

## THESIS / THÈSE

### MASTER EN SCIENCES MATHÉMATIQUES

Étude de l'effet Gertsenshtein et génération d'ondes gravitationnelles stationnaires

Herman, Nicolas

*Award date:*  
2017

*Awarding institution:*  
Universite de Namur

[Link to publication](#)

#### General rights

Copyright and moral rights for the publications made accessible in the public portal are retained by the authors and/or other copyright owners and it is a condition of accessing publications that users recognise and abide by the legal requirements associated with these rights.

- Users may download and print one copy of any publication from the public portal for the purpose of private study or research.
- You may not further distribute the material or use it for any profit-making activity or commercial gain
- You may freely distribute the URL identifying the publication in the public portal ?

#### Take down policy

If you believe that this document breaches copyright please contact us providing details, and we will remove access to the work immediately and investigate your claim.



**UNIVERSITE DE NAMUR**

**Faculté des Sciences**

**ETUDE DE L'EFFET GERTSENSHTEIN ET GENERATION D'ONDES  
GRAVITATIONNELLES STATIONNAIRES**

**Mémoire présenté pour l'obtention  
du grade académique de master en sciences mathématiques, à finalité approfondie**

Nicolas HERMAN

Promoteur : Pr. André Füzfa

Juin 2017





**UNIVERSITE DE NAMUR**

**Faculté des Sciences**

**ETUDE DE L'EFFET GERTSENSHTEIN ET GENERATION D'ONDES  
GRAVITATIONNELLES STATIONNAIRES**

**Mémoire présenté pour l'obtention  
du grade académique de master en sciences mathématiques, à finalité approfondie**

Nicolas HERMAN

Promoteur : Pr. André Füzfa

Juin 2017

# Résumé

Dans ce mémoire, nous avons étudié l'effet Gertsenshtein direct, qui traite de la conversion d'ondes électromagnétiques en ondes gravitationnelles en présence d'un champ magnétique externe, ainsi que l'effet inverse. Pour ce faire, nous avons tout d'abord étudié le système Einstein-Maxwell. Après avoir linéarisé les équations du champ, nous avons considéré les perturbations de la métrique induites par une onde électromagnétique seule, pour ensuite traiter de l'effet Gertsenshtein en étudiant les polarisations transverse-électrique, transverse-magnétique et transverse-électromagnétique de l'onde ainsi que les champs magnétiques externes longitudinaux et transverses. Le résultat principal est que seule une onde polarisée transverse-électromagnétique avec un champ magnétique externe transverse va nous fournir une solution non-triviale pour les composantes transverses de la métrique. En d'autres mots, seulement une onde transverse-électromagnétique avec un champ magnétique externe transverse va générer des ondes gravitationnelles transverses, de polarisation semblable à celles venant de sources astrophysiques. Après ces résultats, pour étudier l'effet inverse, nous avons également transformé les équations du champ électromagnétique en équation d'onde pour le quadripotential électromagnétique qui contient les corrections du premier ordre du champ électromagnétique. Nous avons résolu les équations pour un problème unidimensionnel en utilisant le calcul symbolique. Ce problème traite d'un champ magnétique externe statique et d'une onde électromagnétique stationnaires. Nous arrivons à générer des ondes gravitationnelles stationnaires, dont l'amplitude varie linéairement par rapport au temps. Les amplitudes des corrections électromagnétiques varient quant à elle quadratiquement par rapport au temps. Nous avons également étudié les limites de ce modèle 1D, qui nous a amené des perspectives pour un travail de recherche futur.

# Abstract

In this master thesis, we studied the direct Gertsenshtein effect, which is related to the conversion of electromagnetic waves into gravitational waves with an external magnetic field, and the inverted effect. To perform this, we first studied the Einstein-Maxwell system. Then, after linearizing the field equations, we first considered the metric perturbation induced by an electromagnetic wave alone and after that, we studied the case of a transverse and a longitudinal external magnetic field and the case of a transverse-magnetic, transverse-electric and transverse-electromagnetic wave. The main result is that only the transverse-electromagnetic wave and the transverse external magnetic field gives a non-trivial solution for the transverse components of the metric perturbation. In other words, only a transverse-electromagnetic wave and a transverse external magnetic field will generate transverse gravitational waves. After these results, we consider the inverted Gertsenshtein effect. We transformed the electromagnetic field equations in wave equations for the electromagnetic 4-potential that contains corrections of the electromagnetic field. After developing these equations, we used symbolic computations to solve a one-dimensional problem of generation of standing gravitational wave with a constant magnetic field and a stationary electromagnetic wave. We found that the amplitude of the gravitational waves grows linearly with time, and the amplitude of the corrections to the electromagnetic field grows quadratically with time. We find out also some limitations of our 1D model, and also perspectives for further research.

# Remerciements

Je tiens tout d'abord à remercier mon promoteur, André Füzfa, pour son suivi et son expertise durant la préparation de ce mémoire. Merci également pour ses conseils et ses encouragements.

Je tiens également à remercier ma famille et mes amis, qui m'ont apporté le soutien et la force nécessaire à la conclusion de ce mémoire. Mention spéciale à ma maman qui a pris de son temps à la relecture de ce travail.

De manière plus générale, je tiens à remercier toutes les personnes du département de mathématique de l'Université de Namur, pour m'avoir accueilli chaleureusement et d'avoir grandement facilité mon intégration durant ce master.

Merci également aux personnes qui liront un jour ce mémoire, et bien sûr les premiers d'entre-eux, le jury.

# Table des matières

<b>Introduction</b>	<b>1</b>
<b>1 Construction du système Einstein-Maxwell</b>	<b>3</b>
1.1 Introduction à la théorie de la relativité . . . . .	3
1.2 Notions de géométrie différentielle . . . . .	4
1.2.1 Rappels de la géométrie différentielle de base . . . . .	4
1.2.2 Le fibré vectoriel . . . . .	8
1.2.3 Connexion de Levi-Civita et courbure sur le fibré tangent . . . . .	10
1.3 Le système Einstein-Maxwell par principe variationnel . . . . .	13
1.3.1 L'espace-temps relativiste et définition du lagrangien . . . . .	13
1.3.2 L'équation d'Einstein . . . . .	15
1.3.3 L'équation d'Einstein avec source électromagnétique . . . . .	20
1.3.4 Les équations de Maxwell covariantes . . . . .	21
1.3.5 Le système Einstein-Maxwell . . . . .	27
<b>2 Linéarisation du système Einstein-Maxwell</b>	<b>28</b>
2.1 Linéarisation de l'équation d'Einstein, théorie des ondes gravitationnelles . . . . .	29
2.1.1 Linéarisation du tenseur d'Einstein . . . . .	29
2.1.2 Passage à la perturbation à trace renversée . . . . .	30
2.1.3 Liberté de jauge et équation d'onde . . . . .	31
2.1.4 Les polarisations des ondes gravitationnelles . . . . .	33
2.2 Linéarisation des autres équations . . . . .	37
2.2.1 Linéarisation du tenseur énergie-impulsion . . . . .	37
2.2.2 Linéarisation du premier groupe d'équations de Maxwell . . . . .	38
2.2.3 Linéarisation du deuxième groupe d'équations de Maxwell . . . . .	39
<b>3 Étude des liens entre gravitation et électromagnétisme</b>	<b>41</b>
3.1 Solutions du système Einstein-Maxwell . . . . .	41
3.1.1 Solution de Reissner-Nordström . . . . .	41
3.1.2 Solutions de Mukherji et de Witten . . . . .	43
3.2 Motivations pour étudier l'effet Gertsenshtein . . . . .	51
3.2.1 La courbure de l'espace-temps autour d'un champ magnétique formé par un solénoïde . . . . .	51
3.2.2 Les ondes gravitationnelles provenant d'une onde électromagnétique . . . . .	53
3.2.3 Description de l'effet Gertsenshtein . . . . .	53

<b>4</b>	<b>L'effet Gertsenshtein revisité</b>	<b>56</b>
4.1	Equations utilisées . . . . .	56
4.1.1	L'effet direct . . . . .	57
4.1.2	L'effet inverse . . . . .	58
4.2	Cas de l'onde electromagnétique seule . . . . .	59
4.3	Etude de différents cas pour l'effet Gertsenshtein . . . . .	62
4.3.1	Effet direct, avec un champ externe transverse . . . . .	64
4.3.2	Effet direct, avec un champ externe longitudinal . . . . .	66
4.3.3	Effet inverse . . . . .	67
<b>5</b>	<b>Génération d'ondes gravitationnelles stationnaires</b>	<b>70</b>
5.1	Descriptions des équations d'onde . . . . .	70
5.2	Passage aux équations sans dimension . . . . .	72
5.3	Résolution du problème . . . . .	73
5.4	Polarisation linéaire de l'onde électromagnétique . . . . .	76
5.5	Polarisation circulaire de l'onde électromagnétique . . . . .	81
5.6	Analyse et critique des résultats, perspectives . . . . .	83
	<b>Conclusion</b>	<b>87</b>
	<b>Annexe : Archive des fichiers utilisés</b>	<b>89</b>
	<b>Bibliographie</b>	<b>90</b>

# Introduction

Dans ce mémoire, nous allons traiter de manière générale aux liens entre la gravitation et l'électromagnétisme. En effet, le principe d'équivalence, postule que l'énergie courbe l'espace-temps, et cette courbure, dans la théorie de la relativité générale, est synonyme de gravitation. La génération de champs gravitationnels artificiels, créés par l'homme n'appartient donc pas qu'à la science-fiction. Il faut noter qu'à l'heure actuelle, la gravitation est la seule des quatre interactions physiques fondamentales dont nous ne pouvons contrôler à souhait. En effet, il n'existe pas « d'interrupteur » pour la gravitation. Bien que générer de la gravitation artificiellement est théoriquement possible, cela reste un défi théorique et technologique à l'heure actuelle.

Parallèlement à ce fait, la récente détection et mesure en 2015 des ondes gravitationnelles par le détecteur LIGO a enfin pu donner une preuve directe de l'existence de telles ondes, à l'origine prédites par Einstein au début du XX<sup>ème</sup> siècle. Cette prouesse expérimentale a ouvert de nouvelles perspectives quant à l'exploitation de ces ondes. En effet, une maîtrise totale de la génération et détection de ce type d'onde pourrait tout bonnement révolutionner nos perspectives en matière de transmission d'informations. En effet, les ondes gravitationnelles ne sont pas perturbées par des facteurs tels que la nature d'un matériau, le champ magnétique terrestre, etc. Les ondes gravitationnelles offrent une formidable alternative à l'utilisation d'ondes électromagnétiques. Cependant, nous sommes encore très très loin de pouvoir maîtriser les ondes gravitationnelles comme nous maîtrisons les ondes électromagnétiques actuellement.

Ce mémoire va traiter d'un effet décrit pour la première fois dans les années soixante, un effet qui porte le nom de celui qui l'a découvert, il s'agit de l'effet Gertsenshtein, effet qui permet de traiter de la génération et la détection d'onde gravitationnelles à l'aide d'énergie électromagnétique. Il existe un effet direct et un effet inverse. L'effet Gertsenshtein inverse peut s'expliquer comme suit. Une onde gravitationnelle passant dans un champ magnétique externe produit une variation locale du volume et donc du flux magnétique, se manifestant par une onde électromagnétique de même fréquence que l'onde gravitationnelle progénitrice. L'effet direct traite alors de la génération d'ondes gravitationnelles grâce à des ondes électromagnétiques et un champ magnétique externe.

Pour traiter ce sujet, ils nous faut tout d'abord des notions théoriques solides. Premièrement, nous allons construire mathématiquement, de manière la plus rigoureuse possible, le système Einstein-Maxwell, qui repose sur la description de la gravitation et de l'électromagnétisme dans le cadre de la théorie de la relativité générale. Après avoir linéarisé les équations du champ et introduire la notion d'onde gravitationnelles, nous parlerons des motivations qui nous poussent à approfondir l'étude de l'effet Gertsenshtein.

Pour terminer, nous allons fournir une étude complète d'un point de vue polarisation de l'effet Gertsenshtein dans un modèle unidimensionnel de propagation d'ondes planes et considérer la génération d'ondes gravitationnelles stationnaires. Nous essayerons à la fin d'imaginer quelques perspectives à ce travail.

*Bonne lecture.*

# Chapitre 1

## Construction du système Einstein-Maxwell

Dans ce chapitre, nous allons décrire les équations qui traitent du couplage entre la gravitation et l'électromagnétisme dans le cadre de la théorie de la relativité générale. Cet ensemble d'équations porte le nom de système Einstein-Maxwell, nom qui nous rappelle les noms d'Albert Einstein, qui a élaboré la théorie de la relativité générale et de James Clerk Maxwell, grand pionnier de la théorie de l'électromagnétisme. Pour parvenir à ces équations, nous allons tout d'abord passer en revue quelques notions de géométrie différentielle. Nous introduirons par après la notion de fibré vectoriel, afin de définir un cadre géométrique à l'espace-temps. Une fois ce cadre introduit, nous pourrons dériver les équations du système Einstein-Maxwell grâce à un principe variationnel.

### 1.1 Introduction à la théorie de la relativité

Nous allons introduire ce chapitre par un bref rappel des motivations historiques au développement de la relativité restreinte et de sa géométrie. Pour cette section, nous nous sommes largement inspirés de [1].

La relativité restreinte repose sur un postulat, la vitesse de la lumière dans le vide est constante pour tout observateur, cette valeur est tabulée [2],

$$c = 299\,792\,458 \text{ m/s.}$$

Maintenant, il reste à trouver une géométrie compatible avec les postulats d'Einstein. Tout d'abord, Einstein considéra un espace à quatre dimensions, l'espace-temps, un point  $P$  de cet espace est repéré grâce à une coordonnée temporelle  $x^0 = ct$ , ainsi que les coordonnées d'espace  $(x^1, x^2, x^3)$ . Le fait de ce passage à des coordonnées dans un espace abstrait enlève le sens physique des coordonnées, ce seront les observables, quantités invariantes sous changements de coordonnées qui compteront.

Revenons à la géométrie, l'utilisation de la géométrie euclidienne dans  $\mathbb{R}^4$  ne convient pas, car si l'on transforme les coordonnées, l'élément de « longueur », appelé intervalle d'espace-temps,  $\Delta s^2 = c^2 (\Delta t)^2 + (\Delta x^1)^2 + (\Delta x^2)^2 + (\Delta x^3)^2$  est incompatible avec la constance de  $c$ . Par contre si

nous passons en géométrie pseudo-euclidienne, alors l'intervalle d'espace-temps

$$\Delta s^2 = -c^2 (\Delta t)^2 + (\Delta x^1)^2 + (\Delta x^2)^2 + (\Delta x^3)^2 \quad (1.1)$$

est quant à lui compatible avec  $c$  constant.

L'espace-temps considéré est appelé  $\mathbb{R}^{3,1}$ . Remarquons que nous pouvons écrire (1.1) comme

$$\Delta s^2 = \begin{pmatrix} c\Delta t & \Delta x^1 & \Delta x^2 & \Delta x^3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c\Delta t \\ \Delta x^1 \\ \Delta x^2 \\ \Delta x^3 \end{pmatrix},$$

et la matrice  $\eta = \text{diag}(-1, 1, 1, 1)$  peut être considérée comme une métrique<sup>1</sup>, elle est appelée *métrique de Minkowski*. Cette métrique est fort utile en relativité. Remarquons toute fois que Einstein ne traite pas du problème de la gravitation en relativité restreinte, il s'y intéressera lors de la formulation de la théorie de la relativité générale, que nous décrirons après avoir introduit quelques notions de géométrie différentielle.

## 1.2 Notions de géométrie différentielle

La théorie de la relativité est une formidable preuve du lien très fort qu'entretiennent les sciences mathématiques et physiques. En effet, la relativité est une géométrisation de la physique, en utilisant pour support la géométrie différentielle. Dans cette section, nous allons d'abord rappeler rapidement plusieurs définitions de géométrie différentielle vues en baccalauréat pour ensuite passer à la notion d'espace fibré et toutes les notions nécessaires à la construction de l'espace-temps. Pour ces définitions, nous nous sommes inspirés de [3].

### 1.2.1 Rappels de la géométrie différentielle de base

Dans une variété différentiable  $V$  de dimension  $n$ , où nous considérons la carte locale de coordonnées  $(x^1, x^2, \dots, x^n)$ , on peut définir une application qui à un point de la variété  $P$ , identifie un scalaire réel. Une telle application  $f : V \rightarrow \mathbb{R}$  est appelée champ scalaire.

Nous définissons également le vecteur tangent à un point  $P$  de la variété  $V$  comme un opérateur différentiel linéaire du premier ordre

$$X[\cdot] = X^\mu|_P \partial_\mu,$$

où  $\partial_\mu = \frac{\partial}{\partial x^\mu}$  et  $X^\mu|_P$  sont les composantes du vecteur définies localement en  $P$ .

L'ensemble des  $\{\partial_\mu\}_{\mu=1}^n$  forment ce que l'on appelle la base naturelle. Cette base engendre un espace que l'on qualifie d'espace tangent local au point  $P$ , noté  $T_P(V)$ , et qui est défini par

$$T_P(V) = \text{span}(\{\partial_1, \partial_2, \dots, \partial_n\})$$

---

1. Remarquons que cette métrique est en fait une pseudo-métrique, à cause de sa valeur propre négative  
 2. Nous omettrons la notation  $|_P$  ensuite par souci de visibilité

Notons que  $T_P(V)$  est espace vectoriel tel que  $\dim T_P(V) = \dim V = n$ . Comme notre espace tangent est un espace vectoriel, nous pouvons regarder son espace dual. Cet espace que nous appellerons espace cotangent, noté  $T_P^*(V)$ , qui contient des éléments appelées vecteurs cotangent, défini par

$$\omega = \omega_\mu dx^\mu,$$

où  $\{dx^\mu\}_{\mu=1}^n$  est la base naturelle de l'espace cotangent.

Nous pouvons définir un produit scalaire entre les deux bases naturelles

$$\langle \partial_\mu, dx^\nu \rangle = \partial_\mu dx^\nu,$$

qui par propriété de la dualité, nous amène à conclure que

$$\partial_\mu dx^\nu = \delta_\mu^\nu,$$

où  $\delta_\mu^\nu$  est le symbole de Kronecker.

Le produit scalaire entre un vecteur tangent  $X$  et un vecteur cotangent  $\omega$  est alors défini par

$$\langle X, \omega \rangle = X^\mu \omega_\nu \partial_\mu dx^\nu = X^\mu \omega_\nu \delta_\mu^\nu = X^\mu \omega_\mu$$

A la lumière de ces définitions, nous pouvons voir le vecteur tangent comme une application linéaire  $X : T_P^*(V) \rightarrow \mathbb{R}$ , et le covecteur tangent comme une application linéaire  $\omega : T_P(V) \rightarrow \mathbb{R}$ . ces applications sont définies par le produit scalaire.

Nous pouvons alors généraliser et considérer une application multilinéaire  $T$ , appelée tenseur de type  $(p, q)$ , qui envoie  $p$  vecteurs cotangents et  $q$  vecteurs tangents sur l'ensemble réel, et définie par

$$T : T_P^*(V)^p \times T_P(V)^q \rightarrow \mathbb{R} | T = T^{\mu_1 \dots \mu_p}_{\nu_1 \dots \nu_q} \partial_{\mu_1} \otimes \dots \otimes \partial_{\mu_p} \otimes dx^{\nu_1} \otimes \dots \otimes dx^{\nu_q},$$

où  $\otimes$  est le produit tensoriel défini par

$$\begin{aligned} A \otimes B &= C(\omega_1, \dots, \omega_p, \zeta_1, \dots, \zeta_{p'}, U_1, \dots, U_q, W_1, \dots, W_{q'}) \\ &= A(\omega_1, \dots, \omega_p, U_1, \dots, U_q) B(\zeta_1, \dots, \zeta_{p'}, W_1, \dots, W_{q'}), \end{aligned}$$

où  $A$  est un tenseur de type  $(p, q)$ ,  $B$  un tenseur de type  $(p', q')$ ,  $C$  est par conséquent un tenseur de type  $(p + p', q + q')$ , qui s'applique à  $p$  vecteurs cotangents  $\omega$ ,  $p'$  vecteurs cotangents  $\zeta$ ,  $q$  vecteurs tangents  $U$  et  $q'$  vecteurs tangents  $W$ .

Les composantes d'un tenseur de type  $(p, q)$  se transforment lors d'un changement de coordonnées  $x$  vers  $x'$  via la loi

$$T^{(\text{new})\mu_1 \dots \mu_p}_{\nu_1 \dots \nu_q} = \frac{\partial x'^{\mu_1}}{\partial x^{\alpha_1}} \dots \frac{\partial x'^{\mu_p}}{\partial x^{\alpha_p}} \frac{\partial x^{\beta_1}}{\partial x'^{\nu_1}} \dots \frac{\partial x^{\beta_q}}{\partial x'^{\nu_q}} T^{(\text{old})\alpha_1 \dots \alpha_p}_{\beta_1 \dots \beta_q}. \quad (1.2)$$

Toute application multilinéaire qui suit cette loi de transformation est un tenseur.

Les vecteurs tangents peuvent être alors vus comme des tenseurs de type  $(1, 0)$  et les vecteurs cotangents comme des tenseurs de type  $(0, 1)$ .

Un tenseur particulier est la métrique, tenseur de type (0,2), que l'on note en général  $g$ , un tenseur symétrique, qui permet de définir le produit scalaire entre deux vecteurs tangents  $X$  et  $Y$ , qui est donné par l'expression

$$\langle X, Y \rangle = g_{\mu\nu} X^\mu Y^\nu.$$

Un produit scalaire est défini de la même manière entre deux vecteurs cotangents via l'inverse de la métrique  $g^{\mu\nu}$ , où  $g_{\mu\gamma} g^{\gamma\nu} = \delta_\mu^\nu$ . La métrique permet de passer des coordonnées d'un vecteur tangent aux coordonnées de sa version vecteur cotangent, c'est ce que l'on appelle l'isomorphisme musical. La version vecteur cotangent du vecteur tangent  $X$  a pour coordonnées  $X_\mu = g_{\mu\nu} X^\nu$ , et la version vecteur tangent du vecteur cotangent  $\omega$  a pour coordonnées  $\omega^\mu = g^{\mu\nu} \omega_\nu$ . Cet isomorphisme peut être généralisé pour « monter » ou « descendre » les indices d'un tenseur.

Nous pouvons, à l'aide du produit vectoriel, introduire un nouveau produit appelé produit extérieur, produit entre  $k$  vecteurs de la base naturelle de l'espace cotangent noté par  $\wedge$  et défini par

$$dx^{\mu_1} \wedge dx^{\mu_2} \wedge \dots \wedge dx^{\mu_k} = \sum_{p \in S_k} \text{sgn}(p) dx^{\mu_{p(1)}} \otimes dx^{\mu_{p(2)}} \otimes \dots \otimes dx^{\mu_{p(k)}},$$

où  $S_k$  représente l'ensemble des permutations entre les  $k$  indices, et où  $p$  est une permutation. Le produit extérieur est en fait un produit tensoriel totalement antisymétrique.

Ce produit extérieur nous amène à définir ce qu'est une forme différentielle d'ordre  $k$ , appelée également  $k$ -forme, qui est un tenseur complètement antisymétrique de type (0, $k$ ). Une  $k$ -forme  $\omega$  est définie par

$$\omega = \frac{1}{k!} \omega_{\mu_1 \mu_2 \dots \mu_k} dx^{\mu_1} \wedge dx^{\mu_2} \wedge \dots \wedge dx^{\mu_k} \quad (1.3)$$

Par cette définition, nous pouvons voir qu'un champ scalaire est une 0-forme et un vecteur cotangent est une 1-forme, L'espace des  $k$ -formes existant au point  $P$  de la variété  $V$  est noté par  $\Lambda_P^k(V)$ .

Nous pouvons également définir sur l'espace des  $k$ -formes une application  $d : \Lambda_P^k(V) \rightarrow \Lambda_P^{k+1}(V)$ , appelée dérivée extérieure. Pour une  $k$ -forme  $\omega$  décrite par (1.3), la dérivée extérieure,  $d\omega$ , qui est une  $(k+1)$ -forme, a pour expression

$$d\omega = \frac{1}{k!} \partial_\nu \omega_{\mu_1 \mu_2 \dots \mu_k} dx^\nu \wedge dx^{\mu_1} \wedge dx^{\mu_2} \wedge \dots \wedge dx^{\mu_k}. \quad (1.4)$$

Par les propriétés de commutativité entre les dérivées partielles, et d'antisymétrie du produit extérieur, nous pouvons démontrer facilement que deux applications successives de la dérivée extérieur rend la forme différentielle identiquement nulle, notée

$$d^2 = 0. \quad (1.5)$$

Définissons également l'opérateur de dualité d'Hodge, application linéaire  $\star : \Lambda^k \rightarrow \Lambda^{n-k}$  qui transforme une  $k$ -forme  $\omega$  en une  $(n-k)$ -forme  $\star\omega$  définie par

$$\star\omega = \frac{1}{k!(n-k)!} \omega_{\mu_1 \mu_2 \dots \mu_k} \epsilon^{\mu_1 \mu_2 \dots \mu_k \nu_{k+1} \nu_{k+2} \dots \nu_n} dx^{\nu_{k+1}} \wedge dx^{\nu_{k+2}} \wedge \dots \wedge dx^{\nu_n}, \quad (1.6)$$

où  $\epsilon_{\mu_1 \mu_2 \dots \mu_n}$  est le tenseur de Levi-Civita, tenseur totalement antisymétrique, défini par

$$\epsilon_{\mu_1 \mu_2 \dots \mu_n} = \sqrt{|g|} \operatorname{sgn} \begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & n \\ \mu_1 & \mu_2 & \dots & \mu_n \end{pmatrix},$$

où  $g$  est le déterminant de la métrique.

Pour le tenseur de Levi-Civita, nous avons la propriété

$$\epsilon_{\mu_1 \mu_2 \dots \mu_n} \epsilon^{\nu_1 \nu_2 \dots \nu_n} = sn! \delta_{\mu_1}^{\nu_1} \delta_{\mu_2}^{\nu_2} \dots \delta_{\mu_n}^{\nu_n}, \quad (1.7)$$

où  $s$  vaut 1 si la métrique est riemannienne et -1 si la métrique est lorentzienne. L'opérateur  $\star$  est bien un opérateur dual car si on l'applique deux fois de suite à une  $k$ -forme, on obtient

$$\star \star \omega = (-1)^{k(n-k)} s \omega. \quad (1.8)$$

Nous retombons bien sur la même  $k$ -forme de départ, à un signe près.

Définissons à présent un opérateur adjoint à la dérivée extérieure, que l'on appelle co-différentielle, opérateur  $d^\dagger : \Lambda_P^k(V) \rightarrow \Lambda_P^{k-1}(V)$ , et qui est défini par

$$d^\dagger = (-1)^{k(n-k)} (-s) \star d \star. \quad (1.9)$$

Dans ce cas, nous avons également la propriété

$$(d^\dagger)^2 = 0 \quad (1.10)$$

Nous terminerons ces notions de géométrie différentielle de base par parler de l'intégration de formes différentielles, et plus précisément le théorème de Stokes.

**Théorème 1.1** (Théorème de Stokes). *Soit  $c$  une sous-variété à bord (de bord  $\partial c$ ) d'une variété (pseudo-)riemannienne, et une  $k$ -forme  $\omega \in \Lambda_P^k(V)$ , alors*

$$\int_c d\omega = \int_{\partial c} \omega. \quad (1.11)$$

Ce théorème est très utile pour intégrer les formes différentielles et son prolongement en analyse vectorielle est très utile en physique.

Un corollaire de ce théorème de Stokes est le théorème de Gauss-Ostrogradsky, qui s'applique pour un vecteur tangent  $\psi$  et a pour énoncé

$$\int_c \nabla_\mu \psi^\mu \Omega_c = \int_{\partial c} n_\mu \psi^\mu \Omega_{\partial c}, \quad (1.12)$$

où  $\nabla$  est la dérivée covariante, que nous définirons plus tard,  $n_\mu$  est un vecteur cotangent perpendiculaire au bord  $\partial c$  et  $\Omega_c$  est la forme de volume de la variété  $c$  de dimension  $m$ , définie par

$$\Omega_c = \sqrt{|g|} dx^1 \wedge dx^2 \wedge \dots \wedge dx^m. \quad (1.13)$$

### 1.2.2 Le fibré vectoriel

Nous allons à présent développer la théorie des fibrés vectoriels. Après avoir décrit quelques notions, nous allons nous intéresser au cas particulier du fibré tangent, dans lequel nous allons pouvoir définir toutes les propriétés nécessaires à la construction de notre espace-temps, de notre géométrie pour obtenir les équations du système Einstein-Maxwell par principe variationnel. Pour construire et structurer cette partie, nous nous sommes inspirés des définitions de [4].

Prenons une variété différentiable  $B$ , de dimension  $n$ , que l'on appelle l'espace de base. A chaque point  $x$  de la variété, se trouve un espace vectoriel  $F_x$ , de dimension  $r$ , c'est ce que l'on appelle la fibre au-dessus de  $x$ . L'espace fibré vectoriel ou fibré vectoriel est une variété différentiable  $F$  de la forme

$$F = \{(x, v) | x \in B, v \in F_x\},$$

qui est localement triviale, c'est à dire telle qu'il existe un voisinage  $U \subset B$  en tout point de la variété  $B$  où  $F_U = \{(x, v) | x \in U, v \in F_x\}$  est diffeomorphe au produit direct  $U \times \mathbb{R}^r$ .

Notons que l'application  $\pi : F \rightarrow B | \pi(x, v) = x$  est appelée la projection du fibré sur l'espace de base. Le fibré vectoriel peut être noté par la variété  $F$  ou bien avec la notation  $F \xrightarrow{\pi} B$ . Un fibré vectoriel est par définition de dimension  $n + r$ .

Nous pouvons également définir la section globale du fibré, qui est une application  $s : B \rightarrow F$ , ( $C^\infty$  ou continue), qui associe à chaque point  $x$  de la variété  $B$ , un vecteur de la fibre, ce qui veut dire que  $\forall x \in B, s(x) \in F_x$ .

Dans la suite de ce mémoire, nous allons considérer que les sections globales sont  $C^\infty$  et nous pouvons identifier l'espace des sections globales du fibré par l'espace  $C^\infty(B, F)$ , l'ensemble des applications  $C^\infty$  qui ont pour domaine de départ  $B$  et domaine d'arrivée  $F$ .

Un cas particulier de fibré vectoriel est le fibré tangent, où la fibre  $F_x$  est l'espace tangent en  $x$ , c'est-à-dire  $T_x(B)$ . Dans ce cas précis, une section ne serait rien d'autre qu'un champ de vecteurs tangents, une application qui à chaque  $x$  de la variété  $B$ , associe un vecteur tangent. Nous reviendrons au cas du fibré tangent un peu plus tard. Nous pouvons voir une illustration schématique du fibré vectoriel et de la section globale à la figure (1.1).

Nous pouvons également définir sur chaque fibre  $F_x$ , une métrique  $h_x$  telle que pour chaque  $v_1$  et  $v_2$  appartenant à  $F_x$ ,  $h_x(v_1, v_2) \in \mathbb{R}$ . Cette métrique induit une norme associée pour un vecteur  $v$  de  $F_x$ ,  $\|v\|^2 = h_x(v, v)$ . Si cette métrique est hermitienne pour tout  $x \in B$ , alors  $F \xrightarrow{\pi} B$  est un fibré vectoriel hermitien.

Une autre chose que nous pouvons définir sur un fibré vectoriel, est une connexion, qui est un opérateur différentiel  $D : C^\infty(F) \rightarrow C^\infty(\Lambda^1 \times F)$  d'ordre 1 tel que pour un champ scalaire  $f$  sur  $B$  et une section  $s$  de  $F$ ,

$$D(fs) = (df)s + fDs.$$

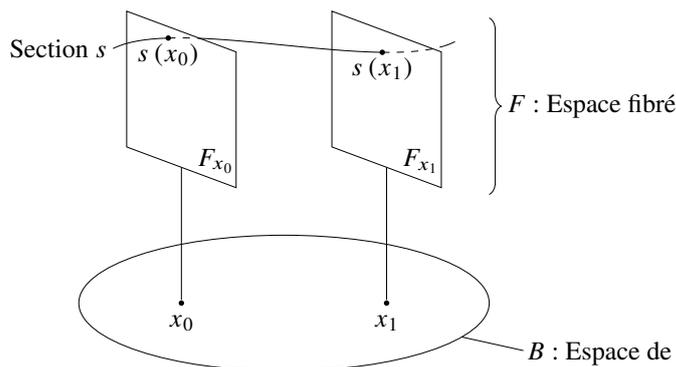


FIGURE 1.1 – Représentation schématique d'un fibré vectoriel et d'une section globale

De plus, s'il existe une métrique  $h$  sur  $F$ , la connexion doit être compatible avec la métrique, c'est-à-dire préserver le produit scalaire entre n'importe quelle section  $s_1$  et  $s_2$  appartenant à  $F$  via la formule

$$d(h(s_1, s_2)) = h(Ds_1, s_2) + h(s_1, Ds_2)$$

Regardons de plus près la connexion, en chaque point de  $x$ ,  $(\Lambda_x^1 \times F_x)$  est un espace vectoriel<sup>3</sup> puisqu'il est le produit de deux espaces vectoriels. Pour une section du fibré  $s$ , l'objet  $Ds$  possède une composante qui va se contracter avec un vecteur tangent quelconque  $U$ . Dans ce cas, nous avons  $D_U s \in F_x$ , ce qui veut dire que la connexion d'une section le long d'un vecteur tangent est une section.  $D_U s$  est également appelé dérivée covariante le long de  $U$ .

Une autre propriété que peut avoir un fibré vectoriel est le fait d'être trivial, ce qui arrive si et seulement s'il existe  $r$  sections globales  $\{s_1, \dots, s_r\}$ , telles que en tout point  $x$  de  $B$ ,  $\{s_1(x), \dots, s_r(x)\}$  forment une base de  $F_x$ , et de manière continue par rapport à  $x$ .

Cette notion est très importante pour définir ce que l'on appelle un choix de jauge, appelé aussi trivialisation du fibré, qui est donc un ensemble de  $r$  sections de référence  $\sigma = \{\sigma_1, \dots, \sigma_r\}$  qui rendent le fibré trivial. Dans ce cas, une section quelconque  $s(x)$  peut s'écrire en termes de la base<sup>4</sup>

$$s(x) = \sum_{\mu=1}^r \psi^\mu(x) \sigma_\mu(x).$$

La dérivée covariante d'une section peut également s'écrire en termes de la base puisque c'est une section. Nous avons alors pour les sections de références

$$\sigma_\mu = \sum_{\lambda=1}^r A_\mu^\lambda \sigma_\lambda,$$

où  $A_\mu^\lambda$  est la matrice de connexion, que l'on appelle également potentiel de jauge, car la valeur de cette matrice dépend du choix de  $\sigma$ .

3. notons que  $\Lambda_x^1$  peut également s'écrire  $T_x^*(B)$

4. La somme est notée explicitement car nous additionnons des objets et non des coordonnées, idem pour les deux autres sommes suivantes

Dans un système de coordonnées, nous avons que

$$A_\mu^\lambda = \sum_{\nu=1}^n A_{\mu\nu}^\lambda dx^\nu,$$

où les  $A_{\mu\nu}^\lambda$  sont les coefficients de connexion.

### 1.2.3 Connexion de Levi-Civita et courbure sur le fibré tangent

Intéressons nous à présent à un cas particulier, celui du fibré tangent. A chaque point  $x$  de la variété  $B$ , la fibre associée est l'espace tangent  $T_x(B)$ , et le fibré tangent est alors noté  $T(B)$ , qui est un fibré réel de dimension  $n$  et de rang  $n$ . Nous faisons en plus une autre hypothèse, celle que notre variété  $B$  est une variété munie d'une métrique  $g$  qui est riemannienne ou lorentzienne. L'avantage du fibré tangent, c'est que la métrique sur la fibre  $T_x(B)$  est exactement la même que celle de  $B$ , et la métrique est identique à toutes les fibres  $T_x(B)$  quel que soit  $x$ .

Pour ce qui est de la connexion, sa particularité réside dans le fait que si on considère la dérivée covariante  $D_U W$ ,  $U$  et  $W$  appartiennent tous deux au même espace,  $T_x(B)$ . Nous allons pouvoir définir sous ces hypothèses une connexion dite de Riemann ou Levi-Civita sur notre fibré tangent, qui est un opérateur différentiel  $\nabla : C^\infty(T(B)) \rightarrow C^\infty(\Lambda_1 \times T(B))$ , qui pour tout  $X, Y, Z$  appartenant à  $C^\infty(T(B))$ , préserve la métrique selon la relation

$$Xg(Y, Z) = g(\nabla_X Y, Z) + g(Y, \nabla_X Z).$$

Cette connexion vérifie également la condition de torsion nulle

$$\nabla_X Y - \nabla_Y X = [X, Y] \quad \forall X, Y \in C^\infty(T(B)),$$

où  $[X, Y] = XY - YX$  est le commutateur entre les deux champs vectoriels.

Pour cette connexion de Levi-Civita, nous avons le théorème suivant.

**Théorème 1.2** (Existence et unicité de la connexion de Levi-Civita sur le fibré tangent). *Sur le fibré tangent  $T(B)$ , La connexion de Levi-Civita existe et est unique. De plus, la connexion est déterminée par la formule,  $\forall X, Y, Z \in C^\infty(T(B))$*

$$2g(\nabla_X Y, Z) = Xg(Y, Z) + Yg(X, Z) - Zg(X, Y) + g([X, Y], Z) - g([X, Z], Y) - g([Y, Z], X) \quad (1.14)$$

La preuve de ce théorème peut être facilement trouvée dans la littérature, notamment dans [4].

Nous pouvons à présent passer aux coordonnées  $(x^1, x^2, \dots, x^n)$ , et choisir une base de  $T_x(B)$ , qui sera en fait notre trivialisatation du fibré, nous prenons donc  $\sigma = \{\partial_\mu\}_{\mu=1}^n$ , notre base naturelle de l'espace tangent. Nous allons essayer d'avoir une expression pour les coefficients de connexion  $\Gamma_{\mu\nu}^\lambda$ , définis par

$$\nabla_{\partial_\nu} \partial_\mu = \nabla_\nu \partial_\mu = \Gamma_{\mu\nu}^\lambda \partial_\lambda.$$

Ces coefficients de connexion portent également le nom de symboles de Christoffel dans le cadre de la connexion de Levi-Civita. Essayons à présent d'exprimer le terme  $2g(D_\mu \partial_\nu, \partial_\kappa)$ ,

$$2g(D_\mu \partial_\nu, \partial_\kappa) = 2g(\Gamma^\lambda_{\nu\mu} \partial_\lambda, \partial_\kappa) = 2\Gamma^\lambda_{\nu\mu} g(\partial_\lambda, \partial_\kappa) = 2\Gamma^\lambda_{\nu\mu} g_{\lambda\kappa}. \quad (1.15)$$

Mais nous pouvons voir également que le terme précédent peut s'exprimer aussi comme l'expression (1.14). En tenant compte que les commutateurs des vecteurs de la base naturelle sont nuls, nous obtenons

$$2g(D_\mu \partial_\nu, \partial_\kappa) = \partial_\mu g(\partial_\nu, \partial_\kappa) + \partial_\nu g(\partial_\mu, \partial_\kappa) - \partial_\kappa g(\partial_\mu, \partial_\nu) = \partial_\mu g_{\nu\kappa} + \partial_\nu g_{\mu\kappa} - \partial_\kappa g_{\mu\nu}. \quad (1.16)$$

En identifiant les équations (1.15) et (1.16) nous obtenons la relation

$$g_{\lambda\kappa} \Gamma^\lambda_{\nu\mu} = \frac{1}{2} (\partial_\mu g_{\nu\kappa} + \partial_\nu g_{\mu\kappa} - \partial_\kappa g_{\mu\nu}). \quad (1.17)$$

Dans cette définition des symboles de Christoffel en coordonnées, nous pouvons voir que ces symboles sont symétriques sur les deux indices covariants. Cette symétrie provient en fait de la torsion nulle car

$$D_\mu \partial_\nu - D_\nu \partial_\mu = \Gamma^\lambda_{\nu\mu} \partial_\lambda - \Gamma^\kappa_{\mu\nu} \partial_\kappa = (\Gamma^\lambda_{\nu\mu} - \Gamma^\lambda_{\mu\nu}) \partial_\lambda = [\partial_\mu, \partial_\nu] = 0.$$

Maintenant ces coefficients de connexion bien définis, nous pouvons définir un autre opérateur dans le cadre d'un fibré tangent  $T(B)$ , munit de la connexion de Levi-Civita, c'est l'opérateur de courbure de Riemann  $R(.,.) : C^\infty(T(B)) \rightarrow C^\infty(T(B))$  et qui a pour expression

$$R(X, Y)Z = [\nabla_X, \nabla_Y]Z - \nabla_{[X, Y]}Z,$$

où  $X, Y$  et  $Z$  sont des éléments de  $C^\infty(T(B))$ . Essayons de voir la nature de cet opérateur  $R$ .  $R(X, Y)$  s'applique à un vecteur tangent pour donner un autre vecteur tangent,  $R(X, Y)$  appartient à  $Hom(T(B))$ , l'ensemble des homomorphismes (transformations linéaires) de  $T(B)$ . Mais  $R(X, Y)$  s'applique également à deux vecteurs tangents, il a donc un caractère de 2-forme également, Nous concluons donc que  $R$  appartient à l'ensemble  $C^\infty(\Lambda^2 \times Hom(T(B)))$ . En coordonnées, cela donne que la matrice de la transformation linéaire  $\mathcal{R}^\mu_{\nu}$  peut être décomposée en 2-forme via la formule

$$\mathcal{R}^\mu_{\nu} = R^\mu_{\nu\lambda\kappa} dx^\lambda \wedge dx^\kappa,$$

où  $R^\mu_{\nu\lambda\kappa}$  est un tenseur de type (1,3) appelé tenseur de Riemann.

Pour avoir l'expression des composantes du tenseur, nous utilisons une démarche analogue à celle des symboles de Christoffel en calculant

$$R(\partial_\mu, \partial_\nu) \partial_\lambda = [\nabla_{\partial_\mu}, \nabla_{\partial_\nu}] \partial_\lambda - \underbrace{\nabla_{[\partial_\mu, \partial_\nu]} \partial_\lambda}_0$$

Calculons à présent  $\nabla_\mu \nabla_\nu \partial_\lambda$

$$\nabla_\mu \nabla_\nu \partial_\lambda = \nabla_\mu (\Gamma^\kappa_{\lambda\nu} \partial_\kappa) = \nabla_\mu (\Gamma^\kappa_{\lambda\nu}) \partial_\kappa + \Gamma^\kappa_{\lambda\nu} \nabla_\mu \partial_\kappa = \partial_\mu \Gamma^\kappa_{\lambda\nu} \partial_\kappa + \Gamma^\kappa_{\lambda\nu} \Gamma^\eta_{\kappa\mu} \partial_\eta = (\partial_\mu \Gamma^\kappa_{\lambda\nu} + \Gamma^\eta_{\lambda\nu} \Gamma^\kappa_{\eta\mu}) \partial_\kappa$$

Sachant cela, nous pouvons calculer

$$R(\partial_\mu, \partial_\nu)\partial_\lambda = [\nabla_\mu, \nabla_\nu]\partial_\lambda = \nabla_\mu\nabla_\nu\partial_\lambda - \nabla_\nu\nabla_\mu\partial_\lambda = \left(\partial_\mu\Gamma^\kappa_{\lambda\nu} + \Gamma^\eta_{\lambda\nu}\Gamma^\kappa_{\eta\mu} - \partial_\nu\Gamma^\kappa_{\lambda\mu} - \Gamma^\eta_{\lambda\mu}\Gamma^\kappa_{\eta\nu}\right)\partial_\kappa, \quad (1.18)$$

Et par définition de l'opérateur  $R$ , nous obtenons

$$R(\partial_\mu, \partial_\nu)\partial_\lambda = R^\kappa_{\lambda\mu\nu}\partial_\kappa \quad (1.19)$$

En égalisant (1.18) et (1.19) nous obtenons

$$R^\kappa_{\lambda\mu\nu} = \partial_\mu\Gamma^\kappa_{\lambda\nu} - \partial_\nu\Gamma^\kappa_{\lambda\mu} + \Gamma^\eta_{\lambda\nu}\Gamma^\kappa_{\eta\mu} - \Gamma^\eta_{\lambda\mu}\Gamma^\kappa_{\eta\nu}, \quad (1.20)$$

nous avons alors l'expression du tenseur de Riemann en fonction des symboles de Christoffel.

De plus, l'expression (1.19) nous donne une interprétation géométrique à la courbure. En effet, si les dérivées covariantes selon  $\partial_\mu$  et  $\partial_\nu$  commutent, cela nous amènera à un tenseur de Riemann identiquement nul. Un tenseur de Riemann non nul signifie alors que se déplacer de manière infinitésimale dans une direction et puis l'autre ou l'inverse ne revient pas à la même chose, ce qui n'arrive que dans des déplacements sur une surface non-plane.

Le tenseur de Riemann possède des symétries,

$$\begin{aligned} R_{\xi\lambda\mu\nu} &= -R_{\xi\nu\mu\lambda}, \\ R_{\xi\lambda\mu\nu} &= -R_{\lambda\xi\mu\nu}, \\ R_{\xi\lambda\mu\nu} &= R_{\mu\nu\xi\lambda}. \end{aligned}$$

La première symétrie vient de la définition du tenseur de Riemann, les deux autres sont obtenues grâce à la connexion de Levi-Civita. Nous pouvons également définir le tenseur de Ricci,  $R_{\mu\nu}$  défini par

$$R_{\mu\nu} = R^\lambda_{\mu\lambda\nu}, \quad (1.21)$$

ce tenseur est symétrique. Nous définissons également la courbure scalaire, notée  $R$ , qui a pour expression

$$R = g^{\mu\nu}R_{\mu\nu} = R^\mu_{\mu}.$$

Notons que  $R$  est un invariant de la variété.

Le tenseur de Riemann vérifie également les identités de Bianchi dont la première est donnée par

$$R^\xi_{\lambda\mu\nu} + R^\xi_{\mu\nu\lambda} + R^\xi_{\nu\lambda\mu} = 0,$$

et la deuxième

$$\nabla_\xi R^\eta_{\lambda\mu\nu} + \nabla_\nu R^\eta_{\lambda\xi\mu} + \nabla_\mu R^\eta_{\lambda\nu\xi} = 0. \quad (1.22)$$

Nous avons à présent toutes les définitions et outils nécessaires pour le développement des équations du système Einstein-Maxwell par un principe variationnel.

### 1.3 Le système Einstein-Maxwell par principe variationnel

Nous décrirons ici les équations du système que nous allons traiter dans ce mémoire, le système Einstein-Maxwell, système qui traite du couplage de la gravitation et de l'électromagnétisme dans le cadre de la théorie de la relativité générale. Nous allons d'abord définir l'espace-temps utilisé dans le cadre de la relativité, puis définir un lagrangien pour en dériver l'équation d'Einstein dans le vide et en présence d'énergie électromagnétique, puis les équations de Maxwell covariantes. Nous essayerons de retrouver les équations de la physique classique avant de synthétiser le système.

#### 1.3.1 L'espace-temps relativiste et définition du lagrangien

L'espace temps relativiste, est une variété différentiable lorentzienne  $(M, g)$  à 4 dimensions, généralisation de l'espace-temps plat de Minkowski pseudo-euclidien. La valeur propre négative de la métrique correspond donc à la partie temporelle de la variété. Dans cet espace-temps, mis à part la métrique  $g$ , on considère le fibré tangent de cet espace, avec la connexion de Levi-Civita, les tenseurs de Riemann, de Ricci et la courbure scalaire. Nous considérons un champ de 1-forme  $A \in C^\infty(\Lambda^1)$ , qui est en fait le quadripotentiel électromagnétique, équivalent des potentiels vecteurs et magnétiques de l'électrodynamique classique. Nous avons aussi un champ vectoriel tangent  $U \in C^\infty(T(M))$  qui représente la quadrivitesse, qui est un vecteur normalisé et de type temps, c'est-à-dire,  $U_\mu U^\mu = -1$ . Ce vecteur contient les variations des coordonnées par rapport à un paramètre  $\tau$ , appelé temps propre, qui correspond physiquement au temps qui s'écoule dans le référentiel de référence. La variation du temps propre vaut en toute généralité

$$d\tau^2 = \frac{-ds^2}{c^2},$$

où  $ds^2 = g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu$  est l'élément de longueur de la métrique, équivalent à l'intervalle d'espace-temps en relativité restreinte.

Maintenant la structure de l'espace-temps définie, nous pouvons décrire une densité lagrangienne,  $\mathcal{L}$ , qui multipliée par la forme de volume  $\sqrt{-g}d^4x$ , où  $g$  est le déterminant de la métrique, et intégrée sur la variété  $M$ , donne une action. Une fois cela fait, nous pouvons utiliser un principe variationnel pour en déduire les équations du champ. La densité lagrangienne, est la somme de deux contributions, comme nous pouvons le voir dans [5], où l'une est d'origine gravitationnelle et l'autre électromagnétique qui sont données par l'expression

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}_{E-H} + \mathcal{L}_{EM}.$$

Nous allons à présent décrire brièvement ces différentes contributions, en donnant des arguments heuristiques pour chacune d'entre elles .

Le terme  $\mathcal{L}_{E-H}$  est le la densité lagrangienne d'Einstein-Hilbert. Il est défini par

$$\mathcal{L}_{E-H} = \frac{c^4}{16\pi G} R = \frac{1}{2\kappa} R,$$

où  $\kappa = \frac{8\pi G}{c^4}$ , et  $G$  la constante de gravitation de Newton. Cette densité lagrangienne est celle dont découle l'équation d'Einstein en relativité. Pourquoi un terme de cette forme ? Rappelons que

Einstein souhaitait la covariance des équations. Pour cela une équation de caractère tensoriel est un bon candidat car sous cette forme, les lois de transformations tensorielles nous préservent la covariance des équations sous changement de coordonnées. La courbure scalaire fera apparaître, en termes de variations, les tenseurs de Ricci et Riemann et pourront en théorie nous fournir une équation tensorielle. De plus, il y a un principe très important en relativité qui s'appelle le principe d'équivalence. L'idée de ce principe est qu'il est impossible de distinguer localement un champ de pesanteur et un référentiel accéléré par quelque expérience physique non-gravitationnelle que ce soit. Ce principe induit que lorsque nous n'avons pas de champ gravitationnel à proximité, les lois de la physique doivent être celle de la relativité restreinte. Ce qui veut dire que la métrique  $g_{\mu\nu}$  se réduit en  $\eta_{\mu\nu}$ . Dans l'espace-temps que nous avons construit, nous pouvons alors émettre l'hypothèse que la gravitation est une théorie métrique, et c'est ce que Einstein a fait. La relativité générale est en fait basée sur un principe d'équivalence dit principe d'équivalence fort, qui n'accepte que la seule métrique comme descripteur de la gravitation. C'est pourquoi nous avons la densité lagrangienne d'Einstein-Hilbert, qui doit être scalaire puisque l'action est scalaire. Dans [6], est donnée une justification du choix de  $R$  comme scalaire. En effet, la métrique peut être réduite à une forme canonique, en n'importe quel point de la variété avec les dérivées premières de la métrique identiquement nulle. Le scalaire doit alors contenir des termes de dérivées secondes, ce qui est le cas de  $R$ , puisque le tenseur de Riemann contient des dérivées secondes de la métrique. Par souci de simplicité et pour ne pas ajouter de nouveaux degrés de liberté, le seul scalaire indépendant provenant de la métrique, ayant des dérivées de la métrique d'ordre 2 et pas au-dessus, est la courbure scalaire  $R$ . Le facteur  $\frac{1}{2\kappa}$  est un paramètre pour le respect des unités physiques.

Le terme  $\mathcal{L}_{EM}$  est la densité lagrangienne électromagnétique. Ce terme vaut

$$\mathcal{L}_{EM} = \frac{1}{4\mu_0} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} + A_\mu j^\mu,$$

où  $\mu_0$  est la perméabilité du vide magnétique,  $j^\mu$  est le quadrivecteur de courant et  $F_{\mu\nu}$  est le tenseur de Faraday, appelé également tenseur électromagnétique. Ce tenseur a pour expression

$$F_{\mu\nu} = (dA)_{\mu\nu},$$

mais pourquoi utiliser ce tenseur ? En électromagnétisme classique, les 6 composantes du champ électromagnétique dérivent de 4 potentiels, les 3 composantes du potentiel vecteur et le potentiel scalaire. Le quadripotential  $A_\mu$  représente alors ce potentiel. Essayons d'obtenir 6 composantes avec ce quadripotential,  $A_\mu$  étant une 1-forme, si nous prenons la dérivée extérieure, nous obtenons une 2-forme, tenseur de type (0,2) antisymétrique, qui en 4 dimensions comportent 6 composantes indépendantes. Nous avons donc trouvé l'équivalent tensoriel du champ électromagnétique. A l'instar de la densité lagrangienne d'Einstein-Hilbert, nous prenons le scalaire le plus simple comportant le champ électromagnétique  $F_{\mu\nu} F^{\mu\nu}$ , le facteur  $\frac{1}{4\mu_0}$  est là pour des raisons d'unités.

Cependant notre densité lagrangienne contient un autre terme, celui qui évoque les sources électromagnétiques. En effet, les équations de Maxwell de l'électrodynamique classique font intervenir, deux sources, densité de charge et densité de courant, qui comprennent 4 composantes en tout, que nous regroupons dans un vecteur tangent appelé quadricourant, qui est défini par  $j^\mu = \rho U^\mu$ , où  $\rho$  est la densité de charge. Nous devons essayer de contracter ce terme de source avec une 1-forme en décrivant une interaction avec le champ électromagnétique. Il se trouve que la contraction avec

le quadripotential  $A_\mu$  répond à ces critères et en plus les unités de cette contraction correspondent à une densité lagrangienne. Nous venons d'expliquer l'origine du terme  $A_\mu j^\mu$ .

Nous avons donc défini notre géométrie, avec la métrique, la connexion, les indicateurs de courbure, et les différents champs tensoriels. Dans une variété lorentzienne, nous avons également une équation de la dynamique, c'est l'équation des géodésiques, qui représentent les chemins les plus directs sur une variété. Les géodésiques représentent également les lieux où les vecteurs sont transportés parallèlement. Elles donnent également une notion de parallélisme sur une variété. Cette équation en l'absence de forces extérieures est

$$\frac{d^2 x^\mu}{d\sigma^2} + \Gamma^\mu_{\nu\rho} \frac{dx^\nu}{d\sigma} \frac{dx^\rho}{d\sigma} = 0, \quad (1.23)$$

où  $\sigma$  est un paramètre. Il nous reste alors à trouver les équations du champ.

### 1.3.2 L'équation d'Einstein

Nous allons obtenir l'équation de la relativité en appliquant un principe variationnel avec l'action d'Einstein-Hilbert,  $S_{E-H}$ , qui a pour expression

$$S_{E-H} = \frac{c^4}{16\pi G} \int_M R \sqrt{-g} d^4x,$$

où  $g$  désigne le déterminant de la métrique,  $M$  l'espace-temps. Les équations d'Einstein s'obtiennent en imposant la stationnarité de  $S_{E-H}$ , c'est-à-dire

$$\delta S_{E-H} = 0.$$

sous variation des champs,

$$\begin{aligned} g_{\mu\nu} &= g_{\mu\nu} + \delta g_{\mu\nu}, \\ g^{\mu\nu} &= g^{\mu\nu} + \delta g^{\mu\nu}, \end{aligned}$$

où  $\delta g_{\mu\nu} = \delta g^{\mu\nu} = 0$  sur le bord de la variété,  $\partial M$ . Développons  $\delta S_{E-H}$ ,

$$\delta S_{E-H} = \frac{1}{2\kappa} \int_M \delta \left( g^{\mu\nu} R_{\mu\nu} \sqrt{-g} \right) d^4x.$$

Développons à présent la variation

$$\delta S_{E-H} = \frac{1}{2\kappa} \int_M \left( \delta g^{\mu\nu} R_{\mu\nu} \sqrt{-g} + g^{\mu\nu} \delta R_{\mu\nu} \sqrt{-g} + g^{\mu\nu} R_{\mu\nu} \delta \left( \sqrt{-g} \right) \right) d^4x.$$

Nous avons donc une structure telle que décrite dans [7],

$$\delta S_{E-H} = \delta S_1 + \delta S_2 + \delta S_3$$

où

$$\begin{aligned} \delta S_1 &= \frac{1}{2\kappa} \int_M \delta g^{\mu\nu} R_{\mu\nu} \sqrt{-g} d^4x, \\ \delta S_2 &= \frac{1}{2\kappa} \int_M g^{\mu\nu} \delta R_{\mu\nu} \sqrt{-g} d^4x, \text{ et} \\ \delta S_3 &= \frac{1}{2\kappa} \int_M g^{\mu\nu} R_{\mu\nu} \delta \left( \sqrt{-g} \right) d^4x. \end{aligned}$$

Nous allons nous intéresser maintenant à exprimer  $\delta S_2$  en fonction de  $\delta g^{\mu\nu}$ . En utilisant les équations (1.20) et (1.21), nous obtenons

$$R_{\mu\nu} = R^{\lambda}_{\mu\lambda\nu} = \partial_\lambda \Gamma^{\lambda}_{\nu\mu} - \partial_\nu \Gamma^{\lambda}_{\mu\lambda} + \Gamma^{\eta}_{\nu\mu} \Gamma^{\lambda}_{\lambda\eta} - \Gamma^{\eta}_{\mu\lambda} \Gamma^{\lambda}_{\nu\eta}. \quad (1.24)$$

Considérons également une variation des connexions,  $\bar{\Gamma}^{\lambda}_{\mu\nu} = \Gamma^{\lambda}_{\mu\nu} + \delta\Gamma^{\lambda}_{\mu\nu}$ , nous avons alors que

$$\delta\Gamma^{\lambda}_{\mu\nu} = \bar{\Gamma}^{\lambda}_{\mu\nu} - \Gamma^{\lambda}_{\mu\nu}.$$

En utilisant la loi de transformation des  $\Gamma^{\lambda}_{\mu\nu}$ , donné par

$$\bar{\Gamma}^{\gamma}_{\alpha\beta} = \frac{\partial x^\mu}{\partial y^\alpha} \frac{\partial x^\nu}{\partial y^\beta} \frac{\partial y^\gamma}{\partial x^\lambda} \Gamma^{\lambda}_{\mu\nu} + \frac{\partial^2 x^\eta}{\partial y^\alpha \partial y^\beta} \frac{\partial y^\gamma}{\partial x^\eta}$$

nous obtenons que  $\delta\Gamma^{\lambda}_{\mu\nu}$  se transforme comme un tenseur et est donc un tenseur puisqu'il respecte la loi de transformation (1.2). Nous pouvons alors nous placer dans un jeu de coordonnées où tous les coefficients de connexion sont nuls, de sorte que<sup>5</sup>

$$\delta R_{\mu\nu} = \partial_\lambda \delta\Gamma^{\lambda}_{\nu\mu} - \partial_\nu \delta\Gamma^{\lambda}_{\mu\lambda}.$$

Comme les coefficients de connexion sont nuls, la dérivée usuelle est égale à la dérivée covariante, ce qui nous donne

$$g^{\mu\nu} \delta R_{\mu\nu} = g^{\mu\nu} (\nabla_\lambda \delta\Gamma^{\lambda}_{\nu\mu} - \nabla_\nu \delta\Gamma^{\lambda}_{\mu\lambda}) = \nabla_\nu (-g^{\mu\nu} \delta\Gamma^{\lambda}_{\mu\lambda} + g^{\mu\eta} \delta\Gamma^{\nu}_{\mu\eta}) = \nabla_\nu \Psi^\nu$$

où  $\Psi^\nu = g^{\mu\eta} \delta\Gamma^{\nu}_{\mu\eta} - g^{\mu\nu} \delta\Gamma^{\lambda}_{\mu\lambda}$ . Revenons à  $\delta S_2$ ,

$$\delta S_2 = \frac{1}{2\kappa} \int_M \nabla_\nu \Psi^\nu \sqrt{-g} d^4x,$$

en utilisant le théorème d'Ostrogradsky (1.12), nous avons que

$$\delta S_2 = \frac{1}{2\kappa} \int_{\partial M} n_\nu \Psi^\nu \sqrt{-\zeta} d^3x,$$

où  $\zeta$  est une métrique induite sur  $\partial M$ ,  $n_\nu$  est un vecteur normal à  $\partial M$ . Comme  $\delta\Gamma^{\gamma}_{\alpha\beta} = 0$  sur  $\partial M$ , l'intégrale est nulle et par conséquent,  $\delta S_2 = 0$ .

Intéressons nous maintenant à  $\delta S_3$ , il nous est facile de développer  $\delta(\sqrt{-g})$ ,

$$\delta(\sqrt{-g}) = -\frac{1}{2\sqrt{-g}} \delta g,$$

il nous reste à développer  $\delta g$ .

Nous savons que le déterminant de la métrique s'écrit comme

$$g = \sum_{\beta} g_{\alpha\beta} A_{\alpha\beta}$$

---

5. Notez que  $\delta$  et  $\partial$  commutent

pour un  $\alpha$  fixé, où  $A_{\alpha\beta}$  représente le cofacteur de l'élément  $g_{\alpha\beta}$ . Nous pouvons également exprimer la métrique inverse,

$$g^{\alpha\beta} = \frac{1}{g} (A_{\alpha\beta})^T = \frac{A_{\beta\alpha}}{g}$$

Dérivons  $g$  par rapport à  $g_{\alpha\beta}$ ,

$$\frac{\partial g}{\partial g_{\alpha\beta}} = \sum_{\beta} A_{\alpha\beta}.$$

Nous pouvons à présent considérer une variation de  $g$ ,

$$\delta g = \frac{\partial g}{\partial g_{\alpha\beta}} \delta g_{\alpha\beta} = \sum_{\beta} A_{\alpha\beta} \delta g_{\alpha\beta} = g g^{\beta\alpha} \delta g_{\alpha\beta}$$

toujours pour un  $\alpha$  fixé. Nous allons à présent convertir le  $\delta g_{\alpha\beta}$  en  $\delta g^{\alpha\beta}$ ,

$$\delta \delta_{\alpha}^{\gamma} = \delta (g_{\alpha\eta} g^{\eta\gamma}) = g^{\eta\gamma} \delta g_{\alpha\eta} + g_{\alpha\eta} \delta g^{\eta\gamma} = 0$$

Nous obtenons donc

$$g^{\eta\gamma} \delta g_{\alpha\eta} = -g_{\alpha\eta} \delta g^{\eta\gamma},$$

et en multipliant par  $g_{\beta\gamma}$  des deux cotés, nous avons

$$\delta g_{\alpha\beta} = -g_{\beta\gamma} g_{\alpha\eta} \delta g^{\eta\gamma},$$

Ce qui nous donne

$$\delta (\sqrt{-g}) = -\frac{1}{2} \frac{1}{\sqrt{-g}} g g^{\beta\alpha} \delta g_{\alpha\beta} = -\frac{1}{2} \sqrt{-g} g^{\beta\alpha} g_{\alpha\eta} g_{\beta\gamma} \delta g^{\eta\gamma} = -\frac{1}{2} \sqrt{-g} \delta_{\eta}^{\beta} g_{\beta\gamma} \delta g^{\eta\gamma} = -\frac{1}{2} \sqrt{-g} g_{\eta\gamma} \delta g^{\eta\gamma}$$

Nous allons donc injecter l'expression

$$\delta (\sqrt{-g}) = -\frac{1}{2} \sqrt{-g} g_{\alpha\beta} \delta g^{\alpha\beta}$$

dans  $\delta S_3$  ce qui nous donne

$$\delta S_3 = \frac{1}{2\kappa} \int_M -\frac{1}{2} g^{\mu\nu} R_{\mu\nu} \sqrt{-g} g_{\alpha\beta} \delta g^{\alpha\beta} d^4x = \frac{1}{2\kappa} \int_M -\frac{1}{2} R g_{\alpha\beta} \delta g^{\alpha\beta} \sqrt{-g} d^4x.$$

En résumé nous avons,

$$\begin{aligned} \delta S_1 &= \frac{1}{2\kappa} \int_M R_{\mu\nu} \delta g^{\mu\nu} \sqrt{-g} d^4x, \\ \delta S_2 &= 0, \\ \delta S_3 &= \frac{1}{2\kappa} \int_M -\frac{1}{2} R g_{\mu\nu} \delta g^{\mu\nu} \sqrt{-g} d^4x. \end{aligned}$$

Ce qui nous donne

$$\delta S_{E-H} = \delta S_1 + \delta S_2 + \delta S_3 = \frac{1}{2\kappa} \int_M \left( R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} R g_{\mu\nu} \right) \delta g^{\mu\nu} \sqrt{-g} d^4x$$

qui doit être nul pour  $\delta g^{\mu\nu}$  arbitraire. Ce qui revient à dire que

$$G_{\mu\nu} = R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} R g_{\mu\nu} = 0$$

c'est ce que l'on appelle *L'équation d'Einstein* dans le vide. Le tenseur  $G_{\mu\nu}$  est appelé *tenseur d'Einstein*.

Que se passe-t-il quand il y a de la matière ? L'action totale  $S_{tot}$  n'est plus celle d'Einstein-Hilbert, elle a pour expression

$$S_{tot} = S_{E-H} - S_{mat},$$

nous devons alors trouver l'équation qui respecte

$$\delta S_{tot} = 0,$$

ce qui implique que

$$\delta S_{E-H} = \delta S_{mat}. \quad (1.25)$$

Nous allons chercher à exprimer  $\delta S_{mat}$ . Tout d'abord, nous savons que

$$S_{mat} = \int_M \mathcal{L}_{mat} \sqrt{-g} d^4x,$$

où  $\mathcal{L}_{mat}$  est ce que l'on appelle la densité lagrangienne de la matière. Cette densité lagrangienne est fonction des coordonnées et de leurs dérivées. Exprimons à présent la variation de cette action,

$$\delta S_{mat} = \int_M \delta (\mathcal{L}_{mat} \sqrt{-g}) d^4x.$$

Notons que la variation se fait par rapport aux composantes de la métrique, nous pouvons alors décomposer l'équation précédente en

$$\delta S_{mat} = \int_M \left[ \frac{\partial (\mathcal{L}_{mat} \sqrt{-g})}{\partial g^{\mu\nu}} \delta g^{\mu\nu} + \frac{\partial (\mathcal{L}_{mat} \sqrt{-g})}{\partial (\partial_\rho g^{\mu\nu})} \partial_\rho (\delta g^{\mu\nu}) \right] d^4x.$$

En utilisant l'intégration par parties sur le deuxième terme de la somme, le théorème d'Ostrogradsky (1.12) et le fait que  $\delta g^{\mu\nu} = 0$  sur  $\partial M$ , nous obtenons

$$\delta S_{mat} = \int_M \left[ \frac{\partial (\mathcal{L}_{mat} \sqrt{-g})}{\partial g^{\mu\nu}} - \partial_\rho \left( \frac{\partial (\mathcal{L}_{mat} \sqrt{-g})}{\partial (\partial_\rho g^{\mu\nu})} \right) \right] \delta g^{\mu\nu} d^4x.$$

Il nous suffit alors de poser

$$T_{\mu\nu} = \frac{2}{\sqrt{-g}} \left( \frac{\partial (\mathcal{L}_{mat} \sqrt{-g})}{\partial g^{\mu\nu}} - \partial_\rho \left( \frac{\partial (\mathcal{L}_{mat} \sqrt{-g})}{\partial (\partial_\rho g^{\mu\nu})} \right) \right)$$

pour que l'équation (1.25) devienne

$$G_{\mu\nu} = \frac{8\pi G}{c^4} T_{\mu\nu}, \quad (1.26)$$

qui est la bien connue équation d'Einstein. Écrivons cette équation en composantes mixtes

$$G_\mu{}^\nu = R_\mu{}^\nu - \frac{1}{2} R \delta_\mu{}^\nu = \frac{8\pi G}{c^4} T_\mu{}^\nu,$$

en contractant les indices en posant  $\nu = \mu$ , nous avons que

$$R = -\frac{8\pi G}{c^4}T, \quad (1.27)$$

où  $T = T_{\mu}{}^{\nu}$ . L'équation (1.27) nous permet de réécrire l'équation d'Einstein,

$$R_{\mu\nu} = \frac{8\pi G}{c^4} \left( T_{\mu\nu} - \frac{1}{2}Tg_{\mu\nu} \right). \quad (1.28)$$

Pour le tenseur d'Einstein, nous pouvons remarquer qu'en utilisant la contraction de l'identité de Bianchi (1.22) sur les indices  $\mu$  et en utilisant la symétrie du tenseur de Riemann, nous pouvons obtenir que

$$\nabla_{\mu}G^{\mu\nu} = 0.$$

En vertu de l'équation (1.26), nous pouvons alors conclure la conservation locale du tenseur énergie-impulsion, noté

$$\nabla_{\mu}T^{\mu\nu} = 0. \quad (1.29)$$

Cette propriété est alors en fait un corollaire d'un théorème bien connu en physique, appelé théorème de Noether, théorème à l'origine des lois de conservation. La conservation du tenseur énergie-impulsion est en fait une version relativiste de la conservation de l'énergie et de la quantité de mouvement.

A présent, reprenons l'équation des géodésiques (1.23), en prenant  $\sigma = \tau$ , le temps propre d'une particule massive,

$$\frac{d^2x^{\mu}}{d\tau^2} + \Gamma^{\mu}{}_{\nu\rho} \frac{dx^{\nu}}{d\tau} \frac{dx^{\rho}}{d\tau} = 0,$$

Dans la limite classique, c'est à dire des faibles vitesses, nous savons que  $\frac{dx^i}{dt} \ll c$ , où  $i \in \{1,2,3\}$ . Nous allons considérer également le temps de manière classique, comme universel, ce qui veut dire que  $\tau = t$ . En sachant cela, nous pouvons dire que l'équation des géodésiques se résument à

$$\frac{d^2x^i}{dt^2} + \Gamma^i{}_{00}c^2 \approx 0,$$

où nous gardons à l'esprit que  $x^0 = ct$ . En suivant la loi de Newton, nous pouvons dire que  $\frac{d^2x^i}{dt^2} = -\frac{\partial V}{\partial x^j}\delta^{ij}$ , où  $V$  est le potentiel gravitationnel newtonien, nous pouvons donc conclure que

$$\Gamma^i{}_{00} = \frac{1}{c^2}\delta^{ij}\frac{\partial V}{\partial x^j}.$$

En reprenant l'expression des symboles de Christoffel (1.17), en considérant  $g_{ii} = 1, g_{0i} = 0$  et  $g_{00} \neq 0$ , nous obtenons

$$g_{00} = -1 - \frac{2V}{c^2}.$$

Cette expression est valide car si  $V=0$ , nous retombons sur la métrique de Minkowski.

Considérons à présent l'équation (1.28) pour la composante 00, nous avons

$$R_{00} = \frac{8\pi G}{c^4} \left( T_{00} - \frac{1}{2}Tg_{00} \right).$$

Le tenseur énergie impulsion pour la matière classique au repos est  $T_{\mu\nu} = \text{diag}(\rho c^2, 0, 0, 0)$ , et donc,  $T = \rho c^2$ , l'équation se simplifie donc en

$$R_{00} = \frac{1}{2} \frac{8\pi G}{c^4} \rho c^2.$$

En utilisant les équations (1.20) et (1.21), nous obtenons  $R_{00} = \partial_i \Gamma^i_{00}$  ce qui donne

$$R_{00} = \frac{1}{c^2} \delta^{ij} \frac{\partial^2 V}{\partial x^j \partial x^i} = \frac{1}{c^2} \nabla^2 V.$$

En égalant les deux équations, nous obtenons<sup>6</sup>

$$\nabla^2 V = 4\pi G \rho,$$

l'équation de Poisson gravitationnelle newtonienne. Dans la limite classique, l'équation d'Einstein contient la théorie de Newton, cela respecte un principe physique que l'on appelle *le principe de correspondance*.

### 1.3.3 L'équation d'Einstein avec source électromagnétique

Prenons maintenant l'action en l'absence de sources,

$$S_{EM} = \int_M \frac{1}{4\mu_0} g^{\mu\rho} g^{\nu\sigma} F_{\rho\sigma} F_{\mu\nu} \sqrt{-g} d^4x$$

et exprimons sa variation par rapport à la métrique,

$$\delta S_{EM} = \frac{1}{4\mu_0} \int_M \left[ \delta (g^{\mu\rho} g^{\nu\sigma}) F_{\rho\sigma} F_{\mu\nu} \sqrt{-g} + g^{\mu\rho} g^{\nu\sigma} F_{\rho\sigma} F_{\mu\nu} \delta (\sqrt{-g}) \right] d^4x.$$

Par une démarche analogue à l'action d'Einstein-Hilbert, nous avons que

$$\delta S_{EM} = \frac{1}{4\mu_0} \int_M \left( 2g^{\rho\sigma} F_{\mu\rho} F_{\nu\sigma} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} F_{\rho\sigma} F^{\rho\sigma} \right) \delta g^{\mu\nu} \sqrt{-g} d^4x.$$

De la même manière que l'équation d'Einstein en présence de matière, nous avons que  $\delta S_{E-H} = \delta S_{EM}$ , et donc en posant

$$T_{\mu\nu}^{(EM)} = \frac{1}{\mu_0} \left( F_{\mu\rho} F_{\nu}{}^{\rho} - \frac{1}{4} g_{\mu\nu} F_{\rho\sigma} F^{\rho\sigma} \right), \quad (1.30)$$

nous obtenons l'équation

$$G_{\mu\nu} = \frac{8\pi G}{c^4} T_{\mu\nu}^{(EM)}, \quad (1.31)$$

qui est l'équation d'Einstein en présence de champ électromagnétique.

La partie comprenant la source n'intervient pas car si nous développons

$$\int_M A_{\mu} j^{\mu} \sqrt{-g} d^4x = A_{\mu} u^{\mu} \int_M \rho \sqrt{-g} d^4x = A_{\mu} u^{\mu} Q,$$

---

6.  $V \ll c^2$ , nous approximations  $g_{00} \approx -1$

où  $Q$  est la quantité de charge de l'espace temps, cette expression est indépendante de la métrique et donc sa variation par rapport à la métrique sera nulle.

Pour cette équation d'Einstein, il n'y a pas d'équivalent classique puisque gravité et espace-temps sont découplés en physique classique.

Remarquons également que si nous prenons la trace du tenseur énergie-impulsion électromagnétique (1.30), nous avons que cette trace est nulle. Physiquement, cela peut être vu comme une conséquence du fait que la photon est de masse nulle. Mathématiquement, c'est une conséquence de l'invariance conforme en quatre dimensions. Notons que ce n'est valable que dans le cas où nous avons quatre dimensions.

### 1.3.4 Les équations de Maxwell covariantes

Avant de dériver les équations de Maxwell covariantes, nous allons faire un petit détour sur quelques propriétés des formes différentielles, décrites dans [8].

Prenons deux  $k$ -formes,  $\omega$  et  $\chi$ , nous pouvons via (1.3) et (1.6) exprimer le produit extérieur  $\omega \wedge \star \chi$ , qui a pour expression

$$\omega \wedge \star \chi = \frac{n!}{k!k!(n-k)!} \omega_{\mu_1 \mu_2 \dots \mu_k} \chi_{\nu_1 \nu_2 \dots \nu_k} \epsilon^{\nu_1 \nu_2 \dots \nu_k}_{\gamma_{k+1} \gamma_{k+2} \dots \gamma_n} dx^{\mu_1} \wedge dx^{\mu_2} \wedge \dots \wedge dx^{\mu_k} \wedge dx^{\gamma_{k+1}} \wedge dx^{\gamma_{k+2}} \wedge \dots \wedge dx^{\gamma_n},$$

que nous pouvons reformuler comme

$$\omega \wedge \star \chi = \frac{n!}{k!k!(n-k)!} \left( \omega_{\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_k} \chi_{\nu_1 \nu_2 \dots \nu_k} \epsilon^{\nu_1 \nu_2 \dots \nu_k}_{\beta_{k+1} \beta_{k+2} \dots \beta_n} \delta_{\mu_1}^{\alpha_1} \delta_{\mu_2}^{\alpha_2} \dots \delta_{\mu_k}^{\alpha_k} \delta_{\gamma_{k+1}}^{\beta_{k+1}} \delta_{\gamma_{k+2}}^{\beta_{k+2}} \dots \delta_{\gamma_n}^{\beta_n} \right) dx^{\mu_1} \wedge dx^{\mu_2} \wedge \dots \wedge dx^{\mu_k} \wedge dx^{\gamma_{k+1}} \wedge dx^{\gamma_{k+2}} \wedge \dots \wedge dx^{\gamma_n}.$$

En utilisant (1.7) et la formule (1.13), nous pouvons réécrire le produit extérieur comme

$$\omega \wedge \star \chi = \frac{1}{sk!k!(n-k)!} \omega_{\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_k} \chi^{\nu_1 \nu_2 \dots \nu_k} \epsilon_{\nu_1 \nu_2 \dots \nu_k \beta_{k+1} \beta_{k+2} \dots \beta_n} \epsilon^{\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_k \beta_{k+1} \beta_{k+2} \dots \beta_n} \sqrt{-g} d^n x.$$

Et enfin, en utilisant la propriété  $\epsilon_{\nu_1 \nu_2 \dots \nu_k \beta_{k+1} \beta_{k+2} \dots \beta_n} \epsilon^{\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_k \beta_{k+1} \beta_{k+2} \dots \beta_n} = s(n-k)!k! \delta_{\nu_1}^{\alpha_1} \delta_{\nu_2}^{\alpha_2} \dots \delta_{\nu_k}^{\alpha_k}$ , nous obtenons

$$\omega \wedge \star \chi = \frac{1}{k!} \omega_{\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_k} \chi^{\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_k} \sqrt{-g} d^n x. \quad (1.32)$$

Le produit entre une  $k$ -forme et le dual d'Hodge d'une autre  $k$ -forme est relié au produit scalaire entre ces deux  $k$ -formes.

Prenons maintenant  $\omega$  une  $k$ -forme et  $\xi$  une  $(k+1)$ -forme, nous pouvons alors établir une règle de Leibniz pour la dérivée extérieure et le produit extérieur  $\omega \wedge \star \xi$ .

$$d(\omega \wedge \star \xi) = d\omega \wedge \star \xi + (-1)^k \omega \wedge d\star \xi.$$

Nous pouvons placer devant le terme  $d \star \xi$ , en utilisant la relation (1.8), le terme

$$(-1)^{(n-(k+1)+1)(k+1-1)} s \star \star,$$

qui vaut l'identité. Nous obtenons donc

$$d(\omega \wedge \star \xi) = d\omega \wedge \star \xi + \omega \wedge (-1)^k (-1)^{(n-k)k} s \star \star d \star \xi.$$

En utilisant la propriété  $(-1)^k (-1)^{(n-k)k} = (-1)^{nk} (-1)^{-k(k-1)} = (-1)^{nk}$ ,<sup>7</sup>, nous pouvons alors écrire que

$$d(\omega \wedge \star \xi) = d\omega \wedge \star \xi - \omega \wedge \star (-1)^{nk} (-s) \star d \star \xi,$$

où nous remarquons que  $(-1)^{nk} (-s) \star d \star \xi$  est en fait, en utilisant (1.9),  $d^\dagger \xi$ . Nous obtenons donc finalement

$$d(\omega \wedge \star \xi) = d\omega \wedge \star \xi - \omega \wedge \star d^\dagger \xi.$$

En vertu le théorème de Stokes (1.11), si  $\omega$  ou  $\star \xi$  s'annule sur le bord de la variété  $\partial M$ , nous avons

$$\int_M d(\omega \wedge \star \xi) = \int_{\partial M} \omega \wedge \star \xi = 0.$$

Or,  $\int_M d(\omega \wedge \star \xi) = \int_M (d\omega \wedge \star \xi - \omega \wedge \star d^\dagger \xi)$ , nous avons donc la propriété

$$\int_M d\omega \wedge \star \xi = \int_M \omega \wedge \star d^\dagger \xi \quad (1.33)$$

à condition que  $\omega$  ou  $\star \xi$  s'annule sur le bord de la variété  $\partial M$ .

Forts de ces définitions, nous pouvons à présent dériver les équations de Maxwell de notre densité lagrangienne  $\mathcal{L}$ . Nous allons appliquer un principe variationnel en considérant une petite variation du quadripotential  $\delta A_\mu$ , qui s'annule aux bords de la variété  $\partial M$ . Le seul terme qui contient le quadripotential est  $\mathcal{L}_{EM}$ . Décrivons à présent la variation de l'action de ce terme,

$$\delta S_{EM} = \int_M \left( \frac{1}{4\mu_0} \delta (F_{\mu\nu} F^{\mu\nu}) - \delta A_\mu j^\mu \right) \sqrt{-g} d^4 x.$$

Il est trivial que  $\delta (F_{\mu\nu} F^{\mu\nu}) = 2\delta F_{\mu\nu} F^{\mu\nu}$ , et en utilisant le fait que  $F = dA$ , nous obtenons

$$\delta S_{EM} = \int_M \left( \frac{1}{2\mu_0} d(\delta A)_{\mu\nu} (dA)^{\mu\nu} - \delta A_\mu j^\mu \right) \sqrt{-g} d^4 x.$$

Via la formule (1.32), nous avons que

$$\frac{1}{2\mu_0} d(\delta A)_{\mu\nu} (dA)^{\mu\nu} \sqrt{-g} d^4 x = \frac{1}{2\mu_0} 2! d(\delta A) \wedge \star dA,$$

Et en utilisant (1.33), puisque  $\delta A_\mu$  s'annule aux bords de la variété  $\partial M$  et en repassant à un produit scalaire via (1.32), nous avons

$$\frac{1}{\mu_0} d(\delta A) \wedge \star dA = \frac{1}{\mu_0} \delta A \wedge \star d^\dagger dA = \frac{1}{\mu_0} \delta A_\mu (d^\dagger dA)^\mu \sqrt{-g} d^4 x.$$

---

<sup>7</sup>. pour la dernière égalité, nous prenons le fait que  $k(k-1)$ , le produit de deux nombres successifs, est pair.

Sachant cela, la variation de l'action électromagnétique vaut alors

$$\delta S_{EM} = \int_M \left( \frac{1}{\mu_0} (d^\dagger dA)^\mu - j^\mu \right) \delta A_\mu \sqrt{-g} d^4x,$$

et l'équation dérivée par le principe variationnel est alors

$$(d^\dagger dA)^\mu = \mu_0 j^\mu,$$

qui en écriture en termes de formes différentielles et en utilisant  $F = dA$ , donne

$$(d^\dagger F)_\mu = \mu_0 j_\mu \tag{1.34}$$

C'est ce que l'on appelle le deuxième groupe d'équations de Maxwell covariantes. De plus, via la propriété (1.10), nous pouvons voir que

$$d^\dagger d^\dagger F = \mu_0 d^\dagger j = 0,$$

et in en découle donc la propriété

$$d^\dagger j = 0, \tag{1.35}$$

qui est la version covariante de l'équation de continuité.

Le premier groupe d'équations de Maxwell provient d'une propriété de construction du tenseur de Faraday,  $F = dA$ . En effet, la propriété (1.5), nous affirme que

$$d^2 A = d(dA) = 0,$$

ou en d'autres termes,

$$dF = 0. \tag{1.36}$$

Nous avons donc dérivé les deux groupes d'équations de Maxwell covariantes. Notons que le quadripotential possède une liberté de jauge, en effet, si nous avons un champ scalaire  $\psi$  et que nous considérons le quadripotential  $A' = A + d\psi$ , le tenseur de Faraday

$$F = dA' = dA + d^2\psi$$

possède la même forme puisque  $d^2\psi = 0$  par (1.5). Nous pouvons alors choisir une jauge qui est la jauge de Lorenz, et que nous définissons par

$$d^\dagger A = 0. \tag{1.37}$$

Dans ce cas, l'équation (1.34) peut être réécrite sous la forme

$$\left( (d^\dagger d + dd^\dagger) A \right)_\mu = \mu_0 j_\mu,$$

où  $(d^\dagger d + dd^\dagger)$  est en fait une définition du laplacien de Hodge sur la variété. Dans le cas de notre espace-temps, cet opérateur équivaut à l'opposé de l'opérateur d'Alembertien, noté  $\square$ , qui nous donne alors

$$\square A_\mu = -\mu_0 j_\mu, \tag{1.38}$$

qui est une équation d'onde pour le quadripotential, uniquement valable en jauge de Lorenz.

Nous pouvons à présent essayer de retrouver, dans la limite classique, les équations de Maxwell de l'électromagnétisme classique. Dans un premier temps, essayons de retrouver l'expression des équations de Maxwell covariante dans le cadre de la métrique de Minkowski, muni des coordonnées cartésiennes  $(x^0 = ct, x^1, x^2, x^3)$ .

Essayons d'exprimer (1.36), grâce à (1.4) nous obtenons

$$dF = \partial_\kappa F_{\mu\nu} dx^\kappa \wedge dx^\mu \wedge dx^\nu = 0,$$

Les propriétés d'antisymétrie du produit extérieur nous amène à conclure que

$$dx^\kappa \wedge dx^\mu \wedge dx^\nu = dx^\mu \wedge dx^\nu \wedge dx^\kappa = dx^\nu \wedge dx^\kappa \wedge dx^\mu,$$

ce qui nous permet de réécrire  $dF$  sous la forme

$$dF = \frac{1}{3} (\partial_\kappa F_{\mu\nu} + \partial_\mu F_{\nu\kappa} + \partial_\nu F_{\kappa\mu}) dx^\kappa \wedge dx^\mu \wedge dx^\nu = 0. \quad (1.39)$$

Comme toutes les composantes de  $dF$  doivent être identiquement nulles, nous pouvons conclure que l'équation (1.39) revient en métrique de Minkowski à

$$\partial_\kappa F_{\mu\nu} + \partial_\mu F_{\nu\kappa} + \partial_\nu F_{\kappa\mu} = 0. \quad (1.40)$$

Nous verrons dans le chapitre 2 que, dans le cas où nous nous trouvons la connexion de Levi-Civita, les dérivées partielles de l'équation (1.40) peuvent être remplacées par des dérivées covariantes dans n'importe quel système de coordonnées. Nous avons alors l'équation

$$\nabla_\kappa F_{\mu\nu} + \nabla_\mu F_{\nu\kappa} + \nabla_\nu F_{\kappa\mu} = 0. \quad (1.41)$$

Essayons de faire de même pour le deuxième groupe d'équations de Maxwell. Pour ce faire, prenons

$$F = \frac{1}{2!} F_{\mu\nu} dx^\mu \wedge dx^\nu,$$

et essayons de calculer  $d^\dagger F$ . Tout d'abord via (1.6) on a

$$\star F = \frac{1}{2!2!} F_{\mu\nu} \epsilon^{\mu\nu}{}_{\alpha\beta} dx^\alpha \wedge dx^\beta,$$

et en utilisant (1.4) nous avons

$$d \star F = \frac{1}{2!2!} \partial_\kappa (F_{\mu\nu}) \epsilon^{\mu\nu}{}_{\alpha\beta} dx^\kappa \wedge dx^\alpha \wedge dx^\beta.$$

En reprenant le dual d'Hodge et en regardant (1.9), nous obtenons

$$d^\dagger F = \star d \star F = \frac{1}{2!2!} \partial_\kappa (F_{\mu\nu}) \epsilon^{\mu\nu}{}_{\alpha\beta} \epsilon^{\kappa\alpha\beta}{}_\lambda dx^\lambda,$$

et en faisant intervenir l'isomorphisme musical, nous obtenons

$$d^\dagger F = \star d \star F = \frac{1}{2!2!} \partial_\kappa (F^{\mu\nu}) \epsilon_{\mu\nu\alpha\beta} \epsilon^{\kappa\alpha\beta\delta} g_{\delta\lambda} dx^\lambda.$$

Nous pouvons en utilisant les propriétés d'antisymétrie du tenseur de Levi-Civita prouver que  $\epsilon^{\kappa\alpha\beta\delta} = \epsilon^{\kappa\delta\alpha\beta}$ , et que l'équation (1.7) nous donne que  $\epsilon_{\mu\nu\alpha\beta}\epsilon^{\kappa\delta\alpha\beta} = -2!2!\delta_{\mu}^{\kappa}\delta_{\nu}^{\delta}$ .

Nous avons donc l'équation (1.34) qui s'écrit comme

$$d^{\dagger}F = -\partial_{\mu}F^{\mu\nu}g_{\nu\lambda}dx^{\lambda} = \mu_0j_{\lambda}dx^{\lambda} = \mu_0j^{\nu}g_{\nu\lambda}dx^{\lambda},$$

et nous avons donc dans la métrique de Minkowski

$$\partial_{\mu}F^{\mu\nu} = -\mu_0j^{\nu}. \quad (1.42)$$

Dans un système général de coordonnées, notons que le terme  $\epsilon^{\mu\nu}_{\alpha\beta}$  va introduire un terme  $\sqrt{-g}$  dans la dérivée partielle de  $F_{\mu\nu}$ , et que le terme  $\epsilon^{\kappa\alpha\beta}_{\lambda}$  va quant à lui introduire un terme  $\frac{1}{\sqrt{-g}}$ . De plus, dans la connexion de Levi-Civita, nous pouvons facilement conclure via (1.17) que la contraction des symboles de Christoffel vaut

$$\Gamma^{\mu}_{\mu\nu} = \frac{1}{2g}\partial_{\nu}g = \frac{1}{\sqrt{-g}}\partial_{\nu}\sqrt{-g}.$$

Grâce à cela et au fait que le tenseur de Faraday est antisymétrique, nous pouvons conclure que

$$\nabla_{\mu}F^{\mu\nu} = \frac{1}{\sqrt{-g}}\partial_{\mu}\sqrt{-g}F^{\mu\nu}.$$

Le deuxième groupe des équations de Maxwell ont alors, dans un système général de coordonnées, la forme

$$\nabla_{\mu}F^{\mu\nu} - \mu_0j^{\nu}. \quad (1.43)$$

Revenons à la métrique de Minkowski, l'équation de la jauge de Lorenz,  $d^{\dagger}A = 0$ , via la même méthode que pour obtenir l'équation (1.42), donne en coordonnées

$$\partial_{\mu}A^{\mu} = 0. \quad (1.44)$$

Réécrivons l'équation (1.42) en fonction du quadripotentiel,

$$\begin{aligned} \partial_{\mu}F^{\mu\nu} &= -\mu_0j^{\nu}, \\ \partial_{\mu}\eta^{\mu\sigma}\eta^{\nu\lambda}F_{\sigma\lambda} &= -\mu_0\eta^{\nu\lambda}j_{\lambda}, \\ \eta^{\mu\sigma}\eta^{\nu\lambda}\partial_{\mu}(\partial_{\sigma}A_{\lambda} - \partial_{\lambda}A_{\sigma}) &= -\mu_0\eta^{\nu\lambda}j_{\lambda}, \\ \eta^{\mu\sigma}(\partial_{\mu}\partial_{\sigma}A_{\lambda} - \partial_{\mu}\partial_{\lambda}A_{\sigma}) &= -\mu_0j_{\lambda}, \\ (\partial_{\mu}\partial^{\mu}A_{\lambda} - \partial_{\lambda}\partial_{\mu}A^{\mu}) &= -\mu_0j_{\lambda}. \end{aligned}$$

La jauge de Lorenz simplifie l'équation en  $\partial_{\mu}\partial^{\mu}A_{\lambda} = \mu_0j_{\lambda}$ , qui se réécrit comme

$$\square A_{\lambda} = -\mu_0j_{\lambda},$$

où  $\square = \partial_{\mu}\partial^{\mu} = \partial^{\mu}\partial_{\mu}$  est l'opérateur d'Alembertien. Nous avons donc l'équivalent de (1.38).

De la même manière que (1.42), nous pouvons également exprimer l'équation (1.35) en métrique de Minkowski, qui a pour expression

$$\partial_{\mu}j^{\mu} = 0. \quad (1.45)$$

La dernière étape de cette section tente de créer un lien avec l'électromagnétisme classique. Pour cela, plaçons nous en métrique de Minkowski, en coordonnées cartésiennes le vecteur de quadricourant a alors pour expression

$$j^\mu = (\rho c, \vec{j}),$$

où  $\rho$  est la densité de charge et  $\vec{j}$  la densité de courant classique. Nous pouvons alors exprimer l'équation (1.45) comme <sup>8</sup>

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{j} + \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0,$$

où  $\vec{\nabla}$  est le vecteur  $(\partial_x, \partial_y, \partial_z)$  en coordonnées cartésiennes, qui est l'équation de conservation de la charge en physique classique. Nous pouvons également définir le quadripotiel dans un repère inertiel cartésien comme

$$A^\mu = \left( \frac{\phi}{c}, \vec{A} \right),$$

où  $\phi$  désigne le potentiel électromagnétique scalaire et  $\vec{A}$  désigne le potentiel électromagnétique vecteur dans un espace euclidien. La condition de jauge de Lorenz (1.44) devient alors

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{A} + \frac{1}{c^2} \frac{\partial \phi}{\partial t} = 0,$$

et l'équation du champ (1.38) devient

$$\begin{aligned} \square \vec{A} &= -\mu_0 \vec{j}, \text{ et} \\ \square \phi &= -\frac{\rho}{\epsilon_0}, \end{aligned}$$

où  $\epsilon_0$  est la permittivité du vide, constante fondamentale où  $\frac{1}{\mu_0 \epsilon_0} = c^2$ . Dans ce cas l'opérateur d'Alembertien est l'opérateur d'équation d'onde  $\square = -\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} + \nabla^2$ .

Si nous utilisons les expressions qui lient les potentiels aux champs mesurables en coordonnées cartésiennes,

$$\vec{B} = \vec{\nabla} \times \vec{A} \text{ et } \vec{E} = -\vec{\nabla} \phi - \frac{\partial \vec{A}}{\partial t},$$

nous pouvons facilement obtenir les équations bien connues de Maxwell,

$$\begin{aligned} \vec{\nabla} \cdot \vec{E} &= \frac{\rho}{\epsilon_0}, \\ \vec{\nabla} \cdot \vec{B} &= 0, \\ \vec{\nabla} \times \vec{E} &= -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}, \\ \vec{\nabla} \times \vec{B} &= \mu_0 \vec{j} + \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}. \end{aligned}$$

De plus grâce à l'équation (1.2), nous pouvons déduire que, dans ce référentiel inertiel,

$$F_{0j} = \partial_0 A_j - \partial_j A_0 = \partial_0 \eta_{j,i} A^i - \partial_j \eta_{0,i} A^i = \partial_0 A^j + \partial_j A^0 = -\frac{1}{c} \left( -\frac{\partial (\vec{A} \cdot \vec{e}_j)}{\partial t} - \frac{\partial \phi}{\partial x^j} \right) = -\frac{\vec{E} \cdot \vec{e}_j}{c}, \quad (1.46)$$

---

8. Notons que dans l'expression  $\vec{\nabla} \cdot \vec{j}$ , l'opérateur «  $\cdot$  » représente le produit scalaire dans l'espace euclidien 3D

et

$$F_{12} = \partial_1 A_2 - \partial_2 A_1 = \partial_1 \eta_{2,i} A^i - \partial_2 \eta_{1,i} A^i = \partial_1 A^2 - \partial_2 A^1 = (\vec{\nabla} \cdot \vec{A}) \cdot \vec{e}_3 = \vec{B} \cdot \vec{e}_3, \quad (1.47)$$

où  $\vec{e}_j$  est le jème vecteur de base cartésien. Nous pouvons en déduire par des raisonnements analogues à l'expression de  $F_{12}$  que les autres composantes du champ d'induction magnétique se trouvent dans le tenseur  $F_{\mu\nu}$ ,

$$\begin{aligned} F_{13} &= -\vec{B} \cdot \vec{e}_2, \\ F_{23} &= \vec{B} \cdot \vec{e}_1. \end{aligned}$$

Nous pouvons donc conclure que le tenseur de Faraday contient toute l'information du champ électromagnétique.

### 1.3.5 Le système Einstein-Maxwell

Nous avons alors construit les équations qui lient la gravitation et l'électromagnétisme. Nous pouvons alors écrire le système Einstein-Maxwell, qui va coupler la métrique et le tenseur de Faraday, composé des équations (1.31), (1.30), (1.36) et (1.34),

$$\left\{ \begin{array}{l} G_{\mu\nu} = \frac{8\pi G}{c^4} T_{\mu\nu}^{(EM)}, \quad (1.31) \\ T_{\mu\nu}^{(EM)} = \frac{1}{\mu_0} \left( F_{\mu\rho} F_{\nu}{}^{\rho} - \frac{1}{4} g_{\mu\nu} F_{\rho\sigma} F^{\rho\sigma} \right), \quad (1.30) \\ dF = 0, \quad (1.36) \\ (d^\dagger F)_\mu = \mu_0 j_\mu. \quad (1.34) \end{array} \right.$$

Nous pouvons également utiliser les expressions en coordonnées dérivées en métrique de Minkowski, les équations (1.41) et (1.43), et les utiliser pour remplacer (1.36) et (1.34). Le système Einstein-Maxwell peut alors s'écrire

$$\left\{ \begin{array}{l} G_{\mu\nu} = \frac{8\pi G}{c^4} T_{\mu\nu}^{(EM)}, \quad (1.31) \\ T_{\mu\nu}^{(EM)} = \frac{1}{\mu_0} \left( F_{\mu\rho} F_{\nu}{}^{\rho} - \frac{1}{4} g_{\mu\nu} F_{\rho\sigma} F^{\rho\sigma} \right), \quad (1.30) \\ 0 = \nabla_\sigma F_{\mu\nu} + \nabla_\nu F_{\sigma\mu} + \nabla_\mu F_{\nu\sigma}, \quad (1.41) \\ \nabla_\mu F^{\mu\nu} = -\mu_0 j^\nu. \quad (1.43) \end{array} \right.$$

Ce système sera la base des études suivantes dans ce mémoire. Dans ce chapitre, nous avons essayé de décrire dans un cadre mathématique rigoureux les différentes équations du système et le cadre géométrique dans lequel il se trouve.

## Chapitre 2

# Linéarisation du système Einstein-Maxwell

Ce chapitre traite de la linéarisation des équations du système Einstein-Maxwell. Nous allons en fait considérer une approche perturbative de la métrique de notre espace-temps lorentzien  $M$ . La métrique  $g_{\mu\nu}$  peut alors s'écrire comme

$$g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu} + \bar{h}_{\mu\nu}, \quad (2.1)$$

où  $\eta_{\mu\nu}$  est la métrique de Minkowski, considérée comme la métrique de base de l'espace-temps et  $\bar{h}_{\mu\nu} \ll 1$  et la perturbation de celle-ci. Pourquoi imposer ces conditions à notre métrique ? Il faut remarquer que l'équation d'Einstein (1.31), qui lie gravitation et l'énergie électromagnétique, lie les deux tenseurs avec une constante,  $\frac{8\pi G}{c^4}$ , qui dans les unités du SI, donne une valeur de l'ordre de  $10^{-43}$ , il faut donc que le tenseur énergie-impulsion  $T_{\mu\nu}$  possède des composantes d'une assez grande valeur, pour que le terme de droite de (1.31) soit vraiment significatif. En effet, le tenseur d'Einstein  $G_{\mu\nu}$  contient les dérivées secondes de la métrique, et par conséquent un terme de droite trop petit dans (1.31) ne permet pas de bien évaluer les variations de la métrique  $g_{\mu\nu}$ . Comme les composantes de  $T_{\mu\nu}$  correspondent en unité du SI à une densité d'énergie divisée par  $c^2$ , nous allons donc considérer comme source électromagnétique un champ qui permet de décomposer la métrique de notre espace-temps comme la formule (2.1). Ce qui est à l'heure actuelle tout à fait applicable à tous les champs électromagnétiques possibles en laboratoire. Nous allons donc linéariser une par une les équations du système via la métrique (2.1), en commençant par l'équation d'Einstein (1.31), pour développer ce que l'on appelle la théorie des ondes gravitationnelles. Ensuite nous décrirons la linéarisation des autres équations du système. Qu'entendons-nous exactement par linéariser ? Il s'agit en fait de ne garder dans les équations que les termes du premier ordre en  $\bar{h}_{\mu\nu}$ , vu que l'on peut accepter que les termes du type  $\bar{h}_{\mu\nu}^2$  soient négligeables. D'où l'appellation linéarisation. Nous pouvons également voir que la métrique inverse  $g^{\mu\nu}$  peut s'écrire sous la forme perturbative

$$g^{\mu\nu} = \eta^{\mu\nu} + k^{\mu\nu}.$$

Essayons à présent de connaître la relation entre  $k^{\mu\nu}$  et  $h_{\mu\nu}$  en utilisant le fait que  $g^{\mu\lambda}g_{\lambda\nu} = \delta_\nu^\mu$ .

Nous avons alors

$$g^{\mu\lambda}g_{\lambda\nu} = (\eta^{\mu\lambda} + k^{\mu\lambda})(\eta_{\lambda\nu} + \bar{h}_{\lambda\nu}) = \eta^{\mu\lambda}\eta_{\lambda\nu} + \eta^{\mu\lambda}\bar{h}_{\lambda\nu} + k^{\mu\lambda}\eta_{\lambda\nu} + k^{\mu\lambda}\bar{h}_{\lambda\nu} = \delta_\nu^\mu.$$

En utilisant le fait que  $\eta^{\mu\lambda}\eta_{\lambda\nu} = \delta_\nu^\mu$  et le fait que le terme  $k^{\mu\lambda}\bar{h}_{\lambda\nu}$  soit négligeable car du second ordre, nous obtenons la relation  $k^{\mu\lambda}\eta_{\lambda\nu} = -\eta^{\mu\lambda}\bar{h}_{\lambda\nu}$ , ou de manière équivalente

$$k^{\mu\nu} = -\eta^{\lambda\nu}\eta^{\mu\kappa}\bar{h}_{\kappa\nu} = -\bar{h}^{\mu\nu}.$$

Nous pouvons alors considérer l'expression de la métrique inverse par la formule

$$g^{\mu\nu} = \eta^{\mu\nu} - \bar{h}^{\mu\nu}. \quad (2.2)$$

Remarquons donc que  $\bar{h}^{\mu\nu}$  et  $\bar{h}_{\mu\nu}$  ne sont pas inverse l'un de l'autre.

## 2.1 Linéarisation de l'équation d'Einstein, théorie des ondes gravitationnelles

Dans cette section, nous allons tout d'abord tenter de linéariser le tenseur d'Einstein, pour ensuite obtenir l'équation des ondes gravitationnelles via l'équation d'Einstein. Une fois cette équation dérivée, nous parlerons de quelques propriétés de ces ondes, notamment leurs polarisations. Cette section est une synthèse de lectures personnelles, des sources [7] et [9], nécessaires à une bonne compréhension du sujet.

### 2.1.1 Linéarisation du tenseur d'Einstein

En considérant l'expression de la métrique (2.1) et de son inverse (2.2), nous pouvons réécrire l'expression des symboles de Christoffel (1.17) comme

$$\Gamma^\lambda_{\mu\nu} = \frac{1}{2}(\eta^{\lambda\kappa} - \bar{h}^{\lambda\kappa})(\partial_\mu\bar{h}_{\nu\kappa} + \partial_\nu\bar{h}_{\mu\kappa} - \partial_\kappa\bar{h}_{\mu\nu}).$$

Nous pouvons à présent négliger les termes d'ordre supérieur à 1, donc tous les termes en  $(h\partial h)$ , et nous obtenons alors l'expression des symboles de Christoffel linéarisés,

$$\Gamma^\lambda_{\mu\nu} = \frac{1}{2}\eta^{\lambda\kappa}(\partial_\mu\bar{h}_{\nu\kappa} + \partial_\nu\bar{h}_{\mu\kappa} - \partial_\kappa\bar{h}_{\mu\nu}). \quad (2.3)$$

Essayons à présent d'exprimer le tenseur de Riemann, défini par (1.20). Nous pouvons remarquer que comme les symboles de Christoffel s'expriment comme (2.3), les termes qui multiplient deux symboles entre-eux seront d'ordre deux. Le tenseur de Riemann linéarisé prend donc la forme suivante

$$R^\kappa_{\lambda\mu\nu} = \partial_\mu\Gamma^\kappa_{\lambda\nu} - \partial_\nu\Gamma^\kappa_{\lambda\mu}.$$

Nous pouvons alors définir facilement le tenseur de Ricci linéarisé par la contraction  $R_{\mu\nu} = R^\lambda_{\mu\lambda\nu}$ , nous avons donc

$$R_{\mu\nu} = \partial_\lambda\Gamma^\lambda_{\mu\nu} - \partial_\nu\Gamma^\lambda_{\lambda\mu} = \frac{1}{2}\eta^{\lambda\kappa}(\partial_\lambda(\partial_\mu\bar{h}_{\nu\kappa} + \partial_\nu\bar{h}_{\mu\kappa} - \partial_\kappa\bar{h}_{\mu\nu}) + \partial_\nu(\partial_\mu\bar{h}_{\lambda\kappa} + \partial_\lambda\bar{h}_{\mu\kappa} - \partial_\kappa\bar{h}_{\mu\lambda})).$$

En simplifiant les termes, nous arrivons à l'expression du tenseur de Ricci linéarisé, qui s'écrit comme

$$R_{\mu\nu} = \frac{1}{2}(\eta^{\lambda\kappa}(\partial_\lambda\partial_\mu\bar{h}_{\nu\kappa} + \partial_\lambda\partial_\nu\bar{h}_{\mu\kappa} - \partial_\lambda\partial_\kappa\bar{h}_{\mu\nu}) - \partial_\mu\partial_\nu\bar{h}), \quad (2.4)$$

où nous avons utilisé  $\bar{h} = \eta^{\mu\nu} \bar{h}_{\mu\nu}$ , la trace de la perturbation.

Après les tenseurs de Riemann et Ricci, il nous reste bien évidemment la courbure scalaire linéarisée, que nous allons contracter grâce à la métrique de Minkowski, pour obtenir tous les termes d'ordre un. Nous avons alors

$$\begin{aligned} R &= \eta^{\mu\nu} R_{\mu\nu} = \frac{1}{2} \eta^{\mu\nu} \left( \eta^{\lambda\kappa} \left( \partial_\lambda \partial_\mu \bar{h}_{\nu\kappa} + \partial_\lambda \partial_\nu \bar{h}_{\mu\kappa} - \partial_\lambda \partial_\kappa \bar{h}_{\mu\nu} \right) - \partial_\mu \partial_\nu \bar{h} \right) \\ &= \frac{1}{2} \left( \partial_\lambda \partial_\mu \bar{h}^{\mu\lambda} + \partial_\lambda \partial_\nu \bar{h}^{\nu\lambda} - \eta^{\lambda\kappa} \partial_\lambda \partial_\kappa \bar{h} - \eta^{\mu\nu} \partial_\mu \partial_\nu \bar{h} \right). \end{aligned}$$

Nous pouvons donc obtenir l'expression la courbure scalaire linéarisée, qui s'écrit comme

$$R = \eta^{\alpha\beta} \left( \eta^{\lambda\kappa} \partial_\kappa \partial_\beta \bar{h}_{\alpha\lambda} - \partial_\alpha \partial_\beta \bar{h} \right). \quad (2.5)$$

Nous avons à présent tous les éléments pour obtenir la version linéarisée du tenseur d'Einstein, par l'équation (1.3.2), ce qui nous donne

$$G_{\mu\nu} = R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} R g_{\mu\nu} = R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} R \eta_{\mu\nu},$$

car comme pour les précédents tenseurs, le produit  $R g_{\mu\nu}$  se réduit en  $R \eta_{\mu\nu}$  au premier ordre. Le tenseur d'Einstein linéarisé s'écrit à l'aide de (2.4) et (2.5) donc comme

$$G_{\mu\nu} = \frac{1}{2} \left( \eta^{\lambda\kappa} \left( \partial_\lambda \partial_\mu \bar{h}_{\nu\kappa} + \partial_\lambda \partial_\nu \bar{h}_{\mu\kappa} - \partial_\lambda \partial_\kappa \bar{h}_{\mu\nu} \right) - \partial_\mu \partial_\nu \bar{h} \right) - \frac{1}{2} \eta^{\alpha\beta} \left( \eta^{\lambda\kappa} \partial_\kappa \partial_\beta \bar{h}_{\alpha\lambda} - \partial_\alpha \partial_\beta \bar{h} \right) \eta_{\mu\nu}. \quad (2.6)$$

Notre tenseur d'Einstein est donc linéarisé. Pour avoir une écriture de l'équation d'Einstein sous la forme d'une équation d'onde, nous allons passer à l'écriture du tenseur à l'aide de la perturbation à trace renversée.

### 2.1.2 Passage à la perturbation à trace renversée

La perturbation à trace renversée,  $h_{\mu\nu}$  est définie par

$$h_{\mu\nu} = \bar{h}_{\mu\nu} - \frac{1}{2} \bar{h} \eta_{\mu\nu}. \quad (2.7)$$

Si nous calculons la trace de cette perturbation, nous avons  $h = \eta^{\mu\nu} h_{\mu\nu} = -\bar{h}$ , ce qui explique le nom de perturbation à trace renversée. Nous allons réécrire l'expression du tenseur d'Einstein en utilisant la formule  $\bar{h}_{\mu\nu} = h_{\mu\nu} - \frac{1}{2} h \eta_{\mu\nu}$ , nous avons alors

$$\begin{aligned} G_{\mu\nu} &= \frac{1}{2} \left( \eta^{\lambda\kappa} \left( \partial_\lambda \partial_\mu \left( h_{\nu\kappa} - \frac{1}{2} h \eta_{\nu\kappa} \right) + \partial_\lambda \partial_\nu \left( h_{\mu\kappa} - \frac{1}{2} h \eta_{\mu\kappa} \right) - \partial_\lambda \partial_\kappa \left( h_{\nu\mu} - \frac{1}{2} h \eta_{\nu\mu} \right) \right) + \partial_\mu \partial_\nu h \right) \\ &\quad - \frac{1}{2} \eta^{\alpha\beta} \left( \eta^{\lambda\kappa} \partial_\kappa \partial_\beta \left( h_{\alpha\lambda} - \frac{1}{2} h \eta_{\alpha\lambda} \right) + \partial_\alpha \partial_\beta h \right) \eta_{\mu\nu}, \end{aligned}$$

et en développant les termes nous obtenons

$$\begin{aligned} G_{\mu\nu} &= \frac{1}{2} \left( \partial_\lambda \partial_\mu \left( \eta^{\lambda\kappa} h_{\nu\kappa} \right) - \frac{1}{2} \delta_\nu^\lambda \partial_\lambda \partial_\mu h + \partial_\lambda \partial_\nu \left( \eta^{\lambda\kappa} h_{\mu\kappa} \right) - \frac{1}{2} \delta_\mu^\lambda \partial_\lambda \partial_\nu h - \eta^{\lambda\kappa} \partial_\lambda \partial_\kappa h_{\mu\nu} + \frac{1}{2} \eta^{\lambda\kappa} \eta_{\mu\nu} \partial_\lambda \partial_\kappa h \right. \\ &\quad \left. + \partial_\mu \partial_\nu h - \eta^{\alpha\beta} \partial_\alpha \partial_\beta h \eta_{\mu\nu} - \eta^{\alpha\beta} \partial_\beta \partial_\kappa \left( \eta^{\lambda\kappa} h_{\alpha\lambda} \right) \eta_{\mu\nu} + \frac{1}{2} \delta_\lambda^\beta \eta^{\beta\kappa} \partial_\lambda \partial_\kappa h \right). \end{aligned}$$

Il nous reste à simplifier les termes, remarquer que  $\eta^{\lambda\kappa}\partial_\lambda\partial_\kappa h_{\mu\nu} = \square h_{\mu\nu}$  et poser

$$V_\alpha = \partial_\kappa (\eta^{\lambda\kappa} h_{\alpha\lambda}), \quad (2.8)$$

pour nous permettre d'obtenir

$$G_{\mu\nu} = \frac{1}{2} \left( -\square h_{\mu\nu} + \partial_\mu V_\nu + \partial_\nu V_\mu - \eta^{\alpha\beta} \partial_\alpha V_\beta \eta_{\mu\nu} \right). \quad (2.9)$$

Nous avons alors que l'équation d'Einstein (1.31), via l'équation (2.9), peut s'écrire sous la forme

$$\square h_{\mu\nu} - \partial_\mu V_\nu - \partial_\nu V_\mu + \eta^{\alpha\beta} \partial_\alpha V_\beta \eta_{\mu\nu} = -\frac{16\pi G}{c^4} T_{\mu\nu}. \quad (2.10)$$

Nous avons une équation qui contient un d'Alembertien, donc nous avons une forme d'équation qui ressemble à celle d'une équation d'onde. Mais dans la construction de notre perturbation, une liberté de jauge existe.

### 2.1.3 Liberté de jauge et équation d'onde

Dans notre écriture de la métrique (2.1), il existe une liberté de jauge due au choix des coordonnées, supposons que la métrique décrite par (2.1) est la métrique dans un système de coordonnées  $\{x^\mu\}_{\mu=0}^3$ . Supposons maintenant d'autres coordonnées  $\{y^\mu\}_{\mu=0}^3$ , définies par

$$y^\mu = x^\mu + \xi^\mu, \quad (2.11)$$

où les  $\{\xi^\mu\}_{\mu=0}^3$  sont des coordonnées arbitraires de même ordre de grandeur que  $h_{\mu\nu}$ .

La jacobienne du changement de coordonnées (2.11) est alors donnée par

$$\frac{\partial y^\alpha}{\partial x^\mu} = \frac{\partial (x^\alpha + \xi^\alpha)}{\partial x^\mu} = \delta_\mu^\alpha + \partial_\mu \xi^\alpha$$

Le changement inverse est donc

$$\frac{\partial x^\mu}{\partial y^\alpha} = \frac{\partial (y^\mu - \xi^\mu)}{\partial y^\alpha} = \delta_\alpha^\mu - \frac{\partial \xi^\mu}{\partial x^\kappa} \frac{\partial x^\kappa}{\partial y^\alpha} = \delta_\alpha^\mu - \frac{\partial \xi^\mu}{\partial x^\kappa} \left( \delta_\alpha^\kappa - \frac{\partial \xi^\kappa}{\partial x^\lambda} \frac{\partial x^\lambda}{\partial y^\alpha} \right).$$

Comme nous ne considérons que les termes au premier ordre en  $\xi^\alpha$ , nous avons que

$$\frac{\partial x^\mu}{\partial y^\alpha} = \delta_\alpha^\mu - \frac{\partial \xi^\mu}{\partial x^\alpha} = \delta_\alpha^\mu - \partial_\alpha \xi^\mu. \quad (2.12)$$

En utilisant (2.12), nous pouvons exprimer la métrique dans ce nouveau système de coordonnées  $\{y^\mu\}_{\mu=0}^3$ ,  $g'_{\mu\nu}$ , qui vaut alors

$$g'_{\alpha\beta} = g_{\mu\nu} \frac{\partial x^\mu}{\partial y^\alpha} \frac{\partial x^\nu}{\partial y^\beta} = g_{\mu\nu} (\delta_\alpha^\mu - \partial_\alpha \xi^\mu) (\delta_\beta^\nu - \partial_\beta \xi^\nu) = g_{\mu\nu} \delta_\alpha^\mu \delta_\beta^\nu - g_{\mu\nu} \delta_\alpha^\mu \partial_\beta \xi^\nu - g_{\mu\nu} \partial_\alpha \xi^\mu \delta_\beta^\nu + g_{\mu\nu} \partial_\alpha \xi^\mu \partial_\beta \xi^\nu.$$

En négligeant une nouvelle fois un terme du second ordre,  $g_{\mu\nu} \partial_\alpha \xi^\mu \partial_\beta \xi^\nu$ , nous avons que

$$g'_{\alpha\beta} - g_{\alpha\beta} = g_{\alpha\nu} \partial_\beta \xi^\nu - g_{\mu\beta} \partial_\alpha \xi^\mu = (\eta_{\alpha\nu} + \bar{h}_{\alpha\nu}) \partial_\beta \xi^\nu + (\eta_{\mu\beta} + \bar{h}_{\mu\beta}) \partial_\alpha \xi^\mu.$$

La métrique  $g'_{\mu\nu}$  peut finalement s'écrire, en négligeant les termes du second ordre impliquant un produit ( $h\xi$ ), comme

$$g'_{\alpha\beta} = \eta_{\alpha\beta} + \bar{h}'_{\alpha\beta},$$

où  $\bar{h}'_{\alpha\beta}$  est défini par

$$\bar{h}'_{\alpha\beta} = \bar{h}_{\alpha\beta} - \partial_\beta \xi_\alpha - \partial_\alpha \xi_\beta. \quad (2.13)$$

Nous pouvons à présent montrer que ce changement de coordonnées conserve le tenseur de Riemann. Pour cela, nous devons montrer que  $R'^{\kappa}_{\lambda\mu\nu} - R^{\kappa}_{\lambda\mu\nu} = 0$ . Développons cette différence

$$\begin{aligned} R'^{\kappa}_{\lambda\mu\nu} - R^{\kappa}_{\lambda\mu\nu} &= \partial_\mu \Gamma'^{\kappa}_{\lambda\nu} - \partial_\nu \Gamma'^{\kappa}_{\lambda\mu} - \partial_\mu \Gamma^{\kappa}_{\lambda\nu} + \partial_\nu \Gamma^{\kappa}_{\lambda\mu} \\ &= \frac{1}{2} \eta^{\kappa\alpha} \left( \partial_\mu \partial_\lambda (\bar{h}'_{\alpha\nu} - \bar{h}_{\alpha\nu}) + \partial_\mu \partial_\nu (\bar{h}'_{\alpha\lambda} - \bar{h}_{\alpha\lambda}) - \partial_\mu \partial_\alpha (\bar{h}'_{\lambda\nu} - \bar{h}_{\lambda\nu}) \right. \\ &\quad \left. - \partial_\nu \partial_\lambda (\bar{h}'_{\alpha\mu} - \bar{h}_{\alpha\mu}) + \partial_\nu \partial_\mu (\bar{h}'_{\alpha\lambda} - \bar{h}_{\alpha\lambda}) - \partial_\nu \partial_\alpha (\bar{h}'_{\lambda\mu} - \bar{h}_{\lambda\mu}) \right) \\ &= \frac{1}{2} \eta^{\kappa\alpha} \left( \underbrace{-\partial_\mu \partial_\lambda \partial_\alpha \xi_\nu}_{t_1} - \underbrace{\partial_\mu \partial_\lambda \partial_\nu \xi_\alpha}_{t_2} - \underbrace{\partial_\mu \partial_\nu \partial_\alpha \xi_\lambda}_{t_3} - \underbrace{\partial_\mu \partial_\nu \partial_\lambda \xi_\alpha}_{t_2} \right. \\ &\quad \left. + \underbrace{\partial_\mu \partial_\alpha \partial_\lambda \xi_\nu}_{t_1} + \underbrace{\partial_\mu \partial_\alpha \partial_\nu \xi_\lambda}_{t_3} + \underbrace{\partial_\nu \partial_\lambda \partial_\alpha \xi_\mu}_{t_4} + \underbrace{\partial_\nu \partial_\lambda \partial_\mu \xi_\alpha}_{t_2} + \underbrace{\partial_\nu \partial_\mu \partial_\alpha \xi_\lambda}_{t_3} \right. \\ &\quad \left. + \underbrace{\partial_\nu \partial_\mu \partial_\lambda \xi_\alpha}_{t_2} - \underbrace{\partial_\nu \partial_\alpha \partial_\mu \xi_\lambda}_{t_3} - \underbrace{\partial_\nu \partial_\alpha \partial_\lambda \xi_\mu}_{t_4} \right) \\ &= 0. \end{aligned}$$

Le changement de coordonnées infinitésimal (2.11) rend le tenseur de Riemann invariant, nous allons donc pouvoir utiliser les composantes  $\{\xi^\mu\}_{\mu=0}^3$  comme un potentiel de jauge. Pour cela, regardons comment la perturbation à trace renversée  $h_{\mu\nu}$  se transforme sous le changement de coordonnées infinitésimal (2.11). En utilisant (2.7) et (2.13), nous avons que

$$h'_{\alpha\beta} = \bar{h}'_{\alpha\beta} - \frac{1}{2} \bar{h}' \eta_{\alpha\beta} = \bar{h}_{\alpha\beta} - \partial_\beta \xi_\alpha - \partial_\alpha \xi_\beta - \frac{1}{2} \eta_{\alpha\beta} \underbrace{\eta^{\mu\nu} (\bar{h}_{\mu\nu} - \partial_\nu \xi_\mu - \partial_\mu \xi_\nu)}_{\bar{h} - 2\partial_\mu \xi^\mu}.$$

Ce qui nous amène à conclure que

$$h'_{\alpha\beta} = h_{\alpha\beta} - \partial_\beta \xi_\alpha - \partial_\alpha \xi_\beta + \eta_{\alpha\beta} \partial_\mu \xi^\mu. \quad (2.14)$$

Nous pouvons alors nous intéresser à la modification de  $V_\alpha$  sous le changement de coordonnées infinitésimal. En utilisant (2.8) et (2.14), nous obtenons

$$\begin{aligned} V'_\alpha &= \partial_\kappa (\eta^{\lambda\kappa} h'_{\alpha\lambda}) = \partial_\kappa (\eta^{\lambda\kappa} (h_{\alpha\lambda} - \partial_\lambda \xi_\alpha - \partial_\alpha \xi_\lambda + \eta_{\alpha\lambda} \partial_\mu \xi^\mu)) \\ &= V_\alpha - \partial_\alpha \partial_\kappa \xi^\kappa + \partial_\alpha \partial_\mu \xi^\mu - \eta^{\lambda\kappa} \partial_\kappa \partial_\lambda \xi_\alpha = V_\alpha - \square \xi_\alpha. \end{aligned}$$

Il nous suffit alors de choisir  $\square \xi_\alpha = V_\alpha$ , pour nous trouver dans un système de coordonnées où

$$V'_\alpha = 0.$$

Imaginons alors que nous nous trouvons dans un système tel que celui-ci, la perturbation  $h_{\mu\nu}$  respecte alors la jauge de Lorenz, notée  $V_\alpha = 0$  ou bien de manière équivalente

$$\partial_\mu h^{\mu\alpha} = 0. \quad (2.15)$$

Grâce à la jauge de Lorenz (2.15), l'équation d'Einstein (2.9), se réécrit sous la forme d'équation d'onde suivante,

$$\square h_{\mu\nu} = -\frac{16\pi G}{c^4} T_{\mu\nu}, \quad (2.16)$$

qui est l'équation des ondes gravitationnelles. Nous allons pouvoir à présent étudier le comportement de ces ondes dans le vide.

### 2.1.4 Les polarisations des ondes gravitationnelles

Plaçons nous dans le vide, dans ce cas, l'équation des ondes gravitationnelles (2.16) prend la forme

$$\square h^{\mu\nu} = 0, \quad (2.17)$$

où nous avons pris la version contravariante de l'équation. Pour simplifier notre analyse, nous allons supposer, comme fait dans [9] et [10], que notre solution  $h^{\mu\nu}$  est une onde plane, c'est-à-dire

$$h^{\mu\nu} = A^{\mu\nu} e^{ik_\alpha x^\alpha},$$

où  $x^\alpha = (ct, x^1, x^2, x^3)$  représente les coordonnées et  $k_\alpha = \left(-\frac{\omega}{c}, 0, 0, k\right)$  représente l'équivalent relativiste du vecteur d'onde. Notons que, vu la forme de  $k$ , notre onde est une onde plane se déplaçant selon la direction  $x^3$ . Avec cette hypothèse, développons à présent l'équation (2.17)

$$\square h^{\mu\nu} = \eta^{\alpha\beta} \partial_\alpha \partial_\beta h^{\mu\nu} = \eta^{\alpha\beta} \partial_\alpha (ik_\beta h^{\mu\nu}) = -\eta^{\alpha\beta} k_\alpha k_\beta h^{\mu\nu} = -k_\alpha k^\alpha h^{\mu\nu} = 0.$$

Cela nous amène à la relation

$$k_\alpha k^\alpha = 0,$$

qui se réduit en termes de composantes à

$$\frac{\omega^2}{c^2} = k^2, \quad (2.18)$$

appelée relation de dispersion de l'onde, cela veut dire que notre onde se déplace à la vitesse de la lumière  $c$ .

Intéressons-nous à présent à la condition de jauge de Lorenz. Pour cela, développons (2.15)

$$\partial_\mu h^{\mu\nu} = \partial_\mu (A^{\mu\nu} e^{ik_\alpha x^\alpha}) = A^{\mu\nu} ik_\mu e^{ik_\alpha x^\alpha} = 0$$

La jauge est alors réécrite par la relation

$$k_\mu A^{\mu\nu} = 0. \quad (2.19)$$

Avec la forme de l'équation (2.19), l'expression de  $k_\mu$  et la relation (2.18), nous avons que

$$A^{0\mu} = \pm A^{3\mu}, \quad (2.20)$$

où le signe dépend du sens de propagation de l'onde.

Remarquons également que la jauge de Lorenz (2.15), permet une liberté de jauge. En effet, si nous choisissons un changement de coordonnées infinitésimal (2.11) tel que  $\square \xi_\alpha = 0$ , nous sommes toujours en jauge de Lorenz.

Comme pour notre onde  $h_{\mu\nu}$ , nous allons considérer le vecteur arbitraire de changement de coordonnées infinitésimal comme

$$\xi^\mu = B^\mu e^{ik_\alpha x^\alpha} \quad (2.21)$$

Sous ces hypothèses, développons alors l'équation (2.14)

$$h'^{\mu\nu} = h^{\mu\nu} - \partial^\mu \xi^\nu - \partial^\nu \xi^\mu + \eta^{\mu\nu} \partial_\lambda \xi^\lambda = (A^{\mu\nu} - ik^\mu B^\nu - ik^\nu B^\mu + i\eta^{\mu\nu} k_\lambda B^\lambda) e^{ik_\alpha x^\alpha} = A'^{\mu\nu} e^{ik_\alpha x^\alpha}.$$

Nous avons alors la modification de notre amplitude  $A^{\mu\nu}$  sous changement de coordonnées infinitésimal,

$$A'^{\mu\nu} = A^{\mu\nu} - ik^\mu B^\nu - ik^\nu B^\mu + i\eta^{\mu\nu} k_\lambda B^\lambda. \quad (2.22)$$

Nous pouvons alors choisir un changement de coordonnées infinitésimal où le vecteur arbitraire  $B^\alpha$  est choisi tel que

$$\eta_{\mu\nu} A^{\mu\nu} = 0 \quad \text{et} \quad A^{0j} = 0,$$

où  $j \in \{1, 2, 3\}$ , pour obtenir une jauge transverse et sans trace, plus communément appelé jauge TT. En effet, la jauge de Lorenz (2.19), avec  $\nu = 0$  réduit à l'équation

$$k_0 A^{00} = 0,$$

donc nous pouvons conclure que

$$A^{0\mu} = 0, \quad (2.23)$$

et la propriété  $\eta_{\mu\nu} A^{\mu\nu} = 0$ , peut être réécrite en

$$A = A^\mu{}_\mu = 0. \quad (2.24)$$

Les équations (2.20), (2.23) et (2.24), nous amènent à conclure que nous n'avons que deux composantes indépendantes non nulles, qui sont

$$A^{11} = -A^{22} = A_+, \quad \text{et}$$

$$A^{12} = A^{21} = A_\times.$$

Les deux ondes gravitationnelles planes dans le vide ont donc pour expression

$$h^{11} = -h^{22} = h_+ = A_+ e^{i(kz - \omega t)}, \quad \text{et} \quad (2.25)$$

$$h^{12} = h^{21} = h_\times = A_\times e^{i(kz - \omega t)}. \quad (2.26)$$

Il nous reste alors à connaître l'effet de ces ondes sur les particules libres, ce qui nous permettra d'expliquer les notations  $h_+$  et  $h_\times$ .

Pour caractériser l'effet des ondes gravitationnelles, nous allons prendre l'équation des géodésiques, pour laquelle nous allons considérer un système de coordonnées  $x^\mu$ , et son changement de

coordonnées infinitésimal,  $y^\mu = x^\mu + \xi^\mu$ . Si nous prenons pour chaque système de coordonnées, l'équation des géodésiques (1.23), en prenant pour paramètre  $\tau$ , le temps propre d'une particule libre, et que nous soustrayons les deux équations, nous obtenons

$$\frac{d^2(x^\mu + \xi^\mu)}{d\tau^2} - \frac{d^2x^\mu}{d\tau^2} + \Gamma^\mu_{\nu\rho}(x + \xi) \frac{d(x^\nu + \xi^\nu)}{d\tau} \frac{d(x^\rho + \xi^\rho)}{d\tau} - \Gamma^\mu_{\nu\rho}(x) \frac{dx^\nu}{d\tau} \frac{dx^\rho}{d\tau} = 0.$$

En utilisant la linéarité des dérivées, un développement de Taylor pour  $\Gamma^\mu_{\nu\rho}(x + \xi)$ , et en ne gardant que les termes du premier ordre, nous avons

$$\frac{d^2\xi^\mu}{d\tau^2} + 2\Gamma^\mu_{\nu\rho} \frac{dx^\nu}{d\tau} \frac{d\xi^\rho}{d\tau} + \xi^\sigma \partial_\sigma \Gamma^\mu_{\nu\rho} \frac{dx^\nu}{d\tau} \frac{dx^\rho}{d\tau} = 0. \quad (2.27)$$

Nous pouvons à présent considérer la dérivée temporelle de la dérivée covariante de  $\xi^\alpha$ , qui a pour équation

$$\frac{\nabla}{d\tau} \xi^\alpha = \frac{d\xi^\alpha}{d\tau} + \Gamma^\alpha_{\beta\gamma} \xi^\beta \frac{dx^\gamma}{d\tau}.$$

Appliquons une nouvelle fois cet opérateur et développons, nous obtenons alors

$$\begin{aligned} \frac{\nabla^2}{d\tau^2} \xi^\alpha &= \frac{\nabla}{d\tau} \left( \frac{d\xi^\alpha}{d\tau} + \Gamma^\alpha_{\beta\gamma} \xi^\beta \frac{dx^\gamma}{d\tau} \right) = \frac{d}{d\tau} \left( \frac{d\xi^\alpha}{d\tau} + \Gamma^\alpha_{\beta\gamma} \xi^\beta \frac{dx^\gamma}{d\tau} \right) + \Gamma^\alpha_{\rho\sigma} \left( \frac{d\xi^\rho}{d\tau} + \Gamma^\rho_{\beta\gamma} \xi^\beta \frac{dx^\gamma}{d\tau} \right) \frac{dx^\sigma}{d\tau} \\ &= \frac{d^2\xi^\alpha}{d\tau^2} + \partial_\sigma \Gamma^\alpha_{\beta\gamma} \xi^\beta \frac{dx^\gamma}{d\tau} \frac{dx^\sigma}{d\tau} + \Gamma^\alpha_{\beta\gamma} \frac{d\xi^\beta}{d\tau} \frac{dx^\gamma}{d\tau} + \Gamma^\alpha_{\beta\gamma} \xi^\beta \frac{d^2x^\gamma}{d\tau^2} + \Gamma^\alpha_{\rho\sigma} \frac{d\xi^\rho}{d\tau} \frac{dx^\sigma}{d\tau} + \Gamma^\alpha_{\rho\sigma} \Gamma^\rho_{\beta\gamma} \xi^\beta \frac{dx^\gamma}{d\tau} \frac{dx^\sigma}{d\tau} \\ &= \frac{d^2\xi^\alpha}{d\tau^2} + \left( \partial_\sigma \Gamma^\alpha_{\beta\gamma} + \Gamma^\alpha_{\rho\sigma} \Gamma^\rho_{\beta\gamma} \right) \xi^\beta \frac{dx^\gamma}{d\tau} \frac{dx^\sigma}{d\tau} + 2\Gamma^\alpha_{\beta\gamma} \frac{d\xi^\beta}{d\tau} \frac{dx^\gamma}{d\tau} + \Gamma^\alpha_{\beta\gamma} \xi^\beta \frac{d^2x^\gamma}{d\tau^2}. \end{aligned}$$

Pour simplifier à nouveau, nous allons utiliser l'équation (2.27) et (1.23), ce qui nous permet d'obtenir

$$\begin{aligned} \frac{\nabla^2}{d\tau^2} \xi^\alpha &= -2\Gamma^\alpha_{\beta\gamma} \frac{d\xi^\beta}{d\tau} \frac{dx^\gamma}{d\tau} - \xi^\beta \partial_\beta \Gamma^\alpha_{\gamma\sigma} \frac{dx^\gamma}{d\tau} \frac{dx^\sigma}{d\tau} + \left( \partial_\sigma \Gamma^\alpha_{\beta\gamma} + \Gamma^\alpha_{\rho\sigma} \Gamma^\rho_{\beta\gamma} \right) \xi^\beta \frac{dx^\gamma}{d\tau} \frac{dx^\sigma}{d\tau} \\ &\quad + 2\Gamma^\alpha_{\beta\gamma} \frac{d\xi^\beta}{d\tau} \frac{dx^\gamma}{d\tau} + \Gamma^\alpha_{\beta\rho} \xi^\beta \left( -\Gamma^\rho_{\gamma\sigma} \frac{dx^\gamma}{d\tau} \frac{dx^\sigma}{d\tau} \right) \\ &= \left( \partial_\sigma \Gamma^\alpha_{\beta\gamma} - \partial_\beta \Gamma^\alpha_{\gamma\sigma} + \Gamma^\alpha_{\rho\sigma} \Gamma^\rho_{\beta\gamma} - \Gamma^\alpha_{\beta\rho} \Gamma^\rho_{\gamma\sigma} \right) \xi^\beta \frac{dx^\gamma}{d\tau} \frac{dx^\sigma}{d\tau}. \end{aligned}$$

Et donc via l'équation (1.20), nous avons la relation

$$\frac{\nabla^2}{d\tau^2} \xi^\alpha = R^\alpha_{\gamma\sigma\beta} \xi^\beta \frac{dx^\gamma}{d\tau} \frac{dx^\sigma}{d\tau}. \quad (2.28)$$

Dans notre cas, celui de particules libres et sans vitesse initiale, nous avons que  $\tau = t$  et  $\nabla = d$ . Nous avons également que seul  $\frac{dx^0}{dt}$  est non nul, ce qui nous amène à réécrire (2.28) comme

$$\frac{d^2}{dt^2} \xi^\alpha = R^\alpha_{00\beta} \xi^\beta \left( \frac{dx^0}{dt} \right)^2 = -c^2 R^\alpha_{0\beta 0} \xi^\beta. \quad (2.29)$$

Dans notre cas de la jauge TT, où nous avons alors que  $h_{\mu\nu} = \bar{h}_{\mu\nu}$  et via les équations (1.20) et (2.3), nous pouvons montrer que les seules composantes du tenseur de Riemann de type  $R^\alpha_{0\beta 0}$  non nulles sont

$$\begin{aligned}
 R^1_{010} &= -\frac{1}{2c^2} \frac{d^2}{dt^2} h_+ \\
 R^1_{020} &= -\frac{1}{2c^2} \frac{d^2}{dt^2} h_\times \\
 R^2_{010} &= -\frac{1}{2c^2} \frac{d^2}{dt^2} h_\times \\
 R^2_{020} &= \frac{1}{2c^2} \frac{d^2}{dt^2} h_+
 \end{aligned}$$

Pour le vecteur  $\xi^\alpha$ , nous avons alors deux équations

$$\frac{d^2}{dt^2} \xi^1 = \frac{1}{2} \frac{d^2 h_+}{dt^2} \xi^1 + \frac{1}{2} \frac{d^2 h_\times}{dt^2} \xi^2 \quad (2.30)$$

$$\frac{d^2}{dt^2} \xi^2 = \frac{1}{2} \frac{d^2 h_\times}{dt^2} \xi^1 - \frac{1}{2} \frac{d^2 h_+}{dt^2} \xi^2. \quad (2.31)$$

Prenons  $h_{+, \times} = A_{+, \times} \cos(\omega t)$ , une onde plane en  $z = 0$ , et prenons  $\xi^1 = x_0 + \delta x$  et  $\xi^2 = y_0 + \delta y$ , où  $x_0$  et  $y_0$  sont des constantes proches de 0 et  $\delta x$  et  $\delta y$  sont des perturbations négligeables par rapport à  $x_0$  et  $y_0$ . Sachant cela, si  $A_\times = 0$ , les équations (2.30) et (2.31) deviennent

$$\begin{aligned}
 \frac{d^2}{dt^2} \delta x &= -\frac{1}{2} A_+ x_0 \omega^2 \cos(\omega t), \\
 \frac{d^2}{dt^2} \delta y &= \frac{1}{2} A_+ y_0 \omega^2 \cos(\omega t),
 \end{aligned}$$

et les solutions sont

$$\begin{aligned}
 \delta x &= \frac{1}{2} A_+ x_0 \cos(\omega t), \\
 \delta y &= -\frac{1}{2} A_+ y_0 \cos(\omega t).
 \end{aligned}$$

Ce qui nous montre le mode de polarisation « + » de l'onde gravitationnelle. En effet, un anneau de particules au repos, dans le plan  $XY$ , va se comporter comme à la figure (2.1), où cela dessine une forme en « + ». Ce qui justifie l'appellation.

De manière tout à fait analogue, si  $A_+ = 0$ , les équations (2.30) et (2.31) deviennent

$$\begin{aligned}
 \frac{d^2}{dt^2} \delta x &= -\frac{1}{2} A_\times y_0 \omega^2 \cos(\omega t), \\
 \frac{d^2}{dt^2} \delta y &= -\frac{1}{2} A_\times x_0 \omega^2 \cos(\omega t),
 \end{aligned}$$

et les solutions sont

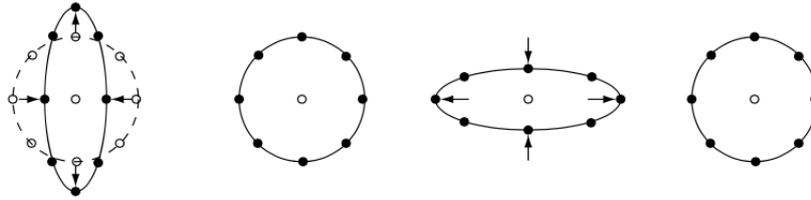


FIGURE 2.1 – Polarisation « + » des ondes gravitationnelles <sup>1</sup>

$$\delta x = \frac{1}{2} A_{\times} y_0 \cos(\omega t),$$

$$\delta y = \frac{1}{2} A_{\times} x_0 \cos(\omega t).$$

Ce qui nous montre le mode de polarisation « × » de l'onde gravitationnelle. En effet, un anneau de particules au repos, dans le plan  $XY$ , va se comporter comme à la figure (2.2), où cela dessine une forme en « × ». Ce qui justifie l'appellation.

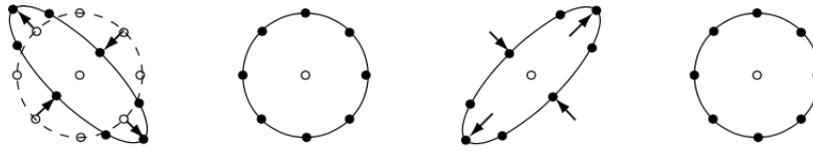


FIGURE 2.2 – Polarisation « × » des ondes gravitationnelles <sup>1</sup>

## 2.2 Linéarisation des autres équations

Maintenant que nous avons linéarisé l'équation d'Einstein, et développer quelques propriétés des ondes gravitationnelles, nous allons pouvoir linéariser les autres équations du système Einstein-Maxwell. Au vu des sections précédentes, nous pouvons supposer que la jauge de Lorenz (2.15) est respectée pour la perturbation. Comme nous avons également que le tenseur énergie-impulsion électromagnétique est de trace nulle, nous pouvons en déduire que la trace de notre perturbation  $h$  est égale à 0. Ceci a pour conséquence que  $\bar{h}_{\mu\nu} = h_{\mu\nu}$ . Malgré cette particularisation, les équations trouvées restent générales.

### 2.2.1 Linéarisation du tenseur énergie-impulsion

Pour linéariser l'expression du tenseur énergie-impulsion électromagnétique, il nous suffit de réécrire la formule (1.30) en considérant la métrique (2.1), et en négligeant les termes d'ordre supérieur à un, nous obtenons

1. Provient de [7], page 506

$$\begin{aligned}
 T_{\mu\nu}^{(EM)} &= \frac{1}{\mu_0} \left( (\eta^{\rho\alpha} - h^{\rho\alpha}) F_{\mu\rho} F_{\nu\alpha} - \frac{1}{4} (\eta_{\mu\nu} + h_{\mu\nu}) F_{\rho\sigma} (\eta^{\rho\alpha} - h^{\rho\alpha}) (\eta^{\sigma\beta} - h^{\sigma\beta}) F_{\alpha\beta} \right) \\
 &= \frac{1}{\mu_0} \left[ \left( \eta^{\rho\alpha} F_{\mu\rho} F_{\nu\alpha} - \frac{1}{4} \eta_{\mu\nu} \eta^{\rho\alpha} \eta^{\sigma\beta} F_{\rho\sigma} F_{\alpha\beta} \right) \right. \\
 &\quad \left. + \left( -h^{\rho\alpha} F_{\mu\rho} F_{\nu\alpha} - \frac{1}{4} h_{\mu\nu} \eta^{\rho\alpha} \eta^{\sigma\beta} F_{\rho\sigma} F_{\alpha\beta} + \frac{1}{4} \eta_{\mu\nu} F_{\rho\sigma} F_{\alpha\beta} (h^{\rho\alpha} \eta^{\sigma\beta} + \eta^{\rho\alpha} h^{\sigma\beta}) \right) \right].
 \end{aligned}$$

Nous pouvons alors décomposer le tenseur énergie-impulsion en deux parties, telle que

$$T_{\mu\nu}^{(EM)} = T_{\mu\nu}^{(\eta)} + T_{\mu\nu}^{(h)}, \quad (2.32)$$

où

$$T_{\mu\nu}^{(\eta)} = \frac{1}{\mu_0} \left( \eta^{\rho\alpha} F_{\mu\rho} F_{\nu\alpha} - \frac{1}{4} \eta_{\mu\nu} \eta^{\rho\alpha} \eta^{\sigma\beta} F_{\rho\sigma} F_{\alpha\beta} \right), \quad \text{et} \quad (2.33)$$

$$T_{\mu\nu}^{(h)} = \frac{1}{\mu_0} \left( -h^{\rho\alpha} F_{\mu\rho} F_{\nu\alpha} - \frac{1}{4} h_{\mu\nu} \eta^{\rho\alpha} \eta^{\sigma\beta} F_{\rho\sigma} F_{\alpha\beta} + \frac{1}{4} \eta_{\mu\nu} F_{\rho\sigma} F_{\alpha\beta} (h^{\rho\alpha} \eta^{\sigma\beta} + \eta^{\rho\alpha} h^{\sigma\beta}) \right), \quad (2.34)$$

où nous séparons clairement le terme d'ordre 0  $T_{\mu\nu}^{(\eta)}$  et le terme d'ordre 1  $T_{\mu\nu}^{(h)}$ . Nous avons à présent une forme bien linéarisée du tenseur énergie-impulsion. Nous allons maintenant traiter les équations de Maxwell covariantes.

## 2.2.2 Linéarisation du premier groupe d'équations de Maxwell

Développons à présent les dérivées covariantes de l'équation (1.41)

$$\begin{aligned}
 \nabla_{\sigma} F_{\mu\nu} + \nabla_{\nu} F_{\sigma\mu} + \nabla_{\mu} F_{\nu\sigma} &= \partial_{\sigma} F_{\mu\nu} - \Gamma^{\lambda}_{\sigma\mu} F_{\lambda\nu} - \Gamma^{\lambda}_{\sigma\nu} F_{\mu\lambda} \\
 &\quad + \partial_{\nu} F_{\sigma\mu} - \Gamma^{\lambda}_{\nu\sigma} F_{\lambda\mu} - \Gamma^{\lambda}_{\nu\mu} F_{\sigma\lambda} \\
 &\quad + \partial_{\mu} F_{\nu\sigma} - \Gamma^{\lambda}_{\mu\nu} F_{\lambda\sigma} - \Gamma^{\lambda}_{\mu\sigma} F_{\nu\lambda} \\
 &= 0.
 \end{aligned}$$

En utilisant la symétrie des symboles de Christoffel et l'antisymétrie du tenseur de Faraday, nous pouvons simplifier les termes et obtenir que

$$\nabla_{\sigma} F_{\mu\nu} + \nabla_{\nu} F_{\sigma\mu} + \nabla_{\mu} F_{\nu\sigma} = \partial_{\sigma} F_{\mu\nu} + \partial_{\nu} F_{\sigma\mu} + \partial_{\mu} F_{\nu\sigma} = 0.$$

La version linéarisée de l'équation (1.41), est en fait sa version dans la métrique de Minkowski, c'est-à-dire

$$\partial_{\sigma} F_{\mu\nu} + \partial_{\nu} F_{\sigma\mu} + \partial_{\mu} F_{\nu\sigma} = 0. \quad (2.35)$$

C'est en fait une propriété géométrique qui provient de la construction du tenseur de Faraday,  $F = dA$ , et nous pouvons abandonner les dérivées covariantes car nous avons la connexion de Levi-Civita, qui possède la symétrie sur les deux indices covariants. Nous allons maintenant passer à la linéarisation du deuxième groupe.

### 2.2.3 Linéarisation du deuxième groupe d'équations de Maxwell

La dernière équation que nous avons à linéariser est celle deuxième groupe d'équations de Maxwell covariantes, à savoir (1.43). Pour cela, développons le terme  $\nabla_\mu F^{\mu\nu}$

$$\nabla_\mu F^{\mu\nu} = \partial_\mu F^{\mu\nu} + \Gamma^\mu_{\mu\alpha} F^{\alpha\nu} + \Gamma^\nu_{\mu\alpha} F^{\mu\alpha}.$$

Notons également que

$$\begin{aligned} F^{\mu\nu} &= g^{\mu\alpha} g^{\nu\beta} F_{\alpha\beta} = (\eta^{\mu\alpha} - h^{\mu\alpha}) (\eta^{\nu\beta} - h^{\nu\beta}) F_{\alpha\beta} \\ &= (\eta^{\mu\alpha} \eta^{\nu\beta} - \eta^{\mu\alpha} h^{\nu\beta} - h^{\mu\alpha} \eta^{\nu\beta}) F_{\alpha\beta}, \end{aligned}$$

où nous ne gardons que les termes du premier ordre. La dérivée covariante  $\nabla_\mu F^{\mu\nu}$  peut s'écrire alors comme

$$\begin{aligned} \nabla_\mu F^{\mu\nu} &= (\eta^{\mu\alpha} \eta^{\nu\beta} - \eta^{\mu\alpha} h^{\nu\beta} - h^{\mu\alpha} \eta^{\nu\beta} + h\eta^{\mu\alpha} \eta^{\nu\beta}) \partial_\mu F_{\alpha\beta} \\ &\quad - \eta^{\mu\alpha} \partial_\mu h^{\nu\beta} F_{\alpha\beta} - \eta^{\nu\beta} \underbrace{\partial_\mu h^{\mu\alpha}}_{0, \text{ jauge de Lorenz}} F_{\alpha\beta} + \Gamma^\mu_{\mu\alpha} F^{\alpha\nu} + \Gamma^\nu_{\mu\alpha} F^{\mu\alpha} \\ &= (\eta^{\mu\alpha} \eta^{\nu\beta} - \eta^{\mu\alpha} h^{\nu\beta} - h^{\mu\alpha} \eta^{\nu\beta}) \partial_\mu F_{\alpha\beta} - \partial_\mu h^{\nu\beta} F^\mu_\beta + \Gamma^\mu_{\mu\alpha} F^{\alpha\nu} + \Gamma^\nu_{\mu\alpha} F^{\mu\alpha}. \end{aligned}$$

Il nous reste alors à développer  $\Gamma^\mu_{\mu\alpha} F^{\alpha\nu} + \Gamma^\nu_{\mu\alpha} F^{\mu\alpha}$ . Pour ce faire, nous allons utiliser (2.3), ce qui nous donne

$$\begin{aligned} \Gamma^\mu_{\mu\alpha} F^{\alpha\nu} + \Gamma^\nu_{\mu\alpha} F^{\mu\alpha} &= \frac{1}{2} \eta^{\mu\kappa} (\partial_\mu h_{\alpha\kappa} + \partial_\alpha h_{\mu\kappa} - \partial_\kappa h_{\mu\alpha}) F^{\alpha\nu} + \frac{1}{2} \eta^{\nu\kappa} (\partial_\mu h_{\alpha\kappa} + \partial_\alpha h_{\mu\kappa} - \partial_\kappa h_{\mu\alpha}) F^{\mu\alpha} \\ &= \frac{1}{2} \eta^{\mu\kappa} \eta^{\alpha\lambda} \eta^{\nu\delta} (\partial_\mu h_{\alpha\kappa} + \partial_\alpha h_{\mu\kappa} - \partial_\kappa h_{\mu\alpha}) F_{\lambda\delta} \\ &\quad + \frac{1}{2} \eta^{\nu\kappa} \eta^{\mu\lambda} \eta^{\alpha\delta} (\partial_\mu h_{\alpha\kappa} + \partial_\alpha h_{\mu\kappa} - \partial_\kappa h_{\mu\alpha}) F_{\lambda\delta} \\ &= \frac{1}{2} (\eta^{\nu\delta} \partial_\mu h^{\mu\lambda} - \eta^{\nu\delta} \partial_\kappa h^{\kappa\lambda}) F_{\lambda\delta} \\ &\quad + \frac{1}{2} (\eta^{\mu\lambda} \partial_\mu h^{\delta\nu} + \eta^{\alpha\delta} \partial_\alpha h^{\lambda\nu} - \eta^{\nu\kappa} \partial_\kappa h^{\lambda\delta}) F_{\lambda\delta} \\ &= \frac{1}{2} \left( \eta^{\mu\lambda} \partial_\mu h^{\delta\nu} F_{\lambda\delta} + \underbrace{\eta^{\alpha\delta} \partial_\alpha h^{\lambda\nu} F_{\lambda\delta}}_{\eta^{\mu\lambda} \partial_\mu h^{\delta\nu} F_{\delta\lambda}} - \underbrace{\eta^{\nu\kappa} \partial_\kappa h^{\lambda\delta} F_{\lambda\delta}}_0 \right) \\ &= 0, \end{aligned}$$

où le fait que  $\partial_\kappa h^{\lambda\delta} F_{\lambda\delta} = 0$  provient de l'antisymétrie du tenseur de Faraday, la simplification des deux autres termes également. Il nous suffit alors d'avoir la propriété  $\Gamma^\mu_{\mu\alpha} F^{\alpha\nu} + \Gamma^\nu_{\mu\alpha} F^{\mu\alpha} = 0$  en tête pour obtenir la version linéarisée du deuxième groupe d'équations de Maxwell covariantes,

$$(\eta^{\mu\alpha} \eta^{\nu\beta} - \eta^{\mu\alpha} h^{\nu\beta} - h^{\mu\alpha} \eta^{\nu\beta} + h\eta^{\mu\alpha} \eta^{\nu\beta}) \partial_\mu F_{\alpha\beta} - \partial_\mu h^{\nu\beta} F^\mu_\beta = -\mu_0 j^\nu.$$

Remarquons que dans le vide, ou en absence de source électromagnétique, nous avons simplement la relation

$$(\eta^{\mu\alpha} \eta^{\nu\beta} - \eta^{\mu\alpha} h^{\nu\beta} - h^{\mu\alpha} \eta^{\nu\beta} + h\eta^{\mu\alpha} \eta^{\nu\beta}) \partial_\mu F_{\alpha\beta} - \partial_\mu h^{\nu\beta} F^\mu_\beta = 0, \quad (2.36)$$

car  $j^\nu = 0$ . Nous avons à présent les équations nécessaires à la compréhension du lien qui pourrait exister entre les ondes gravitationnelles et les lois de l'électromagnétisme. Nous allons à présent nous intéresser aux solutions du système Einstein-Maxwell, tout d'abord le système non-linéarisé, pour ensuite arriver à des solutions d'ondes gravitationnelles.

## Chapitre 3

# Étude des liens entre gravitation et électromagnétisme

### 3.1 Solutions du système Einstein-Maxwell

Nous allons vous présenter maintenant des métriques respectant les équations du système Einstein-Maxwell. Pour l'analyse de ces métriques, nous nous sommes aidés du logiciel de calcul symbolique open-source *SageMath* [11]<sup>1</sup>, avec surtout sa librairie *Sage Manifold*, qui nous permet de faire de la géométrie différentielle. Notons également que pour décrire les métriques, à la place d'énoncer les éléments  $g_{\mu\nu}$  de la métrique, nous allons exprimer la métrique en utilisant l'élément de longueur au carré  $ds^2 = g_{\mu\nu}dx^\mu dx^\nu$ .

#### 3.1.1 Solution de Reissner-Nordström

Nous allons nous placer dans un système de coordonnées  $(x^0, r, \theta, \phi)$  où  $x^0 = ct$ ,  $t \in \mathbb{R}$ ,  $r \in \mathbb{R}^+$ ,  $\theta \in [0, \pi]$  et  $\phi \in [0, 2\pi]$ . La métrique de Reissner-Nordström (RN) décrit l'espace-temps dans lequel se trouve une particule de masse  $M$  en  $r = 0$  et possède une charge  $q$ . Cette métrique est

$$ds^2 = -\left(1 - \frac{2m}{r} + \frac{Q^2}{r^2}\right)(dx^0)^2 + \frac{1}{\left(1 - \frac{2m}{r} + \frac{Q^2}{r^2}\right)}dr^2 + r^2(d\theta^2 + \sin^2\theta d\phi^2),$$

où  $m = \frac{GM}{c^2}$  et  $Q^2 = \frac{Gq^2}{4\pi\epsilon_0 c^4}$ .

Grâce à l'équation (1.17) nous obtenons les coefficients de connexion,

---

1. Vous pouvez trouver des informations sur la consultation des feuilles SageMath à l'annexe à la fin de ce mémoire

$$\begin{aligned}\Gamma^0_{0r} &= \frac{(4\pi c^2 \epsilon_0 m r - q^2)G}{4\pi c^4 \epsilon_0 r^3 - (8\pi c^2 \epsilon_0 m r^2 - q^2 r)G}, \\ \Gamma^r_{00} &= -\frac{(32\pi^2 c^4 \epsilon_0^2 m^2 r^2 - 12\pi c^2 \epsilon_0 m q^2 r + q^4)G^2 - 4(4\pi^2 c^6 \epsilon_0^2 m r^3 - \pi c^4 \epsilon_0 q^2 r^2)G}{16\pi^2 c^8 \epsilon_0^2 r^5}, \\ \Gamma^r_{rr} &= -\frac{(4\pi c^2 \epsilon_0 m r - q^2)G}{4\pi c^4 \epsilon_0 r^3 - (8\pi c^2 \epsilon_0 m r^2 - q^2 r)G}, \\ \Gamma^r_{\theta\theta} &= -\frac{4\pi c^4 \epsilon_0 r^2 - (8\pi c^2 \epsilon_0 m r - q^2)G}{4\pi c^4 \epsilon_0 r}, \\ \Gamma^r_{\phi\phi} &= -\frac{4\pi c^4 \epsilon_0 r^2 \sin^2(\theta) - (8\pi c^2 \epsilon_0 m r - q^2)G \sin^2(\theta)}{4\pi c^4 \epsilon_0 r}, \\ \Gamma^\theta_{r\theta} &= \frac{1}{r}, \\ \Gamma^\theta_{\phi\phi} &= -\cos(\theta) \sin(\theta), \\ \Gamma^\phi_{r\phi} &= \frac{1}{r}, \\ \Gamma^\phi_{\theta\phi} &= \frac{\cos(\theta)}{\sin(\theta)}.\end{aligned}$$

Ensuite, l'équation (1.24) nous donne les composantes du tenseur de Ricci,

$$\begin{aligned}R_{00} &= \frac{4\pi G c^4 \epsilon_0 q^2 r^2 - (8\pi c^2 \epsilon_0 m q^2 r - q^4)G^2}{16\pi^2 c^8 \epsilon_0^2 r^6}, \\ R_{rr} &= -\frac{Gq^2}{4\pi c^4 \epsilon_0 r^4 - (8\pi c^2 \epsilon_0 m r^3 - q^2 r^2)G}, \\ R_{\theta\theta} &= \frac{Gq^2}{4\pi c^4 \epsilon_0 r^2}, \\ R_{\phi\phi} &= \frac{Gq^2 \sin^2(\theta)}{4\pi c^4 \epsilon_0 r^2}.\end{aligned}$$

Nous en concluons que la courbure scalaire est nulle, ce qui était attendu puisque la trace du tenseur énergie-impulsion électromagnétique est nulle également. Le tenseur d'Einstein est donc égal à celui de Ricci.

De plus, nous connaissons de l'électrodynamique classique l'expression du champ électrique produit par une charge  $q$  située en  $r = 0$ ,

$$E(r) = \frac{q}{4\pi \epsilon_0 r^2}.$$

Nous pouvons donc conclure avec les équations (1.46) et (1.47) que les seules composantes non-nulles du tenseur électromagnétique sont

$$\begin{aligned}F_{0r} &= -\frac{q}{4\pi c \epsilon_0 r^2}, \\ F_{r0} &= \frac{q}{4\pi c \epsilon_0 r^2}.\end{aligned}$$

Nous pouvons également remarquer que les équations (1.31) et (1.30) sont vérifiées.

En utilisant l'équation(1.41), nous pouvons écrire les composantes du tenseur énergie-impulsion sont,

$$\begin{aligned} T_{00} &= \frac{4\pi c^4 \epsilon_0 q^2 r^2 - (8\pi c^2 \epsilon_0 m q^2 r - q^4)G}{128\pi^3 c^4 \epsilon_0^2 r^6}, \\ T_{rr} &= -\frac{c^4 q^2}{8(4\pi^2 c^4 \epsilon_0 r^4 - (8\pi^2 c^2 \epsilon_0 m r^3 - \pi q^2 r^2)G)}, \\ T_{\theta\theta} &= \frac{q^2}{32\pi^2 \epsilon_0 r^2}, \\ T_{\phi\phi} &= \frac{q^2 \sin^2(\theta)}{32\pi^2 \epsilon_0 r^2}. \end{aligned}$$

L'équation (1.43) est alors vérifiée.

Remarquons que la métrique possède des singularités. En effet, elle n'est pas bien définie en  $r = 0$  ainsi qu'en  $r = m \pm \sqrt{m^2 - Q^2}$ , mais si nous regardons le déterminant de la métrique, qui est un invariant,  $\det(g) = -r^4 \sin^2 \theta$ , nous remarquons que la seule singularité intrinsèque est  $r = 0$ . Les deux autres sont des singularités de coordonnées. Nous remarquons également que  $-\det(g)$  est exactement le déterminant d'une métrique de Minkowski en coordonnées sphériques  $\eta_{\text{sphère}} = \text{diag}(-1, 1, r^2, r^2 \sin^2 \theta)$ . Ce qui veut dire que notre métrique est conformément plate.

Nous allons terminer notre analyse de cette métrique par le scalaire de Kretschmann  $Kr$ , autre invariant de la métrique défini par

$$Kr = R^{\xi\lambda\mu\nu} R_{\xi\lambda\mu\nu}.$$

Dans notre cas, il vaut

$$Kr = \frac{(96\pi^2 c^4 \epsilon_0^2 m^2 r^2 - 48\pi c^2 \epsilon_0 m q^2 r + 7q^4)G^2}{2\pi^2 c^8 \epsilon_0^2 r^8}.$$

Nous pouvons remarquer sur la figure (3.1) que cet invariant tend vers 0 pour  $r$  grand, ce qui veut dire que notre espace-temps est asymptotiquement de courbure nulle.

### 3.1.2 Solutions de Mukherji et de Witten

Nous allons à présent nous placer dans un système de coordonnées  $(x^0, r, \phi, z)$  où  $x^0 = ct, t, z \in \mathbb{R}, r \in \mathbb{R}^+$  et  $\phi \in [0, 2\pi]$ . Les métriques décrivent l'espace-temps dans lequel se trouve un fil rectiligne infini parcouru par un courant  $I$ . L'étude de ces métriques provient d'un mémoire précédemment présenté au département de physique de l'Université de Namur [12], qui traite de ces deux métriques mais n'arrive pas à montrer l'équivalence de celles-ci, alors qu'elles décrivent le même problème. Pour nous aider dans cette recherche, une correspondance par mail avec un professeur émérite de l'UCL, Ernest Matagne, a été effectuée et nous a donné quelques pistes.

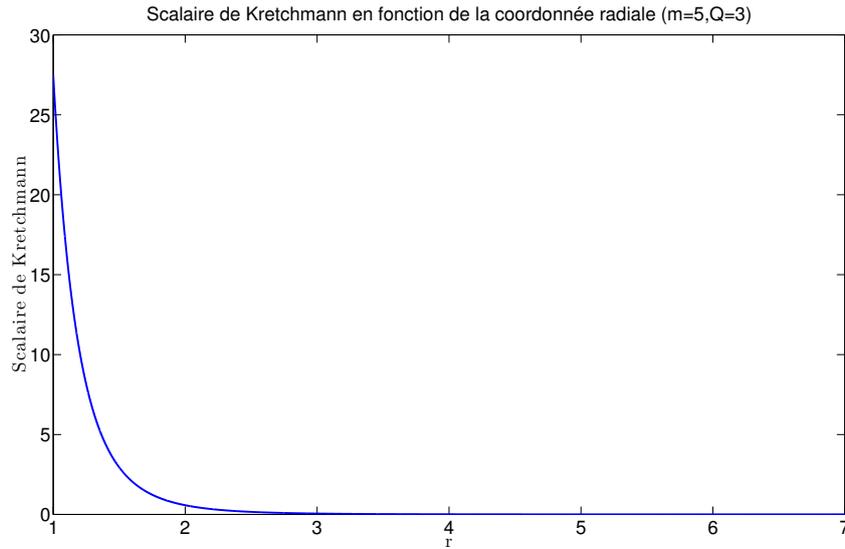


FIGURE 3.1 – Scalaire de Kretchmann pour la métrique de RN

### La métrique de Witten

La métrique de Witten dans [12] et [13] est donnée par l'expression

$$ds^2 = -r^{(2d-2\sqrt{d})} P^2 (dx^0)^2 + r^{(2d-2\sqrt{d})} P^2 dr^2 + r^{(2-2\sqrt{d})} P^2 e^{-2q} d\phi^2 + \frac{r^{2\sqrt{d}}}{P^2} dz^2,$$

où  $P = r^{2\sqrt{d}} + k$ , et  $k = \frac{\mu_0 G I^2}{16\pi^2 d c^4}$ ,  $d$  et  $q$  étant des constantes d'intégration. Mais nous pouvons remarquer qu'en fait cette métrique n'est pas la plus générale. En effet, nous pouvons en toute généralité diviser les quantités de  $r$  par une longueur caractéristique  $r_0$ , correspondant au rayon du fil, et notre métrique est toujours solution du système Einstein-Maxwell. De plus, cela va résoudre certains problèmes d'unités physiques expliqués dans [12]. Notre métrique devient donc

$$ds^2 = -\left(\frac{r}{r_0}\right)^{(2d-2\sqrt{d})} W^2 (dx^0)^2 + \left(\frac{r}{r_0}\right)^{(2d-2\sqrt{d})} W^2 dr^2 + r^2 \left(\frac{r}{r_0}\right)^{(-2\sqrt{d})} W^2 e^{-2q} d\phi^2 + \frac{\left(\frac{r}{r_0}\right)^{2\sqrt{d}}}{W^2} dz^2,$$

où  $W = \left(\frac{r}{r_0}\right)^{2\sqrt{d}} + k$ . Grâce à l'équation (1.17) nous obtenons les coefficients de connexion,

$$\begin{aligned}\Gamma^0_{0r} &= \frac{4\pi c^4 d^2 r^2 \sqrt{d} + GI^2 d \mu_0 r_0^2 \sqrt{d} + \left(4\pi c^4 dr^2 \sqrt{d} - GI^2 \mu_0 r_0^2 \sqrt{d}\right) \sqrt{d}}{4\pi c^4 dr^2 \sqrt{d+1} + GI^2 \mu_0 r r_0^2 \sqrt{d}} \\ \Gamma^r_{00} &= \frac{4\pi c^4 d^2 r^2 \sqrt{d} + GI^2 d \mu_0 r_0^2 \sqrt{d} + \left(4\pi c^4 dr^2 \sqrt{d} - GI^2 \mu_0 r_0^2 \sqrt{d}\right) \sqrt{d}}{4\pi c^4 dr^2 \sqrt{d+1} + GI^2 \mu_0 r r_0^2 \sqrt{d}} \\ \Gamma^r_{rr} &= \frac{4\pi c^4 d^2 r^2 \sqrt{d} + GI^2 d \mu_0 r_0^2 \sqrt{d} + \left(4\pi c^4 dr^2 \sqrt{d} - GI^2 \mu_0 r_0^2 \sqrt{d}\right) \sqrt{d}}{4\pi c^4 dr^2 \sqrt{d+1} + GI^2 \mu_0 r r_0^2 \sqrt{d}} \\ \Gamma^r_{\phi\phi} &= -\frac{4\pi c^4 dr^2 \sqrt{d+1} r_0^2 d + GI^2 \mu_0 r r_0^2 d+2 \sqrt{d} + \left(4\pi c^4 dr^2 \sqrt{d+1} r_0^2 d - GI^2 \mu_0 r r_0^2 d+2 \sqrt{d}\right) \sqrt{d}}{4\pi c^4 dr^2 d+2 \sqrt{d} e^{(2q)} + GI^2 \mu_0 r^2 d r_0^2 \sqrt{d} e^{(2q)}} \\ \Gamma^r_{zz} &= \frac{256 \left(4\pi^5 c^{20} d^5 r^6 \sqrt{d} r_0^2 d+4 \sqrt{d} - \pi^4 GI^2 c^{16} d^4 \mu_0 r^4 \sqrt{d} r_0^2 d+6 \sqrt{d}\right) \sqrt{d}}{D} \\ \Gamma^\phi_{r\phi} &= \frac{4\pi c^4 dr^2 \sqrt{d} + GI^2 \mu_0 r_0^2 \sqrt{d} + \left(4\pi c^4 dr^2 \sqrt{d} - GI^2 \mu_0 r_0^2 \sqrt{d}\right) \sqrt{d}}{4\pi c^4 dr^2 \sqrt{d+1} + GI^2 \mu_0 r r_0^2 \sqrt{d}} \\ \Gamma^z_{rz} &= -\frac{\left(4\pi c^4 dr^2 \sqrt{d} - GI^2 \mu_0 r_0^2 \sqrt{d}\right) \sqrt{d}}{4\pi c^4 dr^2 \sqrt{d+1} + GI^2 \mu_0 r r_0^2 \sqrt{d}}\end{aligned}$$

où  $D = 1024 \pi^5 c^{20} d^5 r^2 d+10 \sqrt{d+1} + 1280 \pi^4 GI^2 c^{16} d^4 \mu_0 r^2 d+8 \sqrt{d+1} r_0^2 \sqrt{d} + 640 \pi^3 G^2 I^4 c^{12} d^3 \mu_0^2 r^2 d+6 \sqrt{d+1} r_0^4 \sqrt{d} + 160 \pi^2 G^3 I^6 c^8 d^2 \mu_0^3 r^2 d+4 \sqrt{d+1} r_0^6 \sqrt{d} + 20 \pi G^4 I^8 c^4 d \mu_0^4 r^2 d+2 \sqrt{d+1} r_0^8 \sqrt{d} + G^5 I^{10} \mu_0^5 r^2 d+1 r_0^{10} \sqrt{d}$ .

Ensuite, l'équation (1.24) nous donne les composantes du tenseur de Ricci,

$$\begin{aligned}R_{00} &= \frac{16 \pi GI^2 c^4 d^2 \mu_0 r^2 \sqrt{d-2} r_0^2 \sqrt{d}}{\left(4\pi c^4 dr^2 \sqrt{d} + GI^2 \mu_0 r_0^2 \sqrt{d}\right)^2}, \\ R_{rr} &= \frac{16 \pi GI^2 c^4 d^2 \mu_0 r^2 \sqrt{d-2} r_0^2 \sqrt{d}}{\left(4\pi c^4 dr^2 \sqrt{d} + GI^2 \mu_0 r_0^2 \sqrt{d}\right)^2}, \\ R_{\theta\theta} &= -\frac{16 \pi GI^2 c^4 d^2 \mu_0 r^{-2} d+2 \sqrt{d} r_0^2 d+2 \sqrt{d} e^{(-2q)}}{\left(4\pi c^4 dr^2 \sqrt{d} + GI^2 \mu_0 r_0^2 \sqrt{d}\right)^2}, \\ R_{zz} &= \frac{4096 \pi^5 GI^2 c^{20} d^6 \mu_0 r^{-2} d+6 \sqrt{d-2} r_0^2 d+6 \sqrt{d}}{\left(4\pi c^4 dr^2 \sqrt{d} + GI^2 \mu_0 r_0^2 \sqrt{d}\right)^6}.\end{aligned}$$

Nous concluons également que la courbure scalaire est nulle, ce qui est logique vu que le tenseur énergie-impulsion électromagnétique est de trace nulle. Le tenseur d'Einstein est donc égal à celui de Ricci. Comme le tenseur de Ricci est de trace nulle, l'équation (1.43) nous assure que le tenseur énergie-impulsion est de trace nulle également.

De plus, nous connaissons de l'électrodynamique classique qu'un fil rectiligne infini parcouru par un courant génère un champ magnétique ayant pour seule composante non-nulle, la composante azimuthale. Nous pouvons donc conclure que les seules composantes non-nulles du tenseur électromagnétique sont  $F_{rz} = -F_{zr}$ . Un calcul fastidieux, réalisé à l'aide d'un tenseur comprenant des nombres complexes, de la formule (1.41) et le fait que la trace de  $T_{\mu\nu}$  soit nulle nous donne que

$$F_{rz} = \frac{\mu_0 I}{2\pi r} \frac{1}{\left( \left( \frac{r}{r_0} \right)^{\sqrt{d}} + k \left( \frac{r}{r_0} \right)^{-\sqrt{d}} \right)^2}.$$

En utilisant l'équation (1.41), nous pouvons écrire que les composantes du tenseur énergie-impulsion sont,

$$\begin{aligned} T_{00} &= \frac{2 I^2 c^8 d^2 \mu_0 r^2 \sqrt{d}^{-2} r_0^2 \sqrt{d}}{\left( 4 \pi c^4 d r^2 \sqrt{d} + G I^2 \mu_0 r_0^2 \sqrt{d} \right)^2}, \\ T_{rr} &= \frac{2 I^2 c^8 d^2 \mu_0 r^2 \sqrt{d}^{-2} r_0^2 \sqrt{d}}{\left( 4 \pi c^4 d r^2 \sqrt{d} + G I^2 \mu_0 r_0^2 \sqrt{d} \right)^2}, \\ T_{\theta\theta} &= -\frac{2 I^2 c^8 d^2 \mu_0 r^{-2d+2} \sqrt{d} r_0^{2d+2} \sqrt{d} e^{(-2q)}}{\left( 4 \pi c^4 d r^2 \sqrt{d} + G I^2 \mu_0 r_0^2 \sqrt{d} \right)^2}, \\ T_{zz} &= \frac{512 \pi^4 I^2 c^{24} d^6 \mu_0 r^{-2d+6} \sqrt{d}^{-2} r_0^{2d+6} \sqrt{d}}{\left( 4 \pi c^4 d r^2 \sqrt{d} + G I^2 \mu_0 r_0^2 \sqrt{d} \right)^6}. \end{aligned}$$

L'équation (1.43) est alors vérifiée. Les équations de Maxwell sont trivialement satisfaites dans ce cas.

### La métrique de Mukherji

La métrique de Mukherji décrite dans [12] et [14] a pour expression

$$ds^2 = -e^{2\nu} (dx^0)^2 + e^{2\mu} (dr^2 + r^2 d\phi^2) + e^{2\lambda} dz^2, \quad (3.1)$$

où

$$\begin{aligned} e^{2\lambda} &= \frac{Y}{Z^2}, \\ e^{2\nu} &= Y Z^2, \\ e^{2\mu} &= \frac{1}{\sqrt{Y}} \left( \frac{r_0}{r} \right)^2 Z^2, \\ Y &= 1 + \frac{4mG}{c^2} \ln \frac{r}{r_0}, \\ Z &= 1 + \frac{\mu_0 I^2}{16\pi G m^2} Y, \end{aligned}$$

où  $m$  et  $r_0$  sont des constantes d'intégration, mais comme pour la métrique de Witten, une solution plus générale existe. En effet, à un moment, les références [12] et [14] amènent comme solution aux fonctions de (3.1) l'expression

$$e^{\nu+\lambda} = A\rho, \quad (3.2)$$

où  $\rho = \ln\left(\frac{r}{a}\right) + B$ ,  $a$  et  $B$  étant des constantes d'intégration. Nous avons également que

$$e^{-\lambda} = \frac{1}{2} \left( \left(\frac{r}{l}\right)^b + \frac{\zeta^2}{A^2 b^2} \left(\frac{r}{l}\right)^{-b} \right), \quad (3.3)$$

où  $\zeta = \frac{\mu_0 G I^2}{\pi c^4}$ . Il nous reste alors à résoudre l'équation différentielle

$$\frac{d^2}{d\rho^2} (\mu + \lambda) + \frac{1}{\rho} \frac{d}{d\rho} (\mu + \lambda) = -\frac{1}{\rho}.$$

Nous pouvons montrer que la solution générale de l'équation ci-dessus est  $\mu + \lambda = K \ln \rho - \rho + c$ , d'où nous pouvons conclure que

$$e^{\mu+\lambda} = C e^{-\rho} \rho^k. \quad (3.4)$$

Via les équations (3.2), (3.3) et (3.4), nous pouvons trouver les expressions des coefficients de la métrique (3.1). Nous pouvons également dans cette métrique effectuer le changement de variable de  $r$  vers  $\rho$ , ce qui nous donne  $r = a e^\rho e^{-B}$ . Après avoir calculé les composantes du tenseur de Ricci, nous remarquons que le fait que la métrique doit être une solution du vide, nous amène à fixer la constante d'intégration  $k = b^2$ . La métrique devient alors

$$ds^2 = -\frac{A^2 \rho^2}{4Z} (dx^0)^2 + \frac{C^2 a^2}{16} e^{-2B} \rho^{2b^2} Z (d\rho^2 + d\phi^2) + \frac{4}{Z} dz^2, \quad (3.5)$$

où  $Z = \left( \left(\frac{\rho}{l}\right)^b + \frac{\zeta^2}{A^2 b^2} \left(\frac{\rho}{l}\right)^{-b} \right)^2$ . La métrique de Mukherji présente alors quelques similitudes avec la métrique de Witten.

Grâce à l'équation (1.17) nous obtenons les coefficients de connexion pour cette métrique (3.5),

$$\begin{aligned} \Gamma^0_{0\rho} &= \frac{(\pi b^3 + \pi b^2) A^2 c^4 \rho^{2b} - G I^2 (b-1) l^{2b} \mu_0}{\pi A^2 b^2 c^4 \rho^{2b+1} + G I^2 l^{2b} \mu_0 \rho}, \\ \Gamma^\rho_{00} &= \frac{4 \left( (\pi b^3 + \pi b^2) A^4 c^4 \rho^{2b+1} e^{(2B)} - A^2 G I^2 (b-1) l^{2b} \mu_0 \rho e^{(2B)} \right)}{\pi A^2 C^2 a^2 b^2 c^4 \rho^{2b^2+2b} + C^2 G I^2 a^2 l^{2b} \mu_0 \rho^{2b^2}}, \\ \Gamma^\rho_{\rho\rho} &= \frac{(\pi b^4 + \pi b^3) A^2 c^4 \rho^{2b} + (b^2 - b) G I^2 l^{2b} \mu_0}{\pi A^2 b^2 c^4 \rho^{2b+1} + G I^2 l^{2b} \mu_0 \rho}, \\ \Gamma^\rho_{\phi\phi} &= -\frac{(\pi b^4 + \pi b^3) A^2 c^4 \rho^{2b} + (b^2 - b) G I^2 l^{2b} \mu_0}{\pi A^2 b^2 c^4 \rho^{2b+1} + G I^2 l^{2b} \mu_0 \rho}, \\ \Gamma^\rho_{zz} &= \frac{64 \left( \pi^5 A^{10} b^{11} c^{20} l^{4b} \rho^{6b} e^{(2B)} - \pi^4 A^8 G I^2 b^9 c^{16} l^{6b} \mu_0 \rho^{4b} e^{(2B)} \right)}{H}, \\ \Gamma^\phi_{\rho\phi} &= \frac{(\pi b^4 + \pi b^3) A^2 c^4 \rho^{2b} + (b^2 - b) G I^2 l^{2b} \mu_0}{\pi A^2 b^2 c^4 \rho^{2b+1} + G I^2 l^{2b} \mu_0 \rho}, \\ \Gamma^z_{\rho z} &= -\frac{\pi A^2 b^3 c^4 \rho^{2b} - G I^2 b l^{2b} \mu_0}{\pi A^2 b^2 c^4 \rho^{2b+1} + G I^2 l^{2b} \mu_0 \rho}. \end{aligned}$$

où

$$\begin{aligned}
 H = & \pi^5 A^{10} C^2 a^2 b^{10} c^{20} \rho^{2b^2+10b+1} + 5 \pi^4 A^8 C^2 G I^2 a^2 b^8 c^{16} l^{2b} \mu_0 \rho^{2b^2+8b+1} \\
 & + 10 \pi^3 A^6 C^2 G^2 I^4 a^2 b^6 c^{12} l^{4b} \mu_0^2 \rho^{2b^2+6b+1} \\
 & + 10 \pi^2 A^4 C^2 G^3 I^6 a^2 b^4 c^8 l^{6b} \mu_0^3 \rho^{2b^2+4b+1} \\
 & + 5 \pi A^2 C^2 G^4 I^8 a^2 b^2 c^4 l^{8b} \mu_0^4 \rho^{2b^2+2b+1} + C^2 G^5 I^{10} a^2 l^{10b} \mu_0^5 \rho^{2b^2+1}
 \end{aligned}$$

Ensuite, l'équation (1.24) nous donne les composantes du tenseur de Ricci,

$$\begin{aligned}
 R_{00} &= \frac{16 \pi A^4 G I^2 b^4 c^4 l^{2b} \mu_0 \rho^{-2b^2+2b} e^{(2B)}}{(\pi A^2 b^2 c^4 \rho^{2b} + G I^2 l^{2b} \mu_0)^2 C^2 a^2}, \\
 R_{\rho\rho} &= \frac{4 \pi A^2 G I^2 b^4 c^4 l^{2b} \mu_0 \rho^{2b-2}}{(\pi A^2 b^2 c^4 \rho^{2b} + G I^2 l^{2b} \mu_0)^2}, \\
 R_{\theta\theta} &= -\frac{4 \pi A^2 G I^2 b^4 c^4 l^{2b} \mu_0 \rho^{2b-2}}{(\pi A^2 b^2 c^4 \rho^{2b} + G I^2 l^{2b} \mu_0)^2}, \\
 R_{zz} &= \frac{256 \pi^5 A^{10} G I^2 b^{12} c^{20} l^{6b} \mu_0 \rho^{-2b^2+6b-2} e^{(2B)}}{(\pi A^2 b^2 c^4 \rho^{2b} + G I^2 l^{2b} \mu_0)^6 C^2 a^2}.
 \end{aligned}$$

Nous en concluons que la courbure scalaire est nulle, le tenseur d'Einstein est donc égal à celui de Ricci. Ce qui est logique car le tenseur énergie-impulsion est de trace nulle, l'équation (1.43) nous assure donc que le tenseur de Ricci est de trace nulle également.

Comme pour la métrique de Witten, nous pouvons conclure que les seules composantes non-nulles du tenseur électromagnétique sont  $F_{rz} = -F_{zr}$ . Un calcul réalisé grâce à la formule (1.30) ainsi que le raccord au cas classique nous donne

$$F_{rz} = -\frac{\mu_0 I}{2\pi r} e^{\lambda-\nu} = -\frac{\mu_0 I}{2\pi \rho} \frac{4}{AZ}.$$

En utilisant l'équation (1.41), nous pouvons que écrire les composantes du tenseur énergie-impulsion sont,

$$\begin{aligned}
 T_{00} &= \frac{2 A^4 I^2 b^4 c^8 l^{2b} \mu_0 \rho^{-2b^2+2b} e^{(2B)}}{(\pi A^2 b^2 c^4 \rho^{2b} + G I^2 l^{2b} \mu_0)^2 C^2 a^2}, \\
 T_{\rho\rho} &= \frac{A^2 I^2 b^4 c^8 l^{2b} \mu_0 \rho^{2b-2}}{2 (\pi A^2 b^2 c^4 \rho^{2b} + G I^2 l^{2b} \mu_0)^2}, \\
 T_{\theta\theta} &= -\frac{A^2 I^2 b^4 c^8 l^{2b} \mu_0 \rho^{2b-2}}{2 (\pi A^2 b^2 c^4 \rho^{2b} + G I^2 l^{2b} \mu_0)^2}, \\
 T_{\phi\phi} &= \frac{32 \pi^4 A^{10} I^2 b^{12} c^{24} l^{6b} \mu_0 \rho^{-2b^2+6b-2} e^{(2B)}}{(\pi A^2 b^2 c^4 \rho^{2b} + G I^2 l^{2b} \mu_0)^6 C^2 a^2}.
 \end{aligned}$$

Nous remarquons alors que l'équation (1.43) est bel et bien vérifiée. Nous allons maintenant passer à l'étude des invariants.

### Étude des invariants

Pour comparer nos deux métriques, nous allons considérer la grandeur<sup>2</sup>

$$\mathcal{R} = r \left( \left( \frac{r}{r_0} \right)^{\sqrt{d}} + k \left( \frac{r}{r_0} \right)^{-\sqrt{d}} \right)^2 = \rho AZ,$$

grandeur qui fait que le champ magnétique dans les deux métriques, décroît comme  $\frac{1}{\mathcal{R}}$ . Cette grandeur va nous fournir alors quelque chose de mesurable qui va nous permettre de comparer les deux métriques. Vous pouvez remarquer à la figure (3.2) que les champs magnétiques suivent bien la décroissance voulue. Pour les constantes d'intégration, nous avons pris pour la métrique de Mukherji les valeurs  $b = 1.9$ ,  $A = 2$ ,  $a = 4$ ,  $C = 1$ ,  $B = 0$ ,  $l = 0.7$ . Pour la métrique de Witten, nous avons considéré les valeurs  $d = 3.61$  et  $q = 0$ . Pour l'intensité du courant, nous avons  $I = 10 A$  dans les deux métriques. Pour ce qui est de la valeur des exposants  $b$  et  $d$ , Witten dans [13] nous dit que ces exposants sont liés à la masse linéique du fil et doivent être plus grands que 1.

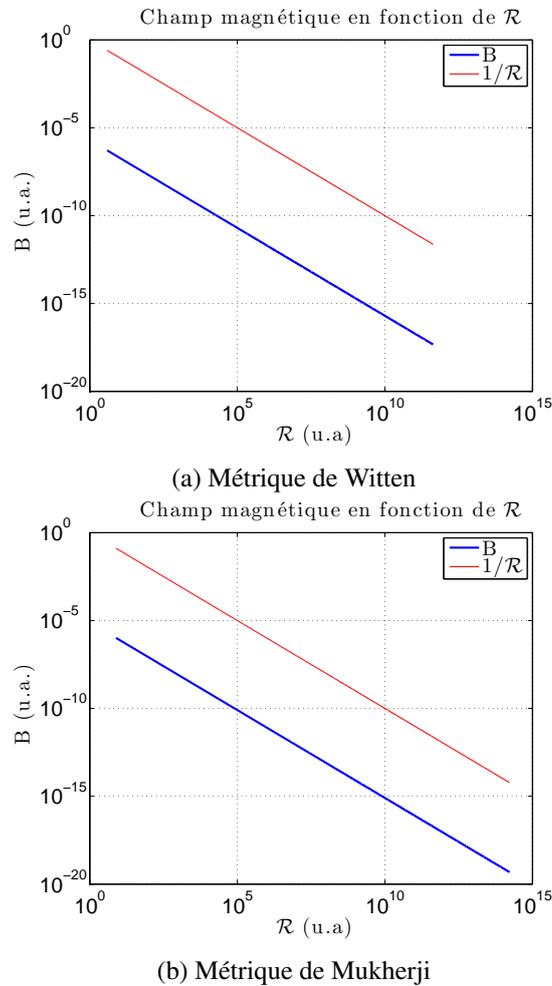
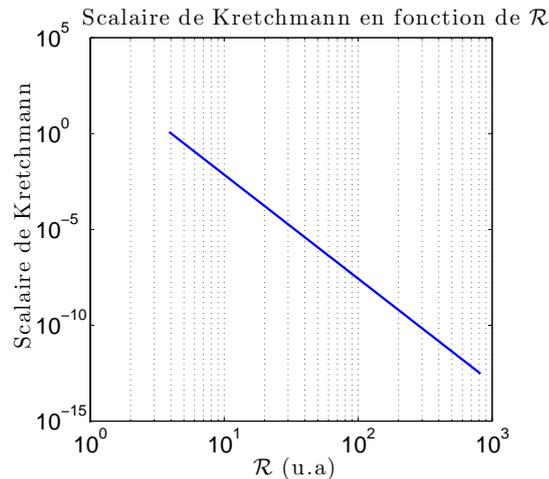


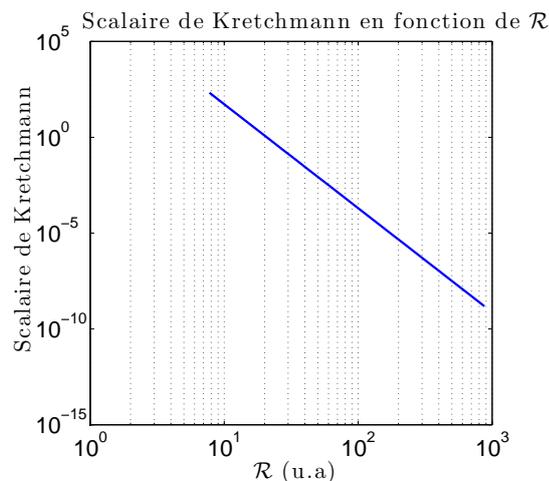
FIGURE 3.2 – Valeurs du champ magnétique dans les deux métriques en fonction de  $\mathcal{R}$

2. Cette grandeur est le « rayon vecteur », soit la longueur géodésique à coordonnées  $(r, ct, z)$  fixées dans  $ds^2$ , le tout divisé par  $2\pi$ .

Nous pouvons alors grâce à SageMath, calculer le scalaire de Kretchmann, pour l'analyser à la figure (3.3). Le graphique possède la même allure dans les deux métriques. Le scalaire de Kretchmann tend alors vers 0. Ce qui dénote d'une courbure nulle à l'infini. Graphiquement, nous pouvons voir que le scalaire de Kretchmann possède une décroissance proche de  $\mathcal{R}^{-5}$ . Remarquons que si nous voulions tracer ce scalaire dans les plus grandes valeurs de  $\mathcal{R}$ , ce n'est pas possible en échelle logarithmique car le scalaire de Kretchmann vaut exactement 0 numériquement. Regardons à présent ce qui se passe au niveau du déterminant. Nous avons tracé les deux déterminants à la figure (3.4). Nous pouvons remarquer encore une fois que les graphes sont identiques, par contre, le déterminant divisé par  $\mathcal{R}^2$ , déterminant de la métrique plate en coordonnées cylindriques ne tend pas vers 1. Nous avons donc un problème de divergence du déterminant. Cette divergence pourrait provenir du fait que la situation d'un fil infini est irréaliste, et que donc ce genre de paradoxe pourraient apparaître. Nous avons donc pu remarquer une certaine équivalence des invariants de nos métriques. Cette étude dans le cadre de ce mémoire, nous a permis de nous familiariser avec le système Einstein-Maxwell et d'appréhender des problèmes d'électromagnétisme en relativité. Nous allons à présent faire un petit tour d'autres sujets dans la littérature qui concernent le système Einstein-Maxwell.

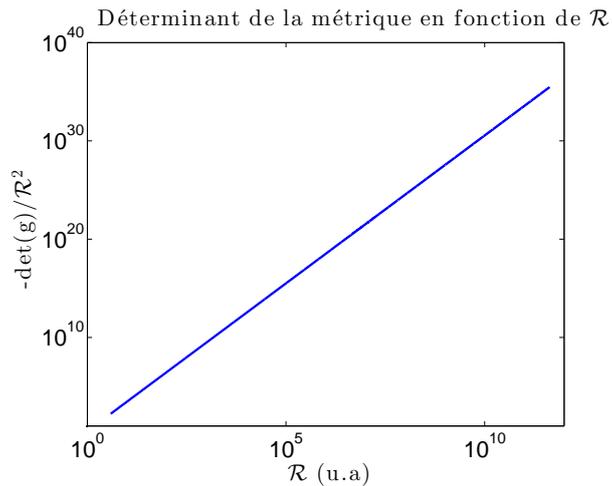


(a) Métrique de Witten

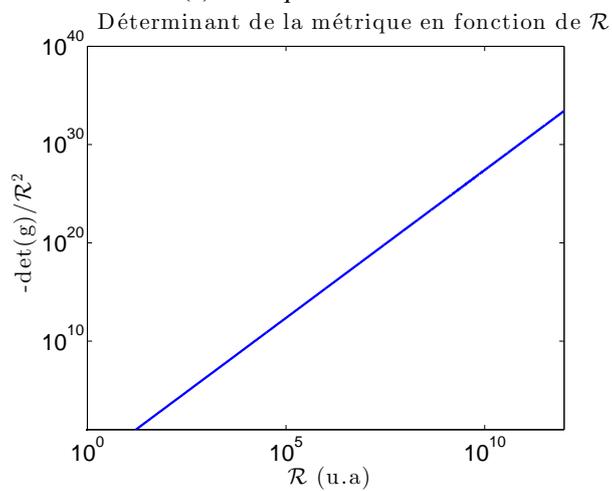


(b) Métrique de Mukherji

FIGURE 3.3 – Valeurs du scalaire de Kretchmann dans les deux métriques en fonction de  $\mathcal{R}$



(a) Métrique de Witten



(b) Métrique de Mukherji

FIGURE 3.4 – Valeurs du déterminant dans les deux métriques en fonction de  $\mathcal{R}$

## 3.2 Motivations pour étudier l'effet Gertsenshtein

Dans cette section, nous allons tenter de résumer, dans les grandes lignes et via quelques formules, les lectures et articles qui nous ont motivés à étudier l'effet Gertsenshtein, nous commencerons par décrire des résultats vus dans la littérature sur les liens entre gravité et électromagnétisme pour ensuite parler de l'effet Gertsenshtein en lui-même.

### 3.2.1 La courbure de l'espace-temps autour d'un champ magnétique formé par un solénoïde

Une des premières lectures qui a motivé l'étude de l'effet Gertsenshtein est l'article [15]. Dans ce papier, André Füzfa étudie la courbure de l'espace-temps autour d'un champ magnétique créé par une boucle de courant ou un solénoïde. L'idée est de partir du système Einstein-Maxwell et d'utiliser comme métrique une jauge appelée jauge de Weyl, qui s'exprime en coordonnées

cylindriques comme<sup>3</sup>

$$ds^2 = c^2 e^{\rho(r,z)} dt^2 - e^{\lambda(r,z)} (dr^2 + dz^2) - e^{-\rho(r,z)} r^2 d\phi.$$

La raison de choisir les coordonnées cylindriques est le fait que les configurations électromagnétiques comme les boucles de courant et les solénoïdes possèdent un axe de symétrie. Dans cette symétrie, le potentiel vecteur possède seulement une seule composante non-nulle  $A_\phi = \frac{a(r,z)}{r}$ . Dans ce cas-là, les équations du système Einstein-Maxwell se réduisent à 4 équations qui ont pour expression

$$\left\{ \begin{array}{l} \nabla^2 \rho = \frac{8\pi G}{c^4 \mu_0} \frac{e^\rho}{r^2} ((\partial_r a)^2 + (\partial_z a)^2), \\ \nabla^2 \lambda + (\partial_r \rho)^2 = \frac{8\pi G}{c^4 \mu_0} \frac{e^\rho}{r^2} ((\partial_r a)^2 - (\partial_z a)^2), \\ \partial_z \lambda + \partial_z \rho = r \partial_r \rho \partial_z \rho + \frac{16\pi G}{c^4 \mu_0} \partial_r a \partial_z a, \\ \nabla^2 a - \frac{2}{r} \partial_r a = -(\partial_r a \partial_r \rho + \partial_z a \partial_z \rho) - r \mu_0 J, \end{array} \right.$$

où  $J$  est la densité de courant selon la direction  $\phi$ . Rappelons également que le laplacien en coordonnées cylindriques, où nous omettons les dérivées angulaires, est donné par  $\nabla^2 = \partial_r^2 + \frac{1}{r} \partial_r + \partial_z^2$ . Dans la dernière équation, nous pouvons considérer que le potentiel vecteur peut contenir une partie non relativiste et une correction relativiste. Nous avons donc l'expression  $a = a_{nr} + a_{rel}$ , où  $\nabla^2 a_{rel} - \frac{2}{r} \partial_r a_{rel} = -r \mu_0 J$ .

Avec les résultats ci-dessus, une résolution numérique des équations résultantes du système Einstein-Maxwell peut être effectuée et nous pouvons obtenir une caractérisation de la courbure de l'espace-temps autour de la boucle ou du solénoïde. Cette courbure est assimilée physiquement à un champ gravitationnel artificiel généré par le champ électromagnétique. A la fin de l'article [15], grâce à l'information sur la courbure de la variété, on peut résoudre l'équations des géodésiques (1.23) pour connaître la trajectoire des rayons lumineux au voisinage de la boucle ou du solénoïde. L'étude de ces trajectoires permet d'établir une configuration expérimentale via interférométrie, où l'une des deux branches de l'interféromètre passe par un dispositif de génération de champ de gravité artificiel via deux solénoïdes en disposition de Helmholtz, pour amplifier le champ magnétique. Ce champ gravitationnel va dévier légèrement la lumière et va donc induire une différence de marche, un déphasage entre les ondes lumineuses des deux branches. Ce déphasage vaut en fait

$$\frac{\pi}{\Lambda} \int_0^L (\rho(0,z) - \lambda(0,z)) dz,$$

où  $\Lambda$  est la longueur d'onde de la lumière et  $L$  la longueur du bras de l'interféromètre. Via les équations ci-dessus, nous pouvons déduire en fait que la différence  $\rho - \lambda$  est reliée au champ magnétique selon la coordonnée radiale. La limitation de ce résultat est que ce phénomène ne produit que des champs gravitationnels artificiels statiques. Si on veut produire des ondes gravitationnelles, il nous faut nécessairement avoir la présence d'un champ électromagnétique variable dans le temps.

3. Notez que dans cette section, on utilise l'autre signature de la métrique lorentzienne de l'espace-temps (+, -, -, -).

### 3.2.2 Les ondes gravitationnelles provenant d'une onde électromagnétique

Ehrenfest, Podolsky et Tolman, dans les années 30, veulent étudier dans leur article [16] comment se comporte la gravitation produite par un rayon lumineux dans un régime linéarisé. Pour cela, il suffit d'imposer que la source électromagnétique amène seulement une perturbation de la métrique de Minkowski. Dans ce cas, l'équation à résoudre est l'équation (2.16). Dans le cas d'une plane se dirigeant selon l'axe  $X^1 = X$ , ils déterminent que le tenseur énergie-impulsion avait pour expression

$$T_{00} = T_{11} = -T_{01} = -T_{10} = \rho, \quad (3.6)$$

où  $\rho$  représente la densité d'énergie du pulse électromagnétique. Ils considèrent alors un pulse électromagnétique de longueur  $\lambda$ , de densité d'énergie  $\rho$ , se déplaçant entre le point  $x = 0$  et  $x = l$ . Le début du pulse est situé en  $x = 0$  au temps  $t = 0$ , ce qui implique que le début du pulse est situé à chaque instant en  $x = ct$  et la fin est par conséquent située en  $x = ct - \lambda$ . Sous ces hypothèses, ils résolvent l'équation (2.16) et obtiennent comme solution pour la perturbation de la métrique  $h_{\mu\nu}$ ,

$$h_{00} = h_{11} = -h_{01} = -h_{10} = -4\frac{G}{c^4} \int \rho \frac{dV}{r},$$

où  $dV$  est le volume spatial élémentaire, et  $r$  la distance de l'observateur par rapport au pulse. Remarquons que ces perturbations ne sont que des perturbations longitudinales, qui pourraient être en fait éliminer par un boost, équivalent de la transformation de Galilée en relativité. Ils trouvent plus précisément que

$$h_{00} = \begin{cases} -\frac{4G\rho}{c^4} \ln\left(\frac{ct-x}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}-x}\right) & \text{si } \sqrt{x^2+y^2+z^2} < ct < \sqrt{x^2+y^2+z^2} + \lambda, \\ -\frac{4G\rho}{c^4} \ln\left(\frac{ct-x}{ct-\lambda-x}\right) & \text{si } \sqrt{x^2+y^2+z^2} + \lambda < ct < \sqrt{(l-x)^2+y^2+z^2} + l, \\ -\frac{4G\rho}{c^4} \ln\left(\frac{\sqrt{(l-x)^2+y^2+z^2}+l-x}{ct-\lambda-x}\right) & \text{si } \sqrt{(l-x)^2+y^2+z^2} + l < ct < \sqrt{(l-x)^2+y^2+z^2} + l + \lambda. \end{cases}$$

Ils vont ensuite se concentrer sur l'équation des géodésiques, calculer les symboles de Christoffel pour cette perturbation, et en déduire l'accélération de particules tests. Ils montrent que selon la direction de propagation du pulse, la particule test va d'abord bouger dans la direction de propagation de l'onde et va ensuite bouger dans le sens inverse. Ce sont donc des oscillations longitudinales. Des résultats similaires ont été trouvées par Rätzel récemment [17], où il considère un potentiel retardé et tente de décrire graphiquement les accélérations des particules tests et photons. Il considère également les polarisations linéaire et circulaire du pulse électromagnétique. Notons que un pulse électromagnétique seul ne produit pas d'ondes gravitationnelles transverses. Nous aurons besoin de la présence d'un champ magnétique externe, ce qui provoquera l'effet Gertsenshtein.

### 3.2.3 Description de l'effet Gertsenshtein

Nous allons maintenant nous intéresser à l'effet Gertsenshtein, effet imaginé par le scientifique russe du même nom, en 1961, la lettre « Wave Resonance of Light and Gravitational Waves » [18]

nous propose une nouvelle méthode pour générer des ondes gravitationnelles. La présence d'un champ magnétique externe et d'une onde électromagnétique va pouvoir générer des ondes gravitationnelles. En effet, le tenseur de Faraday peut être décomposé en deux termes, celui du champ externe  $F^{(c)}_{\mu\nu}$  et celui de l'onde électromagnétique,  $F^{(w)}_{\mu\nu}$ . Le tenseur énergie-impulsion étant donné par l'équation (1.30), il contient 3 termes différents, un qui est proportionnel à  $(F^{(c)}_{\mu\nu})^2$ , un autre qui est proportionnel à  $(F^{(w)}_{\mu\nu})^2$  et un dernier qui contient des termes mixtes, proportionnel à  $(F^{(c)}_{\mu\nu} F^{(w)}_{\mu\nu})$ . Ce dernier terme contient des termes oscillants, tout comme celui proportionnel à  $(F^{(w)}_{\mu\nu})^2$ , mais Gertsenshtein fit l'hypothèse que l'énergie du champ externe est bien plus importante que celui de l'onde, donc le terme proportionnel à  $(F^{(w)}_{\mu\nu})^2$  devient négligeable. Hypothèse réaliste, car dans la cas d'une onde transverse électromagnétique par exemple, le champ magnétique de l'onde vaut  $B = \frac{E}{c}$ , donc une onde électromagnétique va en général posséder un champ magnétique bien plus faible qu'un champ externe de l'ordre du tesla. De plus, cet effet va activer les modes d'ondes gravitationnelles transverses, ce qui n'est pas le cas d'une onde électromagnétique seule ou d'un champ magnétique seul. Ce sont donc les perturbations de la métrique sourcées par le terme contenant les produits mixtes  $F^{(c)}_{\mu\nu} F^{(w)}_{\mu\nu}$  qui vont donc provoquer l'effet Gertsenshtein, que nous qualifierons de direct. Via l'équation d'onde (2.16), il conclut que l'onde gravitationnelle créée est de fréquence identique à l'onde électromagnétique de départ. Il montra également que l'amplitude de l'onde gravitationnelle est à la fois proportionnelle à l'amplitude des deux champs électromagnétiques mais aussi au temps de parcours de l'onde électromagnétique dans le champ magnétique externe. Ce qui explique le phénomène de résonance car l'effet s'amplifie si l'onde reste plus longtemps dans le champ externe. Gertsenshtein se posait des questions quant à la stabilité du champ externe et la cohérence des ondes créées. Dans la conclusion de son article, il fit la remarque que l'effet inverse, qu'une onde gravitationnelle passant dans un champ magnétique externe crée une onde électromagnétique, est autorisé par la théorie de la relativité générale, mais qu'il n'en voit pas vraiment l'intérêt. Cela a par la suite été étudié dans plusieurs articles puisque cela ouvre la voie à la détection d'ondes gravitationnelles de haute fréquence via la conversion d'une ondes gravitationnelle incidente en onde électromagnétique.

En 1970, quatre chercheurs italiens, menés par Boccaletti s'attaquèrent à un développement analytique des idées de Gertsenshtein. Ils considèrent dans [19] une onde électromagnétique polarisée linéairement, qui se propage selon l'axe  $X_1 = X$ . La composante du champ électrique de l'onde est  $E_y^{(w)} = ae^{ik(x-ct)}$  et la composante du champ magnétique  $H_z^{(w)} = ae^{ik(x-ct)}$ . Contrairement à Gertsenshtein, ils considèrent comme champ électromagnétique externe un champ magnétique constant  $(H_x, H_y, H_z)$  et un champ électrique constant  $(E_x, E_y, E_z)$ . Sous cette configuration, ils trouvent des solutions en ondes planes pour les perturbations de la métrique qui s'écrivent comme

$$h_{\mu}{}^{\nu} = \frac{2iGla}{kc^4} \alpha_{\mu}{}^{\nu} e^{ik(x-ct)},$$

où  $l$  est la longueur que parcourt l'onde dans le champ externe et  $\alpha_{\mu}{}^{\nu}$  est un ensemble de constantes dépendantes du champ externe. Ils trouvent également que le flux d'énergie transporté par l'onde gravitationnelle est donné par

$$\phi = \frac{G}{4\pi c^4} l^2 a^2 \left[ (H_y + E_z)^2 + (H_z + E_y)^2 \right].$$

Dans la deuxième partie de l'article, ils essaient également de traiter de l'effet inverse, là aussi en considérant un champ magnétique et un champ électrique externe. Ils trouvent que dans ce

contexte, seul les champs perpendiculaires à l'axe de propagation sont activés. Ils trouvent une solution sous forme d'onde plane pour l'onde électromagnétique créée. Ils utilisent bien entendu l'approximation d'un point éloigné par rapport à la dimension de la source pour obtenir des solutions d'ondes planes

En 1973, l'astrophysicien théorique russe du nom de Zel'dovich, sortit un article [20] qui traite de l'effet Gertsenshtein et les travaux de Boccaletti entre autres. Il s'inquiéta en fait de l'application de l'effet Gertsenshtein dans des situations astrophysiques, en parlant notamment de la fraction d'énergie électromagnétique transformée en énergie gravitationnelle. Il en conclut que un coefficient de conversion acceptable ne peut apparaître que dans un Univers vide, chaud et magnétique, où le redshift est assez important.

Nous avons donc dans cette section résumé et synthétisé nos lectures préliminaires à l'étude de l'effet Gertsenshtein. Fort de ces lectures, nous allons pouvoir entamer le chapitre suivant, qui va revisiter la manière de considérer l'effet Gertsenshtein. Pourquoi étudier et revisiter l'effet Gertsenshtein à l'heure d'aujourd'hui ? Les études de Gertsenshtein et Zel'dovich sont fortement basées sur des arguments dimensionnels et qualitatifs. Les solutions de l'équipe de Boccaletti sont analytiques et dans des approximations d'ondes planes, avec des champs statiques externes non nécessairement transverses (les composantes longitudinales ne génèrent pas d'ondes gravitationnelles). Une analyse détaillée des polarisations de l'onde électromagnétique incidente et des ondes gravitationnelles produites doit être faite. C'est ce que nous allons faire dans le chapitre suivant.

## Chapitre 4

# L'effet Gertsenshtein revisité

Dans ce chapitre, nous allons à présent revisiter l'effet Gertsenshtein en faisant une nouvelle analyse, nous allons commencer par décrire les équations utilisées, pour ensuite étudier le cas de l'onde électromagnétique, puis considérer l'effet Gertsenshtein avec plusieurs configurations de polarisations différentes.

Tout d'abord, nous devons bien distinguer les équations qui vont décrire l'effet Gertsenshtein direct, qui traite de la création d'une onde gravitationnelle grâce à une onde électromagnétique et un champ magnétique externe, de l'effet inverse qui traite de la création d'une onde électromagnétique grâce à une onde gravitationnelle et un champ magnétique externe.

### 4.1 Equations utilisées

Pour ce qui est de la configuration que nous considérons, nous avons un tenseur de Faraday pour notre onde électromagnétique, que nous allons appeler  $F^{(w)}_{\mu\nu}$  et un tenseur pour notre champ magnétique externe, que nous pouvons imaginer par exemple créé par un solénoïde  $F^{(c)}_{\mu\nu}$ . Le tenseur total possède donc la forme

$$F^{(tot)}_{\mu\nu} = F^{(c)}_{\mu\nu} + F^{(w)}_{\mu\nu},$$

comme dans les travaux de Gerstenshtein. Le tenseur peut donc se décomposer en 3 parties, qui s'écrivent comme

$$T^{(tot)}_{\mu\nu} = T^{(c)}_{\mu\nu} + T^{(w)}_{\mu\nu} + T^{(res)}_{\mu\nu} \quad (4.1)$$

La perturbation de la métrique va alors aussi se décomposer en plusieurs parties, nous avons alors la métrique

$$g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu} + c_{\mu\nu} + w_{\mu\nu} + h_{\mu\nu},$$

où  $c_{\mu\nu}$  est en fait sourcé par le terme  $T^{(c)}_{\mu\nu}$ , et correspond au cas des analyses de l'article d'André Füzfa [15] sur les solénoïdes, qui est donc statique. Le terme  $w_{\mu\nu}$  est sourcé par le terme  $T^{(w)}_{\mu\nu}$  et correspond aux cas des analyses de Tolman, Ehrenfest et Podolsky ainsi que celles de Ratzel. Et enfin, l'effet Gertsenshtein est donc représenté par la perturbation  $h_{\mu\nu}$ , sourcé par le tenseur de couplage entre l'onde électromagnétique et le champ magnétique externe,  $T^{(res)}_{\mu\nu}$ .

Pour ce qui est du choix de la jauge, nous choisissons la jauge de Lorenz. Elle est importante car elle permet de découpler les équations d'ondes. Chaque composante  $h_{\mu\nu}$  est sourcée par une composante  $T_{\mu\nu}$  uniquement, et partagent donc les propriétés algébriques. En fait, cette jauge de Lorenz s'impose d'elle-même car dans notre configuration, nous avons des conditions sur le tenseur énergie-impulsion. La première est que, comme le tenseur énergie-impulsion est celui de l'électromagnétisme, la trace du tenseur est nulle, donc la trace de notre perturbation  $h$  est nulle, et que  $\bar{h}_{\mu\nu} = h_{\mu\nu}$ . D'autre part, comme nous sommes dans l'approche perturbative de la relativité générale, l'équation de conservation du tenseur énergie-impulsion, venant du théorème de Noether, est en métrique de Minkowski donné par l'équation

$$\partial_\mu T^{\mu\nu} = 0. \quad (4.2)$$

Cette équation de conservation du tenseur, nous amène directement à choisir la jauge de Lorenz pour la perturbation  $h_{\mu\nu}$ .

#### 4.1.1 L'effet direct

Évidemment, la première équation que nous allons considérer est celle des ondes gravitationnelles (2.16). Pour l'effet Gerstenshtein cela correspond à l'équation

$$\square h_{\mu\nu} = -\frac{16\pi G}{c^4} T^{(res)}_{\mu\nu}. \quad (4.3)$$

Remarquons que dans cette équation, le terme de gauche, contient en fait la linéarisation du tenseur d'Einstein, et ne contient que des termes du premier ordre, et aucun d'ordre 0. Nous devons alors considérer pour le terme de droite seulement le terme d'ordre 0, afin de pouvoir identifier les contributions selon chaque ordre terme à terme. Nous allons donc pouvoir calculer notre tenseur  $T^{(res)}_{\mu\nu}$  assez facilement, car en utilisant l'équation (4.1), nous obtenons

$$T^{(res)}_{\mu\nu} = T^{(tot)}_{\mu\nu} - T^{(c)}_{\mu\nu} - T^{(w)}_{\mu\nu}.$$

Comme nous devons nous limiter à l'ordre 0, l'équation pour calculer les différents tenseurs de l'équation ci-dessus, est la formule (2.32), qui va se réduire au tenseur  $T_{\mu\nu}^{(\eta)}$  dans chaque cas. Nous avons alors

$$T^{(x)}_{\mu\nu} = \frac{1}{\mu_0} \left( F^{(x)}_{\mu\alpha} F^{(x)\alpha}_{\nu} - \frac{1}{4} \eta_{\mu\nu} F^{(x)}_{\alpha\beta} F^{(x)\alpha\beta} \right),$$

où  $x = \{tot, c, w\}$ . Pour considérer l'effet Gertsenshtein direct, nous pouvons donc considérer le système suivant

$$\left\{ \begin{array}{l} \square h_{\mu\nu} = -\frac{16\pi G}{c^4} T^{(res)}_{\mu\nu}, \end{array} \right. \quad (4.4)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} T^{(res)}_{\mu\nu} = T^{(tot)}_{\mu\nu} - T^{(c)}_{\mu\nu} - T^{(w)}_{\mu\nu}, \end{array} \right. \quad (4.5)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} T^{(x)}_{\mu\nu} = \frac{1}{\mu_0} \left( F^{(x)}_{\mu\alpha} F^{(x)\alpha}_{\nu} - \frac{1}{4} \eta_{\mu\nu} F^{(x)}_{\alpha\beta} F^{(x)\alpha\beta} \right). \quad x = \{tot, c, w\} \end{array} \right. \quad (4.6)$$

En effet, les équations de Maxwell covariantes ne sont pas considérées dans ce problème, car si nous avons une onde électromagnétique qui existe, les équations de Maxwell sans source sont trivialement vérifiées. De plus l'équation (4.2) implique que les équations de Maxwell covariantes dans le vide sont respectées. N'importe quelle solution des équations de Maxwell dans le vide

convient donc pour ce problème. Nous avons donc réécrit le système Einstein-Maxwell pour le cas de l'effet Gertsenshtein direct. Passons à présent à l'effet inverse.

### 4.1.2 L'effet inverse

Comme nous considérons des ondes gravitationnelles venant dans notre champ magnétique, nous pouvons conclure que l'équation (2.16) avec  $T_{\mu\nu} = 0$  est trivialement vérifiée. Il nous reste alors à traiter les équations de Maxwell linéarisées pour le tenseur de Faraday  $F^{(w)}_{\mu\nu}$ . L'équation (2.35) est alors trivialement satisfaite car cela provient de la construction du tenseur de Faraday lui-même, puisqu'il est issu d'un potentiel sous forme de quadrivecteur. Il nous reste alors à traiter l'équation (2.36), puisque nous n'avons pas de source électromagnétique, qui pour rappel vaut <sup>1</sup>

$$\left(\eta^{\mu\alpha}\eta^{\nu\beta} - \eta^{\mu\alpha}h^{\nu\beta} - h^{\mu\alpha}\eta^{\nu\beta}\right)\partial_{\mu}F^{(w)}_{\alpha\beta} - \partial_{\mu}h^{\nu\beta}F^{(w)\mu}_{\beta} = 0,$$

Nous allons à présent considérer que le tenseur de Faraday contient deux contributions. La première est le tenseur de Faraday à l'ordre 0, qui est notre champ magnétique externe, et la deuxième est une correction au premier ordre. Notre tenseur de Faraday s'exprime donc comme

$$F^{(w)}_{\mu\nu} = F^{(0)}_{\mu\nu} + F^{(1)}_{\mu\nu}.$$

Avec cette hypothèse, pour garder l'équation au premier ordre, nous nous devons de négliger tous les termes qui multiplient la perturbation  $h_{\mu\nu}$  et la correction du premier ordre du champ électromagnétique  $F^{(1)}_{\mu\nu}$ . Nous pouvons également conclure, dans notre approche perturbative, que le terme d'ordre 0 du tenseur de Faraday, respecte l'équation de Maxwell dans la métrique de Minkowski,

$$\partial_{\mu}F^{(0)\mu\nu} = 0,$$

ce qui peut aussi s'exprimer par la relation  $\partial_{\mu}F^{(0)}_{\alpha\beta} = 0$ . Grâce à ces relations. L'équation (2.36) se réduit alors en

$$\partial_{\mu}F^{(1)\mu\nu} = \partial_{\mu}h^{\nu\beta}F^{(0)\mu}_{\beta}.$$

L'équation ci-dessus peut s'exprimer comme une équation du second groupe des équations de Maxwell sur l'espace de Minkowski. En effet, il nous suffit de poser  $-\mu_0 j_{eff}^{\nu} = \partial_{\mu}h^{\nu\beta}F^{(0)\mu}_{\beta}$  pour obtenir l'équation

$$\partial_{\mu}F^{(1)\mu\nu} = -\mu_0 j_{eff}^{\nu}.$$

Comme dans le chapitre 1, nous pouvons décrire le tenseur de Faraday  $F^{(1)}_{\mu\nu}$  par un potentiel  $A_{\mu}^{(1)}$ , qui respecte la jauge de Lorenz de l'électromagnétisme,  $\partial_{\mu}A_{(1)}^{\mu} = 0$ . Nous pouvons donc obtenir une équation similaire à l'équation (1.38). Nous avons donc l'équation

$$\square A^{(1)}_{\lambda} = -\mu_0 j_{\lambda}^{eff} = \eta_{\nu\lambda}\partial_{\mu}h^{\nu\beta}F^{(0)\mu}_{\beta}. \quad (4.7)$$

Grâce à cette équation, nous pouvons alors, grâce à une équation d'onde, déterminer facilement les corrections du premier ordre de notre onde électromagnétique. Nous allons maintenant pouvoir étudier le cas de l'onde électromagnétique et de l'effet Gertsenshtein direct et inverse avec les équations que nous avons décrites ci-dessus.

1. Rappelons que la trace de la perturbation est nulle dans notre cas.

## 4.2 Cas de l'onde électromagnétique seule

Pour cette étude, nous allons nous placer dans des coordonnées cartésiennes pour notre espace-temps,  $(x^0, x^1, x^2, x^3) = (ct, x, y, z)$ . Nous considérons une onde électromagnétique sous forme d'onde plane à une dimension, où nous considérons une propagation le long de l'axe  $X^3 = Z$ . Bien sûr nous supposons la symétrie du tenseur  $w_{\mu\nu}$ , qui représente la perturbation de la métrique due à l'onde. Nous utilisons le logiciel de calcul symbolique SageMath<sup>2</sup> pour dériver les différentes équations.

Nous considérons alors que l'onde électromagnétique est formée des composantes des champs électriques et magnétiques  $(E_x, E_y, E_z, B_x, B_y, B_z)$ , et que le tenseur  $w_{\mu\nu}$  est décrit par

$$w_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} w_{00} & w_{01} & w_{02} & w_{03} \\ w_{01} & w_{11} & w_{12} & w_{13} \\ w_{02} & w_{12} & w_{22} & w_{23} \\ w_{03} & w_{13} & w_{23} & w_{33} \end{pmatrix}.$$

Nous pouvons alors calculer la jauge de Lorenz pour notre perturbation. Cette jauge de Lorenz nous donne quatre équations, qui ont pour expression

$$\begin{cases} \partial_0 w_{00} = \partial_z w_{03} \\ \partial_0 w_{03} = \partial_z w_{33} \\ \partial_0 w_{01} = \partial_z w_{13} \\ \partial_0 w_{02} = \partial_z w_{23} \end{cases}$$

Essayons par exemple de résoudre la première équation,  $\partial_0 w_{00} = \partial_z w_{03}$ . La forme de cette équation nous amène à conclure que la solution est en fait que  $w_{03} = w_{00}$  soit une onde plane se propageant vers l'arrière, à savoir une fonction  $w^{\leftarrow}(z + ct)$ . En effet, nous avons que  $\partial_0 w_{00} = (w^{\leftarrow})'(z + ct)$  et aussi que  $\partial_z w_{03} = (w^{\leftarrow})'(z + ct)$ . Cependant, une autre solution existe, on pourrait imaginer que la solution est le fait que  $w_{03} = -w_{00}$  soit une onde plane se propageant vers l'avant, à savoir une fonction  $w^{\rightarrow}(z - ct)$ . Nous avons alors dans ce cas que  $\partial_0 w_{00} = -(w^{\rightarrow})'(z - ct)$  et aussi que  $\partial_z w_{03} = -(w^{\rightarrow})'(z - ct)$ . Notre solution sera alors une superposition des deux solutions, nous avons donc alors

$$\begin{cases} w_{00} = w^{\leftarrow}(z + ct) + w^{\rightarrow}(z - ct), \\ w_{03} = w^{\leftarrow}(z + ct) - w^{\rightarrow}(z - ct). \end{cases}$$

Nous pouvons appliquer la même méthode pour les autres équations, et donc nous obtenons en résumé pour la perturbation les solutions suivantes

$$\begin{cases} w_{00} = w^{\leftarrow}(z + ct) + w^{\rightarrow}(z - ct) = w_{33} \\ w_{03} = w^{\leftarrow}(z + ct) - w^{\rightarrow}(z - ct) \\ w_{01} = w_{01}^{\leftarrow}(z + ct) + w_{01}^{\rightarrow}(z - ct) \\ w_{13} = w_{01}^{\leftarrow}(z + ct) - w_{01}^{\rightarrow}(z - ct) \\ w_{02} = w_{02}^{\leftarrow}(z + ct) + w_{02}^{\rightarrow}(z - ct) \\ w_{23} = w_{02}^{\leftarrow}(z + ct) - w_{02}^{\rightarrow}(z - ct) \end{cases}$$

2. Vous pouvez trouver des informations sur la consultation des feuilles SageMath à l'annexe à la fin de ce mémoire

Nous avons également le fait que la trace de notre perturbation  $w$  est nulle. Comme  $w_{00} = w_{33}$ , nous avons automatiquement que  $w_{22} = -w_{11}$ . Nous allons à présent tenter d'écrire les équations de Maxwell. Ces équations se réduisent au système

$$\begin{cases} \partial_0 B_z = \partial_z B_z = 0 \\ \partial_0 B_y = -\partial_z E_x \\ \partial_0 B_x = \partial_z E_y. \end{cases}$$

La première équation nous amène au fait que  $B_z = 0$ . Les deux autres équations peuvent être résolues de manière identique à la perturbation et nous amène aux solutions

$$\begin{cases} E_x = E_x^{\leftarrow}(z+ct) + E_x^{\rightarrow}(z-ct) \\ E_y = E_y^{\leftarrow}(z+ct) + E_y^{\rightarrow}(z-ct) \\ B_x = (E_x^{\leftarrow}(z+ct) - E_x^{\rightarrow}(z-ct)) c^{-1} \\ B_y = (-E_y^{\leftarrow}(z+ct) + E_y^{\rightarrow}(z-ct)) c^{-1}. \end{cases}$$

Nous allons à présent considérer le cas d'une propagation vers l'avant et vers l'arrière pour l'onde électromagnétique.

#### — Propagation de l'onde électromagnétique vers l'avant

Nous avons donc que

$$\begin{cases} E_x = E_x^{\rightarrow}(z-ct) \\ E_y = E_y^{\rightarrow}(z-ct) \\ B_x = -E_x^{\rightarrow}(z-ct) c^{-1} \\ B_y = E_y^{\rightarrow}(z-ct) c^{-1} \\ B_z = 0 \end{cases}$$

Nous n'avons pas encore de condition sur la composante  $E_z$  de l'onde, mais après avoir calculé le tenseur énergie-impulsion grâce à la formule (4.6), nous remarquons que pour que  $w_{00} = w_{33}$ , il faut que  $T_{00} = T_{33}$ . Dans notre cas, cela n'est réalisable que si  $E_z = 0$ . Nous avons donc une onde plane transverse électromagnétique (TEM). Le tenseur de Faraday dans notre problème possède donc comme expression

$$F_{\mu\nu} = \frac{1}{c} \begin{pmatrix} 0 & -E_x^{\rightarrow} & -E_y^{\rightarrow} & 0 \\ E_x^{\rightarrow} & 0 & 0 & -E_x^{\rightarrow} \\ E_y^{\rightarrow} & 0 & 0 & -E_y^{\rightarrow} \\ 0 & E_x^{\rightarrow} & E_y^{\rightarrow} & 0 \end{pmatrix},$$

et grâce à l'équation (4.6), le tenseur énergie-impulsion a pour forme

$$T_{\mu\nu} = \frac{1}{\mu_0 c^2} \begin{pmatrix} E_x^{\rightarrow 2} + E_y^{\rightarrow 2} & 0 & 0 & -E_x^{\rightarrow 2} - E_y^{\rightarrow 2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -E_x^{\rightarrow 2} - E_y^{\rightarrow 2} & 0 & 0 & E_x^{\rightarrow 2} + E_y^{\rightarrow 2} \end{pmatrix}.$$

Sous cette configuration, nous pouvons remarquer que les composantes de la perturbation  $w_{11}$ ,  $w_{12}$ ,  $w_{01}$  et  $w_{02}$  ne sont pas sourcées par le tenseur énergie-impulsion via l'équation

(4.4). Nous pouvons alors les poser comme étant nulles. De plus, la forme du tenseur énergie-impulsion, avec le signe opposé à  $T_{00} = T_{33}$  pour la composante  $T_{03}$ , nous amène à conclure que le seul mode actif est le mode  $w^{\rightarrow}(z - ct)$ , ce qui veut dire que  $w^{\leftarrow}(z + ct) = 0$ . La perturbation de la métrique a donc pour forme

$$w_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} w^{\rightarrow} & 0 & 0 & -w^{\rightarrow} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -w^{\rightarrow} & 0 & 0 & w^{\rightarrow} \end{pmatrix},$$

et l'équation de propagation est

$$\square w^{\rightarrow} = -\frac{16\pi G}{c^6} \frac{E_x^{\rightarrow 2} + E_y^{\rightarrow 2}}{\mu_0} \quad (4.8)$$

#### — Propagation de l'onde électromagnétique vers l'arrière

Nous avons donc que

$$\begin{cases} E_x = E_x^{\leftarrow}(z + ct) \\ E_y = E_y^{\leftarrow}(z + ct) \\ B_x = E_x^{\leftarrow}(z + ct) c^{-1} \\ B_y = -E_y^{\leftarrow}(z + ct) c^{-1} \\ B_z = 0 \end{cases}$$

Comme pour le cas précédent, nous n'avons pas encore de condition sur la composante  $E_z$  de l'onde, mais après avoir calculé le tenseur énergie-impulsion grâce à la formule (4.6), nous remarquons que pour que  $w_{00} = w_{33}$ , il faut que  $T_{00} = T_{33}$ . Et comme dans le cas de la propagation vers l'avant, cela n'est réalisable que si  $E_z = 0$ . Nous avons donc également une onde plane transverse électromagnétique (TEM). Le tenseur de Faraday dans notre problème possède donc comme expression

$$F_{\mu\nu} = \frac{1}{c} \begin{pmatrix} 0 & -E_x^{\leftarrow} & -E_y^{\leftarrow} & 0 \\ E_x^{\leftarrow} & 0 & 0 & E_x^{\leftarrow} \\ E_y^{\leftarrow} & 0 & 0 & E_y^{\leftarrow} \\ 0 & -E_x^{\leftarrow} & -E_y^{\leftarrow} & 0 \end{pmatrix},$$

et grâce à l'équation (4.6), le tenseur énergie-impulsion a pour forme

$$T_{\mu\nu} = \frac{1}{\mu_0 c^2} \begin{pmatrix} E_x^{\leftarrow 2} + E_y^{\leftarrow 2} & 0 & 0 & E_x^{\leftarrow 2} + E_y^{\leftarrow 2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ E_x^{\leftarrow 2} + E_y^{\leftarrow 2} & 0 & 0 & E_x^{\leftarrow 2} + E_y^{\leftarrow 2} \end{pmatrix}.$$

Sous cette configuration, nous pouvons remarquer comme dans le cas précédent que les composantes de la perturbation  $w_{11}$ ,  $w_{12}$ ,  $w_{01}$  et  $w_{02}$  ne sont pas sourcées par le tenseur énergie-impulsion via l'équation (4.4). Nous pouvons alors les poser comme étant nulles. De plus, la forme du tenseur énergie-impulsion, avec le signe identique pour la composante  $T_{03}$  par rapport à  $T_{00} = T_{33}$ , nous amène à conclure que le seul mode actif est le mode

$w^{\leftarrow}(z + ct)$ , ce qui veut dire que  $w^{\rightarrow}(z - ct) = 0$ . La perturbation de la métrique a donc pour forme

$$w_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} w^{\leftarrow} & 0 & 0 & w^{\leftarrow} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ w^{\leftarrow} & 0 & 0 & w^{\leftarrow} \end{pmatrix},$$

et l'équation de propagation est

$$\square w^{\leftarrow} = -\frac{16\pi G}{c^6} \frac{E_x^{\leftarrow 2} + E_y^{\leftarrow 2}}{\mu_0}, \quad (4.9)$$

équation sensiblement semblable au cas précédent.

Nous pouvons alors remarquer que les résultats de la propagation vers l'avant pour l'onde électromagnétique ressemblent aux résultats trouvés par Tolman, Ehrenfest et Podolsky, ainsi que ceux de Rätzel. Cependant, nous pouvons voir que considérer la propagation inverse change légèrement la forme de la perturbation mais ne change en rien l'équation de propagation de l'onde gravitationnelle. Ceci est dû au fait que le tenseur énergie-impulsion est quadratique par rapport à l'intensité du champ électromagnétique. Nous allons maintenant pouvoir passer à l'analyse de différents cas de polarisation pour l'effet Gertsenshtein.

### 4.3 Etude de différents cas pour l'effet Gertsenshtein

Considérons à présent l'effet Gertsenshtein. Pour ce faire, nous allons nous placer comme précédemment dans un repère de coordonnées cartésiennes,  $(x^0, x^1, x^2, x^3) = (ct, x, y, z)$ . Nous considérons une onde électromagnétique sous forme d'onde plane à une dimension, qui se propage le long de l'axe  $X^3 = Z$ , qui se déplace en présence d'un champ magnétique externe constant. Bien sûr nous supposons la symétrie du tenseur  $h_{\mu\nu}$ , qui représente la perturbation de la métrique due à l'onde. Nous utilisons également le logiciel de calcul symbolique SageMath<sup>3</sup> pour dériver les différentes équations.

Nous allons considérer dans cette section l'effet Gertsenshtein direct et inverse. Pour l'effet direct, pouvons mettre en avant deux cas de champ magnétique, le premier est le cas du champ magnétique transverse, décrit par les composantes  $B_x^\perp$  et  $B_y^\perp$ . Le deuxième cas est celui du champ longitudinal, décrit par la composante du champ magnétique selon l'axe  $X^3 = Z$ , la composante  $B^\parallel$ .

Dans ces deux cas, nous allons traiter différentes polarisations de l'onde électromagnétique, décrite par les composantes  $(E_x, E_y, E_z, B_x, B_y, B_z)$ . Les différentes polarisations considérées sont, l'onde transverse électrique (TE,  $E_z = 0$ ), l'onde transverse magnétique (TM,  $B_z = 0$ ) et l'onde transverse électromagnétique (TEM,  $E_z = B_z = 0$ ). Dans tous les cas, nous considérons une perturbation de la métrique symétrique qui a pour expression

3. Vous pouvez trouver des informations sur la consultation des feuilles SageMath à l'annexe à la fin de ce mémoire

$$h_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} h_{00} & h_{01} & h_{02} & h_{03} \\ h_{01} & h_{11} & h_{12} & h_{13} \\ h_{02} & h_{12} & h_{22} & h_{23} \\ h_{03} & h_{13} & h_{23} & h_{33} \end{pmatrix}.$$

Nous pouvons alors calculer la jauge de Lorenz pour notre perturbation. Cette jauge de Lorenz nous donne quatre équations, qui ont pour expression

$$\begin{cases} \partial_0 h_{00} = \partial_z h_{03} \\ \partial_0 h_{03} = \partial_z h_{33} \\ \partial_0 h_{01} = \partial_z h_{13} \\ \partial_0 h_{02} = \partial_z h_{23} \end{cases}$$

Les équations considérées sont semblables à celles du cas de l'onde électromagnétique seule. Nous pouvons donc utiliser une méthode de résolution identique à la section précédente, et obtenir pour la perturbation les solutions suivantes

$$\begin{cases} h_{00} = h^{\leftarrow}(z+ct) + h^{\rightarrow}(z-ct) = h_{33} \\ h_{03} = h^{\leftarrow}(z+ct) - h^{\rightarrow}(z-ct) \\ h_{01} = h_{01}^{\leftarrow}(z+ct) + h_{01}^{\rightarrow}(z-ct) \\ h_{13} = h_{01}^{\leftarrow}(z+ct) - h_{01}^{\rightarrow}(z-ct) \\ h_{02} = h_{02}^{\leftarrow}(z+ct) + h_{02}^{\rightarrow}(z-ct) \\ h_{23} = h_{02}^{\leftarrow}(z+ct) - h_{02}^{\rightarrow}(z-ct) \end{cases}$$

Nous avons également le fait que la trace de notre perturbation  $h$  est nulle. Comme  $h_{00} = h_{33}$ , nous avons automatiquement que  $h_{22} = -h_{11} = -h_+$ . La perturbation de la métrique générale dans notre cas est alors de la forme

$$h_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} h^{\leftarrow} + h^{\rightarrow} & h_{01}^{\leftarrow} + h_{01}^{\rightarrow} & h_{02}^{\leftarrow} + h_{02}^{\rightarrow} & h^{\leftarrow} - h^{\rightarrow} \\ h_{01}^{\leftarrow} + h_{01}^{\rightarrow} & h_+ & h_{\times} & h_{01}^{\leftarrow} - h_{01}^{\rightarrow} \\ h_{02}^{\leftarrow} + h_{02}^{\rightarrow} & h_{\times} & -h_+ & h_{02}^{\leftarrow} - h_{02}^{\rightarrow} \\ h^{\leftarrow} - h^{\rightarrow} & h_{01}^{\leftarrow} - h_{01}^{\rightarrow} & h_{02}^{\leftarrow} - h_{02}^{\rightarrow} & h^{\leftarrow} + h^{\rightarrow} \end{pmatrix} \quad (4.10)$$

Les équations de Maxwell pour l'onde vont nous fournir pour la partie transverse de l'onde électromagnétique les équations

$$\begin{cases} \partial_0 B_y = -\partial_z E_x, \\ \partial_0 B_x = \partial_z E_y, \end{cases}$$

ce qui nous amène aux solutions

$$\begin{cases} E_x = E_x^{\leftarrow}(z+ct) + E_x^{\rightarrow}(z-ct) \\ E_y = E_y^{\leftarrow}(z+ct) + E_y^{\rightarrow}(z-ct) \\ B_x = (E_x^{\leftarrow}(z+ct) - E_x^{\rightarrow}(z-ct)) c^{-1} \\ B_y = (-E_y^{\leftarrow}(z+ct) + E_y^{\rightarrow}(z-ct)) c^{-1}. \end{cases}$$

Maintenant ces propriétés énoncées et rappelées, nous allons pouvoir commencer à étudier l'effet direct.

### 4.3.1 Effet direct, avec un champ externe transverse

Pour rappel, le champ transverse est décrit par deux composantes  $B_x^\perp$  et  $B_y^\perp$ . Ce champ magnétique est aussi considéré comme constant.

#### — Onde électromagnétique TEM

Dans le cas de l'onde transverse électromagnétique, Le tenseur de Faraday de l'onde électromagnétique a pour expression <sup>4</sup>

$$F^{(w)}{}_{\mu\nu} = \frac{1}{c} \begin{pmatrix} 0 & -E_x^\leftarrow - E_x^\rightarrow & -E_y^\leftarrow - E_y^\rightarrow & 0 \\ E_x^\leftarrow + E_x^\rightarrow & 0 & 0 & E_x^\leftarrow - E_x^\rightarrow \\ E_y^\leftarrow + E_y^\rightarrow & 0 & 0 & E_y^\leftarrow - E_y^\rightarrow \\ 0 & -E_x^\leftarrow + E_x^\rightarrow & -E_y^\leftarrow + E_y^\rightarrow & 0 \end{pmatrix},$$

et celui du champ magnétique externe a pour expression

$$F^{(c)}{}_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -B_y^\perp \\ 0 & 0 & 0 & B_x^\perp \\ 0 & B_y^\perp & -B_x^\perp & 0 \end{pmatrix}$$

Grâce à ces expressions, nous pouvons facilement calculer les tenseurs  $T^{\text{(tot)}}{}_{\mu\nu}$ ,  $T^{\text{(c)}}{}_{\mu\nu}$ , et  $T^{\text{(w)}}{}_{\mu\nu}$  via l'équation (4.6) et nous pouvons par après calculer le tenseur  $T^{\text{(res)}}{}_{\mu\nu}$  grâce à (4.5). Dans notre cas, ce tenseur a alors comme expression

$$T^{\text{(res)}}{}_{\mu\nu} = \frac{1}{\mu_0 c} \begin{pmatrix} \mathcal{A} & 0 & 0 & \mathcal{B} \\ 0 & \mathcal{C} & \mathcal{D} & 0 \\ 0 & \mathcal{D} & -\mathcal{C} & 0 \\ \mathcal{B} & 0 & 0 & \mathcal{A} \end{pmatrix},$$

où

$$\begin{aligned} \mathcal{A} &= B_y^\perp E_x^\rightarrow - B_y^\perp E_x^\leftarrow - B_x^\perp E_y^\rightarrow + B_x^\perp E_y^\leftarrow \\ \mathcal{B} &= -B_y^\perp E_x^\rightarrow - B_y^\perp E_x^\leftarrow + B_x^\perp E_y^\rightarrow + B_x^\perp E_y^\leftarrow \\ \mathcal{C} &= B_y^\perp E_x^\rightarrow - B_y^\perp E_x^\leftarrow + B_x^\perp E_y^\rightarrow - B_x^\perp E_y^\leftarrow \\ \text{et } \mathcal{D} &= -B_x^\perp E_x^\rightarrow + B_x^\perp E_x^\leftarrow + B_y^\perp E_y^\rightarrow - B_y^\perp E_y^\leftarrow. \end{aligned}$$

Nous voyons alors que les composantes de la perturbation (4.10),  $h_{01}$  et  $h_{02}$ , ne sont pas sourcées par le tenseur énergie-impulsion de l'effet Gertsenshtein, le tenseur  $T^{\text{(res)}}{}_{\mu\nu}$ . Nous pouvons donc les poser comme étant nulles. Ces composantes seront, comme nous le verrons plus loin, sourcées par des composantes longitudinales.

Dans ces cas, nous avons alors identifié quatre équations de propagation de composantes d'ondes gravitationnelles, nous avons alors le système

4. Ici nous considérons les deux propagations de l'onde électromagnétique en même temps

$$\left\{ \begin{array}{l} \square h^{\rightarrow} = -\frac{16\pi G}{c^4} \frac{B_y^{\perp} E_x^{\rightarrow} - B_x^{\perp} E_y^{\rightarrow}}{\mu_0 c} \end{array} \right. \quad (4.11)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \square h^{\leftarrow} = -\frac{16\pi G}{c^4} \frac{-B_y^{\perp} E_x^{\leftarrow} + B_x^{\perp} E_y^{\leftarrow}}{\mu_0 c} \end{array} \right. \quad (4.12)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \square h_{+} = -\frac{16\pi G}{c^4} \frac{B_y^{\perp} E_x^{\rightarrow} - B_y^{\perp} E_x^{\leftarrow} + B_x^{\perp} E_y^{\rightarrow} - B_x^{\perp} E_y^{\leftarrow}}{\mu_0 c} \end{array} \right. \quad (4.13)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \square h_{\times} = -\frac{16\pi G}{c^4} \frac{-B_x^{\perp} E_x^{\rightarrow} + B_x^{\perp} E_x^{\leftarrow} + B_y^{\perp} E_y^{\rightarrow} - B_y^{\perp} E_y^{\leftarrow}}{\mu_0 c} \end{array} \right. \quad (4.14)$$

### — Onde électromagnétique TE et TM

Imaginons à présent que notre onde électromagnétique soit polarisée de manière transverse électrique. Il y a donc apparition d'une composante  $\mu_0 H_z$  pour l'onde électromagnétique. Dans ce cas, le tenseur de Faraday de l'onde électromagnétique a pour expression

$$F^{(w)}_{\mu\nu} = \frac{1}{c} \begin{pmatrix} 0 & -E_x^{\leftarrow} - E_x^{\rightarrow} & -E_y^{\leftarrow} - E_y^{\rightarrow} & 0 \\ E_x^{\leftarrow} + E_x^{\rightarrow} & 0 & \mu_0 H_z & E_x^{\leftarrow} - E_x^{\rightarrow} \\ E_y^{\leftarrow} + E_y^{\rightarrow} & -\mu_0 H_z & 0 & E_y^{\leftarrow} - E_y^{\rightarrow} \\ 0 & -E_x^{\leftarrow} + E_x^{\rightarrow} & -E_y^{\leftarrow} + E_y^{\rightarrow} & 0 \end{pmatrix},$$

et le tenseur de Faraday lié au champ externe est toujours donné par

$$F^{(c)}_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -B_y^{\perp} \\ 0 & 0 & 0 & B_x^{\perp} \\ 0 & B_y^{\perp} & -B_x^{\perp} & 0 \end{pmatrix}.$$

Comme dans le cas précédent, nous pouvons calculer les différents tenseurs  $T^{(tot)}_{\mu\nu}$ ,  $T^{(c)}_{\mu\nu}$ , et  $T^{(w)}_{\mu\nu}$  via l'équation (4.6) et nous pouvons grâce à cela calculer le tenseur  $T^{(res)}_{\mu\nu}$  à l'aide de l'équation (4.5). Le tenseur énergie-impulsion pour l'effet Gertsenshtein est alors de la forme

$$T^{(res)}_{\mu\nu} = \frac{1}{\mu_0 c} \begin{pmatrix} \mathcal{A} & 0 & 0 & \mathcal{B} \\ 0 & C & \mathcal{D} & -\mu_0 B_x^{\perp} H_z \\ 0 & \mathcal{D} & -C & -\mu_0 B_y^{\perp} H_z \\ \mathcal{B} & -\mu_0 B_x^{\perp} H_z & -\mu_0 B_y^{\perp} H_z & \mathcal{A} \end{pmatrix},$$

où  $\mathcal{A}$ ,  $\mathcal{B}$ ,  $C$  et  $\mathcal{D}$  ont les mêmes valeurs que pour le cas transverse électromagnétique. Ces composantes ne sont donc pas sourcées par les composantes longitudinales. Dans ce cas transverse électrique, si nous utilisons la condition de conservation du tenseur énergie-impulsion, l'équation (4.2), nous obtenons les équations

$$\begin{cases} B_x^{\perp} \partial_z H_z = 0, \\ B_y^{\perp} \partial_z H_z = 0 \end{cases}$$

De plus, les équations de Maxwell nous fournissent l'équation  $\partial_0 H_z = 0$ . Ces équations nous amène à conclure que  $H_z = 0$ . Nous retombons alors sur le cas transverse électromagnétique. Dans le cas de l'onde transverse magnétique, une construction similaire peut

être effectuée et nous amène à conclure que  $E_z = 0$ . Nous retombons également sur le cas d'une onde transverse électromagnétique. Maintenant, nous allons pouvoir considérer le cas d'un champ magnétique externe longitudinal.

### 4.3.2 Effet direct, avec un champ externe longitudinal

Pour rappel, le champ transverse est décrit par une composante selon l'axe  $X^3 = Z$ , notée  $B^\parallel$ . Ce champ magnétique est considéré comme constant.

#### — Onde électromagnétique TEM

Dans le cas de l'onde transverse électromagnétique, Le tenseur de Faraday de l'onde électromagnétique a pour expression

$$F^{(w)}{}_{\mu\nu} = \frac{1}{c} \begin{pmatrix} 0 & -E_x^\leftarrow - E_x^\rightarrow & -E_y^\leftarrow - E_y^\rightarrow & 0 \\ E_x^\leftarrow + E_x^\rightarrow & 0 & 0 & E_x^\leftarrow - E_x^\rightarrow \\ E_y^\leftarrow + E_y^\rightarrow & 0 & 0 & E_y^\leftarrow - E_y^\rightarrow \\ 0 & -E_x^\leftarrow + E_x^\rightarrow & -E_y^\leftarrow + E_y^\rightarrow & 0 \end{pmatrix},$$

et celui du champ magnétique externe a pour expression

$$F^{(c)}{}_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & B^\parallel & 0 \\ 0 & -B^\parallel & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Grâce à ces expressions, nous pouvons facilement calculer les tenseurs  $T^{(tot)}{}_{\mu\nu}$ ,  $T^{(c)}{}_{\mu\nu}$ , et  $T^{(w)}{}_{\mu\nu}$  via l'équation (4.6) et nous pouvons grâce à cela calculer le tenseur  $T^{(res)}{}_{\mu\nu}$  en utilisant (4.5). Dans notre cas, ce tenseur a alors comme expression

$$T^{(res)}{}_{\mu\nu} = \frac{1}{\mu_0 c} \begin{pmatrix} 0 & \mathcal{A} & \mathcal{B} & 0 \\ \mathcal{A} & 0 & 0 & \mathcal{C} \\ \mathcal{B} & 0 & 0 & \mathcal{D} \\ 0 & \mathcal{C} & \mathcal{D} & 0 \end{pmatrix},$$

où

$$\begin{aligned} \mathcal{A} &= -B^\parallel E_y^\rightarrow - B^\parallel E_y^\leftarrow \\ \mathcal{B} &= B^\parallel E_x^\rightarrow + B^\parallel E_x^\leftarrow \\ \mathcal{C} &= B^\parallel E_y^\rightarrow - B^\parallel E_y^\leftarrow \\ \mathcal{D} &= -B^\parallel E_x^\rightarrow + B^\parallel E_x^\leftarrow. \end{aligned}$$

Nous voyons alors que les composantes de la perturbation (4.10),  $h_+$ ,  $h_\times$ ,  $h^\rightarrow$  et  $h^\leftarrow$  ne sont pas sourcées par le tenseur énergie-impulsion de l'effet Gertsenshtein, le tenseur  $T^{(res)}{}_{\mu\nu}$ . Nous pouvons donc les poser comme étant nulles.

Dans ces cas, nous avons alors identifié quatre équations de propagation de composantes d'ondes gravitationnelles, nous avons alors le système

$$\left\{ \begin{array}{l} \square h_{01}^{\rightarrow} = \frac{16\pi G}{c^4} \frac{B^{\parallel} E_y^{\rightarrow}}{\mu_0 c} \end{array} \right. \quad (4.15)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \square h_{01}^{\leftarrow} = \frac{16\pi G}{c^4} \frac{B^{\parallel} E_y^{\leftarrow}}{\mu_0 c} \end{array} \right. \quad (4.16)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \square h_{02}^{\rightarrow} = -\frac{16\pi G}{c^4} \frac{B^{\parallel} E_x^{\rightarrow}}{\mu_0 c} \end{array} \right. \quad (4.17)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \square h_{02}^{\leftarrow} = -\frac{16\pi G}{c^4} \frac{B^{\parallel} E_x^{\leftarrow}}{\mu_0 c} \end{array} \right. \quad (4.18)$$

A titre d'information, si nous réalisons une analyse de la polarisation de ces degrés de polarisations  $h_{01}$  et  $h_{02}$ , et que nous cherchons à obtenir des équations similaires à (2.30) et (2.31), nous avons que ces degrés de liberté font bouger les masses tests à la fois selon une composante transverse,  $x$  pour  $h_{01}$  et  $y$  pour  $h_{02}$ , et selon la composante longitudinale,  $z$ .

#### — Onde électromagnétique TE et TM

Afin de ne pas surcharger cette section, nous n'allons pas détailler les calculs car les développements sont similaires à ceux du cas du champ magnétique externe transverse. En effet, le fait de considérer une onde transverse électrique ou transverse magnétique impliquera que la conservation du tenseur énergie-impulsion ainsi que les équations de Maxwell nous forcera à considérer le cas de l'onde transverse électromagnétique. Maintenant que nous avons considéré les différents cas pour l'effet direct, nous allons pouvoir considérer l'effet inverse.

### 4.3.3 Effet inverse

Comme nous avons remarqué dans le chapitre 2, les ondes gravitationnelles venant de sources astrophysiques et se propageant dans le vide ne contiennent que deux polarisations,  $h_+$  et  $h_{\times}$ . Au vu de nos analyses précédentes le cas qui va générer des ondes de cette polarisation est le cas d'un champ externe transverse avec une onde transverse électromagnétique. Pour considérer l'effet inverse, seul ce cas sera considéré afin d'analyser l'action des modes transverses des ondes gravitationnelles.

Nous pouvons à présent considérer l'équation d'onde pour les corrections du premier ordre du champ électromagnétique (4.7), qui pour rappel est l'équation

$$\square A^{(1)}_{\lambda} = -\mu_0 j_{\lambda}^{eff} = \eta_{\nu\lambda} \partial_{\mu} h^{\nu\beta} F_{(0)\beta}^{\mu}.$$

Imaginons une perturbation de métrique ayant la forme,

$$h_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} h^{\leftarrow} + h^{\rightarrow} & 0 & 0 & h^{\leftarrow} - h^{\rightarrow} \\ 0 & h_+ & h_{\times} & 0 \\ 0 & h_{\times} & -h_+ & 0 \\ h^{\leftarrow} - h^{\rightarrow} & 0 & 0 & h^{\leftarrow} + h^{\rightarrow} \end{pmatrix},$$

perturbation qui pourrait elle-même être générée par effet Gertsenshtein direct. Nous considérons une onde transverse électromagnétique dont le tenseur de Faraday est

$$F^{(w)}_{\mu\nu} = \frac{1}{c} \begin{pmatrix} 0 & -E_x^{\leftarrow} - E_x^{\rightarrow} & -E_y^{\leftarrow} - E_y^{\rightarrow} & 0 \\ E_x^{\leftarrow} + E_x^{\rightarrow} & 0 & 0 & E_x^{\leftarrow} - E_x^{\rightarrow} \\ E_y^{\leftarrow} + E_y^{\rightarrow} & 0 & 0 & E_y^{\leftarrow} - E_y^{\rightarrow} \\ 0 & -E_x^{\leftarrow} + E_x^{\rightarrow} & -E_y^{\leftarrow} + E_y^{\rightarrow} & 0 \end{pmatrix},$$

ainsi qu'un champ magnétique externe et considéré comme constant, dont le tenseur de Faraday est donné par

$$F^{(c)}_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -B_y^{\perp} \\ 0 & 0 & 0 & B_x^{\perp} \\ 0 & B_y^{\perp} & -B_x^{\perp} & 0 \end{pmatrix}.$$

Sous ces hypothèses, nous pouvons calculer le terme  $-\mu_0 j_{\lambda}^{eff}$  de l'équation (4.7) et nous obtenons les composantes

$$\left\{ \begin{array}{l} j_0^{eff} = j_z^{eff} = 0 \\ -\mu_0 j_x^{eff} = -\left(B_x + c^{-1}(-E_y^{\rightarrow} + E_y^{\leftarrow})\right) \partial_z h_{\times} + c^{-1}(E_y^{\rightarrow} + E_y^{\leftarrow}) \partial_0 h_{\times} \\ \quad + \left(B_y + c^{-1}(E_x^{\rightarrow} - E_x^{\leftarrow})\right) \partial_z h_{+} + c^{-1}(E_x^{\rightarrow} + E_x^{\leftarrow}) \partial_0 h_{+} \\ -\mu_0 j_y^{eff} = \left(B_y + c^{-1}(E_x^{\rightarrow} - E_x^{\leftarrow})\right) \partial_z h_{\times} + c^{-1}(E_x^{\rightarrow} + E_x^{\leftarrow}) \partial_0 h_{\times} \\ \quad + \left(B_x + c^{-1}(-E_y^{\rightarrow} + E_y^{\leftarrow})\right) \partial_z h_{+} - c^{-1}(E_y^{\rightarrow} + E_y^{\leftarrow}) \partial_0 h_{+}. \end{array} \right.$$

Nous remarquons dans ce cas que les termes qui contiennent  $h^{\rightarrow}$  et  $h^{\leftarrow}$  n'apparaissent pas dans le terme de source effective  $-\mu_0 j_{\lambda}^{eff}$ . Ce qui pourrait nous conforter dans le fait qu'ils sont des effets de coordonnées et peuvent être supprimés par un boost. Donc des sources d'ondes gravitationnelles provenant de sources astrophysiques ne contenant que les polarisations  $h_{+}$  et  $h_{\times}$ , sont bel et bien intéressantes pour l'effet Gertsenshtein inverse.

Les corrections du premier ordre du champ électromagnétique sont tout d'abord décrites par les équations d'onde

$$\left\{ \begin{array}{l} \square A^{(1)}_x = -\left(B_x + c^{-1}(-E_y^{\rightarrow} + E_y^{\leftarrow})\right) \partial_z h_{\times} + c^{-1}(E_y^{\rightarrow} + E_y^{\leftarrow}) \partial_0 h_{\times} \\ \quad + \left(B_y + c^{-1}(E_x^{\rightarrow} - E_x^{\leftarrow})\right) \partial_z h_{+} + c^{-1}(E_x^{\rightarrow} + E_x^{\leftarrow}) \partial_0 h_{+} \\ \square A^{(1)}_y = \left(B_y + c^{-1}(E_x^{\rightarrow} - E_x^{\leftarrow})\right) \partial_z h_{\times} + c^{-1}(E_x^{\rightarrow} + E_x^{\leftarrow}) \partial_0 h_{\times} \\ \quad + \left(B_x + c^{-1}(-E_y^{\rightarrow} + E_y^{\leftarrow})\right) \partial_z h_{+} - c^{-1}(E_y^{\rightarrow} + E_y^{\leftarrow}) \partial_0 h_{+} \end{array} \right.$$

et ensuite par la relation entre le tenseur de Faraday et le potentiel électromagnétique  $F = dA$ , qui nous permet d'obtenir les corrections explicites du champ électromagnétique via les équations

$$\begin{cases} E_x^{(1)} = -c\partial_0 A_x^{(1)} \\ E_y^{(1)} = -c\partial_0 A_y^{(1)} \\ B_x^{(1)} = \partial_z A_y^{(1)} \\ B_y^{(1)} = \partial_z A_x^{(1)} \end{cases}$$

Nous avons donc à présent décrit les différentes équations de propagation qui surviennent lors du traitement de l'effet Gertsenshtein direct et inverse. Grâce à ces équations de propagation, qui sont des équations d'onde, nous allons pouvoir traiter d'une configuration qui va nous permettre d'utiliser en même temps l'effet Gertsenshtein direct et inverse pour générer des ondes gravitationnelles stationnaires.

## Chapitre 5

# Génération d'ondes gravitationnelles stationnaires

Nous allons dans ce chapitre utiliser l'effet Gertsenshtein direct pour générer des ondes gravitationnelles stationnaires et l'effet inverse pour étudier les corrections du champ électromagnétique causées par ceux-ci. Pour cela, nous allons nous placer, comme dans le chapitre précédent, dans un système de coordonnées cartésiennes  $(x^0, x^1, x^2, x^3) = (ct, x, y, z)$ . Nous allons en fait considérer une onde électromagnétique stationnaire, sous forme d'onde plane à une dimension se déplaçant selon l'axe  $X^3 = Z$ , polarisée de manière transverse électromagnétique (TEM). Nous allons considérer que l'onde électromagnétique est dans une cavité TEM, qui autorise donc une onde transverse électromagnétique, de longueur  $2L$ . Dans la cavité, nous avons également la présence d'un champ magnétique externe, considéré comme constant, transverse par rapport à l'onde électromagnétique. Dans ce chapitre, nous allons d'abord décrire brièvement les équations qui traitent de ce problème, pour ensuite les transformer en équations sans dimensions, afin de traiter plus facilement les ordres de grandeur et les unités du problème. Après, nous allons résoudre les équations du problème dans les cas d'une polarisation linéaire et circulaire pour l'onde électromagnétique. Nous allons représenter les solutions graphiquement afin de bien caractériser les ondes créées.

### 5.1 Descriptions des équations d'onde

Pour obtenir les équations du problème, il nous faut rappeler les résultats du chapitre précédent, Nous allons considérer une onde stationnaire transverse électromagnétique, dont le tenseur de Faraday s'écrit de manière générale comme

$$F^{(w)}_{\mu\nu} = \frac{1}{c} \begin{pmatrix} 0 & -E_x^{\leftarrow} - E_x^{\rightarrow} & -E_y^{\leftarrow} - E_y^{\rightarrow} & 0 \\ E_x^{\leftarrow} + E_x^{\rightarrow} & 0 & 0 & E_x^{\leftarrow} - E_x^{\rightarrow} \\ E_y^{\leftarrow} + E_y^{\rightarrow} & 0 & 0 & E_y^{\leftarrow} - E_x^{\rightarrow} \\ 0 & -E_x^{\leftarrow} + E_x^{\rightarrow} & -E_y^{\leftarrow} + E_y^{\rightarrow} & 0 \end{pmatrix}.$$

Nous avons aussi le champ magnétique externe, constant, qui est un champ transverse et donc le tenseur de Faraday de ce champ a pour forme

$$F^{(c)}_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -B_y^\perp \\ 0 & 0 & 0 & B_x^\perp \\ 0 & B_y^\perp & -B_x^\perp & 0 \end{pmatrix}$$

Comme dans le chapitre précédent, nous pouvons facilement calculer les tenseurs  $T^{(tot)}_{\mu\nu}$ ,  $T^{(c)}_{\mu\nu}$ , et  $T^{(w)}_{\mu\nu}$  grâce à l'équation (4.6) et nous pouvons grâce à cela calculer le tenseur  $T^{(res)}_{\mu\nu}$  grâce à (4.5). Dans notre cas, ce tenseur a alors comme expression

$$T^{(res)}_{\mu\nu} = \frac{1}{\mu_0 c} \begin{pmatrix} \mathcal{A} & 0 & 0 & \mathcal{B} \\ 0 & \mathcal{C} & \mathcal{D} & 0 \\ 0 & \mathcal{D} & -\mathcal{C} & 0 \\ \mathcal{B} & 0 & 0 & \mathcal{A} \end{pmatrix},$$

où

$$\begin{aligned} \mathcal{A} &= B_y^\perp E_x^\rightarrow - B_y^\perp E_x^\leftarrow - B_x^\perp E_y^\rightarrow + B_x^\perp E_y^\leftarrow \\ \mathcal{B} &= -B_y^\perp E_x^\rightarrow - B_y^\perp E_x^\leftarrow + B_x^\perp E_y^\rightarrow + B_x^\perp E_y^\leftarrow \\ \mathcal{C} &= B_y^\perp E_x^\rightarrow - B_y^\perp E_x^\leftarrow + B_x^\perp E_y^\rightarrow - B_x^\perp E_y^\leftarrow \\ \text{et } \mathcal{D} &= -B_x^\perp E_x^\rightarrow + B_x^\perp E_x^\leftarrow + B_y^\perp E_y^\rightarrow - B_y^\perp E_y^\leftarrow. \end{aligned}$$

Nous voyons alors que les composantes de la perturbation (4.10),  $h_{01}$  et  $h_{02}$ , ne sont pas sourcées par le tenseur énergie-impulsion de l'effet Gertsenshtein, le tenseur  $T^{(res)}_{\mu\nu}$ . Nous pouvons donc les poser comme étant nulles.

La perturbation de la métrique est alors de la forme

$$h_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} h^\leftarrow + h^\rightarrow & 0 & 0 & h^\leftarrow - h^\rightarrow \\ 0 & h_+ & h_\times & 0 \\ 0 & h_\times & -h_+ & 0 \\ h^\leftarrow - h^\rightarrow & 0 & 0 & h^\leftarrow + h^\rightarrow \end{pmatrix} \quad (5.1)$$

Comme déjà vu précédemment, les équations pour l'effet Gertsenshtein direct sont de la forme

$$\left\{ \begin{aligned} \square h^\rightarrow &= -\frac{16\pi G}{c^4} \frac{B_y^\perp E_x^\rightarrow - B_x^\perp E_y^\rightarrow}{\mu_0 c} \\ \square h^\leftarrow &= -\frac{16\pi G}{c^4} \frac{-B_y^\perp E_x^\leftarrow + B_x^\perp E_y^\leftarrow}{\mu_0 c} \\ \square h_+ &= -\frac{16\pi G}{c^4} \frac{B_y^\perp E_x^\rightarrow - B_y^\perp E_x^\leftarrow + B_x^\perp E_y^\rightarrow - B_x^\perp E_y^\leftarrow}{\mu_0 c} \\ \square h_\times &= -\frac{16\pi G}{c^4} \frac{-B_x^\perp E_x^\rightarrow + B_x^\perp E_x^\leftarrow + B_y^\perp E_y^\rightarrow - B_y^\perp E_y^\leftarrow}{\mu_0 c}. \end{aligned} \right.$$

Nous avons vu également, que sous ces hypothèses, nous avons pour l'effet Gertsenshtein inverse les équations suivantes,

$$\left\{ \begin{array}{l} \square A^{(1)}_x = - \left( B_x + c^{-1} (-E_y^{\rightarrow} + E_y^{\leftarrow}) \right) \partial_z h_x + c^{-1} (E_y^{\rightarrow} + E_y^{\leftarrow}) \partial_0 h_x \\ \quad + \left( B_y + c^{-1} (E_x^{\rightarrow} - E_x^{\leftarrow}) \right) \partial_z h_+ + c^{-1} (E_x^{\rightarrow} + E_x^{\leftarrow}) \partial_0 h_+ \\ \square A^{(1)}_y = \left( B_y + c^{-1} (E_x^{\rightarrow} - E_x^{\leftarrow}) \right) \partial_z h_x + c^{-1} (E_x^{\rightarrow} + E_x^{\leftarrow}) \partial_0 h_x \\ \quad + \left( B_x + c^{-1} (-E_y^{\rightarrow} + E_y^{\leftarrow}) \right) \partial_z h_+ - c^{-1} (E_y^{\rightarrow} + E_y^{\leftarrow}) \partial_0 h_+ \end{array} \right.$$

Nous avons donc les différentes équations qui traitent de notre problème. Ce sont des équations d'ondes, que nous allons changer pour des versions sans dimension.

## 5.2 Passage aux équations sans dimension

Pour des raisons de simplicité dans l'interprétation et le traitement des résultats, nous allons traiter dans nos équations des grandeurs sans dimension. Par exemple, pour nos équations d'ondes gravitationnelles, nous avons des équations du type

$$\square h = \partial_z^2 h - \partial_{(ct)}^2 h = \frac{16\pi G}{c^5 \mu_0} \rho,$$

où  $h$  représente une onde gravitationnelle, et  $\rho$  le terme de source dépendant du champ électromagnétique. La première étape pour dédimensionner notre équation est de faire un changement de variables. Nous choisissons une longueur  $L$ , longueur caractéristique de notre problème, qui est en fait la longueur de notre cavité, qui est autrement dit la distance parcourue par l'onde électromagnétique dans le champ magnétique externe, dont parlait Gertsenshtein. Cette longueur va nous permettre d'effectuer le changement de variable  $z = ZL$  et  $ct = TL$ . Nous avons alors que  $\partial_z = \frac{1}{L} \partial_Z$  et  $\partial_{(ct)} = \frac{1}{L} \partial_T$ . Ce qui nous permet d'obtenir l'équation

$$\partial_Z^2 h - \partial_T^2 h = \frac{16\pi G}{c^5 \mu_0} L^2 \rho',$$

où  $\rho'$  est notre source modifiée par le changement de variable. Notre équation ne dépend plus des unités de longueur mais encore des unités du champ électromagnétique. Nous fixons alors une valeur  $E_0 = \max(E_x^{\leftarrow}, E_x^{\rightarrow}, E_y^{\leftarrow}, E_y^{\rightarrow})$  et  $B_0 = \max(B_x^{\perp}, B_y^{\perp})$ , qui sont en fait respectivement les maxima des différentes composantes du champ électrique et magnétique considéré. Nous pouvons alors poser  $E_x^{\leftarrow} = E_0 \mathcal{E}_x^{\leftarrow}$  et ainsi de suite pour les autres composantes du champ électrique. On pose également  $B_x^{\perp} = B_0 \mathcal{B}_x^{\perp}$  et la même chose pour  $B_y^{\perp}$ . Cette suppression des unités électromagnétique nous permet de réécrire l'équation sous la forme

$$\partial_Z^2 h - \partial_T^2 h = \frac{16\pi G L^2 E_0 B_0}{c^5 \mu_0} \hat{\rho},$$

où  $\hat{\rho}$  est encore la modification du terme de source. Nous pouvons également définir le nombre  $\mathcal{G}_Z$ , appelé nombre de Gertsenshtein-Zel'dovich, défini par

$$\mathcal{G}_Z = \frac{16\pi G L^2 E_0 B_0}{c^5 \mu_0}.$$

Ce nombre va nous permettre en fait de définir nos composantes de la perturbation comme  $h = \mathcal{G}_Z \mathcal{H}$ , pour obtenir des équations sans dimensions du type

$$\partial_Z^2 \mathcal{H} - \partial_T^2 \mathcal{H} = F,$$

où  $F$  est un terme de source sans dimension qui est défini à partir de  $\rho$ . De manière analogue, nous pouvons, pour les composantes de la correction au premier ordre du potentiel électromagnétique  $A^{(1)}$ , définir  $A^{(1)} = \frac{E_0}{c} L \mathcal{G}_Z \mathcal{A}$  et ainsi obtenir des équations sans dimensions du type

$$\partial_Z^2 \mathcal{A} - \partial_T^2 \mathcal{A} = S,$$

où  $S$  est un terme de source sans dimension à définir à partir de  $-\mu_0 j_v^{eff}$ . Dans notre problème de génération d'ondes stationnaires, les équations sans dimension sont explicitement données par

$$\left\{ \begin{array}{l} \partial_Z^2 \mathcal{H}^\rightarrow - \partial_T^2 \mathcal{H}^\rightarrow = -\mathcal{B}_y^\perp \mathcal{E}_x^\rightarrow + \mathcal{B}_x^\perp \mathcal{E}_y^\rightarrow \\ \partial_Z^2 \mathcal{H}^\leftarrow - \partial_T^2 \mathcal{H}^\leftarrow = \mathcal{B}_y^\perp \mathcal{E}_x^\leftarrow - \mathcal{B}_x^\perp \mathcal{E}_y^\leftarrow \\ \partial_Z^2 \mathcal{H}_+ - \partial_T^2 \mathcal{H}_+ = -\mathcal{B}_y^\perp \mathcal{E}_x^\rightarrow + \mathcal{B}_y^\perp \mathcal{E}_x^\leftarrow - \mathcal{B}_x^\perp \mathcal{E}_y^\rightarrow + \mathcal{B}_x^\perp \mathcal{E}_y^\leftarrow \\ \partial_Z^2 \mathcal{H}_x - \partial_T^2 \mathcal{H}_x = \mathcal{B}_x^\perp \mathcal{E}_x^\rightarrow - \mathcal{B}_x^\perp \mathcal{E}_x^\leftarrow - \mathcal{B}_y^\perp \mathcal{E}_y^\rightarrow + \mathcal{B}_y^\perp \mathcal{E}_y^\leftarrow \\ \partial_Z^2 \mathcal{A}_x - \partial_T^2 \mathcal{A}_x = \left( -\mathcal{B}_x^\perp + \mathcal{E}_y^\rightarrow - \mathcal{E}_y^\leftarrow \right) \partial_Z \mathcal{H}_x + \left( \mathcal{E}_y^\rightarrow + \mathcal{E}_y^\leftarrow \right) \partial_T \mathcal{H}_x \\ \quad + \left( \mathcal{B}_y^\perp + \mathcal{E}_x^\rightarrow - \mathcal{E}_x^\leftarrow \right) \partial_Z \mathcal{H}_+ + \left( \mathcal{E}_x^\rightarrow + \mathcal{E}_x^\leftarrow \right) \partial_T \mathcal{H}_+ \\ \partial_Z^2 \mathcal{A}_y - \partial_T^2 \mathcal{A}_y = \left( \mathcal{B}_y^\perp + \mathcal{E}_x^\rightarrow - \mathcal{E}_x^\leftarrow \right) \partial_Z \mathcal{H}_x + \left( \mathcal{E}_x^\rightarrow + \mathcal{E}_x^\leftarrow \right) \partial_T \mathcal{H}_x \\ \quad + \left( \mathcal{B}_x^\perp - \mathcal{E}_y^\rightarrow + \mathcal{E}_y^\leftarrow \right) \partial_Z \mathcal{H}_+ - \left( \mathcal{E}_y^\rightarrow + \mathcal{E}_y^\leftarrow \right) \partial_T \mathcal{H}_+ \end{array} \right.$$

Nous allons pouvoir à présent essayer de résoudre ce problème grâce aux équations sans dimensions ci-dessus. Pour revenir ensuite aux quantités physiques, il suffit de multiplier les quantités  $\mathcal{H}$  par  $\mathcal{G}_Z$  pour les ondes gravitationnelles, et pour les corrections au premier ordre du champ électromagnétique, nous avons les relations

$$\left\{ \begin{array}{l} E_x^{(1)} = -\mathcal{G}_Z E_0 \partial_T \mathcal{A}_x \end{array} \right. \quad (5.2)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} E_y^{(1)} = -\mathcal{G}_Z E_0 \partial_T \mathcal{A}_y \end{array} \right. \quad (5.3)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} B_x^{(1)} = \mathcal{G}_Z \frac{E_0}{c} \partial_Z \mathcal{A}_y \end{array} \right. \quad (5.4)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} B_y^{(1)} = \mathcal{G}_Z \frac{E_0}{c} \partial_Z \mathcal{A}_x. \end{array} \right. \quad (5.5)$$

### 5.3 Résolution du problème

Nous considérons notre cavité de longueur  $2L$  comme centrée en  $Z = 0$ . L'intérieur de la cavité correspond alors à l'intervalle  $Z \in [-1, 1]$ . L'onde stationnaire est créée en considérant deux ondes électromagnétiques identiques. Une se propageant vers l'avant et l'autre vers l'arrière. Nous avons alors

$$\left\{ \begin{array}{l} E_x^\rightarrow = E_w f(Z - T), \\ E_x^\leftarrow = E_w f(Z + T), \\ E_y^\rightarrow = E_w g(Z - T), \\ E_y^\leftarrow = E_w g(Z + T). \end{array} \right.$$

Par hypothèse de simplicité, nous allons considérer le champ magnétique externe constant comme étant identique dans les deux directions transverses, à savoir

$$B_x^\perp = B_y^\perp = B^\perp.$$

Sous ces hypothèses, nous pouvons voir que

$$E_0 = E_w,$$

et

$$B_0 = B^\perp,$$

où nous avons que  $E_w = \mathcal{E}_w E_0$  et  $B^\perp = \mathcal{B}^\perp B_0$ . Remarquons que dans ce cas précis nous avons au départ  $\mathcal{E}_w = \mathcal{B}^\perp = 1$ .

Pour résoudre le problème, nous allons utiliser résoudre les équations d'onde sans dimensions de manière symbolique, grâce au logiciel Matlab.

— **Intérieur de la cavité**

Pour les conditions initiales dans notre cavité, nous considérons que les degrés de liberté  $U = \mathcal{H}^\rightarrow, \mathcal{H}^\leftarrow, \mathcal{H}_+, \mathcal{H}_x, \mathcal{A}_x, \mathcal{A}_y$  sont tels que

$$U(Z, 0) = \partial_T U(Z, 0) = 0. \quad (5.6)$$

Pour résoudre les différentes équations d'onde, nous avons vu dans notre cours de mécanique des fluides [21] en bachelier qu'une équation d'onde du type

$$\partial_Z^2 U - \partial_T^2 U = F(Z, T)$$

avec les conditions initiales (5.6), peut se résoudre via la formule

$$U(Z, T) = \frac{1}{2} \int_0^T \left( \int_{Z-T+\eta}^{Z+T-\eta} F(\xi, \eta) d\xi \right) d\eta. \quad (5.7)$$

— **Extérieur de la cavité**

Pour ce qui se passe en dehors de la cavité, pour les degrés de liberté  $\mathcal{A}_x$  et  $\mathcal{A}_y$ , nous utilisons la même méthode de résolution (5.7) que pour l'intérieur de la cavité. Pour ce qui est des degrés de liberté dus aux ondes gravitationnelles, nous utilisons pour les degrés de liberté  $V = \mathcal{H}^\rightarrow, \mathcal{H}^\leftarrow, \mathcal{H}_+$  les quantités suivantes qui doivent être continues au bord de la cavité  $Z = \pm 1$ ,

$$V(\pm 1, T) \text{ et } \partial_Z V(\pm 1, T)$$

Nous allons nous concentrer sur le bord  $Z = 1$ , l'autre bord de la cavité est facilement transposable par symétrie. Nous pouvons voir également dans [21] que la solution à l'extérieur de la cavité pour  $V$  est

$$V(Z, T) = \frac{1}{2} \left( V(1, T - Z + 1) + V(1, T + Z - 1) + \int_{T-Z+1}^{T+Z-1} \partial_Z V(1, \eta) d\eta \right). \quad (5.8)$$

Grâce à ces équations (5.7) et (5.8) ainsi que les équations de (5.2) à (5.5), nous pouvons facilement alors obtenir toutes les solutions de notre problème, où nous allons considérer les polarisations linéaire et circulaire pour l'onde électromagnétique.

Afin de bien caractériser notre métrique, nous allons considérer des invariants de celle-ci, et de vérifier que les ondes créées ne sont pas de simples effets de coordonnées. Pour cela, nous allons traiter avec une métrique de la même forme que (5.1), mais qui s'écrit comme

$$h_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} h_{00} & 0 & 0 & h_{03} \\ 0 & h_+ & h_\times & 0 \\ 0 & h_\times & -h_+ & 0 \\ h_{03} & 0 & 0 & h_{00} \end{pmatrix}, \quad (5.9)$$

où nous avons posé  $h_{00} = h^\leftarrow + h^\rightarrow$  et  $h_{03} = h^\leftarrow - h^\rightarrow$ . Notons que ces degrés de liberté de la perturbation ne dépendent que de  $z$  et de  $t$ , car nous considérons une propagation et une onde à une dimension.

Comme pour l'analyse des métriques au chapitre 3, nous allons considérer deux invariants, le déterminant et le scalaire de Kretchmann. Grâce à SageMath<sup>1</sup>, nous pouvons calculer facilement le scalaire de Kretchmann de la métrique  $g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu} + h_{\mu\nu}$ . En ne gardant que les termes du premier ordre, nous obtenons

$$\begin{aligned} R_{\mu\nu\kappa\lambda}R^{\mu\nu\kappa\lambda} &= \left(\partial_z^2 h_{00}\right)^2 + 2\partial_z^2 h_{00}\partial_0^2 h_{00} + \left(\partial_0^2 h_{00}\right)^2 \\ &\quad - 4\left(\partial_z^2 h_{00} + \partial_0^2 h_{00}\right)\partial_{z0} h_{03} + 4\left(\partial_{z0} h_{03}\right)^2 \\ &\quad + 2\left(\partial_z^2 h_+\right)^2 - 4\partial_z^2 h_+\partial_0^2 h_+ + 2\left(\partial_0^2 h_+\right)^2 \\ &\quad + 2\left(\partial_z^2 h_\times\right)^2 - 4\partial_z^2 h_\times\partial_0^2 h_\times + 2\left(\partial_0^2 h_\times\right)^2, \end{aligned} \quad (5.10)$$

et nous pouvons également calculer le déterminant, qui a pour expression

$$g = -\left(h_{00}^2 - h_{03}^2 - 1\right)\left(h_+^2 + h_\times^2 - 1\right). \quad (5.11)$$

Une dernière notion que nous allons utiliser pour caractériser nos ondes, est le flux d'énergie transporté par les ondes gravitationnelles. Pour cela, si les ondes gravitationnelles ont une trace nulle et respectent la jauge de Lorenz, nous avons vu dans [7], que le flux d'énergie transporté par les ondes gravitationnelles est donnée par un tenseur  $t_{\mu\nu}$ , dont les composantes sont données par

$$t_{\mu\nu} = \frac{c^4}{32\pi G} \langle \partial_\mu h_{\kappa\lambda} \partial_\nu h^{\kappa\lambda} \rangle,$$

où les crochets  $\langle \cdot \rangle$  représente une moyenne sur l'espace-temps<sup>2</sup>. Via SageMath, nous pouvons voir que les seules composantes non-nulles de ce flux d'énergie, dans la métrique que nous considérons, sont données par

$$t_{00} = \frac{c^4}{16\pi G} \left\langle \left(\partial_0^2 h_{00}\right)^2 - \left(\partial_0^2 h_{03}\right)^2 + \left(\partial_0^2 h_+\right)^2 + \left(\partial_0^2 h_\times\right)^2 \right\rangle \quad (5.12)$$

$$t_{zz} = \frac{c^4}{16\pi G} \left\langle \left(\partial_z^2 h_{00}\right)^2 - \left(\partial_z^2 h_{03}\right)^2 + \left(\partial_z^2 h_+\right)^2 + \left(\partial_z^2 h_\times\right)^2 \right\rangle \quad (5.13)$$

$$t_{0z} = t_{z0} = \frac{c^4}{16\pi G} \langle \partial_z h_{00}\partial_0 h_{00} - \partial_z h_{03}\partial_0 h_{03} + \partial_z h_+\partial_0 h_+ + \partial_z h_\times\partial_0 h_\times \rangle. \quad (5.14)$$

1. Vous pouvez trouver des informations sur la consultation des feuilles SageMath à l'annexe à la fin de ce mémoire

2. La moyenne temporelle est nécessaire car nous pouvons voir dans [7] que le tenseur  $t_{\mu\nu}$  n'est pas invariant sous changement de coordonnées infinitésimal

Toutes les quantités et notions nécessaires aux analyses des résultats ont à présent été introduites. Nous allons commencer par traiter le cas de la polarisation linéaire de l'onde électromagnétique.

## 5.4 Polarisation linéaire de l'onde électromagnétique

L'onde stationnaire électromagnétique polarisée linéairement est donnée par l'expression

$$E_x^{\rightarrow} = E_w \sin(2\pi n(Z - T)) \Leftrightarrow E_x^{\leftarrow} = E_w \sin(2\pi n(Z + T)),$$

et nous avons que  $E_y^{\rightarrow} = E_y^{\leftarrow} = 0$ .

Nous avons bien une onde stationnaire car nous avons l'onde résultante qui vaut

$$E_x^{\rightarrow} + E_x^{\leftarrow} = E_w (\sin(2\pi n(Z - T)) + \sin(2\pi n(Z + T))) = 2E_w \sin(2\pi nZ) \cos(2\pi nT),$$

qui est bien une onde stationnaire.

Dans ce cas, les solutions pour les ondes gravitationnelles à l'intérieur de la cavité sont

$$\begin{cases} \mathcal{H}^{\leftarrow} = -\frac{\mathcal{B}^{\perp} \mathcal{E}_w}{16\pi^2 n^2} (\sin(2\pi nT) \cos(2\pi nZ) - 4\pi nT \cos(2\pi n(Z + T))) \\ \mathcal{H}^{\rightarrow} = \frac{\mathcal{B}^{\perp} \mathcal{E}_w}{8\pi^2 n^2} (2\pi nT \cos(2\pi n(Z - T)) - \sin(2\pi nT) \cos(2\pi nZ)) \\ \mathcal{H}_+ = -\frac{\mathcal{B}^{\perp} \mathcal{E}_w}{4\pi^2 n^2} \cos(2\pi nZ) (\sin(2\pi nT) - 2\pi nT \cos(2\pi nT)) \\ \mathcal{H}_x = \frac{\mathcal{B}^{\perp} \mathcal{E}_w}{4\pi^2 n^2} \cos(2\pi nZ) (\sin(2\pi nT) - 2\pi nT \cos(2\pi nT)). \end{cases}$$

Nous avons également les solutions pour le potentiel électromagnétique

$$\begin{cases} \mathcal{A}_x = \frac{\mathcal{E}_w \sin(2\pi nZ)}{32\pi^3 n^3} \left( 2\mathcal{B}^{\perp} \mathcal{E}_w \cos(2\pi nZ) - 6(\mathcal{B}^{\perp})^2 \sin(2\pi nT) \right. \\ \quad \left. - 2\mathcal{B}^{\perp} \mathcal{E}_w \cos^2(2\pi nT) \cos(2\pi nZ) + 12(\mathcal{B}^{\perp})^2 \pi nT \cos(2\pi nT) \right. \\ \quad \left. + 8(\mathcal{B}^{\perp})^2 \pi^2 n^2 T^2 \sin(2\pi nT) - 4\mathcal{B}^{\perp} \mathcal{E}_w \pi nT \cos(2\pi nZ) \cos(2\pi nT) \sin(2\pi nT) \right), \\ \mathcal{A}_y = \frac{\mathcal{B}^{\perp} \mathcal{E}_w^2 \sin(4\pi nZ)}{64\pi^3 n^3} (\cos(4\pi nT) + 2\pi nT \sin(4\pi nT) - 1). \end{cases}$$

Notons que via Matlab nous vérifions la véracité de nos solutions en réinjectant la solution trouvée dans notre équation d'onde de départ.

Grâce aux solutions et au nombre  $\mathcal{G}_Z$ , nous allons pouvoir déterminer les composantes de la perturbation (5.9) à l'intérieur de la cavité, nous avons alors

$$\begin{cases} h_{00} = -\frac{\mathcal{G}_Z \mathcal{B}^{\perp} \mathcal{E}_w}{4\pi^2 n^2} \cos(2\pi nZ) (\sin(2\pi nT) - 2\pi nT \cos(2\pi nT)) = h_+ = -h_x \\ h_{03} = -\frac{\mathcal{G}_Z \mathcal{B}^{\perp} \mathcal{E}_w T}{2\pi n} \sin(2\pi nT) \sin(2\pi nZ) \end{cases}$$

Nous remarquons que les ondes ont la même fréquence que l'onde électromagnétique, et que leur amplitude varie de manière linéaire par rapport au temps, ce qui veut dire que les amplitudes des ondes vont grandir au fur et à mesure que le processus dure. C'est le phénomène de résonance dont parlait Gertsenshtein dans son article.

Nous pouvons également grâce aux équations (5.2) à (5.5), établir les formules des corrections du premier ordre du champ électromagnétique. Nous obtenons dans ce cas

$$\left\{ \begin{array}{l} E_x^{(1)} = -\frac{\mathcal{G}_Z E_0 \mathcal{E}_w \sin(2\pi n Z)}{8\pi^2 n^2} \left( 4 (\mathcal{B}^\perp)^2 \pi^2 n^2 T^2 \cos(2\pi n T) - 2 (\mathcal{B}^\perp)^2 \pi n T \sin(2\pi n T) \right. \\ \quad + \mathcal{B}^\perp \mathcal{E}_w \cos(2\pi n Z) \cos(2\pi n T) \sin(2\pi n T) \\ \quad \left. - 4 \mathcal{B}^\perp \mathcal{E}_w \pi n T \cos^2(2\pi n T) \cos(2\pi n Z) + 2 \mathcal{B}^\perp \mathcal{E}_w \pi n T \cos(2\pi n Z) \right) \\ E_y^{(1)} = \frac{\mathcal{G}_Z E_0 \mathcal{B}^\perp \mathcal{E}_w^2 \sin(4\pi n Z)}{32\pi^2 n^2} (\sin(4\pi n T) - 4\pi n T \cos(4\pi n T)) \\ B_x^{(1)} = \frac{\mathcal{G}_Z E_0 \mathcal{B}^\perp \mathcal{E}_w^2 \cos(4\pi n Z)}{16c\pi^2 n^2} (\cos(4\pi n T) + 2\pi n T \sin(4\pi n T) - 1) \\ B_y^{(1)} = \frac{\mathcal{G}_Z E_0 \mathcal{E}_w \cos(2\pi n Z)}{16c\pi^2 n^2} \left( 2 \mathcal{B}^\perp \mathcal{E}_w \cos(2\pi n Z) - 6 (\mathcal{B}^\perp)^2 \sin(2\pi n T) \right. \\ \quad - 2 \mathcal{B}^\perp \mathcal{E}_w \cos^2(2\pi n T) \cos(2\pi n Z) + 12 (\mathcal{B}^\perp)^2 \pi n T \cos(2\pi n T) \\ \quad \left. + 8 (\mathcal{B}^\perp)^2 \pi^2 n^2 T^2 \sin(2\pi n T) - 4 \mathcal{B}^\perp \mathcal{E}_w \pi n T \cos(2\pi n Z) \cos(2\pi n T) \sin(2\pi n T) \right) \\ \quad + \frac{\mathcal{G}_Z E_0 \mathcal{B}^\perp \mathcal{E}_w^2 \sin^2(2\pi n Z)}{8c\pi^2 n^2} (\cos^2(2\pi n T) + 2\pi n T \sin(2\pi n T) \cos(2\pi n T) - 1). \end{array} \right.$$

Nous avons donc l'amplitude des corrections du champ électromagnétique augmente de manière quadratique par rapport au temps. Rappelons que nous ne tenons pas compte des réflexions de ces ondes aux bords de la cavité. Il s'agirait donc d'une double résonance. De la même manière, nous pouvons obtenir des solutions pour ces quantités à l'extérieur de la cavité. Nous avons décidé de représenter graphiquement nos solutions. Nous pouvons également représenter les invariants grâce aux équations (5.10) et (5.11). En fait, nous réalisons une simulation sur Matlab<sup>3</sup> où nous voyons les quantités évoluer par rapport au temps. Nous allons montrer dans ce rapport des captures instantanées de nos simulations, où nous pourrions voir certaines choses significatives.

Nous avons sélectionné quatre figures, (5.1), (5.2), (5.3) et (5.4). où nous avons deux figures plutôt au début de la simulation ( $T = 2$  et  $2.5$ ) et deux plutôt en fin de simulation ( $T = 18.5$  et  $19$ ). Celle-ci porte sur un temps allant de  $T = 0$  à  $T = 20$ . Nous insistons sur le fait que tout ici provient de solutions analytiques donc des solutions exactes de nos équations. Les figures (5.1) et (5.2) représentent le début de la simulation. Nous pouvons voir sur ces figures que lorsque les ondes gravitationnelles tendent vers 0 dans la cavité, nous avons que, à l'extérieur de la cavité, la perturbation ne cesse de croître au fur et à mesure que l'on s'éloigne. Cet effet provient du fait que nous avons une approximation à une dimension du problème, où nous utilisons des ondes planes, dont nous savons que cette situation n'est pas physiquement acceptable. En effet, la diffusion n'est pas autorisée selon les directions transverses, la propagation est donc confinée à une dimension. Ce-

3. Vous pouvez trouver des informations sur la consultation du code et des vidéos à propos de la simulation à l'annexe à la fin de ce mémoire

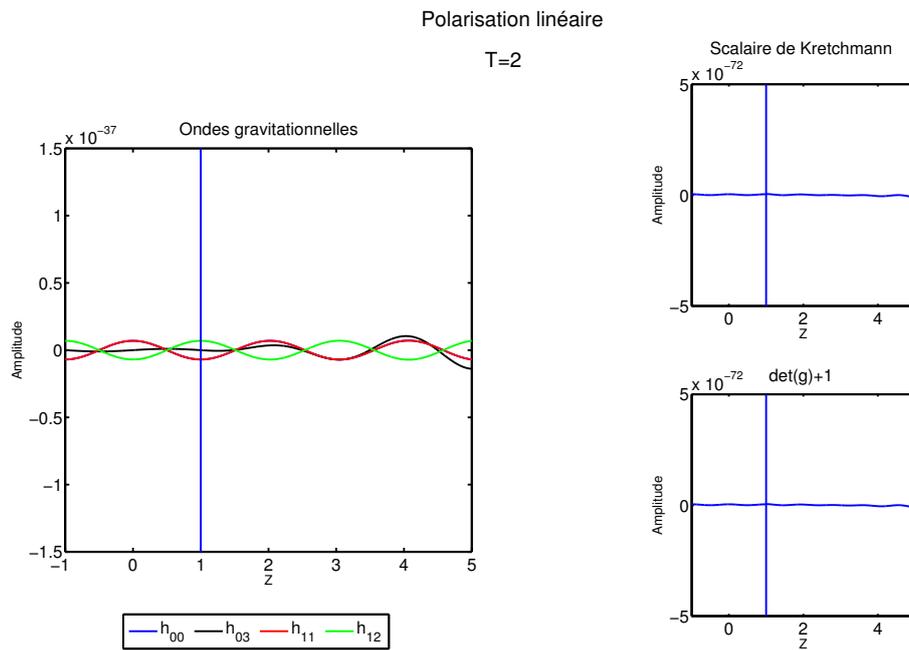


FIGURE 5.1 – Simulation avec la polarisation linéaire, où  $T=2$

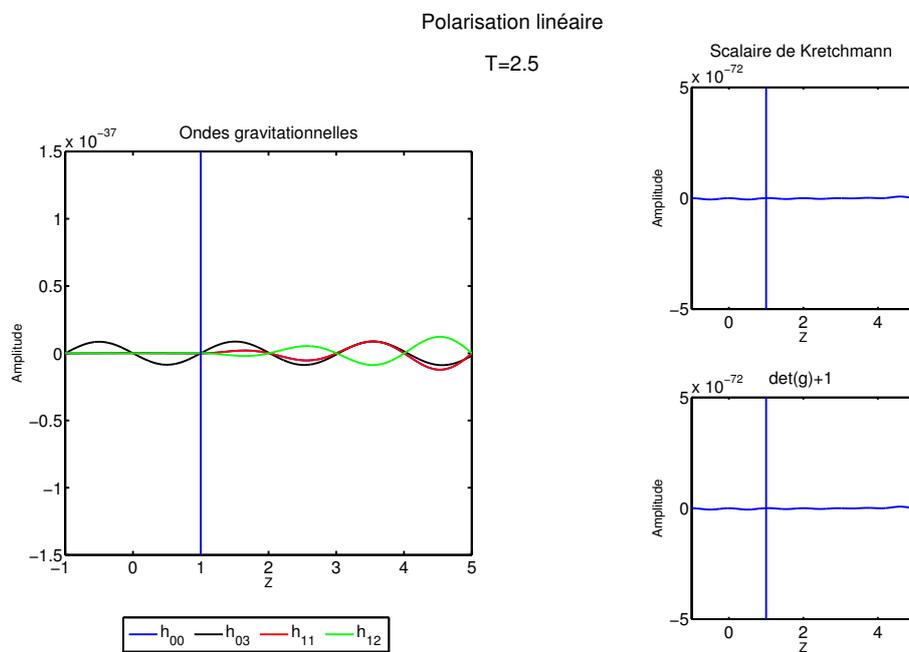


FIGURE 5.2 – Simulation avec la polarisation linéaire, où  $T=2.5$

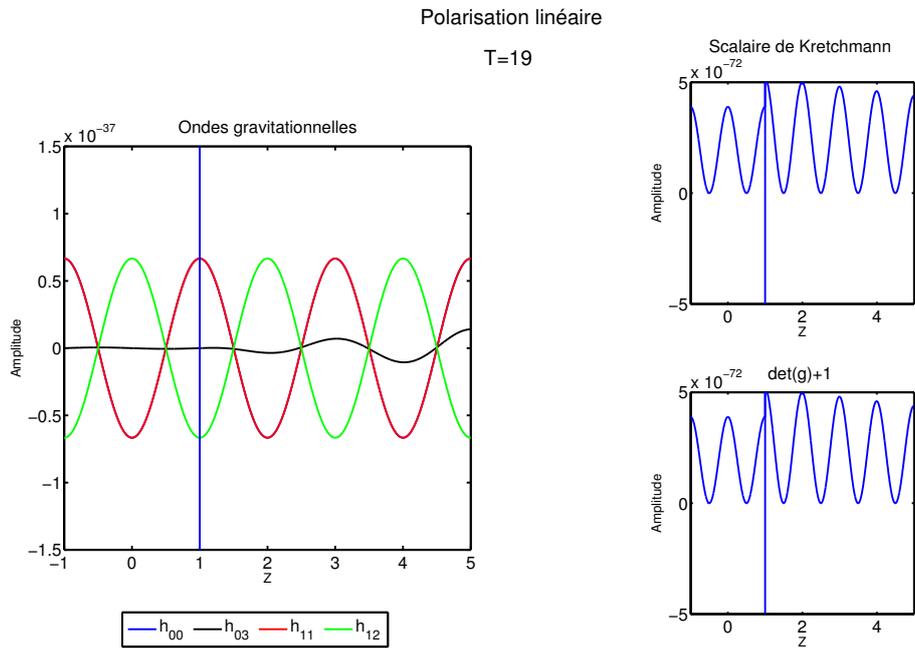


FIGURE 5.3 – Simulation avec la polarisation linéaire, où  $T=18.5$

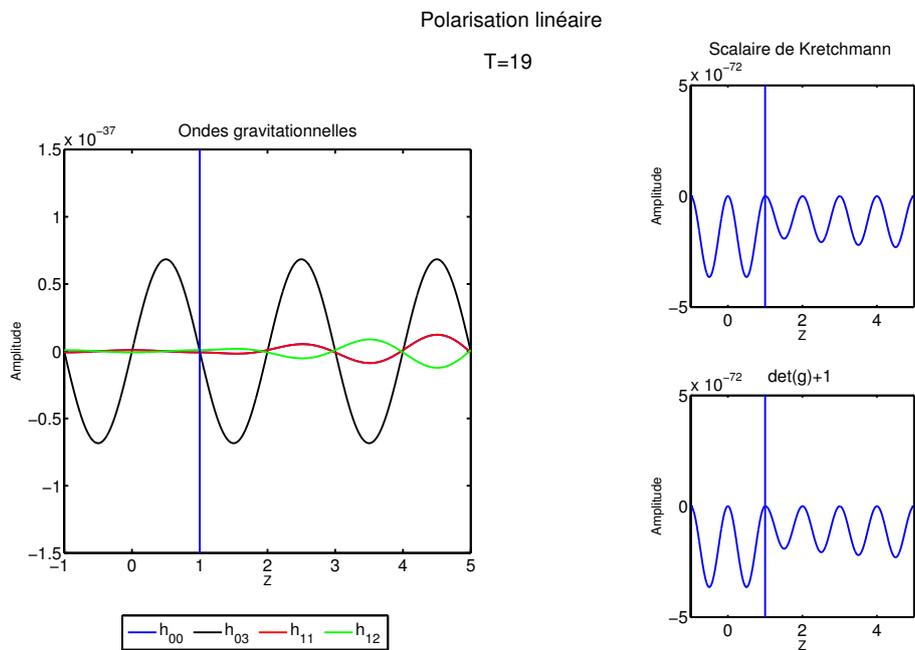


FIGURE 5.4 – Simulation avec la polarisation linéaire, où  $T=19$

pendant, les solutions en ondes planes constitue néanmoins une bonne approximation. Par ailleurs, nous pourrions également à l'instar de Rätzel, considérer un potentiel retardé pour la propagation à l'extérieur de la cavité. En résumé, les résultats à l'intérieur de la cavité peuvent être physiquement plausibles tandis qu'à l'extérieur de la cavité, ils sont à prendre avec précaution. Remarquons également que nous pouvons apercevoir que les invariants subissent chacun des petite modifications.

Sur les figures (5.3) et (5.4), nous avons la situation en fin de simulation. Nous remarquons que l'amplitude de nos ondes est bien plus grande que précédemment, c'est bien une preuve de la résonance et de l'augmentation linéaire de l'amplitude des ondes. Nous remarquons toujours le même problème à l'extérieur de la cavité. De plus, nous pouvons supposer que ce problème crée des discontinuités dans le scalaire de Kretschmann et le déterminant. Cela provient du fait que nos termes de sources des équations d'onde sont discontinus au bord de la cavité. En effet, à l'extérieur de la cavité les termes de sources sont nuls. Mais si nous calculons les termes de sources à l'intérieur de la cavité en  $Z = 1$ , nous remarquons qu'ils sont proportionnels à  $\sin(2\pi nT)$ . C'est pourquoi nous pouvons avoir par exemple continuité des invariants à la figure (5.4) et pas à la figure (5.3). Les invariants eux aussi augmentent en amplitude.

Afin de caractériser numériquement notre situation, imaginons notre cavité de longueur  $L = 1 m.$ , où nous avons  $B^\perp = 10 T$ ,  $n = \frac{1}{2}$  et  $E_w = 10^6 V/m$ . Ces valeurs, à l'heure actuelle sont physiquement réalisables en laboratoire. Le nombre de Gertsenshtein-Zel'dovich  $\mathcal{G}_Z$  est de l'ordre de  $10^{-38}$ . Ce sont les valeurs utilisées lors de nos simulations, et nous voyons bien que les ondes gravitationnelles sont de l'ordre de  $\mathcal{G}_Z$ . Après un an de fonctionnement, nous avons que  $\mathcal{G}_Z T$  sera de l'ordre de  $10^{-21}$ . Les ondes gravitationnelles sont alors dans ce cas de l'ordre des ondes gravitationnelles astronomiques, telles que détectées par le LIGO en 2015, sauf que celles-ci possède un temps caractéristique de l'ordre de la milliseconde, alors que nos ondes créées ont un temps caractéristiques d'un an dans notre cas.

Dans cette caractérisation numérique, nous pouvons également voir que la correction du premier ordre du champ magnétique va atteindre l'ordre du  $\mu T$  après un an. La dernière considération numérique que nous faisons dans ce cas est le calcul du flux d'énergie transporté par nos ondes gravitationnelles. Pour chaque composante de  $t_{\mu\nu}$ , via les équations (5.12) à (5.14), nous pouvons calculer ce flux d'énergie transporté. Pour ce qui est de la moyenne spatiotemporelle, nous moyennons les quantités sur l'entièreté de la cavité, et nous considérons deux moyennes temporelles, une entre  $T = 4$  et  $T = 5$ , et l'autre entre  $T = 14$  et  $T = 15$ , soit une moyenne sur une demi-période de la source. Pour la première moyenne temporelle, entre  $T = 4$  et  $T = 5$ , le flux d'énergie transporté vaut

$$\begin{cases} t_{00} = 3.0 \cdot 10^{-33} W/m^2, \\ t_{zz} = 3.0 \cdot 10^{-33} W/m^2, \\ t_{0z} = 0 W/m^2, \end{cases}$$

et pour la seconde moyenne, entre  $T = 14$  et  $T = 15$ , nous avons

$$\begin{cases} t_{00} = 3.1 \cdot 10^{-32} W/m^2, \\ t_{zz} = 3.1 \cdot 10^{-32} W/m^2, \\ t_{0z} = 0 W/m^2, \end{cases}$$

Nous avons donc un ordre de grandeur de plus dans la seconde moyenne temporelle. C'est une autre preuve de la résonance, et du gain d'énergie transporté par l'onde gravitationnelle au fur et à mesure du temps. Nous allons pouvoir à présent traiter du cas de la polarisation circulaire de l'onde électromagnétique.

## 5.5 Polarisation circulaire de l'onde électromagnétique

L'onde stationnaire électromagnétique polarisée circulairement est donnée par l'expression

$$E_x^{\rightarrow} = E_w \sin(2\pi n(Z - T)) \Leftrightarrow E_x^{\leftarrow} = E_w \sin(2\pi n(Z + T)),$$

pour le champ suivant l'axe  $X$  et l'expression

$$E_y^{\rightarrow} = E_w \cos(2\pi n(Z - T)) \Leftrightarrow E_y^{\leftarrow} = E_w \cos(2\pi n(Z + T))$$

pour le champ suivant l'axe  $Y$ .

De la même manière que le cas précédent, nous pouvons déterminer les composantes de la perturbation (5.9) à l'intérieur de la cavité. Nous ne décrivons pas toutes les étapes car la méthode est identique au cas précédent. Nous avons alors

$$\left\{ \begin{array}{l} h_{00} = -\frac{\mathcal{G}_Z \mathcal{B}^{\perp} \mathcal{E}_w}{4\pi^2 n^2} (\cos(2\pi nZ) + \sin(2\pi nZ)) (\sin(2\pi nT) - 2\pi nT \cos(2\pi nT)) = -h_{\times} \\ h_{+} = -\frac{\mathcal{G}_Z \mathcal{B}^{\perp} \mathcal{E}_w}{4\pi^2 n^2} (\cos(2\pi nZ) - \sin(2\pi nZ)) (\sin(2\pi nT) - 2\pi nT \cos(2\pi nT)) \\ h_{03} = -\frac{\mathcal{G}_Z \mathcal{B}^{\perp} \mathcal{E}_w T}{2\pi n} \sin(2\pi nT) (\cos(2\pi nZ) - \sin(2\pi nZ)) \end{array} \right.$$

Nous remarquons que les ondes ont également la même fréquence que l'onde électromagnétique, et que leur amplitude varie de manière linéaire par rapport au temps, ce qui veut dire que, comme pour la polarisation linéaire, les amplitudes des ondes vont grandir au fur et à mesure que le processus dure. Les conclusions du cas précédent restent donc valables indépendamment de la polarisation de l'onde électromagnétique, comme on pouvait s'y attendre.

Nous obtenons également les corrections du premier ordre du champ électromagnétique, qui valent dans ce cas

$$\left\{ \begin{array}{l} E_x^{(1)} = \frac{\mathcal{G}_Z E_0 \mathcal{E}_w}{8\pi^2 n^2} (\sin(2\pi nT) - 2\pi nT \cos(2\pi nT)) \left( 2\pi nT (\mathcal{B}^{\perp})^2 \sin(2\pi nZ) + 4\mathcal{E}_w \mathcal{B}^{\perp} \cos(2\pi nT) \right) \\ E_y^{(1)} = \frac{\mathcal{G}_Z E_0 \mathcal{E}_w}{8\pi^2 n^2} (\sin(2\pi nT) - 2\pi nT \cos(2\pi nT)) \left( 2\pi nT (\mathcal{B}^{\perp})^2 \cos(2\pi nZ) + 4\mathcal{E}_w \mathcal{B}^{\perp} \cos(2\pi nT) \right) \\ B_x^{(1)} = -\frac{2\mathcal{G}_Z E_0 (\mathcal{B}^{\perp})^2 \mathcal{E}_w \sin(2\pi nZ)}{16c\pi^2 n^2} (6\pi nT \cos(2\pi nT) - 3 \sin(2\pi nT) + 4\pi^2 n^2 T^2 \sin(2\pi nT)) \\ B_y^{(1)} = \frac{2\mathcal{G}_Z E_0 (\mathcal{B}^{\perp})^2 \mathcal{E}_w \cos(2\pi nZ)}{16c\pi^2 n^2} (6\pi nT \cos(2\pi nT) - 3 \sin(2\pi nT) + 4\pi^2 n^2 T^2 \sin(2\pi nT)). \end{array} \right.$$

Nous avons donc, comme précédemment, que l'amplitude des corrections du champs électromagnétique à l'intérieur de la cavité augmentent de manière quadratique par rapport au temps,

et donc par conséquent que la densité d'énergie induite varie comme la puissance quatrième du temps. Nous avons décidé de représenter graphiquement nos solutions à l'intérieur de la cavité et celles à l'extérieur que nous obtenons par une démarche identique. Nous réalisons une simulation<sup>4</sup> sur Matlab identique à la situation de la section précédente. Nous avons juste décidé d'ajouter la caractérisation des corrections du champ électromagnétique à l'intérieur de la cavité.

Nous avons sélectionné quatre figures, (5.5), (5.6), (5.7) et (5.8). Nous avons la présence de deux figures relativement au début de la simulation et deux relativement en fin de simulation. Celle-ci porte comme précédemment sur un temps allant de  $T = 0$  à  $T = 20$ . Sur les figures (5.5) et (5.6), qui représentent le début de la simulation, nous pouvons apercevoir que lorsque les ondes gravitationnelles tendent vers 0 dans la cavité, nous avons comme pour la polarisation linéaire, à l'extérieur de la cavité, que la perturbation ne cesse d'augmenter au fur et à mesure que l'on s'éloigne. Remarquons également que nous pouvons apercevoir que les invariants subissent des petites modifications, et les invariants à l'extérieur de la cavité semblent décroître au fur et à mesure que la distance augmente, nous pouvons alors conclure que les divergences des ondes gravitationnelles sont des effets de coordonnées et que notre métrique est bien asymptotiquement plate.

Sur les figures (5.3) et (5.4), nous avons la situation en fin de simulation. Nous remarquons que l'amplitude de nos ondes est bien plus grande que précédemment, c'est bien comme au cas précédent une preuve de la résonance et de l'augmentation linéaire de l'amplitude des ondes. Nous remarquons toujours le même problème à l'extérieur de la cavité. De plus, nous pouvons voir que le problème de discontinuités dans le scalaire de Kretschmann et le déterminant est toujours bien présent. Les invariants eux aussi augmentent en amplitude au fil du temps, même si nous remarquons cette décroissance en fonction de la distance. Du côté des corrections du premier ordre du champ électromagnétique, nous pouvons remarquer que les normes des champs oscillent entre elles au cours du temps, et que l'amplitude augmente bel et bien au cours du temps, quadratiquement selon la formule.

Afin de caractériser numériquement notre situation, imaginons comme au cas précédent que notre cavité est de longueur  $L = 1 m.$ , où nous avons  $B^\perp = 10 T$ ,  $E_w = 10^6 V/m$  et  $n = \frac{1}{2}$ . Après un an, nos ondes seront également de grandeur comparables aux ondes astrophysiques.

Nous pouvons également faire le calcul du flux d'énergie transporté par nos ondes gravitationnelles. Pour chaque composantes de  $t_{\mu\nu}$ , via les équations (5.12) à (5.14), nous pouvons calculer ce flux d'énergie transporté. Pour ce qui est de la moyenne spatiotemporelle, nous moyennisons les quantités sur l'entièreté de la cavité, et nous considérons deux moyennes temporelles, une entre  $T = 4$  et  $T = 5$ , et l'autre entre  $T = 14$  et  $T = 15$ . Pour la première moyenne temporelle, entre  $T = 4$  et  $T = 5$ , le flux d'énergie transporté vaut

$$\begin{cases} t_{00} = 5.9169 \cdot 10^{-33} W/m^2, \\ t_{zz} = -1.3915 \cdot 10^{-49} W/m^2, \\ t_{0z} = -1.6338 \cdot 10^{-50} W/m^2, \end{cases}$$

et pour la seconde moyenne, entre  $T = 14$  et  $T = 15$ , nous avons

4. Vous pouvez trouver des informations sur la consultation du code et des vidéos à propos de la simulation à l'annexe à la fin de ce mémoire

$$\begin{cases} t_{00} = 6.1482 \cdot 10^{-32} W/m^2, \\ t_{zz} = -2.2264 \cdot 10^{-48} W/m^2, \\ t_{0z} = -5.2631 \cdot 10^{-50} W/m^2, \end{cases}$$

Nous avons donc un augmentation du flux dans la seconde moyenne temporelle. C'est une autre preuve de la résonance, et du gain d'énergie transporté par l'onde gravitationnelle au fur et à mesure du temps. Nous allons à présent faire un synthèse de ces résultats, pour ensuite les critiquer et en donner quelques perspectives.

## 5.6 Analyse et critique des résultats, perspectives

Comme nous avons pu le remarquer dans les deux sections précédentes, d'un point de vue qualitatif, les deux cas de polarisation amènent des résultats similaires. La caractérisation de l'augmentation des amplitudes des ondes gravitationnelles ainsi que de l'amplitude des corrections du champ électromagnétique sont identiques. La différence entre les deux réside plus dans le fait que la répartition spatiale des ondes n'est pas identique, et que par conséquence les invariants ne se comportent pas tout à fait de la même manière, bien que leurs amplitudes semblent suivre la même dynamique.

Comme nous avons vu, un des points faibles de ces résultats réside dans le fait que lorsque qu'une onde est nulle dans la cavité, à l'extérieur de celle-ci, l'onde grandit au fur et à mesure que l'on s'éloigne de la cavité. Nous avons également le problème de discontinuité des invariants dont nous avons parlé précédemment, et ce pour les mêmes raisons des discontinuité des termes de sources. Ce problème devrait en principe être résolu si nous considérons une configuration physiquement acceptable, comme le fait que le champ magnétique externe devient continu au bord de la cavité. Nous pouvons également penser une extension de ce modèle à un modèle à trois dimensions spatiales et l'utilisation d'une intégration de type potentiel retardé en dehors de la cavité. Cette extension fait fi de l'approximation des ondes planes que nous utilisons dans ce modèle, car nous savons que les ondes planes ne sont pas une hypothèse physique acceptable. De plus, cela enlèverait la résonance des ondes gravitationnelles et ne ferait augmenter les corrections du champ électromagnétique que linéairement. Néanmoins, ces résultats ne sont pas dénués de sens. En effet, ce qui se passe à l'intérieur de la cavité est à priori tout à fait valable, à condition de le domaine de considération soit beaucoup plus petit que la longueur d'onde émise par exemple. De plus, si nous mettons en parallèle l'apprentissage de la théorie des ondes électromagnétiques avec l'apprentissage théorique des ondes gravitationnelles. Il est bon dans un premier temps de considérer l'approximation des ondes planes dans les configurations électromagnétiques pour avoir une première idée du problème, avant de passer à la réalité physique. Ces résultats sont donc la première étape vers les résultats d'une réalité physique testable.

Nous pourrions également réfléchir autrement, et peut être restreindre nos résultats et observations à une situation où l'approximation des ondes planes pour les ondes gravitationnelles est valable. Cependant, le développement de la théorie des ondes gravitationnelles actuel ne nous permet pas de définir un cadre de l'approximation des ondes planes comme nous pouvons le faire avec les ondes électromagnétiques. Le problème est que l'équivalent d'un guide d'onde pour les ondes

gravitationnelles n'existe pas car ces ondes ne se réfractent ou ne se réfléchissent pas.

Pour ce qui est des perspectives à ces résultats, outre le fait que la généralisation 3D spatiale du problème soit intéressante, ils démontrent un intérêt pour la théorie de la génération mais aussi de la détection des ondes gravitationnelles. En effet, cela pourrait permettre tout d'abord d'imaginer d'autres détecteurs d'ondes gravitationnelles que via l'interférométrie comme le LIGO, mais aussi ouvrir des perspectives pour la théorie de la relativité elle-même. Nous pourrions par exemple imaginer une expérience similaire à celle de Hertz pour les ondes gravitationnelles avec ce procédé. Nous pourrions également traiter de la génération de gravité artificielle qui demeure un graal pour tout féru de science-fiction. D'un point de vue plus théorique, nous pourrions également imaginer des tests du principe d'équivalence en utilisant l'effet Gertsenshtein, car le fait que l'énergie courbe l'espace-temps provient de ce principe d'équivalence. L'avantage d'un test de ce type est que nous utilisons directement les liens qui existent entre énergie et gravitation sans masse par un objet massif, qui contient des objets liés tels que les atomes. Nous aurons alors une source relativiste et non plus inertielle. Ces résultats pourraient également être adaptés à des théories alternatives de la gravitation, afin de tester les différentes théories. Voilà par exemple le genre de perspectives qui peuvent émerger de ces résultats, même si nous savons que certaines sont plus réalistes et réalisables que d'autres.

En conclusion, dans ce chapitre final, après avoir décrit les différentes équations d'onde, nous avons effectué le passage à des équations d'ondes dédimensionnées, afin de mieux traiter les ordres de grandeur des quantités. Ensuite, nous avons passé en revue toutes les considérations théoriques nécessaires à la résolution de notre problème de génération d'ondes gravitationnelles stationnaires, pour enfin le résoudre en considérant la polarisation linéaire et la polarisation circulaire de l'onde électromagnétique. Nous avons pu remarquer que les amplitudes des ondes gravitationnelles créées augmentaient linéairement par rapport au temps, et que les corrections du champ électromagnétique varie quadratiquement avec le temps. Nous avons également mis en exergue les limitations de notre modèle, qui contient des situations non-physiques, comme le fait de nos restreindre à un modèle d'onde plane et d'accepter une décroissance instantanée du champ magnétique externe au bord de la cavité. Ces situations impliquent notamment la discontinuité des invariants. Nous avons également considéré le flux d'énergie transporté par les ondes, et nous avons remarqué qu'il augmentait au fil du temps.

Quelles pistes pouvons-nous envisager pour étendre ces résultats ? Il serait intéressant de se concentrer en premier sur l'extension du modèle pour envisager une situation physiquement acceptable, et de comparer ces résultats à ceux obtenus ici. Le cas du champ magnétique extérieur longitudinal pourrait être ensuite une autre piste de réflexion, où nous pourrions également comparer les caractéristiques pour voir ce que ces degrés de liberté supplémentaires peuvent amener en plus. Nous pourrions également imaginer un ensemble de situations observationnelles à prédire pour le comportement de nos ondes, comme un anneau de particule tests, ou bien le comportement de la lumière ou de particules chargées au voisinage de notre dispositif. Tous ces éclairages pourraient également être le terreau de la conception d'un détecteur d'ondes gravitationnelles, ce qui nous permettrait d'avoir un autre moyen que l'interférométrie pour caractériser le comportement de ces ondes prédites il y a un siècle par Einstein.

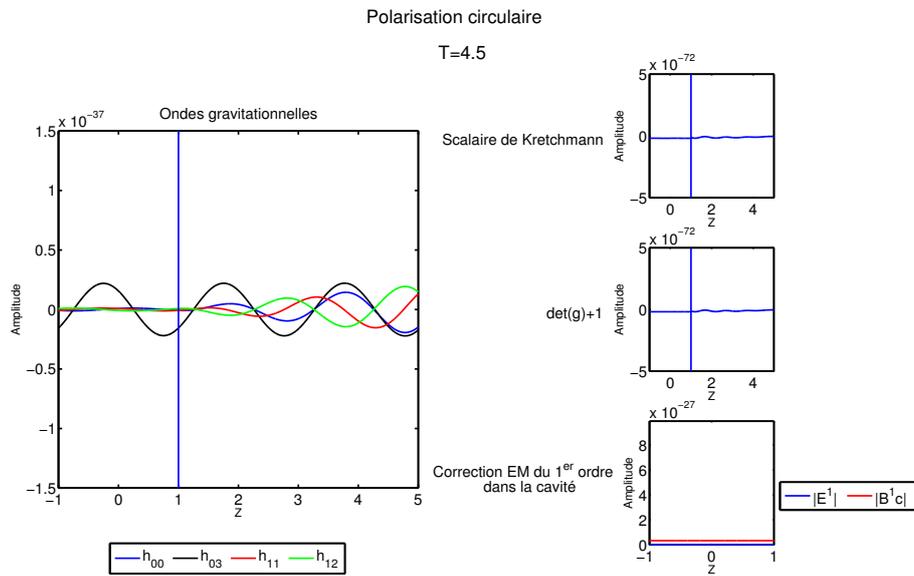


FIGURE 5.5 – Simulation avec la polarisation circulaire, où  $T=4.5$

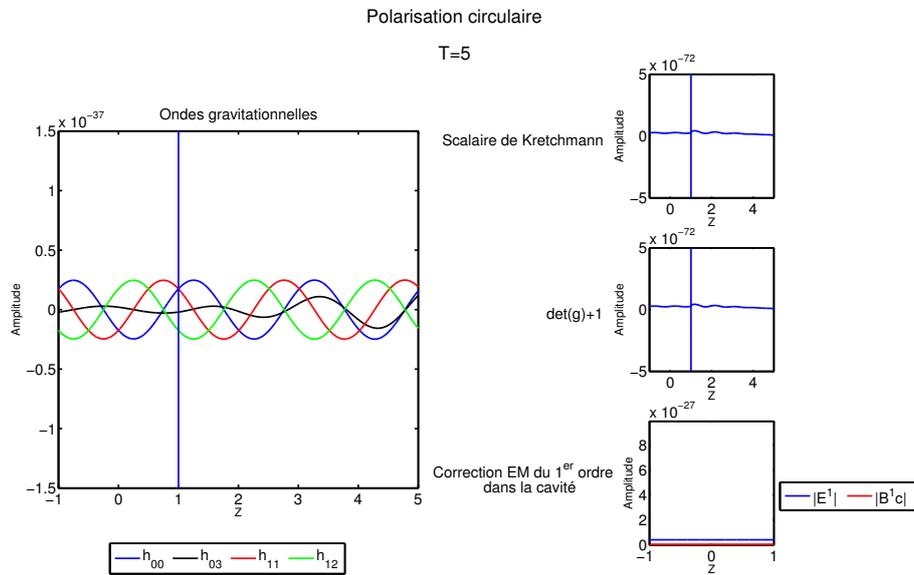


FIGURE 5.6 – Simulation avec la polarisation circulaire, où  $T=5$

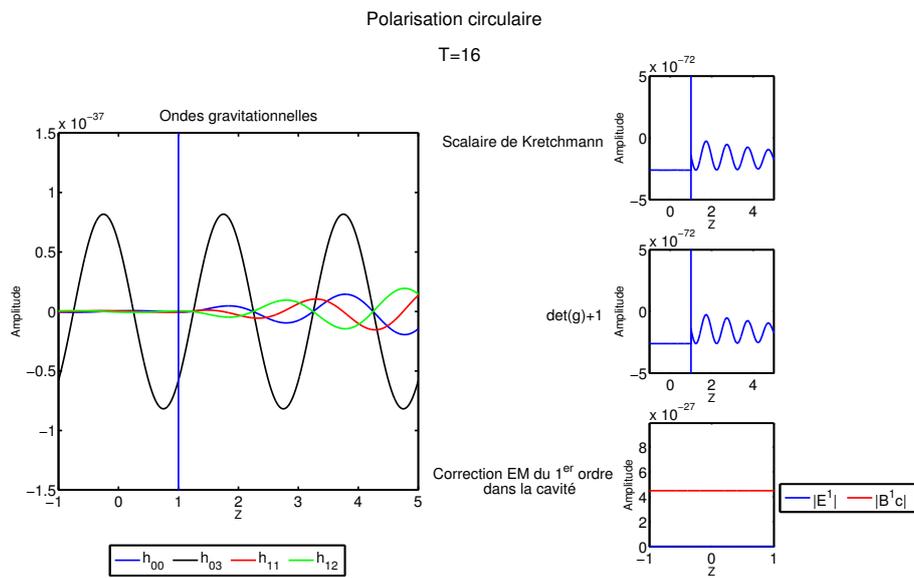


FIGURE 5.7 – Simulation avec la polarisation circulaire, où  $T=16$

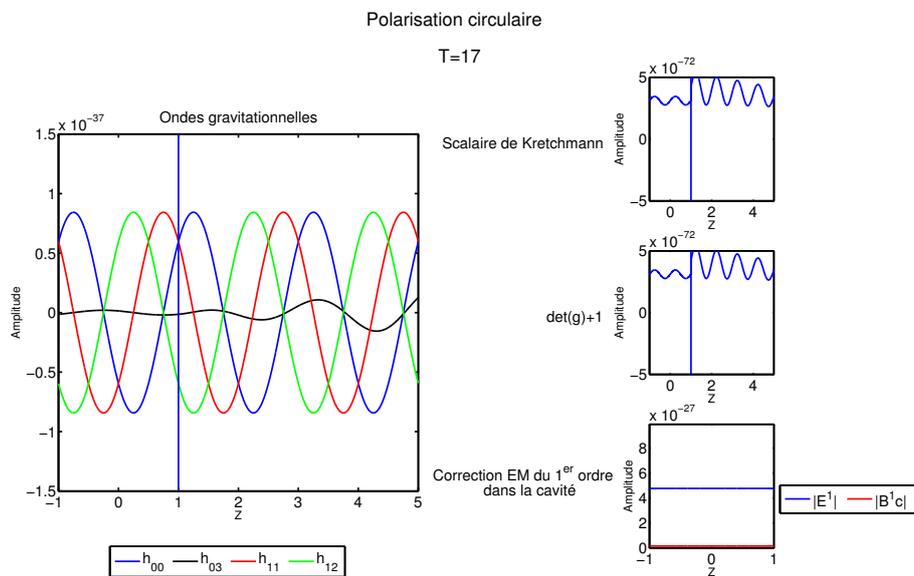


FIGURE 5.8 – Simulation avec la polarisation circulaire, où  $T=16.5$

# Conclusion

Dans ce mémoire, nous nous sommes intéressés à l'effet Gertsenshtein direct et inverse et à la génération d'ondes gravitationnels stationnaires. Pour bien comprendre ce phénomène, nous nous sommes d'abord plongés dans la construction du système Einstein-Maxwell. Après quelques rappels de géométrie différentielle, nous avons introduit la notion de fibré vectoriel afin de introduire de manière rigoureuse la relativité générale et le système Einstein-Maxwell dont nous dérivons les équations par principe variationnel. Pour chaque équation, nous avons retrouvé l'écriture de celle-ci dans la limite classique qui est une propriété du principe de correspondance.

Ensuite, nous avons considéré les linéarisations des équations du système Einstein-Maxwell. La première partie, la linéarisation de l'équation d'Einstein, nous a permis d'introduire la théorie des ondes gravitationnelles, et d'en caractériser notamment les polarisations. La seconde partie, à savoir la linéarisation des autres équations nous permettaient de mieux caractériser le lien qu'il pouvait exister de manière générale entre les ondes électromagnétiques et les ondes gravitationnelles.

Une fois la linéarisation effectuée, nous nous sommes penchés sur certaines propriétés des liens entre gravitation et électromagnétisme. Après avoir analysé certaines solutions du système Einstein-Maxwell, nous avons passé en revue les motivations qui nous poussent à étudier l'effet Gertsenshtein et à le revisiter complètement.

Nous avons alors pu revisiter l'effet, après avoir bien défini les équations utiles à l'effet, nous avons pu considérer des ondes planes dans un modèle unidimensionnel pour d'abord traiter le cas de l'onde électromagnétique seule, qui n'active que des modes longitudinaux des ondes gravitationnelles. En suite, nous avons pu étudier les différents cas de polarisation de l'onde électromagnétique pour l'effet Gertsenshtein. Nous avons pu conclure que seule une onde polarisée de manière transverse-électromagnétique était valide dans notre modèle. Ensuite, nous avons considéré un champ magnétique externe statique transverse et longitudinal. Les équations concernant le champ transverse sont les équations de (4.11) à (4.14) et sont des résultats originaux à mettre en avant. Nous remarquons que c'est l'unique cas qui source les modes transverses de l'onde gravitationnelle, modes présents dans les ondes venant de sources astrophysiques. Ce qui fait que ce cas là est très intéressant pour l'effet inverse, dont nous pouvons caractériser les corrections du premier ordre du champ électromagnétique. Un autre résultat original à mettre en avant est l'obtention des équations (4.15) à (4.18), qui traite du cas du champ magnétique externe longitudinal. Ce cas-là source des modes d'ondes gravitationnelles à polarisation mixte, contenant une composante transverse et une autre longitudinale.

Enfin, dans le dernier chapitre, nous avons utilisé la configuration comprenant une onde électromagnétique transverse-électromagnétique et un champ magnétique externe transverse dans une cavité pour utiliser l'effet Gertsenshtein direct afin de générer des ondes gravitationnelles stationnaires. Nous utilisons également l'effet inverse pour caractériser les corrections du premier ordre du champ électromagnétique. Pour résoudre ce problème, nous sommes passés à des équations sans dimension pour mieux traiter les ordres de grandeur des quantités. Après avoir décrit les étapes de résolution des équations, nous avons considéré les polarisations circulaire et linéaire pour notre onde électromagnétique. Nous avons vu que les caractéristiques du problème étaient indépendants de la polarisation. Nous avons pu caractériser que les amplitudes des ondes gravitationnelles créées augmentaient linéairement par rapport au temps, et que les corrections du champ électromagnétique varie quadratiquement avec le temps. Nous avons également mis en avant les limites du modèle considéré, car l'approximation d'onde plane et le fait d'avoir un champ magnétique externe discontinu au bord de la cavité nous pose des problèmes d'interprétations physiques des résultats, comme par exemple la présence d'une discontinuité des invariants. Pour terminer, nous avons imaginé plusieurs possibilités d'extension de ce modèle, pour traiter de situations physiquement possibles. Nous pouvons également créé des situations de tests observables pour mieux décrire le comportement physique de ces ondes.

En résumé, ce mémoire est une étude préliminaire rigoureuse pour l'étude de situations physiques impliquant l'effet Gertsenshtein. Ce travail amène des perspectives qui peuvent traiter de la génération et de la détection des ondes gravitationnelles. Nous pourrions même partir de ces études pour imaginer des tests de la théorie de la relativité générale en laboratoire, notamment du principe d'équivalence.

## **Annexe : Archive des fichiers utilisés**

Nous vous conseillons d'aller voir le dossier hébergé sur ce lien

<https://goo.gl/NCnHo3>

Vous pourrez trouver là toutes les feuilles SageMath qui ont été utiles pour la conception de ce projet et de ce mémoire. Vous pourrez également y trouver le fichier Matlab qui produit la simulation de génération d'ondes gravitationnelles stationnaires, ainsi que des vidéos s'y rapportant. Un fichier `READ_ME` devrait s'y trouver pour vous renseigner sur le contenu du dossier.

# Bibliographie

- [1] A. FÜZFA, « Gravitation relativiste et cosmologie ». SMATM121, Master en sciences mathématiques, Notes de cours manuscrites, Université de Namur, 2016.
- [2] H. BATES, « Resource letter rmsl-1 : Recent measurements of the speed of light and the redefinition of the meter », *American Journal of Physics*, vol. 56, no. 8, p. 682–687, 1988.
- [3] A. FÜZFA, « Géométrie différentielle ». SMATB214, Bachelier en sciences mathématiques, Syllabus, Université de Namur, 2014.
- [4] F. FAURE, « Notes de cours, mathématiques pour la physique ». Cours de Master en physique à l'Université Joseph Fourier de Grenoble, [https://www-fourier.ujf-grenoble.fr/~faure/enseignement/M1\\_math\\_pour\\_physique/cours.pdf](https://www-fourier.ujf-grenoble.fr/~faure/enseignement/M1_math_pour_physique/cours.pdf), p. 172-255, 2017.
- [5] M. TAYLOR, *Partial Differential Equations vol. 3 : Nonlinear equations*. Applied Functional Analysis : Applications to Mathematical Physics, U.S. Government Printing Office, 1996.
- [6] S. CARROLL, *Spacetime and Geometry : An Introduction to General Relativity*. Addison Wesley, 2004.
- [7] M. HOBSON, G. EFSTATHIOU et A. LASENBY, *General Relativity : An Introduction for Physicists*. Cambridge University Press, 2006.
- [8] T. FRANKEL, *The Geometry of Physics : An Introduction, 3rd edition*. Cambridge University Press, 2011.
- [9] E. GOURGOULHON, « Notes de cours, relativité générale ». Cours de Master 2 Recherche Astronomie et Astrophysique de l'Observatoire de Paris et des Universités Paris 6, 7 et 11, <https://luth.obspm.fr/~luthier/gourgoulhon/fr/master/relat.html>, p. 143-166, 2014.
- [10] J. van den BRAND et C. VAN DEN BROECK, « Lecture notes, general relativity and gravitational waves ». Lecture of the Master Particle and Astroparticle Physics of the Research School Subatomic Physics, Université d'Amsterdam, <http://master.particles.nl/LectureNotes/2011-GW.pdf>, p. 81-100, 2011.
- [11] THE SAGE DEVELOPERS, « SageMath, the Sage Mathematics Software System (Version 7.5) ». <http://www.sagemath.org>, 2017.
- [12] N. GEUQUET, « Solution statique des équations du champ d'Einstein-Maxwell : cas du fil rectiligne infini parcouru par un courant constant ». Mémoire, Département de physique, FUNDP, 2005.
- [13] L. WITTEN, *Gravitation : An Introduction to Current Research*. Ed. Wiley, New York, 1962., vol. 140. American Association for the Advancement of Science, 1963.
- [14] B. MUKHERJI, « Two cases of exact gravitational fields with axial symmetry », *Bull. Calcutta Math. Soc.*, vol. 30, p. 95–104, 1938.

- [15] A. FÜZFA, « How current loops and solenoids curve spacetime », *Phys. Rev. D*, vol. 93, p. 024014, Jan 2016.
- [16] R. C. TOLMAN, P. EHRENFEST et B. PODOLSKY, « On the gravitational field produced by light », *Phys. Rev.*, vol. 37, p. 602–615, Mar 1931.
- [17] D. RÄTZEL, M. WILKENS et R. MENZEL, « Gravitational properties of light—the gravitational field of a laser pulse », *New Journal of Physics*, vol. 18, no. 2, p. 023009, 2016.
- [18] M. GERTSENSHTEIN, « Wave resonance of light and gravitational waves », *JETP*, vol. 14, no. 1, p. 84, 1962.
- [19] D. BOCCALETTI, V. DE SABBATA, P. FORTINI et C. GUALDI, « Conversion of photons into gravitons and vice versa in a static electromagnetic field », *Il Nuovo Cimento B (1965-1970)*, vol. 70, no. 2, p. 129–146, 1970.
- [20] Y. B. ZEL'DOVICH, « Electromagnetic and gravitational waves in a stationary magnetic field », *Zh. Eksp. Teor. Fiz.*, vol. 65, p. 1311–1315, 1973.
- [21] A. LEMAITRE, « Mécanique des fluides ». SMATB308, Bachelier en sciences mathématiques, Syllabus, Université de Namur, 2014.