

Analyses préalables  
pour une ingénierie didactique  
sur la trigonométrie



Marie PIERARD et Valérie HENRY

Didactifen

6 juillet 2018



UNIVERSITÉ  
DE NAMUR

- 1 Introduction
- 2 Historique
- 3 Cadre théorique
- 4 Analyses préalables
- 5 Conclusions provisoires
- 6 Perspectives
- 7 Références



UNIVERSITÉ  
DE NAMUR

## **Introduction**

Historique

Cadre  
théorique

Analyses  
préalables

Littérature  
Programmes

Conclusions  
provisoires

Perspectives

Références

# Introduction



UNIVERSITÉ  
DE NAMUR

- Présentation



UNIVERSITÉ  
DE NAMUR



INSTITUT  
D'ENSEIGNEMENT  
DES **ARTS**  
**TECHNIQUES**  
**SCIENCES**  
ET **ARTISANATS** NAMUR

**Introduction**

Historique

Cadre  
théorique

Analyses  
préalables

Littérature  
Programmes

Conclusions  
provisaires

Perspectives

Références



UNIVERSITÉ  
DE NAMUR

## Introduction

Historique

Cadre  
théorique

Analyses  
préalables

Littérature  
Programmes

Conclusions  
provisoires

Perspectives

Références

## ● Présentation



UNIVERSITÉ  
DE NAMUR



INSTITUT  
D'ENSEIGNEMENT  
DES ARTS  
TECHNIQUES  
SCIENCES  
ET ARTISANATS  
NAMUR

## ● Motivations

- ▶ Mémoire sur l'utilisation des TICE pour l'enseignement de la trigonométrie
  - ★ TICE
  - ★ Trigonométrie
- ▶ Changements récents dans les programmes et les référentiels
- ▶ Place de la trigonométrie dans le curriculum belge



## Introduction

Historique

Cadre  
théorique

Analyses  
préalables

Littérature

Programmes

Conclusions  
provisaires

Perspectives

Références

- Questions de recherche

Quel rôle donner au cercle trigonométrique dans l'enseignement secondaire belge ?

- ▶ Quelle est la place du cercle trigonométrique dans le savoir savant ?
- ▶ Quels obstacles le cercle trigonométrique génère-t-il auprès des élèves de l'enseignement secondaire ?
- ▶ Considérant le cercle trigonométrique comme un artefact, où le placer dans le savoir à enseigner pour générer une instrumentalisation et une instrumentation les plus complètes possible ?



UNIVERSITÉ  
DE NAMUR

Introduction

**Historique**

Cadre  
théorique

Analyses  
préalables

Littérature  
Programmes

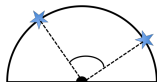
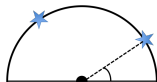
Conclusions  
provisoires

Perspectives

Références

Historique

- Grèce, II<sup>e</sup> siècle ACN : *trigonométrie et astronomie*



Introduction

**Historique**

Cadre  
théorique

Analyses  
préalables

Littérature  
Programmes

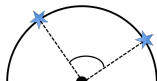
Conclusions  
provisoires

Perspectives

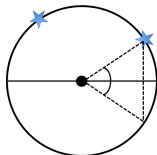
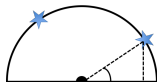
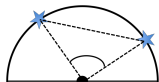
Références



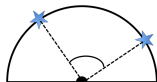
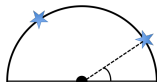
- Grèce, II<sup>e</sup> siècle ACN : *trigonométrie et astronomie*



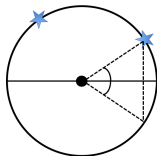
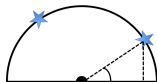
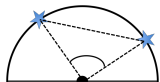
- Inde, V<sup>e</sup> siècle : *le sinus*



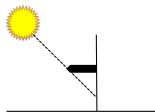
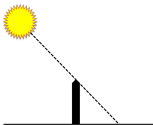
- Grèce, II<sup>e</sup> siècle ACN : *trigonométrie et astronomie*



- Inde, V<sup>e</sup> siècle : *le sinus*

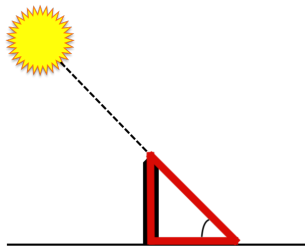
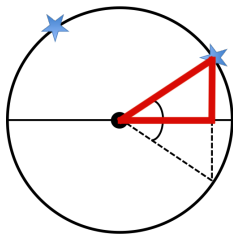


- Monde musulman, IX-XV<sup>e</sup> siècle : *gnomons et trigonométrie du triangle*





- Rapprochement des deux trigonométries au XIII<sup>e</sup> siècle



- La trigonométrie est une histoire d'angles, de rapports de longueurs et des liens qui les unissent.



UNIVERSITÉ  
DE NAMUR

Introduction

Historique

**Cadre  
théorique**

Analyses  
préalables

Littérature  
Programmes

Conclusions  
provisoires

Perspectives

Références

## Cadre théorique



## Ingénierie didactique d'Artigue

- Méthodologie de recherche basée sur l'expérimentation, mise en place pour relier la recherche et la pratique
- À validation interne  
(pas de groupes expérimentaux et de groupes témoins)
- Directement liée à la Théorie des Situations Didactiques de BROUSSEAU  
(dévolution, institutionnalisation, variables didactiques,...)



UNIVERSITÉ  
DE NAMUR

Introduction

Historique

**Cadre  
théorique**

Analyses  
préalables

Littérature

Programmes

Conclusions  
provisoires

Perspectives

Références

## Différentes phases

- 1 Analyses préalables
  - ▶ littérature,
  - ▶ recherche épistémologique,...→ s'approprier le sujet



## Différentes phases

- 1 Analyses préalables
  - ▶ littérature,
  - ▶ recherche épistémologique,...
  - s'approprier le sujet
- 2 Conception et analyse *a priori*
  - ▶ planification
  - ▶ réactions attendues des élèves,
  - ▶ rôle de l'enseignant et des élèves,
  - ▶ variables didactiques,
  - ▶ constructions attendues,...
  - anticiper et organiser l'expérimentation



## Différentes phases

- 1 Analyses préalables
  - ▶ littérature,
  - ▶ recherche épistémologique,...
  - s'approprier le sujet
- 2 Conception et analyse *a priori*
  - ▶ planification
  - ▶ réactions attendues des élèves,
  - ▶ rôle de l'enseignant et des élèves,
  - ▶ variables didactiques,
  - ▶ constructions attendues,...
  - anticiper et organiser l'expérimentation
- 3 Expérimentation





## Différentes phases

- 1 Analyses préalables
  - ▶ littérature,
  - ▶ recherche épistémologique,...
  - s'approprier le sujet
- 2 Conception et analyse *a priori*
  - ▶ planification
  - ▶ réactions attendues des élèves,
  - ▶ rôle de l'enseignant et des élèves,
  - ▶ variables didactiques,
  - ▶ constructions attendues,...
  - anticiper et organiser l'expérimentation
- 3 Expérimentation
- 4 Analyse *a posteriori* et évaluation
  - ▶ réactions des élèves,
  - ▶ interventions de l'enseignant,
  - ▶ constructions réalisées,...
  - confronter les analyses *a priori* et *a posteriori*



UNIVERSITÉ  
DE NAMUR

Introduction

Historique

Cadre  
théorique

**Analyses  
préalables**

Littérature  
Programmes

Conclusions  
provisoires

Perspectives

Références

## Analyses préalables



UNIVERSITÉ  
DE NAMUR

## Contenu

- 1 Histoire et savoir savant en trigonométrie
- 2 Revue de la littérature didactique
- 3 Analyse de programmes
- 4 Analyse de manuels
- 5 Enquête auprès d'enseignants

Introduction

Historique

Cadre  
théorique

**Analyses  
préalables**

Littérature  
Programmes

Conclusions  
provisoires

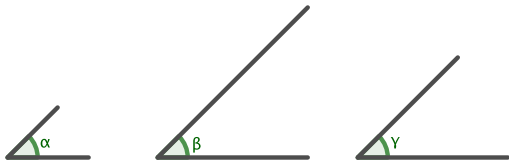
Perspectives

Références



UNIVERSITÉ  
DE NAMUR

D'après la littérature



Introduction

Historique

Cadre  
théorique

Analyses  
préalables

**Littérature**

Programmes

Conclusions  
provisoires

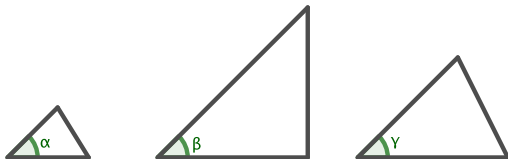
Perspectives

Références



UNIVERSITÉ  
DE NAMUR

D'après la littérature



Introduction

Historique

Cadre  
théorique

Analyses  
préalables

**Littérature**

Programmes

Conclusions  
provisoires

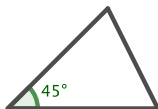
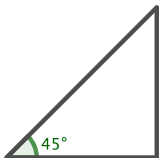
Perspectives

Références



UNIVERSITÉ  
DE NAMUR

D'après la littérature



Introduction

Historique

Cadre  
théorique

Analyses  
préalables

**Littérature**

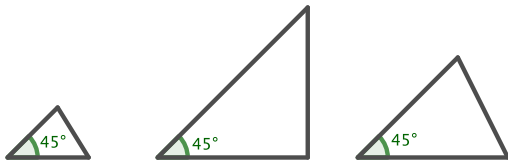
Programmes

Conclusions  
provisoires

Perspectives

Références

## D'après la littérature

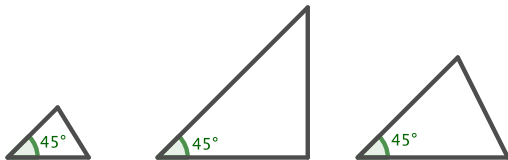


Difficultés :

- un angle appartiendrait forcément à un polygone ;
- les côtés d'un angle seraient de longueur déterminée ;
- l'amplitude d'un angle dépendrait de la longueur de ses côtés.

DE KEE *et al.* (1996)  
THOMPSON (2008)  
VADCARD (2002)

D'après la littérature



Difficultés :

- un angle appartiendrait forcément à un polygone ;
- les côtés d'un angle seraient de longueur déterminée ;
- l'amplitude d'un angle dépendrait de la longueur de ses côtés.

DE KEE *et al.* (1996)  
THOMPSON (2008)  
VADCARD (2002)

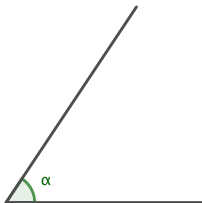
Historiquement : un angle ne dépendait pas d'un polygone  
(angle entre 2 étoiles).





UNIVERSITÉ  
DE NAMUR

D'après la littérature



$$\tan(\alpha) = ?$$

Introduction

Historique

Cadre  
théorique

Analyses  
préalables

**Littérature**

Programmes

Conclusions  
provisoires

Perspectives

Références



UNIVERSITÉ  
DE NAMUR

Introduction

Historique

Cadre  
théorique

Analyses  
préalables

**Littérature**

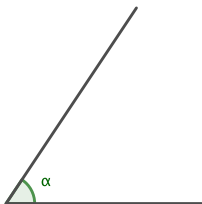
Programmes

Conclusions  
provisoires

Perspectives

Références

D'après la littérature



$$\tan(\alpha) = \frac{\text{longueur côté opposé}}{\text{longueur côté adjacent}}$$



UNIVERSITÉ  
DE NAMUR

Introduction

Historique

Cadre  
théorique

Analyses  
préalables

**Littérature**

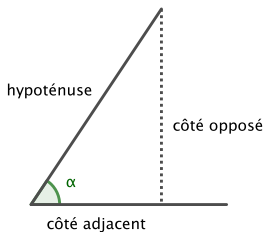
Programmes

Conclusions  
provisoires

Perspectives

Références

D'après la littérature



$$\tan(\alpha) = \frac{\text{longueur côté opposé}}{\text{longueur côté adjacent}}$$



UNIVERSITÉ  
DE NAMUR

Introduction

Historique

Cadre  
théorique

Analyses  
préalables

**Littérature**

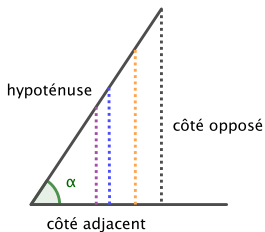
Programmes

Conclusions  
provisoires

Perspectives

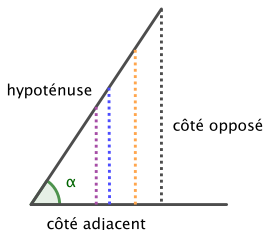
Références

D'après la littérature



$$\tan(\alpha) = \frac{\text{longueur côté opposé}}{\text{longueur côté adjacent}}$$

D'après la littérature



$$\tan(\alpha) = \frac{\text{longueur côté opposé}}{\text{longueur côté adjacent}}$$

Difficultés :

- la tangente est univoquement déterminée par l'amplitude de l'angle, pas par un triangle ;
- si on veut un triangle, il y en a plusieurs possibles ;
- la tangente est un rapport de longueurs, sans unités et indépendante du triangle choisi.



UNIVERSITÉ  
DE NAMUR

Introduction

Historique

Cadre  
théorique

Analyses  
préalables

**Littérature**

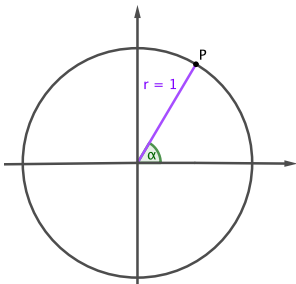
Programmes

Conclusions  
provisoires

Perspectives

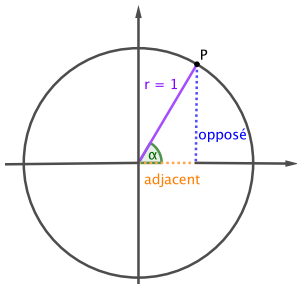
Références

D'après la littérature



$$\cos(\alpha) = \frac{\text{longueur côté adjacent}}{\text{longueur hypoténuse}}$$

D'après la littérature



$$\begin{aligned} \cos(\alpha) &= \frac{\text{longueur côté adjacent}}{\text{longueur hypoténuse}} \\ &= \frac{\text{longueur côté adjacent}}{\text{rayon}} \end{aligned}$$



UNIVERSITÉ  
DE NAMUR

Introduction

Historique

Cadre  
théorique

Analyses  
préalables

**Littérature**

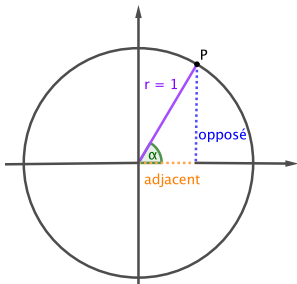
Programmes

Conclusions  
provisoires

Perspectives

Références

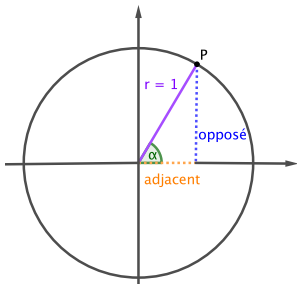
D'après la littérature



$$\begin{aligned}\cos(\alpha) &= \frac{\text{longueur côté adjacent}}{\text{longueur hypoténuse}} \\ &= \frac{\text{longueur côté adjacent}}{\text{rayon}} \\ &= \text{longueur côté adjacent}\end{aligned}$$

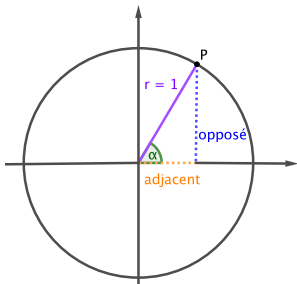


D'après la littérature



$$\begin{aligned} \cos(\alpha) &= \frac{\text{longueur côté adjacent}}{\text{longueur hypoténuse}} \\ &= \frac{\text{longueur côté adjacent}}{\text{rayon}} \\ &= \text{longueur côté adjacent} \\ &= \text{abscisse du point } P \\ &\quad (\text{sur l'axe horizontal}) \end{aligned}$$

D'après la littérature



$$\begin{aligned} \cos(\alpha) &= \frac{\text{longueur côté adjacent}}{\text{longueur hypoténuse}} \\ &= \frac{\text{longueur côté adjacent}}{\text{rayon}} \\ &= \text{longueur côté adjacent} \\ &= \text{abscisse du point } P \\ &\quad (\text{sur l'axe horizontal}) \end{aligned}$$

Difficultés :

- cosinus = longueur ;
- cosinus d'un point ;
- cos au lieu de  $\cos(\alpha)$  ;
- Le cosinus deviendra une ordonnée (sur l'axe vertical) lors de la représentation graphique de la fonction cosinus.



UNIVERSITÉ  
DE NAMUR

D'après les programmes

Introduction

Historique

Cadre  
théorique

Analyses  
préalables

Littérature

**Programmes**

Conclusions  
provisoires

Perspectives

Références

Historiquement,

- la trigonométrie est apparue dans le cercle,
- les problèmes gnomoniques faisaient intervenir la tangente.



## D'après les programmes

Introduction

Historique

Cadre  
théorique

Analyses  
préalables

Littérature

**Programmes**

Conclusions  
provisoires

Perspectives

Références

Historiquement,

- la trigonométrie est apparue dans le cercle,
- les problèmes gnomoniques faisaient intervenir la tangente.

Les programmes actuels ne vont pas dans ce sens.

- La trigonométrie est introduite dans le triangle.
- La tangente est présentée en dernier.



## D'après les programmes

On observe des évolutions

- dans les noms,
  - ▶ sinus d'un angle ou sinus d'un arc
  - ▶ nombres trigonométriques, rapports trigonométriques ou nombres goniométriques
  - ▶ fonctions trigonométriques, circulaires, ou d'angles

Introduction

Historique

Cadre  
théorique

Analyses  
préalables

Littérature

**Programmes**

Conclusions  
provisoires

Perspectives

Références



## D'après les programmes

On observe des évolutions

- dans les noms,
  - ▶ sinus d'un angle ou sinus d'un arc
  - ▶ nombres trigonométriques, rapports trigonométriques ou nombres goniométriques
  - ▶ fonctions trigonométriques, circulaires, ou d'angles
- dans les définitions et constructions,
  - 50' projections orthogonales
  - 70' coordonnées dans le cercle trigonométrique et lien avec le produit scalaire (vecteurs)
  - 80' projections orthogonales
  - 90' dans le triangle puis dans le cercle

Introduction

Historique

Cadre  
théorique

Analyses  
préalables

Littérature

**Programmes**

Conclusions  
provisaires

Perspectives

Références



## D'après les programmes

On observe des évolutions

- dans les noms,
  - ▶ sinus d'un angle ou sinus d'un arc
  - ▶ nombres trigonométriques, rapports trigonométriques ou nombres goniométriques
  - ▶ fonctions trigonométriques, circulaires, ou d'angles
- dans les définitions et constructions,
  - 50' projections orthogonales
  - 70' coordonnées dans le cercle trigonométrique et lien avec le produit scalaire (vecteurs)
  - 80' projections orthogonales
  - 90' dans le triangle puis dans le cercle
- dans l'ordre d'enseignement des notions.

Introduction

Historique

Cadre  
théorique

Analyses  
préalables

Littérature

**Programmes**

Conclusions  
provisaires

Perspectives

Références



UNIVERSITÉ  
DE NAMUR

Introduction

Historique

Cadre  
théorique

Analyses  
préalables

Littérature  
Programmes

**Conclusions  
provisoires**

Perspectives

Références

## Conclusions provisoires des analyses préalables





UNIVERSITÉ  
DE NAMUR

Introduction

Historique

Cadre  
théorique

Analyses  
préalables

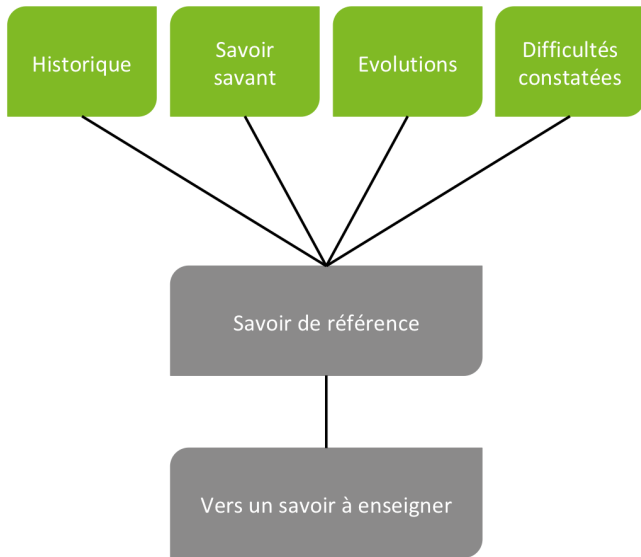
Littérature

Programmes

**Conclusions  
provisoires**

Perspectives

Références



- Valorisation des rapports de longueurs
  - ▶ Travailler avec des projections orthogonales et pas dans un polygone.
  - ▶ Garder les fondements historiques.
  - ▶ Gérer les conceptions erronées induites par certaines simplifications.

Introduction

Historique

Cadre  
théorique

Analyses  
préalables

Littérature  
Programmes

**Conclusions  
provisoires**

Perspectives

Références

Introduction

Historique

Cadre  
théorique

Analyses  
préalables

Littérature  
Programmes

**Conclusions  
provisoires**

Perspectives

Références

- Valorisation des rapports de longueurs
  - ▶ Travailler avec des projections orthogonales et pas dans un polygone.
  - ▶ Garder les fondements historiques.
  - ▶ Gérer les conceptions erronées induites par certaines simplifications.
- Instrumentalisation du cercle trigonométrique (RABARDEL)
  - ▶ Voir le cercle trigonométrique comme un artefact.
  - ▶ Instrumentaliser l'artefact au fur et à mesure de sa conception.



UNIVERSITÉ  
DE NAMUR

Introduction

Historique

Cadre  
théorique

Analyses  
préalables

Littérature  
Programmes

Conclusions  
provisoires

**Perspectives**

Références

# Perspectives



UNIVERSITÉ  
DE NAMUR

Introduction

Historique

Cadre  
théorique

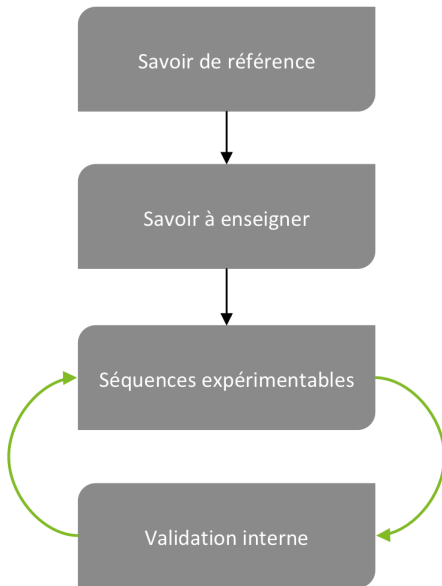
Analyses  
préalables

Littérature  
Programmes

Conclusions  
provisoires

**Perspectives**

Références





UNIVERSITÉ  
DE NAMUR

Introduction

Historique

Cadre  
théorique

Analyses  
préalables

Littérature  
Programmes

Conclusions  
provisoires

**Perspectives**

Références

Merci pour votre attention !



UNIVERSITÉ  
DE NAMUR

Introduction

Historique

Cadre  
théorique

Analyses  
préalables

Littérature  
Programmes

Conclusions  
provisaires

Perspectives

Références

- ▶ Bessot, A. (2011).  
L'ingénierie didactique au coeur de la théorie des situations.  
En amont et en aval des ingénieries didactiques, 1 :29–56.
- ▶ Bloch, I. (2009).  
Activité... la mesure des angles en radians au lycée.  
Petit x, 80 :47–53.
- ▶ Bressoud, D. (2010).  
Historical reflections on teaching trigonometry.  
The Mathematics Teacher, 104 (2) :106–112.
- ▶ Brousseau, G. (2011).  
La théorie des situations didactiques en mathématiques.  
Education et didactique, 5-1 :101–104.
- ▶ CREM (2004).  
Pour une culture mathématique accessible à tous, Élaboration d'outils pédagogiques pour développer des compétences citoyennes.  
coordinateurs : M. Ballieu et M.-F. Guissard.
- ▶ De Kee, S., Mura, R., and Dionne, J. (1996).  
La compréhension des notions de sinus et de cosinus chez les élèves du secondaire.  
For the Learning of Mathematics, 16 (2) :19–27.
- ▶ Gelin, E. (1902).  
Précis de trigonométrie rectiligne.  
Wesmael-Charlier.
- ▶ IREM de Poitiers (2014).  
Enseigner les mathématiques en 5<sup>e</sup> à partir des grandeurs : les angles.  
T. Chevalarias *et al.*



UNIVERSITÉ  
DE NAMUR

Introduction

Historique

Cadre  
théorique

Analyses  
préalables

Littérature  
Programmes

Conclusions  
provisoires

Perspectives

Références

- ▶ Kendal, M. and Stacey, K. (1996).  
Trigonometry : Comparing ratio and unit circle methods.  
Technology in mathematics education : proceedings of the 19th annual conference of the Mathematics Education Research Group of Australasia (MERGA).
- ▶ Lefort, J. (1998).  
Petite histoire de la trigonométrie.  
L'Ouvert, (91) :10–16.
- ▶ Looze, A. (2014).  
La trigonométrie : une histoire à l'envers tournée vers le ciel.  
Diapositives pour une formation CECAFOC.
- ▶ Proulx, J. (2003).  
L'histoire de la trigonométrie comme outil de réflexion didactique.  
Bulletin de l'Association Mathématique du Québec, XLIII(3) :13–27.
- ▶ Rabardel, P. (1995a).  
Les hommes et les technologies - Une approche cognitive des instruments contemporains.  
Armand Colin.
- ▶ Rabardel, P. (1995b).  
Qu'est-ce qu'un instrument ? Appropriation, conceptualisation, mises en situation.  
Le mathématicien, le physicien et le psychologue - Outils pour le calcul et le traçage de courbes,  
CNDP :61–65.
- ▶ Rabardel, P. (1999).  
Éléments pour une approche instrumentale en didactique des mathématiques.  
Association pour la recherche en didactique des mathématiques - Actes de la dixième université d'été de didactique des mathématiques, pages 203–213.
- ▶ Schons, N.-J. (1968).  
Traité de trigonométrie rectiligne - 5<sup>ème</sup> édition.  
La Procure.





UNIVERSITÉ  
DE NAMUR

Introduction

Historique

Cadre  
théorique

Analyses  
préalables

Littérature  
Programmes

Conclusions  
provisoires

Perspectives

Références

- ▶ Swokowski and Cole (1998).  
Algèbre et trigonométrie, avec géométrie analytique.  
DeBoeck Université.
- ▶ Tanguay, D. (2010).  
Degrés, radians, arcs et sinusoides.  
Petit x, 82 :59–71.
- ▶ Thompson, P. W. (2008).  
Conceptual analysis of mathematical ideas : some spadework at the foundation of mathematics education.  
Plenary paper presented at the Annual Meeting of the International Group for the Psychology of Mathematics Education, 1 :31–49.
- ▶ Vadcard, L. (2002).  
Conception de l'angle chez les élèves de seconde.  
Recherches en didactique des mathématiques, 22(1) :77–117.
- ▶ XVème école d'été de didactique des mathématiques (2011).  
En amont et en aval des ingénieries didactiques.  
La Pensée Sauvage.  
coordinateurs : C. Margolinas *et al.*