University of Namur



**MASTER EN SCIENCES MATHÉMATIQUES**

# Le principe du problème auxiliaire pour les problèmes d'équilibre, l'algorithme de l'extragradient et autres méthodes de projection

VAUTRON, Sandy

*Award date:*
2009

FACULTES UNIVERSITAIRES NOTRE-DAME DE LA PAIX
NAMUR

Faculté des Sciences

# LE PRINCIPE DU PROBLEME AUXILIAIRE POUR LES PROBLEMES D'EQUILIBRE, L'ALGORITHME DE L'EXTRAGRADIENT ET AUTRES METHODES DE PROJECTION

Mémoire présenté pour l'obtention

du grade académique de master en Sciences Mathématiques

Sandy VAUTRON

Promoteur : J.J. Strodiot

Janvier 2009

Je tiens avant tout à remercier mon promoteur Jean-Jacques Strodiot de m'avoir aidée et suivie tout au long de ce mémoire tout en m'autorisant beaucoup de liberté. Je remercie Daniela DiSerafino, de m'avoir trouvé les références nécessaires afin que je puisse y travailler au mieux lors de mon voyage Erasmus. Je tiens aussi à remercier les membres du jury pour toute l'attention qu'ils portent à ce travail, en espérant que celui-ci pourra les intéresser. Je remercie également Roberte Bastin pour sa relecture, ainsi que mes amis, pour leur bonne humeur et pour l'ambiance qu'ils ont apporté à cette deuxième master. J'aimerais terminer en remerciant Dimitri pour sa présence, son soutien et ses encouragements qui m'ont beaucoup aidée dans la réalisation de ce travail.

# Le principe du problème auxiliaire pour les problèmes d'équilibre, l'algorithme de l'extragradient et autres méthodes de projections


**Résumé**

Le but de ce travail est d'étudier un problème d'équilibre au sens de Blum et Oettli. Ce problème est très général et comprend, comme cas particuliers, le problème d'optimisation, le problème d'inégalités variationnelles, le problème d'équilibre de Nash dans les jeux non coopératifs, le problème du point fixe et le problème de complémentarité non-linéaire. Nous étudions diverses méthodes numériques permettant de résoudre ces problèmes en commençant par le principe du problème d'équilibre auxiliaire. Nous passons ensuite aux méthodes de projections utilisant une projection exacte sur la contrainte la plus violée, un algorithme de l'extragradient et une méthode de sous-gradient. Enfin nous développons le cas où les contraintes sont données sous forme d'un ensemble de points fixes. Pour chacune de ces méthodes, nous donnons l'algorithme correspondant et nous en étudions la convergence.


# The auxiliary equilibrium problem principle for equilibrium problems, the extragradient algorithm and other projection methods


**Abstract**

The aim of this work is to study an equilibrium problem in the sense of Blum and Oettli. This problem is very general and contains, as particular cases, the optimization problem, the variational inequality problem, the Nash equilibrium problem in noncooperative games, the fixed point problem and the nonlinear complementarity problem. We study various numerical methods for solving the equilibrium problem. First, we start with the auxiliary equilibrium problem principle. Then, we consider projection methods using an exact projection on the most violated constraint, an extragradient algorithm, and a subgradient method. Finally we develop the case where the constraint set is a set of fixed points. For each method, we give the corresponding algorithm and we study its convergence.

# Table des matières


1 **Introduction** 5

2 **Définition du problème d'équilibre** 7
- 1 Rappel de la convexité : définitions et propriétés importantes . . . 7
- 2 Définition et exemples de problèmes d'équilibre . . . 10
  - 2.1 Problèmes mathématiques équivalents au PE . . . 11
  - 2.2 Un problème mathématique auquel se réduit le PE : Le problème d'inégalités variationnelles . . . 18
- 3 Résumé . . . 22

3 **La fonction gap et le principe du problème auxiliaire** 23
- 1 La formulation minimax et les problèmes d'équilibre . . . 23
- 2 La fonction gap et les problèmes d'équilibre . . . 26
- 3 Le problème d'équilibre auxiliaire . . . 28
- 4 Le principe du problème d'équilibre auxiliaire . . . 29
- 5 Résumé . . . 31

4 **Les algorithmes et leur convergence** 32
- 1 Les algorithmes . . . 32
- 2 La convergence des algorithmes . . . 36

5 **Les méthodes de projection** 42
- 1 Le problème d'admissibilité convexe . . . 42
- 2 Une première méthode de projection : La méthode de projection exacte pour les problèmes d'équilibre . . . 47
- 3 L'algorithme de l'extragradient . . . 50
- 4 La méthode de projection du sous-gradient . . . 57
- 5 La méthode de projection du sous-gradient sur un ensemble de points fixes . . . 70
- 6 Application au problème d'équilibre de Nash . . . 79
- 7 Résumé . . . 82

**6 Conclusions** **83**

**A Annexe 1** **84**

1 La monotonicité . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 84

2 Les fonctions Lipschitz-continue . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 85

**B Annexe 2** **86**

1 La semi-continuité et l'hémi-continuité . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 86

2 Définition et propriétés du sous gradient . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 88

3 L'hyperplan . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 88

4 La combinaison convexe . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 89

CHAPITRE 1

# Introduction

Ce mémoire a pour but de développer, à partir de la définition du problème d'équilibre, différentes méthodes de résolution permettant de solutionner ces problèmes. Nous exposerons au fil des chapitres les notions de *principe du problème d'équilibre auxiliaire,* de *problème d'équilibre auxiliaire,* de *formulation minimax, d'extragradient,* de *méthodes de projection* et bien d'autres encore. Voyons comment ces différents concepts s'agenceront tout au long de ce mémoire.

Dans le premier chapitre, nous rappelerons les définitions et propriétés importantes de la convexité. Les ensembles et fonctions convexes jouent un rôle très important en optimisation. En effet, les fonctions convexes permettent de conclure que si un minimum local est determiné, alors celui-ci est également un minimum global. Une fois cette notion établie, nous définirons ce qu'est **le problème d'équilibre**. Ce problème recquiert, entre autre, l'hypothèse de convexité. C'est pourquoi celle-ci aura été explicitée préalablement. Le problème d'équilibre est équivalent à d'autre problèmes mathématiques. Quelques exemples seront alors donnés comme le problème d'optimisation, le problème d'équilibre de Nash présent principalement dans la théorie des jeux, le problème du point fixe souvent utile en sytèmes dynamiques et le principe de complémentarité non linéaire. Tous ces problèmes peuvent être ramenés très facilement à un problème d'équilibre, simplement par le remplacement de la fonction d'équilibre par une fonction particulière. Nous développerons également un peu plus en profondeur un autre problème auquel se réduit le problème PE : le problème d'inégalités variationnelles. Pour celui-ci, nous citerons divers problèmes qui en découlent comme le problème d'inégalités variationelles généralisées, le problème d'inégalités variationelles multivoques ou encore le problème d'inégalités variationelles dual.

Le chapitre suivant traitera le problème minimax et son équivalence avec le problème d'équilibre sera démontrée. La fonction Gap est ensuite définie. Cette fonction est définie par un supremum ce qui conduit souvent à un problème d'optimisation non différentiable. Nous définirons ensuite le problème d'équilibre auxiliaire. Ce problème peut s'avérer utile dans la résolution des problèmes d'équilibre. En effet, toute solution de ce problème est une solution du problème d'équilibre. Afin de terminer ce chapitre, nous prendrons une fonction particulière pour le problème d'équilibre auxiliaire. Nous ajouterons à cette fonction un terme fortement convexe, ce qui nous amenera à la notion de principe du problème d'équilibre auxiliaire. Toute solution de ce problème est également une solution du problème d'équilibre.

Dans le chapitre trois, nous établissons les différents algorithmes des problèmes vus au chapitre précédent. Nous partirons d'un algorithme tout à fait général que nous appliquerons aux inégalités variationnelles généralisées ainsi qu'au principe du problème d'équilibre auxiliaire. La convergence de tous ces algorithmes est assurée. Nous clôturerons ce chapitre par les preuves de ces convergences.

Enfin, dans le dernier chapitre, nous parlerons des différentes méthodes de projections. Pour cela, nous redéfinirons notre problème d'équilibre de départ en lui ajoutant des hypothèses de convexité. Nous verrons brièvement le *problème d'admissibilité convexe* et nous montrerons que son ensemble solutions est un sous-ensemble de l'ensemble solutions du problème d'équilibre, et qu'il lui est égal si la fonction d'équilibre est pseudo-monotone. Cette démonstration sera illustrée par deux exemples. Après cela, nous développerons la première méthode de projection. Cette méthode sera une *méthode de projection exacte*, nous démontrerons que celle-ci est bien définie, nous en donnerons l'algorithme et nous verrons que nous ne pouvons assurer la convergence que si le problème d'admissiblité convexe admet une solution ou si l'intersection d'une famille d'ensembles convexes n'est pas vide. Cet inconvénient nous a menés à donner un autre algorithme exigeant des hypothèses plus faibles que le précédent. Cet algorithme est appelé *algorithme de l'extragradient* et construit deux suites via deux projections orthogonales sur un ensemble convexe. Tout comme pour la méthode précédente, nous établirons et démontrerons la convergence de cet algorithme. La section suivante discutera de la méthode de projection du sous-gradient. Ces méthodes utilisent des projections inexactes et deux versions en seront développées. La première effectue une première projection sur un ensemble de niveaux séparant l'itération courante de cet ensemble de niveaux, utilise le sous-gradient d'une fonction convexe et réalise une seconde projection orthogonale. Quant à la seconde version, elle utilise la même première projection mais prend ensuite une combinaison convexe des deux projections approchées. Cependant, nous montrerons que la convergence de ces deux versions n'est pas toujours garantie. Ce qui nous conduit à une dernière méthode de projections : *la méthode de projection du sous gradient sur un ensemble de points fixes.* Après avoir défini les notions nécessaires, nous donnerons la définition du problème d'équilibre sur un ensemble de points fixes. Cette méthode présente plusieurs avantages. Non seulement nous démontrerons que la convergence est garantie, mais en plus dans certains cas les calculs peuvent s'avérer beaucoup plus simples en utilisant les points fixes plutot que les projections. Nous terminerons enfin ce chapitre par une application à l'équilibre de Nash introduit au chapitre premier.

Tout au long de ce mémoire, nous nous sommes principalement basés sur les références [1], [2] et [3]

CHAPITRE 2

# Définition du problème d'équilibre

Ce chapitre a pour but de mettre en place toutes les notions utiles pour la suite du travail. Nous nous remémorerons la définition de convexité et de forte convexité, en passant par leurs propriétés principales, et nous introduirons le problème d'équilibre tout en citant les problèmes qui lui sont équivalents.

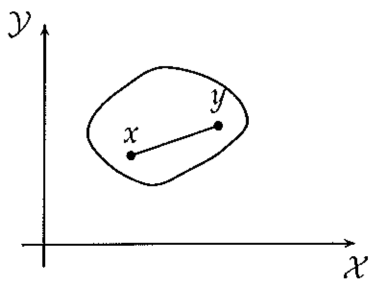
## 1 Rappel de la convexité : définitions et propriétés importantes

Commençons par rappeler ce que sont les **fonctions et ensembles convexes** :

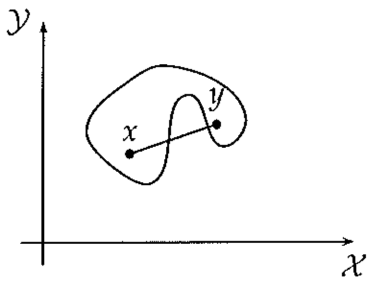
**DÉFINITION 1.1 :**
Un ensemble $C$ est dit **ensemble convexe** lorsque

$$\forall x, y \in C \quad \forall t \in [0,1] \ : \ tx + (1-t)y \in C.$$

Ce qui signifie que pour tout $x$ et $y$ de $C$, le segment $[x, y]$ est entièrement contenu dans $C$. Graphiquement, il est facile de voir si un ensemble est convexe ou non :




(a) Un ensemble convexe.




(b) Un ensemble non convexe.

**Fig. 2.1** – *Exemples d'illustration de la convexité.*

Rappelons une propriété importante et utile des ensembles convexes :

**PROPOSITION 1.1 :**
Si un ensemble $C$ est convexe, alors son intérieur $\overset{\circ}{C}$ et sa fermeture $\overline{C}$ sont également convexes.

Passons à présent aux fonctions convexes.

**DÉFINITION 1.2 :**
Une **fonction** $f$ est **convexe** sur un ensemble convexe $\mathcal{X} \subseteq \mathbb{R}^n$ si elle vérifie la relation suivante :

$$f(tx + (1-t)y) \leq tf(x) + (1-t)f(y) \quad \forall x, y \in \mathcal{X},\ \forall t \in [0,1].$$

Géométriquement lorsque $n = 1$, nous avons :

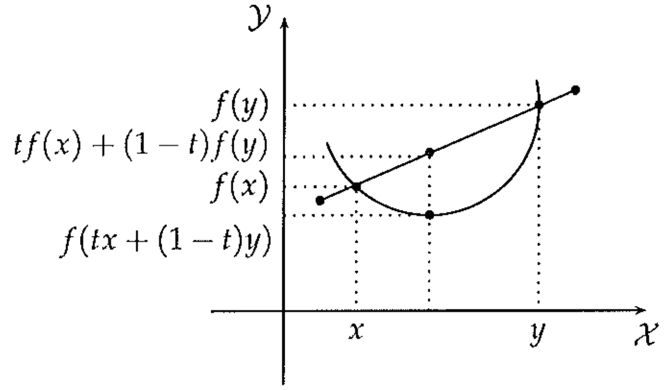



Fig. 2.2 – *Illustration de la définition 1.2 ci-dessus.*

Enonçons maintenant une caractérisation importante des fonctions convexes :

**PROPOSITION 1.2 :**
Soit $C \subseteq \mathbb{R}^n$ un ensemble convexe et soit $f$ une fonction de classe $C^2$ sur un ouvert contenant $C$.
Alors les assertions suivantes sont équivalentes :

a) $f$ est convexe sur $C$,

b) $\forall x, y \in C, \quad f(y) \geq f(x) + \nabla f(x)^T(y - x)$,

c) $\forall x \in C, \quad \nabla^2 f(x)$ est semi définie positive.

En dimension $n = 1$, la seconde assertion signifie que la courbe représentative de la fonction $f$ se situe au dessus de chacune de ses tangentes ; et la dernière assertion que $f'$ est croissante ou encore que la concavité de $f$ est tournée vers le haut.

L'intérêt de travailler avec des fonctions convexes est qu'elles génèrent des inégalités facilitant la recherche de minima.

De plus, la somme et le maximum de fonctions convexes sont encore des fonctions convexes.

La convexité joue un rôle important en optimisation. Les problèmes d'optimisation convexes, autrement dit les problèmes d'optimisation dont l'ensemble admissible et la fonction objectif sont convexes, garantissent une solution globale comme l'exprime la proposition suivante :

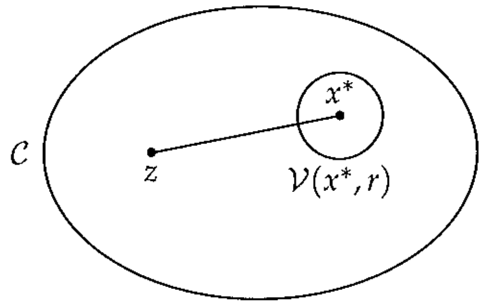
**PROPOSITION 1.3 :**
Un problème d'optimisation convexe a une solution globale ou pas de solution, mais ne peut pas avoir de solution exclusivement locale.

**Preuve :**

Soit $f : \mathcal{C} \subseteq \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction convexe sur un ensemble $\mathcal{C}$ convexe.
Supposons par l'absurde que $x^*$ soit un minimum local de $f$ sur $\mathcal{C}$ et pas un minimum global de $f$ sur $\mathcal{C}$.
Par définition du minimum local, il existe un voisinage $\mathcal{V}(x^*, r)$ de $x^*$ tel que :

$$\forall x \in \mathcal{C} \cap \mathcal{V}(x^*, r) \quad f(x^*) \leq f(x).$$

De plus, puisque $x^*$ n'est pas un minimum global, il existe un point $z \in \mathcal{C}$ tel que $f(z) < f(x^*)$.




Considérons le segment $[x^*, z]$, comme représenté sur la figure ci-dessus.
Par la convexité de $f$, on a :

$$\begin{aligned} f((1-t)x^* + tz) &\leq (1-t)f(x^*) + tf(z) \quad \forall t \in [0,1] \\ &= f(x^*) - tf(x^*) + tf(z) \\ &= f(x^*) + t(f(z) - f(x^*)) \end{aligned}$$

Le terme $t\big(f(z) - f(x^*)\big)$ est négatif puisque $f(z) < f(x^*)$ et ne s'annule que lorsque $t = 0$.
On a donc :

$$f\big((1-t)x^* + tz\big) < f(x^*) \quad \forall t \in (0,1].$$

Il suit que pour tout $x \in (x^*, z]$, c'est-à-dire pour tout $x$ de la forme $x = (1-t)x^* + tz$ avec $t$ dans l'intervalle $(0,1]$, on a $f(x) < f(x^*)$.

Il n'existe aucun voisinage de rayon $r > 0$ dans lequel $x^*$ satisfait la définition de minimum local.

Ce qui nous mène à une contradiction, et nous permet de conclure que $x^*$ est bien un minimum global.

$\square$

Terminons cette section par une définition de la **forte convexité**.

DÉFINITION 1.3 :
Soit $f$ une fonction de classe $C^1$ sur un ensemble ouvert $\mathcal{K} \subseteq \mathbb{R}^n$.
On dit que la fonction $f$ est **fortement convexe de module** $\alpha > 0$, si elle vérifie la relation suivante pour tout $x, y \in \mathcal{K}$ et pour tout $t \in ]0,1[$ :

$$f(tx + (1-t)y) \leq tf(x) + (1-t)f(y) - \frac{\alpha}{2} t(1-t) \parallel y - x \parallel^2 .$$

En d'autres termes, $f$ est fortement convexe de module $\alpha > 0$ si $f - \frac{\alpha}{2}||\cdot||^2$ est convexe.
Lorsque $C$ est convexe et fermé, on peut montrer qu'une fonction fortement convexe sur $C$ admet un minimum unique sur $C$. Cette notion nous permettra d'être beaucoup moins limité dans la théorie. Grâce à elle nous pourrons définir dans le chapitre suivant le *principe du problème d'équilibre auxiliaire*.

## 2 Définition et exemples de problèmes d'équilibre

Maintenant que nous avons mis en place les outils nécessaires, nous pouvons définir le **problème d'équilibre**. Celui-ci sera noté *PE*.

DÉFINITION 2.1 :
Soit $\mathcal{K}$ un ensemble non vide, fermé et convexe de $\mathbb{R}^n$ et une fonction $f : \mathcal{K} \times \mathcal{K} \to \mathbb{R}$ telle que :

$$f(x,x) = 0, \quad \forall x \in \mathcal{K}.$$

**Le problème d'équilibre** sera de trouver un vecteur

$$x^* \in \mathcal{K} \quad \text{tel que} \quad f(x^*, y) \geq 0 \quad \forall y \in \mathcal{K}.$$

Dans la suite, on supposera en plus que $f$ est continue sur $\mathcal{K} \times \mathcal{K}$ et que $f(x, \cdot)$ est convexe sur $\mathcal{K}$ pour tout $x \in \mathcal{K}$.
Suivant le choix de la fonction $f$, le problème d'équilibre peut être équivalent (et parfois même se réduire) à d'autres problèmes mathématiques tels que les problèmes d'optimisation ou d'inégalités variationnelles.

Voyons cela plus en détails.

## 2.1 Problèmes mathématiques équivalents au PE

### Le problème d'optimisation

Le problème d'optimisation détermine la valeur d'un vecteur $y \in \mathbb{R}^n$ qui minimise une *fonction objectif*

$$\mathcal{F} : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$$

lorsque $y$ appartient à un *ensemble admissible* $\mathcal{X} \subseteq \mathbb{R}^n$.

Le problème s'écrit alors :

$$\min_{y \in \mathcal{X}} \mathcal{F}(y)$$

et sa solution sera notée $x^*$.

Notons que tout ce qui est établi pour la minimisation, l'est aussi pour la maximisation. Il suffit de se rappeler que :

$$\min_{y \in \mathcal{X}} \mathcal{F}(y) \Longleftrightarrow -\max_{y \in \mathcal{X}} -\mathcal{F}(y).$$

Dans le cas où l'ensemble $\mathcal{X}$ est $\mathbb{R}^n$, ou de façon plus générale lorsque $\mathcal{X}$ est ouvert, on dit que le problème est *sans contrainte*.

Par contre, dans le cas où l'ensemble admissible est décrit par des égalités et/ou des inégalités, c'est-à-dire lorsque

$$\mathcal{X} = \{y \in \mathbb{R}^n : g_i(y) \leq 0,\ i = 1 \cdots p\ ; \quad h_j(y) = 0,\ j = 1 \cdots m\},$$

où $g : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^p$ et $h : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$,
le problème est alors dit *avec contrainte* et se reécrit comme :

$$\begin{array}{ll} & \min\limits_{y \in \mathbb{R}^n} \mathcal{F}(y) \\ \text{sous contraintes} & g(y) \leq 0 \\ & h(y) = 0 \end{array}$$

Quel que soit le cas, il s'agira de trouver

$$x^* \in \mathcal{X} \quad \text{tel que} \quad \mathcal{F}(x^*) \leq \mathcal{F}(y) \quad \forall y \in \mathcal{X}.$$

En comparant cela avec la définition du PE, nous pouvons voir que les deux problèmes sont équivalents si l'on prend

$$f(x,y) = \mathcal{F}(y) - \mathcal{F}(x) \qquad \forall x, y \in \mathcal{X}.$$

L'optimisation étant un domaine extrêmement important, il nous semble bon de rappeler brièvement les méthodes de résolution ainsi que les conditions d'optimalité.

### A) Les conditions d'optimalités dans le cas sans contraintes

**Conditions nécessaires du premier ordre :**

$$\begin{cases} \bullet\ x^* \in \mathbb{R}^n \text{ est un minimum local de } f \\ \bullet\ f \in \mathcal{C}^1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \bullet\ \nabla f(x^*) = 0, \text{ càd} \\ \quad x^* \text{ est un point stationnaire de } f \end{cases}$$

**Conditions nécessaires du second ordre :**

$$\begin{cases} \bullet\ x^* \in \mathbb{R}^n \text{ est un minimum local de } f \\ \bullet\ f \in \mathcal{C}^2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \bullet\ \nabla f(x^*) = 0 \\ \bullet\ \nabla^2 f(x^*) \ \text{s.d.p.}^1 \end{cases}$$

**Conditions suffisantes du second ordre :**

$$\begin{cases} \bullet\ f \in \mathcal{C}^2,\ x^* \in \mathbb{R}^n \\ \bullet\ \nabla f(x^*) = 0 \\ \bullet\ \nabla^2 f(x^*) d.p.^2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \bullet\ x^* \in \mathbb{R}^n \\ \quad \text{est un minimum local de } f \end{cases}$$

Notons que la réciproque n'est pas vraie.

### B) Les méthodes de résolution d'un problème d'optimisation.

Quelle que soit la méthode de résolution choisie : Powell, Newton, méthode du gradient (ou de la plus forte pente), méthode du gradient conjugué...le schéma de résolution sera toujours composé de 3 phases principales :

1. initialisation et vérification des conditions d'optimalité,
2. calcul d'une direction de descente. Cette direction pourra dépendre d'un point initial $x_0$, de la fonction objectif $f$, des contraintes, des équations de KKT...
3. calcul du nouveau point $x_{k+1}$ et du pas $\alpha$. Le pas peut dépendre de $f$ et des contraintes du problème.

Le pas sera calculé grâce à une *recherche linéaire exacte.*

Cependant, lorsque $f$ n'est pas quadratique comme c'est souvent le cas, cette recherche est assez coûteuse. L'utilisation de la *recherche linéaire inexacte* est alors préférée. La difficulté est de trouver la longueur du pas qui garantit la convergence de l'algorithme. Les conditions de Wolfe, Armijo ainsi que le Backtracking dans le cas non quadratique nous permettent d'obtenir une longueur de pas adéquate.

Passons à présent à un autre problème équivalent au PE, *l'équilibre de Nash.*

**Le problème d'équilibre de Nash**

John Forbes Nash Jr est un économiste et mathématicien américain ayant travaillé sur la théorie des jeux. Il introduisit le problème d'équilibre suivant dit **problème d'équilibre de Nash** :
Soient deux stratégies $\mathcal{S}_1$ et $\mathcal{S}_2$ de deux joueurs 1 et 2 respectivement.
Ces deux stratégies constituent un équilibre de Nash si :
- lorsque le joueur 1 adopte la stratégie $\mathcal{S}_1$, le joueur 2 ne peut pas faire mieux que d'utiliser $\mathcal{S}_2$, et
- lorsque le joueur 2 adopte la stratégie $\mathcal{S}_2$, le joueur 1 ne peut pas faire mieux que d'utiliser $\mathcal{S}_1$.

Cette définition peut être généralisée pour plusieurs joueurs qui suivent respectivement les stratégies $\mathcal{S}_1, \mathcal{S}_2 \cdots \mathcal{S}_p$.

Les stratégies $\{\mathcal{S}_1, \mathcal{S}_2 \cdots \mathcal{S}_p\}$ suivies par les joueurs $1 \dots p$ constituent un équilibre de Nash si, pour chaque joueur $i$, la stratégie $\mathcal{S}_i$ est la meilleure stratégie à suivre pour $i$ pourvu que les autres joueurs suivent les stratégies $\{\mathcal{S}_1, \mathcal{S}_2 \cdots \mathcal{S}_{i-1}, \mathcal{S}_{i+1} \cdots \mathcal{S}_p\}$.

Donc, si on a un équilibre de Nash, aucun joueur n'aura de raison de suivre une autre stratégie que celle qui assure l'équilibre.

Ecrivons tout cela de manière mathématique. Soient :
- l'ensemble fini composé des $p$ joueurs, $I = \{1 \dots p\}$ ;
- un ensemble non vide convexe $\mathcal{S}_i$ de $\mathbb{R}^{n_i}$, représentant l'ensemble des stratégies du $i^{\text{ème}}$ joueur pour tout $i \in I$ ;
- $\mathcal{S} = \prod_{i \in I} \mathcal{S}_i$
- une fonction $f_i : S \longrightarrow \mathbb{R}$ dite de perte, supposée continue et séparement convexe[1] pour tout $i \in I$. Cette fonction traduit que la perte du $i^{\text{ème}}$ joueur dépend des stratégies de tous les autres joueurs.

Soit $x \in S$. Pour chaque $i \in I$, on définit $x^i$ le vecteur $x$ privé de sa $i^{\text{ème}}$ composante. C'est-à-dire $x^i = (x_j)_{j \in I, j \neq i}$

Nous pouvons à présent définir le problème de Nash.

DÉFINITION 2.2 :
**Le problème d'équilibre de Nash** est de trouver un $x^* = (x_i)_{i \in I} \in \mathcal{S}$ tel que

$$f_i(x^*) \leq f_i(x^{*i}, y_i) \qquad \forall i \in I \quad \text{et} \quad \forall y \in \mathcal{S},$$

ou de façon équivalente :

$$f_i(x^*) \leq f(x_1^* \dots x_{i-1}^*, y_i, x_{i+1}^* \dots x_p^*) \qquad \forall i \in I \quad \text{et} \quad \forall y \in \mathcal{S}.$$

Cela signifie qu'aucun joueur ne peut réduire sa perte en modifiant unilatéralement sa stratégie. En vue d'écrire le problème d'équilibre de Nash sous la forme PE, définissons :

$$f : \mathcal{S} \times \mathcal{S} \longrightarrow \mathbb{R}$$

[1] C'est-à-dire convexe pour chacun des $\mathcal{S}_i$.

par

$$f(x,y) = \sum_{i=1}^{p} f_i(x^i, y_i) - f_i(x) \quad \forall x, y \in \mathcal{S}.$$

On a alors la proposition suivante :

> **PROPOSITION 2.1 :**
> Le point $x^* \in \mathcal{S}$ est un équilibre de Nash si et seulement si $x^*$ est une solution du problème d'équilibre
> $$f(x^*, y) \geq 0 \quad \forall y \in \mathcal{S}.$$

**Preuve :**

Supposons que $x^*$ soit un équilibre de Nash.
Nous avons donc pour tout $i \in I$,

$$f_i(x^*) \leq f_i(x^{*i}, y_i). \quad \forall y_i \in \mathcal{S}_i.$$

Dans ce cas, $f(x^*, y) = \sum_{i \in I} [f_i(x^{*i}, y_i) - f_i(x^{*i}, x_i^*)] \geq 0 \quad \forall y \in S.$
La réciproque se démontre tout aussi facilement. Il suffit de choisir, pour tout $i \in I$, un $y \in S$ tel que

$$f_j(x^{*j}, y_j) - f_j(x^{*j}, x_j^*) = 0 \quad \text{pour } j \neq i.$$

En d'autres termes, il suffit de prendre $y \in S$ tel que $y_j = x_j^*, j \neq i$.
On a alors

$$0 \leq f(x^*, y) = f_i(x^{*i}, y_i) - f_i(x^*) \quad \forall y_i \in S_i.$$

Donc si $x^*$ est solution du PE, alors il est un équilibre de Nash.

□

**Le problème du point fixe**

Rappelons tout d'abord la définition d'un point fixe.

> **DÉFINITION 2.3 :**
> Soit $g$ une fonction continue sur un ensemble $\mathcal{K}$ convexe fermé de $\mathbb{R}^n$. Un **point** $x \in \mathcal{K}$ est dit **fixe** s'il vérifie l'équation $g(x) = x$.
>
> Le problème du point fixe consiste à chercher un $x^* \in \mathcal{K}$ tel que $x^* = g(x^*)$.

Géométriquement, ces points se situent à l'intersection entre le graphe de $f$ et la bissectrice, comme le montre le graphique suivant :

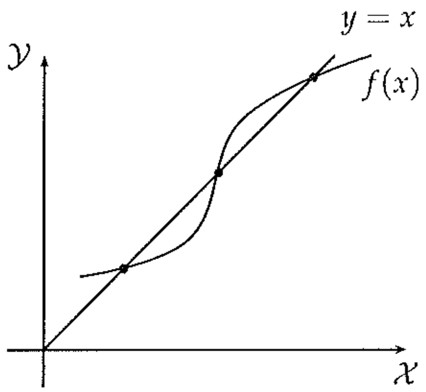



**Fig. 2.3** – *Illustration des points fixes d'une fonction $f$.*

Les points fixes sont très souvent utilisés en mathématiques, notamment dans le cadre des systèmes dynamiques.

Illustrons sur un simple exemple, la façon de déterminer ces points fixes. Prenons *la fonction logistique*. Cette fonction est une fonction quadratique définie comme suit :

$$\begin{array}{cccl} g_\mu & : & [0,1] & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & & x & \leadsto & g_\mu(x) = \mu x(1-x) \end{array}$$

où $\mu \in [0,4]$.

Pour déterminer les points fixes, nous devons trouver les points qui vérifient $g(x) = x$.

Nous devons donc résoudre l'équation $g_\mu(x) = \mu x(1-x) = x$.
On a d'abord que $x = 0$ est un point fixe de $g_\mu$ quelle que soit la valeur de $\mu \in [0,4]$.
Supposons ensuite $x \neq 0$. Alors $\mu(1-x) = 1$ et $x = 1 - \frac{1}{\mu}$ est un point fixe de $g_\mu$ quel que soit $\mu \in ]0,4]$.

Maintenant que la notion de point fixe a été établie, démontrons à présent le lien de ce problème avec le PE.

**PROPOSITION 2.2 :**
Soit $\mathcal{K}$ un ensemble non vide, convexe et fermé de $\mathbb{R}^n$, et soit une fonction $f : \mathcal{K} \times \mathcal{K} \to \mathbb{R}$. Alors, pour tout $x, y \in \mathcal{K}$, en posant

$$f(x,y) = \langle x - g(x), y - x \rangle,$$

le problème d'équilibre et le problème du point fixe sont équivalents.

**Preuve :**

Remarquons d'abord que $f(x,x) = 0, \quad \forall x \in \mathcal{K}$.
Nous devons prouver que $x^*$ est solution du PE si et seulement si $x^*$ est solution du problème du point fixe.

D'abord si $x^*$ vérifie l'équation $x^* = g(x^*)$, il sera aussi solution du PE car

$$f(x^*,y) = 0 \quad \forall y \in \mathcal{K}.$$

Réciproquement, si $x^*$ est solution du PE, alors $f(x^*,y) \geq 0$ pour tout $y \in \mathcal{K}$.
En particulier pour $y = g(x^*)$, on a

$$\begin{aligned} 0 &\leq f(x^*,y) = \langle x^* - g(x^*), y - x^* \rangle \\ &= -||x^* - g(x^*)||^2 \end{aligned}$$

D'où $x^* = f(x^*)$.

□

Il existe une autre équivalente au PE. Cette formulation est très importante et permet de définir une classe de méthode itérative pour résoudre des problèmes d'inégalités variationnelles ainsi que des problèmes d'extremum avec contraintes.

**PROPOSITION 2.3** (*La formulation du point fixe*) **:**
Soit $\mathcal{K}$ un ensemble non vide, convexe et fermé de $\mathbb{R}^n$, $f : \mathcal{K} \times \mathcal{K} \to \mathbb{R}$ une fonction telle que $f(x,x) = 0 \quad \forall x \in \mathcal{K}$.

$x^*$ est solution du PE si et seulement si $x^*$ est solution du problème

$$\min_{y \in \mathcal{K}} f(x^*,y). \tag{2.1}$$

**Preuve :**

Si $x^*$ est solution du problème $\min_{y \in \mathcal{K}} f(x^*,y)$, on a :

$$f(x^*,y) \geq f(x^*,x^*) \quad \forall y \in \mathcal{K}.$$

Or, par hypothèse $f(x^*,x^*) = 0$. On a donc pour tout $y \in \mathcal{K}$,

$$f(x^*,y) \geq 0.$$

Ce qui n'est autre que notre problème d'équilibre.

Réciproquement, si $x^*$ est solution de PE, alors $f(x^*,y) \geq 0, \quad \forall y \in \mathcal{K}$.
Comme $f(x^*,x^*) = 0$, on en déduit que $x^*$ est solution du problème $\min_{y \in \mathcal{K}} f(x^*,y)$.

□

Cependant, cette formulation admet un inconvénient majeur : l'équation 2.1 peut ne pas avoir de solution. De plus, s'il existe une solution, son unicité n'est pas assurée. Afin d'éviter cela, nous utiliserons le *problème d'équilibre auxiliaire*. Celui-ci sera détaillé dans le chapitre suivant.

Terminons à présent cette section par un autre problème important : *le problème de complémentarité non linéaire.*

**Le problème de complémentarité non linéaire**

Avant de formuler ce problème, nous allons rappeler les définitions de *cône* et de *cône dual*

> **DÉFINITION 2.4 :**
> $\mathcal{K}$ est **un cône** si et seulement si :
>
> $$\forall x \in \mathcal{K}, \quad \forall \lambda > 0, \quad \lambda x \in \mathcal{K}.$$

> **DÉFINITION 2.5 :**
> Le **cône dual** de $\mathcal{K}$, noté $\mathcal{K}^*$ est
>
> $$\mathcal{K}^* = \{y \in \mathbb{R}^n : \langle y, x \rangle \geq 0 \quad \forall x \in \mathcal{K}\}.$$

Il s'agit de l'ensemble des vecteurs $y$ de $\mathbb{R}^n$ formant un angle aigu avec n'importe quel $x$ appartenant à $\mathcal{K}$. A ne pas confondre avec le cône polaire $\mathcal{K}^p$ qui lui est défini comme :

$$\mathcal{K}^p = \{y \in \mathbb{R}^n : \langle y, x \rangle \leq 0 \quad \forall x \in \mathcal{K}\}.$$

Maintenant que nous avons mis en place les outils nécéssaires, nous pouvons considérer un cône $\mathcal{K}$ convexe fermé et une fonction $\mathcal{F} : \mathcal{K} \longrightarrow \mathbb{R}^n$, afin de définir le problème de complémentarité non linéaire.

> **DÉFINITION 2.6 :**
> Le **problème de complémentarité non linéaire,** noté NCP[a] consiste à trouver un vecteur
>
> $$x^* \in \mathcal{K} \quad \text{tel que} \quad \underbrace{x^*}_{\in \mathcal{K}} \perp \underbrace{\mathcal{F}(x^*)}_{\in \mathcal{K}^*}.$$
>
> [a] Non linear Complementarity Problem

Puisque $\mathcal{F}(x^*)$ appartient au cône dual, on a :

$$\langle \mathcal{F}(x^*), y \rangle \geq 0 \quad \forall y \in \mathcal{K}.$$

D'autre part, par définition du NCP nous avons :

$$\langle \mathcal{F}(x^*), x^* \rangle = 0.$$

En combinant ces deux relations, nous pouvons nous ramener au PE, en prenant :

$$f(x, y) = \langle \mathcal{F}(x), y - x \rangle \quad \forall x, y \in \mathcal{K}.$$

## 2.2 Un problème mathématique auquel se réduit le PE : Le problème d'inégalités variationnelles

Commençons par donner une définition du problème d'inégalités variationnelles.

**DÉFINITION 2.7 :**
Supposons un ensemble $\mathcal{K}$ non vide, convexe et fermé de $\mathbb{R}^n$ et une fonction continue

$$\mathcal{F} : \mathcal{K} \longrightarrow \mathbb{R}^n.$$

Le **problème d'inégalités variationnelles**, noté VIP($\mathcal{F}, \mathcal{K}$)[a], consiste à trouver un vecteur $x^* \in \mathcal{K}$ qui vérifie l'inégalité :

$$\langle \mathcal{F}(x^*), y - x^* \rangle \geq 0 \quad \forall y \in \mathcal{K}.$$

[a] Variational Inequality Problem

Géométriquement, cela signique que $\mathcal{F}(x^*)^T$ est orthogonal à l'ensemble admissible $\mathcal{K}$ au point $x^*$.

Les VIP ont été beaucoup étudiés car ils permettent de généraliser les conditions d'optimalité classiques pour les problèmes d'extremum avec contraintes et de théoriser des conditions d'équilibre pour divers problèmes comme les problèmes d'ingénierie mécanique ou les problèmes économiques.

Il existe une relation entre le VIP et les problèmes d'optimisation. Etablissons cette relation dans les propositions suivantes.

**PROPOSITION 2.4 :**
Soient $\mathcal{G}$ une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ convexe et $\mathcal{K}$ un ensemble fermé et convexe.

Supposons que $x^*$ est solution du problème d'optimisation $\min_{y \in \mathcal{K}} \mathcal{G}(y)$.
Alors $x^*$ est une solution du VIP($\nabla\mathcal{G}, \mathcal{K}$) :

$$\langle \nabla\mathcal{G}(x^*), y - x^* \rangle \geq 0 \quad \forall y \in \mathcal{K}.$$

**Preuve :**

Posons

$$\psi(t) = f(ty + (1-t)x^*) \text{ pour } t \in [0,1].$$

Cette fonction atteint son minimum en $t = 0$. D'où

$$0 \leq \psi'(0) = \langle \nabla\mathcal{G}(x^*), y - x^* \rangle.$$

C'est-à-dire $x^*$ est solution de VIP($\nabla\mathcal{G}, \mathcal{K}$).

□

La réciproque est vraie si l'on ajoute l'hypothèse de convexité à la fonction $\mathcal{F}$.

**PROPOSITION 2.5 :**
Soient $\mathcal{G}$ une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ convexe et $\mathcal{K}$ un ensemble fermé et convexe.

Supposons $x^*$ une solution du VIP($\nabla\mathcal{G}, \mathcal{K}$).
Alors $x^*$ est solution du problème d'optimisation $\min_{y \in \mathcal{K}} \mathcal{G}(y)$.

**Preuve :**

Par convexité de $\mathcal{G}$, on a

$$G(y) \geq G(x^*) + \langle \nabla G(x^*), y - x^* \rangle \quad \forall y \in \mathcal{K}.$$

De plus, puisque $x^*$ est solution du VIP, on a

$$\langle \nabla\mathcal{G}(x^*), y - x^* \rangle \geq 0.$$

D'où

$$\mathcal{G}(y) \geq \mathcal{G}(x^*) \quad \forall y \in \mathcal{K}.$$

Ce qui signifie que $x^*$ est solution de $\min_{y \in \mathcal{K}} \mathcal{G}(y)$.

□

Il existe cependant des cas particuliers suivant la définition de l'ensemble $\mathcal{K}$. Nous venons d'en citer un : le NCP. Il s'agit d'un VIP où $\mathcal{K}$ est un cône convexe fermé de $\mathbb{R}^n$.

Une propriété utile est que le VIP et le NCP ont les mêmes solutions.

**PROPOSITION 2.6 :**
Soit $\mathcal{K}$ un cône convexe fermé de $\mathbb{R}^n$.
Un vecteur $x^* \in \mathcal{K}$ est solution du VIP si et seulement si $x^*$ est solution du NCP.

**Preuve :**

$\Leftarrow$ | Si $x^*$ est solution du NCP alors il est solution du VIP.

Supposons $x^*$ solution du NCP.
Nous devons montrer que $x^*$ est solution du VIP, c'est-à-dire que

$$\langle \mathcal{F}(x^*), y - x^* \rangle \geq 0 \quad \forall y \in \mathcal{K}.$$

Par les propriétés du produit scalaire, pour tout $x$ dans $\mathcal{K}$, on a :

$$\langle \mathcal{F}(x^*), y - x^* \rangle = \langle \mathcal{F}(x^*), y \rangle - \langle \mathcal{F}(x^*), x^* \rangle.$$

Le premier terme du membre de droite est positif ou nul car $\mathcal{F}(x^*) \in \mathcal{K}^*$. Le second, quant à lui, est nul par définition du NCP. D'où

$$\langle \mathcal{F}(x^*), y - x^* \rangle \geq 0 \quad \forall y \in \mathcal{K},$$

ce qui signifie que $x^*$ est solution du VIP.

$\Rightarrow$ | Si $x^*$ est solution du VIP alors il est solution du NCP.

Supposons $x^*$ solution du VIP.
Par définiton, il est évident que $x^* \in \mathcal{K}$. (A)

Il nous faut donc montrer que :

$$\mathcal{F}(x^*) \in \mathcal{K}^* \tag{B}$$

et

$$\langle \mathcal{F}(x^*), x^* \rangle = 0 \quad \forall y \in \mathcal{K}. \tag{C}$$

1. $\langle \mathcal{F}(x^*), x^* \rangle \stackrel{?}{=} 0$

   Puisque $x^*$ est solution du VIP, nous avons que

   $$\langle \mathcal{F}(x^*), y - x^* \rangle \geq 0 \quad \forall y \in \mathcal{K}.$$

   En prenant $y = 0$, nous obtenons :

   $$\langle \mathcal{F}(x^*), -x^* \rangle \geq 0,$$

   ou encore

   $$\langle \mathcal{F}(x^*), x^* \rangle \leq 0.$$

   Prenons à présent $y = 2x^*$, ce qui nous donne :

   $$\langle \mathcal{F}(x^*), x^* \rangle \geq 0.$$

   De ces deux inégalités, nous pouvons déduire que

   $$\langle \mathcal{F}(x^*), x^* \rangle = 0.$$

2. $\mathcal{F}(x^*) \stackrel{?}{\in} \mathcal{K}^*$

   Comme précédemment, on a :

   $$0 \leq \langle \mathcal{F}(x^*), y - x^* \rangle = \langle \mathcal{F}(x^*), y \rangle - \langle \mathcal{F}(x^*), x^* \rangle. \tag{2.2}$$

   Or, nous savons que

   $$\langle \mathcal{F}(x^*), x^* \rangle = 0.$$

   Donc (2.2) devient :

   $$\langle \mathcal{F}(x^*), y \rangle \geq 0 \quad \forall y \in \mathcal{K}.$$

   et

   $$\mathcal{F}(x^*) \in \mathcal{K}^*.$$

Nous pouvons à présent conclure que $x^*$ est solution du NCP, étant donné que celui-ci vérifie les conditions (A), (B) et (C).

□

Un autre cas particulier de problème de complémentarité non linéaire est définit lorque $\mathcal{K} = \mathbb{R}^n$. On se retrouve alors avec un problème d'inéquations non linéaires.

PROPOSITION 2.7 :
Soit $\mathcal{K} = \mathbb{R}^n$. Alors $x^* \in \mathbb{R}^n$ est une solution du problème d'inégalités variationnelles si et seulement si $\mathcal{F}(x^*) = 0$.

**Preuve :**

Si $\mathcal{F}(x^*) = 0$, alors

$$\langle \underbrace{\mathcal{F}(x^*)}_{=0}, y - x^* \rangle \geq 0 \quad \forall y \in \mathbb{R}^n.$$

Réciproquement, posons $y = x^* - \mathcal{F}(x^*)$ et remplaçons le dans

$$\langle \mathcal{F}(x^*), y - x^* \rangle \geq 0,$$

ce qui nous donne :

$$\begin{aligned} \langle \mathcal{F}(x^*), (x^* - \mathcal{F}(x^*)) - x^* \rangle &= \langle \mathcal{F}(x^*), -\mathcal{F}(x^*) \rangle \\ &= - \| \mathcal{F}(x^*) \|^2 \\ &\geq 0 \end{aligned}$$

D'où $\mathcal{F}(x^*) = 0$.

□

Avant de terminer cette section, nous allons définir quelques généralisations du problème VIP. Définissons tout d'abord *le problème d'inégalités variationnelles généralisées.*

DÉFINITION 2.8 :
Soient $\mathcal{K}$ un ensemble non vide, convexe et fermé de $\mathbb{R}^n$, soient $\mathcal{F} : \mathcal{K} \longrightarrow \mathbb{R}^n$, une fonction continue, et $\phi : \mathcal{K} \longrightarrow \mathbb{R}$, une fonction convexe.

Le **problème d'inégalités variationnelles généralisées**, noté GVI, sera de trouver un $x^* \in \mathcal{K}$ tel que

$$\langle \mathcal{F}(x^*), y - x^* \rangle + \phi(y) - \phi(x^*) \geq 0 \qquad \forall y \in \mathcal{K}.$$

Ce problème peut se mettre sous la forme d'un problème d'équilibre. Pour cela, il suffit de prendre :

$$f(x,y) = \langle \mathcal{F}(x), y - x^* \rangle + \phi(y) - \phi(x) \geq 0 \qquad \forall x, y \in \mathcal{K}.$$

Définissons ensuite une version multivoque du problème VIP.

DÉFINITION 2.9 :
Soit $\mathcal{K}$ un ensemble non vide, convexe et fermé de $\mathbb{R}^n$, $F : \mathcal{K} \longrightarrow 2^{\mathbb{R}^n}$, une fonction continue au sens topologique telle que pour tout $x \in \mathcal{K}$, $F(x)$ soit une partie non vide et compacte de $\mathbb{R}^n$.

**Le problème d'inégalité variationnelle multivoque**, noté VIPM, consiste à trouver $x^* \in \mathcal{K}$ et $\xi^* \in F(x^*)$ tels que

$$\langle \xi^*, y - x^* \rangle \geq 0 \qquad \forall y \in \mathcal{K}.$$

Comme pour le problème GVI, le problème VIPM peut se mettre sous la forme d'un problème d'équilibre en prenant pour fonction $f$ :

$$f(x,y) = \max_{\xi \in \mathcal{F}(x)} \langle \xi, y - x \rangle \qquad \forall x, y \in \mathcal{K}.$$

Enfin dans certains problèmes d'inégalités variationnelles, il est parfois plus facile de travailler avec une version duale du problème.

DÉFINITION 2.10 :
Supposons $\mathcal{F} : \mathcal{K} \longrightarrow \mathbb{R}^n$, une fonction continue sur l'ensemble $\mathcal{K}$ supposé convexe, non vide et fermé. **Le problème dual associé au problème VIP**, noté VIP*, consiste à trouver $x^* \in \mathcal{K}$ tel que

$$\langle \mathcal{F}(y), y - x^* \rangle \geq 0 \qquad \forall y \in \mathcal{K}.$$

En termes de problèmes d'équilibre, ce problème correspond au problème PE* qui consiste à trouver $x^* \in \mathcal{K}$ tel que

$$f(y, x^*) \leq 0 \qquad \forall y \in \mathcal{K}.$$

# 3 Résumé

Dans ce chapitre, nous avons mis en place les outils importants pour la suite de notre travail. Nous avons rappelé la notion de convexité et nous en avons donné les propriétés importantes. Ensuite, nous avons défini le problème d'équilibre et nous avons détaillé quelques exemples de tels problèmes, comme le problème d'optimisation, le problème d'équilibre de Nash et du point fixe. Enfin, nous avons considéré les problèmes d'inégalités variationnelles et ses variantes et nous avons montré leurs liens avec le problème d'équilibre.
Nous allons à présent établir des procédés permettant de résoudre les problèmes d'équilibre. Le premier sera le principe du problème auxiliaire. Celui-ci fait intervenir la formulation *minimax* ainsi que la formulation du point fixe. Cette méthode fera l'objet du chapitre suivant.

CHAPITRE 3

# La fonction gap et le principe du problème auxiliaire

Nous allons définir dans ce chapitre la fonction gap et le principe du problème auxiliaire. Nous verrons que ceux-ci sont étroitement liés au problème VIP ainsi qu'au problème d'équilibre grâce à la formulation *minimax*.

## 1 La formulation minimax et les problèmes d'équilibre

Le *minimax* est une règle de décision très souvent utilisée en statistiques ou encore dans la théorie. Elle consiste à minimiser un maximum de perte.

Prenons un exemple simple de la chimie.

Nous savons qu'il est dangereux de mélanger un acide concentré et une base concentrée. En effet, le dégagement de chaleur de la réaction peut provoquer des aspersions corrosives. Imaginons que l'on ait 6 éprouvettes contenant un liquide incolore et inodore. Celles-ci contiennent une base, sauf une dont ne nous sommes pas certains s'il s'agit d'une base ou d'un acide. Nous voudrions rassembler ces bases dans la même éprouvette sans risque d'incident.

Voyons dans le tableau 3.1 page suivante les différentes possibilités qui s'offrent à nous suivant le contenu de la 6$^{e}$ éprouvette.

Pour le *minimax*, ce qui nous importe est de minimiser notre regret une fois que l'incertitude sur la nature de l'éprouvette est levée. Pour y parvenir, il nous faut, dans chacune des deux hypothèses concernant l'état de la sixième éprouvette, comparer les conséquences de chacune des actions envisageables avec celles qu'entraînerait le choix d'une des autres actions. L'aversion au regret qui guide cette démarche conduit à éliminer l'action où l'on jette l'éprouvette douteuse. Dans ce cas, le *minimax* retiendra l'action qui séparera en 2 éprouvettes distinctes les 5 bases certaines dans une et l'incertaine dans l'autre.

Mathématiquement, le problème *minimax* est défini comme suit (voir la définition 1.1 page suivante) :

| | Base | Acide |
|---|---|---|
| On rassemble les 6 éprouvettes | On obtient une base<br>Gain : 6 bases réunies.<br>Pertes : rien | Gros risque d'incident<br>Gain : aucun<br>Perte : les 6 éprouvettes. |
| On rassemble juste les 5 éprouvettes « certaines » | On obtient une base<br>Gain : 6 bases réunies mais une difficulté survient<br>Perte : Aucune, mais difficulté | On obtient une base<br>Gain : 5 bases réunies mais une difficulté survient<br>Perte : Aucune, mais difficulté |
| On jette l'éprouvette « incertaine » | On obtient une base avec une contrition<br>Gain : 6 bases réunies<br>Perte : une éprouvette | On obtient une base avec une contrition<br>Gain : 5 bases réunies<br>Perte : une éprouvette. |

Tab. 3.1 – *Application de la formulation minimax en chimie : tableau des différentes possibilités du mélange de cinq bases et d'une sixième substance, base ou acide, inconnue.*

**DÉFINITION 1.1 :**
Soit $\mathcal{K}$ un ensemble non vide, convexe et fermé de $\mathbb{R}^n$, $f : \mathcal{K} \times \mathcal{K} \to \mathbb{R}$ une fonction telle que $f(x,x) = 0 \quad \forall x \in \mathcal{K}$.

Le problème minimax est donné par

$$\min_{x\in\mathcal{K}} \left\{ \sup_{y\in\mathcal{K}} -f(x,y) \right\} = 0.$$

Maintenant que nous avons défini ce qu'était le *minimax*, nous pouvons énoncer et démontrer son équivalence avec le problème d'équilibre.

**LEMME 1.1 :**
Soient $\mathcal{K}$ un ensemble non vide, fermé et convexe de $\mathbb{R}^n$, et $f : \mathcal{K} \times \mathcal{K} \to \mathbb{R}$ une fonction telle que $f(x,x) = 0 \quad \forall x \in \mathcal{K}$.

Alors on a l'équivalence suivante :

$$\exists x^* \in \mathcal{K} : f(x^*,y) \geq 0 \quad \forall y \in \mathcal{K}$$

$$\Leftrightarrow$$

$$\exists x^* \in \mathcal{K}, \inf_{y\in\mathcal{K}} f(x^*,y) = \min_{x\in\mathcal{K}} \left\{ \sup_{y\in\mathcal{K}} (-f(x,y)) \right\} = 0.$$

**Preuve :**

Afin de pouvoir simplifier la preuve, notons que

$$\min_{x\in\mathcal{K}} \left\{ \sup_{y\in\mathcal{K}} (-f(x,y)) \right\} \quad \text{est équivalent à} \quad \max_{x\in\mathcal{K}} \left\{ \inf_{y\in\mathcal{K}} f(x,y) \right\}.$$

$\underline{\Rightarrow |}$ Par définition du PE on a

$$f(x,x) = 0\,\forall x \in \mathcal{K}, \quad \text{et donc} \quad \inf_{y\in\mathcal{K}} f(x,y) \leq 0\,\forall x \in \mathcal{K}.$$

Puisque cette relation est valable pour tout $x$ dans $\mathcal{K}$, nous pouvons prendre le supremum sur les $x$ sans changer cette inégalité. Autrement dit

$$\sup_{x\in\mathcal{K}} \left\{ \inf_{y\in\mathcal{K}} f(x,y) \right\} \leq 0. \tag{3.1}$$

D'autre part, puisque $x^*$ est un élément de $\mathcal{K}$ on a

$$\sup_{x\in\mathcal{K}} \left\{ \inf_{y\in\mathcal{K}} f(x,y) \right\} \geq \inf_{y\in\mathcal{K}} f(x^*,y). \tag{3.2}$$

Par hypothèse, nous avons

$$f(x^*,y) \geq 0 \quad \forall y \in \mathcal{K} \Rightarrow \inf_{y\in\mathcal{K}} f(x^*,y) \geq 0. \tag{3.3}$$

D'où

$$0 \overset{(3.3)}{\leq} \inf_{y\in\mathcal{K}} f(x^*,y) \overset{(3.2)}{\leq} \sup_{x\in\mathcal{K}} \left\{ \inf_{y\in\mathcal{K}} f(x,y) \right\} \overset{(3.1)}{\leq} 0.$$

Donc

$$\inf_{y\in\mathcal{K}} f(x^*,y) = \sup_{x\in\mathcal{K}} \left\{ \inf_{y\in\mathcal{K}} f(x,y) \right\} = 0.$$

De plus, puisque tous les $x$ appartiennent à $\mathcal{K}$, on peut écrire :

$$\max_{x\in\mathcal{K}} \left\{ \inf_{y\in\mathcal{K}} f(x,y) \right\} = 0.$$

$\underline{\Leftarrow |}$ Par hypothèse, on a qu'il existe $x^* \in \mathcal{K}$ tel que

$$\max_{x\in\mathcal{K}} \left\{ \inf_{y\in\mathcal{K}} f(x,y) \right\} = \inf_{y\in\mathcal{K}} f(x^*,y) = 0.$$

Ce qui signifie que

$$f(x^*,y) \geq 0 \quad \forall y \in \mathcal{K}.$$

$\square$

Terminons cette section par une proposition reliant le VIP et le problème minimax.

**PROPOSITION 1.1 :**
Soient $\mathcal{K}$ un ensemble non vide, fermé et convexe de $\mathbb{R}^n$ et une fonction $\mathcal{F} : \mathcal{K} \longrightarrow \mathbb{R}^n$.
Alors le VIP est équivalent au problème minimax suivant :

$$\min_{x\in\mathcal{K}} \left\{ \sup_{y\in\mathcal{K}} \langle \mathcal{F}(x), y - x \rangle \right\} = 0.$$

Maintenant que la théorie préliminaire a été établie, nous pouvons passer à la définition et aux utilités de la fonction gap.

## 2 La fonction gap et les problèmes d'équilibre

Commençons par définir la fonction gap. Celle-ci est importante dans le sens où sa minimisation sur l'ensemble admissible du problème VIP revient à la résolution du problème d'équilibre.

**DÉFINITION 2.1 :**
Soit $\mathcal{K}$ un ensemble fermé de $\mathbb{R}^n$. **Une fonction gap pour le problème d'équilibre PE** est une fonction $g : \mathcal{K} \longrightarrow \mathbb{R}$ à valeurs positives, c'est-à-dire telle que $g(x) \geq 0 \; \forall x \in \mathcal{K}$, qui satisfait les conditions $x^* \in \mathcal{K}$ et $g(x^*) = 0$ si et seulement si $x^*$ est solution du PE.

Si l'on pose

$$g(x) = \inf_{y \in \mathcal{K}} \{f(x,y)\}$$

où $f$ satisfait les hypothèses du PE, on obtient un exemple très simple de fonction gap.

De même, on obtient une fonction gap en posant

$$g(x) = \sup_{y \in \mathcal{K}} \langle \mathcal{F}(x), y - x \rangle,$$

où $\mathcal{F}$ satisfait les hypothèses du VIP. Cependant, cette fonction gap n'est pas différentiable, ce qui complique fortement la résolution numérique du problème.

Passons à présent à quelques propriétés importantes de la fonction gap.

**THÉORÈME 2.1 :**
Soit une une fonction $f : \mathcal{K} \times \mathcal{K} \longrightarrow \mathbb{R}$. On suppose que $f(x, \cdot)$ est fortement convexe pour tout $x \in \mathcal{K}$, et que $f(\cdot, y)$ est continue pour tout $y \in \mathcal{K}$.
On suppose également que $\nabla_x f(\cdot, \cdot)$ est continu sur $\mathcal{K} \times \mathcal{K}$. Alors la fonction

$$g(x) = \sup_{y \in \mathcal{K}} \{-f(x,y)\}$$

est une fonction gap continûment différentiable pour le PE.

De plus, son gradient est donné par

$$\nabla g(x) = - \nabla_x f(x, y(x)),$$

où

$$y(x) = \arg\min_{y \in \mathcal{K}} f(x,y).$$

Le désavantage de ce théorème est que l'hypothèse de forte convexité de $f(x, \cdot)$ n'est, en général, pas satisfaite.

Voyons à présent, une formulation équivalente du VIP à partir de laquelle nous pourrons extraire une fonction gap de classe $C^1$, et ce en utilisant les résultats de la théorie minimax citée préalablement.

**PROPOSITION 2.2 :**
Soit $\mathcal{K}$ un sous ensemble fermé et convexe de $\mathbb{R}^n$ et soit $\mathcal{G}(x,y) : \mathcal{K} \times \mathcal{K} \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction positive, différentiable par rapport à $y$ sur l'ensemble $\mathcal{K}$ et telle que :

1. $\mathcal{G}(x,x) = 0, \qquad \forall x \in \mathcal{K};$
2. $\nabla_y \mathcal{G}(x,x) = 0, \qquad \forall x \in \mathcal{K}.$

Alors le problème VIP est équivalent au problème VIP($\mathcal{F}$,$\mathcal{G}$) qui consiste à trouver $x^* \in \mathcal{K}$ tel que

$$\langle \mathcal{F}(y), y - x^* \rangle + \mathcal{G}(x^*, y) \geq 0 \qquad \forall y \in \mathcal{K}.$$

**Preuve :**

Puisque $\mathcal{G}$ est une fonction positive, il est évident que si $x^*$ est une solution du problème VIP, alors $x^*$ est également une solution du problème VIP($\mathcal{F}$,$\mathcal{G}$).

Pour démontrer la réciproque, supposons que $x^*$ est une solution du problème VIP($\mathcal{F}$,$\mathcal{G}$). Nous pouvons alors dire de manière équivalente que $x^*$ est un minimum global du problème de minimisation

$$\min_{y \in \mathcal{K}} \left[ \langle \mathcal{F}(y), y - x^* \rangle + \mathcal{G}(x^*, y) \right].$$

Posons $g(x,y) = \langle \mathcal{F}(y), y - x \rangle$. Donc, on a :

$$\begin{aligned} \nabla_y g(x,y) &= \mathcal{F}(y) + \nabla \mathcal{F}(y)^T (y - x), \qquad \text{et} \\ \nabla_y g(x^*,x^*) &= \mathcal{F}(x^*) + \nabla \mathcal{F}(x^*)^T (x^* - x^*) \\ &= \mathcal{F}(x^*) \end{aligned} \tag{3.1}$$

Puisque $\mathcal{K}$ est, par hypothèse, un ensemble fermé et convexe, on a que $x^*$ satisfait la condition d'optimalité suivante :

$$\langle \nabla_y g(x^*,x^*) + \underbrace{\nabla_y \mathcal{G}(x^*,x^*)}_{=0}, y - x^* \rangle \geq 0 \quad \forall y \in \mathcal{K}.$$

Ce qui nous donne

$$\langle \nabla_y g(x^*,x^*), y - x^* \rangle \geq 0 \quad \forall y \in \mathcal{K},$$

ou encore, grâce à (3.1)

$$\langle \mathcal{F}(x^*), y - x^* \rangle \geq 0 \quad \forall y \in \mathcal{K}.$$

D'où $x^*$ est la solution du problème VIP.

□

Après la fonction gap, nous allons maintenant parler du problème d'équilibre auxiliaire ainsi que du principe du problème auxiliaire.

## 3 Le problème d'équilibre auxiliaire

Dans cette section, nous considérons une fonction $f : \mathcal{K} \times \mathcal{K} \longrightarrow \mathbb{R}$ convexe et différentiable par rapport à sa seconde variable et telle que $f(x,x) = 0$ pour tout $x \in \mathcal{K}$.
Nous considérons également un $\varepsilon > 0$ ainsi qu'une autre fonction $\mathcal{G} : \mathcal{K} \times \mathcal{K} \longrightarrow \mathbb{R}$ positive, différentiable sur l'ensemble convexe $\mathcal{K}$ par rapport à sa seconde variable $y$ et telle que :

1. $\mathcal{G}(x,x) = 0 \quad \forall x \in \mathcal{K}$,
2. $\nabla_y \mathcal{G}(x,x) = 0 \quad \forall x \in \mathcal{K}$.

La plupart des algorithmes développés pour résoudre les problèmes d'équilibre peuvent être dérivés de formulations équivalentes de ceux-ci.

**PROPOSITION 3.1 :**
$x^* \in \mathcal{K}$ est une solution du problème PE si et seulement si $x^*$ est une solution optimale du problème d'optimisation suivant :

$$\min_{y \in \mathcal{K}} \{\varepsilon f(x^*, y) + \mathcal{G}(x^*, y)\}.$$

Cette proposition nous amène à la définition du problème d'équilibre auxiliaire. Afin de faciliter les notations, celui-ci sera noté AuxEP.

**DÉFINITION 3.1 :**
**Le problème d'équilibre auxiliaire** consiste à trouver $x^* \in \mathcal{K}$ tel que

$$\varepsilon f(x^*, y) + \mathcal{G}(x^*, y) \geq 0 \qquad \forall y \in \mathcal{K}.$$

Etablissons et démontrons à présent, le lien de ce problème avec le problème PE.

**THÉORÈME 3.2 :**
$x^* \in \mathcal{K}$ est une solution du problème PE si et seulement si il est une solution du problème AuxEP.

**Preuve :**

$\Rightarrow$ Supposons $x^*$ une solution du problème PE et montrons qu'il est également solution du problème AuxEP.

Par hypothèse, nous avons que $f(x^*, y) \geq 0$ pour tout $y \in \mathcal{K}$.
De plus, comme $\varepsilon$ est strictement positif et comme la fonction $\mathcal{G}$ est également positive, nous avons bien

$$\varepsilon f(x^*, y) + \mathcal{G}(x^*, y) \geq 0 \qquad \forall y \in \mathcal{K}.$$

$\Leftarrow$ | Supposons à présent que $x^*$ est une solution du problème AuxEP et montrons qu'il est également solution du problème PE.

Par hypothèse, nous avons que $x^*$ est un minimiseur du problème suivant :

$$\min_{y\in\mathcal{K}} \{\varepsilon f(x^*,y) + \mathcal{G}(x^*,y)\}\,. \tag{3.1}$$

Puisque notre problème est un problème d'optimisation convexe, $x^* \in \mathcal{K}$ est une solution optimale de (2.1) si et seulement si

$$\langle \varepsilon\nabla_y f(x^*,x^*) + \nabla_y\mathcal{G}(x^*,x^*), y - x^*\rangle \geq 0 \qquad \forall y \in \mathcal{K}.$$

Or par hypothèse, $\nabla_y\mathcal{G}(x,x) = 0$ pour tout $x \in \mathcal{K}$. L'inégalité devient donc :

$$\langle \varepsilon\nabla_y f(x^*,x^*), y - x^*\rangle \geq 0 \qquad \forall y \in \mathcal{K}.$$

Ce qui signifie que $x^* \in \mathcal{K}$ est le minimiseur de

$$\min_{y\in\mathcal{K}} f(x^*,y).$$

En utilisant la formulation du point fixe, on a que :

$$f(x^*,y) \geq 0 \qquad \text{pour tout} \quad y \in \mathcal{K}.$$

D'où $x^*$ est solution du problème PE.

□

Nous avons vu, dans le théorème 2.1, page 26, que l'hypothèse de forte convexité était requise. Cependant cette forte convexité n'est pas toujours satisfaite. En effet, prenons un des problèmes les plus basiques : le VIP. Pour ce cas, la fonction $f(x,\cdot) = \langle F(x), \cdot - x\rangle$ est affine, elle ne peut donc être fortement convexe.

Grâce au problème d'équilibre auxiliaire que nous venons de voir, nous allons pouvoir surmonter cet obstacle en ajoutant un terme fortement convexe à la fonction $f(x,\cdot)$.
C'est l'objet de la section suivante.

# 4 Le principe du problème d'équilibre auxiliaire

Dans cette section, nous considérons une forme particulière de la fonction $\mathcal{G}(x,y)$.

**DÉFINITION 4.1 :**
Soit $\mathcal{L} : \mathcal{K} \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction différentiable et fortement convexe de module $\alpha > 0$, et soit $\varepsilon > 0$. **Le principe du problème d'équilibre auxiliaire** noté AEPP consiste à trouver $x^* \in \mathcal{K}$ tel que

$$\varepsilon f(x^*,y) + \mathcal{L}(y) - \mathcal{L}(x^*) - \langle \nabla\mathcal{L}(x^*), y - x^*\rangle \geq 0 \qquad \forall y \in \mathcal{K}.$$

Notons qu'il s'agit du problème AuxEP, où l'on pose :

$$\mathcal{G}(x,y) = \mathcal{L}(y) - \mathcal{L}(x) - \langle \nabla \mathcal{L}(x), y - x \rangle.$$

Adaptons la Proposition 3.1 page 28 et le Théorème 3.2 page 28 du problème AuxEP.

Comme précédemment, nous allons considérer un $\varepsilon > 0$ et une fonction $f : \mathcal{K} \times \mathcal{K} \longrightarrow \mathbb{R}$ telle que $f(x,x) = 0$ pour tout $x \in \mathcal{K}$. Nous supposerons que $f$ est convexe et différentiable dans la seconde variable.

**PROPOSITION 4.1 :**
$x^* \in \mathcal{K}$ est une solution du problème PE si et seulement si $x^*$ est une solution du problème d'optimisation suivant :

$$\min_{y \in \mathcal{K}} \{\varepsilon f(x^*, y) + \mathcal{L}(y) - \mathcal{L}(x^*) - \langle \nabla \mathcal{L}(x^*), y - x^* \rangle\}.$$

Ce problème peut être simplifié comme suit :

$$\min_{y \in \mathcal{K}} \{\varepsilon f(x^*, y) + \mathcal{L}(y) - \langle \nabla \mathcal{L}(x^*), y - x^* \rangle\}.$$

En effet, puisque la minimisation se fait sur $y \in \mathcal{K}$, le terme $\mathcal{L}(x^*)$ est une constante et n'intervient donc pas. Notons que par la forte convexité de $\mathcal{L}$, le problème admet une solution unique.

Nous voyons donc que l'AEPP est également lié aux problèmes d'optimisation ainsi qu'aux problèmes d'équilibre comme le montre le théorème suivant.

**THÉORÈME 4.2 :**
$x^* \in \mathcal{K}$ est une solution du problème PE si et seulement si il est une solution de l'AEPP.

**Preuve :**

La preuve découle du Théorème 3.2 page 28 en posant

$$\mathcal{G}(x,y) = \mathcal{L}(y) - \mathcal{L}(x) - \langle \nabla \mathcal{L}(x), y - x \rangle.$$

En effet, il suffit de vérifier que :

1. $\mathcal{G}(x,x) = 0 \qquad \forall x \in \mathcal{K}$.
   Cette égalité est bien vérifiée. En effet :
   $$\mathcal{G}(x,x) = \mathcal{L}(x) - \mathcal{L}(x) - \langle \mathcal{L}(x), \underbrace{x - x}_{=0} \rangle = 0$$
2. $\nabla_y \mathcal{G}(x,x) = 0 \qquad \forall x \in \mathcal{K}$.
   On a :
   $$\nabla_y \mathcal{G}(x,x) = \nabla_y \mathcal{L}(x) - \nabla_y \mathcal{L}(x) - \nabla_y (\langle \mathcal{L}(x), x \rangle) = 0$$

Ce qui vérifie la seconde égalité et permet de conclure la démonstration.

$\square$

Pour terminer cette section, nous allons revenir à la fonction gap. Rappelons-nous qu'au Théorème 2.1 page 26, la forte convexité de la fonction $f(x,\cdot)$ était exigée et que cette hypothèse n'était pas toujours satisfaite. Nous avons à présent mis en place les outils nécessaires à l'adaptation de ce théorème.

**THÉORÈME 4.3 :**
Soit $f : \mathcal{K} \times \mathcal{K} \longrightarrow \mathbb{R}$ différentiable par rapport au premier argument, convexe par rapport au second argument et telle que $\nabla_x f(\cdot,\cdot)$ soit continue sur $\mathcal{K} \times \mathcal{K}$.
Soit également une fonction $\mathcal{L}(\cdot,\cdot)$ positive, de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathcal{K} \times \mathcal{K}$, fortement convexe par rapport au second argument et telle que :

1. $\mathcal{L}(x,x) = 0 \qquad \forall x \in \mathcal{K}$,
2. $\nabla_y \mathcal{L}(x,x) = 0 \qquad \forall x \in \mathcal{K}$.

Alors

$$g(x) = \sup_{y \in \mathcal{K}} \{-f(x,y) - \mathcal{L}(x,y)\}$$

est une fonction gap de classe $\mathcal{C}^1$ pour le problème PE.
De plus, son gradient est donné par :

$$\nabla g(x) = -\nabla_x f(x, y(x)) - \nabla_x \mathcal{L}(x, y(x)),$$

où

$$y(x) = \arg\min_{y \in \mathcal{K}} \{f(x,y) + \mathcal{L}(x,y)\}.$$

**Preuve :**

Nous savons que le problème PE est équivalent à l'AEPP grâce au Théorème 4.2 page précédente. Autrement dit, le problème PE est équivalent au problème de minimisation suivant :

$$\min_{y \in \mathcal{K}} \{\varepsilon f(x^*, y) + \mathcal{L}(x^*, y)\}.$$

Si on pose

$$\varepsilon = 1,$$

on se retrouve dans le cas du Théorème 2.1 page 26, ce qui conclut la preuve.

□

# 5 Résumé

Dans ce chapitre, nous avons défini ce qu'étaient la formulation *minimax*, la fonction gap, et le problème d'équilibre auxiliaire. Nous avons ensuite ajouté un terme convexe, permettant d'approfondir la théorie et de dépasser certaines de ces limites. Ce qui nous a amené à la définition du principe du problème auxiliaire. Nous avons également établi les liens entre ces différentes notions et le problème d'équilibre.

Nous allons à présent donner l'aspect algorithmique de tous ces résultats. C'est l'objet du chapitre suivant.

CHAPITRE 4

# Les algorithmes et leur convergence

Dans ce chapitre, nous allons étudier différents algorithmes permettant de résoudre les problèmes d'équilibre. Nous allons commencer par une méthode itérative tout à fait générale, et nous allons l'améliorer grâce aux différents concepts vu précédemment.

Tout au long de ce chapitre, nous supposerons donnés :

1. un ensemble non vide, convexe et fermé $\mathcal{K}$,
2. une fonction $f : \mathcal{K} \times \mathcal{K} \longrightarrow \mathbb{R}$ telle que $f(x,x) = 0$ pour tout $x \in \mathcal{K}$.

## 1 Les algorithmes

Considérons la formulation du point fixe avec $x^* \in \mathcal{K}$ la solution du problème

$$\min_{y \in \mathcal{K}} f(x^*, y).$$

Supposons que pour chaque $x^* \in \mathcal{K}$, ce problème ait une solution unique.
Nous pouvons donner l'algorithme général suivant :

ALGORITHME GÉNÉRAL

***Pas 0 : initialisation***
*Soit $k = 0$, $x^0 \in \mathcal{K}$ un point initial et $\eta > 0$ une tolérance fixée.*

***Pas 1***
*Soit $x^{k+1} \in \mathcal{K}$ la solution du problème*

$$\min_{y \in \mathcal{K}} f(x^k, y).$$

***Pas 2 : critère d'arrêt***
*Si $\| x^{k+1} - x^k \| \leq \eta$, alors* STOP.
*Sinon mettre à jour $k = k + 1$ et retourner au* ***Pas 1***.

Dans la plupart des cas, il n'est pas possible ou pas approprié d'appliquer cet algorithme directement au problème PE car souvent le problème de minimisation n'a pas de solution unique. C'est donc ici que nous allons faire intervenir l'AEPP. Grâce à la forte convexité de la fonction $\mathcal{L}$, nous obtiendrons une solution **unique** pour chaque sous-problème.
Plus précisement, on obtient l'algorithme général suivant :

> ALGORITHME 1
>
> ***Pas 0 : initialisation***
> *Soit $k = 0$, $x^0 \in \mathcal{K}$ un point initial et $\eta > 0$ une tolérance fixée.*
>
> ***Pas 1***
> *Soit $x^{k+1} \in \mathcal{K}$ la solution du problème d'optimisation*
>
> $$\min_{y\in\mathcal{K}} \left\{ \varepsilon f(x^k,y) + \mathcal{L}(y) - \langle \nabla\mathcal{L}(x^k), y\rangle \right\}.$$
>
> ***Pas 2 : critère d'arrêt***
> *Si $\| x^{k+1} - x^k \| \leq \eta$, alors* STOP.
> *Sinon mettre à jour $k = k+1$ et retourner au **Pas 1**.*

Cet algorithme 1 peut s'appliquer au problème d'inégalités variationnelles généralisées GVI défini au chapitre 1. Dans l'**ALGORITHME 1**, nous devons minimiser sur $y \in \mathcal{K}$, la fonction

$$\varepsilon f(x^k,y) + \mathcal{L}(y) - \langle \nabla\mathcal{L}(x^k), y\rangle.$$

Or, nous avons vu que pour le problème GVI la fonction $f$ était :

$$f(x,y) = \langle \mathcal{F}(x), y - x^*\rangle + \phi(y) - \phi(x) \geq 0 \qquad \forall x,y \in \mathcal{K}.$$

La fonction à minimiser devient donc

$$\varepsilon \left( \langle \mathcal{F}(x^k), y - x^k\rangle + \phi(y) - \phi(x^k) \right) + \mathcal{L}(y) - \langle \nabla\mathcal{L}(x^k), y\rangle.$$

Puisque la minimisation se fait sur la variable $y$, les termes $\langle \mathcal{F}(x^k), x^k\rangle$ et $\phi(x^k)$ sont constants. La minimisation du problème devient donc :

$$\min_{y\in\mathcal{K}} \left\{ \varepsilon \left( \langle \mathcal{F}(x^k), y\rangle + \phi(y) \right) + \mathcal{L}(y) - \langle \nabla\mathcal{L}(x^k), y\rangle \right\}.$$

On obtient alors l'algorithme suivant :

ALGORITHME 2

***Pas 0 : initialisation***
*Soit $k = 0$, $x^0 \in \mathcal{K}$ un point initial et $\eta > 0$ une tolérance fixée.*

***Pas 1***
*Soit $x^{k+1} \in \mathcal{K}$ la solution du problème d'optimisation*

$$\min_{y \in \mathcal{K}} \left\{ \langle \varepsilon \mathcal{F}(x^k) - \nabla \mathcal{L}(x^k), y \rangle + \varepsilon \phi(y) + \mathcal{L}(y) \right\}.$$

***Pas 2 : critère d'arrêt***
*Si $\| x^{k+1} - x^k \| \leq \eta$, alors* STOP.
*Sinon mettre à jour $k = k + 1$ et retourner au* ***Pas 1***.

Passons maintenant à un algorithme de recherche linéaire sur la fonction gap associée à l'AEPP. Celle-ci nous permet de ramener le problème PE à un problème d'optimisation avec contraintes d'une fonction de classe $\mathcal{C}^1$

$$\min_{x \in K} g(x)$$

où

$$g(x) \equiv \sup_{y \in \mathcal{K}} \{-f(x,y)\}$$

L'algorithme général est modifié comme suit :

ALGORITHME 3

***Pas 0 : initialisation***
*Soit $k = 0$, $x^0 \in \mathcal{K}$ un point initial et $\eta > 0$ une tolérance fixée.*

***Pas 1***
*Poser $d^k = y(x^k) - x^k$ où $y(x^k)$ est la solution du problème d'optimisation*

$$\min_{y \in \mathcal{K}} f(x^k, y),$$

*Calculer $t_k$ la solution de la recherche linéaire*

$$\min_{t \in [0,1]} g(x^k + td^k).$$

*et poser $x^{k+1} = x^k + t_k d^k$.*

***Pas 2 : critère d'arrêt***
*Si $\| x^{k+1} - x^k \| \leq \eta$, alors* STOP.
*Sinon mettre à jour $k = k + 1$ et retourner au* ***Pas 1***.

Pour terminer cette section, nous allons appliquer l'algorithme précédent à l'AEPP. Nous obtenons alors une méthode itérative permettant d'aller plus loin dans la théorie grâce au terme convexe ajouté. Pour cela, considérons la fonction gap $g(x) = \sup_{y \in K} \{-f(x,y) - \mathcal{L}(x,y)\}$ de classe $C^1$ définie dans le Théorème 4.3.

ALGORITHME 4

***Pas 0 : initialisation***
*Soit $k = 0$, $x^0 \in \mathcal{K}$ un point initial et $\eta > 0$ une tolérance fixée.*

***Pas 1***
*Poser $d^k = y(x^k) - x^k$ où $y(x^k)$ est la solution du problème d'optimisation*

$$\min_{y \in \mathcal{K}} \left\{ f(x^k, y) + \mathcal{L}(x^k, y) \right\},$$

*Calculer $t_k$ la solution de la recherche linéaire le long de la fonction gap $g$ :*

$$\min_{t \in [0,1]} g(x^k + td^k),$$

*et poser $x^{k+1} = x^k + t_k d^k$.*

***Pas 2 : critère d'arrêt***
*Si $\| x^{k+1} - x^k \| \leq \eta$, alors STOP.*
*Sinon mettre à jour $k = k + 1$ et retourner au **Pas 1**.*

Nous avons présenté les différents algorithmes permettant de résoudre les problèmes d'équilibre. Il est intéressant de savoir si ces algorithmes convergent ou non vers la solution. C'est l'objet de la section suivante.

## 2 La convergence des algorithmes

Commençons cette section en démontrant la convergence de l'ALGORITHME 1 vers une solution $x^* \in \mathcal{K}$ du problème d'équilibre. Nous montrerons également que cette solution existe et est unique.

**THÉORÈME 2.1 :**
Supposons que

1. $f(x,\cdot) : \mathcal{K} \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction convexe et différentible pour tout $x \in \mathcal{K}$,
2. $f(\cdot,y) : \mathcal{K} \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue pour tout $y \in \mathcal{K}$,
3. $f : \mathcal{K} \times \mathcal{K} \longrightarrow \mathbb{R}$ fortement monotone[a] de module $\alpha > 0$ sur $\mathcal{K}$,
4. $\mathcal{L}$ une fonction différentiable et fortement convexe de module $\beta > 0$ sur $\mathcal{K}$,
5. $\varepsilon > 0$ et l'existence de deux constantes $c > 0$ et $d > 0$ telles que pour tout $x, y, z \in \mathcal{K}$ on a :

$$f(x,y) + f(y,z) \geq f(x,z) - c \parallel y - x \parallel^2 - d \parallel z - y \parallel^2 .$$

Alors si

$$\varepsilon \leq \frac{\beta}{2d} \quad \text{et} \quad c < \alpha,$$

la suite $\{x^k\}_{k \in \mathbb{N}}$ générée par l'algorithme 1 converge vers la solution $x^* \in \mathcal{K}$ du problème PE.

[a] La définition de monotonicité est rappelée en annexe 1.

**Preuve :**

Commençons par définir une fonction $l : \mathcal{K} \longrightarrow \mathbb{R}$ par

$$l(y) = \mathcal{L}(x^*) - \mathcal{L}(y) - \langle \nabla \mathcal{L}(y), x^* - y \rangle \qquad \forall y \in \mathcal{K}.$$

Par hypothèse, $\mathcal{L}$ est fortement convexe de module $\beta > 0$.
On a donc successivement pour tout $x, y \in \mathcal{K}$ et pour tout $t \in ]0,1[$ :

$$\begin{aligned}
t\mathcal{L}(x) + (1-t)\mathcal{L}(y) - \frac{1}{2}\beta t(1-t) \parallel y - x \parallel^2 &\geq \mathcal{L}(tx + (1-t)y), \\
\mathcal{L}(tx + (1-t)y) + \frac{1}{2}\beta t(1-t) \parallel y - x \parallel^2 - \mathcal{L}(x) &\leq -\mathcal{L}(x) + t\mathcal{L}(x) + (1-t)\mathcal{L}(y), \\
\mathcal{L}(tx + (1-t)y) + \frac{1}{2}\beta t(1-t) \parallel y - x \parallel^2 - \mathcal{L}(x) &\leq (1-t)[\mathcal{L}(y) - \mathcal{L}(x)].
\end{aligned}$$

Utilisons à présent l'hypothèse de différentiabilité :

$$\begin{aligned}
\langle \nabla \mathcal{L}(x), tx + y(1-t) - x\rangle + \frac{1}{2}\beta t(1-t) \parallel y - x \parallel^2 &\leq (1-t)[\mathcal{L}(y) - \mathcal{L}(x)] \\
\langle \nabla \mathcal{L}(x), y(1-t) - x(1-t)\rangle + \frac{1}{2}\beta t(1-t) \parallel y - x \parallel^2 &\leq (1-t)[\mathcal{L}(y) - \mathcal{L}(x)] \\
(1-t)\langle \nabla \mathcal{L}(x), y - x\rangle + \frac{1}{2}\beta t(1-t) \parallel y - x \parallel^2 &\leq (1-t)[\mathcal{L}(y) - \mathcal{L}(x)]
\end{aligned}$$

En faisant tendre $t$ vers 1, on obtient

$$\langle \nabla \mathcal{L}(x), y - x\rangle + \frac{1}{2}\beta \parallel y - x \parallel^2 \leq \mathcal{L}(y) - \mathcal{L}(x).$$

Ce qui nous donne une borne inférieure égale à 0 pour la fonction $l$.
En effet, si l'on prend $y = x^*$ dans l'équation précédente, on a :

$$l(y) \geq \frac{1}{2}\beta \parallel x^* - y \parallel^2 \qquad \forall y \in \mathcal{K}.$$

Calculons à présent la différence $l(x^k) - l(x^{k+1})$

$$\begin{aligned}
&= \mathcal{L}(x^*) - \mathcal{L}(x^k) - \langle \nabla\mathcal{L}(x^k), x^* - x^k\rangle - \mathcal{L}(x^*) + \mathcal{L}(x^{k+1}) \\
&\qquad + \langle \nabla\mathcal{L}(x^{k+1}), x^* - x^{k+1}\rangle \\
&= \mathcal{L}(x^{k+1}) - \mathcal{L}(x^k) - \langle \nabla\mathcal{L}(x^k), x^* - x^k\rangle + \langle \nabla\mathcal{L}(x^{k+1}), x^* - x^{k+1}\rangle \\
&\qquad + \langle \nabla\mathcal{L}(x^k), x^{k+1}\rangle - \langle \nabla\mathcal{L}(x^k), x^{k+1}\rangle \\
&= \mathcal{L}(x^{k+1}) - \mathcal{L}(x^k) - \langle \nabla\mathcal{L}(x^k), x^* - x^k + x^{k+1}\rangle + \langle \nabla\mathcal{L}(x^{k+1}), x^* - x^{k+1}\rangle \\
&\qquad + \langle \nabla\mathcal{L}(x^k), x^{k+1}\rangle \\
&= \mathcal{L}(x^{k+1}) - \mathcal{L}(x^k) - \langle \nabla\mathcal{L}(x^k), x^{k+1} - x^k\rangle - \langle \nabla\mathcal{L}(x^k), x^*\rangle \\
&\qquad + \langle \nabla\mathcal{L}(x^{k+1}), x^* - x^{k+1}\rangle + \langle \nabla\mathcal{L}(x^k), x^{k+1}\rangle \\
&\geq \frac{1}{2}\beta \parallel x^{k+1} - x^k \parallel^2 + \langle \nabla\mathcal{L}(x^{k+1}) - \nabla\mathcal{L}(x^k), x^* - x^{k+1}\rangle \qquad (4.1)
\end{aligned}$$

Par le **Pas 2** de l'**ALGORITHME 1**, $x^{k+1}$ résoud le problème d'optimisation convexe suivant

$$\min_{y\in\mathcal{K}} \left\{ \varepsilon f(x^k, y) + \mathcal{L}(y) - \langle \nabla\mathcal{L}(x^k), y\rangle \right\}.$$

On a donc pour tout $x \in \mathcal{K}$ :

$$
\begin{aligned}
& \langle \nabla_y \left( \varepsilon f(x^k, y) + \mathcal{L}(y) - \langle \nabla \mathcal{L}(x^k), y \rangle \right) (x^{k+1}), x - x^{k+1} \rangle \geq 0 \\
\Longleftrightarrow \quad & \langle \varepsilon \nabla_y f(x^k, x^{k+1}) + \nabla \mathcal{L}(x^{k+1}) - \nabla \mathcal{L}(x^k), x - x^{k+1} \rangle \geq 0 \\
\Longleftrightarrow \quad & \langle \varepsilon \nabla_y f(x^k, x^{k+1}) + \nabla \mathcal{L}(x^{k+1}) - \nabla \mathcal{L}(x^k), x^* - x^{k+1} \rangle \geq 0 \\
& \qquad \text{En prenant} \quad x = x^* \\
\Longleftrightarrow \quad & \langle \nabla \mathcal{L}(x^{k+1}) - \nabla \mathcal{L}(x^k), x^* - x^{k+1} \rangle \geq \varepsilon \langle \nabla_y f(x^k, x^{k+1}), x^{k+1} - x^* \rangle \\
\overset{(4.1)}{\Longleftrightarrow} \quad & l(x^k) - l(x^{k+1}) \geq \frac{1}{2}\beta \parallel x^{k+1} - x^k \parallel^2 + \varepsilon \langle \nabla_y f(x^k, x^{k+1}), x^{k+1} - x^* \rangle
\end{aligned}
$$

Or, on sait par hypothèse que $f(x^k, \cdot)$ est une fonction convexe différentiable.
Nous pouvons donc écrire :

$$f(x^k, x^*) \geq f(x^k, x^{k+1}) + \langle \nabla_y f(x^k, x^{k+1}), x^* - x^{k+1} \rangle$$

C'est-à-dire

$$\langle \nabla_y f(x^k, x^{k+1}), x^{k+1} - x^* \rangle \geq f(x^k, x^{k+1}) - f(x^k, x^*)$$

En remplaçant dans l'équation précédente, on obtient alors :

$$l(x^k) - l(x^{k+1}) \geq \frac{1}{2}\beta \parallel x^{k+1} - x^k \parallel^2 + \varepsilon \left( f(x^k, x^{k+1}) - f(x^k, x^*) \right). \tag{4.2}$$

Utilisons à présent les hypothèses 3 et 5.
Prenons $x = x^*$ et $y = x^k$ dans l'hypothèse 3, et $x = x^*$, $y = x^k$ et $z = x^{k+1}$ dans l'hypothèse 5.
Les hypothèses 3 et 5 deviennent respectivement :

$$f(x^*, x^k) + f(x^k, x^*) \leq -\alpha \parallel x^k - x^* \parallel^2 \text{ et} \tag{4.3}$$

$$f(x^*, x^k) + f(x^k, x^{k+1}) \geq f(x^*, x^{k+1}) - c \parallel x^k - x^* \parallel^2 - d \parallel x^{k+1} - x^k \parallel^2 \tag{4.4}$$

Repartons de l'équation (4.2), et utilisons ces deux équations. On a alors que
$l(x^k) - l(x^{k+1})$

$$
\begin{aligned}
& \geq \frac{1}{2}\beta \parallel x^{k+1} - x^k \parallel^2 + \varepsilon \left[ \left( f(x^*, x^k) + f(x^k, x^{k+1}) \right) - \left( f(x^*, x^k) - f(x^k, x^*) \right) \right] \\
& \geq \frac{1}{2}\beta \parallel x^{k+1} - x^k \parallel^2 + \underbrace{\varepsilon \left( f(x^*, x^{k+1}) - c \parallel x^k - x^* \parallel^2 - d \parallel x^{k+1} - x^k \parallel^2 \right)}_{\text{par } (4.4)} \\
& \qquad + \underbrace{\varepsilon\alpha \parallel x^k - x^* \parallel^2}_{\text{par } (4.3)} \\
& = \varepsilon f(x^*, x^{k+1}) + \left( \frac{1}{2}\beta - \varepsilon d \right) \parallel x^{k+1} - x^k \parallel^2 + \varepsilon(\alpha - c) \parallel x^k - x^* \parallel^2 \qquad (4.5)
\end{aligned}
$$

Puisque $f(x^*, x^{k+1}) \geq 0$ et que $x^*$ est une solution du problème PE, il suffit de choisir $y = x^{k+1}$ pour obtenir

$$f(x^*, y) \geq 0 \quad \forall y \in \mathcal{K}.$$

Nous pouvons donc conclure de l'inégalité (4.5) que la suite $\{l(x^k)\}_{k\in\mathbb{N}}$ est décroissante et bornée inférieurement par 0. Il existe donc un réel $l^*$ tel que $l(x^k) \longrightarrow l^*$ lorsque $k$ tend vers l'infini.

En passant à la limite dans l'inégalité (4.5), nous obtenons $x^k \longrightarrow x^*$. Ce qui conclut la preuve.
□

Passons à présent à la convergence de l'ALGORITHME 2. Celui-ci étant basé sur le premier la converge suit donc naturellement.

**THÉORÈME 2.2 :**
Supposons

1. $\mathcal{F} : \mathcal{K} \longrightarrow \mathbb{R}^n$ un opérateur fortement monotone de module $\alpha > 0$ sur $\mathcal{K}$,
2. $\mathcal{L}$ une fonction différentiable et fortement convexe de module $\beta > 0$ sur $\mathcal{K}$,
3. $\varepsilon > 0$ et l'existence de deux constantes $c > 0$ et $d > 0$ telles que pour tout $x, y, z \in \mathcal{K}$ on a :

$$\langle \mathcal{F}(y) - \mathcal{F}(x), z - y \rangle \geq -c \parallel y - x \parallel^2 - d \parallel z - y \parallel^2 .$$

Alors si

$$\varepsilon \leq \frac{\beta}{2d} \quad \text{et} \quad c < \alpha,$$

la suite $\{x^k\}_{k\in\mathbb{N}}$ générée par l'algorithme 2 converge vers la solution $x^* \in \mathcal{K}$ du GVI.

**Preuve :**

La preuve découle directement du théorème précédent en prenant

$$f(x, y) = \langle \mathcal{F}(x), y - x \rangle + \phi(y) - \phi(x),$$

et en remarquant que la troisième hypothèse provient de la cinquième du Théorème 2.1. En effet, en remplaçant $f$ dans

$$f(x, y) + f(y, z) \geq f(x, z) - c \parallel y - x \parallel^2 - d \parallel z - y \parallel^2,$$

on a :

$$\langle \mathcal{F}(x), y - x \rangle + \phi(y) - \phi(x) + \langle \mathcal{F}(y), z - y \rangle + \phi(z) - \phi(y)$$
$$\geq$$
$$\langle \mathcal{F}(x), z - x \rangle + \phi(z) - \phi(x) - c \parallel y - x \parallel^2 - d \parallel z - y \parallel^2$$

En simplifiant, on obtient :

$$\langle \mathcal{F}(x), y - x - z + x \rangle + \langle \mathcal{F}(y), z - y \rangle \geq -c \parallel y - x \parallel^2 - d \parallel z - y \parallel^2$$

Enfin, par les propriétés du produit scalaire, on a :

$$\langle \mathcal{F}(y) - \mathcal{F}(x), z - y \rangle \geq -c \parallel y - x \parallel^2 - d \parallel z - y \parallel^2 .$$

□

L'hypothèse 3 du Théorème 2.1 est vraie pour certaines valeurs de $c$ et $d$ pourvu que l'opérateur

$$\mathcal{F} : \mathcal{K} \longrightarrow \mathbb{R}^n$$

soit Lipschitz continu[1] de module $\mathcal{L} > 0$ sur $\mathcal{K}$.
Autrement dit, s'il existe une constante $\mathcal{L} > 0$ telle que pour tout $x, y \in \mathcal{K}$ :

$$\| \mathcal{F}(y) - \mathcal{F}(x) \| \leq \mathcal{L} \| y - x \| .$$

Enonçons et démontrons cette assertion.

**PROPOSITION 2.3 :**
Supposons $\mathcal{F} : \mathcal{K} \longrightarrow \mathbb{R}^n$ un opérateur Lipschitz continu de module $\mathcal{L} > 0$ sur $\mathcal{K}$.
Alors, s'il existe deux constantes $c$ et $d$ strictement positives telles que

$$\frac{1}{2}\mathcal{L} \leq \sqrt{cd},$$

on a pour tout $x, y, z \in \mathcal{K}$ :

$$\langle \mathcal{F}(y) - \mathcal{F}(x), z - y \rangle \geq -c \| y - x \|^2 - d \| z - y \|^2 .$$

**Preuve :**

Par les propriétés du produit scalaire, on a :

$$\begin{aligned}
\langle \mathcal{F}(y) - \mathcal{F}(x), z - y \rangle &\leq \| \mathcal{F}(y) - \mathcal{F}(x) \| . \| z - y \| \\
&\geq - \| \mathcal{F}(y) - \mathcal{F}(x) \| . \| z - y \| \\
&\geq -\mathcal{L} \| y - x \| . \| z - y \| \quad \textit{(par définition de Lipschitz continu)} \\
&\geq -2\sqrt{cd} \| y - x \| . \| z - y \| \quad \textit{(par hypothèse)} \\
&= -2\sqrt{c} \| y - x \| . \sqrt{d} \| z - y \| \\
&\geq -c \| y - x \|^2 - d \| z - y \|^2
\end{aligned}$$

La dernière inégalité vient de la relation suivante :

$$-a^2 - b^2 + 2ab \leq 0 \qquad \forall a, b.$$

en prenant $a = \sqrt{c} \| y - x \|$, et $b = \sqrt{d} \| z - y \|$

□

Passons maintenant à la convergence du troisième algorithme. Pour rappel, cet algorithme est basé sur une recherche linéaire.

[1] La définition est rappelée en annexe 1.

**THÉORÈME 2.4 :**
Soit $\mathcal{K}$ un ensemble convexe et compact de $\mathbb{R}^n$. On suppose $f(x,\cdot)$ une fonction
- strictement convexe par rapport à la variable $y$ pour tout $x \in \mathcal{K}$,
- différentiable par rapport à $x$, et
- telle que $\nabla_x f$ soit continue sur $\mathcal{K} \times \mathcal{K}$.

On suppose également la relation suivante :

$$\langle \nabla_x f(x,y) + \nabla_y f(x,y), y - x \rangle \geq 0 \quad \forall x, y \in \mathcal{K}.$$

Alors, quel que soit le point de départ $x^0 \in \mathcal{K}$, la suite $\{x^k\}_{k \in \mathbb{N}}$ générée par l'**ALGORITHME 3**, appartient à l'ensemble $\mathcal{K}$, et chaque point limite de cette suite est une solution du problème d'équilibre.

Terminons cette section par la convergence du dernier algorithme. Elle est une conséquence directe de la convergence de la méthode itérative précédente.

**THÉORÈME 2.5 :**
Soit $\mathcal{K}$ un ensemble convexe et compact de $\mathbb{R}^n$. On suppose $f(x,\cdot)$ une fonction
- strictement convexe par rapport à la variable $y$ pour tout $x \in \mathcal{K}$,
- différentiable par rapport à $x$, et
- telle que $\nabla_x f$ soit continue sur $\mathcal{K} \times \mathcal{K}$.

Soit $\mathcal{L}(\cdot,\cdot) : \mathcal{K} \times \mathcal{K} \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction de classe $C^1$ sur $\mathcal{K} \times \mathcal{K}$, positive, fortement convexe par rapport à son deuxième argument pour tout $x \in \mathcal{K}$ et telle que :

1. $\mathcal{L}(x,x) = 0 \qquad \forall x \in \mathcal{K}$
2. $\nabla_y \mathcal{L}(x,x) = 0 \qquad \forall x \in \mathcal{K}$

On suppose également la relation suivante :

$$\langle \nabla_x f(x,y) + \nabla_x \mathcal{L}(x,y) + \nabla_y f(x,y) + \nabla_y \mathcal{L}(x,y), y - x \rangle \geq 0 \quad \forall x, y \in \mathcal{K}.$$

Alors, quel que soit le point de départ $x^0 \in \mathcal{K}$, la suite $\{x^k\}_{k \in \mathbb{N}}$ générée par la recherche linéaire de l'**ALGORITHME 4**, appartient à l'ensemble $\mathcal{K}$, et chaque point limite de cette suite est une solution du problème d'équilibre.

Cette section nous permet de voir que quel que soit l'algorithme utilisé, la convergence est assurée.

CHAPITRE 5

# Les méthodes de projection

Dans ce chapitre, nous allons établir différentes méthodes de projection permettant de résoudre les problèmes d'équilibre. Nous nous attarderons en particulier sur **l'algorithme de l'extragradient**.

## 1 Le problème d'admissibilité convexe

Considérons le problème d'équilibre muni d'hypothèses supplémentaires. Celui-ci sera défini comme suit :

**DÉFINITION 1.1 :**
Soit $\mathcal{K}$ un ensemble fermé, non vide et convexe de $\mathbb{R}^n$ et une fonction $f : \mathcal{K} \times \mathcal{K} \to \mathbb{R}$ telle que

1. $f(x,x) = 0, \quad \forall x \in \mathcal{K},$
2. $f(x,\cdot) : \mathcal{K} \longrightarrow \mathbb{R}$ est convexe sur $\mathcal{K}$ pour tout $x \in \mathcal{K}$.

Le **problème d'équilibre** consiste à trouver

$$x^* \in \mathcal{K} \quad \text{tel que} \quad f(x^*,y) \geq 0 \quad \forall y \in \mathcal{K}.$$

En se rappelant de la définition du problème d'équilibre dual page 22, et grâce à la convexité de la seconde hypothèse de la définition ci-dessus, nous pouvons définir un ensemble convexe pour tout $y \in \mathcal{K}$. Celui-ci est défini comme suit :

$$L_f(y) := \{x \in \mathcal{K} : f(y,x) \leq 0\}. \tag{5.1}$$

Définissons à présent un nouveau problème pouvant s'avérer utile dans la recherche d'une solution du problème d'équilibre dual PE*.

**DÉFINITION 1.2 :**
Soit $\mathcal{K}$ un ensemble fermé, non vide et convexe de $\mathbb{R}^n$ et une fonction $f : \mathcal{K} \times \mathcal{K} \longrightarrow \mathbb{R}$, et soit $L_f(y) = \{x \in \mathcal{K} : f(y, x) \leq 0\}$ pour tout $y \in \mathcal{K}$.
**Le problème d'admissibilité convexe,** noté CFP[a], consiste à trouver $x^* \in \mathcal{K}$ tel que

$$x^* \in \bigcap_{y \in \mathcal{K}} L_f(y).$$

[a] Convex Feasability Problem

Notons que ce problème implique une infinité d'ensembles convexes fermés. En effet, par hypothèse $\mathcal{K}$ est un ensemble fermé et convexe et si cet ensemble n'est pas un singleton, son cardinal est alors infini.

Nous pouvons maintenant établir le lien entre les problèmes d'équilibre primal et dual et le problème CFP.

**PROPOSITION 1.1 :**
Soit $\mathcal{K}$ un ensemble fermé, non vide et convexe de $\mathbb{R}^n$ et une fonction $f : \mathcal{K} \times \mathcal{K} \longrightarrow \mathbb{R}$, et soit $L_f(y) = \{x \in \mathcal{K} : f(y, x) \leq 0\}$ pour tout $y \in \mathcal{K}$.

Alors $x^*$ est une solution du problème PE* si et seulement si $x^*$ est une solution du problème CFP.

En d'autres termes, cela signifie que l'ensemble des solutions du problème PE*, noté SOL(PE*), est à l'intersection d'une famille d'ensembles convexes.
On a alors que l'ensemble des solutions du problème d'équilibre dual est fermé et convexe si $f(y, \cdot)$ est une fonction convexe fermée[1] sur $\mathcal{K}$.
D'autre part, l'ensemble des solutions du problème PE, noté SOL(PE), peut quant à lui, ne pas être convexe. Cependant, si $f$ est semi-continue par rapport au premier argument et fermée et convexe sur $\mathcal{K}$ par rapport au second argument, alors dans ce cas, l'ensemble solution du problème PE est convexe.

**THÉORÈME 1.2 :**
Soit $\mathcal{K}$ un ensemble fermé, non vide et convexe de $\mathbb{R}^n$ et une fonction $f : \mathcal{K} \times \mathcal{K} \longrightarrow \mathbb{R}$. Supposons $f$ hemi-continue[a] par rapport au premier argument et semi-continue inférieurement et convexe sur $\mathcal{K}$ par rapport au second argument.

Alors l'ensemble solution du problème CFP est un sous ensemble de l'ensemble solution du problème PE, c'est-à-dire :

$$\text{SOL(CFP)} \subseteq \text{SOL(PE)}.$$

De plus, si $f$ est pseudo-monotone[b] sur $\mathcal{K}$, alors la réciproque est vraie et on a :

$$\text{SOL(CFP)} = \text{SOL(PE)}.$$

[a] La définition est rappelée dans l'annexe 2.
[b] La définition de pseudo-monotonicité est rappelée en l'annexe 1.

[1] Une fonction fermée est une fonction semi-continue inférieurement.

**Preuve :**

Soit $x^*$ une solution du problème CFP pour tout $y \in \mathcal{K}$. Définissons, pour tout $t \in ]0,1[$, $z_t \in \mathcal{K}$ tel que $z_t = ty + (1-t)x^*$. (1)
Pour chaque $t \in ]0,1[$, on a :

$$\begin{aligned} 0 &= f(z_t, z_t) \quad \text{par définition d'une fonction d'équilibre} && (5.2)\\ &= f(z_t, ty + (1-t)x^*) \quad \text{par (1)} && (5.3)\\ &\leq tf(z_t, y) + (1-t)f(z_t, x^*) \quad \text{par convexité de } f && (5.4) \end{aligned}$$

Puisque

$$x^* \in \bigcap_{y \in \mathcal{K}} L_f(y) = \bigcap_{y \in \mathcal{K}} \{x \in \mathcal{K} : f(y,x) \leq 0\},$$

et $y = z_t \in \mathcal{K}$, on obtient pour tout $t \in ]0,1[$ :

$$f(z_t, x^*) \leq 0.$$

Donc, pour tout $t \in ]0,1[$ et pour tout $y \in \mathcal{K}$, par les équations (1), (4.1), (4.2) et (4.3), on a :

$$0 \leq tf(z_t, y) = f(ty + (1-t)x^*, y) = f(x^* + t(y - x^*), y).$$

En passant à la limite lorsque $t$ tend vers 0, on conclut par la continuité de $f$ que

$$0 \leq f(x^*, y) \qquad \forall y \in \mathcal{K}.$$

C'est-à-dire que $x^*$ est solution du problème PE.

Passons à la preuve de l'égalité entre les ensembles lorsque $f$ est pseudo-monotone.
Grâce à ce qui vient d'être démontré, nous devons montrer que

$$\text{SOL(CFP)} \supseteq \text{SOL(PE)}.$$

Or, par la proposition 1.1, on sait que

$$\text{SOL(CFP)} = \text{SOL(PE*)}.$$

Donc, il nous rester à prouver

$$\text{SOL(PE)} \subseteq \text{SOL(PE*)},$$

c'est-à-dire

$$f(x^*, y) \geq 0 \Longrightarrow f(y, x^*) \leq 0 \quad \forall y \in \mathcal{K}.$$

Cette implication est immédiate en appliquant la définition de pseudo-monotonicité.

$\square$

Illustrons, par deux contre-exemples, que si la fonction $f$ n'est pas peudo-monotone, alors nous n'avons pas

$$\text{SOL(CFP)} \supseteq \text{SOL(PE)}.$$

EXEMPLE 1.1 :
**Soit** $K = [0,2]$ **et** $f(x,y) = (x-y)^2$.

Les solutions du problème d'équilibre sont l'ensemble des $x^* \in [0,2]$ tels que $f(x^*,y) \geq 0$.
Or, la fonction $f(x,y) = (x-y)^2$ est positive ou nulle pour tout $x^* \in [0,2]$. D'où

$$SOL(PE) = [0,2].$$

Calculons à présent l'ensemble SOL(CFP). Pour cela, nous devons déterminer l'ensemble $L_f(y) = \{x \in [0,2] : f(y,x) \leq 0\}$, et trouver $x^* \in \bigcap_{y \in [0,2]} L_f(y)$.
On a alors :

$$\begin{aligned} L_f(y) &= \{x \in [0,2] : f(y,x) \leq 0\} \\ &= \{x \in [0,2] : (y-x)^2 \leq 0\} \\ &= \{x \in [0,2] : y - x = 0\} \\ &= \{x \in [0,2] : y = x\} \end{aligned}$$

Pour un $x$ fixé, il est impossible de trouver un $y \in [0,2]$ tel que

$$y = x \qquad \forall y \in [0,2].$$

Donc

$$SOL(CFP) = \emptyset$$

Puisque $[0,2]$ n'est pas inclus dans l'ensemble vide, on a bien que SOL(PE) ne contient pas SOL(CPF).

Terminons cette section par un dernier contre-exemple impliquant une valeur absolue.

EXEMPLE 1.2 :
**Soit** $K = [0,2]$ **et** $f(x,y) = \max\{0, |x-y| - 1\}$.

La résolution s'effectue en deux parties. Montrons d'abord que $x = 1$ est solution de l'intersection sur $y \in [0,2]$ de $L_f(y)$, autrement dit :

$$\bigcap_{y \in [0,2]} L_f(y) = \{1\},$$

où

$$L_f(y) = \{x \in [0,2] : \max\{0, |x-y| - 1\} \leq 0\}.$$

Ensuite, il nous restera à montrer que cette solution $x = 1$ est unique.

Nous avons les équivalences suivantes :

$$\begin{aligned} f(x,y) \leq 0 &\iff \max\{0, |x-y|-1\} \leq 0\} \\ &\iff |x-y|-1 \leq 0 \\ &\iff |x-y| \leq 1. \end{aligned}$$

On peut donc réécrire $L_f(y)$ comme :

$$\begin{aligned} L_f(y) &= \{x \in [0,2] : -1 \leq x-y \leq 1\} \\ &= [y-1, y+1] \cap [0,2] \end{aligned}$$

Puisque $1 \in [0,2]$ et $y-1 \underbrace{\leq}_{\text{car } y\leq 2} 1 \underbrace{\leq}_{\text{car } y \geq 0} y+1$, on a :

$$1 \in L_f(y), \qquad \forall y \in [0,2].$$

Il nous reste à prouver que $x = 1$ est l'unique point appartenant à l'intersection. Pour cela, supposons :

$$x \in \bigcap_{y\in[0,2]} L_f(y).$$

On a alors $x \in [0,2]$ et $y-1 \leq x \leq y+1$ pour tout $y \in [0,2]$. Donc,

$$\begin{cases} -1 \leq x \leq 1, & \text{si} \quad y = 0 \\ 1 \leq x \leq 3, & \text{si} \quad y = 2 \end{cases}$$

Ce qui signifie que $x = 1$ est bien l'unique solution. D'où

$$\bigcap_{y\in[0,2]} L_f(y) = \{1\}.$$

Voyons maintenant quelles sont les solutions du problème PE, c'est-à-dire quels sont les points $x^*$ qui vérifient

$$f(x^*, y) \geq 0 \qquad \forall y \in [0,2].$$

ou encore

$$\max\{0, |x-y|-1\} \geq 0 \qquad \forall y \in [0,2].$$

Il est évident que l'ensemble des solutions est dans $[0,2]$.
En effet, si la valeur de $|x-y|-1$ est positive, alors le maximum entre cette valeur et 0 sera positif. De même si la valeur est négative, le maximum sera alors 0 et la fonction restera positive.

Nous confirmons une nouvelle fois notre théorème puisque l'intervalle $[0,2]$ n'est pas inclus dans le singleton $\{1\}$.

Maintenant que L'ALGORITHME DE L'EXTRAGRADIENT a été étudié, passons aux différentes méthodes de projections permettant de résoudre les problèmes d'équilibre.

## 2 Une première méthode de projection : La méthode de projection exacte pour les problèmes d'équilibre

Les méthodes de projections sont les outils les plus utilisés pour résoudre les problèmes CFP. Nous utiliserons ici une méthode de projections successives. Celle-ci est définie comme suit :

**DÉFINITION 2.1 :**
Soient $x^0$ un point initial et un point $x^k$ donné, et soient un ensemble $L_f(y^k)$ choisi ainsi qu'un pas $t^k$. **Les méthodes de projections successives** construisent une suite $\{x^k\}_{k\geq 0} \subset \mathbb{R}^n$ à partir de $x^0$ tel que le pas soit fait dans la direction de la projection orthogonale de $x^k$ sur $L_f(y^k)$, c'est-à-dire :

$$x^{k+1} = x^k + t_k \left[P_{L_f(y^k)}(x^k) - x^k\right],$$

où $P_{L_f(y^k)}$ représente la projection orthogonale sur $L_f(y^k)$ pour tout $y \in \mathcal{K}$, et où $\{t_k\}_{k\geq 0} \subset [\alpha, 2-\alpha]$ est une suite de paramètres de relaxation donnés pour tout $\alpha \in ]0,1[$.

Lorsqu'il y a un nombre très grand d'ensembles convexes, **une stratégie de contrôle** pour la suite $\{y^k\}_{k\geq 0}$ doit être mise en place. Celle-ci est définie comme suit :

**DÉFINITION 2.2 :**
**Le contrôle de la contrainte la plus violée** mesure la proximité de $x^k$ à un ensemble par la valeur de la fonction $f(\cdot, x^k)$ et non pas par la distance euclidienne. Autrement dit, $y^k \in K$ est choisi de sorte que

$$f(y^k, x^k) = \max_{y\in\mathcal{K}} f(y, x^k).$$

Décrivons à présent l'algorithme de cette méthode. Nous verrons que celui-ci est bien défini et nous en étudierons la convergence.

ALGORITHME DE LA MÉTHODE DE PROJECTION EXACTE POUR LE PROBLÈME PE

*Pas 0 : initialisation*
*Soit* $k = 0$, $\varepsilon_k \geq 0$, $t_k > 0$, $x^0 \in \mathcal{K}$ *un point initial et* $r_0 = ||x^0||$.

*Pas 1*
*Soient* $x^k$ *et* $r_k$ *donnés, et choisir* $\varepsilon_k \geq 0$ *et* $t_k > 0$.

1. *Définir*

$$\mathcal{K}_k = \{x \in \mathcal{K} : ||x|| \leq r_k + 1\}.$$

2. *Rechercher* $y^k \in \mathcal{K}_k$ *qui vérifie la* ***maximisation inexacte*** *:*

$$\max_{y \in \mathcal{K}_k} f(y, x^k) - \varepsilon_k \leq f(y^k, x^k).$$

3. *Calculer* $x^{k+1}$ *:*

$$x^{k+1} = x^k + t_k \left[ P_{L_f(y^k)}(x^k) - x^k \right].$$

4. *Mettre à jour* $k = k + 1$ *et* $r_k$ *:*

$$r_{k+1} = \max\{r_k, ||x^{k+1}||\}.$$

Cet algorithme génère deux suites $\{x^k\}_{k\geq 0}$ et $\{y^k\}_{k\geq 0}$ incluses dans $\mathcal{K}$. Il demande également une suite de paramètres de précision finis et strictement positifs $\{\varepsilon_k\}_{k\geq 0}$ tels que $\lim_{k\to\infty} \varepsilon_k = 0$ pour la maximisation inexacte.
De plus, cet algorithme est bien défini comme le montre la proposition suivante :

PROPOSITION 2.1 :
L'ALGORITHME DE PROJECTION EXACTE POUR LA RÉSOLUTION DE PROBLÈMES PE est bien défini.

**Preuve :**

Pour prouver que l'algorithme est bien défini, nous devons montrer que la maximisation inexacte ainsi que le point $x^{k+1}$ sont bien définis.

Commençons par démontrer que la maximisation inexacte est bien définie.
Par définition de $\mathcal{K}_k$ et de $r_{k+1}$, on a pour tout $k \in \mathbb{N}$ :

$$\mathcal{K}_k \subset \mathcal{K}_{k+1}.$$

Etant donné que $x^0 \in \mathcal{K}$ et que $||x^0|| \leq r_0 + 1$, nous pouvons déduire que $x^0 \in \mathcal{K}_0$. Et donc

$$x^0 \in \mathcal{K}_k \quad \forall k \in \mathbb{N}.$$

Puisque $\mathcal{K}$ est fermé, nous avons que chaque $\mathcal{K}_k$ est non vide et compacte. De plus, par la continuité de $f$, $f(\cdot, y^k)$ atteint son maximum sur $\mathcal{K}$. Ce qui nous montre qu'il existe un $y^k$ qui satisfait la maximisation inexacte.

Montrons à présent que $x^{k+1}$ est bien défini.

Puisque $f(y^k, \cdot)$ est convexe et puisque $\mathcal{K}$ est convexe et fermé, l'ensemble non vide

$$L_{f(y^k)} = \{x \in \mathcal{K} : f(y^k, x) \leq 0\}$$

est fermé et convexe. Donc $x^{k+1}$ est défini de façon unique par

$$x^{k+1} = x^k + t_k \left[P_{L_{f(y^k)}}(x^k) - x^k\right].$$

□

Maintenant que nous avons prouvé que notre algorithme était bien défini, nous pouvons passer à l'étude de la convergence de celui-ci :

**THÉORÈME 2.2 :**
Soient $\{x^k\}_{k\geq 0}$ et $\{y^k\}_{k\geq 0} \subset \mathcal{K}$ deux suites générées par l'algorithme. Alors

1. Si
$$\bigcap_{k=0}^{\infty} L_{f(y^k)} \neq \emptyset,$$
alors la suite entière $\{x^k\}_{k\geq 0}$ converge vers une solution du problème PE.
2. Si le problème PE n'a pas de solution, alors la suite $\{x^k\}_{k\geq 0}$ n'est pas convergente.

Voyons à présent ce que devient la convergence lorsque que le problème est un problème CFP :

**CORROLAIRE 2.1 :**
Si le problème CFP admet des solutions, alors la suite $\{x^k\}_{k\geq 0}$ générée par l'algorithme converge vers une solution du problème PE.

**Preuve :**

Par hypothèse, nous savons que le problème CFP admet des solutions ce qui signifie que

$$\bigcap_{y\in\mathcal{K}} L_f(y) \neq \emptyset.$$

Donc

$$\bigcap_{k=0}^{\infty} L_f(y^k) \neq \emptyset,$$

puisque

$$\bigcap_{y\in\mathcal{K}} L_f(y) \subset \bigcap_{k=0}^{\infty} L_f(y^k).$$

Or, par le théorème 2.2 nous savons que si $\bigcap_{k=0}^{\infty} L_f(y^k) \neq \emptyset$, alors $\{x^k\}_{k\geq 0}$ converge vers une solution du problème PE.

□

Terminons cette section par un dernier résultat de convergence utilisant l'hypothèse de pseudo-monotonicité de la fonction $f$.

**CORROLAIRE 2.2 :**
Soient $\{x^k\}_{k\geq 0}$ et $\{y^k\}_{k\geq 0} \subset \mathcal{K}$ deux suites générées par l'algorithme. Si la fonction $f$ est pseudo-monotone et si l'une des deux suites $\{x^k\}_{k\geq 0}$ et $\{y^k\}_{k\geq 0}$ est bornée, alors la suite $\{x^k\}_{k\geq 0}$ converge vers une solution du problème PE.

Détaillons à présent un nouvel algorithme, dans lequel interviennent deux projections.

## 3 L'algorithme de l'extragradient

Dans le chapitre précédent, nous avons établi différents algorithmes utilisés dans la résolution de problème PE. Ces méthodes présentaient néanmoins un gros défaut : la convergence n'était assurée que sous des hypothèses restrictives telle que la forte monotonicité. Le nouvel algorithme que nous allons maintenant exposer converge sous l'hypothèse de pseudo-monotonicité. L'avantage de cette méthode est que la pseudo-monotonicité est plus faible que le forte monotonicité.

Tout au long de cette section, nous allons supposer un ensemble non vide, convexe et fermé $\mathcal{K}$ et une fonction $f(x, \cdot)$ fermée, convexe et sous-différentiable sur $\mathcal{K}$ pour tout $x \in \mathcal{K}$. Grâce à ces hypothèses, les sous-problèmes qui devront être résolus dans cet algorithme seront des problèmes convexes avec des fonctions objectifs fortement convexes. Nous avons alors l'unicité de la solution.

La **méthode de l'extragradient**, appelée aussi **méthode de double projection**, construit deux suites $\{x^k\}$ et $\{y^k\}$ via deux projections euclidiennes sur l'ensemble convexe $\mathcal{K}$. Ces suites sont définies comme suit :

$$y^k = P_{\mathcal{K}}\left(x^k - \varepsilon F(x^k)\right)$$

et

$$x^{k+1} = P_{\mathcal{K}}\left(x^k - \varepsilon F(y^k)\right).$$

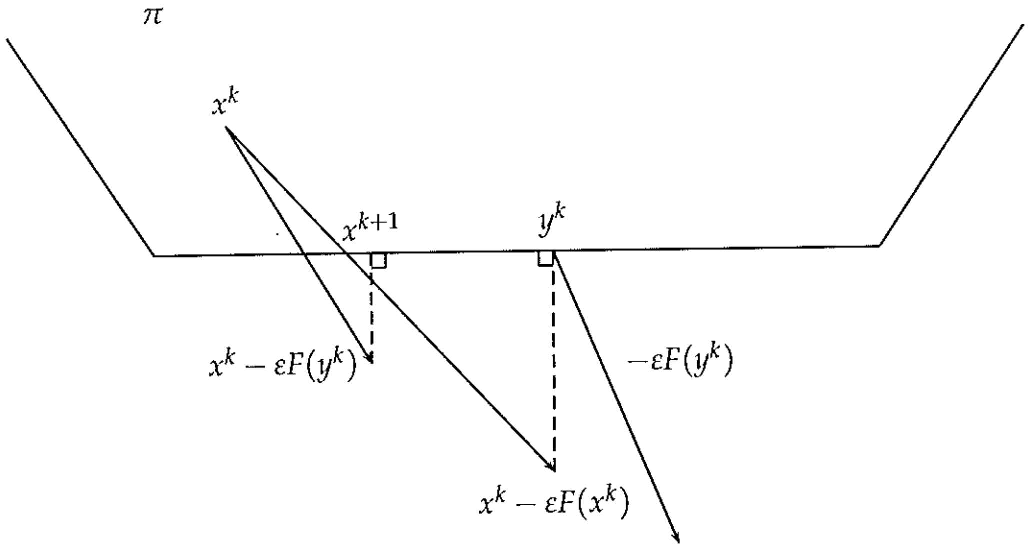



**Fig. 5.1** – *Représentation des deux projections de la méthode de l'extragradient.*

Maintenant que tout a été exposé, nous pouvons décrire **l'algorithme de l'extragradient :**

| ALGORITHME DE L'EXTRAGRADIENT |
|---|
| ***Pas 0 : initialisation*** <br> *Soient* $k = 0$, $x^0 \in \mathcal{K}$ *un point initial et* $\varepsilon > 0$ *une tolérance fixée.* <br><br> ***Pas 1*** <br> *Résoudre le problème fortement convexe :* <br> $$\min_{y \in \mathcal{K}} \left\{ \varepsilon f(x^k, y) - \langle \nabla \mathcal{L}(x^k), y - x^k \rangle + \mathcal{L}(y) \right\}, \tag{5.1}$$ <br> *afin d'obtenir la solution optimale unique* $y^k$. <br><br> *Si le critère d'arrêt* $y^k = x^k$ *est vérifié, alors* STOP : $x^k$ *est la solution optimale du problème PE.* <br> *Sinon passer au* ***Pas 2***. <br><br> ***Pas 2*** <br> *Résoudre le problème fortement convexe :* <br> $$\min_{y \in \mathcal{K}} \left\{ \varepsilon f(y^k, y) - \langle \nabla \mathcal{L}(x^k), y - x^k \rangle + \mathcal{L}(y) \right\},$$ <br> *afin d'obtenir la solution optimale unique* $x^{k+1}$. <br><br> ***Pas 3*** <br> *Mettre à jour* $k = k + 1$ *et retourner au* ***Pas 1***. |

Etudions à présent la convergence de cet algorithme. Celle-ci dépend du paramètre $\varepsilon$. Avant d'établir le théorème de convergence, démontrons que si l'algorithme s'arrête après un nombre fini d'itérations, cela signifie que la solution du problème PE a été trouvée.

**LEMME 3.1 :**
Si L'ALGORITHME DE L'EXTRAGRADIENT se termine à n'importe quelle itération $x^k$, alors $x^k$ est solution du problème PE.

**Preuve :**

Soit $y^k = x^k$. Puisque $f(x^k, x^k) = 0$, on a :

$$0 = \varepsilon f(x^k, y^k) + \mathcal{L}(y^k) - \mathcal{L}(x^k) - \langle \nabla \mathcal{L}(x^k), y^k - x^k \rangle.$$

Or, $y$ est le minimum de l'équation 5.1. D'où :

$$0 \leq \varepsilon f(x^k, y) + \mathcal{L}(y) - \mathcal{L}(x^k) - \langle \nabla \mathcal{L}(x^k), y - x^k \rangle \qquad \forall y \in \mathcal{K}.$$

Ce qui signifie que $x^k$ est une solution du problème AuxEP (voir page 29).
Or on sait, par le théorème 3.2 de la page 28, que $x^k$ est solution du problème AuxEP si et seulement si $x^k$ est solution du problème PE.
D'où la thèse.

□

Afin de clôturer cette section, il nous reste à établir et à démontrer la convergence de L'ALGORITHME DE L'EXTRAGRADIENT.

**THÉORÈME 3.1 :**
Soient :

a) une fonction $\mathcal{L}$ fortement convexe de modue $\alpha > 0$ et de classe $C^1$ sur un ensemble ouvert $\Omega \supseteq \mathcal{K}$

b) deux constantes $c_1 > 0$ et $c_2 > 0$ telles que

$$f(x,y) + f(y,z) \geq f(x,z) - c_1||y-x||^2 - c_2||z-y||^2 \qquad \forall x,y,z \in \mathcal{K}. \tag{5.2}$$

Alors

1. pour tout $x^* \in$ SOL(PE*), on a :

$$l(x^k) - l(x^{k+1}) \geq \left(\frac{\alpha}{2} - \varepsilon c_1\right) ||y^k - x^k||^2 - \left(\frac{\alpha}{2} - \varepsilon c_2\right) ||x^{k+1} - y^k||^2, \tag{5.3}$$

   où $l(y) := \mathcal{L}(x^*) - \mathcal{L}(y) - \langle \nabla \mathcal{L}(y), x^* - y \rangle \qquad \forall y \in \mathcal{K}$.

2. de plus, si nous ajoutons les hypothèses suivantes :
   (a) $f$ est semi-continue inférieurement[a] sur $\mathcal{K} \times \mathcal{K}$,
   (b) $f(\cdot, y)$ est semi-continue supérieurement sur $\mathcal{K}$,
   (c) $0 < \varepsilon < \min\left(\frac{\alpha}{2c_1} \frac{\alpha}{2c_2}\right)$

   alors la suite $\{x^k\}$ est bornée et tout point d'accumulation de $\{x^k\}$ est solution de problème PE.

   De plus, si SOL(PE) = SOL(PE*), c'est-à-dire si $f$ est pseudo-monotone sur $\mathcal{K}$, alors la suite $\{x^k\}$ converge vers une solution du problème PE* et donc du problème PE.

[a] La définition est rappelée en annexe 2.

**Preuve :**

1.

Soit $x^* \in$ SOL(PE*).
Par définition de la fonction $l$ et puisque $x^k$ et $x^{k+1} \in \mathcal{K}$, on a :
$l(x^k) - l(x^{k+1}) =$

$$= \mathcal{L}(x^*) - \mathcal{L}(x^k) - \langle \nabla\mathcal{L}(x^k), x^* - x^k \rangle - \mathcal{L}(x^*) + \mathcal{L}(x^{k+1}) + \langle \nabla\mathcal{L}(x^{k+1}), x^* - x^{k+1} \rangle \tag{5.4}$$

$$= \mathcal{L}(x^{k+1}) - \mathcal{L}(x^k) - \langle \nabla\mathcal{L}(x^k), x^* - x^k \rangle + \langle \nabla\mathcal{L}(x^{k+1}), x^* - x^{k+1} \rangle$$
$$= \mathcal{L}(x^{k+1}) - \mathcal{L}(x^k) + \langle \nabla\mathcal{L}(x^{k+1}) - \nabla\mathcal{L}(x^k), x^* - x^{k+1} \rangle - \langle \nabla\mathcal{L}(x^k), x^{k+1} - x^k \rangle.$$

En utilisant les conditions nécessaires et suffisantes d'optimalité pour un problème convexe (rappelées page 12), on obtient que $x^{k+1}$ résoud le problème convexe suivant :

$$\min_{y \in \mathcal{K}} \left\{ \varepsilon f(y^k, y) + \mathcal{L}(y) - \mathcal{L}(x^k) - \langle \nabla\mathcal{L}(x^k), y - x^k \rangle \right\}. \tag{5.5}$$

Rappelons une propriété importante du cône normal : $x^* \in \mathcal{K}$ est un minimum d'une fonction $f$ de classe $C^1$ si et seulement si

$$\nabla f(x^*) \in -N_{\mathcal{K}}(x^*),$$

ou de manière équivalente si et seulement si

$$0 \in \nabla f(x^*) + N_{\mathcal{K}}(x^*).$$

L'équation 5.5 est alors équivalente à

$$0 \in \partial_y \left\{ \varepsilon f(y^k, x^{k+1}) + \mathcal{L}(x^{k+1}) - \mathcal{L}(x^k) - \langle \nabla\mathcal{L}(x^k), x^{k+1} - x^k \rangle \right\} + N_{\mathcal{K}}(x^{k+1}).$$

Par hypothèse $f(y^k, \cdot)$ est sous différentiable et $\mathcal{L}$ est fortement convexe et différentiable sur $\mathcal{K}$. On a donc :

$$0 \in \varepsilon\partial f(y^k, \cdot)(x^{k+1}) + \nabla\mathcal{L}(x^{k+1}) - \nabla\mathcal{L}(x^k) + N_{\mathcal{K}}(x^{k+1}).$$

Par les conditions d'optimalité, il existe $w \in \partial_y f(y^k, x^{k+1})$ tel que

$$0 \in \varepsilon w + \nabla\mathcal{L}(x^{k+1}) - \nabla\mathcal{L}(x^k) + N_{\mathcal{K}}(x^{k+1}).$$

et par la définition du cône normal, on peut réécrire cette équation comme :

$$\langle -\varepsilon w - \nabla\mathcal{L}(x^{k+1}) + \nabla\mathcal{L}(x^k) - x^{k+1}, y - x^{k+1} \rangle \leq 0 \qquad \forall y \in \mathcal{K}.$$

Ce qui nous donne, par les propriétés du produit scalaire :

$$\langle \nabla\mathcal{L}(x^{k+1}) - \nabla\mathcal{L}(x^k), y - x^{k+1} \rangle \geq \varepsilon \langle w, x^{k+1} - y \rangle \qquad \forall y \in \mathcal{K}.$$

Par définition du sous-gradient[1], en prenant comme fonction $f$ la fonction $f(y^k, \cdot)$, on déduit de l'inégalité précédente :

$$\langle \nabla \mathcal{L}(x^{k+1}) - \nabla \mathcal{L}(x^k), y - x^{k+1} \rangle \geq \varepsilon f(y^k, x^{k+1}) - \varepsilon f(y^k, y).$$

En effet, étant donné que $w \in \partial f(y^k, \cdot)(x^{k+1})$, on a que $w$ est le sous gradient de $f(y^k, \cdot)$ au point $x^{k+1}$ si et seulement si :

$$f(y^k, y) \geq f(y^k, x^{k+1}) + \langle w, y - x^{k+1} \rangle,$$

ou de manière équivalente :

$$\langle w, x^{k+1} - y \rangle \geq (y^k, x^{k+1}) - f(y^k, y).$$

En prenant $y = x^*$, on a :

$$\langle \nabla \mathcal{L}(x^{k+1}) - \nabla \mathcal{L}(x^k), x^* - x^{k+1} \rangle \geq \varepsilon f(y^k, x^{k+1}) - \varepsilon f(y^k, x^*).$$

Puique $x^*$ est solution du problème PE*, c'est-à-dire puisque $x^*$ vérifie $f(y^k, x^*) \leq 0$ pour tout $y \in \mathcal{K}$, l'inégalité devient :

$$\langle \nabla \mathcal{L}(x^{k+1}) - \nabla \mathcal{L}(x^k), x^* - x^{k+1} \rangle \geq \varepsilon f(y^k, x^{k+1}). \tag{5.6}$$

Nous allons à présent utiliser l'inéquation 5.2 où $x = x^k$, $y = y^k$ et $z = x^{k+1}$. On obtient alors :

$$f(y^k, x^{k+1}) \geq f(x^k, x^{k+1}) - f(x^k, y^k) - c_1 ||y^k - x^k||^2 - c_2 ||x^{k+1} - y^k||^2.$$

Ce qui nous donne, en remplaçant dans l'inégalité 5.6 :

$$\begin{aligned} \langle \nabla \mathcal{L}(x^{k+1}) - \nabla \mathcal{L}(x^k), x^* - x^{k+1} \rangle \quad \geq \quad & \varepsilon f(x^k, x^{k+1}) - \varepsilon f(x^k, y^k) \\ & - \varepsilon c_1 ||y^k - x^k||^2 - \varepsilon c_2 ||x^{k+1} - y^k||^2. \end{aligned} \tag{5.7}$$

D'autre part, par le **Pas 1** de l'algorithme, puisque $y^k$ est la solution du programme convexe

$$\min_{y \in \mathcal{K}} \left\{ \varepsilon f(x^k, y) + \mathcal{L}(y) - \mathcal{L}(x^k) - \langle \nabla \mathcal{L}(x^k), y - x^k \rangle \right\},$$

on a :

$$0 \in \partial_y \left\{ \varepsilon f(x^k, x^{k+1}) + \mathcal{L}(y^k) - \mathcal{L}(x^k) - \langle \nabla \mathcal{L}(x^k), y^k - x^k \rangle \right\} + N_{\mathcal{K}}(y^k).$$

Par le même procédé qui a été établi avec $x^{k+1}$ comme solution du problème, on peut démontrer :

$$\langle \nabla \mathcal{L}(y^k) - \nabla \mathcal{L}(x^k), y^k - y \rangle \leq \varepsilon f(x^k, y) - \varepsilon f(x^k, y^k) \qquad \forall y \in \mathcal{K}.$$

En prenant $y = x^{k+1}$, on obtient :

$$\langle \nabla \mathcal{L}(y^k) - \nabla \mathcal{L}(x^k), y^k - x^{k+1} \rangle \leq \varepsilon f(x^k, x^{k+1}) - \varepsilon f(x^k, y^k) \qquad \forall y \in \mathcal{K}.$$

[1] La notion de sous-gradient est rappelée en annexe 2.

Par l'inégalité ci-dessus et les inégalités 5.4 et 5.7, on a
$l(x^k) - l(x^{k+1}) \geq$

$$\begin{aligned}
&\geq \mathcal{L}(x^{k+1}) - \mathcal{L}(x^k) - \langle \nabla\mathcal{L}(y^k), x^{k+1} - x^k\rangle + \langle \nabla\mathcal{L}(y^k) - \nabla\mathcal{L}(x^k), y^k - x^{k+1}\rangle \qquad (5.8)\\
&\quad -\varepsilon c_1||y^k - x^k||^2 - \varepsilon c_2||x^{k+1} - y^k||^2\\
&\geq \mathcal{L}(x^{k+1}) - \mathcal{L}(x^k) - \langle \nabla\mathcal{L}(x^k), y^k - x^k\rangle + \langle \nabla\mathcal{L}(y^k), y^k - x^{k+1}\rangle\\
&\quad -\varepsilon c_1||y^k - x^k||^2 - \varepsilon c_2||x^{k+1} - y^k||^2\\
&\geq \left[\mathcal{L}(x^{k+1}) - \mathcal{L}(y^k) - \langle \nabla\mathcal{L}(y^k), x^{k+1} - y^k\rangle\right] + \left[\mathcal{L}(y^k) - \mathcal{L}(x^k) - \langle \nabla\mathcal{L}(x^k), y^k - x^k\rangle\right]\\
&\quad -\varepsilon c_1||y^k - x^k||^2 - \varepsilon c_2||x^{k+1} - y^k||^2.
\end{aligned}$$

Puisque $\mathcal{L}$ est fortement convexe de module $\alpha > 0$, on a alors :

$$\mathcal{L}(y) - \mathcal{L}(x) - \langle \nabla\mathcal{L}(x), y - x\rangle \geq \frac{\alpha}{2}||y - x||^2 \qquad \forall x, y \in \mathcal{K}.$$

En appliquant une première fois cette inégalité avec $x^{k+1}$ et $y^k$ et une seconde fois avec $y^k$ et $x^k$, on obtient par l'inégalité 5.8 :

$$l(x^k) - l(x^{k+1)} \geq \left(\frac{\alpha}{2} - \varepsilon c_1\right)||y^k - x^k||^2 + \left(\frac{\alpha}{2} - \varepsilon c_2\right)||x^{k+1} - y^k||^2 \qquad \forall k \geq 0. \qquad (5.9)$$

Ce qui termine la démonstration du point 1.

Passons maintenant à la preuve de la seconde partie du théorème.

2.

Par hypothèse, nous avons $0 < \varepsilon < \min\left(\frac{\alpha}{2c_1}\frac{\alpha}{2c_2}\right)$. D'où

$$\varepsilon < \frac{\alpha}{2c_1} \quad \text{et} \quad \varepsilon < \frac{\alpha}{2c_2},$$

c'est-à-dire

$$\varepsilon c_1 < \frac{\alpha}{2} \quad \text{et} \quad \varepsilon c_2 < \frac{\alpha}{2},$$

ou encore

$$\frac{\alpha}{2} - \varepsilon c_1 > 0 \quad \text{et} \quad \frac{\alpha}{2} - \varepsilon c_2 > 0.$$

On peut déduire de l'ingalité 5.9 que

$$l(x^k) - l(x^{k+1}) \geq \left(\frac{\alpha}{2} - \varepsilon c_1\right)||y - x||^2 \geq 0 \qquad \forall k. \qquad (5.10)$$

Donc puisque $l(x^k) \geq l(x^{k+1})$, on peut conclure que la suite $\{l(x^k)_{k\geq 0}\}$ est décroissante. De plus, puisqu'elle est bornée inférieurement par 0, elle converge vers $l^*$. En passant à la limite lorsque $k \longrightarrow \infty$ dans l'inégalité 5.10, on obtient :

$$\lim_{k\longrightarrow\infty} ||y^k - x^k|| = 0. \qquad (5.11)$$

On sait également que $\mathcal{L}$ est fortement convexe de module $\alpha$, donc par définition de $l(x^k)$ on peut écrire :

$$0 \leq \frac{\alpha}{2}||x^* - x^k||^2 \leq l(x^k).$$

Or, puisque nous avons vu que la suite $\{l(x^k)_{k\geq 0}\}$ était convergente, nous pouvons en déduire que la suite $\{x^k\}_{k\geq 0}$ est bornée et qu'elle admet donc au moins un point d'accumulation.
Soit $\overline{x} \in \mathcal{K}$ un de ces points d'accumulation et $\left\{x^{k_i}_{i\geq 0}\right\}$ une sous-suite telle que

$$\lim_{i\longrightarrow\infty} x^{k_i} = \overline{x}.$$

De l'équation 5.11, il suit que

$$\lim_{i\longrightarrow\infty} y^{k_i} = \overline{x}.$$

Reprenons à présent le **Pas 1** de l'algorithme avec $y^{k_i}$ la solution du problème fortement convexe. On a alors :

$$\begin{aligned} \varepsilon f(x^{k_i}, y) - \langle \nabla\mathcal{L}(x^k), y - x^k\rangle + \mathcal{L}(y) - \mathcal{L}(x^{k_i}) \geq \; & \varepsilon f(x^{k_i}, y^{k_i}) - \langle \nabla\mathcal{L}(x^k), y^{k_i} - x^k\rangle \\ & + \mathcal{L}(y^{k_i}) - \mathcal{L}(x^{k_i}) \qquad \forall y \in \mathcal{K}. \end{aligned}$$

On sait par hypothèse que $f$ est semi-continue inférieurement sur $\mathcal{K} \times \mathcal{K}$, $f(\cdot, y)$ est semi-continue supérieurement sur $\mathcal{K}$ et $f(\overline{x}, \overline{x}) = 0$. En passant à la limite dans l'inégalité précédente lorsque $i \longrightarrow \infty$, on obtient :

$$\varepsilon f(\overline{x}, y) - \langle \nabla\mathcal{L}(\overline{x}), y - \overline{x}\rangle + \mathcal{L}(y) - \mathcal{L}(\overline{x}) \geq 0 \qquad \forall y \in \mathcal{K}.$$

Ce qui veut dire que $\overline{x}$ est une solution de l'AEPP défini page 29. Donc, par le thèorème 4.2, on en conclut que $\overline{x}$ est solution du problème PE.
Supposons maintenant que l'ensemble des solutions du problème PE est égal à l'ensemble des solutions du problème PE*. Alors nous pouvons affirmer que la suite entière $\{x^k\}_{k\geq 0}$ converge vers $\overline{x}$. En effet, en utilisant la définition de $l(x^k)$ avec $x^* = \overline{x} \in$ SOL(PE*), on a que $l(\overline{x}) = 0$ étant donné que

$$l(\overline{x}) = \mathcal{L}(\overline{x}) - \mathcal{L}(\overline{x}) - \langle \nabla\mathcal{L}(\overline{x}), \overline{x} - \overline{x}\rangle.$$

Par la forte convexité de module $\alpha > 0$ de $\mathcal{L}$, on peut écrire :

$$l(x^k) - l(\overline{x}) = \mathcal{L}(\overline{x}) - \mathcal{L}(x^k) - \langle \nabla\mathcal{L}(x^k), x^k - \overline{x}\rangle \geq \frac{\alpha}{2}||x^k - \overline{x}||^2 \qquad \forall k \geq 0.$$

D'autre part, la suite $\{l(x^k)\}_{k\geq 0}$ est décroissante et $l(x^{k_i}) \longrightarrow l(\overline{x})$, si $l(x^k) \longrightarrow l(\overline{x})$ lorsque $k$ tend vers l'infini. On peut donc conclure cette démonstration par la dernière équation qui entraine que

$$\lim_{k\longrightarrow\infty} x^k = \overline{x}.$$

où $\overline{x} \in$ SOL(PE*).

$\square$

Maintenant que nous avons traité L'ALGORITHME DE L'EXTRAGRADIENT et que nous en avons démontré la convergence, passons à une autre méthode de projection pour résoudre les problèmes d'équilibre : *la méthode de projection du sous-gradient.*

## 4 La méthode de projection du sous-gradient

Les méthodes de projections successives pour les problèmes CFP ont été améliorées en utilisant des projections approchées et non plus des projections exactes.
Tout au long de cette section, nous supposerons un ensemble convexe $\mathcal{C} \subseteq \mathbb{R}^n$ défini comme :

$$\mathcal{C} = \{x \in \mathcal{K} : f(y,x) \leq 0\}.$$

Pour tout $\overline{x} \in \mathbb{R}^n \setminus \mathcal{C}$, la projection orthogonale de $\overline{x} \notin \mathcal{C}$ sur $\mathcal{C}$, notée $P_{\mathcal{C}}(\overline{x})$, est approximée par la projection orthogonale de $\overline{x}$ sur un hyperplan[1] $\mathcal{H}$ séparant $\overline{x}$ de $\mathcal{C}$ de la forme :

$$\mathcal{H} = \{z \in \mathcal{K} : f(y,\overline{x}) + \langle \xi, z - \overline{x} \rangle = 0\},$$

où $\xi \in \partial f(y,\overline{x})$ est le sous-gradient non nul de $f$ en $\overline{x}$.

Définissons la *projection approchée* comme suit :

**DÉFINITION 4.1 :**
Soit un ensemble convexe $\mathcal{C}$ de $\mathbb{R}^n$ tel que

$$\mathcal{C} = \{x \in \mathcal{K} : f(y,x) \leq 0\}.$$

La **projection approchée** de $\overline{x} \notin \mathcal{C}$ sur $\mathcal{C}$, notée $\tilde{P}_{\mathcal{C}}(\overline{x})$, est donnée par :

$$\tilde{P}_{\mathcal{C}}(\overline{x}) = \overline{x} - \frac{f(y,\overline{x})}{||\xi||^2}.\xi$$

Afin d'établir un premier ALGORITHME DE LA MÉTHODE DU SOUS-GRADIENT, adaptons la définition de $L_f(y)$ donnée à la page 42.
En règle générale, l'ensemble convexe $\mathcal{C}$ défini précédemment est de la forme :

$$\mathcal{C} = \{x \in \mathbb{R}^n : h(x) \leq 0\},$$

où $h : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ est une fonction convexe.

Reprenons maintenant notre fonction $f$. Il est très fréquent que le domaine de définition de cette fonction soit $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$ et non $\mathcal{K} \times \mathcal{K}$. Dès lors, pour tout $y \in \mathcal{K}$, nous pouvons écrire :

$$\begin{aligned} \mathcal{C} \equiv L_f(y) &= \{x \in \mathcal{K} : f(y,x) \leq 0\} \\ &= \{x \in \mathbb{R}^n : f(y,x) \leq 0\} \cap \mathcal{K} \\ &= S_f(y) \cap \mathcal{K} \end{aligned}$$

L'ensemble $S_f(y)$ est appelé **l'ensemble de niveau** de la fonction convexe $f(y,\cdot)$ et l'ensemble $\mathcal{K}$ devient alors **l'ensemble général**.

[1] Les définitions et propriétés importantes de l'hyperplan se trouvent en annexe 2.

En faisant l'analogie avec la fonction $h$, nous avons pour tout $y \in \mathcal{K}$ :

$$\begin{array}{rcll} f_y : \mathbb{R}^n & \longrightarrow & \mathbb{R} \cup \{+\infty\} \\ x & \rightsquigarrow & f_y(x) = \begin{cases} f(y,x), & \text{si} \quad x \in \mathcal{K} \\ +\infty, & \text{si} \quad x \notin \mathcal{K} \end{cases} \end{array} \tag{5.1}$$

Cela semble plus naturel de faire l'approximation uniquement sur l'ensemble de niveau $S_f(y)$, en appliquant la projection de $x^k$ sur l'hyperplan séparant $x^k$ de $S_f(y^k)$ et en utilisant un sous-gradient $\xi^k$ de la fonction convexe $f(y^k,\cdot)$ en $x^k$, c'est-à-dire :

$$\xi^k \in \left[\partial f(y^k,\cdot)\right](x^k) = \partial f_{y^k}(x^k).$$

Une fois cette projection faite, il suit une projection orthogonale du point résultant $z^k$ sur $\mathcal{K}$. Ce procédé nous donne un premier algorithme *de projection inexacte du sous-gradient.*

---

**ALGORITHME 1 DE LA MÉTHODE DE PROJECTION INEXACTE DU SOUS-GRADIENT POUR LE PROBLÈME PE**

***Pas 0 : initialisation***
*Soient $k = 0$, $\varepsilon_k \geq 0$, $t_k > 0$, $x^0 \in \mathcal{K}$ un point initial et $r_0 = ||x^0||$.*

***Pas 1***
*Soient $x^k$ et $r_k$ donnés, et choisir $\varepsilon_k \geq 0$ et $t_k > 0$.*

1. *Définir*

$$\mathcal{K}_k = \{x \in \mathcal{K} : ||x|| \leq r_k + 1\}.$$

2. *Rechercher $y^k \in \mathcal{K}_k$ tel que $f(y^k, x^k) \geq 0$ et qui vérifie **la maximisation inexacte :***

$$\max_{y \in \mathcal{K}_k} f(y, x^k) - \varepsilon_k \leq f(y^k, x^k).$$

3. *Si $0 \in \partial f_{y^k}(x^k)$ alors STOP : $y^k$ résoud le problème PE.*

   *Sinon, choisir $\xi^k \in \partial f_{y^k}(x^k)$ où $\xi^k \neq 0$ et définir :*

$$z^k = x^k - t_k \frac{f(y^k, x^k)}{||\xi^k||^2}.\xi^k \tag{5.2}$$

   *et*

$$x^{k+1} = z^k + t_k \left[P_{\mathcal{K}}(z^k) - z^k\right]$$

4. *Mettre à jour $k = k+1$ et $r_k$ :*

$$r_{k+1} = \max\{r_k, ||x^{k+1}||\}.$$

---

Nous voyons que la différence entre cet algorithme et celui utilisant la projection exacte vu précédemment réside dans les deux dernières étapes du **Pas 1**.

Passons maintenant à un second ALGORITHME DE PROJECTION INEXACTE DU SOUS-GRADIENT. Celui-ci projette $x^k$ sur $\mathcal{K}$ et sur l'hyperplan séparant $x^k$ de $S_f(y)$. Il prend ensuite une combinaison convexe[1] des deux projections approchées. Cet algorithme diffère également par les étapes 3 et 4 du **Pas 1** de L'ALGORITHME DE LA MÉTHODE DE PROJECTION EXACTE et est défini comme suit :

---

ALGORITHME 2 DE LA MÉTHODE DE PROJECTION INEXACTE DU SOUS-GRADIENT POUR LE PROBLÈME PE

***Pas 0 : initialisation***
*Soient $k = 0$, $\varepsilon_k \geq 0$, $t_k > 0$, $x^0 \in \mathcal{K}$ un point initial et $r_0 = ||x^0||$.*
*Soient également une constante $\beta \in ]0, \frac{1}{2}[$ et une suite $\{\lambda_k\}_{k \geq 0} \subset [\beta, 1-\beta]$.*

***Pas 1***
*Soient $x^k$ et $r_k$ donnés, et choisir $\varepsilon_k \geq 0$ et $t_k > 0$.*

1. *Définir*

$$\mathcal{K}_k = \{x \in \mathcal{K} : ||x|| \leq r_k + 1\}.$$

2. *Rechercher $y^k \in \mathcal{K}_k$ tel que $f(y^k, x^k) \geq 0$ et qui vérifie* ***la maximisation inexacte :***

$$\max_{y \in \mathcal{K}_k} f(y, x^k) - \varepsilon_k \leq f(y^k, x^k).$$

3. *Si $0 \in \partial f_{y^k}(x^k)$ alors STOP : $y^k$ résoud le problème PE.*

   *Sinon, choisir $\xi^k \in \partial f_{y^k}(x^k)$ où $\xi^k \neq 0$ et définir $x^{k+1}$ :*

$$\begin{aligned} x^{k+1} &= \lambda_k \left[ x^k - t_k \frac{f(y^k, x^k)}{||\xi^k||^2} / \xi^k \right] \\ &\quad + (1 - \lambda_k) \left[ x^k + t_k (P_{\mathcal{K}}(x^k) - x^k \right]. \end{aligned}$$

4. *Mettre à jour $k = k+1$ et $r_k$ :*

$$r_{k+1} = \max\{r_k, ||x^{k+1}||\}.$$

---

Dans ces deux algorithmes, il est toujours possible de trouver $y^k$ satisfaisant la maximisation inexacte. En effet, un minimiseur *exacte*, $y^k_{exacte}$, de $f(\cdot, x^k)$ sur $\mathcal{K}_k$ vérifie

$$f(y^k_{exacte}, x^k) \geq f(z, x^k) \quad \forall z \in \mathcal{K}_k.$$

Il suffit donc de prendre $z = x^k$, on a alors par la définition de fonction d'équilibre :

$$f(y^k_{exacte}, x^k) \geq f(x^k, x^k) = 0.$$

[1] La définition est rappelée en annexe 2.

Afin de terminer cette section, il reste une chose importante à montrer : la convergence de ces algorithmes. Etablissons cela dans le théorème suivant :

**THÉORÈME 4.1 :**
Soit $\mathcal{K}$ un ensemble fermé, non vide et convexe de $\mathbb{R}^n$ et une fonction d'équilibre $f : \mathcal{K} \times \mathcal{K} \to \mathbb{R}$.
Supposons que la fonction $f$ satisfasse que l'union sur l'ensemble des couples $(y, x) \in Q \times P$ de $\partial f_x(y)$ soit bornée, où $Q \neq \emptyset$ et $P \neq \emptyset$ sont deux sous-ensembles compacts de $\mathcal{K}$. Supposons également $\{x^k\}_{k\geq 0}$ une suite générée par l'un des deux ALGORITHMES DE PROJECTION INEXACTE DU SOUS-GRADIENT. Alors

1. Si l'ensemble des solutions du problème CFP est non vide, alors $\{x^k\}_{k\geq 0}$ converge vers une solution du problème PE.
2. Si le problème PE n'a pas de solution, alors $\{x^k\}_{k\geq 0}$ n'est pas convergente.

**Preuve :**

1.

Soit SOL(CFP)$\neq \emptyset$. Montrons que la suite $\{x^k\}_{k\geq 0}$ converge vers une solution du problème PE.

*I)*

Tout d'abord, démontrons le cas où l'algorithme s'arrête en un nombre fini d'itérations, c'est-à-dire lorsque $0 \in \partial f_{y^k}(x^k)$.
Partons de la fonction 5.1 page 58. On a, par définition du sous-gradient, que $0 \in \partial f_{y^k}(x^k)$ si et seulement si $x^k$ minimise la fonction $f_{y^k}(\cdot)$ sur $\mathcal{K}$. En effet, la définition du sous-gradient est donnée par :

$$\xi \in f_{y^k}(x^k) \iff f_{y^k}(y) \geq f_{y^k}(x^k) + \langle \xi, y - x^k \rangle \quad \forall y \in \mathbb{R}^n.$$

Par analogie, on a donc :

$$0 \in f_{y^k}(x^k) \iff f_{y^k}(y) \geq f_{y^k}(x^k) \quad \forall y \in \mathbb{R}^n.$$

D'où, par la seconde étape du **Pas 1** des ALGORITHMES **1** ET **2**, on a :

$$0 \leq f(y^k, x^k) \leq f(y^k, z) \qquad \forall z \in K.$$

Ce qui signifie que $y^k$ résoud le problème PE.

*II)*

Démontrons à présent le théorème pour L'ALGORITHME 1.

## 1) Montrons que $x^*$, une solution du problème CFP, appartient à $\mathcal{S}_k$

Prenons une solution du problème CFP, $x^*$, et supposons

$$\mathcal{S}_k = \{z \in \mathbb{R}^n : f(y^k, x^k) + \langle \zeta^k, z - x^k \leq 0 \rangle\},$$

où $\zeta^k \in \partial f_{y^k}(x^k)$ et $\zeta^k \neq 0$ par la troisième étape du **Pas 1** de L'ALGORITHME 1.
Définissons également la projection orthogonale sur $\mathcal{S}_k$ comme suit :

$$P_{\mathcal{S}_k} : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathcal{S}_k.$$

En posant

$$z^k = x^k - t_k \frac{f(y^k, x^k)}{||\zeta^k||^2}.\zeta^k,$$

et en utilisant la définition de la projection approchée suivante :

$$\tilde{P}_{\mathcal{S}_k}(x^k) = x^k - \frac{f(y^k, x^k)}{||\zeta^k||^2}.\zeta^k,$$

nous obtenons :

$$z^k = x^k + t_k \left[ P_{\mathcal{S}_k}(x^k) - x^k \right].$$

Notons à présent que $x^* \in \mathcal{S}_k$. En effet, par définition du sous-gradient, nous avons pour tout $z \in \mathbb{R}^n$ l'équivalence suivante :

$$\zeta^k \in \partial f_{y^k}(x^k) \Longleftrightarrow f_{y^k}(z) \geq f_{y^k}(x^k) + \langle \zeta^k, z - x^k \rangle.$$

En prenant $z = x^* \in \mathcal{K}$, on a :

$$f_{y^k}(x^*) \geq f_{y^k}(x^k) + \langle \zeta^k, x^* - x^k \rangle.$$

Puisque $y^k \in \mathcal{K}$, on peut écrire grâce à la définition 5.1 page 58 :

$$f(y^k, x^*) \geq f(y^k, x^k) + \langle \zeta^k, x^* - x^k \rangle.$$

De plus, nous savons que $x^*$ résoud le problème CFP. Cela signifie que

$$x^* \in L_f(y) = \{x \in \mathcal{K} : f(y, x) \leq 0\} \quad \forall y \in \mathcal{K}.$$

Et étant donné que $y^k \in \mathcal{K}$ par la deuxième étape du **Pas 1** de L'ALGORITHME **1**, on a $f(y^k, x^*) \leq 0$. D'où :

$$f(y^k, x^k) + \langle \zeta^k, x^* - x^k \rangle \leq 0.$$

Ce qui veut donc dire, par définition de $\mathcal{S}_k$ et par l'inégalité $f(y^k, x^*) \leq 0$, que

$$x^* \in \mathcal{S}_k.$$

2) MONTRONS QUE LA SUITE $\{||x^k - x^*||\}_{k\geq 0}$ EST CONVERGENTE ET QUE LES SUITES $\{x^k\}_{k\geq 0}$,$\{y^k\}_{k\geq 0}$ ET $\{r^k\}_{k\geq 0}$ SONT BORNÉES

En prouvant ces assertions, nous pourrons montrer que la suite $\{x^k\}_{k\geq 0}$ converge vers une solution $x^*$ du problème PE.
Pour cela, reprenons l'équation

$$z^k = x^k + t_k \left[P_{\mathcal{S}_k}(x^k) - x^k\right].$$

On a alors :

$$\begin{aligned}
||z^k - x^*||^2 &= ||x^k + t_k \left[P_{\mathcal{S}_k}(x^k) - x^k\right] - x^*||^2 \\
&= ||x^k - x^*||^2 + t_k^2||P_{\mathcal{S}_k}(x^k) - x^k||^2 + 2t_k\langle x^k - x^*, P_{\mathcal{S}_k}(x^k) - x^k\rangle \\
&\leq ||x^k - x^*||^2 - t_k(2-t_k)||P_{\mathcal{S}_k}(x^k) - x^k||^2 \\
&\underbrace{=}_{\text{par } 5.2} ||x^k - x^*||^2 - t_k(2-t_k)\left[\frac{f(y^k, x^k)}{||\xi^k||}\right]^2. \qquad (5.3)
\end{aligned}$$

L'inégalité provient des propriétés de la norme et du produit scalaire. En effet :

$$\begin{aligned}
||\left(x^k - x^*\right) + \left(P_{\mathcal{S}_k}(x^k) - x^k\right)||^2 &= ||x^k - x^*||^2 + ||P_{\mathcal{S}_k}(x^k) - x^k||^2 \\
&\quad +2\langle x^k - x^*, P_{\mathcal{S}_k}(x^k) - x^k\rangle \\
&\geq 2\langle x^k - x^*, P_{\mathcal{S}_k}(x^k) - x^k\rangle
\end{aligned}$$

Appliquons maintenant le même procédé pour la projection orthogonale de $z^k$ sur $\mathcal{K}$ :

$$x^{k+1} = z^k + t_k\left[P_{\mathcal{K}}(z^k) - z^k\right],$$

et utilisons le fait que $x^* \in \mathcal{K}$ étant donné que $L_f(y) \subset \mathcal{K}$ pour tout $y \in \mathcal{K}$. Ce qui nous donne :

$$\begin{aligned}
||x^{k+1} - x^*||^2 &= ||z^k + t_k\left[P_{\mathcal{K}}(z^k) - z^k\right] - x^*||^2 \\
&= ||z^k - x^*||^2 + t_k^2||P_{\mathcal{K}}(z^k) - z^k||^2 + 2t_k\langle z^k - x^*, P_{\mathcal{K}}(z^k) - z^k\rangle \\
&\leq ||z^k - x^*||^2 - t_k(2-t_k)||P_{\mathcal{K}}(z^k) - z^k||^2 \qquad (5.4)
\end{aligned}$$

Puisque $t_k(2-t_k) > 0$, en combinant les équations 5.3 et 5.4, on obtient :

$$\begin{aligned}
||x^{k+1} - x^*||^2 &\leq ||x^k - x^*||^2 \\
&\quad -t_k(2-t_k)\left(\left[\frac{f(y^k, x^k)}{||\xi^k||}\right]^2 + ||P_{\mathcal{K}}(z^k) - z^k||^2\right) \qquad (5.5) \\
&\leq ||x^k - x^*||^2.
\end{aligned}$$

Par la dernière inégalité, nous avons que :

1. la suite $\{||x^k - x^*||\}_{k\geq 0}$ est décroissante et donc, convergente étant donné qu'elle est positive.
2. la suite $\{x^k\}_{k\geq 0}$ est bornée. En effet, nous venons de voir que la suite $\{||x^k - x^*||\}_{k\geq 0}$ était convergente. De plus, nous avons que

$$||x^k|| = ||x^k - x^* + x^*|| \leq ||x^k - x^*|| + ||x^*||.$$

Les termes $||x^k - x^*||$ et $||x^*||$ étant borné et constant respectivement, nous pouvons conclure que $\{x^k\}_{k\geq 0}$ est bornée.

3. les suites $\{r^k\}_{k\geq 0}$ et $\{y^k\}_{k\geq 0}$ sont bornées. Ceci se démontre assez facilement. Nous savons maintenant que $\{x^k\}_{k\geq 0}$ est bornée. Nous pouvons donc prendre $\bar{r} > 0$ tel que $||x^k|| \leq \bar{r}$ pour tout $k \in \mathbb{N}$.
Par récurrrence sur $r_{k+1} = \max\{r_k, ||x^{k+1}||\}$, il est facile de voir que

$$r_k = \max\{||x^0||, \ldots, ||x^k||\}.$$

On a donc :

$$r_k \leq \bar{r} \qquad \forall k \in \mathbb{N}.$$

Autrement dit, la suite $\{r^k\}_{k\geq 0}$ est bornée.
Voyons à présent que la suite $\{y^k\}_{k\geq 0}$ est également bornée. Pour cela, reprenons

$$\mathcal{K}_k = \{x \in \mathcal{K} : ||x|| \leq r_k + 1\}.$$

On a alors que l'ensemble $\mathcal{K}_k$ est inclu dans la boule fermée centrée en 0 et de rayon $\bar{r} + 1$, c'est-à-dire

$$\mathcal{K}_k \subset \overline{B}(0; \bar{r} + 1).$$

Par la maximisation inexacte, on a que

$$||y^k|| \leq \bar{r} + 1.$$

Ce qui signifie que la suite $\{y^k\}_{k\geq 0}$ est bornée.

**3)** $f(\overline{y}, \overline{x}) = 0$

Continuons à présent la preuve en utilisant l'équation 5.5 ainsi que la condition sur la suite $\{t^k\}_{k\geq 0}$ :

$$\{t^k\}_{k\geq 0} \subset [\alpha, 2 - \alpha]$$

où $\alpha \in ]0, 1[$.
Repartons de l'équation 5.5, on a alors :

$$t_k(2 - t_k)\left(\left[\frac{f(y^k, x^k)}{||\xi^k||}\right]^2 + ||P_{\mathcal{K}}(z^k) - z^k||^2\right) \leq ||x^k - x^*||^2 - ||x^{k+1} - x^*||^2.$$

Puisque $0 < \alpha \leq t_k \leq 2-\alpha$ et $\alpha \in ]0,1[$, on a

$$0 < \alpha(2-\alpha) \leq t_k(2-t_k).$$

En effet, considérons l'application $t_k \rightsquigarrow t_k(2-t_k)$ où $t_k \in [\alpha, 2-\alpha]$. Il s'agit d'une fonction concave. Les minima se trouvent donc en $t_k = \alpha$ et $t_k = (2-\alpha)$. On a alors que

$$\begin{aligned} t_k(2-t_k) &\geq \min\{\alpha(2-\alpha), (2-\alpha)\alpha\} \\ &= \alpha(2-\alpha) \end{aligned}$$

Nous pouvons donc écrire :

$$\alpha(2-\alpha)\left(\left[\frac{f(y^k,x^k)}{||\xi^k||}\right]^2 + ||P_{\mathcal{K}}(z^k) - z^k||^2\right) \leq ||x^k - x^*||^2 - ||x^{k+1} - x^*||^2.$$

Comme la suite $\{||x^k - x^*||\}_{k\geq 0}$ est convergente et $\alpha(2-\alpha) > 0$, la dernière inégalité implique que :

$$\lim_{k\longrightarrow\infty}\left(\left[\frac{f(y^k,x^k)}{||\xi^k||}\right]^2 + ||P_{\mathcal{K}}(z^k) - z^k||^2\right) = 0,$$

ou de façon équivalente :

$$\lim_{k\longrightarrow\infty}\frac{f(y^k,x^k)}{||\xi^k||} = \lim_{k\longrightarrow\infty}||P_{\mathcal{K}}(z^k) - z^k|| = 0.$$

En utilisant l'hyphothèse sur $f$, nous pouvons dire que la suite $\{\varepsilon^k\}_{k\geq 0}$ est bornée. En effet, les suites $\{x^k\}_{k\geq 0} \subset \mathcal{K}$ et $\{y^k\}_{k\geq 0} \subset \mathcal{K}$ sont bornées. De plus, $\varepsilon^k \in \partial f_{y^k}(x^k)$. Nous pouvons donc conclure de l'équation précédente que

$$\lim_{k\longrightarrow\infty} f(y^k,x^k) = 0.$$

Donc, quel que soit le point limite $(\overline{y},\overline{x})$ de la suite $\{y^k,x^k\}_{k\geq 0}$, on a :

$$f(\overline{y},\overline{x}) = 0.$$

#### 4) Montrons que $\overline{x} \in \overset{\circ}{B}(0; r^* + 1 - \delta)$[1] $\cap\, \mathcal{K}$

Soit $r^* = \sup_{k\in\mathbb{N}} r_k$.

Nous pouvons nous assurer que $r^*$ est fini étant donné que nous avons montré que la suite $\{r^k\}_{k\geq 0}$ était bornée.
Choisissons $0 < \delta < 1$ et considérons $B(0; r^* + 1 - \delta) \equiv B(\delta)$. Puisque

$$r_{k+1} = \max\{r_k, ||x^{k+1}||\}, \tag{5.6}$$

on a :

$$||x^k|| \leq r^k \leq r^* < r^* + 1 - \delta \qquad \forall k \in \mathbb{N}.$$

Ce qui entraîne que $\overline{x} \in \overset{\circ}{B}$.

---

1 $\overset{\circ}{B}$ dénote l'intérieur de l'ensemble $B$.

5) $x' \in B'(\delta)$ RÉSOUD LE PROBLÈME $PE'_\delta$

Prenons $B'(\delta) = B(\delta) \cap \mathcal{K}$ et considérons le nouveau problème d'équilibre $PE'_\delta$ avec la fonction $f$ et l'ensemble admissible $B'(\delta)$. Ce problème consistera à trouver $x' \in B'(\delta)$ tel que $f(x', y) \geq 0$, pour tout $y \in B'(\delta)$.

Nous pouvons affirmer que $x' \in B'(\delta)$ résoud le problème $PE'_\delta$ pour tout $\delta \in ]0,1[$.
En effet, la suite $\{r^k\}_{k\geq 0}$ est croissante, autrement dit $r_k \leq r_{k+1}$.
Choisissons $k_0 \in \mathbb{N}$ tel que $r_{k_0} \geq r^* - \delta$. On a alors

$$r^* + 1 - \delta \leq r_k + 1 \qquad \forall k \geq k_0.$$

Nous avons donc par définitions de $B'(\delta)$ et $\mathcal{K}_k$ :

$$B'(\delta) \subset \mathcal{K}_k \qquad \forall k \geq k_0.$$

Soit $z \in B'(\delta)$. Alors $z \in \mathcal{K}_k$ pour tout $k \geq k_0$.
Par conséquent :

$$f(z, x^k) \leq \max_{y \in \mathcal{K}_k} f(y, x^k) \leq f(y^k, x^k) + \varepsilon_k \qquad \forall k \geq k_0.$$

En utilisant la continuité de $f$, l'inéquation précédente, le fait que $f$ soit une fonction d'équilibre, ainsi que l'équation $f(\overline{y}, \overline{x}) = 0$ respectivement, on obtient :

$$\begin{aligned} f(z, \overline{x}) &= f(z, \lim_{k_n \longrightarrow \infty} x^{k_n}) \\ &= \lim_{k_n \longrightarrow \infty} f(z, x^{k_n}) \\ &\leq \lim_{k_n \longrightarrow \infty} \left( f(y^{k_n}, x^{k_n}) + \varepsilon_{k_n} \right) \\ &= f(\overline{y}, \overline{x}) \\ &= 0. \end{aligned}$$

On a donc $f(z, \overline{x}) \leq 0$ pour tout $z \in B'(\delta)$. Puisque $x' \in \mathcal{K}$, ceci implique, pour tout $\delta \in ]0,1[$, que

$$\overline{x} \in \bigcap_{z \in B'(\delta)} L_f(z)$$

En d'autres termes, cela signifie que $\overline{x}$ résoud le problème CFP, et puisque nous savons, par la proposition 1.1, que $\overline{x}$ résoud le problème CFP si et seulement si $\overline{x}$ résoud le problème PE*, nous concluons que $\overline{x}$ résoud le problème $PE'_\delta$ pour tout $\delta \in ]0,1[$.

### 6) $\overline{x}$ RÉSOUD LE PROBLÈME PE

Afin de pouvoir terminer cette preuve, il nous reste à montrer que $\overline{x}$ résoud le problème PE, et que le point de convergence est unique.

Montrons donc que $\overline{x}$ résoud le problème PE. Par définition, $\overline{x}$ résoud le problème $PE'_\delta$ signifie que

$$f(\overline{x},y) \geq 0 \qquad \forall y \in B'(\delta).$$

Par hypothèse, puisque $f$ est une fonction d'équilibre, nous avons $f(\overline{x},\overline{x}) = 0$.
Par ces deux dernières équations, nous pouvons conclure que $\overline{x}$ résoud le problème d'optimisation convexe suivant :

$$\min_{y \in B'(\delta)} f(\overline{x},y).$$

Introduisons une nouvelle fonction définie comme suit :

$$\begin{array}{rcccl} g & : & \mathbb{R}^n & \longrightarrow & \mathbb{R} \cup \{+\infty\} \\ & & y & \rightsquigarrow & g(y) = \left\{ \begin{array}{ll} f(\overline{x},y), & \text{si} \quad y \in \mathcal{K} \\ +\infty, & \text{si} \quad y \notin \mathcal{K} \end{array} \right. \end{array} \tag{5.7}$$

Avec cette fonction $g$ ainsi définie et puisque $B'(\delta) = B(\delta) \cap \mathcal{K}$, nous pouvons réécrire notre problème d'optimisation convexe comme :

$$\min_{y \in B(\delta)} g(y).$$

Nous avons vu que $\overline{x}$, un minimiseur sur $B(\delta)$, appartient à $\overset{\circ}{B}(\delta)$. Puisque $g$ est une fonction convexe, nous pouvons dire que $\overline{x}$ est une minimiseur sans contrainte de $g$.
Or par les propriétés de la convexité, nous savons que tout minimiseur local d'une fonction convexe est aussi un minimiseur global. Nous avons donc :

$$g(\overline{x}) \leq g(y) \quad \forall y \in \mathbb{R}^n.$$

ou encore

$$g(\overline{x}) = f(\overline{x},\overline{x}) = 0 \leq g(y) = f(\overline{x},y) \quad \forall y \in \mathcal{K}.$$

C'est-à-dire $\overline{x}$ résoud le problème PE.

### 7) $\overline{x}$ EST L'UNIQUE POINT DE CONVERGENCE

Terminons la première partie de la preuve pour L'ALGORITHME 1 en montrant l'unicité du point de convergence.
Nous avons montré précédemment que

$$\overline{x} \in \bigcap_{z \in B'(\delta)} L_f(z).$$

Puisque $B'(\delta) = B(\delta) \cap \mathcal{K}$ et $B(\delta) = B(0; r^* + 1 - \delta)$, nous avons :

$$f(z, \overline{x}) \leq 0 \quad \forall z \in \mathcal{K}, ||z|| \leq r^* + 1 - \delta.$$

Or, puisque $\delta \in ]0,1[$, nous pouvons simplifier l'inégalité suivante :

$$f(z, \overline{x}) \leq 0 \quad \forall z \in \mathcal{K}, ||z|| < r^* + 1.$$

Et donc, puisque la fonction $f$ est continue, on a

$$f(z, \overline{x}) \leq 0 \quad \forall z \in \mathcal{K}, ||z|| \leq r^* + 1.$$

Comme $y^k \in \mathcal{K}_k$ pour tout $k \in \mathbb{N}$, il suit que :

$$||y^k|| \leq r^k + 1 \leq r^* + 1,$$

d'où

$$f(y^k, \overline{x}) \leq 0 \qquad \forall k \in \mathbb{N}.$$

Ce qui veut dire que :

$$\overline{x} \in \bigcap_{k=0}^{\infty} L_f(y^k).$$

Par le procédé utilisé page 62, on en déduit que la suite $\{||x^k - \overline{x}||\}_{k \geq 0}$ est convergente.
Supposons $\overline{x}$ un point limite de $\{x^k\}_{k \geq 0} \subset \mathcal{K}$, où $\mathcal{K}$ est un ensemble fermé. On a donc $\overline{x} \in \mathcal{K}$.
De plus, il doit exister une sous-suite $\{x^{k_n}\}_{k_n \geq 0}$ de $\{x^k\}_{k \geq 0}$ telle que

$$\lim_{k_n \longrightarrow \infty} x^{k_n} = \overline{x}.$$

On a alors que la sous-suite $\{||x^{k_n} - \overline{x}||\}_{n \geq 0}$ converge vers 0, et donc la suite entière $\{||x^k - \overline{x}||\}_{k \geq 0}$ converge également vers 0, c'est-à-dire :

$$\lim_{k \longrightarrow \infty} x^k = \overline{x}.$$

$III)1.$

Démontrons maintenant la preuve pour L'ALGORITHME 2. Celle-ci suit le même procédé que L'ALGORITHME 1. Pour cela, partons de l'équation

$$x^{k+1} = \lambda_k \left[ x^k - t_k \frac{f(y^k, x^k)}{||\zeta^k||^2} / \zeta^k \right] + (1 - \lambda_k) \left[ x^k + t_k (P_{\mathcal{K}}(x^k) - x^k \right].$$

En utilisant la projection approchée définie page 57, et en l'incorporant dans l'équation précédente, nous avons :

$$x^{k+1} = \lambda_k \left[ x^k - t_k \left( P_{S_k}(x^k) - x^k \right) \right] + (1 - \lambda_k) \left[ x^k + t_k (P_{\mathcal{K}}(x^k) - x^k \right].$$

Grâce à cette équation, nous pouvons écrire :

$$\begin{aligned}
||x^{k+1} - x^*||^2 &= ||x^{k+1} - \lambda_k x^* - (1 - \lambda_k) x^*||^2 \\
&= ||\lambda_k \left[ x^k - x^* + t_k \left( P_{S_k}(x^k) - x^k \right) \right] \\
&\quad + (1 - \lambda_k) \left[ x^k - x^* + t_k (P_{\mathcal{K}}(x^k) - x^k) \right] ||^2 \\
&\leq \lambda_k x^k - x^* + t_k \left( P_{S_k}(x^k) - x^k \right) ||^2 \\
&\quad + (1 - \lambda_k) ||x^k - x^* + t_k (P_{\mathcal{K}}(x^k) - x^k)||^2
\end{aligned} \tag{5.8}$$

où la dernière inégalité provient de la convexité de la norme deux au carré. Par le même procédé que celui établi page 62, et en nous servant du fait que $t_k(2 - t_k) > 0$, nous obtenons :

$$\begin{aligned}
||x^{k+1} - x^*||^2 &\leq \lambda_k \left[ ||x^k - x^*||^2 - t_k(2 - t_k) ||P_{S_k}(x^k) - x^k||^2 \right] \\
&\quad (1 - \lambda_k) \left[ ||x^k - x^*||^2 - t_k(2 - t_k) ||P_{\mathcal{K}}(x^k) - x^k||^2 \right] \\
&= ||x^k - x^*||^2 - t_k(2 - t_k) \left[ \lambda_k \left( \frac{f(y^k, x^k)}{||\zeta^k||^2} \right)^2 + (1 - \lambda_k) ||P_{\mathcal{K}}(x^k) - x^k||^2 \right] \\
&\leq ||x^k - x^*||^2
\end{aligned}$$

Nous voyons donc, pour les mêmes raisons que dans la preuve de L'ALGORITHME 1, que :

1. la suite $\{||x^k - x^*||\}_{k \geq 0}$ est décroissante et donc, convergente.
2. la suite $\{x^k\}_{k \geq 0}$ est bornée.
3. les suites $\{r^k\}_{k \geq 0}$ et $\{y^k\}_{k \geq 0}$ sont bornées.

De plus, si nous supposons que

$$t_k(2 - t_k) \geq \alpha(2 - \alpha),$$

et

$$\lambda_k \geq \beta \quad \text{et} \quad 1 - \lambda_k \geq \beta,$$

on a :

$$\alpha(2-\alpha)\beta\left[\left(\frac{f(y^k,x^k)}{||\xi^k||}\right)^2+||P_{\mathcal{K}}(x^k)-x^k||^2\right]\leq ||x^k-x^*||^2-||x^{k+1}-x^*||^2$$

Puisque la suite $\{||x^k-x^*||\}_{k\geq 0}$ est convergente, et puisque $\alpha(2-\alpha)\beta>0$, il suit que :

$$\lim_{k\longrightarrow\infty}||x^k-P_{\mathcal{K}}(x^k)||=0,$$

et donc tout point limite de la suite $\{x^k\}_{k\geq 0}$ appartient à $\mathcal{K}$.
Comme nous avons également que

$$\lim_{k\longrightarrow\infty}\frac{f(y^k,x^k)}{||\xi^k||}=0,$$

nous pouvons conclure la preuve de la même façon que nous l'avons fait pour L'ALGORITHME 1.

2.

Démontrons maintenant que si le problème PE n'a pas de solution, alors la suite $\{x^k\}_{k\geq 0}$ n'est pas convergente.
Supposons, par l'absurde, que la suite $\{x^k\}_{k\geq 0}\subset\mathbb{R}^n$ converge vers $x^*\in\mathbb{R}^n$.
Si la suite $\{x^k\}_{k\geq 0}$ converge, alors elle est bornée et

$$\lim_{k\longrightarrow\infty}\{x^{k+1}-x^k\}=0.$$

Nous avons vu que sous ces conditions, la suite entière $\{x^k\}_{k\geq 0}$ convergeait vers une solution $x^*$ du problème PE. Or, par hypothèse, ce problème n'a pas de solution. Nous arrivons donc à une contradiction qui nous permet de conclure que la suite $\{x^k\}_{k\geq 0}$ n'est pas convergente.

□

Ces algorithmes requièrent cependant des hypothèses spécifiques : la projection orthogonale doit être facilement manipulable. Il existe bon nombre de situations où l'expression de la projection $P_C$ n'est explicitement pas connue ou difficilement calculable. Dans ce cas, il est intéressant d'écrire l'ensemble fermé convexe $C$ de $\mathbb{R}^n$ sous la forme Fix$(T)$, où $T:\mathbb{R}^n\longrightarrow\mathbb{R}^n$ est un opérateur fermement non-expansif dont les valeurs de $Tx$ sont facilement calculables. Détaillons cela dans la section suivante.

## 5 La méthode de projection du sous-gradient sur un ensemble de points fixes

Commençons par mettre en place les définitions et les notions qui nous seront nécéssaires tout au long de cette section. La définition du point fixe d'un opérateur $T$ ayant déjà été établie page 14, nous noterons l'ensemble de ces points fixes comme suit :

$$\mathrm{Fix}(T) = \{x \in \mathbb{R}^n : Tx = x\}.$$

Voyons une définition qui nous sera utile pour la suite : la définition de **non-expansivité**.

**DÉFINITION 5.1 :**
Soit $T$ un opérateur de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}^n$. L'opérateur $T$ est dit **non-expansif** si pour tout $x, y \in \mathbb{R}^n$, on a :

$$||Tx - Ty|| \leq ||x - y||.$$

En particulier, l'opérateur $T$ est dit **fermement non-expansif** si pour tout $x, y \in \mathbb{R}^n$, on a :

$$||Tx - Ty||^2 \leq \langle x - y, Tx - Ty \rangle.$$

Illustrons à présent, sur un exemple simple, que les calculs de la méthode du sous-gradient utilisant les points fixes peuvent s'avérer beaucoup plus simples que ceux de la méthode de sous-gradient utilisant les projections orthogonales.
Prenons $C = \bigcap_{j=1}^{m} C^j$, où $C^j$ est un ensemble fermé et convexe de $\mathbb{R}^n$ pour tout $j \in \mathbb{N}$. Supposons que la projection orthogonale $P_{C^j}$ soit facile à calculer. Prenons par exemple deux boules fermées $C^1$ et $C^2$ telles que les projections $P_{C^1}$ et $P_{C^2}$ soient facilement calculables. Malgré cela, la projection orthogonale $P_{C^1 \cap C^2}$ est, quant à elle, difficile à calculer.
Utilisons maintenant la méthode sur l'ensemble des points fixes. Pour cela, supposons

$$\begin{aligned} T \; : \; \mathbb{R}^n &\longrightarrow \mathbb{R}^n && (5.1)\\ x &\rightsquigarrow T(x) = \sum_{j=1}^{p} a^j P_{C^j}(x) && (5.2) \end{aligned}$$

où $a^j > 0$ pour tout $j \in \mathbb{N}$ et $\sum_{j=1}^{p} a^j = 1$.

L'opérateur $T$ est bien fermement non-expansif. En effet :

$$\begin{aligned} ||Tx - Ty||^2 &= ||\sum_{j=1}^{p} a^j P_{Cj}(x) - \sum_{j=1}^{p} a^j P_{Cj}(y)||^2 \\ &= ||\sum_{j=1}^{p} a^j \left[P_{Cj}(x) - P_{Cj}(y)\right]||^2 \\ &\leq \sum_{j=1}^{p} a^j ||P_{Cj}(x) - P_{Cj}(y)||^2 \\ &\leq \sum_{j=1}^{p} a^j \langle x - y, P_{Cj}(x) - P_{Cj}(y)\rangle \\ &= \langle x - y, Tx - Ty\rangle \end{aligned}$$

La première inégalité provient de la convexité de la norme deux au carré, la seconde du fait que $P_{Cj}$ est fermement non-expansif, et la dernière égalité vient de la définition de l'opérateur $T$.

Puisque nous avons que $\mathrm{Fix}(T) = \bigcap_{j=1}^{p} C^j$, il est clair que la solution est beaucoup plus simple à déterminer.

Un autre désavantage de la méthode du sous-gradient vue précédemment est qu'elle résoud, à chaque itération, un problème de maximisation inexacte sur $\mathcal{K}_k$, où $\mathcal{K}_k$ est l'intersection de l'ensemble admissible $\mathcal{K}$ et d'une boule fermée définie par $\mathcal{K}_{\mathbb{R}_k} = \{x \in \mathbb{R}^n : ||x|| \leq r^k + 1\}$. L'ALGORITHME DE LA MÉTHODE DU POINT FIXE utilise quant à lui un problème de maximisation inexacte plus simple. En effet, l'ensemble des contraintes est donné par une boule fermée $\mathcal{K}$, et non plus par l'intersection de $\mathcal{K}$ et de $\mathcal{K}_{\mathbb{R}_k}$.

Pour la suite, nous supposerons une fonction d'équilibre $f : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ telle que $f(x,x) = 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}^n$. Nous supposerons également que la fonction $f$ soit continue par rapport à son premier argument et convexe par rapport au second.

Reformulons le problème d'équilibre comme suit :

**DÉFINITION 5.2 :**
Soit $T : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$ un opérateur fermement non-expansif. **Le problème d'équilibre sur l'ensemble des points fixes,** noté EPFix, consiste à trouver

$$x^* \in \mathrm{Fix}(T) \quad \text{tel que} \quad f(x^*, y) \geq 0 \quad \forall y \in \mathrm{Fix}(T).$$

Donnons à présent L'ALGORITHME POUR LE PROBLÈME D'ÉQUILIBRE SUR L'ENSEMBLE DES POINTS FIXES :

**ALGORITHME DE LA MÉTHODE DE PROJECTION INEXACTE DU SOUS-GRADIENT POUR LE PROBLÈME PE SUR L'ENSEMBLE DES POINTS FIXES**

***Pas 0 : initialisation***
*Soit $k = 0$, $\varepsilon_k \geq 0$,et $t_k > 0$.*

***Pas 1***
*Soient $x^k$ et $r_k$ donnés, et choisir $\varepsilon_k \geq 0$ et $t_k > 0$.*

1. *Définir*

$$\mathcal{K}_{\mathbb{R}_k} = \{x \in \mathbb{R}^n : ||x|| \leq r_k + 1\}.$$

2. *Rechercher $y^k \in \mathcal{K}_{\mathbb{R}_k}$ tel que $f(y^k, x^k) \geq 0$ et qui vérifie* ***la maximisation inexacte :***

$$\max_{y \in \mathcal{K}_{\mathbb{R}_k}} f(y, x^k) - \varepsilon_k \leq f(y^k, x^k).$$

3. *Si $0 \in \partial f_{y^k}(x^k)$ alors STOP : $y^k$ résoud le problème PE.*

   *Sinon, choisir $\xi^k \in \partial f_{y^k}(x^k)$ où $\xi^k \neq 0$ et définir $x^{k+1}$ :*

$$x^{k+1} = T\left(x^k - t_k f(y^k, x^k)\xi^k\right).$$

4. *Mettre à jour $k = k + 1$ et $r_k$ :*

$$r_{k+1} = \max\{r_k, ||x^{k+1}||\}.$$

Ce dernier algorithme est bien défini. En effet, pour tout $k \in \mathbb{N}$ nous avons que
- $\mathcal{K}_{\mathbb{R}_k} = \{x \in \mathbb{R}^n : ||x|| \leq r_k + 1\}$,
- $r_{k+1} = \max\{r_k, ||x^{k+1}||\}$,
- $x^k \in \mathcal{K}_{\mathbb{R}_k} \neq \emptyset$ et
- $\mathcal{K}_{\mathbb{R}_k} \subset \mathcal{K}_{k+1}$.

De plus, les hypothèses de continuité de $f$ et de compacité de $\mathcal{K}_{\mathbb{R}_k}$ nous assurent l'existence de $y^k$ satisfaisant la maximisation inexacte. Ce qui nous montre que la méthode établie ci-dessus est bien définie.

Dès lors que l'algorithme est établi et bien défini, nous pouvons sans peine en étudier la convergence. C'est l'objet du théorème suivant :

**THÉORÈME 5.1 :**
Soit $T : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$ un opérateur fermement non-expansif tel que $\mathrm{Fix}(T) \neq \emptyset$. Supposons que la suite $\{\xi_k\}_{k\geq 0}$ soit bornée, c'est-à-dire qu'il existe une constante $M > 0$ telle que

$$||\xi^k|| \leq M \qquad \forall k \geq 0.$$

Alors les suites $\{x_k\}_{k\geq 0}$ et $\{y_k\}_{k\geq 0}$ générées par L'ALGORITHME DE LA MÉTHODE DE PROJECTION INEXACTE DU SOUS-GRADIENT POUR LE PROBLÈME PE SUR L'ENSEMBLE DES POINTS FIXES, satisfont les assertions suivantes :

1. **L'approximation monotone :**
   Si $\mathcal{O}_k = \{x^* \in \mathrm{Fix}(T) : f(y^k, x^*) \leq 0\} \neq \emptyset$, alors pour tout $x^k \in \mathcal{O}_k$, on a :
   $$||x^{k+1} - x^*||^2 \leq ||x^k - x^*||^2 + t_k(M^2 t_k - 2) f(y^k, x^k)^2.$$
   En particulier,
   $$||x^{k+1} - x^*|| \leq ||x^k - x^*|| \qquad \forall t_k \in \left[0, \frac{2}{M^2}\right].$$
2. **Bornitude et optimalité asymptotique :**
   On suppose
   $$\mathcal{O} = \bigcap_{k=1}^{\infty} \mathcal{O}_k \neq \emptyset.$$
   Si pour $k \geq 0$ et pour tout $a, b > 0$, on a :
   $$t_k \in [a, b] \subset \left]0, \frac{2}{M^2}\right[,$$
   alors les suites $\{x_k\}_{k\geq 0}$ et $\{y_k\}_{k\geq 0}$ sont bornées. De plus, nous avons :
   $$\lim_{k\to\infty} f(y^k, x^k) = 0 \qquad \text{et} \qquad \lim_{k\to\infty} ||x^k - Tx^k|| = 0.$$
3. **Convergence :**
   Si pour $k \geq 0$ et pour tout $a, b > 0$, on a :
   $$t_k \in [a, b] \subset \left]0, \frac{2}{M^2}\right[,$$
   et si
   $$\varepsilon^k \geq 0,$$
   où $\lim \varepsilon^k = 0$, alors la suite $\{x_k\}_{k\geq 0}$ converge vers un point résolvant le problème d'équilibre sur l'ensemble des points fixes sous la condition $\mathcal{O} = \bigcap_{k=1}^{\infty} \mathcal{O}_k \neq \emptyset$.

**Preuve :**

1. Commençons par démontrer l'approximation monotone.

Par la définition du sous-gradient et puisque $x^* \in \mathcal{O}_k$, nous avons

$$\begin{aligned} \langle x^k - x^*, \xi^k \rangle &\geq f(y^k, x^k) - f(y^k, x^*) & (5.3)\\ &\geq f(y^k, x^k) & (5.4) \end{aligned}$$

D'où, par la non-expansivité de l'opérateur $T$, nous avons pour tout $x^* \in \mathcal{O}_k$ :

$$\begin{aligned} ||x^{k+1} - x^*|| &= ||T(x^k - t_k f(y^k, x^k)\xi^k) - Tx^*||^2 \\ &\leq ||(x^k - t_k f(y^k, x^k)\xi^k) - x^*||^2 \\ &= ||x^k - x^*||^2 - 2t_k f(y^k, x^k)\langle x^k - x^*, \xi^k\rangle + t_k^2 f(y^k, x^k)^2 ||\xi^k||^2 \\ &\leq ||x^k - x^*||^2 - 2t_k f(y^k, x^k)^2 + M^2 t_k^2 f(y^k, x^k)^2 & (5.5)\\ &= ||x^k - x^*||^2 + t_k(M^2 t_k - 2) f(y^k, x^k)^2 \end{aligned}$$

La dernière inégalité vient de l'équation 5.3 et de la constante de bornitude de la suite $\{\xi^k\}_{k\geq 0}$. Par positivité de tous les termes, on a donc bien,pour tout $t_k \in \left[0, \frac{2}{M^2}\right]$ :

$$||x^{k+1} - x^*|| \leq ||x^k - x^*||.$$

2. Passons maintenant à la preuve de la bornitude et de l'optimalité asymptotique.

Soit $x^* \in \mathcal{O}$. Par le point précédent, la monotonicité est assurée. En effet :

$$||x^{k+1} - x^*|| \leq ||x^k - x^*|| \qquad \forall k \geq 0.$$

De là, la $\lim\limits_{k \longrightarrow \infty} ||x^k - x^*||$ existe, ainsi qu'une constante $L \geq \varepsilon^k := \max\{||x^k||\}_{k=1}^l$ pour tout $l \geq 0$. De plus, par définition de l'ensemble $\mathcal{K}_{\mathbb{R}_k}$, nous avons $||y^k|| \leq L + 1$ pour tout $k \geq 0$. D'où, la suite $\{y^k\}_{k\geq 0}$ est bornée.

Montrons maintenant que

$$\lim_{k \longrightarrow \infty} f(y^k, x^k) = 0. \tag{5.6}$$

Par l'équation 5.5, nous avons

$$0 \leq -a(M^2 b - 2) f(y^k, x^k)^2 \leq -t_k(M^2 t_k - 2) f(y^k, x^k)^2,$$

car

$$a(M^2 b - 2) \geq t_k(M^2 t_k - 2) \qquad \forall k \geq 0.$$

En effet, puisque $t_k \in [a, b]$ pour tout $k \geq 0$ montrons que

$$a(M^2 b - 2) \geq t(M^2 t - 2) \qquad \forall t \in [a, b].$$

Prenons la fonction $t \rightsquigarrow t(M^2t-2)$. Cette fonction est convexe étant donné que sa dérivée seconde est égale à la constante $M^2$ strictement positive. Le maximum de la fonction est alors atteint sur l'intervalle $[a,b]$ et vaut $a$ ou $b$. D'où

$$t(M^2t-2) \leq \max\{a(M^2a-2), b(M^2b-2)\} \qquad \forall t \in [a,b].$$

Or $a(M^2a-2) \leq a(M^2b-2)$ et $b(M^2b-2) \leq a(M^2b-2)$. Donc

$$a(M^2b-2) \geq t(M^2t-2) \qquad \forall t \in [a,b].$$

On déduit à présent de l'équation 5.5

$$0 \leq ||x^k - x^*||^2 - ||x^{k+1} - x^*||^2 \qquad \forall x^* \in \mathcal{O} \text{ et } \forall k \geq 0.$$

Ce qui implique que

$$\lim_{k \longrightarrow \infty} f(y^k, x^k) = 0. \tag{5.7}$$

Reste à montrer que

$$\lim_{k \longrightarrow \infty} ||x^k - Tx^k|| = 0. \tag{5.8}$$

Par la non-expansivité ferme de l'opérateur $T$ et par l'équation 5.5, on a :

$$\begin{aligned}
||x^{k+1} - x^*||^2 &\leq \langle \left(x^k - t_k f(x^k, y^k)\xi^k\right) - x^*, x^{k+1} - x^* \rangle \\
&= \frac{1}{2}\Big[||(x^k - x^*) - t_k f(y^k, x^k)\xi^k||^2 + ||x^{k+1} - x^*||^2 \\
&\quad - ||x^k - x^{k+1} - t_k f(y^k, x^k)\xi^k||^2\Big] \\
&\leq \frac{1}{2}\Big[||x^k - x^*||^2 + ||x^{k+1} - x^*||^2 - ||x^k - x^{k+1} - t_k f(y^k, x^k)\xi^k||^2\Big] \\
&\leq \frac{1}{2}\Big[||x^k - x^*||^2 + ||x^{k+1} - x^*||^2 - ||x^k - x^{k+1}||^2 + 2t_k f(y^k, x^k)\langle x^k - x^{k+1}, \xi^k\rangle\Big]
\end{aligned}$$

Ce qui implique pour tout $x^* \in \mathcal{O}$ et pour tout $k \geq 0$ :

$$||x^k - x^{k+1}||^2 \leq ||x^k - x^*||^2 - ||x^{k+1} - x^*||^2 + 2Mbf(y^k, x^k)||x^k - x^{k+1}||.$$

De plus, l'existence de la limite en l'infini de $||x^k - x^*||$, le fait que la suite $\{x^k\}_{k\geq 0}$ soit bornée, ainsi que l'équation 5.7 impliquent que

$$\lim_{k \longrightarrow \infty} ||x^k - x^{k+1}|| = 0. \tag{5.9}$$

Calculons à présent $||x^{k+1} - Tx^{k+1}||$, on a alors par la non-expansivité de $T$ et par la bornitude de la suite $\{\xi^k\}_{k\geq 0}$, que :

$$\begin{aligned}
||x^{k+1} - Tx^{k+1}|| &= ||T\left(x^k - t_k f(y^k, x^k)\xi^k\right) - Tx^{k+1}|| \\
&\leq ||\left(x^k - t_k f(y^k, x^k)\xi^k\right) - x^{k+1}|| \\
&\leq ||x^k - x^{k+1}|| + Mbf(y^k, x^k).
\end{aligned}$$

En appliquant les limites 5.7 et 5.10, on obtient :

$$\lim_{k\longrightarrow\infty} ||x^k - Tx^k|| = 0. \tag{5.10}$$

D'où la thèse.

3. Enfin, terminons cette preuve par la convergence de l'algorithme.

Nous avons vu que la suite $\{x^k\}_{k\geq 0}$ était bornée. Il existe donc une sous-suite $\{x^{ki}\}_{i\geq 0}$ de $\{x^k\}_{k\geq 0}$ et un $z \in \mathbb{R}^n$ tels que

$$\lim_{i\longrightarrow\infty} x^{ki} = z.$$

A présent, posons

$$r^* = \sup_{k\geq 0} r_k < \infty,$$

prenons $\delta \in ]0,1[$,
et définissons la boule ouverte centrée en 0 de rayon $r^* + 1 - \delta$

$$B(0; r^* + 1 - \delta) = \{x \in \mathbb{R}^n : ||x|| < r^* + 1 - \delta\}.$$

Afin de rendre la preuve la plus claire possible, nous allons la décomposer en cinq étapes.

### 1) Montrons que $z \in \mathrm{Fix}(T) \cap B(0; r^* + 1 - \delta)$ et que $f(y,z) \leq 0$ pour tout $y \in B(0; r^* + 1 - \delta)$.

La preuve est similaire à celle faite page 64.
Par définition de $r^*$, il existe un entier $k_0 \geq 0$ tel que

$$r_{k_0} \geq r^* - \delta$$

Ce qui implique, par définition de $\mathcal{K}_{\mathbb{R}_k}$, que $B(0; r^* + 1 - \delta) \subset \mathcal{K}_{\mathbb{R}_k}$ pour tout $k \geq k_0$. De plus, pour tout $k \geq 0$, on a :

$$||x^n|| \leq r^k \leq r^* < r^* + 1 - \delta.$$

D'où

$$||z|| = \lim_{i\longrightarrow\infty} ||x^{ki}|| \leq r^* < r^* + 1 - \delta.$$

Ce qui signifie que $z \in B(0; r^* + 1 - \delta)$. Il reste donc à montrer que $z \in \mathrm{Fix}(T)$. Par l'absurde, supposons que $z \neq Tz$. Par l'équation 5.10, nous avons :

$$\begin{aligned}
\lim_{i\longrightarrow\infty} ||x^{ki} - z|| &< \liminf_{i\longrightarrow\infty} ||x^{ki} - Tz|| \\
&= \liminf_{i\longrightarrow\infty} ||x^{ki} - Tx^{ki} + Tx^{ki} - Tz|| \\
&= \liminf_{i\longrightarrow\infty} ||Tx^{ki} - Tz|| \\
&\leq \lim_{i\longrightarrow\infty} ||x^{ki} - z||.
\end{aligned}$$

Nous arrivons à une contradiction, ce qui nous prouve que $z \in \mathrm{Fix}(T) \cap B(0; r^* + 1 - \delta)$.
Afin de terminer cette première étape, montrons que $f(y, z) \leq 0 \quad \forall y \in B(0; r^* + 1 - \delta)$. Soit $y \in B(0; r^* + 1 - \delta)$. En utlisant la maximisation inexacte, et les limites

$$\lim_{k \longrightarrow \infty} f(y^k, x^k) = 0,$$

et

$$\lim_{k \longrightarrow \infty} \varepsilon_k = 0,$$

nous obtenons :

$$\begin{aligned} f(y,z) &= \lim_{i \longrightarrow \infty} f(y, x^{ki}) \\ &\leq \lim_{i \longrightarrow \infty} \left( f(y^{ki}, x^{ki}) + \varepsilon_{ki} \right) \\ &= 0. \end{aligned}$$

Cette dernière égalité implique que

$$f(y,z) \leq 0 \qquad \forall y \in B(0; r^* + 1 - \delta). \tag{5.11}$$

**2)** $f(z, y) \geq 0 \quad \forall y \in B(0; r^* + 1 - \delta)$.

Soit $y \in B(0; r^* + 1 - \delta)$. Puisque la boule ouverte $B(0; r^* + 1 - \delta)$ est convexe, nous avons pour tout $\lambda \in [0, 1]$ :

$$w = \lambda y + (1 - \lambda) z \in B(0; r^* + 1 - \delta).$$

Par l'équation 5.11, et puisque la fonction $f$ est convexe par rapport au second argument et que $f(x, x) = 0 \ \forall x \in \mathbb{R}^n$, on a :

$$0 = f(w, w) \leq \lambda f(w, y) + (1 - \lambda) f(w, z) \leq \lambda f(w, y).$$

De plus, comme $f$ est continue par rapport au premier argument, nous avons que

$$f(z, y) \geq 0 \quad \forall y \in B(0; r^* + 1 - \delta).$$

**3)** $z$ **RÉSOUD LE PROBLÈME EPFIX.**

Par les points précédents, nous savons qu'il existe un $z \in \mathbb{R}^n$ tel que

$$z \in \ \mathrm{Fix}(T) \cap B(0; r^* + 1 - \delta),$$

et

$$f(z, y) \geq 0 \quad \forall y \in \ \mathrm{Fix}(T) \cap B(0; r^* + 1 - \delta).$$

Posons $g(\cdot) = f(z, \cdot)$. Etant donné que $f(x, x) = 0 \ \forall x \in \mathbb{R}^n$ et que $f$ est convexe par rapport au second argument, et puisque $g$ est convexe avec $g(z) = 0$, nous avons pour tout $y \in \mathrm{Fix}(T) \cap B(0; r^* + 1 - \delta)$ :

$$0 = g(z) \leq g(y).$$

Nous voyons donc que $z$ est un minimum local de la fonction $g$. De plus, comme l'ensemble $\mathrm{Fix}(T)$ est non vide et convexe, $z$ est également un minimum global de $g$. D'où

$$z \in \ \mathrm{EPFix}.$$

**4)** $z \in \mathcal{O}$.

Par l'équation 5.11, nous avons $f(y,z) \leq 0$ pour tout $y \in \mathbb{R}^n$ où

$$||y|| < r^* + 1 - \delta.$$

Or, nous pouvons choisir arbitrairement $\delta$ dans l'intervalle $]0,1[$. Nous pouvons alors écrire que $f(y,z) \leq 0$ pour tout $y \in \mathbb{R}^n$ où

$$||y|| < r^* + 1.$$

Puisque $f$ est continue par rapport au premier argument, nous avons que $f(y,z) \leq 0$ pour tout $y \in \mathbb{R}^n$ où

$$||y|| \leq r^* + 1.$$

Si nous partons de

$$||y^k|| \leq r^* + 1,$$

nous obtenons $f(y^k, z) \leq 0$ pour tout $k \geq 0$. Ce qui signifie que $z \in \mathcal{O}$.

**5) La suite $\{x^k\}_{k\geq 0}$ est convergente.**

Nous avons vu au point 2. que la suite $\{x^k\}_{k\geq 0}$ était bornée. Il existe donc $z \in \mathbb{R}^n$ ainsi qu'une sous-suite $\{x^{ki}\}_{i\geq 0} \subset \{x^k\}_{k\geq 0}$ tels que

$$\lim_{i \longrightarrow \infty} x^{ki} = z.$$

On a donc :

$$\lim_{i \longrightarrow \infty} ||x^{ki}|| = ||z||,$$

ou encore :

$$\lim_{i \longrightarrow \infty} ||x^{ki} - z|| = 0. \tag{5.12}$$

Par le point précédent, nous savons que $z \in \mathcal{O}$. Nous savons également que

$$||x^{k+1} - z|| \leq ||x^k - z||.$$

Donc, la suite $\{||x^k - z||\}_{k\geq 0}$ est convergente. Par l'équation 5.13, nous pouvons conclure que la suite entière $\{||x^k - z||\}_{k\geq 0}$ converge vers 0 et donc

$$\lim_{k \longrightarrow \infty} x^k = z. \tag{5.13}$$

Ceci termine la preuve de la convergence ainsi que du théorème.

□

Maintenant que la méthode du sous-gradient pour les problèmes d'équilibre sur l'ensemble des points fixes a été établie et que la convergence a été démontrée, passons maintenant à une application. Nous allons appliquer la méthode à un problème vu au chapitre 1 : le problème d'équilibre de Nash.

## 6 Application au problème d'équilibre de Nash

Le problème d'équilibre de Nash a déjà été développé à la page 2.2 du chapitre 1. Ici le problème sera composé de :

- $\mathcal{S}_i$, un ensemble non vide, convexe et fermé de $\mathbb{R}^{k_i}$ pour chaque $i \in I := \{1, 2, \ldots, p\}$ et $\mathcal{S} = \prod_{i \in I} \mathcal{S}_i$.
- $T$, un opérateur défini par

$$T \; : \; \mathbb{R}^K \longrightarrow \mathbb{R}^K \tag{5.1}$$

$$x \rightsquigarrow T(x) = \left( \sum_{j=1}^{m_1} a_1^{(j)} P_{\mathcal{S}_1^{(j)}}(x_1), \ldots, \sum_{j=1}^{m_p} a_p^{(j)} P_{\mathcal{S}_p^{(j)}}(x_p) \right). \tag{5.2}$$

où $P_{\mathcal{S}_i^{(j)}} : \mathbb{R}^{k_i} \longrightarrow \mathcal{S}_i^{(j)}$ est la projection orthogonale pour tout $i \in I$ et pour tout $j = 1 : m_i$, et où $a_i^{(j)} > 0$ avec $\sum_{j=1}^{m_i} a_i^{(j)} = 1$.

Cette fonction est fermement non-expansive et satisfait $\mathrm{Fix}(T) = \prod_{i \in I} \mathcal{S}_i = \mathcal{S}$.

Notons que l'on a posé $\mathbb{R}^K = \mathbb{R}^{k_1} \times \mathbb{R}^{k_2} \times \cdots \times \mathbb{R}^{k_p}$. Afin d'appliquer L'ALGORITHME DE LA MÉTHODE DE PROJECTION INEXACTE DU SOUS-GRADIENT SUR L'ENSEMBLE DES POINTS FIXES au problème d'équilibre de Nash, définissons la fonction $f$ par

$$\begin{aligned} f(y,x) \;=\; & f_1(x_1, y_2, y_3, \ldots, y_p) - f_1(y_1, \ldots, y_p) \\ & + f_2(y_1, x_2, y_3 \ldots, y_p) - f_2(y_1, \ldots, y_p) \\ & + \ldots \\ & + f_p(y_1, y_2, y_3, \ldots, y_{p-1}, x_p) - f_p(y_1, \ldots, y_p) \end{aligned}$$

pour tout $y = (y_1, \ldots, y_p) \in \mathcal{S}$ et $x = (x_1, \ldots, x_p) \in \mathcal{S}$.
Cette fonction doit être convexe par rapport au second argument.
De plus, nous voyons que la fonction $f(y, \cdot)$ est convexe lorsque les fonctions $f_1(\cdot, y_2, \ldots, y_p)$, $f_2(y_1, \cdot, y_3, \ldots, y_p)$, $\ldots$, $f_p(y_1, y_2, \ldots, y_{p-1}, \cdot)$ sont convexes. Grâce à cette définition de la fonction $f$, nous pouvons affaiblir l'hypothèse de convexité. En effet, au lieu de supposer que $f_i$ est convexe en chacun de ses arguments, nous pouvons supposer simplement que $f_i$ est convexe en son $i^{\text{ème}}$ argument.

Donnons maintenant L'ALGORITHME DU SOUS-GRADIENT pour ce problème d'équilibre de Nash.

**Algorithme de la méthode du sous-gradient appliqué au problème d'équilibre de Nash**

***Pas 0 : initialisation***
*Soient* $k = 0$, $\varepsilon_k \geq 0$, $t_k > 0$, $x^0 = (x_1^0, x_2^0, \ldots, x_p^0) \in \mathbb{R}^{k_1} \times \mathbb{R}^{k_2} \times \cdots \times \mathbb{R}^{k_p}$ *un point initial et* $r_0 = ||x^0||$.

***Pas 1***
*Soient* $x^k = (x_1^k, x_2^k, \ldots, x_p^k) \in \mathbb{R}^{k_1} \times \mathbb{R}^{k_2} \times \cdots \times \mathbb{R}^{k_p}$ *et* $r_k \geq 0$ *donnés, et choisir* $\varepsilon_k \geq 0$ *et* $t_k > 0$.

1. *Rechercher un point*
$$y^k \in \mathcal{K}_{\mathbb{R}_k} = \{x \in \mathbb{R}^{k_1} \times \mathbb{R}^{k_2} \times \cdots \times \mathbb{R}^{k_p} : ||x|| \leq r^k + 1\}$$
*qui satisfait*
$$\sum_{i \in I} \left( f_i(y^{*i^k}, x_i^k) - f(y^k) \right) \geq 0,$$
*et*
$$\max_{y \in \mathcal{K}_{\mathbb{R}_k}} \sum_{i \in I} \left( f_i(y^{*i}, x_i^k) - f_i(y) \right) \geq \sum_{i \in I} \left( f_i(y^{*i^k}, x_i^k) - f_i(y^k) \right) + \varepsilon^k.$$
2. *Soit* $\xi^k = (\xi_1^k, \ldots, \xi_p^k)$.
*Pour chaque i, choisir* $\xi_i^k \in \partial f_i(y_i^k, \ldots, \cdot, \ldots, y_p^k)(x_i^k)$ *de façon arbitraire et calculer :*
$$x^{k+1} = T\left( x^k - t_k \sum_{i \in I} \left( f_i(y^{*i^k}, x_i^k) - f_i(y^k) \right) \xi^k \right).$$
3. *Mettre à jour* $k = k+1$ *et* $r_k$ *:*
$$r_{k+1} = \max\{r_k, ||x^{k+1}||\}.$$

Notons que dans la seconde étape du **Pas 1**, nous choisissions
$$\xi \in \partial \left( \sum_{i \in I} \left( f_i(y_{*i}^k, \cdot) - f_i(y^k) \right) \right) (x^k). \tag{5.3}$$

Cependant, le sous-différentiel de $f(y, \cdot)$ en $x$ vaut
$$\partial f(y, \cdot)(x) = \partial f_1(\cdot, y_2, \ldots, y_p)(x_1) \times \cdots \times \partial f_p(y_1, \ldots, y_{p-1}, \cdot)(x_p),$$
où $x = (x_1, \ldots, x_p)$, $y = (y_1, \ldots, y_p)$ et où $\times$ dénote le produit cartésien. De plus,
$$\partial f(y, \cdot)(x) \subset \mathbb{R}^{k_1} \times \cdots \times R^{k_p},$$
et
$$\partial f_1(\cdot, y_2, \ldots, y_p)(x_1) \subset R^{k_1}.$$

C'est pourquoi, il était préférable de simplifier l'équation 5.3, le terme $f_i(y^k)$ étant indépendant de $x$.

Démontrons à présent que cet algorithme converge via le théorème suivant :

**THÉORÈME 6.1 :**
Soient $\{x_k\}_{k\geq 0}$ et $\{y_k\}_{k\geq 0}$ générées par l'algorithme précédent et

$$\mathcal{O}_k = \{x^* \in \mathcal{C} : \sum_{i\in I} \left(f_i(y^{*i^k}, x^{*i} - f_i(y^k)\right) \leq 0\}.$$

On suppose que

$$\mathcal{O} = \bigcap_{k=1}^{\infty} \mathcal{O}_k \neq \emptyset.$$

et que la suite $\{\xi_k\}_{k\geq 0}$ est bornée par une constante $M$ strictement positive.
Alors, si $t_k \in [a,b] \subset ]0, \frac{2}{M^2}[$ pour tout $k \geq 0$ et pour tout $a, b > 0$, et si $\varepsilon_k \geq 0$ pour tout $k \geq 0$ satisfait

$$\lim_{k\longrightarrow\infty} \varepsilon_k = 0,$$

alors la suite $\{x_k\}_{k\geq 0}$ converge vers une solution du problème d'équilibre de Nash.

## 7 Résumé

Dans ce chapitre, différentes méthodes de projections ont été établies. Nous avons modifié, en lui ajoutant des hypothèses de convexité, notre problème d'équilibre de départ. Le problème d'admissibilité convexe a ensuite été défini. Nous avons démontré que si la fonction d'équilibre est pseudo-monotone, l'ensemble solutions de ce problème n'est plus un sous-ensemble de l'ensemble solutions du problème d'équilibre mais lui est égal. Après avoir illustré cela sur deux exemples, nous avons développé une première méthode de projection exacte. Celle-ci étant bien définie, nous avons pu en donner l'algorithme. Cependant, la convergence n'était assurée que si le problème d'admissiblité convexe admettait une solution ou si l'intersection d'une famille d'ensembles convexes n'était pas vide. Nous avons alors défini l'*algorithme de l'extragradient*. Celui-ci construit deux suites via deux projections orthogonales sur un ensemble convexe. Ses principaux avantages sont d'exiger des hypothèses plus faibles que le précédent et d'avoir une convergence assurée. Nous avons ensuite introduit la méthode de projection du sous-gradient. Deux versions de cette méthode ont été développées. La première utilise deux projections orthogonales et la deuxième utilise une combinaison convexe de deux projections approchées. Etant donné que la convergence n'était pas garantie, nous avons défini une dernière méthode de projections : *la méthode de projection du sous gradient sur un ensemble de points fixes*. Pour cela, nous avons adapté notre définition du problème d'équilibre sur un ensemble de points fixes. Grâce à cette méthode, nous avons retrouvé la convergence. De plus, elle permet une simplification de calculs par rapport à la méthode utilisant les projections. Enfin, ce chapitre est clôturé en appliquant cette méhtode au problème d'équilibre de Nash, en adaptant l'algorithme et établissant le théorème de convergence.

CHAPITRE 6

# Conclusions

Le but de ce mémoire était de définir le problème d'équilibre et de présenter différentes méthodes permettant de les résoudre. Pour cela, il a fallu introduire toutes les notions nécessaires comme la convexité, les rappels élémentaires d'optimisation, le problème d'inéquations variationnelles, et autres. Ensuite, nous avons vu que le problème d'équilibre pouvait être résolu via le problème auxiliaire car il lui était équivalent. Nous trouvions alors les solutions du problème d'équilibre en résolvant simplement un problème d'optimisation. Or, dans de nombreux problèmes, l'hypothèse de convexité est requise, ce qui nous a conduit au principe du problème auxiliaire. Tout comme le problème auxiliaire, celui-ci est équivalent au problème d'équilibre et ses solutions s'obtiennent par la résolution d'un problème d'optimisation faisant intervenir une fonction fortement convexe. De plus, les algorithmes de toutes ces méthodes convergent. Nous sommes ensuite passés à des méthodes de projections pour résoudre ces problèmes d'équilibre. En utilisant une projection exacte, nous avons vu que la méthode était bien définie mais que sa convergence n'était assurée que sous des hypothèses plus strictes. La convergence étant l'élément essentiel d'un algorithme, nous avons parcouru d'autres méthodes afin de trouver une méthode de projections assurant cette convergence. Nous avons commencé par étudier L'ALGORITHME DE L'EXTRAGRADIENT. Celui-ci exigeait deux projections et convergeait vers une solution du problème d'équilibre lorsque la fonction était pseudo-monotone. Enfin, nous sommes passés à des méthodes de projections inexactes. Nous en avons étudié deux méthodes de projections du sous-gradient, mais de nouveau nous n'avions pas toujours la convergence. De plus, les projections peuvent s'avérer, dans certains problèmes, difficiles à calculer. Nous avons donc établi une dernière méthode de projections : le projection du sous-gradient sur un ensemble de points fixes. Ce problème facilitait les calculs de certains problèmes et convergeait sous une faible condition.

ANNEXE A

# Annexe 1

## 1 La monotonicité

L'hypothèse de forte monotonicité a été utilisée dans l'algorithme 2.1 page 36. Rappelons donc les différentes définitions de cette notion :

**DÉFINITION 1.1 :**
Soit $\mathcal{K}$ un ensemble non vide, convexe et fermé de $\mathbb{R}^n$, et soit une fonction $f : \mathcal{K} \times \mathcal{K} \longrightarrow \mathbb{R}$.
La fonction $f$ est dite

- **monotone** sur $\mathcal{K}$ si pour tout $x, y \in \mathcal{K}$ :

$$f(x,y) + f(y,x) \leq 0.$$

- **strictement monotone** sur $\mathcal{K}$ si pour tout $x, y \in \mathcal{K}$, avec $x \neq y$ :

$$f(x,y) + f(y,x) < 0.$$

- **fortement monotone** de module $\alpha > 0$ sur $\mathcal{K}$ si pour tout $x, y \in \mathcal{K}$, on a :

$$f(x,y) + f(y,x) \leq -\alpha \parallel y - x \parallel^2 .$$

- **pseudomonotone** sur $\mathcal{K}$ si pour tout $x, y \in \mathcal{K}$, la relation suivante est vérifiée :

$$f(x,y) \geq 0 \Rightarrow f(y,x) \leq 0.$$

De plus, si l'on suppose, comme dans l'algorithme 2.2 page 39, que $\mathcal{F}$ est un opérateur sur $\mathcal{K}$ à valeurs dans $\mathbb{R}^n$, la définition de forte monotonicité devient alors la suivante :

**DÉFINITION 1.2 :**
Soit $\mathcal{K}$ un ensemble non vide, convexe et fermé de $\mathbb{R}^n$, et soit un opérateur $F : \mathcal{K} \longrightarrow \mathbb{R}^n$.
L'opérateur $\mathcal{F}$ est **fortement monotone** de module $\alpha > 0$ sur $\mathcal{K}$ s'il vérifie l'inégalité suivante pour tout $x, y \in \mathcal{K}$ :

$$\langle \mathcal{F}(y) - \mathcal{F}(x), y - x \rangle \leq -\alpha \parallel y - x \parallel^2 .$$

## 2 Les fonctions Lipschitz-continue

Une application Lipschitzienne est une application possédant une certaine propriété de régularité plus forte que la continuité. Intuitivement, il s'agit d'une fonction limitée dans sa manière d'évoluer. Tout segment reliant deux points au graphe d'une fonction aura une pente inférieure à une constante appelée **constante de Lipschitz**. Mathématiquement, nous avons la définition suivante :

**DÉFINITION 2.1 :**
Soit $\mathcal{K}$ un ensemble non vide, différent d'un singleton de $\mathbb{R}$, soient une application $f : \mathcal{K} \longrightarrow \mathbb{R}$ et un réel strictement positif $L$. On dit que la fonction $f$ est **L-Lipschitzienne** si et seulement si

$$|f(x) - f(y)| \leq L|x - y|, \qquad \forall x, y \in \mathbb{R}.$$

Le plus petit $L$ tel que la fonction soit L-Lipschitzienne est appelé la **constante de Lipschitz**.

Dans la proposition 2.3 de la page page 40, nous utilisons un opérateur Lipschitz-continu. Voyons la définition de celui-ci :

**DÉFINITION 2.2 :**
Soit $\mathcal{K}$ un ensemble non-vide, convexe de $\mathbb{R}^n$. et soit un opérateur $\mathcal{F} : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$. L'opérateur $\mathcal{F}$ est dit **Lipschitz-continu** sur $\mathcal{K}$ de constante $L$, si pour tout $x, y \in \mathcal{K}$, on a

$$\sup_{u \in \mathcal{F}(x)} \inf_{v \in \mathcal{F}(y)} ||u - v|| \leq L||x - y||.$$

# Annexe 2

## 1 La semi-continuité et l'hémi-continuité

Dans le théorème 5.2 page 52, nous avons supposé une fonction $f$ semi-continue supérieurement. Rappelons-en la définition :

**DÉFINITION 1.1 :**
Soient $X$ un espace topologique, $x_0$ un point de $X$ et une fonction $f : X \longrightarrow \mathbb{R}$. On dit que $f$ est :

- **semi-continue supérieurement** en $x_0$ si pour tout $\epsilon > 0$, il existe un voisinage $U$ de $x_0$ tel que

  $$f(x) < f(x_0) + \epsilon \qquad \forall x \in U.$$

  C'est-à-dire lorsque

  $$\limsup_{x \longrightarrow x_0} f(x) \leq f(x_0).$$

  La fonction $f$ est dite **semi-continue supérieurement** si elle est semi-continue supérieurement en tout point de son ensemble de définition.

- **semi-continue inférieurement** en $x_0$ si pour tout $\epsilon > 0$, il existe un voisinage $U$ de $x_0$ tel que

  $$f(x) > f(x_0) + \epsilon \qquad \forall x \in U.$$

  C'est-à-dire lorsque

  $$\liminf_{x \longrightarrow x_0} f(x) \geq f(x_0).$$

  La fonction $f$ est dite **semi-continue inférieurement** si elle est semi-continue inférieurement en tout point de son ensemble de définition.

- **semi-continue** si elle est semi-continue inférieurement et semi-continue supérieurement.

Graphiquement, voyons un exemple de fonction semi-continue supérieurement avec $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ où

$$\begin{cases} f(x) = x^2 & \text{pour } x \in [-2,1] \\ f(x) = -(x-2)^2 + 3 & \text{pour } x \in [1,4] \end{cases}$$

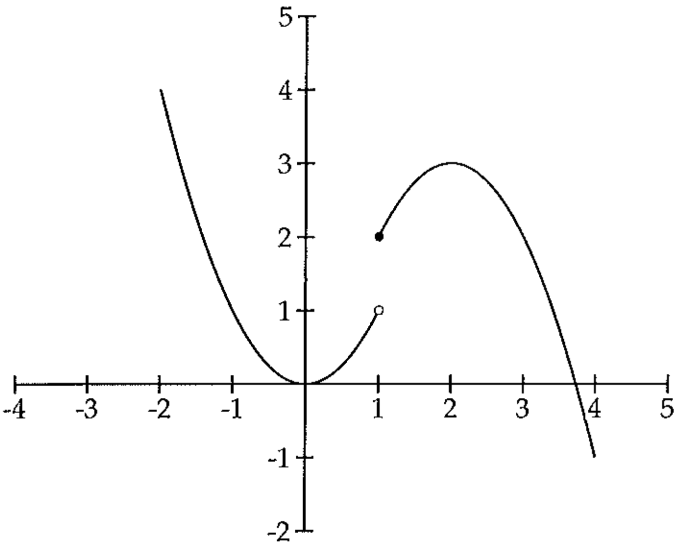



**Fig. B.1** – *Exemple de fonction semi-continue supérieurement.*

Montrons également un exemple de fonction semi-continue inférieurement avec $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ où

$$\begin{cases} f(x) = x^2 & \text{pour } x \in [-2,1] \\ f(x) = -(x-2)^2 + 3 & \text{pour } x \in [1,4] \end{cases}$$

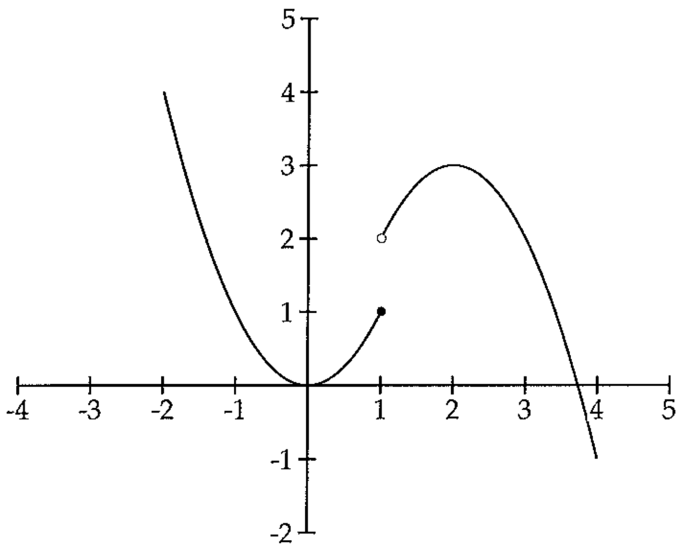



**Fig. B.2** – *Exemple de fonction semi-continue inférieurement.*

De plus, dans le théorème 1.2 de la page page 43, nous utilisons en plus de la pseudo-monotonicité, l'hémi-continuité. Rappelons-en à présent la définition :

**DÉFINITION 1.2 :**
Soient $X$ un espace métrique, et $Y$ un espace vectoriel normé. Supposons $f$ une correspondance de $X$ dans $Y$. Alors $f$ est **hémi-continue supérieurement** si pour tout $p \in Y^*$, l'application

$$x \longrightarrow \sup_{y \in f(x)} \langle p, y \rangle$$

est semi-continue supérieurement.

## 2 Définition et propriétés du sous gradient

Dans le même théorème que celui faisant référence aux fonctions semi-continues, nous y avons introduit une notion plus faible que la différentiabilité : **la sous-différentiabilité**. Nous allons à présent en donner la définition ainsi que les propriétés importantes.

**DÉFINITION 2.1 :**
Soit $f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$ une fonction convexe.
Un vecteur $x^* \in \mathbb{R}^n$ est le **sous-gradient** de $f$ au point $x$ si on a :

$$f(y) \geq f(x) + \langle x^*, y - x \rangle, \qquad \forall y \in \mathbb{R}^n.$$

Le **sous-différentiel** de $f$ en $x$, noté $\partial f(x)$, est l'ensemble de tous les sous-gradients de $f$ en $x$. De plus, la fonction $f$ est dite **sous-différentiable** au point $x$ si l'ensemble $\partial f(x)$ est non-vide.

Etablissons maintenant les propriétés importantes du sous-gradient :

**PROPOSITION 2.1 :**
Soient $f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$ une fonction convexe telle que $\partial f(x)$ soit non-vide et compact. Alors $\forall x \in \mathrm{dom} f$, on a :
- $\forall \varepsilon > 0$, $\partial(\varepsilon f)(x) = \varepsilon \partial f(x)$,
- $\partial(f+g)(x) = \partial f(x) + \partial g(x)$,
- $x$ est un minimum de la fonction $f$ si et seulement si $0 \in \partial f(x)$.

## 3 L'hyperplan

Dans la méthode de projection du sous-gradient page 57, la notion d'hyperplan a été introduite. Un hyperplan est un concept géométrique. Il s'agit d'une généralisation à plusieurs dimensions du concept de la droite en géométrie plane, et du concept de plan dans la géométrie à trois dimensions. Dans l'espace à une dimension, un hyperplan est un point. En effet, celui-ci divise la droite en deux parties. Dans l'espace à deux dimensions, un hyperplan est un plan ordinaire, il divise l'espace en deux demi-espaces. Ce concept peut être appliqué aux espaces à quatre dimensions et plus. L'objet qui divise l'espace est alors appelé un hyperplan. Rappelons à présent la définition de ce concept.

**DÉFINITION 3.1 :**
Soit $E$ un $K$-espace vectoriel et $H$ un sous-espace vectoriel de $E$.
On dit que $H$ est un **hyperplan** de $E$ si $H$ est de codimension 1.

Remarquons que dans un espace de dimension finie $n$, les hyperplans sont donc les sous-espaces vectoriels de dimension $n-1$.

## 4 La combinaison convexe

Dans le second algorithme de la méthode de projection du sous-gradient, une combinaison convexe est utilisée. Les rappels de convexité se trouvant au chapitre 2, il ne nous reste qu'à rappeler la définition de cette notion :

**DÉFINITION 4.1 :**
Soit $E$ un espace vectoriel, et $a_1, \cdots, a_p$ appartenant à $\mathbb{R}^n$.
On appelle **combinaison convexe** des $a_i$, pour $i = 1 : p$, tout point $x$ de $E$ de la forme

$$x = t_1 a_1 + \cdots + t_p a_p,$$

où les $t_i$ sont des réels positifs tels que $\sum_{i=1}^{p} t_i = 1$.

Notons qu'un sous-ensemble de $E$ est convexe si et seulement s'il est stable par combinaison convexe, c'est-à-dire que toute combinaison convexe de vecteurs de $C$ appartient à $C$.

# Bibliographie


[1] NGUYEN, V.H., *Lectures Notes on Equilibrium Problems Part I*, CIUF-CUD Summer School on Optimization and Applied Mathematics, Nha Trang University, Nha Trang, Vietnam, August 2002.

[2] NGUYEN, V.H., *Lectures Notes on Equilibrium Problems Part II*, CIUF-CUD Summer School on Optimization and Applied Mathematics, Nha Trang University, Nha Trang, Vietnam, August 2002.

[3] IIDUKA, H. and YAMADA, I., *A subgradient-type method for the equilibrium problem over the fixed point set and its applications*, Optimization, à paraitre.

[4] CALLIER, F. and DESOER, C., *Linear System Theory*, Springer-Verlag, New-York, 1991.

[5] STRODIOT, J.J., *Optimisation et contrôle* (Chapter 9), Département de Mathématique, Université de Namur (FUNDP), Namur, 2006.

[6] NGUYEN, V.H. *An Introduction to Variational Inequalities and Related Problems*(Chapter 6), Cours donné à l'Institut de Mathématique de Hanoi, Vietnam, 2004.

[7] MASTROENI, G.D., *Minimax and extremum problems associated to a variational inequality*, Department of Mathematics, University of Pisa, Pisa, Italy, 1999.

[8] MASTROENI, G.D., *On auxiliary principle for equilibrium problems*, Department of Mathematics, University of Pisa, Pisa, Italy, 2004.

[9] COHEN, G., *Auxiliary problem principle and decomposition of optimization problems*, Journal of Optimization Theory and Applications, Vol.32, 1980.

[10] COHEN, G., *Auxiliary problem principle extended to variational inequalities*, Journal of optimization theory and applications, Vol.59, 1988.

[11] BLUM, E. and OETTLI, W., *From optimization and variational inequalities to equilibrium problems*, The mathematics student, Vol.63, 1994.

[12] ROCKAFELLAR, R. T. *Convex Analysis*, Princeton University Press, New Jersey 1972.