.

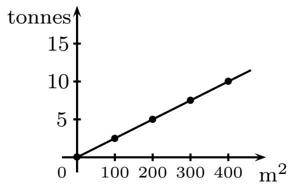
	Classes expérimentales		Classes témoins	
S.4	VV	78,1 %	VV	67 %
	VV+V...+VF+V-	93 %	VV+V...+VF+V-	83 %
S.8	VV	71,1 %	VV	66 %
	VV+V...+VF+V-	84,2 %	VV+V...+VF+V-	78 %

TABLEAU 7.16 – Résultats des questions relatives à la proportionnalité, situations graphiques inchangées (Sambreville)

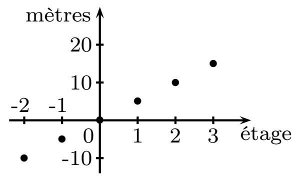
La situation graphique 11 a été modifiée afin d'observer l'influence que peut avoir une définition graphique trop restreinte, telle que celles souvent présentes dans les manuels (demi-droite partant de l'origine). De tels exemples ont été présentés à la page 175. Il est vrai que les élèves ne rencontrent la plupart du temps que des situations pour lesquelles cette définition se vérifie, il peut dès lors être intéressant de leur présenter des exemples similaires à la situation 11 proposée aux classes de Sambreville, car une grandeur n'est pas nécessairement continue et il en existe avec des valeurs négatives.

Le cadre ci-dessous reprend la situation 11 proposée, à gauche aux classes de Namur, à droite aux classes de Sambreville.

Production de céréales en fonction de la taille d'un champ



Numéro d'un étage et niveau correspondant (en mètres) par rapport au rez-de-chaussée



Les résultats pour la situation 11 proposée aux classes de Namur ont été très bons (plus de 90% de réussite, dont plus de 80% avec justification correcte, tableau 7.14) ce qui n'est pas le cas des résultats obtenus pour la situation 11 au test de Sambreville.

S.11	Classes expérimentales	Classes témoins
VV	40,4 %	37 %
V…	40,4 %	15 %
VV+V…+VF+V-	85,1 %	63 %
FF	4,4 %	22 %

Tableau 7.17 – Résultats de la situation graphique 11 (Sambreville)

Ce sont les élèves des classes témoins qui ont été le plus pénalisés par ce type de situation, suite aux définitions reçues dans leur classe. Les 22% de réponses erronées avec mauvaise justification relevées chez ces élèves correspondent principalement à des élèves qui ont spécifié que ça ne pouvait correspondre à une situation de proportionnalité car « ce n'est pas une droite qui part de l'origine ». Le pourcentage de réponse correcte avec une justification adéquate est proche dans les deux groupes d'élèves. Cependant, ils sont beaucoup plus nombreux dans les classes expérimentales à ressentir que le graphique correspond à une situation de proportionnalité, même s'ils n'arrivent pas à le justifier clairement. Cette observation est positive pour la séquence didactique suivie par ces élèves.

Les situations représentées par des tableaux (situations 2, 5, 7 et 10) donnent des résultats assez divers à observer. Nous ne reprenons dans le tableau ci-dessous que les résultats globaux. Le symbole V correspond ainsi à la somme des pourcentages de VV, V…, V- et VF ; le symbole F à celle de FF, F… et F-.

	Classes expérimentales		Classes témoins	
S.2	V	90,4 %	V	83 %
	F	7 %	F	15 %
	- -	2,6 %	- -	2 %
S.5	V	43 %	V	52 %
	F	43,9 %	F	40 %
	- -	13,1 %	- -	8 %
S.7	V	59,6 %	V	74 %
	F	36 %	F	21 %
	- -	4,4 %	- -	5 %
S.10	V	49,1 %	V	68 %
	F	29 %	F	14 %
	- -	21,9 %	- -	18 %

Tableau 7.18 – Résultats des situations sous forme de tableau (Sambreville)

Les seuls pourcentages de réussite n'ayant presque pas bougés par rapport à ceux de Namur (tableau 7.15) sont ceux de la situation 7 (âges de deux amis). La situation n'a pas été modifiée et nous avons donné une explication aux résultats plus faibles des élèves des classes expérimentales dans la section 7.2.1. La situation 5 (pointure et longueur d'un pied) est également identique à celle proposée l'année précédente. Pourtant, les pourcentages de réussite sont nettement inférieurs et ce, dans les deux groupes de classes. Nous avons fait remarquer plus haut que les résultats sont moins élevés dans les classes de Sambreville que dans les classes de Namur, cette situation en est un exemple. Une hypothèse pour expliquer les faibles taux de réussite obtenus est peut-être le choix des nombres repris dans la situation. Les résultats inférieurs des classes expérimentales peuvent quant à eux à nouveau être liés à une pratique moins intensive d'exercices de recherche d'un coefficient de proportionnalité.

Le contexte de la situation 10 a été modifié (abandon d'un tableau de change pour une correspondance entre miles et km), c'est un facteur qui peut expliquer la chute des résultats. Cependant, les pourcentages élevés d'abstention de réponse donnent également une raison à ces diminutions de réussite.

La situation 2 a également été remplacée de sorte à favoriser la reconnaissance d'un coefficient de proportionnalité qui permet de passer des valeurs de la deuxième grandeur à la première.

Prix (en €)	Réduction (en €)
2	0,5
6	1,5
10	2,5
12	3

Les élèves des classes témoins montrent des résultats significativement plus faibles (à 90%) que ceux des classes expérimentales. La définition d'un coefficient de proportionnalité basée sur la reconnaissance unique du passage des valeurs de la grandeur 1 à la grandeur 2, qui leur a été communiquée, semble porter préjudice à la reconnaissance d'un tableau de proportionnalité. Cette observation est d'autant plus marquée dans les résultats du test réalisé à long terme, dont il est question dans la section suivante.

7.2.3 Vue à plus long terme (Sambreville)

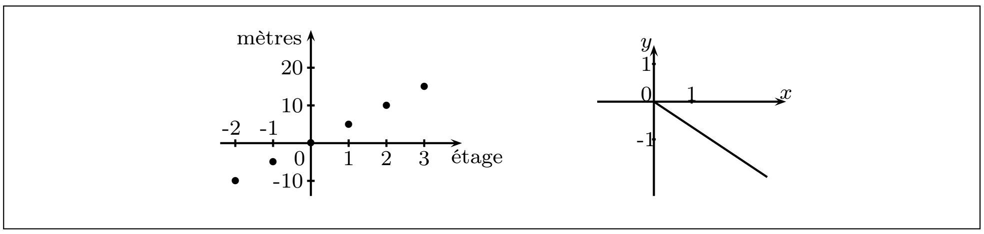
Ce test à long terme n'a eu lieu que dans les classes de Sambreville. Les questions ont été exposées à la section 6.2.3.

À long terme, les situations graphiques sont à nouveau mieux réussies par les élèves des classes expérimentales que ceux des classes témoins, et ce de manière significative (à respectivement 95 et 90% pour Graph. 1 et Graph. 2). Les résultats du tableau suivant en attestent.

	Classes expérimentales	Classes témoins
Graph. 1	85 %	73,8 %
Graph. 2	85 %	76,3 %

Tableau 7.19 – Réussite des situations graphiques (Sambreville, post-test LT)

Le graphique de la figure 7.4, qui aide à visualiser les résultats à court et à long terme, semble montrer que les élèves témoins paraissent plus déstabilisés par une représentation de grandeurs proportionnelles différente d'une demi-droite partant de l'origine du repère (situation 11 du post-test à court terme, à gauche) que par un graphique décroissant (proposé dans le post-test à long terme, à droite) mais la différence n'est pas significative.



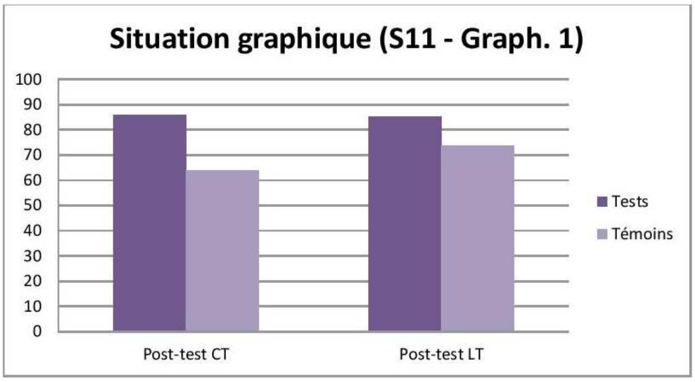


FIGURE 7.4 – Taux de réussite, situation graphique (Sambreville)

Les résultats du post-test à court terme utilisés dans ce graphique sont légèrement différents de ceux présentés dans la section précédente étant donné que les pourcentages ont été recalculés à partir des résultats des élèves présents aux deux tests (à court et à long terme). Ils ne diffèrent que de moins de 1%.

Quant aux situations dans lesquelles les données sont présentées sous forme de tableau, les résultats à long terme (tableau 7.20) sont bien supérieurs à ceux du test à court terme (tableau 7.18), surtout pour les classes expérimentales pour lesquelles ils sont significativement meilleurs que ceux des classes témoins (à 99% pour la situation Tab. 1, à 95% pour Tab. 2 et Tab. 3).

	Classes expérimentales	Classes témoins
Tab. 1 (|)	91,6 %	75 %
Tab. 2 (|)	82,2 %	70 %
Tab. 3 (—)	87,9 %	76,3 %
Tab. 4 (—)	76,6 %	73,8 %

TABLEAU 7.20 – Réussite des situations, tableaux (Sambreville, post-test LT)

Par exemple, les situations 5 (longueur et pointure d'un pied) et 10 (conversion miles et km) présentées à court terme n'avaient été réussies qu'à environ 50%. L'hypothèse de la difficulté du choix de données utilisées dans ces situations doit être considérée. Les élèves ont effectivement repéré beaucoup plus facilement la proportionnalité entre les données des deux lignes du troisième tableau proposé dans le post-test à long terme, repris ci-dessous.

x	2	9	3	6
y	6	27	9	18

Une bonne majorité des élèves a identifié les deux tableaux de non-proportionnalité (Tab. 2 et 4), tant dans les classes expérimentales que témoins, avec un taux de réussite significativement meilleur pour la situation Tab. 2 chez les élèves qui ont suivi la séquence didactique comme indiqué ci-dessus.

La situation Tab. 1 proposée aux élèves est à nouveau un tableau pour lequel il est plus facile de repérer un coefficient de proportionnalité qui permet de passer des valeurs de la deuxième grandeur à la première. Le graphique ci-dessous semble montrer que les résultats des élèves témoins sont moins bons à long terme qu'à court terme mais la différence n'est pas significative.

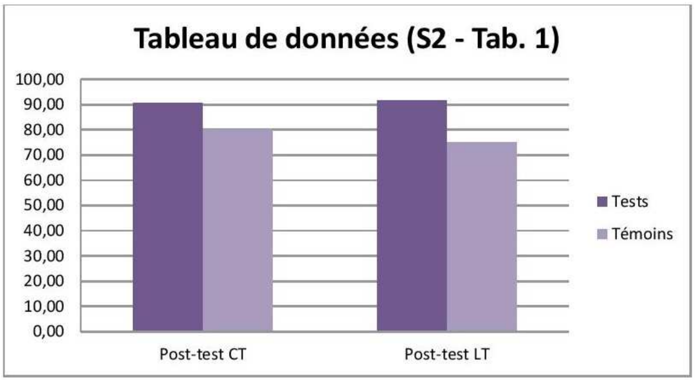


FIGURE 7.5 – Taux de réussite, tableau de données (Sambreville)

Notons qu'on pourrait estimer que la question du post-test à long terme était un peu plus difficile que celle du post-test à court terme à cause du coefficient 1/20, moins familier que 1/4. Cette difficulté ne se présente pas aux élèves qui conçoivent les deux grandeurs comme symétriques et repèrent le coefficient 20 entre les valeurs de la deuxième grandeur et celles de la première.

Les deux situations sont reprises ci-dessous. Le tableau de gauche correspond à la situation du post-test à court terme, celui de droite à celle du post-test à long terme.

Prix (en €)	Réduction (en €)
2	0,5
6	1,5
10	2,5
12	3

x	y
100	5
300	15
50	2,5
200	10

Les résultats observés à court terme pour ce volet « situations » étaient rassurants quant à l'apprentissage de la proportionnalité dans les classes expérimentales. L'analyse des pourcentages de réussite à long terme porte à soutenir l'introduction de la séquence didactique dans les classes.

7.2.4 Indications complémentaires

Sans détailler les résultats obtenus suite à l'introduction de quelques questions dans les révisions de la classe WB_3 car ils n'apprennent rien de réellement nouveau, signalons simplement que les élèves interviewés nous ont bien confirmé que ce sont les nombres utilisés dans la situation 5 du post-test à court terme (correspondance entre longueur et pointure d'un pied) qui les ont empêchés de remarquer un coefficient de proportionnalité.

7.3 En conclusion des analyses statistiques

Pour conclure ce chapitre, notons que les attentes des différents tests étaient diverses. Lors de la passation du pré-test, nous avons envisagé qu'un bon nombre d'élèves répondent aux questions relatives à des situations de non-proportionnalité en suivant un modèle linéaire, ce qui aurait pu ne plus être le cas pour les élèves des classes expérimentales suite à la séquence didactique. Les résultats du pré-test rencontrent nos suppositions initiales : nombreux sont les élèves qui utilisent la proportionnalité en situation inappropriée.

Concernant les résultats des post-tests, soumis à des tests statistiques, rappelons qu'ils répondaient à différents objectifs. À Namur, ils ont mené à l'évolution des questions pour le volet problèmes propre au choix d'un modèle approprié, et à l'évolution de la séquence didactique pour le volet situation relatif à l'apprentissage de la proportionnalité.

À Sambreville, les premiers tests statistiques, liés au volet problèmes (choix d'un modèle adéquat), montrent une apparente différence de comportement entre les élèves des classes expérimentales et ceux des classes témoins. À travers ces premiers résultats, les élèves des classes expérimentales semblent davantage utiliser le modèle proportionnel de façon inadéquate. Afin de mieux comprendre ces résultats, des tableaux croisés dynamiques ont été générés. Ils permettent d'atténuer ces différences. En effet, nous avons remarqué que le comportement d'un bon nombre d'élèves s'inverse au sein même des classes. Une bonne partie des élèves qui répondent correctement à une question autre que devant suivre le modèle proportionnel au pré-test, utilise le modèle proportionnel au post-test, tant dans les classes expérimentales que témoins. Si le taux de réponse inappropriée ne semble pas croître dans les classes témoins, c'est parce qu'il y a presque la même proportion d'élèves qui a le comportement contraire.

Le fait d'avoir autant d'élèves qui utilisent le modèle proportionnel de façon inappropriée reflète selon nous un effet de contrat manifeste. Les résultats à long terme nous rassurent quelque peu car la tendance s'inverse entre les classes expérimentales et témoins. Notons toutefois que cette partie du post-test s'intéresse à la réussite de questions de type « problèmes verbaux » (qui se retrouvent dans des évaluations) et non directement aux apprentissages.

En ce qui concerne le volet situations du post-test à court terme présenté à Sambreville, élaboré pour sa part dans le but de tester l'apprentissage de la proportionnalité, nous avions comme espoir de trouver pour les élèves ayant suivi la séquence didactique des résultats tout aussi bons que ceux des élèves des classes témoins. Les résultats se sont révélés en accord avec cet objectif.

Intéressons-nous à chacun des types de situations présents dans cette partie du post-test. Il était constitué de quatre sortes de situations, deux d'entre elles répondant aux questions classiques de l'enseignement (tableaux et graphiques). Pour les deux premières, géométriques et textuelles, il n'y a pas de différence significative entre les résultats des élèves des classes expérimentales et ceux des classes témoins. Au travers des résultats des situations représentées par des tableaux, on remarque clairement l'influence des écarts constants dans les classes expérimentales. Par contre, le fait d'avoir attiré l'attention sur l'importance de la définition d'un coefficient de proportionnalité semble avoir été bénéfique. Les élèves des classes expérimentales sont significativement plus nombreux à reconnaître une situation de proportionnalité dans le cas où le repérage d'un coefficient de proportionnalité est plus facile de la « grandeur 2 » vers la « grandeur 1 ». Finalement, pour ce qui est des situations graphiques, les résultats des classes expérimentales sont significativement meilleurs et, là aussi, il faut remarquer l'importance de ne pas donner aux élèves une définition trop restreinte. Dans les classes témoins, nous avons relevé que près de 20% des élèves pensent que la situation est de proportionnalité uniquement lorsque le graphique correspond exactement à une demi-droite d'origine (0,0).

Pour le post-test à long terme, nous avions misé sur la pérennité des apprentissages qui devraient être plus solides chez les élèves des classes expérimentales étant donné la confrontation aux situations, ce qui peut potentiellement avoir plus d'impact qu'un cours plus traditionnel dans lequel de simples règles sont appliquées. Les résultats semblent à nouveau concorder avec nos intentions car les effets positifs se confirment.

Afin de clôturer cette partie relative à la validation externe, soulignons que, même si elle porte à discussion à cause de nombreuses variables (et effets de contexte) qui ne peuvent systématiquement être prises en compte dans les résultats, le dispositif élaboré aura permis d'observer que l'insertion d'une telle séquence didactique dans les cours, bien que déstabilisante, ne porte pas préjudice aux apprentissages liés à la proportionnalité.

Conclusion et perspectives

L'évolution des réflexions menées au fil de ces années de travail nous a amenés à explorer divers aspects d'une recherche. Les trois parties distinctes de la thèse ainsi que les questions de recherche en sont témoins.

Les premières analyses réalisées nous ont fait prendre conscience de l'intérêt de réfléchir à l'élaboration d'une séquence didactique destinée à améliorer le sens commun des élèves, en particulier envers une utilisation adéquate du modèle proportionnel. Les trois questions de recherche présentées à la fin du premier chapitre ont découlé naturellement de ces considérations.

L'entièreté de la deuxième partie de cet écrit a été consacrée à la validation interne, principalement sur base de la théorie des situations didactiques de Brousseau en utilisant la méthodologie d'ingénierie didactique d'Artigue. L'apprentissage de la proportionnalité n'est pas aussi simple qu'on pourrait le penser. Nous avons associé la prégnance de la linéarité à un obstacle et avons évoqué à plusieurs reprises qu'il résistait et reparaissait. Le modèle linéaire est en effet un modèle implicite d'action qui a un très grand domaine de validité. Il est donc difficile de déstabiliser les conduites automatisées des élèves. Nous sommes donc conscients qu'une unique séquence comme celle développée ici ne suffira pas à modifier profondément les actes des élèves. Il serait préférable de penser à une adaptation plus large de l'enseignement et d'avoir la possibilité de multiplier ce type d'expérience dans les classes.

C'était l'une des volontés initiales de ce travail de thèse : la proposition de plusieurs séquences didactiques que les élèves réaliseraient tout au long de leurs premières années du secondaire. C'était bien entendu sans imaginer l'ampleur d'un tel travail, ne serait-ce que pour la consolidation d'une séquence.

Concentrons-nous donc sur l'ingénierie proposée dans ce travail de thèse et reprenons les trois questions de recherche afin de poursuivre.

> La confrontation entre situation de proportionnalité et de non-proportionnalité est-elle un apport pour les apprentissages liés à la proportionnalité ?

La confrontation entre perceptions initiales des élèves et résultats expérimentaux est-elle un apport pour les apprentissages liés à la proportionnalité ?

Une séquence qui intègre situation de non-proportionnalité et expériences permet-elle d'améliorer l'aptitude des élèves à renoncer au modèle proportionnel lorsqu'il ne convient pas ?

Nous pensons avoir répondu positivement aux deux premières questions grâce aux analyses menées dans la validation interne. En effet, la séquence didactique intégrant situation de non-proportionnalité et confrontation entre perceptions initiales et résultats expérimentaux nous paraît avoir été validée par la mise en perspective des analyses *a priori* et *a posteriori*. Nous avons notamment montré l'importance d'être confronté à l'obstacle de la prégnance de la linéarité, nous avons également précisé le rôle essentiel du milieu matériel et la richesse de la diversité des cadres. De par cette analyse qualitative, la séquence nous semble être un apport positif aux apprentissages.

Comme renseigné dans le premier chapitre, la validation interne ne convient pas pour donner réponse à la troisième question de recherche. Ce sont les analyses développées dans la partie consacrée à la validation externe qui permettent de l'étudier. Elles offrent également un regard quantitatif sur les autres questions.

Du point de vue de ces analyses quantitatives, rappelons qu'il n'a pas été possible de répondre à la première question de recherche concernant l'insertion d'une situation de non-proportionnalité et sa confrontation avec une situation de proportionnalité (voir page 157).

Concernant les deux autres questions de recherche, nous ne pouvons affirmer que c'est la seule confrontation entre perceptions initiales des élèves et résultats expérimentaux qui contribue à l'apprentissage de la proportionnalité car nous n'avons pas les outils appropriés pour le vérifier. Nous ne pouvons non plus dire qu'une telle séquence améliore l'aptitude des élèves à renoncer au modèle proportionnel lorsqu'il ne convient pas. En effet, le dispositif mis en place, outre les biais déjà cités, n'est pas adapté pour saisir la valeur ajoutée occasionnée par une telle séquence didactique. En particulier, l'utilisation des problèmes des pré-tests et du volet consacré au choix d'un modèle approprié des post-tests ne permet pas de mesurer le gain conceptuel apporté par la séquence didactique – plus spécifiquement par l'insertion de matériel – dans les classes expérimentales. De même, les conditions d'expérimentations ont fait qu'aucune question faisant intervenir du matériel n'a été insérée dans les tests. Une perspective serait alors d'en ajouter afin de comparer les résultats des élèves des classes expérimentales et témoins mais ce dispositif pourrait s'avérer coûteux en temps. Par exemple, le « problème de Galilée » proposé par Cerquetti-Aberkane (1999, pp. 5-12) et adapté par Durand-Guerrier (2007, p. 8) serait intéressant. Il s'attache « à la comparaison des volumes des deux cylindres qu'il est possible de construire en enroulant une feuille rectangulaire soit sur sa longueur, soit sur sa largeur ». Ce problème aurait également pu être utilisé de sorte à faire travailler davantage les grandeurs avant d'en venir au cadre numérique.

Nous avons néanmoins relevé dans le septième chapitre plusieurs résultats positifs qui, conjugués avec les éléments de validation interne décrits dans la partie II, plaident en faveur de l'insertion d'une telle séquence didactique dans la classe.

Laissons maintenant la place à quelques perspectives issues des analyses réalisées dans la partie consacrée à la validation interne.

Une perspective de ce travail de thèse touche au milieu proposé dans la séquence didactique. Nous avons évoqué qu'il pouvait être allié ou antagoniste et que les deux cas sont rencontrés selon la situation. Le matériel est ainsi allié pour la variation de la hauteur d'un cylindre et antagoniste pour la variation de son diamètre. L'activité de réinvestissement de la section 3.2.5 pourrait constituer un milieu antagoniste dans le contexte de la variation de la hauteur si elle était réalisée juste à la suite. La question de la réduction du conflit cognitif se poserait alors car les élèves seraient confrontés à la non-proportionnalité avant la situation relative à la variation du diamètre d'un cylindre. Dans ce contexte, propre à la variation du diamètre, nous pourrions envisager d'introduire un milieu allié. L'analogie avec des récipients parallélépipédiques à base carrée était un bon candidat *a priori* mais nous avons constaté que peu nombreux sont les élèves qui y pensent par eux-mêmes. Une alternative est un retour aux formules. Très peu d'élèves l'ont proposé mais c'est une piste à explorer. Dans ce cas, ce retour devrait également se faire dans la situation de la variation de la hauteur. Comme déjà précisé (section 4.1.1), ce recours à la formule permettrait de valider le modèle et, de cette façon, de ne pas se limiter à la situation empirique.

Il serait également possible d'approfondir ce travail en s'intéressant au deuxième niveau de questionnement mis en exergue par Perrin-Glorian. Par l'ingénierie didactique présentée, nous avons souligné les rapports entre recherche et enseignement ordinaire. Nous rallions ainsi sur ce point la position de Perrin-Glorian qui propose de regarder l'ingénierie didactique « non seulement comme un moyen de faire apparaître des phénomènes didactiques pour la recherche mais aussi comme un moyen pour étudier et faire évoluer l'enseignement ordinaire » (2011, p. 57). Pour y parvenir, il est donc essentiel de s'intéresser à ce deuxième niveau de questionnement : l'adaptation de l'ingénierie, avec des enseignants qui ne recevraient l'information que par le document mis à leur disposition. Nous pensons avoir fait un premier pas en ce sens en concevant cette séquence didactique en terme de développement mais il serait intéressant d'étudier finement comment des enseignants *lambda* se l'approprieraient. Jusqu'ici, nous avons soit pris en charge le déroulement de l'activité dans les classes, soit proposé un accompagnement, notamment via des formations, afin que les enseignants puissent prendre conscience de l'importance du choix des variables didactiques.

Une dernière idée que nous partagerons dans cette conclusion s'appuie sur les propos de Chevallard (2007, p. 442).

> Au collège, dans la plupart des classes, la question qu'on va aujourd'hui se poser est : « Est-ce là un “tableau de proportionnalité” ? » Ayant observé qu'on a $\frac{2,4}{2} = 1{,}2$ mais que $\frac{4,3}{3,6} = 1{,}19444\ldots$, on conclura, impavides, que ce tableau « n'est pas de proportionnalité », avant de passer à autre chose, à un autre tableau, qui à son tour sera ou ne sera pas de proportionnalité. *Voilà comment on tue un savoir.* Car, bien entendu, la bonne question à poser est celle-ci : peut-on raisonnablement *modéliser* la relation entre x et y par une relation de proportionnalité, et si oui, laquelle ? La réponse à la première question est ici positive (et non pas négative), et l'on peut alors *choisir* d'écrire que l'on a $y \approx 1{,}2\,x$, du moins dans la zone que couvre le tableau.

Cette illustration montre une autre composante de la difficulté de l'apprentissage de la notion de proportionnalité, et même de la modélisation de manière plus générale. Ce type de réflexion est également très important à partager avec les élèves mais cela demanderait l'entreprise d'une autre étude tout aussi conséquente que l'élaboration de l'ingénierie didactique développée dans ces pages.

Pour refermer ces « prémices » d'un travail qui, comme nous le signalons ci-dessus, pourrait se prolonger dans diverses directions, notons que nous avons l'espoir que l'insertion d'expérimentations de ce type dans les cours des enseignants soit de plus en plus courante et que, de cette manière, l'habitude à se mettre en question s'installe dans l'enseignement. Les comportements aussi ancrés que celui de l'utilisation abusive de la proportionnalité viendront peut-être alors à disparaître.

Références

ADAM, A., CLOSE, P., JANSSENS, R., & LOUSBERG, F. (1997). *Espace math 1.* Bruxelles : De Boeck.

ANCIA, P., DESCY, J., DEWAELE, P., GRONDAL, C., & WANT, A. (2006). *Le nouvel Actimath 1.* Louvain-la-Neuve : Van In.

ANCIA, P., DEWAELE, P., & WANT, A. (2007). *Le nouvel Actimath 1-2 - Théorie du premier degré.* Louvain-la-Neuve : Van In.

ARTIGUE, M. (1988). Ingénierie didactique. *Recherches en didactique des mathématiques*, *9*(3), 281-308.

ARTIGUE, M. (2008). Continu, discontinu en mathématiques. Quelles perceptions en ont les élèves et les étudiants ? In *Didactique, épistémologie et histoire des sciences : Penser l'enseignement ; sous la direction de laurence Viennot.* Presses Universitaires de France.

ARTIGUE, M. (2011). L'ingénierie didactique comme thème d'étude. In *En amont et en aval des ingénieries didactiques : XV^e École d'Été de didactique des mathématiques ; Clermont-Ferrand - août 2009* (Vol. 1, p. 15-25). Grenoble : La Pensée Sauvage.

ASTOLFI, J.-P. (1997). *L'erreur, un outil pour enseigner.* Issy-les-Moulineaux : ESF éditeur. (Rééd. 2014)

BACHELARD, G. (1934, éd. 1967). *La formation de l'esprit scientifique. Contribution à une psychanalyse de la connaissance objective.* `http://classiques.uqac.ca/classiques/bachelard_gaston/formation_esprit_scientifique/formation_esprit_scientifique.html`. Paris : Librairie philosophique J. Vrin. (5^e édition)

BERNARD, C. (1865). *Introduction à l'étude de la médecine expérimentale.* Paris : Flammarion. (Rééd. 1984)

BESSOT, A. (2011). L'ingénierie didactique au cœur de la théorie des situations. In *En amont et en aval des ingénieries didactiques : XV^e École d'Été de didactique des mathématiques ; clermont-ferrand - août 2009* (Vol. 1, p. 29-56). Grenoble : La Pensée Sauvage.

BKOUCHE, R., CHARLOT, B., & ROUCHE, N. (1991). *Faire des mathématiques : le plaisir du sens.* Paris : Armand Colin.

BLOCH, I. (2005). *Quelques apports de la théorie des situations à la didactique* *des mathématiques dans l'enseignement secondaire et supérieur.* Habilitation à diriger des recherches, Université Paris 7 - Denis Diderot, Paris. (consultée sur http://tel.archives-ouvertes.fr/docs/00/06/60/42/PDF/Bloch_HDR.pdf)

Boisnard, D., Houdebine, J., Julo, J., Kerbœuf, M.-P., & Merri, M. (1994). *La proportionnalité et ses problèmes.* Paris : Hachette Éducation.

Borel, É. (2002). *Les exercices pratiques de mathématiques dans l'enseignement secondaire.* http://smf4.emath.fr/Publications/Gazette/2002/93/smf_gazette_93_47-64.pdf. (Conférence prononcée le 3 mars 1904 au Musée Pédagogique de Paris, publiée dans la Gazette n°93 de la Société Mathématique de France, 47-64)

Brousseau, G. (1976). Les obstacles épistémologiques et les problèmes en mathématiques. *Comptes rendus de la XXVIII^e^ rencontre organisée par la Commission Internationale pour l'Étude et l'Amélioration de l'Enseignement des Mathématiques*, 101-117. (https://hal.archives-ouvertes.fr/hal-00516569v1/document)

Brousseau, G. (1980a). L'échec et le contrat. *Recherches - La politique de l'ignorance. Mathématiques enseignement et société*(41), 177-182. (http://halshs.archives-ouvertes.fr/docs/00/48/31/65/PDF/Brousseau_1980_echec_et_contrat.pdf)

Brousseau, G. (1980b). Problèmes de l'enseignement des décimaux. *Recherches en didactique des mathématiques*, *1*(1), 11-58.

Brousseau, G. (1984). *Le rôle central du contrat didactique dans l'analyse et la construction des situations d'enseignement et d'apprentissage des mathématiques.* http://guy-brousseau.com/wp-content/uploads/2012/02/84-Le-r%C3%B4le-central-du-contrat.pdf.

Brousseau, G. (1986). Fondements et méthodes de la didactique des mathématiques. *Recherches en didactique des mathématiques*, *7*(2), 33-115.

Brousseau, G. (1988). Le contrat didactique : le milieu. *Recherches en didactique des mathématiques*, *9*(3), 309-336.

Brousseau, G. (1989b). Utilité et intérêt de la didactique pour un professeur de collège. *Petit x*(21), 47-68.

Brousseau, G. (1995). *L'enseignant dans la théorie des situations didactiques.* http://guy-brousseau.com/wp-content/uploads/2012/02/LENSEIGNANTdans-la-TSDM.pdf. (Cours de la 8^e^ école d'été de Didactique des Mathématiques)

Brousseau, G. (1998). *Théorie des situations didactiques.* Grenoble : La Pensée Sauvage. (Recueil de textes de didactique des mathématiques 1970-1990 présentés par Balacheff N., Cooper M., Sutherland R. et Warfield V.)

Brousseau, G. (2010). *Charlie Chaplin et la didactique des mathématiques.* http://guy-brousseau.com/2107/charlie-chaplin-et-la-didactique-des-mathematiques-1975-2010/. (Reconstitution tardive d'un cours de 1975)

Brun, J. (1989). *La résolution de problèmes arithmétiques : bilan et perspectives.*

http://www.ssrdm.ch/mathecole/wa_files/141-2.pdf. (Article reproduit des Actes des journées sur les activités numériques et leur développement à l'école élémentaire, avril 1989, Dijon)

CARON-PARGUE, J. (1981). Quelques aspects de la manipulation. *Recherches en didactique des mathématiques*, *2*(1), 5-35.

CASTIAUX, M., CLOSE, P., & JANSSENS, R. (2008, 3e tirage 2011). *Maths 1/2.* Bruxelles : De Boeck. (Manuel, Collection Adam)

CERQUETTI-ABERKANE, F. (1999). Introduction à une démarche scientifique en primaire à partir du problème de Galilée. *Repères-IREM*, *35*, 5-12.

CHEVALLARD, Y. (2007). Les mathématiques à l'école : pour une révolution épistémologique et didactique. *Bulletin Vert de l'APMEP*, *471*, 439-461.

COMIN, E. (2002). L'enseignement de la proportionnalité à l'école et au collège. *Recherches en didactique des mathématiques*, *22*(2.3), 135-182.

COMITI, C., & GRENIER, D. (1998). Régulations didactiques et changements de contrats. *Recherches en didactique des mathématiques*, *17*(3), 81-102.

CREM. (1995). *Les mathématiques de la maternelle jusqu'à 18 ans, Essai d'élaboration d'un cadre global pour l'enseignement des mathématiques.* Nivelles : Centre de Recherche sur l'Enseignement des Mathématiques. (ROUCHE N. coordinateur)

CREM. (2002). *Des grandeurs aux espaces vectoriels. La linéarité comme fil conducteur.* Nivelles : Centre de Recherche sur l'Enseignement des Mathématiques. (ROUCHE N. coordinateur)

CREM. (2004). *Pour une culture mathématique accessible à tous, Élaboration d'outils pédagogiques pour développer des compétences citoyennes.* Nivelles : Centre de Recherche sur l'Enseignement des Mathématiques. (BALLIEU M. & GUISSARD M.-F. coordinateurs)

CREM. (2005). *Apprenti géomètre, un outil de différenciation des apprentissages en mathématiques.* https://www.crem.be/publications/list. Nivelles : Centre de Recherche sur l'Enseignement des Mathématiques.

CREM. (2011). *L'apprentissage et l'enseignement des nombres décimaux.* https://www.crem.be/publications/list. Nivelles : Centre de Recherche sur l'Enseignement des Mathématiques.

DAN DRAGHICI, A. (2002). *L'erreur, un outil pour enseigner.* http://www.unites.uqam.ca/pcpes/pdf/Astolfi.pdf.

DANBLON, P. (1990). *Perspectives sur l'enseignement des mathématiques dans la Communauté française de Belgique.* Ministère de l'éducation, de la recherche et de la formation. Bruxelles. (rapport de la Commission scientifique d'Étude de l'Enseignement des Mathématiques et des Sciences)

DANEL, J.-M., DELCROIX, G., DEMUYNCK, M., & HUGO, M.-A. (2011). *Astromath.* Waterloo : Plantyn. (Manuel)

DE BOCK, D., VAN DOOREN, W., JANSSENS, D., & VERSCHAFFEL, L. (2007). *The illusion of linearity. From analysis to improvement.* New York : Springer.

DIAS, T. (2008). *La dimension expérimentale des mathématiques : un levier pour l'enseignement et l'apprentissage.* Thèse de doctorat, Université Lyon 1 -

Claude Bernard, Lyon. (consultée sur http://tel.archives-ouvertes.fr/docs/00/63/57/24/PDF/these_TDias.pdf)

Dias, T., & Durand-Guerrier, V. (2005). Expérimenter pour apprendre en mathématiques. *Repères-IREM*, *60*, 61-78.

Douady, R. (1986). Jeux de cadres et dialectique outil-objet. *Recherches en didactique des mathématiques*, *7*(2), 5-31.

Douady, R. (1994). Ingénierie didactique et évolution du rapport au savoir. *Repères-IREM*, *15*, 37-61.

Dupuis, C., & Pluvinage, F. (1981). La proportionnalité et son utilisation. *Recherches en didactique des mathématiques*, *2*(2), 165-212.

Durand-Guerrier, V. (2007). Quelques enjeux didactiques de la prise en compte de la dimension expérimentale en mathématiques à l'école élémentaire – Le cas de la mesure de grandeurs. In *Actes du XXXIII^{e} colloque COPIRELEM : Dourdan 2006, Expérimentation et modélisation dans l'enseignement scientifique : quelles mathématiques à l'école ?* (p. 1-11 (c4)). CRDP de Versailles, CDDP de l'Essonne Evry.

Durand-Guerrier, V. (2015). *Démarche expérimentale et apprentissages mathématiques. Un point de vue épistémologique et didactique.* http://library.cirm-math.fr/Record.htm?idlist=9&record=19278415124910966979. (Présentation du 22 mars 2015 au Forum des mathématiques vivantes, Marseille)

Duval, R. (1993). Registres de représentations sémiotiques et fonctionnement cognitif de la pensée. *Annales de Didactique et de Sciences Cognitives*, *5*, 37-65.

Duval, R. (1995). *Sémiosis et pensée humaine. Registres sémiotiques et apprentissages intellectuels.* Bern : Peter Lang.

Euclide. (1994). *Les Éléments* (Vol. 2 - livres V à IX). Paris : Presses Universitaires de France. (Traduction et commentaires par B. Vitrac)

Fédération Wallonie-Bruxelles. (2014). *Premier degré de l'enseignement secondaire.* http://www.enseignement.be/index.php?page=25664&navi=2412. (texte de présentation de la réforme du premier degré)

Gattegno, C., Servais, W., Castelnuovo, E., Nicolet, J.-L., Fletcher, T. J., Motard, L., Campedelli, L., Biguenet, A., Peskett, J., & Puig Adam, P. (1958). *Le matériel pour l'enseignement des mathématiques.* Neuchâtel : Delachaux et Niestlé. (Commission Internationale pour l'Étude et l'Amélioration de l'Enseignement des Mathématiques)

Géron, C., Stegen, P., & Daro, S. (2007). *L'enseignement de la proportionnalité : liaison primaire-secondaire.* http://www.enseignement.be/download.php?do_id=2712&do_check=. (HYPOThèse)

Gille, É. (2008). Proportionnalité en seconde... et apprentissage de la citoyenneté. *Bulletin Vert de l'APMEP*, *474*, 11-19.

Groupe de travail "Mathématiques et Réalités". (1987). *Enseignement des mathématiques utilisant la « réalité » Tome 1 : mise en œuvre dans l'enseignement secondaire des recherches en didactique des mathématiques.* IREM de Bordeaux.

Guissard, M.-F., Henry, V., Lambrecht, P., Van Geet, P., Vansimpsen, S., & Wettendorff, I. (2014). *Math & Manips - Des manipulations pour favoriser la construction des apprentissages en mathématiques.* https://www.crem.be/publications/list.

Henry, V., & Lambrecht, P. (2012). Compétences en Communauté française de Belgique : illustration via l'introduction de manipulations en classe. *Repères-IREM*, *88*, 21-33.

Hersant, M. (2001). *Interactions didactiques et pratiques d'enseignement, le cas de la proportionnalité au collège.* Thèse de doctorat, Université Paris 7 - Denis Diderot, Paris. (consultée sur http://tel.archives-ouvertes.fr/docs/00/12/23/40/PDF/these_Hersant.pdf)

Hersant, M. (2011). Les ingénieries de développement : à la recherche de déterminants de situations, une étude de cas relative aux *problèmes pour chercher.* In *En amont et en aval des ingénieries didactiques : XVe École d'Été de didactique des mathématiques ; clermont-ferrand - août 2009* (Vol. 2, p. 305-325). Grenoble : La Pensée Sauvage. (cédérom inclu dans le volume 1)

Jaquet, F. (2006). Quelques aspects de la proportionnalité dans les problèmes du RMT. In *Actes des journées d'études sur le RMT, 8e et 9e rencontres : Bourg-en-Bresse 2004 - Arco di Trento 2005 ; RMT, Des problèmes à la pratique de la classe* (Vol. 5, p. 201-211). ARMT.

Lambelin, N. (2014). *Installer un continuum spiralaire dans l'optique d'une conceptualisation progressive.* https://www.crem.be/agenda/list. (Diaporama présenté le 07 février 2014 au séminaire du CREM)

Laverdure, G. (2005). Les différentes portes d'entrée en maths. *Vie pédagogique*, *136*, 26-28.

Levain, J.-P., & Vergnaud, G. (1994). Proportionnalité simple, proportionnalité multiple. *Grand N*(56), 55-66.

Mahoux, P. (1994). *Socles de compétences dans l'enseignement fondamental et au premier degré de l'enseignement secondaire.* Cabinet du Ministre de l'Éducation et de l'Audiovisuel, Bruxelles.

Margolinas, C., Abboud-Blanchard, M., Bueno-Ravel, L., Douek, N., Fluckiger, A., Gibel, P., Vandebrouck, F., & Wozniak, F. (2011). *En amont et en aval des ingénieries didactiques : XVe École d'Été de didactique des mathématiques ; Clermont-Ferrand - août 2009* (Vol. 1). Grenoble : La Pensée Sauvage.

Matheron, Y. (2014). *La question de la mémoire dans l'étude des mathématiques.* (Diaporama du séminaire présenté le 19 février 2014 à l'Université de Liège)

Ministère de la Communauté française. (1997). *Décret définissant les missions prioritaires de l'enseignement fondamental et de l'enseignement secondaire et organisant les structures propres à les atteindre.* http://users.skynet.be/IEF.be/articles/leg/decret240797/decret240797.pdf.

Ministère de la Communauté française. (1999a). *Socles de compétences (enseignement fondamental et premier degré de l'enseignement secondaire).* Bruxelles : Administration générale de l'Enseignement et de la Recherche scientifique, Direction de la Recherche en Éducation et du Pilotage interréseaux.

Ministère de la Communauté française. (1999b). *Compétences terminales et savoirs requis en mathématiques (humanités générales et technologiques).* Bruxelles : Administration générale de l'Enseignement et de la Recherche scientifique, Direction de la Recherche en Éducation et du Pilotage interréseaux.

Nowak, M.-T., Tran, D., & Zucchetta, J.-F. (2001). *La proportionnalité dans tous ces États : ce que l'analyse des démarches d'élèves européens peut apporter à la notion de proportionnalité.* IREM de Lyon.

Pelay, N. (2011). *Jeu et apprentissages mathématiques, élaboration du concept de contrat didactique et ludique en contexte d'animation scientifique.* Thèse de doctorat, Université Claude Bernard Lyon 1, Lyon. (consultée sur `http://tel.archives-ouvertes.fr/docs/00/66/50/76/PDF/Pelay_nicolas_2010_these_jeu_et_apprentissages_mathematiques.pdf`)

Perrin-Glorian, M.-J. (2011). L'ingénierie didactique à l'interface de la recherche avec l'enseignement. In *En amont et en aval des ingénieries didactiques : XV[e] École d'Été de didactique des mathématiques ; clermont-ferrand - août 2009* (Vol. 1, p. 57-78). Grenoble : La Pensée Sauvage.

Postal, F., Valenduc, A.-M., & Davister, T. (2009, édition 2012). *Randomaths 1[re] secondaire.* Namur : Érasme. (Manuel élève)

Robert, A. (1982). L'acquisition de la notion de convergence des suites numériques dans l'enseignement supérieur. *Recherches en didactique des mathématiques, 3*(3), 305-341.

Robert, A., Lattuati, M., & Penninckx, J. (1999). *L'enseignement des Mathématiques au Lycée, Un point de vue didactique.* Paris : Ellipses.

Rouche, N. (2006). *Du quotidien aux mathématiques : Nombres, grandeurs, proportions.* Paris : Ellipses.

Rouche, N. (2007). *Labos de math (3).* (Rapport de réunion, 11 octobre 2007)

SBPMef. (1991). *Enseigner la mathématique ? Livre blanc sur l'enseignement des mathématiques en communauté française de Belgique.* Société Belge des professeurs de Mathématiques d'expression française.

Schneider, M. (2008). *Traité de didactique des mathématiques : La didactique par des exemples et contre-exemples.* Liège : Les Éditions de l'Université de Liège.

Simard, A. (2012a). Fondements mathématiques de la proportionnalité dans la perspective d'un usage didactique. *Petit x*(89), 51-62.

Simard, A. (2012b). Proportionnalité en CM2 et Sixième. *Petit x*(90), 35-52.

Vergnaud, G. (1981a, éd. 1994). *L'enfant, la mathématique et la réalité : Problèmes de l'enseignement des mathématiques à l'école élémentaire.* Berne : Peter Lang. (5[e] édition)

Vergnaud, G. (1981b). Quelques orientations théoriques et méthodologiques des recherches françaises en didactique des mathématiques. *Recherches en didactique des mathématiques, 2*(2), 215-232.

Vergnaud, G. (1991). La théorie des champs conceptuels. *Recherches en didactique des mathématiques, 10*(2-3), 133-170.

Verschaffel, L., & de Corte, E. (2005). La modélisation et la résolution de problèmes d'application : de l'analyse à l'utilisation efficace. In *Enseignement* *et apprentissage des mathématiques. Que disent les recherches psychopédagogiques ?* (p. 153-176). Bruxelles : De Boeck.

Wonnacott, T., & Wonnacott, R. (1972, éd. française 1995). *Statistique, économie - gestion - sciences - médecine (avec exercices d'application).* Paris : Economica. (4e édition)

Quatrième partie

Annexes

Table des matières

Annexe A

Tableau récapitulatif des expérimentations de la séquence didactique et passation des différents tests

Classes	Pré-test	Séquence didactique	Post-test CT	Post-test LT
2 classes de grade 6	06.2009			
Bruxelles (Bx_1) Bruxelles (Bx_2) Brabant wallon (Bw)	10.2009 11.2009	11.2009 11.2009 01.2010		
Namur (Na_1-Na_9 + 8 autres classes)	03.2010	03.2010	04.2010	
Sambreville (Sa_1-Sa_5 + 5 autres classes)	02.2011	02.2011	03.2011	06.2011
Stavelot (St_1-St_{10}) Bruxelles (WB_1-WB_3) Nivelles (Ni_1-Ni_4)		01.2013 02.2013 03.2013		 06.2013 (uniquement WB_3)

À la page 158, nous avons évoqué les questionnaires destinés à vérifier l'équivalence des questions des pré et post-tests (effectués en 2010 et en 2011). Ils n'apparaissent pas dans ce tableau.

Annexe B

Séquence didactique « Des cylindres »

Cette annexe reprend les pages concernant la séquence didactique « Des cylindres », issue de la publication « *Math & Manips* – Des manipulations pour favoriser la construction des apprentissages en mathématiques » du CREM (Guissard, Henry, Lambrecht & *al.*, 2014).

Les pages 234 à 256 décrivent la suite d'activités suivant des rubriques telles que « De quoi s'agit-il ? », « Enjeux », « De quoi a-t-on besoin ? », « Comment s'y prendre ? » ou « Échos des classes ».

Les pages annexes de la séquence se trouvent aux pages 257 et 258 de cette annexe B. Les feuilles de travail sont présentées aux pages 259 à 268.

Chapitre 7

Des cylindres

Préambule

Au fil des différentes sections de ce chapitre, les expériences proposées aux élèves leur font découvrir que le volume d'un cylindre ne varie pas de la même manière si on agit sur sa hauteur ou sur son diamètre. Les tableaux de nombres issus des relevés expérimentaux permettent d'observer et de construire avec les élèves les caractéristiques d'un phénomène proportionnel par comparaison avec un phénomène qui ne l'est pas. L'accent est mis sur la confrontation des deux situations. Les graphiques qui en découlent font rencontrer tout d'abord la fonction linéaire, puis une première approche de la fonction du second degré.

1 Des cylindres... et leur hauteur

De quoi s'agit-il ?	Estimer et observer comment varie le volume d'un récipient cylindrique lorsque sa hauteur est doublée, triplée, puis multipliée par un nombre entier quelconque. Compléter des tableaux et des graphiques à partir des résultats obtenus.
Enjeux	Découvrir ou réinvestir les tableaux de proportionnalité ainsi que quelques-unes de leurs propriétés. ***Compétences disciplinaires*** **Les nombres** *Relever des régularités dans des suites de nombres.* *Identifier et effectuer des opérations dans des situations variées avec des entiers, des décimaux et des fractions* [...]. *Estimer, avant d'opérer, l'ordre de grandeur d'un résultat.* **Les solides et figures** *Associer un point à ses coordonnées dans un repère.*

Les grandeurs

Effectuer le mesurage en utilisant des étalons familiers et conventionnels et en exprimer le résultat.

Établir des relations dans un système pour donner du sens à la lecture et à l'écriture d'une mesure.

De quoi a-t-on besoin ?

Durée

Une période de 50 minutes.

Matériel pour la classe

Une casserole cylindrique (attention à la courbure à la base).

Un verre qui servira d'étalon de référence [1] pour remplir la casserole.

Les fiches 20 à 23 des pages 235 à 238.

Matériel par groupe d'élèves

Un récipient cylindrique assez haut, de préférence transparent.

Une mesurette [2] adaptée au remplissage de ce récipient cylindrique.

Une règle graduée dont le zéro coïncide avec une des extrémités. Il est possible de fabriquer un tel instrument à partir d'une pique à brochette ou d'un bâton plat, voir annexe page 215.

Du ruban adhésif mat.

Un seau d'eau et des torchons.

1.1 Combien de verres pour remplir la casserole à la moitié de sa hauteur ?

Cette section est destinée à familiariser les élèves avec le matériel mis à leur disposition et à mettre en place le processus expérimental.

Comment s'y prendre ?

Pour cette activité, il faut prévoir une réserve d'eau dans un seau. L'enseignant présente aux élèves la casserole ainsi qu'un verre servant d'étalon. S'il ne trouve pas de casserole adaptée, il peut la remplacer par une boîte de conserve qui a une base large ou par un vase cylindrique.

Avant toute manipulation, l'enseignant pose la question suivante qui a pour objectif premier d'exercer l'aptitude des élèves à estimer.

> Combien de verres d'eau pensez-vous devoir verser dans la casserole pour la remplir jusqu'à la moitié de sa hauteur ?

On demande à chaque élève d'écrire son estimation sur une feuille afin d'y revenir après vérification. La fiche 20 peut être utilisée à cet effet. L'expérience peut alors commencer. L'enseignant demande à un élève de réaliser la manipulation devant la classe et invite les autres élèves à

[1] Dans la suite de cette section, nous écrivons « étalon » pour « étalon de référence ».

[2] Nous appelons mesurette un petit récipient non gradué servant à doser notamment des liquides.

intervenir s'ils ont des observations à formuler sur son déroulement. Ce sont ces réactions qui vont permettre de mettre en place, avec les élèves, le processus expérimental.

Par exemple, l'élève-expérimentateur commence souvent en versant directement le contenu du verre plusieurs fois jusqu'à ce qu'un élève de la classe demande où il faut s'arrêter. Cela fait prendre conscience aux élèves qu'il est nécessaire de marquer auparavant le niveau correspondant à la moitié de la hauteur du récipient.

Il faut alors déterminer cette hauteur. Pour cela, un élève est invité à venir mesurer avec son matériel. Il emporte habituellement sa règle graduée. Rapidement, les élèves constatent que celle-ci ne convient pas. En effet, pour réaliser cette mesure, il est nécessaire d'utiliser une règle graduée dont le zéro correspond à une des extrémités. De plus, il faut penser à mesurer la hauteur à l'intérieur de la casserole qui est différente, dans ce cas, de la hauteur mesurée à l'extérieur. Il reste alors à diviser cette mesure par deux et à marquer ce niveau sur la casserole. Pour ce faire, il est pratique de placer un morceau de ruban adhésif à l'intérieur de la casserole et d'y marquer le repère (voir page 215).

Les élèves devraient également remarquer que le verre étalon doit toujours contenir la même quantité d'eau. Soit ils le remplissent à ras bord, soit il est important de marquer un niveau afin qu'il contienne à chaque fois la même quantité d'eau. Pour cela, on peut procéder de la même manière que précédemment, avec du ruban adhésif.

Une fois la démarche expérimentale établie, un élève recommence l'expérience. Il verse le contenu du verre étalon dans la casserole et continue jusqu'à ce que l'eau atteigne le niveau repéré sur l'adhésif. Pendant ce temps, les autres élèves comptent le nombre de verres versés. Après avoir versé le contenu du premier verre et observé le niveau atteint par l'eau à ce moment, les élèves peuvent revoir leur estimation.

Il arrive que le nombre de verres nécessaires pour remplir la casserole jusqu'à la moitié de sa hauteur soit un nombre entier mais, si ce n'est pas le cas, l'enseignant autorisera l'utilisation de nombres décimaux ou de fractions.

Il est intéressant de confronter le résultat obtenu aux estimations préalables des élèves, elles sont bien souvent loin de la réalité. Les élèves sont effectivement trop peu habitués à estimer.

Échos des classes

Avant de commencer l'expérimentation, plusieurs élèves ont l'intention de compter le nombre de verres nécessaires pour remplir entièrement la casserole et de diviser ensuite ce nombre par deux. Cette démarche répond à la question de la casserole remplie à la moitié de sa capacité et non de sa hauteur. Certains d'entre eux ont déjà compris que, dans ce cas, les deux situations sont identiques.

1.2 Et si on double la hauteur ?

Comment s'y prendre ?

Cette première partie se poursuit en posant la question suivante aux élèves.

Combien de verres d'eau seront nécessaires pour remplir la casserole à ras bord ?

Avant toute manipulation, il est important de faire à nouveau conjecturer les élèves. L'idée de doubler le nombre de verres d'eau, ou d'en ajouter le même nombre, devrait émerger assez naturellement. Il suffit alors de vérifier en remplissant la casserole. Si les élèves se limitent aux nombres entiers, il y a peu de chances qu'ils parviennent à remplir exactement la casserole. En travaillant avec des décimaux ou des fractions, ils approcheront au mieux le nombre de verres nécessaires au remplissage complet de la casserole.

Les élèves complètent alors le tableau de résultats suivant.

Hauteur	Nombre de verres
moitié	
totale	

Selon la casserole, le choix de l'étalon et la précision, le nombre contenu dans la dernière case ne sera peut-être pas exactement le double de celui contenu dans la case du dessus. Il peut varier jusqu'à une unité de plus ou de moins.

Les élèves expliquent facilement cette erreur, liée principalement au matériel, et énoncent une conclusion : lorsque la hauteur d'un cylindre est doublée, le nombre de verres est multiplié par deux. Certains élèves le formulent différemment : il est nécessaire d'ajouter le même nombre de verres pour atteindre une hauteur double. Ces deux visions de l'expérience sont équivalentes puisque la multiplication par un entier est une addition répétée.

Avant de passer à la suite, l'enseignant fait une rapide synthèse avec les élèves en reprenant les résultats prédits et obtenus et en soulignant la démarche expérimentale.

Échos des classes

Lorsqu'on demande aux élèves d'estimer le nombre de verres nécessaires pour remplir la casserole entièrement, les réactions de nombreux élèves surprennent. À cause de la forme de la casserole, beaucoup d'entre eux pensent avec raison que, pour la remplir à ras bord, il faut un peu plus du double du nombre de verres nécessaires au remplissage jusqu'à la moitié de la hauteur. Ils avancent différents arguments : « la casserole n'est pas tout à fait cylindrique », « le bord de la casserole est évasé », « dans le bas, c'est un petit peu rentré », ... L'expérimentation leur donne raison même si les élèves ont déjà en tête que, si la casserole était un cylindre « parfait », le nombre de verres doublerait bien pour passer de la moitié de la hauteur de la casserole à sa hauteur totale.

1.3 Et si on triple la hauteur ?

Pour la suite des expérimentations, nous proposons de travailler en groupe avec des récipients autres que des casseroles, qui sont généralement basses, larges et opaques, et de plutôt considérer des récipients cylindriques élancés et transparents. Il faudra alors changer l'étalon et l'adapter au récipient choisi. Il est préférable d'avoir préparé les zones d'expérimentation au préalable.

Comment s'y prendre ?

Après avoir distribué un récipient cylindrique et une mesurette à chaque groupe, l'enseignant demande aux élèves de verser une ou deux mesurettes (en fonction du cylindre et de la mesurette reçus) et de marquer à ce moment la hauteur atteinte sur leur récipient, sur un ruban adhésif.

Ce procédé permet aux élèves de travailler avec des nombres de mesurettes entiers, ce qui ne serait probablement pas le cas si la première hauteur est fixée au préalable. Il est souhaitable que le nombre de mesurettes à verser pour fixer la première hauteur ne soit pas le même pour chacun des groupes. Les élèves peuvent ensuite répondre aux questions suivantes en complétant la fiche 21.

> Pour ce nouveau récipient, de combien de mesurettes pensez-vous avoir besoin pour atteindre le double, puis le triple de la hauteur ?
>
> Après avoir écrit chacun votre réponse, versez les mesurettes dans le récipient et complétez le tableau suivant au fur et à mesure.
>
> | | Hauteur (en cm) | Nombre de mesurettes | |
> |---|---|---|---|
> | | initiale = ... | ... | |
> | ... | double = ... | ... | ... |
> | | triple = ... | ... | |
>
> Complétez les pointillés à côté des flèches pour indiquer les liens que vous voyez entre la première et la deuxième ligne de votre tableau.

Pour répondre à la question, les élèves doivent placer préalablement sur le récipient une marque pour la hauteur double ainsi que pour la hauteur triple en utilisant la règle graduée dont le zéro correspond à une des extrémités.

Ils peuvent alors procéder au remplissage et compléter le tableau, puis y indiquer les liens. Cette consigne devrait susciter principalement deux types de réactions :

- certains élèves remarqueront dans le tableau qu'on a multiplié la hauteur par deux et que le nombre de mesurettes a doublé également ;
- d'autres élèves noteront qu'on a ajouté la hauteur de départ à elle-même et que le nombre de mesurettes correspondant a été obtenu en ajoutant le nombre initial de mesurettes à lui-même.

D'autres réactions peuvent apparaître. La question ci-dessous permettra d'éclaircir ces diverses possibilités.

> Voyez-vous d'autres liens que vous pouvez aussi symboliser par des flèches ? Si oui, complétez le tableau en ajoutant les flèches correspondantes.

Pour illustrer, prenons une hauteur de départ de 3,5 centimètres et un nombre de mesurettes de départ égal à 2. Certains élèves verront dans le tableau des liens de type multiplicatif (tableau de gauche) et d'autres repéreront les écarts constants (tableau de droite).

	Hauteur (en cm)	Nbre de mes.	
	initiale = 3,5	2	
×2	double = 7	4	×2
×3	triple = 10,5	6	×3

	Hauteur (en cm)	Nbre de mes.	
	initiale = 3,5	2	
+3,5	double = 7	4	+2
+3,5	triple = 10,5	6	+2

Si les nombres de centimètres correspondant aux différentes hauteurs y sont propices (comme dans l'exemple ci-contre), certains élèves pourraient remarquer un rapport externe permettant de passer d'une colonne à l'autre.

$: 2$ ou $\times \frac{1}{2}$

Hauteur (en cm)	Nbre de mes.
initiale $= 4$	2
double $= 8$	4
triple $= 12$	6

$\times 2$

Certains élèves pourraient obtenir un tableau plus complet présentant des liens de différents types et pourraient même reconnaître d'autres régularités telles que celles qui lient des lignes entre elles. Par exemple, les données contenues dans la troisième ligne sont égales à la somme des données contenues dans les deux premières lignes pour chacune des grandeurs.

Remarquons pour l'enseignant que les nombres présents sur les flèches liant les éléments des trois tableaux n'ont pas le même statut. En effet, dans le premier tableau les facteurs sont des scalaires tandis que dans le deuxième tableau, il s'agit d'additions de centimètres dans la colonne de gauche alors que ce sont des nombres de mesurettes qui sont ajoutés dans la colonne de droite. Le tableau présentant les rapports externes comporte également des unités sous-jacentes. Le rapport permettant de passer de la colonne de gauche à celle de droite est exprimé en mesurettes par centimètre et celui correspondant au passage de la colonne de droite à celle de gauche est exprimé en centimètres par mesurette.

1.4 Et si la hauteur est multipliée par 4, 5 ou 10 ?

Comment s'y prendre ?

Afin d'étendre ce que chacun vient d'observer, la question suivante est posée.

> De combien de mesurettes pensez-vous avoir besoin pour atteindre 4, 5 et 10 fois la hauteur de départ ?

Par cette question, on franchit une étape supplémentaire en recourant à une expérience mentale qui passe notamment par l'utilisation des liens découverts dans les tableaux. Après avoir laissé un peu de temps aux élèves pour répondre à la question, il est opportun de faire une synthèse en reprenant les différents résultats et avis.

Pour cette synthèse, l'enseignant propose pour le nombre de mesurettes de départ ainsi que pour la hauteur initiale une valeur différente de celles utilisées par les élèves dans leurs expérimentations. Cela lui permet de s'assurer qu'ils sont capables de réinvestir ce qu'ils ont compris.

Au cours de cette mise en commun, l'enseignant remarque avec les élèves que la multiplication est plus générale en ce sens que les additions dépendent des valeurs initiales tandis que les liens multiplicatifs internes sont les mêmes pour tous les groupes, quelles que soient les valeurs de départ. De plus, les liens de type multiplicatif permettent de trouver la réponse pour n'importe quelle hauteur sans recourir aux étapes intermédiaires. Elle permet donc de calculer directement le nombre de mesurettes nécessaires pour atteindre n'importe quelle hauteur multiple de celle de départ. L'enseignant conviendra alors avec les élèves de ne garder que des liens multiplicatifs pour leur synthèse.

De plus, soulignons pour l'enseignant que les liens additifs ne résistent notamment pas à une permutation ou suppression de lignes et que des liens du même genre peuvent apparaître dans des tableaux qui ne sont pas de proportionnalité (dans un tableau correspondant à une fonction affine par exemple), ce qui créerait de la confusion dans l'esprit des élèves. Des exemples illustrant ces écueils sont proposés dans les commentaires en fin de section, page 209.

Remarquons que, même si les tableaux (comme celui de la fiche 22) sont complétés avec des mots tels que « quadruple », « quintuple » ou « décuple », employés à dessein pour éviter d'indiquer d'emblée des nombres dans les tableaux, l'enseignant doit s'exprimer oralement plus simplement en utilisant des expressions comme « cinq fois la hauteur initiale », etc. Pour les élèves qui ne sont pas familiers avec ce vocabulaire, il est d'autant plus important de placer des flèches sur le côté du tableau afin de mettre en évidence les multiplications.

Ensuite, l'enseignant donne la consigne suivante.

Représentez l'ensemble des résultats par un graphique.

Deux types de graphiques sont envisageables. Une première possibilité est de travailler en vraie grandeur sur deux feuilles A4 quadrillées accolées. Les élèves peuvent y tracer un axe des abscisses assez long pour y placer les différentes hauteurs en centimètres. L'alternative est de travailler dans le système d'axes de la fiche 23 où la hauteur initiale est représentée par 1 centimètre par convention. Les élèves obtiennent un graphique tel que celui de la figure 1.

Signalons pour l'enseignant que tous les points représentés n'ont pas le même statut. Certains sont issus de l'expérimentation, d'autres ont été obtenus par application d'un modèle théorique.

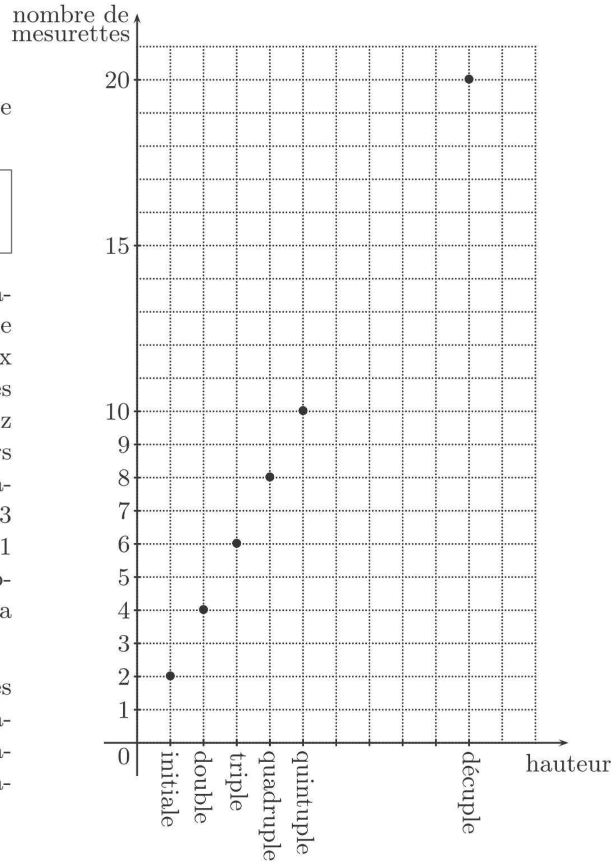


Fig. 1

Après avoir remarqué que, quel que soit le matériel utilisé dans les différents groupes, les points sont alignés dans tous les graphiques, les élèves s'interrogent sur la nécessité de relier les points.

L'enseignant demande alors si des points intermédiaires auraient du sens. On peut se demander s'il est possible de trouver un nombre de mesurettes correspondant au remplissage du cylindre jusqu'à 2,5 fois sa hauteur initiale. Puisque c'est le cas, les élèves réalisent un rapide calcul qui leur permet de placer un nouveau point sur le graphique et de remarquer qu'il est aligné avec les autres points. Le graphique en ligne droite continue prend alors tout son sens, en lien avec l'expérience vécue. Il permet d'anticiper le nombre de mesurettes nécessaires pour atteindre 2,25 fois la hauteur, etc.

Des élèves tracent alors une demi-droite d'origine (0,0) pendant que d'autres la commencent au point correspondant à la première hauteur. Il est donc nécessaire de se poser à nouveau la question de la signification des points placés sur le graphique. Les élèves se rendent compte que le point (0,0) correspond à la situation initiale du cylindre : nombre de mesurettes nul pour une hauteur nulle. Les points intermédiaires ont alors également du sens et les élèves comprennent que la demi-droite commence à l'origine. Il devient alors évident pour eux que, dans ce contexte-ci, la demi-droite prolongée dans les négatifs n'a pas de sens.

Échos des classes

Afin de connaître le nombre de mesurettes nécessaires pour atteindre dix fois la hauteur de départ, des élèves additionnent le nombre initial de mesurettes autant de fois que nécessaire jusqu'à obtenir le nombre correspondant au décuple de la hauteur initiale et d'autres multiplient le nombre de mesurettes initial par dix. Certains élèves remarquent également que multiplier par deux la cinquième hauteur donne la dixième et qu'il suffit d'appliquer la même opération dans la colonne de droite pour obtenir le nombre de mesurettes correspondant à la dixième hauteur. Les deux dernières procédures sont reconnues plus efficaces par l'ensemble des élèves et c'est ce qui les amène à décider avec l'enseignant de n'utiliser que des liens multiplicatifs pour la synthèse.

2 Des cylindres... et leur diamètre

Nous nous sommes intéressés à la hauteur des récipients cylindriques, posons-nous le même type de question à propos de l'autre variable des cylindres : la base, et plus précisément, son diamètre. En effet, jusqu'ici nous avons fait varier la hauteur en conservant un diamètre fixe. Nous allons à présent faire varier le diamètre tout en gardant une hauteur fixe. Il est important d'expliquer aux élèves ce principe expérimental qui consiste à changer une seule variable à la fois pour étudier l'influence de chacune indépendamment de l'autre.

De quoi s'agit-il ?

Estimer et observer comment varie le volume d'un récipient cylindrique lorsque son diamètre est doublé, triplé, puis étendre la situation au cas où le diamètre est multiplié par un nombre entier quelconque.

Compléter des tableaux et des graphiques à partir des résultats obtenus.

Enjeux

Rencontrer un phénomène non proportionnel.

Distinguer un tableau de non-proportionnalité d'un tableau de proportionnalité.

Compétences disciplinaires

Les nombres

Relever des régularités dans des suites de nombres.

Identifier et effectuer des opérations dans des situations variées avec des entiers [...], y compris l'élévation à la puissance.

Estimer, avant d'opérer, l'ordre de grandeur d'un résultat.

Utiliser les conventions d'écriture mathématique.

Les compétences travaillées dans cette section pour les domaines des solides et figures et des grandeurs sont les mêmes que celles identifiées à la section 1 (page 188).

De quoi a-t-on besoin ?

Durée

Une période de 50 minutes.

Matériel pour la classe

Les fiches 24 à 26 des pages 239 à 241.

Matériel par groupe d'élèves

Un récipient cylindrique et deux autres, un de diamètre double et un de diamètre triple de celui du premier récipient. Par facilité, le récipient de départ devrait être le plus bas afin que sa hauteur puisse servir de référence. Pour trouver cette série de récipients, on peut chercher parmi des verres, des vases, des casseroles, des pots à crayons, des boîtes de rangement, des tubes de perles, des boîtes de conserve (en prenant garde aux bords coupants), etc. De tels récipients sont illustrés en annexe, page 214.

Une règle graduée dont le zéro coïncide avec une des extrémités.

Du ruban adhésif mat.

Un seau d'eau et des torchons.

2.1 Et si on double ou triple le diamètre ?

Comment s'y prendre ?

L'enseignant montre aux élèves les trois récipients cylindriques et pose la question suivante.

> À votre avis, combien de fois faut-il verser l'eau contenue dans ce récipient cylindrique pour remplir un récipient cylindrique de diamètre double jusqu'à la même hauteur ?
> Et combien pour remplir un récipient de diamètre triple ?

Pour garder une trace des estimations des élèves, l'enseignant demande à chaque élève de compléter un tableau tel que celui ci-dessous (repris à la fiche 24). C'est le cylindre le plus petit qui sert ici de mesurette. Le terme « mesurette » correspond donc dans cette partie à « récipient initial ».

Diamètre	Nombre de mesurettes (estimation)
initial	1
double	
triple	

Comme les élèves viennent de travailler sur la variation de la hauteur d'un cylindre, on s'attend à ce que certains estiment qu'il faut deux mesurettes pour remplir un cylindre de diamètre double et trois mesurettes pour un de diamètre triple. Ces estimations erronées mais naturelles car basées sur un modèle linéaire donnent tout son sens à l'activité.

Échos des classes

Lors des expérimentations, la plupart des élèves estiment effectivement à deux et trois mesurettes le remplissage des cylindres de diamètre double et triple. Cependant, quelques élèves ont de bonnes intuitions en s'aidant de dessins ou en se représentant l'évolution du diamètre du simple au double (« il s'agrandit dans un sens et dans l'autre »). De rares élèves pensent même à remplacer r par $2\,r$ ou $3\,r$ dans la formule du volume d'un cylindre, ces élèves avaient travaillé ce même type de formules dans d'autres contextes auparavant.

2.2 Et si on vérifiait ?

Comment s'y prendre ?

L'enseignant distribue à chacun des groupes les trois récipients cylindriques et donne la consigne suivante.

> À partir du matériel que vous avez reçu, vérifiez combien de mesurettes sont nécessaires pour remplir les récipients cylindriques de diamètre double et triple jusqu'à la même hauteur.

L'enseignant demande aux élèves de compléter un tableau tel que celui ci-dessous (fiche 24) pour noter les résultats obtenus par expérimentation.

Diamètre (en cm)	Nombre de mesurettes (expérimentation)
initial $= \ldots$	1
double $= \ldots$	
triple $= \ldots$	

hauteur $= \ldots$ cm

Puisque le travail porte sur le diamètre, la hauteur atteinte par le niveau de l'eau doit être identique pour les trois récipients cylindriques, ce qui a été signalé dans la phase d'estimation. Si le récipient initial est le moins haut, on prend sa hauteur comme référence. Sinon, il faut fixer cette dernière en choisissant une hauteur commune aux trois récipients et en la marquant sur chaque cylindre. Pour cela, les élèves utilisent à nouveau la règle graduée dont le zéro coïncide avec une des extrémités en mesurant à l'intérieur du cylindre.

Avant tout remplissage, l'enseignant propose aux élèves de vérifier, en mesurant les différents diamètres, que le matériel reçu est bien conforme à ce qui leur a été annoncé.

L'enseignant devra peut-être rappeler ce qu'est le diamètre d'un cercle, par exemple en traçant la figure au tableau. Les élèves devront également remarquer que c'est le diamètre intérieur qui est à mesurer pour la même raison que celle évoquée lors du travail sur les hauteurs. Pour effectuer cette mesure, il est nécessaire d'utiliser une règle graduée classique qui donne une précision au millimètre.

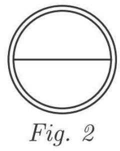


Fig. 2

Dès la première étape du remplissage, les pronostics incorrects sont invalidés. Quatre mesurettes sont en effet nécessaires pour remplir le cylindre de diamètre double et non deux comme la plupart des élèves l'avaient imaginé. Suite à ce premier résultat, les élèves peuvent revoir leur estimation pour le cylindre de diamètre triple. Ces nouvelles prévisions sont souvent incorrectes car les élèves ne réalisent pas encore le réel impact de la modification du diamètre.

Une fois le cylindre de diamètre triple rempli dans chacun des groupes, les élèves mettent leurs résultats en commun. Il est important que les élèves ne se contentent pas d'observer mais qu'ils s'interrogent sur la raison pour laquelle ces résultats ne correspondent pas à leurs estimations. En ce qui concerne le cylindre de diamètre double, des élèves pourraient donner quelques explications pertinentes basées sur les schémas suivants que l'enseignant peut réaliser au tableau.

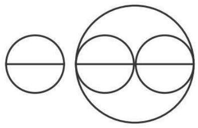


Fig. 3

Si le diamètre d'un cylindre est multiplié par deux, un dessin représentant la base du cylindre de départ et celle du cylindre de diamètre double montre que le disque représentant le cylindre de diamètre double n'est pas rempli lorsqu'on n'y place que deux « cylindres » ayant le diamètre de départ.

Les élèves peuvent également remarquer que, lorsque le diamètre d'un cercle double, le disque s'agrandit dans toutes les directions. Le dessin de la figure 4 illustre ce fait. L'enseignant leur fait verbaliser que s'ils peuvent se permettre de s'intéresser uniquement au diamètre, c'est parce que la hauteur est fixe.

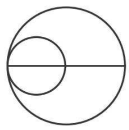


Fig. 4

Pour le cylindre de diamètre triple, tous les groupes n'auront pas nécessairement obtenu le même résultat. Certains ont besoin de neuf mesurettes pour remplir le cylindre de diamètre triple pendant que d'autres en utilisent dix ou seulement huit. L'enseignant souligne alors l'importance d'être précis dans les expérimentations car l'imprécision est probablement la cause de cette diversité de résultats. Afin de se mettre d'accord sur la réponse, les élèves recommencent l'expérience en s'astreignant à être le plus précis possible.

Cette nouvelle expérimentation n'uniformisera pas nécessairement tous les résultats et elle ne suffirait d'ailleurs pas à conclure. Le recours à une argumentation mathématique raisonnée est nécessaire et doit alors être présentée comme validation ou invalidation des résultats obtenus par expérimentation.

L'enseignant amène ainsi les élèves à envisager l'analogie entre le cas d'un cylindre et celui d'un parallélépipède à base carrée. Puisque, dans notre expérimentation, la hauteur fixée est identique pour tous les récipients, on s'intéresse ici uniquement à la base. Lorsque le côté d'un carré est multiplié par deux, les élèves peuvent se représenter facilement que l'aire est multipliée par quatre. De même, en construisant un carré de côté triple, les élèves se rendent compte que son aire est neuf fois plus grande que celle de départ (figures 5 et 6).

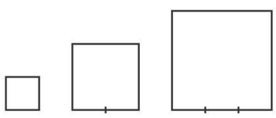


Fig. 5

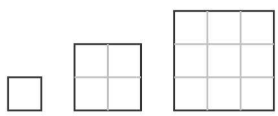


Fig. 6

La *Math & Manip* « Agrandissements » (chapitre 6) montre qu'il en va de même pour les aires de tous les polygones. Elle permet notamment d'amener les élèves à se convaincre que cette propriété peut s'étendre aux disques.

Les élèves peuvent ainsi accéder à l'intuition que, pour une hauteur constante, en doublant le diamètre d'un cylindre, on quadruple effectivement son volume et que, en triplant le diamètre d'un cylindre, on multiplie son volume par neuf.

Échos des classes

Lors des manipulations, les élèves constatent facilement que quatre mesurettes sont nécessaires pour remplir le cylindre de diamètre double. Ils tiennent alors à revoir leur estimation pour le remplissage du cylindre de diamètre triple. Les nouvelles estimations sont généralement de six ou de huit mesurettes.

Des élèves, persuadés que huit mesurettes sont nécessaires pour remplir le cylindre de diamètre triple jusqu'à la hauteur demandée, s'arrangent pour que ce soit effectivement le cas : lorsqu'ils obtiennent neuf comme résultat de l'expérience, ils recommencent jusqu'à obtenir les huit mesurettes attendues.

Certains élèves déterminent le nombre de mesurettes nécessaires pour remplir le cylindre de diamètre triple de manière économique. Ils utilisent directement l'eau contenue dans le cylindre de diamètre double. Ils ne doivent ainsi verser que deux fois le contenu du cylindre de diamètre double pour s'apercevoir qu'une mesurette de plus est nécessaire pour atteindre la hauteur définie dans le cylindre de diamètre triple.

Les cylindres utilisés lors des expérimentations dans les classes (voir annexe page 214) sont de diamètres assez petits. Le cylindre le plus étroit qui sert de mesurette est difficile à remplir et à vider, il faut le secouer pour y parvenir. Les quelques gouttes d'eau parasites lors des transvasements ont un impact sur les résultats de l'expérience. Afin de parer à ces imprécisions, une technique a été proposée et a fait ses preuves : un élève remplit la mesurette et la passe à un condisciple dont les mains sont sèches. C'est celui-ci qui transvase l'eau dans le cylindre plus large.

2.3 Et si le diamètre est multiplié par 4, 5 ou 10 ?

Comment s'y prendre ?

Une fois que les élèves disposent de ces résultats, l'objectif est qu'ils parviennent à compléter le tableau pour un diamètre quatre, cinq ou dix fois plus grand sans être en possession du matériel nécessaire à l'expérience. Dans ce but, la question suivante est posée.

> Si nous voulions remplir un récipient cylindrique de diamètre 4, 5 ou 10 fois plus grand que le plus petit et ce jusqu'à la même hauteur, de combien de mesurettes aurions-nous besoin ?

L'analogie avec les carrés et le recours à la figure 7 permettent à certains élèves de remplir le tableau de la fiche 25 sans nécessairement reconnaître les liens existant entre les lignes.

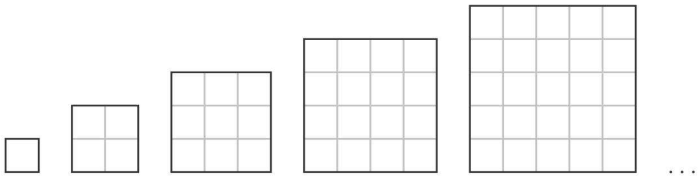


Fig. 7

Diamètre	Nbre de mes.
initial	1
double	4
triple	9
quadruple	16
quintuple	25
...	...
décuple	100

D'autres élèves auront déjà remarqué les liens dans le tableau issu de l'expérimentation, comme ci-dessous.

	Diamètre	Nbre de mes.	
	initial	1	
$\times 2$	double	4	$\times 4$ ou $\times 2^2$
$\times 3$	triple	9	$\times 9$ ou $\times 3^2$

Ces liens de type multiplicatif font apparaître la suite des entiers élevés au carré. La reconnaissance par les élèves de cette suite leur permet de poursuivre le tableau pour les diamètres quadruple, quintuple et décuple.

	Diamètre	Nbre de mes.	
	initial	1	
$\times 2$	double	4	$\times 2^2$
$\times 3$	triple	9	$\times 3^2$
$\times 4$	quadruple	16	$\times 4^2$
$\times 5$	quintuple	25	$\times 5^2$
	...	...	
$\times 10$	décuple	100	$\times 10^2$

$\boxed{\text{hauteur fixe}}$

Dans tous les cas, il faut imposer à tous les élèves d'écrire explicitement ces liens.

Si les élèves complètent le tableau mais éprouvent des difficultés à formuler les liens qui permettent de passer d'une ligne à l'autre, l'enseignant suggère d'enrichir le tableau avec d'autres multiples du diamètre initial. La suite des nombres élevés au carré leur apparaîtra peut-être ainsi plus clairement.

Remarquons que, dans cette situation, les rapports entre les nombres des deux colonnes ne sont pas constants, on ne peut donc pas parler ici de rapport externe.

Après une mise en commun des résultats, l'enseignant demande aux élèves de placer sur un graphique les points correspondant aux données de leur tableau. Ils peuvent tracer un graphique où les longueurs des diamètres sont reportées sur l'axe des abscisses en vraie grandeur. Sinon, ils complètent le graphique de la fiche 26 où la longueur du diamètre initial est représentée par 1 cm, comme dans le graphique de la figure 8.

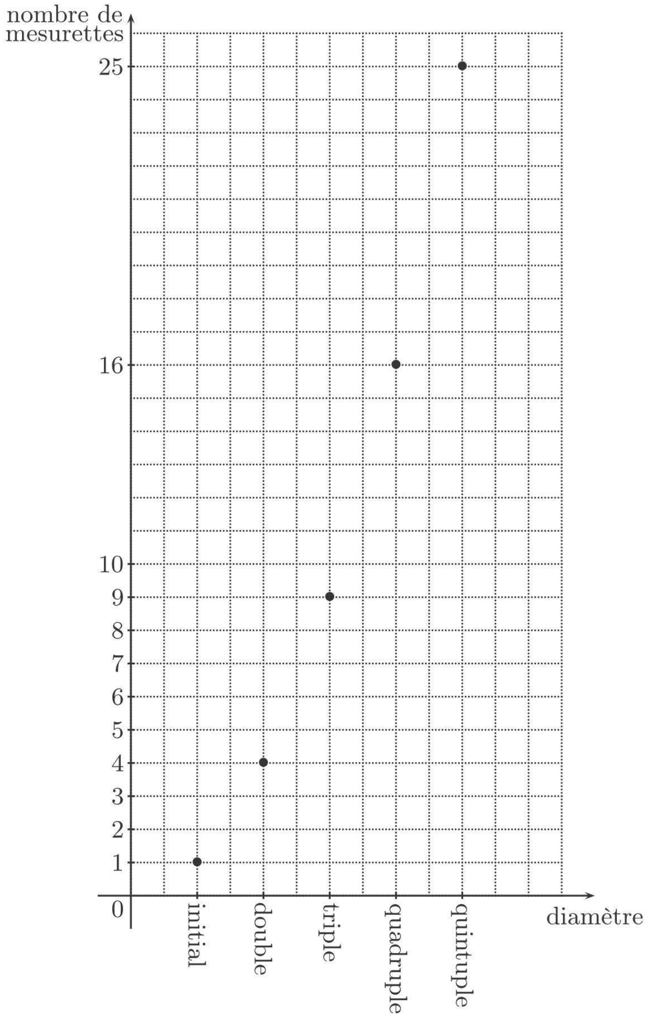


Fig. 8

Comme dans l'expérience précédente, il est naturel de se demander si les points peuvent être reliés. En réfléchissant à l'interprétation du graphique en lien avec l'expérience menée, on peut s'en convaincre car il est tout à fait possible d'imaginer des cylindres de tout diamètre et de calculer les nombres de mesurettes correspondants.

À ce moment, les élèves doivent décider de relier les points soit par des segments, soit par une courbe passant par les points de leur graphique. Pour les amener à choisir entre ces deux modèles, l'enseignant propose de s'intéresser à un cylindre de diamètre 1,5 fois plus grand que celui du cylindre de départ. On calcule qu'il faudrait verser 2,25 mesurettes pour le remplir jusqu'à une même hauteur. En plaçant ce nouveau point sur le graphique, les élèves se rendent compte qu'il ne se trouve pas sur le segment qui relie les points d'abscisses correspondant aux diamètres initial et double. Ce segment ne peut modéliser la situation rencontrée. On doit donc relier les points expérimentaux par une courbe intégrant ce nouveau point.

Certains élèves commencent leur courbe au point origine alors que d'autres démarrent du point correspondant au diamètre initial. L'enseignant propose à ce moment de réfléchir à l'existence d'un cylindre de diamètre moitié du cylindre de départ. Les élèves sont alors convaincus que la courbe commence à l'origine du graphique et calculent le nombre de mesurettes correspondant au cylindre de diamètre moitié pour placer un point supplémentaire sur le graphique.

Échos des classes

Lorsque les élèves tracent le graphique reprenant leurs résultats, certains d'entre eux s'étonnent de ne pouvoir placer tous les points repris dans leur tableau. Il faut donc leur faire remarquer que les nombres de mesurettes correspondant à des diamètres plus grands que cinq fois celui de départ sont des nombres trop élevés pour les placer sur le graphique.

3 Des cylindres... leur hauteur et leur diamètre

En faisant varier la hauteur puis le diamètre d'un cylindre, nous avons obtenu divers tableaux et graphiques. Comparons l'ensemble des résultats obtenus.

De quoi s'agit-il ?

Comparer la variation du volume d'un récipient cylindrique en fonction de sa hauteur ou de son diamètre.

Enjeux

Repérer dans un graphique ou dans un tableau de nombres ce qui caractérise une situation de proportionnalité et une situation de non-proportionnalité.

Lier phénomène proportionnel, tableau de proportionnalité et graphique d'une fonction linéaire.

Compétences disciplinaires

Les grandeurs

Reconnaître un tableau de proportionnalité directe parmi d'autres.

De quoi a-t-on besoin ?

Durée

Une période de 50 minutes.

Matériel pour la classe

Les fiches 27 et 28 des pages 242 et 243.

Matériel par groupe d'élèves

Les fiches reprenant les résultats des expériences menées dans les sections 1 et 2.

Comment s'y prendre ?

La comparaison des deux situations est réalisée collectivement, on cherche donc à ce qu'elle ne dépende pas des particularités des différents récipients. Le nombre de centimètres correspondant aux différentes hauteurs ainsi qu'aux diamètres ne sont plus repris dans cette synthèse puisqu'ils varient d'un groupe à l'autre. Dans la première situation, le nombre de mesurettes qui détermine la hauteur initiale n'était pas nécessairement le même dans les différents groupes. L'enseignant fait la synthèse au tableau à partir d'un autre nombre, trois par exemple.

L'enseignant demande aux élèves quelles grandeurs ont été travaillées. Il s'agit de la hauteur d'un cylindre et de son volume dans la première expérience et du diamètre d'un cylindre et de son volume dans la seconde. Il propose alors de modifier l'intitulé de la seconde colonne des tableaux et de l'axe des ordonnées pour la synthèse.

Les fiches 27 et 28 peuvent être distribuées à chaque élève à la fin du travail. On y trouve les éléments suivants.

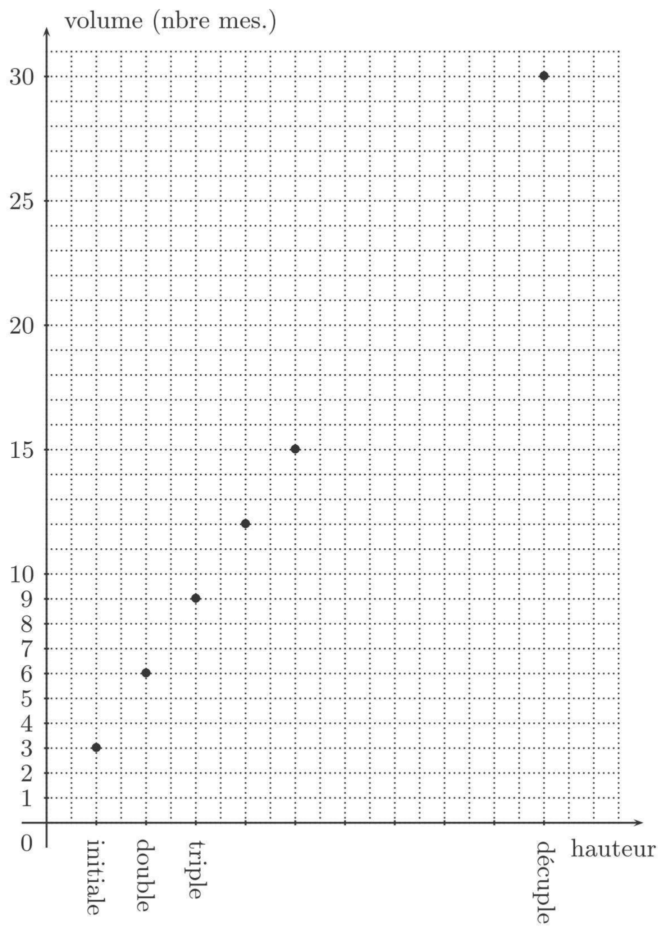


Fig. 9

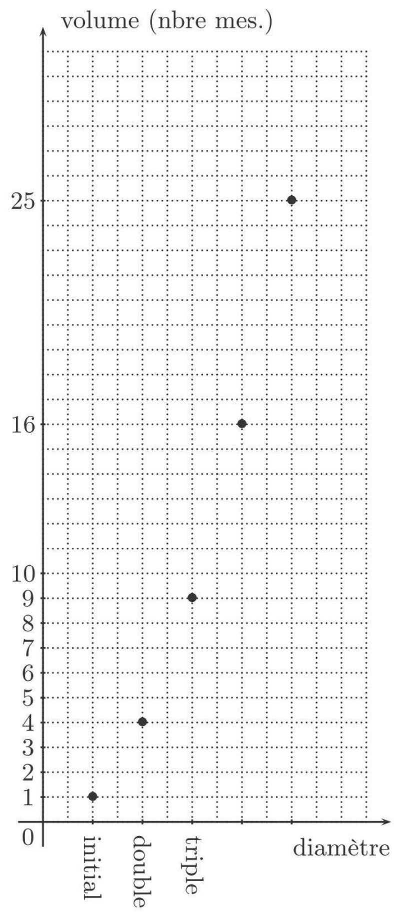


Fig. 10

	Hauteur	Volume (nbre de mes.)		
	initiale	3		diamètre fixe
$\times 2$	double	6	$\times 2$	
$\times 3$	triple	9	$\times 3$	
$\times 4$	quadruple	12	$\times 4$	
$\times 5$	quintuple	15	$\times 5$	
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	
$\times 10$	décuple	30	$\times 10$	

	Diamètre	Volume (nbre de mes.)		
	initial	1		hauteur fixe
$\times 2$	double	4	$\times 2^2$	
$\times 3$	triple	9	$\times 3^2$	
$\times 4$	quadruple	16	$\times 4^2$	
$\times 5$	quintuple	25	$\times 5^2$	
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	
$\times 10$	décuple	100	$\times 10^2$	

Par comparaison des deux situations, l'enseignant évoque la proportionnalité. La première situation fait apparaître que **la hauteur et le volume d'un cylindre sont deux grandeurs proportionnelles** alors que la seconde montre que **le diamètre et le volume d'un cylindre sont deux grandeurs non proportionnelles**.

Dans le tableau de la première situation, les élèves identifient que, lorsqu'on multiplie une grandeur par un nombre, on multiplie l'autre grandeur par le même nombre. La propriété relevée est caractéristique de grandeurs proportionnelles.

Graphiquement, les élèves observent facilement que, dans le graphique du volume en fonction de la hauteur, les points sont alignés. Ceci ne suffit cependant pas à caractériser une situation de proportionnalité. C'est l'enseignant qui attire l'attention sur l'alignement des points avec l'origine. Pour illustrer cela, il peut dessiner des exemples et contre-exemples graphiques (situations linéaires et affines). On retient qu'une condition nécessaire et suffisante pour que deux grandeurs soient proportionnelles est que tous les points soient alignés avec l'origine.

Dès lors, si l'une des conditions n'est pas rencontrée, on dira que les deux grandeurs ne sont pas proportionnelles. Par exemple, la deuxième situation montre que lorsqu'on multiplie une grandeur par un nombre, l'autre grandeur n'est pas multipliée par ce même nombre. On dit que ces grandeurs ne sont pas proportionnelles. On peut arriver à la même conclusion en observant que les points du graphique ne sont pas alignés.

Les fiches 27 et 28 récapitulent ce travail.

Vers où cela va-t-il ? Le travail réalisé jusqu'ici constitue une première approche de la fonction linéaire et de la fonction du second degré, fonctions qui seront largement étudiées par la suite.

Prolongement possible

Si les élèves ont bien intégré les résultats de l'activité, ils peuvent réfléchir à la question suivante.

> Un cylindre A est de diamètre double et de hauteur triple d'un cylindre initial I. Un cylindre B est de diamètre triple et de hauteur double du cylindre I.
>
> Les cylindres A et B ont-ils même volume ? Justifiez.

Les activités précédentes devraient avoir sensibilisé les élèves à ce genre de subtilités. Ils ont remarqué précédemment que les variations de la hauteur et du diamètre n'influençaient pas de la même manière le volume d'un cylindre. Pour répondre à cette question, les élèves peuvent exprimer le volume de chacun des deux cylindres A et B en fonction du volume du cylindre I. Ils doivent pour cela combiner les deux résultats découverts précédemment.

- Cylindre A : un cylindre de diamètre double de celui de départ a un volume 4 ($= 2^2$) fois plus grand, le cylindre A qui a une hauteur triple de ce dernier a un volume encore 3 fois plus grand. Le cylindre A a donc un volume 12 fois plus grand que celui du cylindre initial (volume$I \times 4 \times 3 =$ volume$I \times 12$).
- Cylindre B : un cylindre de diamètre triple de celui de départ a un volume 9 ($= 3^2$) fois plus grand, le cylindre B qui a une hauteur double de ce dernier a un volume encore 2 fois plus grand. Le cylindre B a donc un volume 18 fois plus grand que celui du cylindre initial (volume$I \times 9 \times 2 =$ volume$I \times 18$).

Le cylindre B a donc un plus grand volume que celui du cylindre A. Les élèves remarquent que les résultats sont identiques si on modifie d'abord la hauteur pour obtenir le cylindre intermédiaire.

Toutes les constatations précédentes nous poussent à faire le lien avec la formule permettant de calculer le volume d'un cylindre et à travailler un aspect du formalisme algébrique :

$$V_{cyl} = \pi\, r^2\, h \quad \text{ou} \quad V_{cyl} = \pi\, \frac{d^2}{4}\, h$$

$$V_A = \pi\,(2\,r)^2 \,.\, 3\,h = 12\,\pi\, r^2\, h = 12\, V_I,$$
$$V_B = \pi\,(3\,r)^2 \,.\, 2\,h = 18\,\pi\, r^2\, h = 18\, V_I.$$

Lorsque le diamètre d'un cylindre est multiplié par un nombre, on a découvert que le nombre de mesurettes était multiplié par le carré de ce nombre. Par contre, lorsque la hauteur d'un cylindre est multipliée par un nombre, le nombre de mesurettes est multiplié simplement par ce nombre. Le lien avec les exposants présents dans la formule sur d (ou r) et h respectivement peut ainsi être éclairé.

Échos des classes

Lorsque nous avons proposé cette activité dans une classe, un des élèves a demandé de quel cylindre initial il s'agissait. Dès qu'on lui a dit « celui-ci » sans préciser de mesure, il a pu répondre à la question. Il est important de faire remarquer aux élèves à ce niveau de l'activité que ce qui a été observé jusque là est indépendant du cylindre initial.

4 Un outil supplémentaire : le coefficient de proportionnalité

Le travail mené à partir des manipulations sur les cylindres a conduit à des tableaux organisés de manière spécifique. Face à des tableaux de nombres présentés dans le désordre, il peut se révéler plus difficile de contrôler l'ensemble des rapports internes pour vérifier s'il s'agit de tableaux de proportionnalité ou non. Il se peut aussi que le critère graphique ne permette pas de trancher à cause de l'imprécision du dessin, par exemple pour des tableaux comportant des nombres décimaux ou des nombres d'ordres de grandeurs très différents, difficiles à représenter dans un même graphique.

Dans ces situations, l'outil « coefficient de proportionnalité » peut se révéler très utile. Cette section a pour but de le faire rencontrer aux élèves.

De quoi s'agit-il ?

Identifier si deux grandeurs sont proportionnelles à partir de données numériques non organisées.

Enjeux

Différencier des situations de proportionnalité et de non-proportionnalité à l'aide de différentes techniques (dont l'utilisation du coefficient de proportionnalité).

Compétences disciplinaires

Les nombres

Relever des régularités dans des suites de nombres.

Identifier et effectuer des opérations dans des situations variées avec des entiers [...]

Les solides et figures

Associer un point à ses coordonnées dans un repère.

Les grandeurs

Reconnaître un tableau de proportionnalité directe parmi d'autres.

Déterminer le rapport entre deux grandeurs, passer d'un rapport au rapport inverse.

De quoi a-t-on besoin ?

Durée

Une vingtaine de minutes.

Matériel pour la classe

La fiche 29 de la page 244 ainsi que les fiches 22 et 25 sur lesquelles les élèves ont travaillé précédemment.

Comment s'y prendre ?

L'enseignant distribue la fiche 29 aux élèves et leur fait remarquer, en observant l'exemple repris ci-dessous, qu'un tableau n'est pas nécessairement arrangé comme ceux qu'ils ont rencontrés jusqu'à présent.

grandeur 1	grandeur 2
10	30
2	6
5	15
7	21

Il donne ensuite la consigne.

> Sur base de ces données, déterminez si les grandeurs 1 et 2 sont des grandeurs proportionnelles.

Les élèves ont déjà rencontré au cours de l'activité plusieurs moyens pour répondre à la consigne.

Premièrement, le système d'axes mis à disposition sur la fiche permet de placer les différents points. Comme ces points sont tous alignés avec l'origine, les élèves peuvent affirmer avec certitude que les grandeurs sont proportionnelles.

Deuxièmement, les élèves peuvent relever des liens multiplicatifs comme ceux illustrés dans le tableau ci-dessous, ce qui leur permet d'arriver à la même conclusion : ces grandeurs sont proportionnelles.

$$\begin{array}{cc|c|c|cc}
 & & \text{grandeur 1} & \text{grandeur 2} & & \\ \hline
\times\frac{1}{2} & \times 5 & 10 & 30 & \times 5 & \times\frac{1}{2} \\
 & & 2 & 6 & & \\
 & \times\frac{7}{5} & 5 & 15 & \times\frac{7}{5} & \\
 & & 7 & 21 & &
\end{array}$$

Certains d'entre eux remarqueront peut-être les liens additifs entre certaines lignes du tableau qui sont une caractéristique de grandeurs proportionnelles (voir commentaire page 210).

Les valeurs choisies dans le tableau devraient amener les élèves à repérer rapidement l'existence d'un rapport constant permettant de passer des valeurs d'une grandeur aux valeurs correspondantes de l'autre grandeur. Ce rapport externe qui caractérise également un tableau de proportionnalité est connu sous le nom de coefficient de proportionnalité.

Le coefficient de proportionnalité permettant de passer des valeurs de la grandeur 1 à celles de la grandeur 2 est « 3 ». Remarquons que le coefficient permettant de passer des valeurs de la grandeur 2 à celles de la grandeur 1 est « $\frac{1}{3}$ ».

Dans un tableau qui présente deux grandeurs non proportionnelles, il sera impossible de trouver un coefficient de proportionnalité.

L'enseignant fait le point avec les élèves sur ces trois méthodes qui permettent d'identifier si deux grandeurs sont proportionnelles puis, pour poursuivre le travail, il les invite à reprendre les fiches 22 et 25 sur lesquelles sont notés les résultats des expériences. Il donne alors la consigne suivante.

> Pour chacune des situations rencontrées, pouvez-vous trouver un coefficient de proportionnalité ? Dans l'affirmative, représentez le lien sur le tableau à l'aide d'une flèche.

Les élèves devraient prévoir qu'il existe un coefficient de proportionnalité pour la situation faisant varier la hauteur d'un cylindre mais pas pour la deuxième situation rencontrée, lorsque c'est le diamètre que l'on fait varier.

Dans la première situation, les élèves vérifient donc qu'il existe un coefficient de proportionnalité. Pour l'exemple donné à la page 192, voici des liens qu'ils pourraient trouver.

$: 1,75$ ou $\times\frac{4}{7}$

Hauteur (en cm)	Nbre de mes.
initiale = 3,5	2
double = 7	4
triple = 10,5	6

$\times 1,75$ ou $\times\frac{7}{4}$

Dans la deuxième situation, les élèves ne peuvent trouver de rapport externe. En effet, le rapport qu'on trouve pour les valeurs d'une ligne n'est pas le même pour les valeurs d'une autre ligne.

Il est nécessaire que les élèves soient confrontés à de nombreux exercices de ce type. La plupart des manuels scolaires en proposent un grand nombre. On trouve diverses situations confrontant proportionnalité et non-proportionnalité dans les chapitres 5 et 6 de l'ouvrage « Des grandeurs aux espaces vectoriels » issu d'une précédente recherche du CREM consacrée à la linéarité [13].

5 D'autres récipients

De quoi s'agit-il ?

Identifier des solides pour lesquels le volume varie proportionnellement à leur hauteur.

Enjeu

Comprendre que le volume d'un solide est proportionnel à sa hauteur lorsque les sections parallèles à la base sont isométriques.

De quoi a-t-on besoin ?

Durée

Une vingtaine de minutes.

Matériel pour la classe

Des récipients de toutes formes que l'enseignant ou les élèves amènent en classe. Des solides utilisés lors des expérimentations sont illustrés dans les *Échos des classes* de la page 208.

Comment s'y prendre ?

L'enseignant place en évidence une série de récipients de formes variées, parmi lesquels il aura prévu des prismes. Il pose alors la question.

> Pour quels récipients le volume est-il proportionnel à la hauteur ? Justifiez votre réponse.

S'interroger sur cette question revient à se demander quels sont les récipients dont la section parallèle à la base est constante tout le long de la hauteur. Cette propriété est satisfaite pour des récipients de forme parallélépipédique et pour ceux qui ont la forme d'un prisme droit ou oblique avec une base quelconque mais également pour d'autres récipients tels que la boîte en forme de vague de la figure 11.

Échos des classes

La figure 11 montre quelques-uns des solides proposés aux élèves au cours des expérimentations dans les classes.

Fig. 11

La boîte de chocolats (prisme à base triangulaire) suscite des réflexions. En effet, le volume de cette boîte est reconnu comme proportionnel à la hauteur tant qu'elle est placée sur une de ses bases triangulaires. Mais, si la boîte est posée sur une de ses faces rectangulaires (présentation classique du produit), les élèves considèrent la hauteur du triangle comme la hauteur de l'objet et pensent alors que le volume de la boîte n'est pas proportionnel à la hauteur dans ce cas. Il est à ce moment utile de rappeler que l'objet est un prisme droit dont la hauteur est la longueur des arêtes perpendiculaires à la base triangulaire.

La boîte de céréales est celle qui mène généralement à un vrai débat dans les classes. Sa forme en vague interpelle. Lors de chaque expérimentation, ce sont les arguments des élèves qui convainquent ceux qui ne reconnaissent pas la proportionnalité entre le volume et la hauteur de cette boîte. Les arguments sont du type « on retrouve le morceau qui manque sur un côté de la boîte de l'autre côté », « si on regarde la boîte par en-dessous, on se dit bien qu'il y a le même rectangle tout le long de la hauteur de la boîte », ...

Vers où cela va-t-il ?

Cette activité donne des images mentales qui pourraient être mobilisées plus tard lors du calcul d'un volume par intégrale définie.

Commentaires

– Au cours du chapitre 7, nous avons constaté que les liens additifs que pourraient trouver les élèves dans les tableaux de proportionnalité étaient moins généraux que les liens multiplicatifs. Rappelons que de tels liens additifs, qui peuvent apparaître lorsque les valeurs de deux grandeurs proportionnelles sont organisées comme dans le tableau de gauche, peuvent également apparaître dans des tableaux comme celui de droite qui n'est pas un tableau de proportionnalité.

	Hauteur	Nbre de mes.	
	4	2	
+4			+2
	8	4	
+4			+2
	12	6	
+4			+2
	16	8	

	Grandeur 1	Grandeur 2	
	1	2	
+4			+2
	5	4	
+4			+2
	9	6	
+4			+2
	13	8	

Ce dernier tableau concerne des grandeurs liées par une fonction affine et non par une fonction linéaire. On observe dans ce cas que, graphiquement, les points sont alignés mais pas avec l'origine.

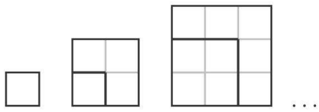
Remarquons dès lors que, dans le premier tableau qui est de proportionnalité, il est possible d'inscrire le couple (0,0) en conservant les liens.

– Des élèves pourraient repérer d'autres liens additifs dans le tableau de la page 200 reprenant les diamètres et le nombre de mesurettes correspondant. C'est la suite des nombres impairs qui est mise en évidence comme le tableau ci-dessous l'illustre.

	Diamètre (en cm)	Nbre de mes.	
	initial (= 0,8)	1	
+0,8			+3
	double (= 1,6)	4	
+0,8			+5
	triple (= 2,4)	9	
+0,8			+7
	quadruple (= 3,2)	16	
+0,8			+9
	quintuple (= 4)	25	

Cela tient au fait qu'en additionnant des impairs successifs, les sommes partielles sont des nombres carrés. Cette propriété peut s'observer numériquement ou géométriquement.

$$\underbrace{\underbrace{\underbrace{1+3}_{4}+5}_{9}+7}_{16}+\dots$$



– Remarquons néanmoins encore un autre type de liens additifs entre des lignes d'un tableau comme celui de la page 206, qui sont une caractéristique de grandeurs proportionnelles.

grandeur 1	grandeur 2
10	30
2	6
5	15
7	21

Tout comme les liens multiplicatifs ou les coefficients de proportionnalité, cette propriété permet de compléter les données manquantes d'un tableau que l'on sait être de proportionnalité.

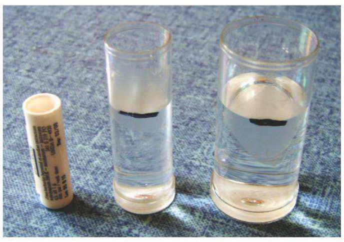
Récipients cylindriques

Pour choisir les cylindres, il faut être attentif à plusieurs aspects :

– c'est le diamètre intérieur des cylindres qui est à mesurer pour que l'activité se déroule correctement ;

– lors du choix des cylindres de diamètre double et triple d'un autre, il est impératif que les diamètres soient des multiples exacts de celui de départ, au millimètre près, pour la réussite de la manipulation.

Voici une série de récipients qui a été testée et qui permet le bon déroulement de cette activité. Il s'agit d'un petit tube de médicament homéopathique de 8 mm de diamètre (et de 3,5 cm de hauteur) et de deux tubes de perles de 16 et 24 mm de diamètre.



215

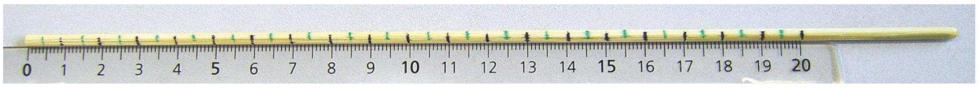
Trucs et astuces

Pour mesurer la hauteur à atteindre par l'eau dans un récipient, il faut mesurer à l'intérieur de ce récipient. Il est donc nécessaire d'avoir une règle graduée dont le zéro correspond à une de ses extrémités pour connaître la hauteur exacte.

Il est possible de fabriquer un tel instrument de mesure. Pour cela, il suffit d'avoir le matériel suivant :

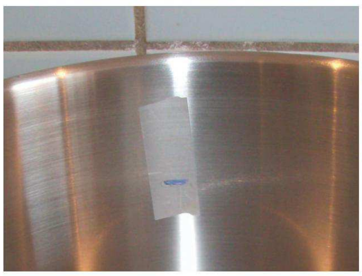
- un bâton plat ou une pique à brochette ;
- une règle graduée ;
- des feutres résistants à l'eau de deux couleurs différentes (feutres pour CD par exemple).

En plaçant une extrémité du bâton au niveau du zéro de la règle graduée et en plaçant ce bâton le long de la règle, il suffit de placer une marque sur le bâton à chaque centimètre. Pour faciliter la prise de mesures par la suite, on peut également faire une marque tous les 5 millimètres, dans une autre couleur de préférence.



Pour marquer la hauteur atteinte ou à atteindre dans un récipient, sans l'abîmer, il suffit de placer un morceau de ruban adhésif mat sur la surface du récipient et de placer la marque sur cet adhésif.

L'adhésif peut être placé à l'extérieur des récipients transparents mais doit être placé à l'intérieur des récipients opaques.



Casserole

Combien de verres d'eau penses-tu qu'il faut verser dans la casserole pour la remplir jusqu'à la moitié de sa hauteur ?

Ton estimation : ……

Comptons le nombre de verres d'eau nécessaires pour atteindre la marque placée à la moitié de la hauteur de la casserole.

Nombre de verres d'eau : ……

Connaissant le nombre de verres d'eau nécessaires pour remplir la casserole à la moitié de sa hauteur, combien de verres d'eau seront alors nécessaires selon toi pour remplir la casserole à ras bord ?

Ton estimation : ……

Continuons à remplir la casserole pour vérifier ta réponse.

Maintenant, remplis le tableau suivant avec les données de l'expérience.

Hauteur	Nombre de verres
moitié	
totale	

Hauteur d'un cylindre (1)

Pour commencer, verse le contenu d'une ou deux mesurettes dans ton récipient cylindrique (en fonction de ce qui t'a été demandé) et place une marque correspondant à la hauteur du niveau d'eau qui sera la hauteur de départ.

Ensuite, **avant de verser l'eau**, place des marques sur ton récipient en t'aidant de ton bâton gradué pour fixer la hauteur double ainsi que la hauteur triple et réponds aux questions suivantes.

Combien faudra-t-il de mesurettes, à ton avis, pour atteindre le double, puis le triple de la hauteur de départ ?

Nombre de mesurettes pour la hauteur double : ......

Nombre de mesurettes pour la hauteur triple : ......

Après avoir écrit tes estimations, verse les mesurettes dans le récipient cylindrique pour vérifier et complète le tableau suivant au fur et à mesure.

... ...

Hauteur (en cm)	Nombre de mesurettes
initiale =	
double =	
triple =	

Complète les pointillés à côté des flèches pour indiquer les liens que tu vois entre la première et la deuxième ligne du tableau.

Vois-tu d'autres liens ? Si oui, ajoute les flèches correspondantes.

Hauteur d'un cylindre (2)

Suite à tes observations, réponds à la question suivante.

De combien de mesurettes aurais-tu besoin pour atteindre 4, 5 et 10 fois la hauteur de départ ?

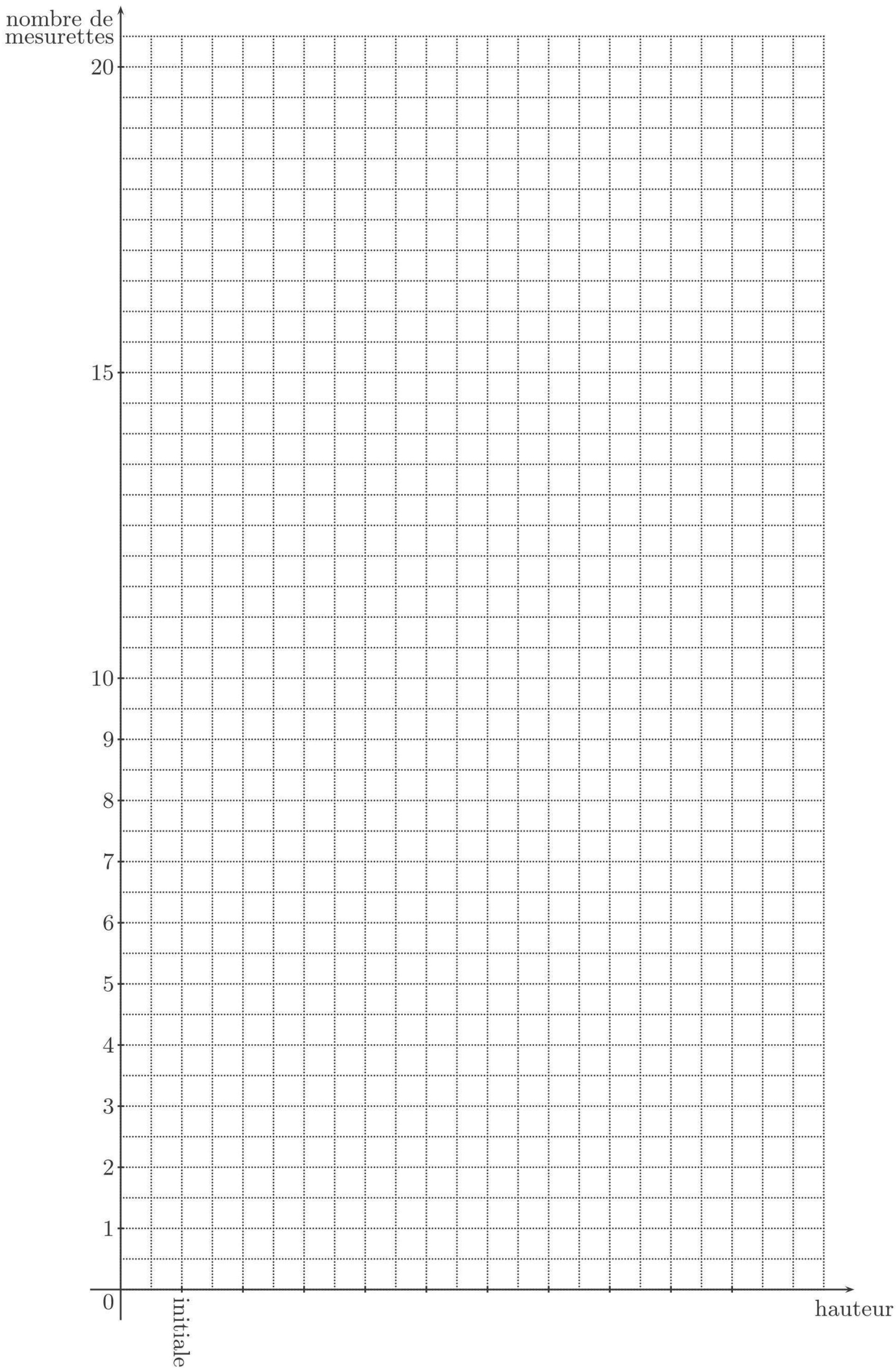
Complète le tableau ci-dessous.

Hauteur (en cm)	Nombre de mesurettes
initiale =	
double =	
triple =	
quadruple =	
quintuple =	
⋮	⋮
décuple =	

Après avoir complété le tableau, réalise un graphique avec tous les résultats.

- Tu peux travailler en vraie grandeur en prenant deux feuilles A4 quadrillées collées l'une à côté de l'autre. Trace un repère et places-y les points qui représentent tes résultats.
- Tu peux aussi travailler sur le graphique de la fiche 23 où la hauteur initiale est représentée par 1 cm.

Hauteur d'un cylindre (3)



Diamètre d'un cylindre (1)

À ton avis, combien de fois faut-il verser l'eau contenue dans le récipient cylindrique que tu as reçu pour remplir un récipient cylindrique de diamètre double jusqu'à la même hauteur ?

Et combien pour remplir un récipient de diamètre triple ?

Complète le tableau ci-dessous avec tes estimations sachant que le récipient initial sert de mesurette.

Diamètre	Nombre de mesurettes (estimation)
initial	1
double	
triple	

Réalise maintenant la manipulation en remplissant les cylindres de diamètre double et triple jusqu'à la hauteur fixée – en utilisant le petit cylindre comme mesurette – et complète le tableau suivant avec les résultats que tu obtiens.

Diamètre (en cm)	Nombre de mesurettes (expérimentation)
initial =	1
double =	
triple =	

hauteur = cm

Compare tes résultats avec ceux des autres groupes.

240 *fiche 25*

Diamètre d'un cylindre (2)

À partir des résultats précédents, complète le tableau pour un diamètre quatre fois plus grand, cinq fois plus grand, . . .

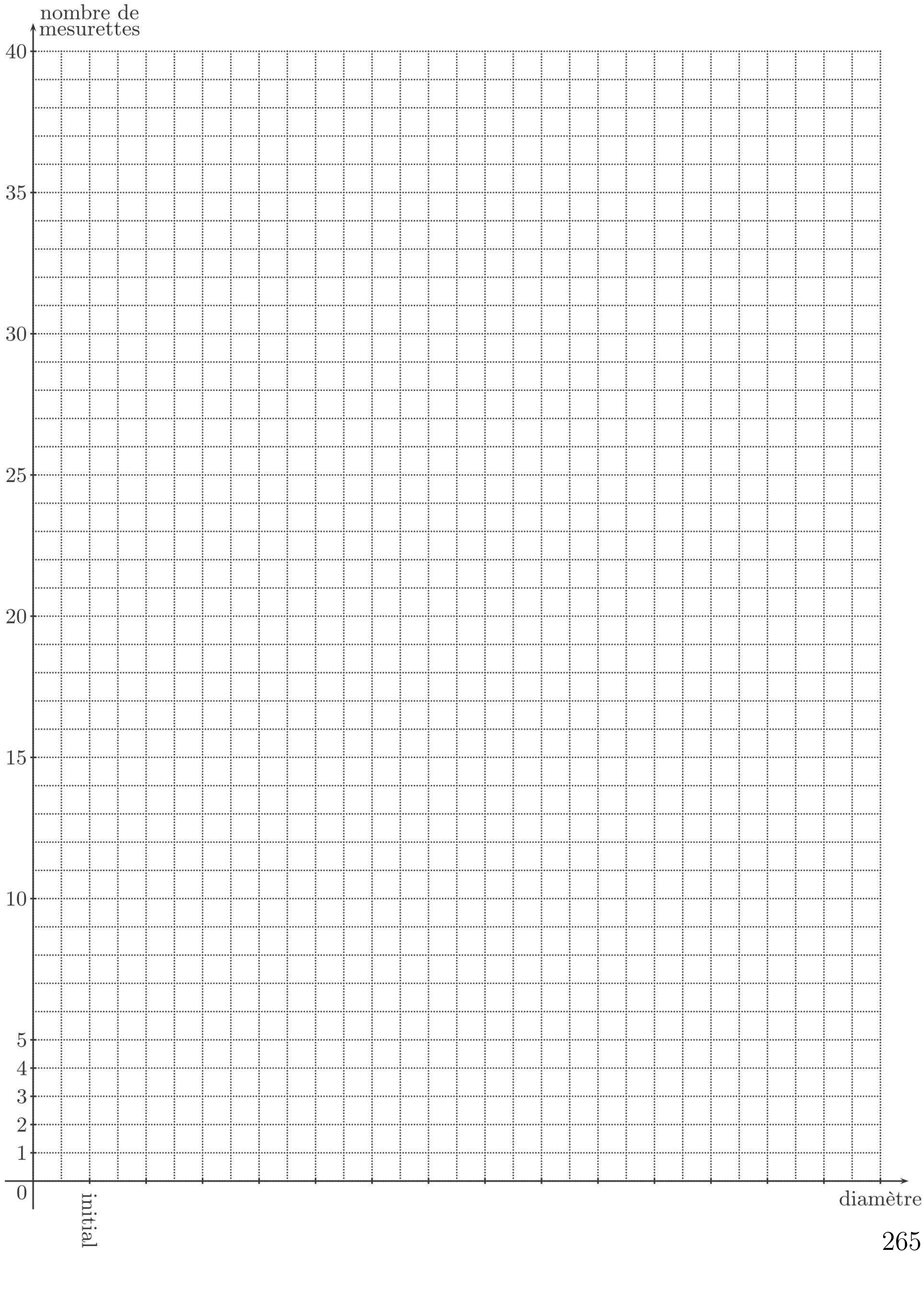
Écris les liens que tu trouves à l'aide de flèches.

hauteur = cm

Diamètre (en cm)	Nombre de mesurettes
initial =	1
double =	
triple =	
quadruple =	
quintuple =	
⋮	⋮
décuple =	

Diamètre d'un cylindre (3)

Après avoir discuté de tes résultats avec les autres groupes, place les résultats dans le graphique ci-dessous.



242 *fiche 27*

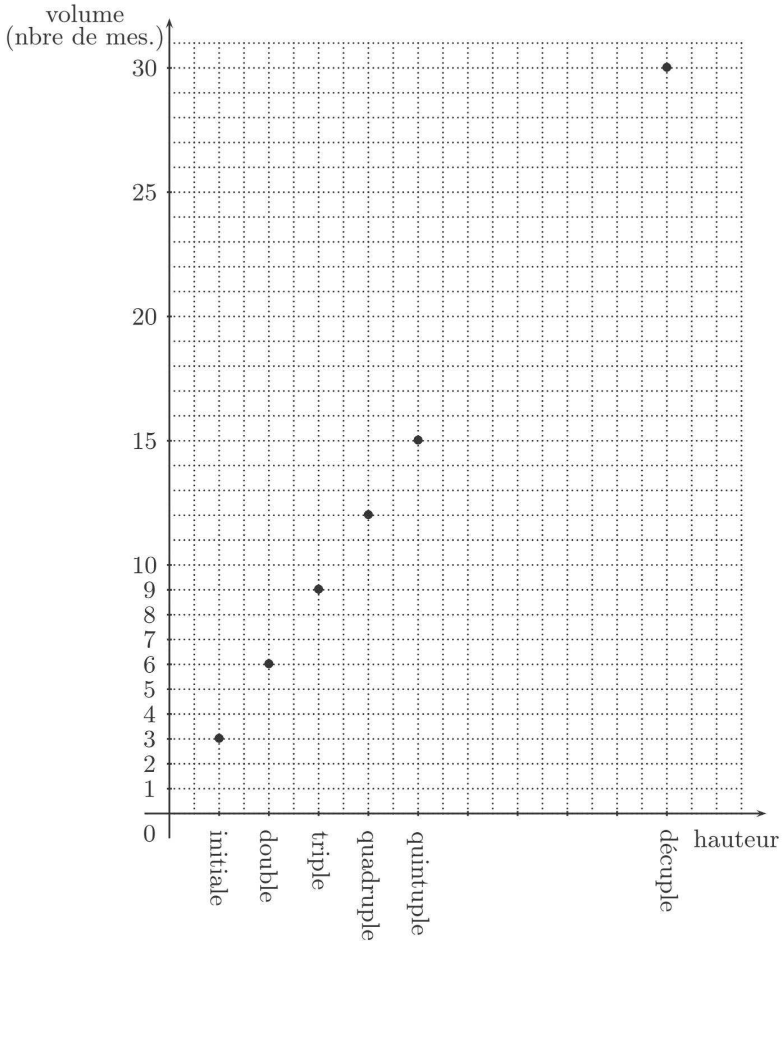
Synthèse : travail sur les hauteurs (diamètre constant)

La hauteur et le volume d'un cylindre sont deux grandeurs proportionnelles.

Tableau : lorsqu'on multiplie la hauteur d'un cylindre par un nombre sans changer le diamètre, on multiplie le volume par le même nombre.

Hauteur	Volume (mes.)
initiale	3
double	6
triple	9
quadruple	12
quintuple	15
⋮	⋮
décuple	30

Graphique : les points du graphique sont alignés avec l'origine (0,0).



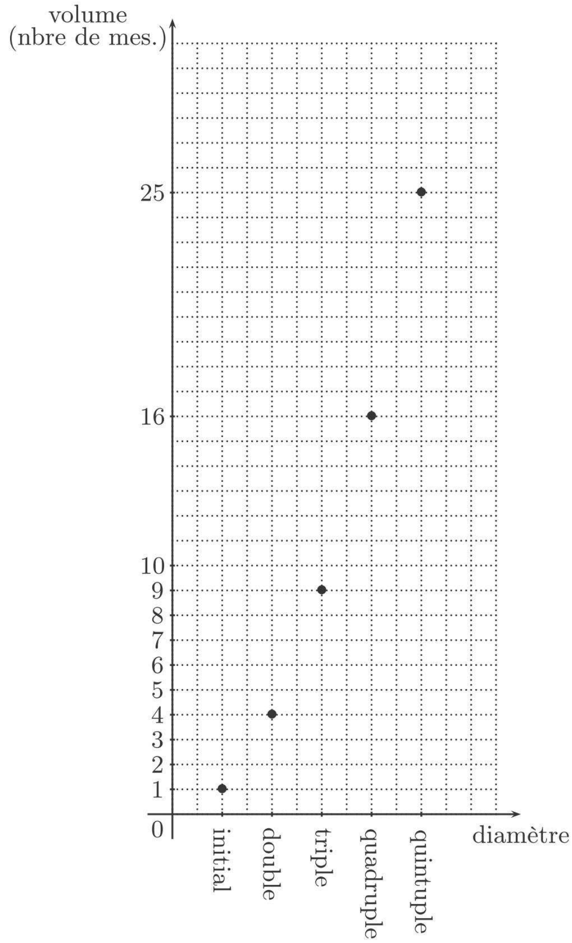
Synthèse : travail sur les diamètres (hauteur constante)

Le diamètre et le volume d'un cylindre sont deux grandeurs non proportionnelles.

Tableau : lorsqu'on multiplie le diamètre d'un cylindre par un nombre sans changer la hauteur, on ne multiplie pas le volume par ce même nombre.

	Diamètre	Volume (mes.)	
	initial	1	
$\times 2$	double	4	$\times 2^2$
$\times 3$	triple	9	$\times 3^2$
$\times 4$	quadruple	16	$\times 4^2$
$\times 5$	quintuple	25	$\times 5^2$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
$\times 10$	décuple	100	$\times 10^2$

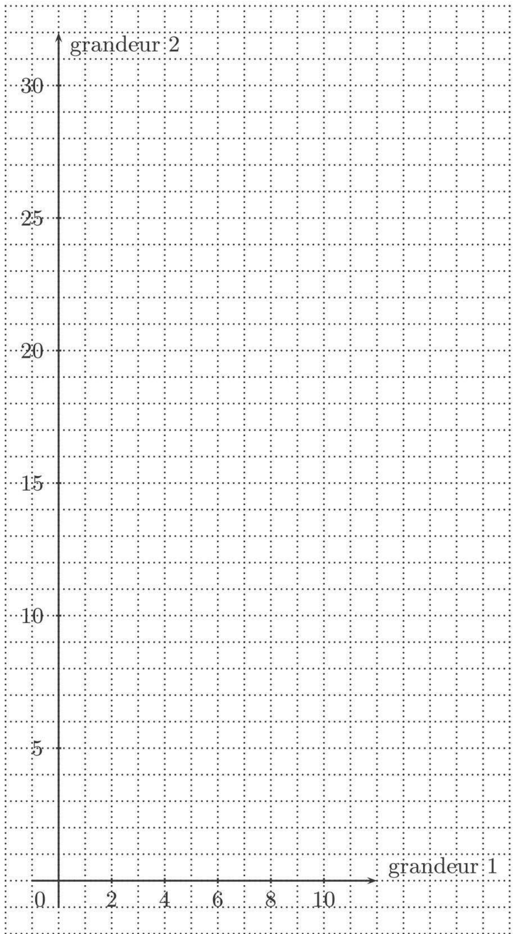
Graphique : les points du graphique ne sont pas alignés avec l'origine (0,0).



244 *fiche 29*

Grandeurs proportionnelles ou non ?

grandeur 1	grandeur 2
10	30
2	6
5	15
7	21



La grandeur 1 et la grandeur 2 sont des grandeurs ......

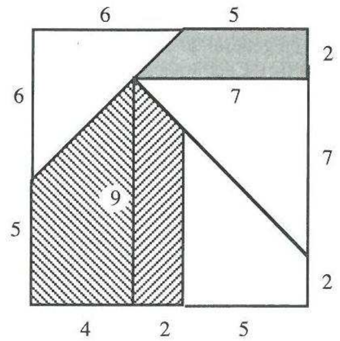
car ......

Annexe C

Puzzle de Brousseau

Cette annexe présente succinctement la situation du puzzle de Brousseau (1998, pp. 237-238).

Situation-problème



Consigne

« Voici des puzzles vous allez en fabriquer de semblables, plus grands que les modèles, en respectant la règle suivante : le segment qui mesure quatre centimètres sur le modèle devra mesurer sept centimètres sur votre reproduction. Je donne un puzzle par équipe de 5 ou 6, mais chaque élève fait au moins une pièce ou un groupe de 2 en fait 2. Lorsque vous aurez fini, vous devez pouvoir reconstituer les mêmes figures qu'avec le modèle. »

Déroulement

[...] Presque tous les enfants pensent qu'il faut ajouter 3 centimètres à toutes les dimensions : même si certains doutent de ce modèle, ils parviennent rarement à s'expliquer et jamais à convaincre leurs partenaires à ce moment-là. Le résultat évidemment, c'est que les morceaux ne se raccordent pas. [...]

Annexe D

Retranscription d'une activité d'introduction

La conversation reprise dans le tableau ci-dessous a été enregistrée dans une classe (Na_1) lors des expérimentations dans l'école de Namur.

n°	minutage	intervenant	
1	1'40"	enseignante	Pour commencer, vous voyez, on vous a amené du matériel, notamment une casserole. Quelle forme a-t-elle ?
2		élève	Cylindrique.
3		enseignante	C'est une casserole qui est cylindrique, elle a la forme d'un cylindre. Toute cette semaine nous allons travailler avec des cylindres. J'ai pris ici une casserole, elle est grande, c'est la plus grande qu'on ait pu trouver pour qu'un maximum d'entre vous voit ce qu'il se passe. Après, en travaillant en groupe, on vous donnera de plus petits cylindres. La casserole j'aimerais bien la remplir avec ce verre-ci, et je vais vous demander d'estimer, donc de penser, combien de verres je pourrai verser dans la casserole pour qu'elle soit remplie jusqu'à la moitié de sa hauteur. Essayez, chacun pour vous, de penser combien de fois je vais devoir verser le verre dans la casserole.
4			(distribution de la feuille de travail)
5	2'35"	enseignante	Il est demandé de compléter d'abord votre estimation donc le nombre auquel vous pensez. [...]
6	3'00"	élève	On peut voir le verre ? Non, dans l'autre sens. [...]

7	3'40"	enseignante	Chacun a une estimation ?
8		élève	18
9		élève	4
10		élève	4 aussi
11		élève	13
12		élève	10
13		élève	17
14	4'00"	enseignante	Vous avez plein d'estimations différentes, on va vérifier. [...] Qui vient verser les verres ? [...] Vous regardez, vous réagissez en fonction de ce qui est fait, bien fait, pas bien fait. Ah, un premier me dit qu'il faudrait le tremper à fond, à votre avis ? On va d'abord discuter, tu continueras après [...] Pourquoi ça sera à fond ou pas ?
15	4'55"	élève	Pour avoir toujours la même chose, la même quantité.
16		enseignante	Pour être certain de verser à chaque fois la même quantité d'eau et de parler des mêmes nombres de verres ça serait mieux de le remplir à chaque fois entièrement. Est-ce qu'il peut continuer comme ça ?
17		élève	Non, parce que la première fois le verre n'était pas plein.
18		enseignante	Je vais te faire recommencer, ça va ? Donc je remets l'eau.
19		élève	Mais, on ne connaît pas la hauteur de la moitié.
20		enseignante	Ça c'est une très bonne observation.
21		élève	Mais si y'a un papier collant ! ! !
22		enseignante	C'est vrai qu'on en a mis un, c'est bien observé. Mais que dis-tu ?
23	5'34"	élève	On ne connaît pas la hauteur de la moitié.
24		enseignante	Où va-t-on s'arrêter en fait ? On ne connaît pas la moitié. Donc il faudrait mesurer. [...] On fait une chose à la fois. Ça, ce sont toutes des questions, on est en train de faire une expérience. Vous voyez pour ne pas devoir recommencer plein de fois, il faut se poser toutes les bonnes questions. Il faut se poser les questions avant de commencer comme ça on est sûr qu'on est prêt. On m'a dit : « il faut mesurer ». Qui vient mesurer avec son matériel ?
25		élève	Moi.

26		enseignante	Prends de quoi mesurer.
27		élève	Qui a une latte ?
28		enseignante	Il y a une latte derrière toi que tu peux prendre.
29		enseignante 2	N'hésitez pas à intervenir, calmement, mais vous pouvez donner votre avis.
30		élève	La casserole n'est pas parfaitement droite, je dois faire une trace parce que sinon ça ne va pas aller. Ça doit être précis Madame ?
31		enseignante	Oui, sinon ça n'ira pas.
32		enseignante 2	Ah, écoutez un peu...
33		élève	Moi j'ai une latte qui commence à zéro tout pile parce que celle-là, il y a un petit peu, ça ne commence pas, je ne sais pas comment expliquer. Il y a un petit espace.
34		enseignante	Voilà, il y a un petit espace.
35		élève	Moi j'ai une équerre.
36	7'00"	enseignante	L'équerre ce n'est pas l'idéal. On vous a préparé un petit matériel qu'on va vous montrer, mais je vois qu'il y a d'abord une question.
37		élève	On peut prendre un compas.
38		enseignante	Un compas, ce n'est pas une mauvaise idée du tout. Explique comment tu ferais.
39		élève	Je prendrais l'ouverture de la hauteur et puis je prendrais une latte et je mesurerais.
40		enseignante	C'est une très bonne manière de mesurer aussi [...] Pour vous faciliter le travail, on vous a préparé des petits bâtons gradués qui commencent à zéro [...] En noir on a fait tous les centimètres et en vert les demi-centimètres. Ça, c'est ce qui peut remplacer la latte qui commence à zéro. Je te laisse le faire. [...]
41	8'35"	élève	Ça fait 11,5.
42		enseignante	Je ne sais pas si vous avez vu, elle a regardé la hauteur sur son bâton et puis elle a regardé sur sa latte. [...] Avant de continuer je vois qu'il y a une question.
43	9'05"	élève	Mais en fait Madame on n'a qu'à remplir le tout et puis diviser en deux.

44		enseignante	Alors, ça pourrait être une solution mais je vous ai demandé de remplir jusqu'à la moité de sa hauteur. On veut remplir à moitié donc je vais marquer la moitié. Sur vos feuilles, dans le cadre dans le tableau que vous avez en bas de la page, on vous demande à la dernière ligne la hauteur de la casserole. On vient de la mesurer, ça fait 11,5 cm donc vous pouvez compléter dans la dernière ligne, première colonne du tableau.
45	9'50"	élève	Mais Madame, c'est la bonne hauteur ? […]
46		enseignante	C'est la hauteur totale. Quelle est la moitié de la hauteur ?
47		élève	5,75.
48		enseignante	Vous le notez aussi dans votre tableau. […] Tu n'avais pas confiance dans la mesure des 11,5 cm, tu peux venir noter les 5,75 cm. […]
49	12'40"	enseignante	Maintenant qu'on a la marque de la moitié, que reste-t-il à faire ?
50		élève	Remplir d'eau.
51		élèves	1…
52		élèves	2…
53		élèves	3…
54	13'15"	élève	C'est déjà pas quatre.
55		élèves	4…
56		élèves	5…
57		élève	C'est peut-être huit ou neuf.
58		élèves	6…
59		élèves	7…
60	13'41"	élève	Ça fait dix.
61		élèves	8…
62		élèves	9…
63		élève	C'est neuf.
64		élève	Ça fait neuf.
65		élèves	Wouai !
66		élève	C'est pas bon parce qu'il y avait de l'eau en plus […]
67		enseignante	Tu trouvais qu'il y avait de l'eau qui tombait à chaque fois à côté. C'est pas très précis, on aurait pu améliorer ça. […]
68	14'45"	élèves	Et aussi, au-dessus de la casserole c'est un petit peu comme ça [évasé] et puis ça touche pas vraiment la ligne. […]

69		enseignante	Vous allez déjà remplir vos feuilles avec le nombre de verres d'eau nécessaires pour remplir la casserole jusqu'à la moitié de sa hauteur. À votre avis, combien de verres d'eau faudra-t-il pour la remplir entièrement ?
70	15'35"	élève	18 parce que c'est le double, non, 19 parce qu'il y en a un peu plus que 9. [...]
71	16'30"	enseignante	On va vérifier. Écrivez votre estimation sur la troisième ligne. [...]
72	18'05"	enseignante	Le banc n'est pas tout à fait droit donc on ne saura pas remplir la casserole entièrement, on va s'arrêter avant. [...] Arrête-toi [...] Normalement, tu aurais pu le vider entièrement.
73	18'23"	élève	18...
74		enseignante	Il reste un peu de place dans la casserole, donc, on était à 17. On aurait pu vider celui-là mais on ne sait pas le vérifier car le banc n'est pas tout à fait droit. On en a mis 17 pour le moment. [...]
75		élève	[inaudible]
76		enseignante	Ça c'est encore une autre explication. [...]
77		élève	Parce que l'eau est courbée au-dessus.
78		élève	Le fond est légèrement recourbé.
79	19'14"	élève	On n'a pas été précis dans la graduation. [...]
80		élève	Il reste un petit centimètre, encore un peu de place dans la casserole.
81		enseignante	L'important avec toutes vos réflexions c'est que vous ayez bien compris qu'on a dû doubler le nombre de verres pour atteindre la hauteur. Plus ou moins, on est dans une expérience donc c'est normal, il y a toujours des petites erreurs qui se produisent (graduations, verres parfois un peu plus remplis que d'autres). C'est plein de petites choses qui peuvent influencer les expérimentations. [...]
82	20'15"	enseignante	En sciences on ne fait pas qu'une seule expérimentation car, comme vous voyez, avec une seule on n'arrive pas à un résultat certain. On fait toute une série d'expériences et on regarde ce qu'il se passe de manière la plus générale possible, ce qu'il se passe souvent.

Annexe E

Séquence de cours suivie par les classes témoins de Namur

Cette annexe reprend, aux pages 278 à 285, les activités présentées aux élèves des classes témoins de Namur (Ancia & *al.*, 2006), et aux pages 286 et 287, la théorie qui leur a été exposée (Ancia & *al.*, 2007).

Chapitre 8 • Proportionnalité

Activité 1 – Proportionnalité

Pommes de terre savoyardes pour 4 personnes

Ingrédients :

1 kg de pommes de terre – 1/2 l de bouillon – 150 g de gruyère – 1 gros oignon

Recette :

Émincer l'oignon, peler les pommes de terre, les couper en rondelles fines et faire revenir l'ensemble dans du beurre. Les répartir dans un plat à gratin, avec le gruyère en lamelles, couvrir avec le bouillon. Mettre au four, laisser cuire 45 minutes et gratiner.
Servir dans le plat bien chaud.

1) Détermine la quantité de pommes de terre à prévoir pour 6, 7 et 10 personnes.

2) Détermine la quantité de gruyère à prévoir pour 6, 7 et 10 personnes.

3) Détermine la quantité d'oignons à prévoir pour 6, 7 et 10 personnes.

4) Détermine la quantité de bouillon à prévoir pour 6, 7 et 10 personnes.

Activité 2 – Tableaux et proportionnalité

En utilisant la recette de l'activité 1, complète les tableaux ci-dessous sans oublier de noter entre parenthèses l'unité choisie.

Nombre de personnes	x	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Pommes de terre	y										

Compare les deux grandeurs et traduis ta comparaison par une égalité.

....

Nombre de personnes	x	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Gruyère	y										

Compare les deux grandeurs et traduis ta comparaison par une égalité.

....

Nombre de personnes	x	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Oignons	y										

Compare les deux grandeurs et traduis ta comparaison par une égalité.

....

Nombre de personnes	x	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Bouillon	y										

Compare les deux grandeurs et traduis ta comparaison par une égalité.

....

Dans chaque cas, les grandeurs x et y sont des grandeurs ....

Explique : ....

....

....

272 A1

Activité 3 – Graphiques et proportionnalité

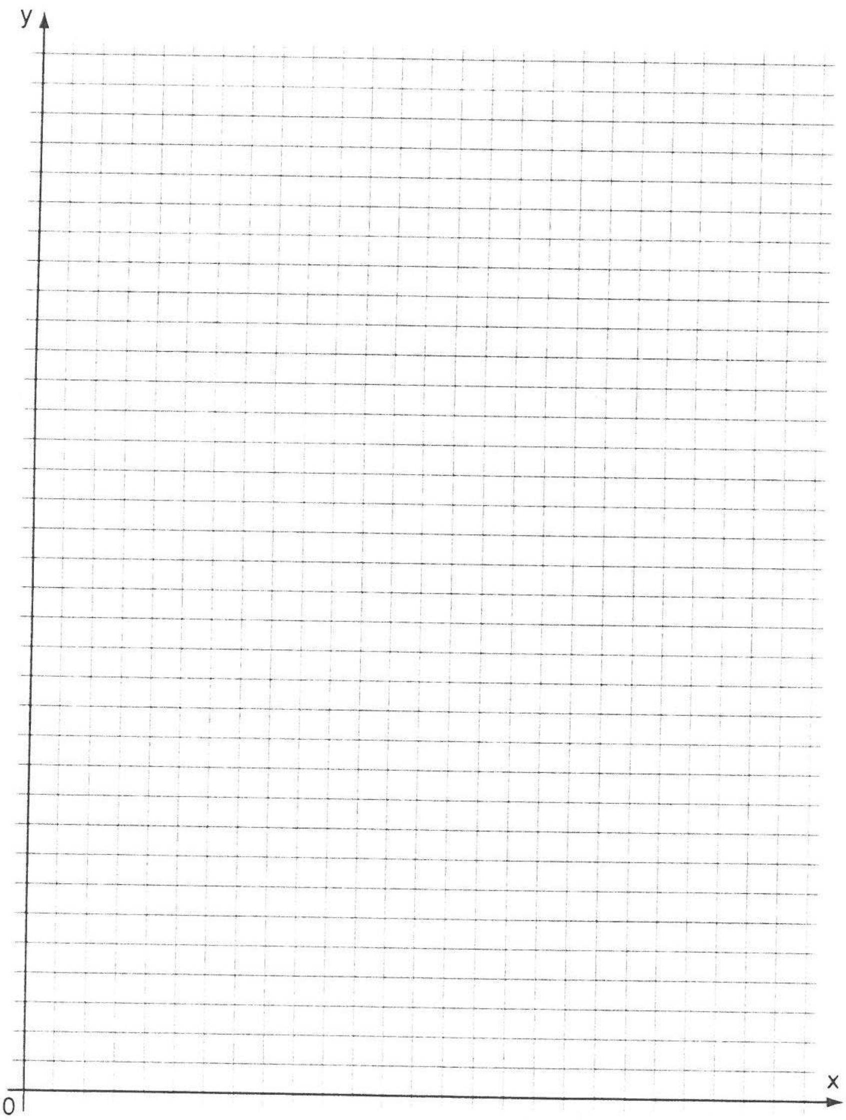
a) Dans le premier tableau de l'activité 2, x représente le nombre de personnes,
y représente la quantité de pommes de terre.

Dans le deuxième tableau de l'activité 2, x représente le nombre de personnes,
y représente la quantité ~~de gruyère~~. d'oignons

Choisis un repère cartésien adéquat pour représenter les couples (x;y) de chaque tableau.

Choix du repère : sur l'axe x : ....

sur l'axe y : ....



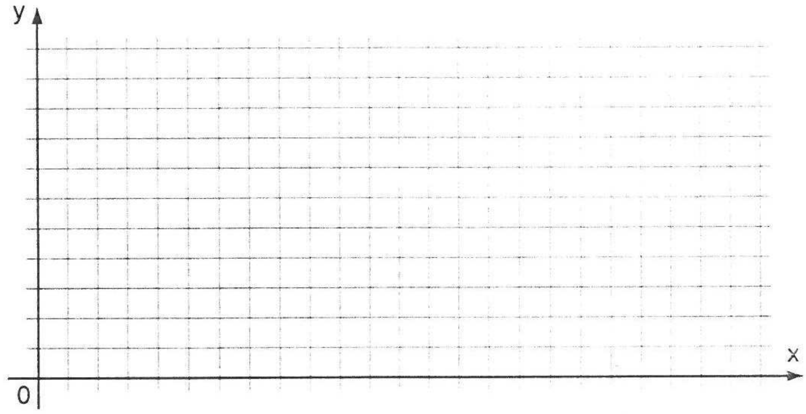
168

b) Dans le troisième tableau de l'activité 2, x représente le nombre de personnes,
y représente le nombre ~~d'oignons~~. de gruyère

Choisis un repère cartésien adéquat pour représenter les couples (x;y).

Choix du repère : sur l'axe x : ....

sur l'axe y : ....

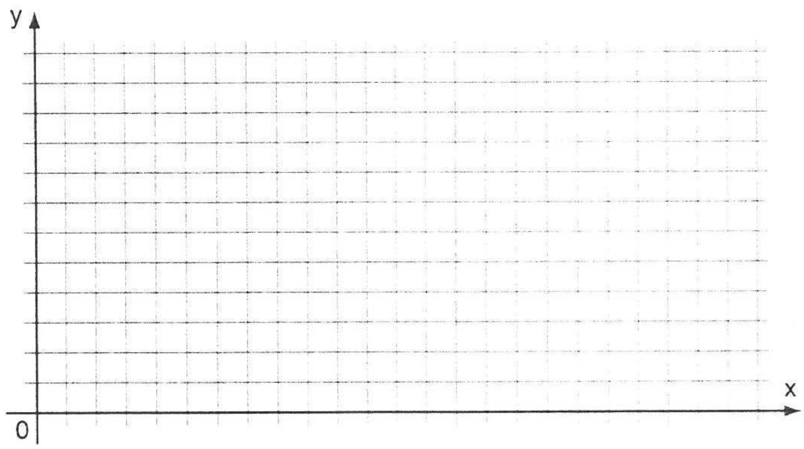


c) Dans le quatrième tableau de l'activité 2, x représente le nombre de personnes,
y représente la quantité de bouillon.

Choisis un repère cartésien adéquat pour représenter les couples (x;y).

Choix du repère : sur l'axe x : ....

sur l'axe y : ....



Conclusion de l'activité 3

Que remarques-tu quant à la position des points de chaque graphique ?

....

Les grandeurs proportionnelles se représentent donc graphiquement par ....

272 A2 ....

Activité 4 – Grandeurs proportionnelles ou non ?

a) Les deux entreprises de déménagement CASSERIEN et PORTELOIN affichent les tarifs suivants : *CASSERIEN* 10 € par km
PORTELOIN 400 € au départ + 5 € par km

1) Complète le tableau ci-dessous si x représente le nombre de km parcourus et y le prix du déménagement de l'entreprise *CASSERIEN*.

x	10	20	50	100	120	150	200
y							

Les grandeurs x et y sont-elles des grandeurs proportionnelles ? ....
Si oui, détermine le coefficient de proportionnalité.

....

2) Complète le tableau ci-dessous si x représente le nombre de km parcourus et y le prix du déménagement de l'entreprise *PORTELOIN*.

x	10	20	50	100	120	150	200
y							

272 B

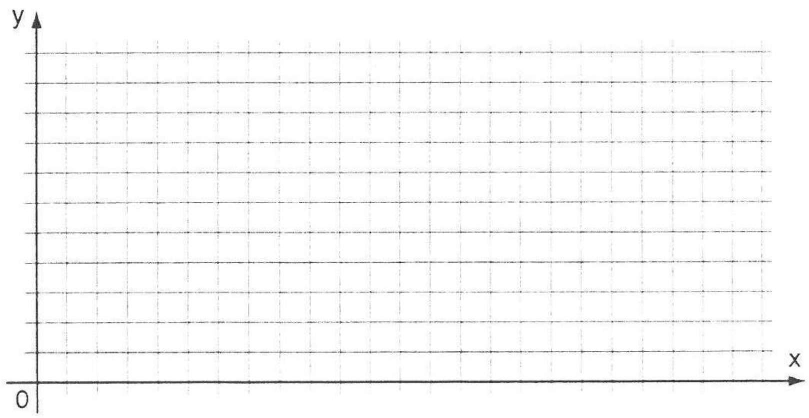
Les grandeurs x et y sont-elles des grandeurs proportionnelles ? ....
Si oui, détermine le coefficient de proportionnalité.

....

3) Choisis un repère cartésien adéquat et représente en rouge les couples (x;y) du premier tableau et en vert ceux du second tableau.

Choix du repère : sur l'axe x : ....

sur l'axe y : ....



4) En utilisant le graphique, détermine la distance pour laquelle les deux prix à payer sont les mêmes.

....

5) Dans quel cas a-t-on intérêt à s'adresser à *CASSERIEN* plutôt qu'à *PORTELOIN* ?

....

b) Dans un laboratoire de psychologie expérimentale, on a nourri régulièrement un groupe de rats blancs jusqu'à l'âge de 2 ans. Leurs masses moyennes en grammes ont été calculées tous les 100 jours.

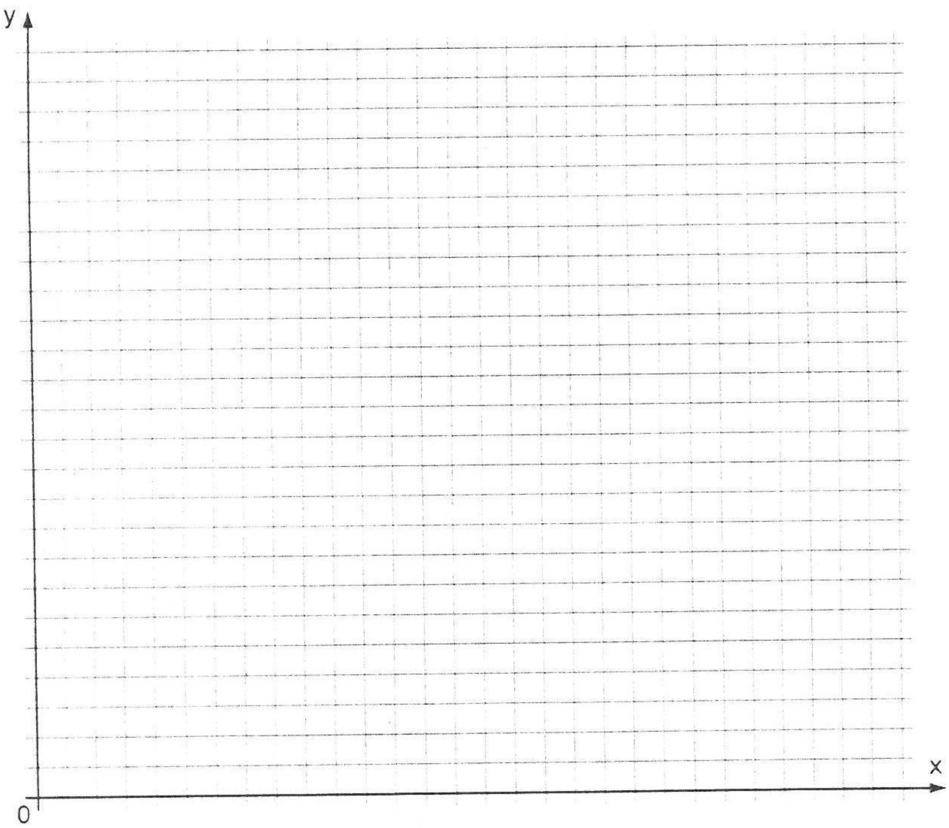
Âge en jours	0	100	200	300	400	500	600	700
Masse moyenne en g	5	130	190	240	270	290	300	305

1) Si x représente le nombre de jours et y la masse moyenne en g, représente les couples (x;y) en utilisant un repère cartésien de ton choix.

Choix du repère : sur l'axe x : ....

sur l'axe y : ....

170



Les points sont-ils alignés ? ....

La masse et l'âge sont-elles des grandeurs proportionnelles ? ....

2) Utilise le graphique pour répondre aux questions ci-dessous.

Quel est l'âge approximatif d'un rat de 100 g ? ....; de 200 g ? ....

Quelle est la masse moyenne des rats de 1 an ? ....; de 1 an 1/2 ? ....

Activité 5 – Problèmes de règle de trois et de proportionnalité

1) Quatre kilos de pommes coûtent 6 €.
   a) Que coûtent 7 kg ? 9 kg ? 13 kg ?
   b) Pourrais-tu acheter 6 kg de pommes avec 1 billet de 10 € ?

2) La voiture de ton professeur de math consomme en moyenne 8 litres d'essence pour 100 km.
   a) Combien de litres d'essence consomme-t-elle pour 800 km ? 350 km ? 125 km ?
   b) Avec 55 litres dans le réservoir, quelle distance peut-il espérer parcourir ?

3) On remplit une piscine au rythme de 3 m^3 d'eau par heure. Combien de temps faudra-t-il pour remplir une piscine de 8 m de long, 4 m de large et 2 m de profondeur ?

4) Un carrousel fait 24 tours en 5 minutes.
   a) En combien de temps fait-il 36 tours ? b) Combien de tours fait-il en 12 min 30 s ?

273 C

5) Dans la fabrication du cidre, on admet que 100 kg de pommes donnent 60 l de cidre.
   a) Quelle quantité de pommes faut-il pour obtenir 2400 l de cidre ?
   b) Quelle quantité de cidre peut-on fabriquer avec 1230 kg de pommes ?

Activité 6 – Proportionnalité ou non ?

~~a)~~ Vrai ou faux ?

1) Le prix à payer est proportionnel au nombre de bouteilles de vin. ....
2) La masse d'un paquet de feuilles de papier est proportionnelle au nombre de feuilles. ....
3) Le salaire d'un instituteur est proportionnel au nombre d'élèves de sa classe. ....
4) Le prix d'un livre est proportionnel au nombre de pages. ....
5) Le prix des photocopies est proportionnel à son nombre. ....
6) Le prix d'une voiture est proportionnel à sa masse. ....
7) Le prix d'un vêtement est proportionnel à sa taille. ....
8) Le nombre de kilomètres parcourus en un temps donné par un cycliste est proportionnel à sa vitesse. ....
9) L'affranchissement d'une lettre est proportionnel à sa masse. ....
10) Le montant de la TVA est proportionnel au montant de la facture. ....
11) Le prix à payer est proportionnel au nombre de places de cinéma. ....
12) La taille d'un bébé est proportionnelle à son âge. ....
13) Le temps mis pour parcourir une distance est proportionnel à la vitesse. ....
14) Le périmètre d'un cercle est proportionnel à la mesure de son rayon. ....

b) Les tableaux ci-dessous sont des tableaux de proportionnalité : vrai ou faux ?

1°

x	3	5	7,5	9	5,5			
y	6	10	15	18	11			

....

2°

x	1	12	3	5	9			
y	1	144	9	25	81			

....

3°

x	12	30	15	6	24			
y	16	40	20	8	32			

....

4°

x	12	15	3	27	9			
y	4	5	1	9	3			

....

5°

x	4	24	7	3	13			
y	1	21	4	0	10			

....

6°

x	10	30	21	6	7			
y	15	45	31,5	9	10,5			

....

7°

x	12	20	36	4	100			
y	9	15	27	3	75			

....

8°

x	1	5	21	17	35			
y	3	7	23	19	37			

....

9°

x	10	30	15	8	40			
y	7	21	10,5	5,6	28			

....

Chapitre 8 • Proportionnalité

74

A. Grandeurs directement proportionnelles

1) Définition

Deux grandeurs directement proportionnelles sont deux grandeurs telles que si l'une est multipliée (divisée) par un nombre, alors l'autre est multipliée (divisée) par le même nombre.

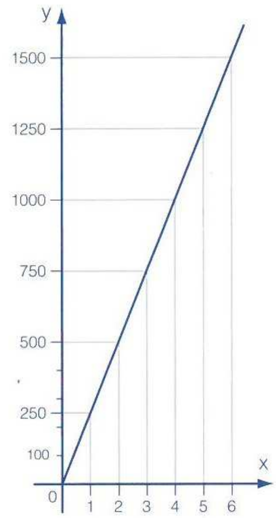
2) Propriété

Les points du graphique représentant deux grandeurs directement proportionnelles sont alignés avec l'origine du repère cartésien.

Exemples :

1re grandeur	x	1	2	3	4	5	6
2e grandeur	y	250	500	750	1000	1250	1500

1re grandeur	x	2	4	6	8	10	20
2e grandeur	y	75	150	225	300	375	750



B. Coefficient de proportionnalité

1) Définition

Le coefficient de proportionnalité (k) entre deux grandeurs directement proportionnelles (x et y) est le quotient de deux quantités correspondantes de y et de x.

Exemples : $k = \frac{250}{1} = \frac{500}{2} = \frac{750}{3} = \frac{1000}{4} = \frac{1250}{5} = \frac{1500}{6} = 250$

$k = \frac{75}{2} = \frac{150}{4} = \frac{225}{6} = \frac{300}{8} = \frac{375}{10} = \frac{750}{20} = 37,5$

2) **Remarques**

Une valeur de la grandeur y peut être trouvée en multipliant la valeur de x correspondante par le coefficient de proportionnalité.

Une valeur de la grandeur x peut être trouvée en divisant la valeur de y correspondante par le coefficient de proportionnalité.

Exemple

x	3	5
y	750	1250

$3 \xrightarrow{.\,250} 750$ $\qquad$ $1250 \xrightarrow{:\,250} 5$

C. Règle de trois et grandeurs directement proportionnelles

La règle de trois permet de résoudre les problèmes faisant intervenir deux grandeurs directement proportionnelles.

Pour résoudre ce type de problèmes, on peut adopter deux présentations différentes.

Exemple : Quatre kilos de pommes coûtent 6 €. Que coûtent 7 kilos ?

Présentation classique

	4 kg → 6 €	
: 4		: 4
	1 kg → 1,5 €	
. 7		. 7
	7 kg → 10,5 €	

Présentation par tableau de proportionnalité

	: 4	. 7

Masse (kg)	4	1	7
Prix (€)	6	1,5	10,5

: 4	. 7

Remarque :

Le passage à l'unité n'est pas toujours indispensable.

Exemple : Quatre kilos de pommes coûtent 6 €. Que coûtent 8 kilos ?
Et 6 kilos ?

Présentation par tableau

. 2

Masse (kg)	4	8
Prix (€)	6	12

. 2

Présentation par tableau

: 2 $\quad$. 3

Masse (kg)	4	2	6
Prix (€)	6	3	9

: 2 $\quad$. 3

Annexe F

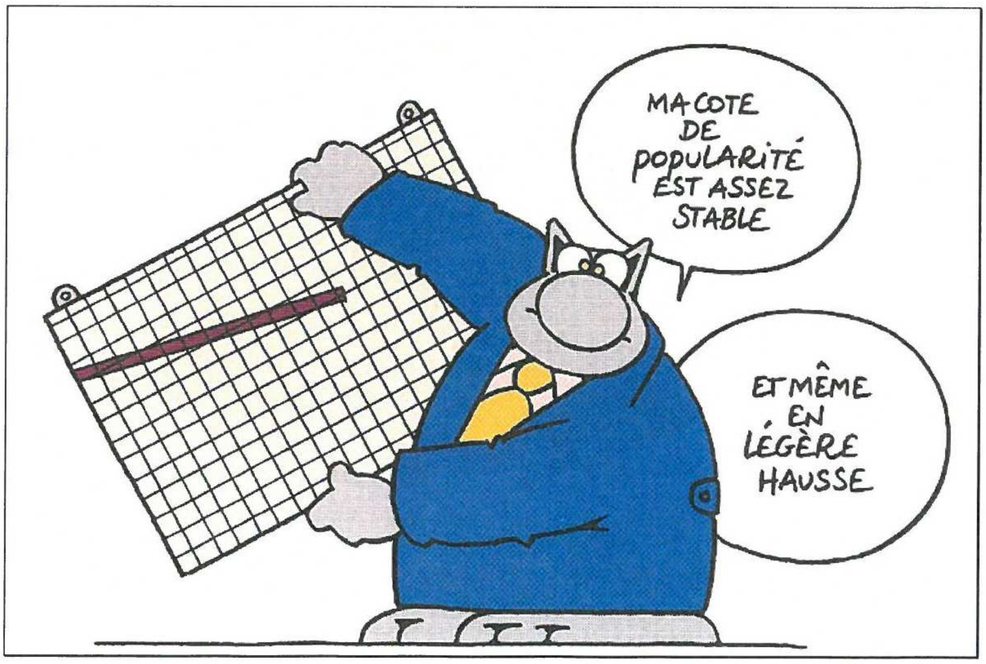
Séquence de cours suivie par les classes témoins de Sambreville

Cette annexe reprend, aux pages 290 à 306, le cours rassemblant activités, exercices et théorie réalisé par les enseignants de l'école de Sambreville, tel que présenté aux élèves des classes témoins.

Nom : Prénom :

Algèbre

Chapitre 9 : Proportionnalité



➢ Savoirs 🕮 :

- Définir un rapport
- Définir la proportionnalité
- Définir le coefficient de proportionnalité
- Citer les 2 techniques pour reconnaître 2 grandeurs proportionnelles

➢ Savoirs faire ✍ :

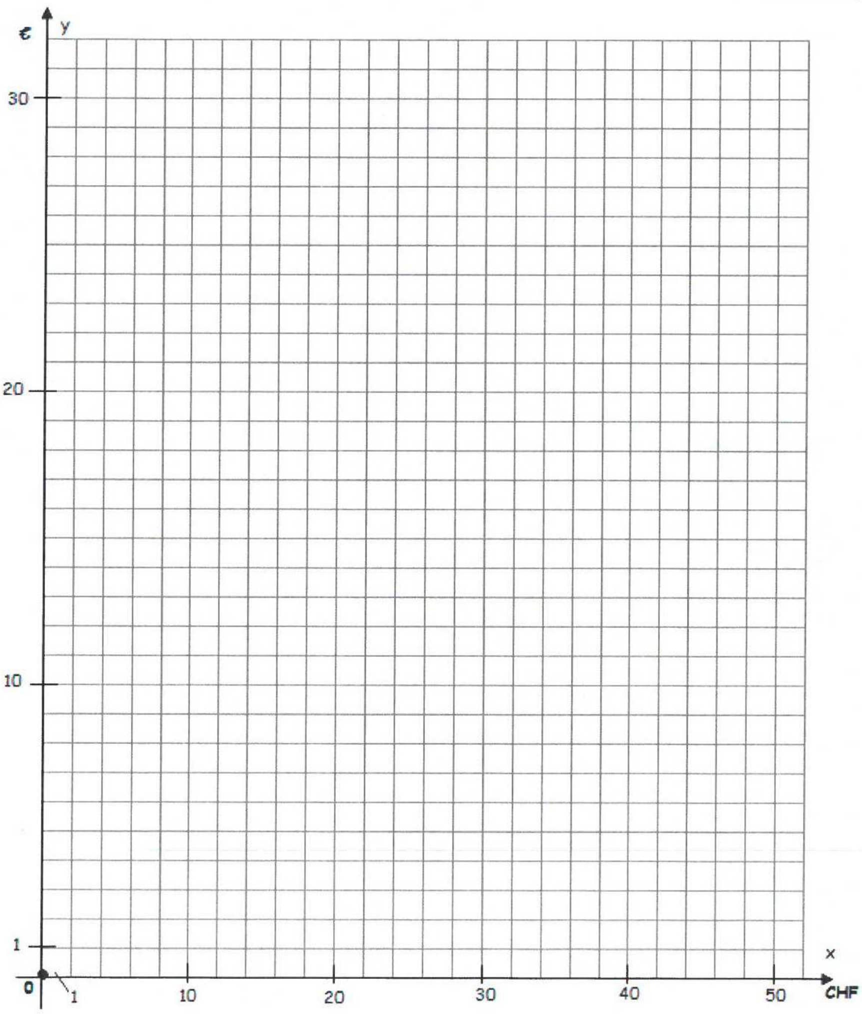
- Construire un graphique cartésien à partir d'un tableau de nombres
- Compléter un tableau de proportionnalité et trouver le coefficient de proportionnalité (k)
- Vérifier si un tableau de nombres est un tableau de proportionnalité et justifier
- Trouver le coefficient de proportionnalité d'un tableau de proportionnalité
- Vérifier graphiquement si 2 grandeurs sont proportionnelles et justifier
- Etablir des rapports sur base d'une situation
- Etablir un tableau de nombres sur base d'un schéma ou d'une situation

1. Activités pour découvrir

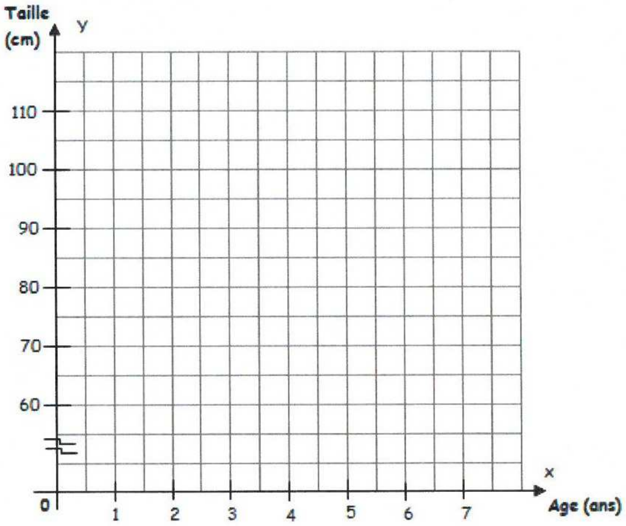
Activité 1 : Problème de change

a. Voici un tableau de conversion de francs suisses (CHF) en euros (€). Complète-le.
Ensuite, porte dans le plan cartésien les points ayant pour coordonnées les couples du tableau.

CHF	€
1	0,625
1 ,6	1
10	………
………	10
20	………
………	20
40	………
………	30



b. Voici un tableau montrant l'évolution de la taille d'un enfant en fonction de son âge. Porte dans le plan cartésien les points ayant pour coordonnées les couples du tableau.



Age	Taille (cm)
6 mois	67
1 an	76
2 ans	88
3 ans	96
4 ans	104
5 ans	110
6 ans	116

c. Compare les deux tableaux (a. et b.) : dans quel cas existe-t-il un même calcul qui permet de passer d'un nombre de la première colonne au nombre correspondant de la deuxième colonne ?

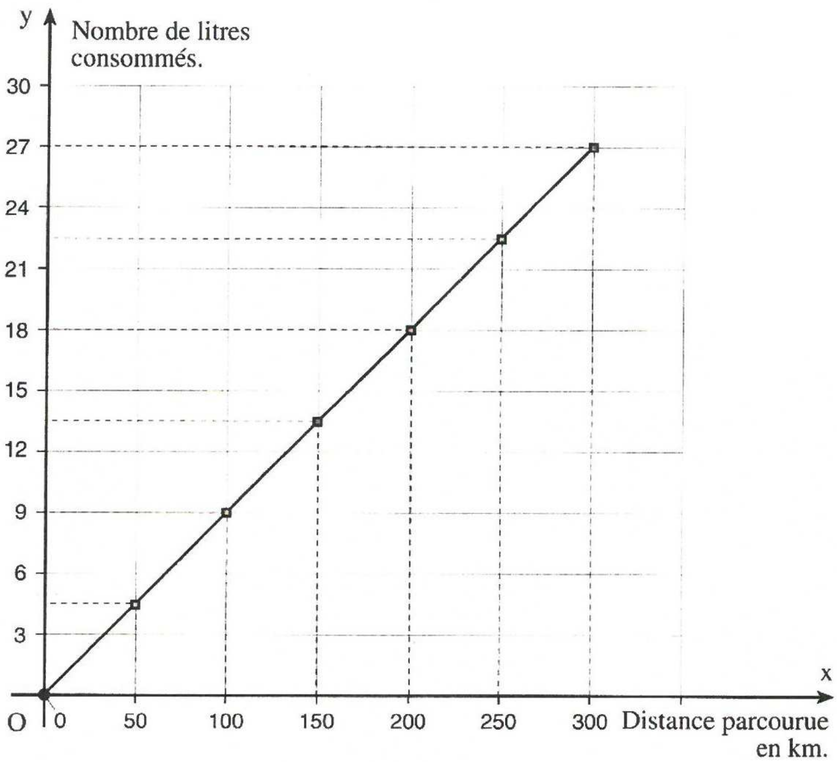
....

d. Compare les deux graphiques : dans quel cas les points appartiennent-ils à une même demi-droite partant de l'origine ?

....

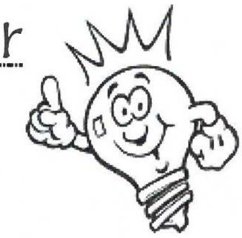
Activité 2 : Problème de consommation

a. Observe ce graphique et complète ensuite le tableau suivant.



Distance parcourue (km)	Essence consommée (litres)
50	......
100	......
......	13,5
200	......
......	22,5
300	......

2. Ce qu'il faut retenir
La synthèse



1. Définitions

• Un *rapport* est ……………………………………………………………………………………………………

………

Exemple : Si je paie 5,25 € pour 10 minutes d'appel, le rapport est : $\frac{5,25}{10}$

• Il y a ***proportionnalité*** entre deux ……………………………… lorsqu'il y a un lien mathématique entre elles deux. Ce lien qui les met en relation est appelé le ………………………………………………

…………………………………………………………… (il est le rapport des 2 grandeurs mathématiques).

• Le ***coefficient de proportionnalité*** est donc un ………………………………… représenté par la lettre k et par lequel il faut multiplier les valeurs de la première grandeur pour obtenir les valeurs correspondantes de la deuxième grandeur.

• Pour comparer plus facilement 2 grandeurs proportionnelles, on les présente sous la forme d'un tableau, appelé ……………………………………………………………………………

Exemple :

Soit les deux grandeurs proportionnelles :
- la quantité de crayons achetés
- le prix total à payer

Nous représentons les valeurs de ces deux grandeurs dans le tableau de proportionnalité ci-dessous :

Première grandeur placée dans la première colonne du tableau.

Nombre de crayons	Prix d'achat total
1	0,45 €
8	3,6 €
2	0,9 €

Deuxième grandeur placée dans la deuxième colonne du tableau.

× 8

× 0,45

Je suis k ! Le coefficient de proportionnalité.

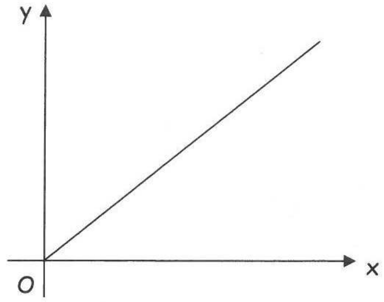
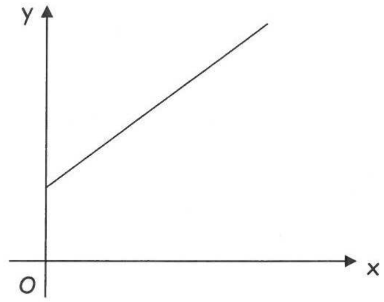
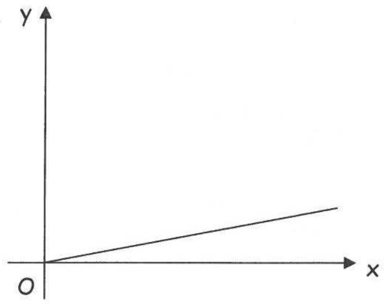
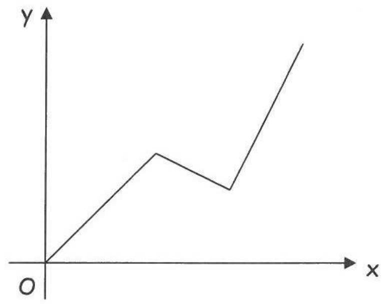
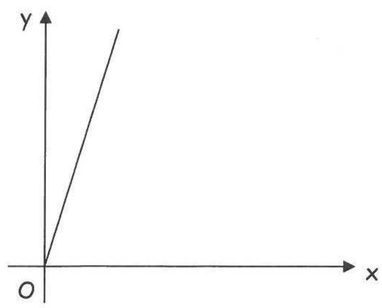
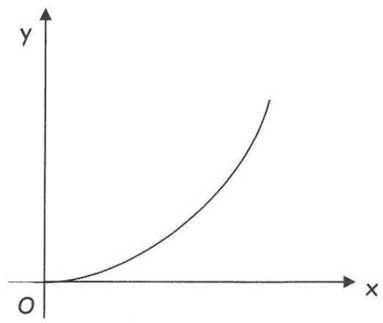
Si on multiplie par 8 (ou on : par 4) le nombre de crayons, le prix d'achat est aussi multiplié par 8 (ou : par 4)

De manière générale : $k = \frac{y}{x}$

Pour me trouver, on calcule les rapports des 2 grandeurs : $\frac{0,45}{1} = \frac{3,6}{8} = \frac{0,9}{2} = 0,45$

2. Proportionnalité et graphique cartésien

Lorsque l'on représente l'évolution des 2 grandeurs proportionnelles sur un graphique cartésien, on obtient ***<u>une demi-droite partant de l'origine des axes</u>*** (le point (0, 0)).

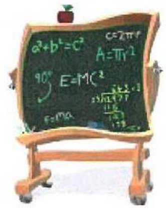
Situations de proportionnalité	Situations de non proportionnalité
	
	
	

3. Reconnaître la proportionnalité

Pour reconnaître si deux grandeurs sont proportionnelles, il y a deux techniques :

- Chercher s'il y a un coefficient de proportionnalité (k) en calculant les rapports des 2 grandeurs
- Observer sur le graphique cartésien s'il s'agit bien d'une demi-droite partant de l'origine.

3. S'exercer



1. Les grandeurs suivantes sont-elles proportionnelles ?
Si tu dis non, explique ta réponse.

a. La taille d'un enfant et son poids :...

....

b. Le prix d'oranges et le nombre de kg achetés :...

....

c. Le nombre d'ouvriers et le temps nécessaire pour accomplir un certain travail :

....

....

2. a. Trouve deux exemples nouveaux de grandeurs proportionnelles.

....

....

b. Trouve deux exemples nouveaux de grandeurs non proportionnelles.

....

....

3. Est-il vrai que les tableaux suivants affichent des valeurs de grandeurs proportionnelles ? Réponds par vrai ou faux et justifie.

a. Vrai ou Faux ? ....

X	Y
2	8
3	12
4	16
10	40

car ....

....

b. Vrai ou Faux ? ……………………………

X	Y
3	2
1	$\frac{2}{3}$
9	6
27	18

car …………………………………………………………………………………………………

……

c. Vrai ou Faux ? ……………………………

X	Y
10	2,5
20	5
30	7
40	10

car …………………………………………………………………………………………………

……

d. Vrai ou Faux ? ……………………………

X	Y
1	3
2	4
3	5
4	6

car …………………………………………………………………………………………………

……

4. a. Complète les tableaux suivants sachant que les grandeurs X et Y sont proportionnelles.

X	Y
1	3
2	6
4, 5	___
___	21
k =	

X	Y
___	3
3	___
4	6
7, 5	___
k =	

X	Y
2	___
$\frac{3}{5}$	2
4	___
___	3
k =	

X	Y
0, 1	___
___	2, 3
2	___
10	23
k =	

b. Complète les tableaux de proportionnalité suivants en tenant compte du coefficient de proportionnalité.

X	Y
2	____
____	18
4,7	____
$k = 3$	

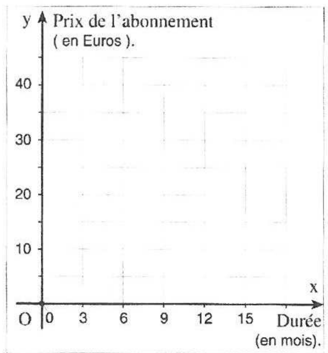
X	Y
____	7,2
4	____
5,1	____
$k = 2,4$	

X	Y
$\frac{1}{2}$	____
$\frac{4}{3}$	____
____	6
$k = \frac{3}{4}$	

5. Voici des tableaux proposant des valeurs de deux grandeurs.
Vérifie graphiquement si les grandeurs proposées sont proportionnelles.
Justifie !

a. Chez le libraire :

Durée (en mois) de l'abonnement à une revue	**Prix** en € de l'abonnement
3	10
6	20
9	30
12	35
15	40

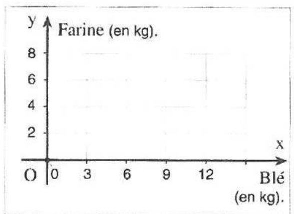


....

....

b. Chez le meunier :

Poids du blé à moudre (en kg)	**Poids** de la farine obtenue (en kg)
0	0
3	2
6	4
9	6
12	8



....

....

6. Au « Superbricoleur », les portes d'armoires en sapin sont vendues aux prix suivants :

Dimensions :	
38 x 2 x 61 (cm)	8,65€
38 x 2 x 76 (cm)	9,89€
38 x 2 x 152,4 (cm)	19,06€

Les prix sont-ils proportionnels à la hauteur des portes ? ....

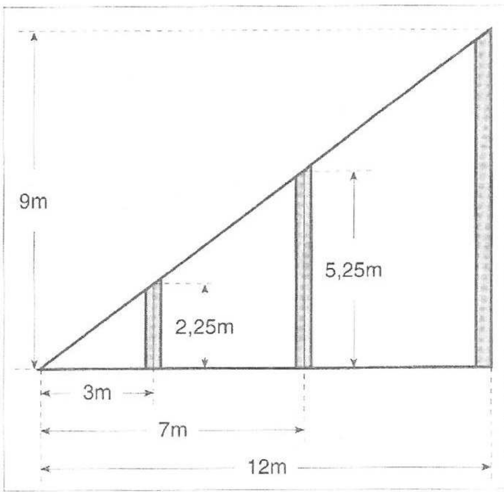
Pourquoi ?..

....

7. Voici le schéma d'un bâtiment en toit en pente. On y a indiqué la hauteur des poutres et leur emplacement mesuré au sol.

a. Complète le tableau suivant.

Distance	Hauteur
....	....
....	....
....	....

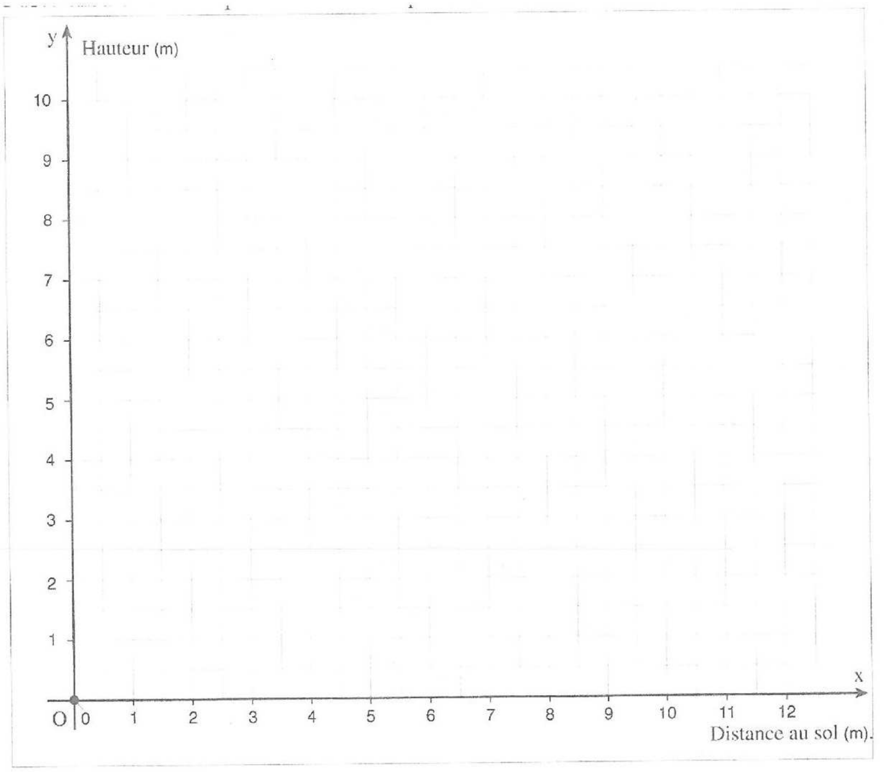


b. Porte ensuite dans le plan cartésien de la page suivante les points dont les coordonnées sont les couples du tableau.

c. Observe le graphique que tu viens de réaliser. Les deux grandeurs sont-elles proportionnelles ? A quoi le vois-tu ?

....

....



8. a. Dresse un tableau de correspondance entre la longueur du côté d'un carré et son périmètre (choisis 5 longueurs).
Porte ensuite dans un plan cartésien les points dont les coordonnées sont les couples du tableau.

b. Dresse un tableau de correspondance entre la longueur du côté d'un carré et son aire.
Porte dans un plan cartésien les points dont les coordonnées sont les couples du tableau.

c. Compare les deux tableaux : dans quel cas existe-t-il un calcul qui permet de passer d'un nombre de la colonne de gauche au nombre correspondant de la colonne de droite ? Que peux-tu en conclure pour les deux grandeurs ?

....

....

d. Compare les deux graphiques : dans quel cas les points appartiennent-ils à une même demi-droite partant de l'origine ? Qu'en conclus-tu pour les deux grandeurs ?

....

....

e. Dans quel cas les points ne sont-ils pas alignés avec l'origine ? Qu'en conclus-tu pour les deux grandeurs ?

....

....

4. Exercices de dépassement

1. Vrai ou Faux ?

- Le prix à payer est proportionnel au nombre de bouteilles de vin achetées. ....
- La masse d'un paquet de feuilles de papier est proportionnelle au nombre de feuilles. ....
- Le salaire d'un instituteur est proportionnel au nombre d'élèves de sa classe. ....
- Le prix d'un livre est proportionnel au nombre de pages. ....
- Le prix des photocopies est proportionnel au nombre de copies. ....
- Le prix d'une voiture est proportionnel à sa masse. ....
- Le prix d'un vêtement est proportionnel à sa taille. ....
- Le nombre de km parcourus en un temps donné par un cycliste est proportionnel à sa vitesse. ....
- L'affranchissement d'une lettre est proportionnel à sa masse. ....
- Le montant de la TVA est proportionnel au montant de la facture. ......
- Le prix à payer est proportionnel au nombre de places de cinéma. ......
- La taille d'un bébé est proportionnel à son âge. ....
- Le temps mis pour parcourir une distance est proportionnel à sa vitesse. ....
- Le périmètre d'un cercle est proportionnel à la mesure de son rayon. ....

2. Les tableaux suivants sont des tableaux de proportionnalité. Vrai ou Faux ? Justifie ta réponse.

a)

x	1	5	21	17	35
y	3	7	23	19	37

b)

x	10	30	15	8	40
y	7	21	10,5	5,6	28

c)

x	13	7	5	4	3
y	650	350	250	200	150

d)

x	200	10	9	180	4
y	20	100	0,9	18	40

e)

x	1	2	3	4	7
y	1/4	1/2	3/4	1	7/4

3. Complète les tableaux suivants sachant que les grandeurs X et Y sont proportionnelles.

1)

x		10	4	26	
y	21		6		45

k = ...

2)

x		60	21	135	
y	70		14		154

k = ...

3)

x	15	5		12	
y	36		60		7,2

k = ...

4)

x	12	15	30		
y		375		950	250

k = ...

4. Voici le prix, la superficie et le nombre de pièces de trois appartements :

Appartement 1		Appartement 2		Appartement 3	
132 572 euros		150 788 euros		122 452 euros	
5 pièces	131 m² habitable	6 pièces	149 m² habitable	4 pièces	121 m² habitable

a. Y a-t-il proportionnalité entre le prix et la superficie ? Vérifie par tableau, graphiquement et élabore une conclusion.

b. Y a-t-il proportionnalité entre le prix et le nombre de pièces ? Vérifie par tableau, graphiquement et élabore une conclusion.

c. Y a-t-il proportionnalité entre la superficie et le nombre de pièces ? Vérifie par tableau, graphiquement et élabore une conclusion.

Solutions des exercices de dépassement

1. V - V - F - F - V - F - F - V - F - V - V - F - F - V

2. Faux car $\frac{3}{1} \neq \frac{7}{5}$

   Vrai car $k = \frac{7}{10}$

   Vrai car k = 50

   Faux car $\frac{20}{200} \neq \frac{100}{10}$

   Vrai car $k = \frac{1}{4}$

3.

1)

x	14	10	4	26	30
y	21	15	6	39	45

k = $\frac{6}{4} = \frac{3}{2}$

2)

x	105	60	21	135	231
y	70	40	14	90	154

k = $\frac{14}{21} = \frac{2}{3}$

3)

x	15	5	25	12	3
y	36	12	60	$\frac{144}{5}$ 28,8	7,2

k = $\frac{36}{15} = \frac{12}{5}$

4)

x	12	15	30	38	10
y	300	375	750	950	250

k = $\frac{375}{15} = 25$

4. 1. Conclusion 1: Oui, le prix des appartements est proportionnel à la superficie car k = 1012.
   Conclusion 2 : Le prix et la superficie des appartements sont proportionnels car le graphique est une demi-droite partant de l'origine.

   2. Conclusion 1 : Non, le prix et le nombre de pièces ne sont pas proportionnels car il n'y a pas de coefficient de proportionnalité
   Conclusion 2 : Le prix et le nombre de pièces ne sont pas proportionnels car le graphique n'est pas une demi-droite partant de l'origine.

   3. Conclusion 1 : Non, la superficie et le nombre de pièces ne sont pas proportionnels car il n'y a pas de coefficient de proportionnalité.
   Conclusion 2 : Il n'y a pas de proportionnalité entre la superficie et le nombre de pièces car le graphique n'est pas une demi-droite partant de l'origine.

Annexe G

Questionnaire présenté en 6^e primaire, juin 2009

Cette annexe est composée des questions posées dans le but de vérifier si des élèves d'une classe de 6^e primaire utilisent un modèle approprié pour répondre. Elles sont rassemblées selon la catégorisation dont il est fait part à la section 1.1.5. Cette annexe reprend également le livret tel qu'il a été présenté aux élèves.

type (spécificité)	question	n^o
quadratique	Si un carré a une aire de 1 cm^2, quelle sera l'aire du carré dont le côté est 3 fois plus long que celui du premier carré ?	Q.1
proportionnalité	Une paire de ciseaux pèse 50 grammes. Quel est le poids de deux paires de ciseaux ?	Q.2
proportionnalité	Une bouteille d'eau de 2 litres coûte 1 euro. Combien coûtent 5 de ces bouteilles d'eau de 2 litres ?	Q.5
proportionnalité	Une machine imprime 50 pages en 3 minutes. Combien de temps lui faut-il pour imprimer 250 pages ?	Q.8
proportionnalité	Un litre d'essence coûte 1,40 euro pour le moment. Combien dois-je payer si je mets 20 litres d'essence dans le réservoir de ma voiture ?	Q.13
proportionnalité (coefficient de proportionnalité non entier)	Pour faire de la mousse au chocolat pour 4 personnes, il faut 200 grammes de beurre. Combien de grammes de beurre faudra-t-il pour faire de la mousse au chocolat pour 7 personnes ?	Q.3
proportionnalité (coefficient de proportionnalité non entier)	Au magasin, j'ai acheté 3 kg de pommes et ça m'a coûté 5 euros. Combien aurais-je payé si j'avais acheté 4,5 kg de ces pommes ?	Q.10

proportionnalité inverse	Un rectangle dont la longueur et la largeur font respectivement 6 cm et 4 cm a une aire égale à 24 cm^2. Si on veut un rectangle de même aire dont la longueur fait 12 cm, quelle sera la largeur de ce rectangle ?	Q.6
proportionnalité inverse	Si 8 ouvriers ont été nécessaires sur un chantier pour construire une maison en 10 mois, combien d'ouvriers auraient été nécessaires pour la construire en 5 mois ?	Q.14
constant	Un bébé reste environ 9 mois dans le ventre de sa maman avant de naître. Environ combien de temps restent des triplés dans le ventre de leur mère ?	Q.4
constant	Sur une corde à linge, une chemise prend 1 heure pour sécher. Combien de temps faut-il pour faire sécher 3 chemises placées les unes à côté des autres sur cette corde ?	Q.9
unsolvable (pseudo-prop.)	Un nouveau-né de 50 cm pèse 4 kg. Quel sera son poids quand il mesurera 1,50 mètre ?	Q.7
unsolvable (pseudo-prop.)	Carl Lewis, ancien champion du monde du 100 mètres, l'a couru en 10 secondes en 1984. Combien de temps lui aurait-il fallu pour courir un marathon de 50 km ?	Q.11
unsolvable (absurde)	Il a fallu 5 lancers à un joueur de fléchettes pour atteindre le centre de la cible. Combien de lancers faudra-t-il à son voisin pour atteindre le centre de la cible ?	Q.12

Le … juin 2009

École :

Classe :

N° :

Répondez aux questions suivantes et justifiez votre réponse

CREM

FUNDP NAMUR

Si un carré a une aire de 1 cm², quelle sera l'aire du carré dont le côté est 3 fois plus long que celui du premier carré ?

(N'oubliez pas de justifier votre réponse)

Une paire de ciseaux pèse 50 grammes. Quel est le poids de deux paires de ciseaux ?

Pour faire de la mousse au chocolat pour 4 personnes, il faut 200 grammes de beurre. Combien de grammes de beurre faudra-t-il pour faire de la mousse au chocolat pour 7 personnes ?

4

Un bébé reste environ 9 mois dans le ventre de sa maman avant de naître. Environ combien de temps restent des triplés dans le ventre de leur mère ?

Une bouteille d'eau de 2 litres coûte 1 euro. Combien coûtent 5 de ces bouteilles d'eau de 2 litres ?

5

Un rectangle dont la longueur et la largeur font respectivement 6 cm et 4 cm a une aire égale à 24 cm². Si on veut un rectangle de même aire dont la longueur fait 12 cm, quelle sera la largeur de ce rectangle ?

Un nouveau né de 50 cm pèse 4 kg. Quel sera son poids quand il mesurera 1,50 mètre ?

6

Une machine imprime 50 pages en 3 minutes. Combien de temps lui faut-il pour imprimer 250 pages ?

Sur une corde à linge, une chemise prend 1 heure pour sécher. Combien de temps faut-il pour faire sécher 3 chemises placées les unes à côté des autres sur cette corde ?

7

Au magasin, j'ai acheté 3 kg de pommes et ça m'a coûté 5 euros. Combien aurais-je payé si j'avais acheté 4,5 kg de ces pommes ?

Carl Lewis, ancien champion du monde du 100 mètres, l'a couru en 10 secondes en 1984. Combien de temps lui aurait-il fallu pour courir un marathon de 50 km ?

8

Si 8 ouvriers ont été nécessaires sur un chantier pour construire une maison en 10 mois. Combien d'ouvriers auraient été nécessaires pour la construire en 5 mois ?

10

Il a fallu 5 lancers à un joueur de fléchettes pour atteindre le centre de la cible. Combien de lancers faudra-t-il à son voisin pour atteindre le centre de la cible ?

Un litre d'essence coûte 1,40 euro pour le moment. Combien dois-je payer si je mets 20 litres d'essence dans le réservoir de ma voiture ?

9

Merci pour votre
participation !

12

Annexe H

Pré-test proposé dans l'une des classes de mise à l'épreuve de la séquence (Bx_1), octobre 2009

Cette annexe reprend les questions posées dans une deuxième version du pré-test. Elles sont rassemblées selon la catégorisation établie.

type (spécificité)	question	n°
quadratique	Si un carré a une aire de 4 cm^2, quelle sera l'aire du carré dont le côté est 3 fois plus long que celui du premier carré ?	Q.3
proportionnalité	Une paire de ciseaux pèse 50 grammes. Quel est le poids de deux paires de ciseaux ?	Q.1
proportionnalité	Une bouteille d'eau de deux litres coûte 1 euro. Combien coûtent 5 de ces bouteilles d'eau de deux litres ?	Q.5
proportionnalité	Une machine imprime 50 pages en 3 minutes. Combien de temps lui faut-il pour imprimer 250 pages ?	Q.7
proportionnalité	Un litre d'essence coûte 1,20 euro pour le moment. Combien dois-je payer si je mets 20 litres d'essence dans le réservoir de ma voiture ?	Q.12
proportionnalité (coefficient de proportionnalité non entier)	Pour faire de la mousse au chocolat pour 4 personnes, il faut 200 grammes de beurre. Combien de grammes de beurre faudra-t-il pour faire de la mousse au chocolat pour 7 personnes ?	Q.4
proportionnalité (coefficient de proportionnalité non entier)	Au magasin, j'ai acheté 3 kg de pommes et ça m'a coûté 4 euros. Combien aurais-je payé si j'en avais acheté 4,5 kg ?	Q.10

proportionnalité inverse	Quatre amis s'achètent ensemble un gros paquet de chocolats. Chacun paie 2 euros. S'ils avaient été huit amis, combien auraient-ils payé chacun pour ce paquet de chocolat ?	Q.6
proportionnalité inverse	Si 8 ouvriers ont été nécessaires sur un chantier pour construire une maison en 10 mois, combien d'ouvriers auraient été nécessaires pour la construire en 5 mois ?	Q.13
constant	Un bébé reste environ 9 mois dans le ventre de sa maman avant de naître. Environ combien de temps restent des triplés dans le ventre de leur mère ?	Q.2
constant	Sur une corde à linge, une chemise prend 1 heure pour sécher. Combien de temps faut-il pour faire sécher 3 chemises placées les unes à côté des autres sur cette corde ?	Q.9
affin	Yvan va chez un ami qui habite à 150 m de chez lui. Ensuite, il rentre à la maison où sa maman lui demande d'aller chercher des œufs à la ferme. Revenu de la ferme, Yvan tombe et casse les œufs. Il doit donc retourner à la ferme une 2e fois. Sur la journée, Yvan a marché en tout 600 m. Si sa maman lui avait demandé d'aller une 3e fois à la ferme pour chercher du lait, combien de mètres aurait-il marché en tout ?	Q.8
affin	J'ai été à la foire en bus et le trajet aller-retour m'a coûté 3 euros. À la foire, chaque activité coûte le même prix. J'ai fait 6 activités et ma journée complète – trajet compris – m'a coûté 24 euros. Combien ma journée m'aurait-elle coûté si j'avais fait seulement 4 activités à la foire en y allant aussi en bus ?	Q.11

Annexe I

Pré-test proposé dans les classes de l'école de Namur, mars 2010

Cette annexe reprend les questions du pré-test, posées lors de la première expérimentation de la séquence complète. Elles sont rassemblées selon la catégorisation établie.

type (spécificité)	question	n°
quadratique	Un carré ABCD a une aire de 9 cm^2. Le côté d'un carré A'B'C'D' est 2 fois plus long que le côté du carré ABCD. Quelle est l'aire du carré A'B'C'D' ?	Q.3
proportionnalité	Une paire de ciseaux pèse 50 grammes. Quel est le poids de deux paires de ciseaux ?	Q.1
proportionnalité	Un litre d'essence coûte 1,20 € pour le moment. Combien dois-je payer si je mets 20 litres d'essence dans le réservoir de ma voiture ?	Q.10
proportionnalité (long)	Mon frère est allé au grand magasin pour acheter des bouteilles d'eau. Une bouteille d'eau de deux litres coûte 1 €. Il va dans ce magasin car, dans un autre commerce, une bouteille d'eau de deux litres coûte 1,20 €. Il prend 5 bouteilles d'eau de deux litres dans son panier. Il ne fait aucun autre achat dans ce grand magasin. Combien doit-il payer à la caissière pour ces 5 bouteilles d'eau ?	Q.12
proportionnalité (coefficient de proportionnalité non entier)	Pour faire de la mousse au chocolat pour 4 personnes, il faut 200 grammes de beurre. Combien de grammes de beurre faudra-t-il pour faire de la mousse au chocolat pour 7 personnes ?	Q.4

proportionnalité (coefficient de proportionnalité non entier)	Au magasin, j'ai acheté 3 kg de pommes et ça m'a coûté 4 €. Combien aurais-je payé si j'en avais acheté 4,5 kg ?	Q.8
proportionnalité inverse	Quatre amis achètent ensemble un gros paquet de chocolats. Cela leur revient à 2 € chacun. S'ils avaient été huit amis pour payer le même paquet de chocolats, combien paierait chaque ami ?	Q.5
proportionnalité inverse	Pour construire une maison en 10 mois, le chef de chantier prévoit 8 ouvriers. Combien d'ouvriers le chef de chantier doit-il prévoir pour construire une maison semblable en 5 mois ?	Q.11
constant	Un bébé reste environ 9 mois dans le ventre de sa maman avant de naître. Environ combien de temps restent des triplés dans le ventre de leur mère ?	Q.2
constant	Sur une corde à linge, une chemise prend 1 heure pour sécher. Combien de temps faut-il pour faire sécher 3 chemises placées les unes à côté des autres sur cette corde ?	Q.7
affin	Je suis allé au magasin avec mes parents qui m'ont acheté une console de jeu pour mon anniversaire. La console coûtait 160 €. En plus, ils m'ont acheté 2 jeux. Tous les jeux de cette console coûtent le même prix. Ils ont payé pour le tout 200 €. Combien auraient-ils payé s'ils m'avaient acheté 4 jeux en plus de la console ?	Q.6
affin	Charles est allé au bowling avec des amis. La location de ses chaussures lui a coûté 4 € pour la soirée. Chaque partie de bowling coûte le même prix et il a joué 2 parties. La soirée de bowling lui a coûté 16 € en tout. Combien sa soirée aurait-elle coûté s'il avait joué 3 parties ?	Q.9

Annexe J

Pré-test proposé dans les classes de l'école de Sambreville, février 2011

Cette annexe reprend les questions du pré-test, posées lors de la seconde expérimentation de la séquence complète. Elles sont rassemblées selon la catégorisation établie.

type (spécificité)	question	n°
quadratique	Un carré ABCD a une aire de 9 cm^2. Le côté d'un carré A'B'C'D' est 2 fois plus long que le côté du carré ABCD. Quelle est l'aire du carré A'B'C'D' ?	Q.3
quadratique (contexte, carré)	Arod, un cheval, est dans un pré en forme de carré de 15 mètres de côté. Il mange toute l'herbe de son pré en 3 jours. Diesel, un cheval qui a le même appétit, est dans un pré carré dont le côté est 2 fois plus long que celui d'Arod. Combien de jours faudra-t-il à Diesel pour manger toute l'herbe de son pré ?	Q.11
proportionnalité	Une paire de ciseaux pèse 50 grammes. Quel est le poids de deux paires de ciseaux ?	Q.1
proportionnalité	Un litre d'essence coûte 1,20 € pour le moment. Je mets 20 litres d'essence dans le réservoir de ma voiture. Combien dois-je payer ?	Q.9
proportionnalité (coefficient de proportionnalité non entier)	Pour faire de la mousse au chocolat pour 4 personnes, il faut 200 grammes de beurre. Combien de grammes de beurre faudra-t-il pour faire de la mousse au chocolat pour 7 personnes ?	Q.4
proportionnalité inverse	Avec un gros sac de bonbons, j'ai pu faire 6 sachets de 300 grammes. Combien de sachets de 100 grammes aurais-je pu faire ?	Q.5

proportionnalité inverse	Dans une usine, 12 personnes doivent travailler pendant 4 jours pour assembler une voiture. Si l'on avait 2 jours pour assembler cette voiture, combien de personnes devraient travailler ?	Q.10
constant	Dans mon jardin, je plante 1 graine de tournesol. Il faut 1 mois pour que le tournesol fleurisse. Si j'avais planté 2 graines de tournesol, combien de temps aurait-il fallu pour qu'ils fleurissent ?	Q.2
constant	Sur une corde à linge, une chemise prend 1 heure pour sécher. Combien de temps faut-il pour faire sécher 3 chemises placées les unes à côté des autres sur cette corde ?	Q.7
affin	Je suis allé au magasin avec mes parents qui m'ont acheté une console de jeu pour mon anniversaire. La console coûtait 160 €. En plus, ils m'ont acheté 2 jeux. Tous les jeux de cette console coûtent le même prix. Ils ont payé pour le tout 200 €. Combien auraient-ils payé s'ils m'avaient acheté 4 jeux en plus de la console ?	Q.6
affin	Charles est allé au zoo avec Hugo. L'entrée au zoo coûte 10 € à chacun. Charles a acheté 5 paquets de cacahuètes pour nourrir les animaux. Il a payé sa sortie au zoo 20 € en tout. Hugo a acheté 3 paquets de cacahuètes. Combien Hugo a-t-il payé pour sa sortie au zoo ?	Q.8

Annexe K

Volet « situations » (apprentissage de la proportionnalité) du post-test présenté dans les classes de l'école de Namur, avril 2010

Cette annexe reprend les douze situations du volet « situations » (apprentissage de la proportionnalité) du post-test, présentées lors de la première expérimentation de la séquence complète.

La question était commune à toutes les situations.

> Les grandeurs des situations ci-dessous sont-elles proportionnelles ou non ?
>
> Pour chaque situation, entoure ce que tu penses (*proportionnalité* ou *non-proportionnalité*) et explique ton choix.

Situation 1
Agrandissements de photos

10 cm × 15 cm
13 cm × 18 cm
20 cm × 23 cm
30 cm × 45 cm
40 cm × 60 cm

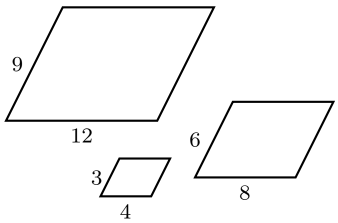
Proportionnalité ou *non-proportionnalité ?*
car

Situation 2
Jean a repris dans le tableau ci-dessous sa taille à différents âges

Âge	10	12	14	16
Taille (en m)	1,40	1,55	1,68	1,74

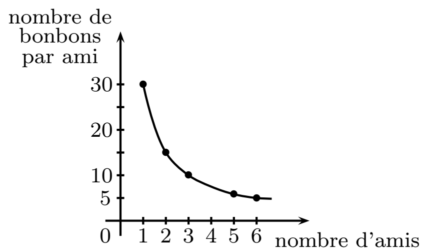
Proportionnalité ou *non-proportionnalité ?*
car

Situation 3
Des parallélogrammes



Proportionnalité ou *non-proportionnalité ?*
car

Situation 4
Partage de 30 bonbons entre amis



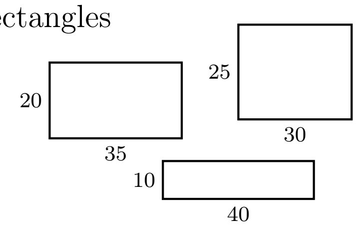
Proportionnalité ou *non-proportionnalité ?*
car

Situation 5
Tableau de correspondance entre la longueur du pied et la pointure de la chaussure

Longueur (en cm)	18	22	26	28
Pointure	27	33	39	42

Proportionnalité ou *non-proportionnalité ?*
car

Situation 6
Des rectangles



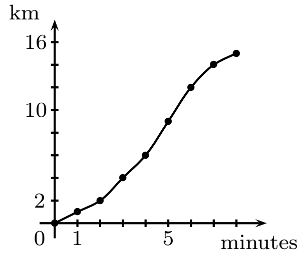
Proportionnalité ou *non-proportionnalité ?*
car

Situation 7
Âge de deux amis à différentes dates

Âge Pierre	Âge Marc
1	4
3	6
5	8
7	10
9	12

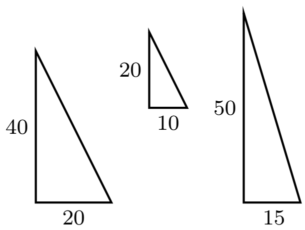
Proportionnalité ou *non-proportionnalité ?*
car

Situation 8
Vitesse d'un train entre deux gares



Proportionnalité ou *non-proportionnalité ?*
car

Situation 9
Des triangles rectangles



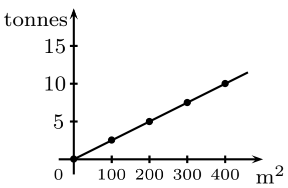
Proportionnalité ou *non-proportionnalité ?*
car

Situation 10
Valeur du dollar au 10 février 2010

Prix en €	Prix en $
1	1,3753
5	6,8765
10	13,753
20	27,506
50	68,765
100	137,53

Proportionnalité ou *non-proportionnalité ?*
car

Situation 11
Production de céréales en fonction de la taille d'un champ



Proportionnalité ou *non-proportionnalité ?*
car

Situation 12
Pour la rentrée scolaire, un supermarché annonce des prix sacrifiés sur les fournitures scolaires

1 bloc de feuilles pour 1,50 €
5 blocs de feuilles pour 6 €
10 blocs de feuilles pour 12 €

Proportionnalité ou *non-proportionnalité ?*
car

Annexe L

Volet « situations » (apprentissage de la proportionnalité) du post-test présenté dans les classes de l'école de Sambreville, mars 2011

Cette annexe reprend les douze situations du volet « situations » (apprentissage de la proportionnalité) du post-test, présentées lors de la deuxième expérimentation de la séquence complète.

La question était commune à toutes les situations.

> Les grandeurs des situations ci-dessous sont-elles proportionnelles ou non ?
>
> Pour chaque situation, entoure ce que tu penses (*proportionnalité* ou *non-proportionnalité*) et explique ton choix.

Situation 1

Agrandissements de photos

10 cm × 15 cm
13 cm × 18 cm
20 cm × 23 cm
30 cm × 45 cm
40 cm × 60 cm

Proportionnalité ou *non-proportionnalité ?*

car

Situation 2

Réduction (en €) en fonction du prix de différents objets

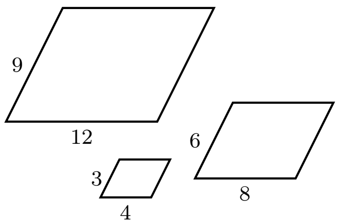
Prix (en €)	Réduction (en €)
2	0,5
6	1,5
10	2,5
12	3

Proportionnalité ou *non-proportionnalité ?*

car

Situation 3

Des parallélogrammes

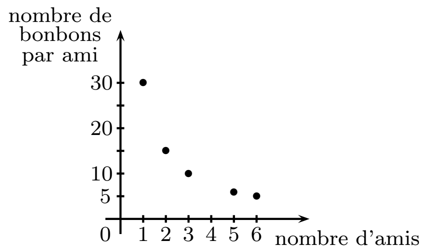


Proportionnalité ou *non-proportionnalité ?*

car

Situation 4

Partage de 30 bonbons entre amis



Proportionnalité ou *non-proportionnalité ?*

car

Situation 5

Tableau de correspondance entre la longueur du pied et la pointure de la chaussure

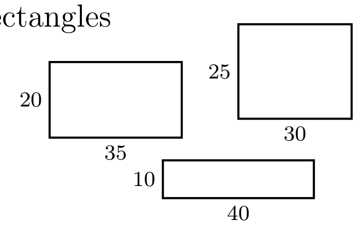
Longueur (en *cm*)	18	22	26	28
Pointure	27	33	39	42

Proportionnalité ou *non-proportionnalité ?*

car

Situation 6

Des rectangles



Proportionnalité ou *non-proportionnalité ?*

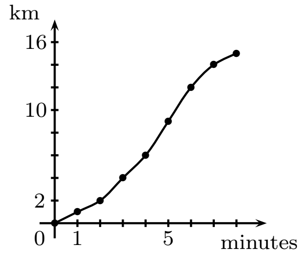
car

Situation 7
Âge de deux amis à différentes dates

Âge Pierre	Âge Marc
1	4
3	6
5	8
7	10
9	12

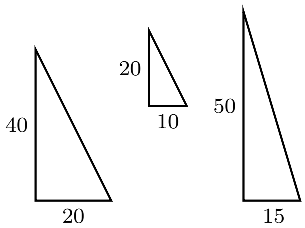
Proportionnalité ou *non-proportionnalité ?*
car

Situation 8
Vitesse d'un train entre deux gares



Proportionnalité ou *non-proportionnalité ?*
car

Situation 9
Des triangles rectangles



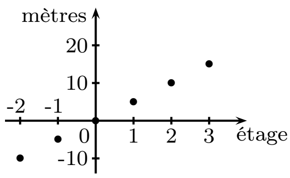
Proportionnalité ou *non-proportionnalité ?*
car

Situation 10
Les unités de mesure utilisées en Angleterre ne sont pas les mêmes qu'en Belgique. Par exemple, ils mesurent les distances en miles et pas en km. Voici un tableau de conversion de miles en km.

Miles	1	5	10	20
Km	1,609	8,045	16,09	32,18

Proportionnalité ou *non-proportionnalité ?*
car

Situation 11
Numéro d'un étage et niveau correspondant (en mètres) par rapport au rez-de-chaussée



Proportionnalité ou *non-proportionnalité ?*
car

Situation 12
Pour la rentrée scolaire, un supermarché annonce des prix sacrifiés sur les fournitures scolaires

1 bloc de feuilles pour 1,50 €
5 blocs de feuilles pour 6 €
10 blocs de feuilles pour 12 €

Proportionnalité ou *non-proportionnalité ?*
car

Annexe **M**

Résultats détaillés des tests proposés dans les classes de l'école de Sambreville

Cette annexe regroupe les tableaux croisés dynamiques réalisés à partir des résultats des pré-test et post-test à court terme dans les classes expérimentales et témoins de l'école de Sambreville. Lors de ces analyses, les classes expérimentales ont été appelées classes « test ».

Témoin/Test	Test

Nombre de Q.1 ciseaux - pré	**post-test**			
Pré-test	**--**	**v...**	**vv**	**Total général**
ff	0,89%	0,00%	3,57%	4,46%
vv	0,00%	1,79%	93,75%	95,54%
Total général	**0,89%**	**1,79%**	**97,32%**	**100,00%**

Témoin/Test	Témoin

Nombre de Q.1 ciseaux - pré	**post-test**				
Pré-test	**--**	**f...**	**v...**	**vv**	**Total général**
ff	0,00%	0,00%	0,00%	2,08%	2,08%
vv	1,04%	1,04%	2,08%	93,75%	97,92%
Total général	**1,04%**	**1,04%**	**2,08%**	**95,83%**	**100,00%**

Témoin/Test	Test

Nombre de Q.9 essence - pré	**post-test**					
Pré-test	**--**	**f...**	**ff**	**v...**	**vv**	**Total général**
--	0,89%	0,00%	0,00%	0,00%	2,68%	3,57%
ff	0,00%	0,00%	0,00%	0,00%	0,89%	0,89%
v...	0,89%	0,00%	0,00%	1,79%	10,71%	13,39%
vv	3,57%	0,89%	0,89%	2,68%	74,11%	82,14%
Total général	**5,36%**	**0,89%**	**0,89%**	**4,46%**	**88,39%**	**100,00%**

Témoin/Test	Témoin

Nombre de Q.9 essence - pré	**post-test**					
Pré-test	**--**	**f...**	**ff**	**v...**	**vv**	**Total général**
--	1,04%	0,00%	0,00%	0,00%	0,00%	1,04%
v...	0,00%	0,00%	0,00%	0,00%	10,42%	10,42%
vv	9,38%	1,04%	1,04%	2,08%	75,00%	88,54%
Total général	**10,42%**	**1,04%**	**1,04%**	**2,08%**	**85,42%**	**100,00%**

Témoin/Test	Test

Nombre de Q.4 mousse - pré	**post-test**					
Pré-test	**--**	**f...**	**ff**	**v...**	**vv**	**Total général**
--	0,89%	0,00%	1,79%	0,00%	0,89%	3,57%
ff	1,79%	0,00%	3,57%	0,00%	3,57%	8,93%
v...	0,89%	0,00%	0,00%	0,00%	0,89%	1,79%
vv	7,14%	5,36%	5,36%	6,25%	61,61%	85,71%
Total général	**10,71%**	**5,36%**	**10,71%**	**6,25%**	**66,96%**	**100,00%**

Témoin/Test	Témoin

Nombre de Q.4 mousse - pré	**post-test**					
Pré-test	**--**	**f...**	**ff**	**v...**	**vv**	**Total général**
--	3,13%	0,00%	2,08%	0,00%	2,08%	7,29%
ff	1,04%	0,00%	5,21%	0,00%	1,04%	7,29%
v...	0,00%	0,00%	0,00%	0,00%	2,08%	2,08%
vv	8,33%	3,13%	1,04%	2,08%	68,75%	83,33%
Total général	**12,50%**	**3,13%**	**8,33%**	**2,08%**	**73,96%**	**100,00%**

Témoin/Test	Test

Nombre de Q.5 bonbons - pré	post-test					
Pré-test	--	f...	ff	v...	vv	Total général
--	1,79%	0,89%	3,57%	0,00%	1,79%	8,04%
f...	0,89%	1,79%	5,36%	0,00%	4,46%	12,50%
ff	0,89%	1,79%	16,96%	0,89%	3,57%	24,11%
v...	0,00%	0,00%	0,89%	0,00%	0,89%	1,79%
vv	3,57%	1,79%	12,50%	0,00%	35,71%	53,57%
Total général	**7,14%**	**6,25%**	**39,29%**	**0,89%**	**46,43%**	**100,00%**

Témoin/Test	Témoin

Nombre de Q.5 bonbons - pré	post-test					
Pré-test	--	f...	ff	v...	vv	Total général
--	0,00%	0,00%	4,17%	0,00%	1,04%	5,21%
f...	0,00%	0,00%	3,13%	0,00%	1,04%	4,17%
ff	2,08%	1,04%	14,58%	0,00%	13,54%	31,25%
v...	0,00%	1,04%	0,00%	0,00%	1,04%	2,08%
vv	2,08%	0,00%	11,46%	2,08%	41,67%	57,29%
Total général	**4,17%**	**2,08%**	**33,33%**	**2,08%**	**58,33%**	**100,00%**

Témoin/Test	Test

Nombre de Q.10 usine - pré	post-test					
Pré-test	--	f...	ff	v...	vv	Total général
--	1,79%	0,00%	0,00%	0,00%	1,79%	3,57%
f...	0,00%	0,00%	0,89%	0,89%	0,89%	2,68%
ff	2,68%	0,89%	5,36%	0,00%	4,46%	13,39%
vv	10,71%	2,68%	8,04%	8,93%	50,00%	80,36%
Total général	**15,18%**	**3,57%**	**14,29%**	**9,82%**	**57,14%**	**100,00%**

Témoin/Test	Témoin

Nombre de Q.10 usine - pré	post-test					
Pré-test	--	f...	ff	v...	vv	Total général
--	1,04%	0,00%	0,00%	0,00%	4,17%	5,21%
ff	4,17%	1,04%	2,08%	2,08%	10,42%	19,79%
v...	0,00%	0,00%	0,00%	0,00%	2,08%	2,08%
vv	11,46%	2,08%	4,17%	10,42%	44,79%	72,92%
Total général	**16,67%**	**3,13%**	**6,25%**	**12,50%**	**61,46%**	**100,00%**

Témoin/Test	Test

Nombre de Q.2 graine - pré	post-test			
Pré-test	**--**	**ff**	**vv**	**Total général**
--	0,89%	0,89%	0,00%	1,79%
f...	0,00%	1,79%	0,89%	2,68%
ff	1,79%	33,04%	4,46%	39,29%
v...	0,00%	0,00%	0,89%	0,89%
vv	0,00%	13,39%	41,96%	55,36%
Total général	**2,68%**	**49,11%**	**48,21%**	**100,00%**

Témoin/Test	Témoin

Nombre de Q.2 graine - pré	post-test			
Pré-test	**--**	**ff**	**vv**	**Total général**
--	1,04%	0,00%	2,08%	3,13%
ff	0,00%	25,00%	6,25%	31,25%
vv	0,00%	9,38%	56,25%	65,63%
Total général	**1,04%**	**34,38%**	**64,58%**	**100,00%**

Témoin/Test	Test

Nombre de Q.7 linge - pré	post-test				
Pré-test	**--**	**f...**	**ff**	**vv**	**Total général**
--	0,89%	0,00%	0,00%	0,89%	1,79%
f...	0,00%	0,00%	0,89%	0,00%	0,89%
ff	1,79%	0,89%	33,04%	2,68%	38,39%
v...	0,00%	0,00%	0,00%	0,89%	0,89%
vv	3,57%	0,00%	15,18%	39,29%	58,04%
Total général	**6,25%**	**0,89%**	**49,11%**	**43,75%**	**100,00%**

Témoin/Test	Témoin

Nombre de Q.7 linge - pré	post-test			
Pré-test	**--**	**ff**	**vv**	**Total général**
--	0,00%	1,04%	2,08%	3,13%
ff	2,08%	19,79%	5,21%	27,08%
vv	1,04%	14,58%	54,17%	69,79%
Total général	**3,13%**	**35,42%**	**61,46%**	**100,00%**

Témoin/Test	Test

Nombre de Q.6 console - pré	post-test					
Pré-test	**--**	**f...**	**ff**	**v...**	**vv**	**Total général**
--	0,89%	0,00%	0,89%	0,00%	0,00%	1,79%
f...	0,00%	2,68%	0,89%	0,00%	1,79%	5,36%
v...	2,68%	1,79%	1,79%	0,00%	11,61%	17,86%
vv	4,46%	16,07%	11,61%	3,57%	39,29%	75,00%
Total général	**8,04%**	**20,54%**	**15,18%**	**3,57%**	**52,68%**	**100,00%**

Témoin/Test	Témoin

Nombre de Q.6 console - pré	post-test					
Pré-test	**--**	**f...**	**ff**	**v...**	**vv**	**Total général**
--	1,04%	0,00%	0,00%	0,00%	1,04%	2,08%
f...	1,04%	2,08%	0,00%	0,00%	1,04%	4,17%
ff	0,00%	2,08%	2,08%	0,00%	1,04%	5,21%
v...	0,00%	1,04%	1,04%	2,08%	13,54%	17,71%
vv	2,08%	4,17%	3,13%	7,29%	54,17%	70,83%
Total général	**4,17%**	**9,38%**	**6,25%**	**9,38%**	**70,83%**	**100,00%**

Témoin/Test	Test

Nombre de Q.8 zoo - pré	post-test					
Pré-test	**--**	**f...**	**ff**	**v...**	**vv**	**Total général**
--	2,68%	1,79%	0,00%	0,00%	5,36%	9,82%
f...	0,89%	1,79%	1,79%	0,00%	3,57%	8,04%
ff	0,89%	0,00%	0,00%	0,00%	2,68%	3,57%
v...	0,89%	2,68%	0,89%	0,00%	2,68%	7,14%
vv	10,71%	8,93%	0,00%	1,79%	50,00%	71,43%
Total général	**16,07%**	**15,18%**	**2,68%**	**1,79%**	**64,29%**	**100,00%**

Témoin/Test	Témoin

Nombre de Q.8 zoo - pré	post-test					
Pré-test	**--**	**f...**	**ff**	**v...**	**vv**	**Total général**
--	3,13%	2,08%	0,00%	0,00%	3,13%	8,33%
f...	2,08%	3,13%	0,00%	0,00%	6,25%	11,46%
ff	0,00%	2,08%	0,00%	0,00%	3,13%	5,21%
v...	2,08%	1,04%	0,00%	0,00%	2,08%	5,21%
vv	4,17%	4,17%	4,17%	2,08%	55,21%	69,79%
Total général	**11,46%**	**12,50%**	**4,17%**	**2,08%**	**69,79%**	**100,00%**

Témoin/Test	Test					
Nombre de Q.3 carré - pré	**post-test**					
Pré-test	**--**	**f...**	**ff**	**v...**	**vv**	**Total général**
--	2,68%	0,89%	3,57%	0,00%	1,79%	8,93%
f...	1,79%	1,79%	3,57%	1,79%	1,79%	10,71%
ff	12,50%	4,46%	38,39%	1,79%	5,36%	62,50%
v...	1,79%	0,89%	0,89%	0,89%	0,00%	4,46%
vv	0,89%	0,89%	3,57%	0,89%	7,14%	13,39%
Total général	**19,64%**	**8,93%**	**50,00%**	**5,36%**	**16,07%**	**100,00%**

Témoin/Test	Témoin					
Nombre de Q.3 carré - pré	**post-test**					
Pré-test	**--**	**f...**	**ff**	**v...**	**vv**	**Total général**
--	1,04%	2,08%	4,17%	0,00%	2,08%	9,38%
f...	1,04%	1,04%	2,08%	0,00%	1,04%	5,21%
ff	14,58%	5,21%	27,08%	3,13%	7,29%	57,29%
v...	0,00%	0,00%	0,00%	0,00%	2,08%	2,08%
vv	3,13%	2,08%	8,33%	3,13%	9,38%	26,04%
Total général	**19,79%**	**10,42%**	**41,67%**	**6,25%**	**21,88%**	**100,00%**

Témoin/Test	Test					
Nombre de Q.11 cheval - pré	**post-test**					
Pré-test	**--**	**f...**	**ff**	**v...**	**vv**	**Total général**
--	5,36%	0,89%	3,57%	0,00%	0,00%	9,82%
f...	0,00%	0,89%	4,46%	0,00%	0,00%	5,36%
ff	12,50%	2,68%	62,50%	0,89%	0,89%	79,46%
v...	0,00%	0,00%	0,89%	0,00%	0,00%	0,89%
vv	0,00%	0,89%	1,79%	0,00%	1,79%	4,46%
Total général	**17,86%**	**5,36%**	**73,21%**	**0,89%**	**2,68%**	**100,00%**

Témoin/Test	Témoin					
Nombre de Q.11 cheval - pré	**post-test**					
Pré-test	**--**	**f...**	**ff**	**v...**	**vv**	**Total général**
--	2,08%	0,00%	2,08%	1,04%	0,00%	5,21%
f...	1,04%	1,04%	2,08%	0,00%	0,00%	4,17%
ff	19,79%	6,25%	50,00%	1,04%	5,21%	82,29%
v...	0,00%	0,00%	2,08%	0,00%	2,08%	4,17%
vv	2,08%	0,00%	1,04%	0,00%	1,04%	4,17%
Total général	**25,00%**	**7,29%**	**57,29%**	**2,08%**	**8,33%**	**100,00%**