



THESIS / THÈSE

MASTER EN SCIENCES MATHÉMATIQUES

Un cadre unifié pour les méthodes de point proximal inexactes

Harvanek, Cindy

Award date:
2005

[Link to publication](#)

General rights

Copyright and moral rights for the publications made accessible in the public portal are retained by the authors and/or other copyright owners and it is a condition of accessing publications that users recognise and abide by the legal requirements associated with these rights.

- Users may download and print one copy of any publication from the public portal for the purpose of private study or research.
- You may not further distribute the material or use it for any profit-making activity or commercial gain
- You may freely distribute the URL identifying the publication in the public portal ?

Take down policy

If you believe that this document breaches copyright please contact us providing details, and we will remove access to the work immediately and investigate your claim.



FUNDP
Faculté des Sciences
Département de Mathématique

Rempart de la Vierge, 8
B-5000 Namur Belgique

Un cadre unifié pour les méthodes de point proximal inexactes



Mémoire présenté pour l'obtention
du grade de
Licencié en Sciences Mathématiques
par

Cindy Harvanek

Promoteur : Jean-Jacques Strodiot

Année Académique 2004-2005

*Que tous ceux qui m'ont aidée dans l'élaboration
de ce travail trouvent ici l'expression de ma gratitude.*

*Je remercie tout spécialement Jean-Jacques Strodiot,
qui a bien voulu diriger ce mémoire, Geneviève
Salmon pour ses précieux articles et Delphine Lambert
pour ses conseils.*

Un cadre unifié pour les méthodes de point proximal inexactes

Résumé

Dans ce mémoire nous proposons un cadre de travail unifié pour des algorithmes reposant sur des solutions approchées de sous problèmes de point proximal. L'objectif est de décrire un critère de définition de solution approchée plus large que ceux utilisés précédemment, notamment dans le cadre de méthodes hybrides avec pas de projection et avec pas extra-gradient. Avec ce nouveau critère, nous analyserons la convergence d'une telle méthode, pour laquelle on retirera une convergence globale ainsi qu'un taux de convergence linéaire. Nous l'appliquerons entre autres aux méthodes de décomposition "forward-backward" ainsi qu'aux méthodes faisceaux.

A unified framework for some inexact proximal point methods

Abstract

In this thesis, we propose a unified framework for a class of algorithms based on approximate solutions of proximal point subproblems. The purpose is to describe a new general approximate solution criterion. This enhances the constructive approximation approach of the recently proposed hybrid projection-proximal and extra-gradient-proximal methods. Our method, with this more flexible criterion, possesses global convergence and local linear rate of convergence under standard assumptions. We apply this method to splitting forward-backward methods and to bundle methods.

Errata

Un cadre unifié pour les méthodes de point proximal inexactes

Cindy Harvanek

Le 24 juin 2005

Page	Ligne	Erreurs	Corrections
18	15	proximales	proximal
20	4	$x^{k+1} = J_{cT}(x^k)$	$x^{k+1} = J_{c_k T}(x^k)$
21	2	établit	établi
23	23	x_2^1	x_1^2
24	24	$\ J_{c_k T}(x) - J_{c_k T}(y)\ $	$\ J_{c_k T}(x) - J_{c_k T}(y)\ $
25	4	$\ J_{c_k T}(x^k) - J_{c_k T}(\bar{x})\ $	$\ J_{c_k T}(x^k) - J_{c_k T}(\bar{x})\ $
25	20	s'il	s'il
33	2	$x \in \mathbb{R}^n$	$x^k \in \mathbb{R}^n$
33	5 – 6	proximale	proximal
37	14	vers \bar{x}	vers \bar{x} l'unique solution de $0 \in T(x)$
38	10	proximaux	proximal
42	9	on	on a
52	5	établit	établi
60	3	$x \in \mathcal{H}$	$x^* \in \mathcal{H}$
62	14	le lemme 1	le lemme 2
63	3	$a \leq \frac{\ y-x\ }{\ v\ ^2} \leq \frac{\ y-x\ }{\ v\ }$	$a \leq \frac{\langle v, x-y \rangle}{\ v\ ^2} \leq \frac{\ y-x\ }{\ v\ }$
63	15	$a \geq \frac{\varepsilon}{2} \left(\frac{(1-\sigma^2)\ x-y\ ^2}{(1+\sigma)^2\ x-y\ ^2} \right)$	$a \geq \frac{\varepsilon}{2} \left(1 + \frac{(1-\sigma^2)\ x-y\ ^2}{(1+\sigma)^2\ x-y\ ^2} \right)$
66	20	$c_k \geq \bar{c} >> 0$	$c_k \geq \bar{c} > 0$
68	16	x_2^1	x_1^2
69	27	considérée	considérées
70	1	$c > 0$	$\bar{c} > 0$
76	3	l'algorithme	l'algorithme
76	14	non vide et fermé	convexe, non vide et fermé
77	1 – 2	la résolvante de A	l'opérateur A
77	5	univoque	multivoque
77	11	$[0, \alpha]$	$(0, \alpha]$
77	29	définit par notre algorithme	défini par notre algorithme
77	31	suivant	suivante
84	10	$\text{Proj}(x)$	$\text{Proj}_K(x)$
84	16	N_k	N_K
84	18	$x - y \in N_k(x)$	$x - y \in N_K(y)$
84	18	J_{cN_k}	$J_{cN_K}(x)$
84	18	$(I + cN_k)^{-1}(x)$	$(I + cN_K)^{-1}(x)$
85	11	convexe	convexe, fermé
85	20	univoque	multivoque
87	15	$0 \in T(\cdot) + (\cdot - x^k)$	$0 \in c_k T(\cdot) + (\cdot - x^k)$
89	26	q'un	qu'un
90	25	$\partial(y_j^k)$ 2	$\partial\varphi(y_j^k)$
95	11	que tend	tend
96	12	serious	sérieux
98	8	$\tau_k = 1$	et $\delta = 10^{-6}$.

Introduction

Dans ce mémoire, sur base de l'article écrit par M.V. Solodov et B.F Svaiter *A unified framework for some inexact proximal point algorithms*, [1], nous nous intéressons à une famille d'algorithmes pour la résolution de problèmes du type suivant :

$$0 \in T(x),$$

où T est un opérateur multivoque maximal monotone défini sur un espace de Hilbert réel. De tels opérateurs ont fait l'objet de nombreuses recherches notamment pour leur rôle en analyse convexe et dans certains types d'équations différentielles.

Ces techniques de résolution sont appelées méthodes de point proximal. Ces méthodes ont été introduites dans les années 1970 par B. Martinet et de nombreux résultats ont été produits par R.T. Rockafellar dans le courant de l'année 1976. Ce sont des méthodes très populaires pour la résolution d'équations non linéaires, de problèmes d'optimisation et d'inéquations variationnelles. De nombreux problèmes en mathématiques appliquées, en économie et en industrie débouchent sur la forme générale de ce problème. Par exemple les problèmes d'équilibre. L'idée principale de ces méthodes consistent à remplacer le problème initial par une suite de problèmes régularisés et plus simples à résoudre.

L'objectif de ce mémoire est de définir un cadre général pour la conception et l'analyse de la convergence d'une famille d'algorithmes utilisant des solutions approchées pour des sous problèmes de type proximal. Pour ce faire nous allons d'abord expliciter la méthode de point proximal et ensuite nous développerons les méthodes proposées par M.V. Solodov et B.F. Svaiter pour la résolution de tels problèmes. Il s'agit des stratégies de projection et de calcul de pas extra-gradient. Sur base de ces deux conceptions, nous allons élaborer un nouveau critère pour la définition des solutions approchées. Celui-ci sera plus large que les précédents, si bien qu'ils s'y retrouveront en tant que cas particuliers, c'est pourquoi l'on parle d'unification. Lors de l'étude de la convergence de l'algorithme défini avec ce nouveau critère, on obtiendra une convergence globale et un taux de convergence local linéaire sous des hypothèses classiques.

Enfin, pour illustrer cet algorithme, on l'appliquera à deux types de méthodes : les méthodes de décomposition forward-backward et les méthodes faisceaux pour la résolution d'inéquations variationnelles. Nous le testerons aussi numériquement à l'aide du logiciel matlab, sur un exemple particulier.

Table des matières

Introduction	4
1 Concepts de bases	5
1.1 Introduction	5
1.2 Opérateurs monotones	7
1.2.1 Propriétés	8
1.2.2 Opérateur maximal monotone	11
2 Méthode de point proximal	19
2.1 Introduction	19
2.2 Méthode inexacte de point proximal	20
2.2.1 Convergence	21
3 Méthode hybride de point proximal avec pas de projection	28
3.1 Nouveaux critères	28
3.2 Rappels sur la projection	31
3.3 Principe de la méthode hybride de point proximale avec pas de projection	33
3.4 L'algorithme avec pas de projection	35
3.5 Convergence	37
4 Méthode hybride de point proximal avec pas extra-gradient	38
4.1 Notions de sous-différentiel	39
4.2 Définition et propriétés de T^c	43
4.2.1 La tolérance sur l'erreur du sous problème proximal	45
4.3 L'algorithme de pas extra-gradient	48
4.4 Analyse de convergence	50
4.5 Application	51
5 Un cadre unifié pour des algorithmes de point proximal inexact	54
5.1 Cadre général	55
5.2 Propriétés des solutions approximées	56

TABLE DES MATIÈRES

6	Analyse de la convergence de l'algorithme unifiant les méthodes proposées par Solodov et Svaiter	64
6.1	Convergence	65
6.2	Vitesse de convergence	70
7	Applications	76
7.1	La méthode de décomposition forward-backward	76
7.1.1	Description	76
7.2	Problèmes d'inéquations variationnelles	81
7.2.1	Inéquations variationnelles et méthode proximale	83
7.3	Une méthode faisceau pour résoudre des inéquations variationnelles généralisées	85
7.4	Application	97
7.4.1	Description du problème	97
7.4.2	Résultats	98
	Conclusion	101

Chapitre 1

Concepts de bases

1.1 Introduction

Ce chapitre est consacré à la description de toutes les propriétés nécessaires pour pouvoir introduire la méthode de point proximal.

Tout au long de cette étude nous allons travailler avec des espaces de Hilbert, c'est pourquoi nous rappelons la définition de tels espaces ainsi que les principales propriétés du produit scalaire.

Définition 1 Soit H un espace vectoriel sur \mathbb{R} .

Considérons le produit scalaire sur \mathbb{R} :

$$\begin{aligned}\langle \cdot, \cdot \rangle : \quad H \times H &\rightarrow \mathbb{R} \\ (x, y) &\rightarrow \langle x, y \rangle,\end{aligned}$$

vérifiant les propriétés suivantes :

$$\begin{aligned}\langle x, y \rangle &= \langle y, x \rangle \\ \langle x, x \rangle &\geq 0 \\ \langle x, x \rangle = 0 &\Leftrightarrow x = 0 \\ \langle x, \alpha y + \beta z \rangle &= \alpha \langle x, y \rangle + \beta \langle x, z \rangle,\end{aligned}$$

pour tout $x, y, z \in H$ et pour tout $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$.

A ce produit scalaire, on associe une norme

$$\|x\| = \sqrt{\langle x, x \rangle}.$$

L'espace $(H, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ est un **espace de Hilbert** si $(H, \|\cdot\|)$ est un espace de Banach, i.e. si l'espace métrique associé est complet.

1.1. INTRODUCTION

Considérons une suite $\{x^k\}$ dans H , cette suite **converge fortement** vers un élément $x \in H$ si

$$\|x^k - x\| \rightarrow 0.$$

Et une suite $\{y^k\}$ dans H **converge faiblement** vers un élément $y \in H$ si

$$\text{pour tout } z \in H \quad \langle y^k, z \rangle \rightarrow \langle y, z \rangle.$$

Définition 2 *Un opérateur est multivoque si on a*

$$\begin{aligned} T : H &\rightarrow \mathcal{P}(H) \\ x &\rightarrow T(x) \in \mathcal{P}(H), \end{aligned}$$

où $\mathcal{P}(H)$ désigne l'ensemble des parties de H .

Un opérateur est **univoque** si pour tout $x \in H$, l'ensemble Tx contient au plus un élément. En d'autres termes, cela signifie que

$$\begin{aligned} T : H &\rightarrow H \\ x &\rightarrow T(x) \in H. \end{aligned}$$

Rappelons aussi que

Définition 3 *Soit $u_k \rightarrow u^*$.*

La suite $\{u_k\}$ converge linéairement vers u^ si $\exists c \in [0, 1)$ tel que $\forall k$*

$$\|u_{k+1} - u^*\| \leq c \|u_k - u^*\|.$$

La suite $\{u_k\}$ converge super-linéairement vers u^ si $\exists c_k \rightarrow 0$ tel que $\forall k$*

$$\|u_{k+1} - u^*\| \leq c_k \|u_k - u^*\|.$$

1.2 Opérateurs monotones

Considérons un opérateur multivoque T de H dans H , c'est à dire une application qui associe à chaque $x \in H$ un ensemble $T(x) \subset H$. Le tableau suivant reprend les principales définitions en relation avec ce concept d'opérateur multivoque.

Définition 4

– *Le graphe de T , noté $\text{gph } T$ est défini par*

$$\text{gph } T = \{(x, u) \in H \times H \mid u \in T(x)\}.$$

– *Le domaine de T , noté $\text{dom } T$ est défini par*

$$\text{dom } T = \{x \in H \mid T(x) \neq \emptyset\}.$$

– *L'image de T , notée $R(T)$ est définie par*

$$R(T) = \{u \in H \mid \exists x \in H \text{ tel que } u \in T(x)\}.$$

– *L'inverse de T , noté $T^{-1} : H \rightarrow H$ est défini par*

$$T^{-1}(u) = \{x \in H \mid u \in T(x)\}.$$

– *Le produit par $c > 0$, noté $cT : H \rightarrow H$ est défini par,*

$$(cT)(x) = c(T(x)).$$

Dans la suite, on notera I l'opérateur identité.

On constate que $(x, u) \in \text{gph } T \Leftrightarrow (u, x) \in \text{gph } T^{-1}$.

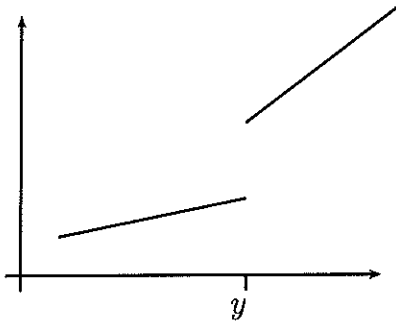
Définition 5 *Un opérateur T sur H est monotone si*

$$\forall x, y \in \text{dom } T, \quad \forall u \in T(x) \quad \forall v \in T(y), \quad \langle u - v, x - y \rangle \geq 0$$

Exemple 1

Considérons une application f croissante de \mathbb{R} dans \mathbb{R} et l'opérateur T défini par $T(x) = [f(x^-), f(x^+)] \cap \mathbb{R}$ monotone sur \mathbb{R} . Les notations $f(x^-)$ et $f(x^+)$ désignent respectivement

$$\lim_{y \rightarrow x^-} f(y) \quad \text{et} \quad \lim_{y \rightarrow x^+} f(y).$$



1.2.1 Propriétés

A présent, décrivons d'autres propriétés, celles-ci seront très importantes dans la suite de ce mémoire.

Définition 6 *Un opérateur univoque T défini sur H est non-expansif si*

$$\forall x, y \in \text{dom } T, \quad \|T(x) - T(y)\| \leq \|x - y\|.$$

Un opérateur univoque T sur H est 1-co-coercif si

$$\forall x, y \in \text{dom } T, \quad \langle T(x) - T(y), x - y \rangle \geq \|T(x) - T(y)\|^2.$$

En utilisant l'inégalité de Cauchy-Schwarz, on constate assez facilement que si l'opérateur T est 1-co-coercif, alors il est aussi non-expansif.

Proposition 1 *Soit T un opérateur multivoque. Les assertions suivantes sont équivalentes :*

1. T est monotone,

2. $\forall c > 0$, l'opérateur $(I + cT)^{-1}$ est univoque et non-expansif, i.e.,

$$\forall (x, u) \in \text{gph } T, \quad \forall (y, v) \in \text{gph } T, \quad \|x - y\| \leq \|x - y + c(u - v)\|, \quad (1.2.1)$$

3. $\forall c > 0$, l'opérateur $(I + cT)^{-1}$ est univoque et 1-co-coercif, i.e.,

$$\forall (x, u) \in \text{gph } T, \quad \forall (y, v) \in \text{gph } T, \quad \langle x - y + c(u - v), x - y \rangle \geq \|x - y\|^2. \quad (1.2.2)$$

Preuve

a.

D'abord, remarquons que si l'opérateur $(I + cT)^{-1}$ est univoque, alors $(I + cT)^{-1}$ est non-expansif si et seulement si l'inégalité (1.2.1) est vérifiée. En effet, par la définition 6, $(I + cT)^{-1}$ est non-expansif si et seulement si

$$\forall (\bar{u}, x) \in \text{gph } (I + cT)^{-1}, \quad \forall (\bar{v}, y) \in \text{gph } (I + cT)^{-1}, \quad \|x - y\| \leq \|\bar{u} - \bar{v}\|.$$

En choisissant $u = (1/c)(\bar{u} - x)$ et $v = (1/c)(\bar{v} - y)$, on trouve

$$(\bar{u}, x) \text{ (resp. } (\bar{v}, y)) \in \text{gph } (I + cT)^{-1} \Leftrightarrow (x, u) \text{ (resp. } (y, v)) \in \text{gph } T.$$

Ainsi, $(I + cT)^{-1}$ est non-expansif si et seulement si l'inégalité (1.2.1) est satisfaite. De façon tout à fait similaire, il est facile de constater que si l'opérateur $(I + cT)^{-1}$ est univoque, alors $(I + cT)^{-1}$ est 1-co-coercif si et seulement si l'inégalité (1.2.2) est satisfaite.

b. Montrons que (1) \Leftrightarrow (2)

En vue de la partie a, il nous reste à montrer que

$$T \text{ monotone} \Leftrightarrow (I + cT)^{-1} \text{ est univoque.}$$

\Rightarrow :

Si l'assertion (1) est vérifiée, alors pour tout couple $(x, u), (y, v) \in \text{gph } T$, on obtient, en utilisant le fait que T est monotone,

$$\|(x - y) + c(u - v)\|^2 = \|x - y\|^2 + 2c\langle u - v, x - y \rangle + c^2\|u - v\|^2 \geq \|x - y\|^2. \quad (1.2.3)$$

Pour montrer que l'opérateur $(I + cT)^{-1}$ est univoque, on va considérer l'ensemble suivant :

$$(I + cT)^{-1}(z) = \{w \mid z \in (I + cT)(w)\} \text{ pour } z \in \text{dom } (I + cT)^{-1}.$$

1.2. OPÉRATEURS MONOTONES

Supposons que cet ensemble possède au moins deux éléments x et y . Alors, il existe $u \in T(x)$ et $v \in T(y)$ tels que

$$z = x + cu = y + cv.$$

Mais alors, par la relation (1.2.3) il suit que

$$0 = \|z - z\|^2 = \|(x - y) + c(u - v)\|^2 \geq \|x - y\|^2 \geq 0,$$

ce qui entraîne que $x = y$.

☞:

Soient (x, u) et $(y, v) \in \text{gph } T$. On doit montrer que $\langle u - v, x - y \rangle \geq 0$. Puisque $(I + cT)^{-1}$ est non-expansif, il suit de l'inégalité (1.2.1) que

$$\|x - y\|^2 \leq \|(x - y) + c(u - v)\|^2 = \|x - y\|^2 + 2c\langle u - v, x - y \rangle + c^2\|u - v\|^2.$$

En divisant par $c > 0$, cette dernière relation s'écrit

$$2\langle u - v, x - y \rangle + c\|u - v\|^2 \geq 0.$$

En prenant la limite lorsque $c \rightarrow 0$, on en déduit que $\langle u - v, x - y \rangle \geq 0$, et donc que l'opérateur T est monotone.

c. Montrons que (1) \Leftrightarrow (3)

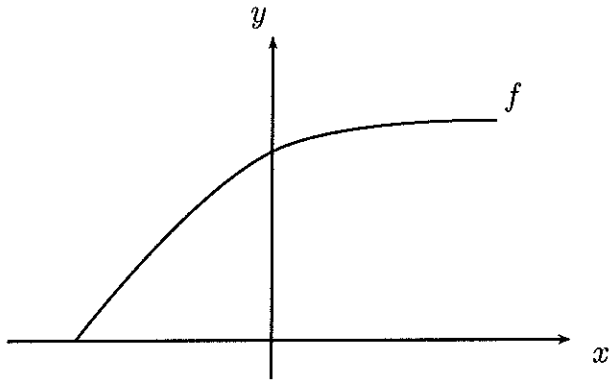
Par la partie b, on sait que T monotone implique que $(I + cT)^{-1}$ est univoque, il suffit alors de constater que

$$\begin{aligned} T \text{ est monotone} &\Leftrightarrow \langle x - y, u - v \rangle \geq 0, \quad \forall (x, u), (y, v) \in \text{gph } T \\ &\Leftrightarrow \langle x - y + c(u - v), x - y \rangle \geq \|x - y\|^2, \quad \forall (x, u), (y, v) \in \text{gph } T. \end{aligned}$$

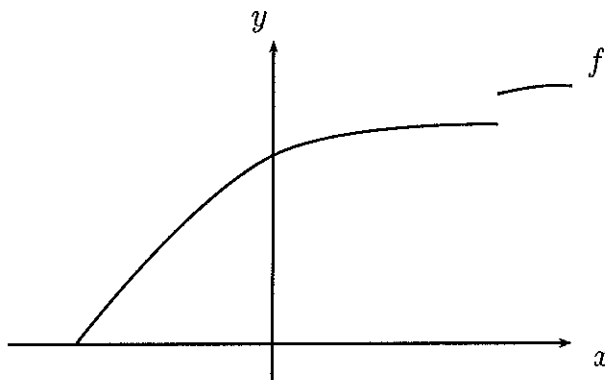
□

1.2.2 Opérateur maximal monotone

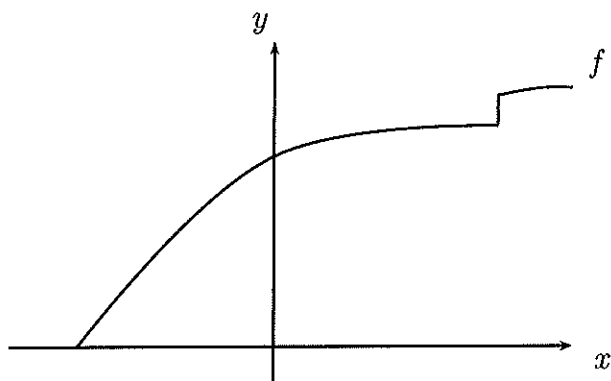
Définition 7 Un opérateur monotone T sur H est maximal monotone s'il n'existe aucun opérateur monotone U tel que $\text{gph } T \subset \text{gph } U$.



Application maximale monotone



Application monotone non maximale



Application maximale monotone

Proposition 2 *Un opérateur monotone T est maximal monotone si et seulement si chaque couple de solution $(y, v) \in H \times H$ du système d'inégalités*

$$\langle v - u, y - x \rangle \geq 0, \quad \forall (x, u) \in \text{gph} T$$

appartient au graphe de T .

Preuve

\Rightarrow :

Supposons que T soit maximal monotone et supposons aussi qu'un couple de solution (y, v) du système n'appartient pas au graphe de T .

On peut alors considérer l'opérateur U dont le graphe est défini par $\text{gph } U := \text{gph } T \cup \{(y, v)\}$ qui est monotone, ce qui contredit la définition de T maximal monotone.

\Leftarrow :

Supposons que l'opérateur T ne soit pas maximal, alors il existe un opérateur U monotone tel que $\text{gph } T \subset \text{gph } U$. Mais alors, il existe un couple $(y, v) \notin \text{gph } T$ tel que $\langle v - u, y - x \rangle \geq 0$ pour tout couple $(x, u) \in \text{gph } T$.

□

Proposition 3 *Si $T : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ est croissant et continu, alors T est maximal monotone.*

Preuve

Soit un couple $(y, v) \in \mathbb{R}^2$ tel que $(v - T(x))(y - x) \geq 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.
 Ainsi, par la proposition 2, nous devons montrer que $v = T(y)$.
 Pour ce faire, remarquons que

$$v \geq T(x) \quad \text{pour tout } x < y \quad \text{et } v \leq T(z) \quad \text{pour tout } z > y$$

Il suffit alors de prendre la limite lorsque $x \rightarrow y^-$ et lorsque $z \rightarrow y^+$, pour obtenir par la continuité de T que $v \geq T(y)$ et $v \leq T(y)$. Donc $v = T(y)$.

□

Proposition 4 *Considérons un opérateur T défini sur H maximal monotone. Si la suite $\{x^k\}$ de H converge faiblement vers un élément x et si la suite $\{w^k\}$ de H converge fortement vers un élément w . Et si en plus, $w^k \in T(x^k)$ pour tout k , alors $w \in T(x)$.*

Preuve

Puisque T est maximal monotone, en vue de la proposition 2, on doit simplement montrer que le couple $(x, w) \in H \times H$ satisfait l'inégalité suivante

$$\langle w' - w, x' - x \rangle \geq 0 \quad \text{pour tout couple } (x', w') \in \text{gph } T.$$

Soit $(x', w') \in \text{gph } T$. Puisque (x^k, w^k) appartient au graphe de T , il suit alors par monotonie que

$$0 \leq \langle w' - w^k, x' - x^k \rangle,$$

il suffit alors de prendre la limite lorsque $k \rightarrow \infty$ pour obtenir le résultat.

□

Proposition 5 *Considérons un opérateur univoque $T : H \rightarrow H$ monotone. Si T est héli-continu, i.e, si pour tout $x, y \in H$,*

$$T[(1-t)x + ty] \rightarrow T(x) \quad \text{quand } t \rightarrow 0,$$

Alors T est maximal monotone.

Preuve

Soit un couple $(x, v) \in H \times H$ tel que

$$\langle Tx' - v, x' - x \rangle \geq 0, \quad \text{pour tout } x' \in H. \quad (1.2.4)$$

Par la proposition 2, il suffit de montrer que $Tx = v$.

Ainsi, pour tout $y \in H$ et pour $t \in (0, 1)$, il suit de l'inégalité (1.2.4) avec $x' = (1-t)x + ty$ que

$$\langle T[(1-t)x + ty] - v, y - x \rangle \geq 0.$$

En prenant la limite lorsque $t \rightarrow 0$, on trouve

$$\langle Tx - v, y - x \rangle \geq 0 \quad \forall y \in H.$$

Donc, $Tx - v = 0$ et $Tx = v$.

□

1.2. OPÉRATEURS MONOTONES

La caractérisation formulée dans le théorème qui suit est fondamentale pour l'étude des opérateurs maximaux monotones.

Théorème 1 *Soit T un opérateur univoque. Alors les assertions suivantes sont équivalentes :*

1. T est maximal monotone,
2. T est monotone et $R(I + T) = H$,
3. $\forall c > 0$, $(I + cT)^{-1}$ est non-expansif et $\text{dom}(I + cT)^{-1} = H$,
4. $\forall c > 0$, $(I + cT)^{-1}$ est 1-co-coercif et $\text{dom}(I + cT)^{-1} = H$.

Preuve

a.

Par la proposition 1 et puisque $\text{dom}(I + cT)^{-1} = R(I + cT)$, on obtient directement que (3) \Leftrightarrow (4) et que (3) \Rightarrow (2).

b. Montrons que (2) \Rightarrow (1)

Supposons que U soit un opérateur monotone tel que $\text{gph } T \subseteq \text{gph } U$. Il s'agit de prouver que $\text{gph } T = \text{gph } U$.

Soit un couple $(x, u) \in \text{gph } U$. Alors $x + u \in H$ et comme $R(I + T) = H$, il existe $(y, v) \in \text{gph } T$ tel que $x + u = y + v$. Puisque $(x, u), (y, v) \in \text{gph } U$ et comme U est monotone, alors par la proposition 1 avec $c = 1$, $(I + U)^{-1}$ est non-expansif et

$$0 \leq \|x - y\| \leq \|x - y + u - v\| = 0,$$

ce qui implique que $x = y$, mais aussi $u = v$ et donc $(x, u) = (y, v) \in \text{gph } T$. Finalement $\text{gph } T = \text{gph } U$.

c. Montrons que (1) \Rightarrow (3)

En vue de la proposition 1, il suffit de montrer que $\text{dom}(I + cT)^{-1} = H$, i.e, que

$$R(I + cT) = H \quad \text{pour tout } c > 0.$$

Remarquons que cette dernière égalité est satisfaite si le résultat intermédiaire (il s'agit d'une preuve très technique, omise ici, mais que l'on peut trouver dans le livre de H. Brezis, [2]) suivant est vérifié :

Lemme 1 *Pour tout opérateur monotone U et pour tout $y \in H$, il existe $x \in H$ tel que*

$$\forall (z, w) \in \text{gph } U \quad \langle w + x, z - x \rangle \geq \langle y, z - x \rangle.$$

En utilisant ce lemme avec $U = cT$, on termine facilement la preuve. En effet, soit $y \in H$. Alors il existe $x \in H$ tel que pour tout couple $(z, w) \in \text{gph}(cT)$, $\langle (y - x) - w, x - z \rangle \geq 0$. Et puisque cT est maximal monotone, par la proposition 2, on a que $y - x \in (cT)(x)$, i.e, $y \in (I + cT)(x)$.

□

Conséquences :

De la proposition 1 et du théorème 1, on peut conclure que la monotonie implique que l'opérateur $(I + cT)^{-1}$ est univoque alors que le fait d'être maximal entraîne la surjectivité de l'opérateur $(I + cT)$. En d'autres termes, lorsqu'un opérateur T est monotone, pour chaque $y \in H$, le système $y = x + cu$ avec $u \in T(x)$ a au plus une solution. Et lorsque l'opérateur T est maximal monotone, le même système a exactement une solution.

Définition 8 *L'opérateur $(I + cT)^{-1}$ est appelé la résolvente de T , de constante $c > 0$, et est noté par J_{cT} .*

Lorsque T est monotone, la résolvente J_{cT} est un opérateur univoque et non-expansif. Lorsque T est maximal monotone, la résolvente J_{cT} est définie partout sur H . La proposition suivante illustre ces propriétés.

1.2. OPÉRATEURS MONOTONES

Proposition 6 *Soit T un opérateur monotone et $c > 0$. Chaque vecteur $z \in H$ peut s'écrire au plus d'une façon : $x + cu$ où $u \in T(x)$.
Si l'opérateur T est maximal monotone, alors chaque vecteur $z \in H$ peut s'écrire exactement par $x + cu$ où $u \in T(x)$.*

Preuve

Pour démontrer la première assertion, supposons que $z = x + cu = y + cv$ pour (x, u) et $(y, v) \in \text{gph } T$. Alors, les couples $(x, x + cu)$ et $(y, y + cv)$ appartiennent au graphe de $(I + cT)$ et donc les couples $(x + cu, x)$ $(y + cv, y)$ appartiennent au graphe de J_{cT} . Ainsi,

$$x = J_{cT}(x + cu) = J_{cT}(z) = J_{cT}(y + cv) = y,$$

qui entraîne $u = v$.

La deuxième assertion est évidente puisque en vue du théorème 1, $\text{dom } J_{cT} = H$.

□

Définition 9 *Un zéro d'un opérateur univoque T est un point x tel que $0 \in T(x)$.*

Rockafellar dans [15], proposition 2, a assuré l'existence d'un zéro d'un opérateur maximal monotone :

Proposition 7 *Soit T un opérateur maximal monotone sur H . Supposons qu'il existe $\alpha > 0$ tel que*

$$\langle x, y \rangle \geq 0 \text{ quand } \|x\| > \alpha, \quad x \in \text{dom}T, \quad y \in T(x).$$

Alors il existe un élément $x \in H$ tel que $0 \in T(x)$. En particulier, c'est le cas, lorsque le domaine de T est borné.

La proposition suivante établit le lien entre la notion de point fixe et les zéros d'un opérateur maximal monotone.

Définition 10 Soit un opérateur $T : H \rightarrow H$. On dit que $x \in H$ est un point fixe de T si $T(x) = x$.

Proposition 8 Soit T un opérateur maximal monotone. Pour chaque $c > 0$ et $x \in H$, on a

$$0 \in T(x) \Leftrightarrow J_{cT}(x) = x.$$

Preuve

Il est facile de constater que $\text{gph } J_{cT} = \{(x+cu, x) \mid (x, u) \in \text{gph } T\}$. Par conséquent,

$$0 \in T(x) \Leftrightarrow (x, 0) \in \text{gph } T \Leftrightarrow (x, x) \in \text{gph } J_{cT} \Leftrightarrow J_{cT}(x) = x.$$

□

Rockafellar a démontré dans [14], théorème 1, que la somme de deux opérateurs maximaux monotones était encore un opérateur maximal monotone sous certaine condition :

Proposition 9 Soient T_1 et T_2 deux opérateurs maximaux monotones sur H . Supposons que $\text{dom } T_1 \cap \text{int } \text{dom } T_2 \neq \emptyset$, alors $T_1 + T_2$ est maximal monotone.

Cette suite de propositions terminent l'ensemble des propriétés nécessaires à l'élaboration de la théorie des méthodes de point proximales.

Chapitre 2

Méthode de point proximal

2.1 Introduction

Après avoir décrit toutes les propriétés relatives aux opérateurs monotones, nous pouvons commencer la description de la méthode de point proximal.

Dans ce chapitre, nous nous intéressons à la résolution du problème suivant :

$$0 \in T(x),$$

où T est un opérateur maximal monotone.

Dans le chapitre précédent, nous avons mis en évidence le lien entre ce problème et les points fixes : trouver des zéros d'un opérateur maximal monotone revient à chercher les points fixes de la résolvante J_{cT} avec $c > 0$.

Notre objectif consiste à décrire la méthode exacte de point proximal et à constater que cette méthode n'est pas facile à utiliser dans la pratique, ceci nous conduira alors à explorer une méthode inexacte de point proximal dans le but de remédier aux désavantages de la méthode exacte.

2.2 Méthode inexacte de point proximal

Puisque la résolvante J_{cT} est non-expansive, (cfr. théorème 1), on peut considérer $x^{k+1} = J_{cT}(x^k)$, ou de façon plus générale,

$$x^{k+1} = J_{c_k T}(x^k), \quad \text{avec } c_k > 0.$$

L'algorithme correspondant est appelé **algorithme exact de point proximal**. Cependant, dans beaucoup de cas, le calcul de la résolvante J_{cT} est difficile. Cela consiste à résoudre le sous-problème suivant :

$$0 \in c_k T(x) + x - x^k.$$

Dans le but d'obtenir des algorithmes implémentables, nous allons calculer de façon inexacte cette résolvante $J_{c_k T}(x^k)$.

On va donc l'approximer de la façon suivante :

$$x^{k+1} = w^k \quad \text{où } w^k \approx J_{c_k T}(x^k) \text{ et } c_k > 0.$$

Dans la suite, nous supposons que $\|w^k - J_{c_k T}(x^k)\| \leq \epsilon_k$ avec $\epsilon_k \geq 0$ i.e, la solution approchée sera aussi proche de la solution exacte à ϵ_k près. On constate donc, que la $k^{\text{ième}}$ itération de cet algorithme dépend de deux paramètres : $c_k > 0$ et $\epsilon_k \geq 0$. On peut dès lors reformuler l'algorithme comme suit :

Algorithme inexact de point proximal

Soient $x^k \in H$ et les paramètres $\epsilon_k \geq 0$ et $c_k > 0$. Il faut trouver $w^k \in H$ tel que

$$\|w^k - J_{c_k T}(x^k)\| \leq \epsilon_k. \tag{2.2.1}$$

Définir l'itéré suivant par $x^{k+1} = w^k$.

2.2.1 Convergence

Le théorème suivant établit la convergence faible de la suite générée par l'algorithme inexact ci-dessus :

Théorème 2 *Supposons que $c_k \geq c > 0$ pour tout k et que $E = \sum_{k=0}^{+\infty} \epsilon_k < +\infty$. Soit $x^0 \in H$ un point de départ donné. Si T a des zéros, alors la suite $\{x^k\}$ générée par l'algorithme inexact de point proximal, pour $k = 0, 1, \dots$ converge faiblement vers un zéro de T .*

Preuve

Définissons pour tout k , $Q^k = I - J_{c_k T}$. Etant donné que I et $J_{c_k T}$ sont 1-co-coercifs, Q^k l'est aussi. Remarquons aussi que

$$0 \in T(x) \Leftrightarrow x = J_{c_k T}(x) \Leftrightarrow 0 = Q^k(x).$$

Par la suite, nous noterons $\bar{x}^{k+1} = J_{c_k T}(x^k) = (I - Q^k)(x^k)$ de sorte que

$$\|x^{k+1} - \bar{x}^{k+1}\| = \|w^k - J_{c_k T}(x^k)\| \leq \epsilon_k. \quad (2.2.2)$$

1. Montrons que la suite $\{x^k\}$ est bornée.

Soit x^* un zéro de T , alors

$$\begin{aligned} \|\bar{x}^{k+1} - x^*\|^2 &= \|x^k - Q^k(x^k) - x^*\|^2 \\ &= \|x^k - x^*\|^2 - 2\langle x^k - x^*, Q^k(x^k) \rangle + \|Q^k(x^k)\|^2 \\ &= \|x^k - x^*\|^2 - 2\langle x^k - x^*, Q^k(x^k) - Q^k(x^*) \rangle + \|Q^k(x^k)\|^2 \\ &\leq \|x^k - x^*\|^2 - \|Q^k(x^k)\|^2, \end{aligned} \quad (2.2.3)$$

où nous avons utilisé le fait que $Q^k(x^*) = 0$ et le fait que Q^k est 1-co-coercif pour la dernière inégalité.

En particulier, $\|\bar{x}^{k+1} - x^*\|^2 \leq \|x^k - x^*\|^2$.

De plus,

$$\begin{aligned} \|x^{k+1} - x^*\| &\leq \|\bar{x}^{k+1} - x^*\| + \|x^{k+1} - \bar{x}^{k+1}\| \\ &\leq \|x^k - x^*\| + \epsilon_k. \end{aligned} \quad (2.2.4)$$

Ainsi,

$$\begin{aligned} \|x^{k+1} - x^*\| &\leq \|x^0 - x^*\| + \sum_{i=0}^k \epsilon_i \\ &\leq \|x^0 - x^*\| + E, \end{aligned}$$

et donc la suite $\{x^k\}$ est bornée.

2. Montrons que $Q^k(x^k) \rightarrow 0$.

Soit x^* un zéro de T . Alors, pour tout k , on a

$$\begin{aligned} \|x^{k+1} - x^*\|^2 &= \|\bar{x}^{k+1} - x^* + (x^{k+1} - \bar{x}^{k+1})\|^2 \\ &= \|\bar{x}^{k+1} - x^*\|^2 + 2\langle \bar{x}^{k+1} - x^*, x^{k+1} - \bar{x}^{k+1} \rangle + \|x^{k+1} - \bar{x}^{k+1}\|^2 \\ &\leq \|\bar{x}^{k+1} - x^*\|^2 + 2\|\bar{x}^{k+1} - x^*\| \|x^{k+1} - \bar{x}^{k+1}\| + \|x^{k+1} - \bar{x}^{k+1}\|^2. \end{aligned}$$

En utilisant de façon successive, l'inégalité (2.2.3), le fait que

$$\|\bar{x}^{k+1} - x^*\| \leq \|x^k - x^*\| \leq \|x^0 - x^*\| + E$$

et l'inégalité (2.2.2) pour le premier et le second terme de la dernière inégalité ci-dessus, on trouve

$$\begin{aligned} \|x^{k+1} - x^*\|^2 &\leq \|x^k - x^*\|^2 - \|Q^k(x^k)\|^2 + 2[\|x^k - x^*\|\epsilon_k] + \epsilon_k^2 \\ \|x^{k+1} - x^*\|^2 &\leq \|x^k - x^*\|^2 - \|Q^k(x^k)\|^2 + 2\epsilon_k[\|x^0 - x^*\| + E] + \epsilon_k^2 \quad (2.2.5) \\ &\leq \|x^0 - x^*\|^2 - \sum_{i=0}^k \|Q^i(x^i)\|^2 + 2E[\|x^0 - x^*\| + E] + \sum_{i=0}^k \epsilon_i^2, \quad (2.2.6) \end{aligned}$$

par conséquent,

$$\sum_{i=0}^k \|Q^i(x^i)\|^2 \leq \|x^0 - x^*\|^2 + 2E[\|x^0 - x^*\| + E] + \sum_{i=0}^k \epsilon_i^2.$$

Comme la série des ϵ_i^2 est finie, la série des $\|Q^i(x^i)\|^2$ est finie. Ainsi, $Q^k(x^k) \rightarrow 0$.

3. Montrons que $\forall k \exists (y^k, v^k) \in \text{gph } T$ tel que $x^k = y^k + c_k v^k$, $x^k - y^k \rightarrow 0, v^k \rightarrow 0$.

Puisque T est maximal monotone, pour tout k , il existe un couple unique $(y^k, v^k) \in \text{gph } T$ tel que $x^k = y^k + c_k v^k$. Alors, $J_{c_k T}(x^k) = (I + c_k T)^{-1}(x^k) = y^k$ et donc

$$Q^k(x^k) = (I - J_{c_k T})(x^k) = x^k - y^k.$$

Et comme $Q^k(x^k) \rightarrow 0$, on obtient que $x^k - y^k \rightarrow 0$, de même comme $c_k \geq c > 0, v^k \rightarrow 0$.

4. Montrons que n'importe quel point limite de $\{x^k\}$ est un zéro de T .

Soit \bar{x} un point limite de la suite $\{x^k\}$ (il en existe au moins un, puisque la suite est bornée). Alors il existe une sous-suite $x^{k_j} \rightarrow \bar{x}$. Comme $y^k - x^k \rightarrow 0$,

il suit que $y^{k_j} \rightharpoonup \bar{x}$.

Soit $(y, v) \in \text{gph } T$. Puisque T est maximal monotone, on a pour tout k

$$\langle y - y^k, v - v^k \rangle \geq 0.$$

En prenant la limite sur la sous suite k_j , en utilisant le fait que $y^{k_j} \rightharpoonup \bar{x}$ et comme $v^k \rightarrow 0$, nous obtenons $\langle y - \bar{x}, v - 0 \rangle \geq 0$. Puisque le couple (y, v) est choisi arbitrairement dans le graphe de T , on en conclut de la maximalité (proposition 2) de T que $(\bar{x}, 0) \in \text{gph } T$, i.e, $0 \in T(\bar{x})$.

5. Montrons que toute la suite $\{x^k\}$ converge faiblement vers un zéro de T .

Soit x^* un zéro de T . Par l'inégalité (2.2.4) et comme la série des ϵ_k est finie, la suite $\{\|x^k - x^*\|\}$ converge vers $\alpha \in \mathbb{R}^+$.

Considérons à présent deux points limites quelconques de la suite $\{x^k\}$: \bar{x}_1 et \bar{x}_2 . On sait que chacun d'eux est un zéro de T , donc

$$\alpha_1 = \lim_{k \rightarrow \infty} \|x^k - \bar{x}_1\| \quad \text{et} \quad \alpha_2 = \lim_{k \rightarrow \infty} \|x^k - \bar{x}_2\|,$$

existent et sont finies. Remarquons que

$$\|x^k - \bar{x}_2\|^2 = \|x^k - \bar{x}_1\|^2 + 2\langle x^k - \bar{x}_1, x^k - \bar{x}_2 \rangle + \|\bar{x}_1 - \bar{x}_2\|^2,$$

on en conclut alors

$$2 \lim_{k \rightarrow \infty} \langle x^k - \bar{x}_1, x^k - \bar{x}_2 \rangle = (\alpha_2^2 - \alpha_1^2 - \|\bar{x}_1 - \bar{x}_2\|^2).$$

Etant donné que \bar{x}_1 est un point limite de $\{x^k\}$, cette limite est nulle, ce qui entraîne

$$\alpha_2^2 = \alpha_1^2 + \|\bar{x}_1 - \bar{x}_2\|^2.$$

De même pour \bar{x}_2 , on a

$$\alpha_2^1 = \alpha_2^2 + \|\bar{x}_1 - \bar{x}_2\|^2.$$

On en déduit que $\|\bar{x}_1 - \bar{x}_2\| = 0$, i.e, $\bar{x}_1 = \bar{x}_2$. La suite $\{x^k\}$ admet donc exactement un seul point limite.

□

Pour obtenir la convergence forte, il faut introduire la définition suivante :

Définition 11 *Un opérateur multivoque T est fortement monotone de module $\alpha > 0$ s'il est monotone et si*

$$\langle u - v, x - y \rangle \geq \alpha \|x - y\|^2 \text{ pour } u \in T(x), v \in T(y).$$

Rappelons aussi que

Définition 12 *Un opérateur est une contraction de constante λ si $0 \leq \lambda < 1$ et si*

$$\|T(x) - T(y)\| \leq \lambda \|x - y\| \quad \forall x, y \in H.$$

Proposition 10 *Si $c_k \geq c > 0$ pour tout k suffisamment grand et si T est fortement monotone de module $\alpha > 0$, alors les résolvantes $J_{c_k T}$ sont des contractions de coefficients $(1 + \alpha c_k) < 1$ et la suite $\{x^k\}$ générée par l'algorithme exact de point proximal converge fortement vers l'unique zéro de l'opérateur T .*

De plus, la convergence est linéaire avec un coefficient $(1 + \alpha c_k) < 1$.

La convergence sera super-linéaire si, en plus, $c_k \rightarrow +\infty$.

Preuve

Montrons d'abord que $J_{c_k T}$ est une contraction avec un coefficient de $(1 + \alpha c_k) < 1$. Puisque T est fortement monotone de module $\alpha > 0$, l'opérateur $T' = T - \alpha I$ est monotone, on sait par la proposition 1, que l'opérateur $J_{c'_k T'}$ est non-expansif pour tout $c'_k > 0$. Alors, pour $x \in H$,

$$J_{c_k T}(x) = J_{c'_k T'} \left(\frac{x}{1 + \alpha c_k} \right), \quad \text{où } c'_k = c_k(1 + \alpha c_k)^{-1}.$$

En effet, comme on sait que $T = T' + \alpha I$, on trouve

$$x \in (I + c_k T)(y) \Leftrightarrow x \in (1 + \alpha c_k)y + c_k T'(y) \Leftrightarrow x(1 + \alpha c_k)^{-1} \in y + c'_k T'(y) = (I + c'_k T')(y)$$

Puisque

$$\begin{aligned} \|J_{c_k T}(x) - J_{c_k T}(y)\| &= \left\| J_{c'_k T'} \left(\frac{x}{1 + \alpha c_k} \right) - J_{c'_k T'} \left(\frac{y}{1 + \alpha c_k} \right) \right\| \\ &\leq \left\| \frac{x}{1 + \alpha c_k} - \frac{y}{1 + \alpha c_k} \right\| \quad \text{car } J_{c'_k T'} \text{ est non-expansif.} \\ &= (1 + \alpha c_k)^{-1} \|x - y\|. \end{aligned} \tag{2.2.7}$$

Ainsi, $J_{c_k T}$ est une contraction avec un coefficient $(1 + \alpha c_k)^{-1} < 1$ et donc par le théorème classique du point fixe, il admet un point fixe unique, celui-ci doit être l'unique \bar{x} satisfaisant $0 \in T(\bar{x})$. On obtient alors,

$$\|x^{k+1} - \bar{x}\| = \|J_{c_k T}(x^k) - J_{c_k T}(\bar{x})\| \leq (1 + \alpha c_k)^{-1} \|x^k - \bar{x}\|, \quad \text{pour tout } k.$$

Et comme $c_k \geq c > 0$ pour tout k (suffisamment grand), la suite $\{x^k\}$ converge vers une solution \bar{x} du problème fortement et linéairement avec un coefficient $(1 + \alpha c_k)^{-1} < 1$. Si $c_k \rightarrow \infty$, la convergence est super-linéaire :

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{\|x^{k+1} - \bar{x}\|}{\|x^k - \bar{x}\|} = 0.$$

□

Remarque :

Rockafellar dans [15] a obtenu un taux de convergence linéaire pour une méthode inexacte de point proximal. Pour ce faire, il a remplacé l'hypothèse de forte monotonie par un autre critère moins contraignant : l'approximation x^{k+1} de $J_{c_k T}(x^k)$ doit satisfaire :

$$\|x^{k+1} - J_{c_k T}(x^k)\| \leq \delta_k \|x^{k+1} - x^k\|, \quad \sum_{k=0}^{\infty} \delta_k < \infty. \quad (2.2.8)$$

On constate que si la suite $\{x^k\}$ générée par ce critère est bornée, alors la série des ϵ_k avec $\epsilon_k = \delta_k \|x^{k+1} - x^k\|$ est convergente et le critère (2.2.1) est satisfait. En conséquence, si le critère (2.2.8) est utilisé, le théorème 2 est applicable pour en déduire que la suite $\{x^k\}$ converge faiblement vers une zéro de l'opérateur T .

Définition 13 Soit T un opérateur univoque défini sur H . L'opérateur inverse T^{-1} est dit *Lipschitz continu* dans un voisinage de zéro de module $L > 0$ s'il existe une solution unique \bar{x} au problème $0 \in T(x)$ et pour $\tau > 0$,

$$\text{pour } x \in T^{-1}(w) \quad \text{et} \quad \|w\| \leq \tau \quad \|x - \bar{x}\| \leq L\|w\|.$$

Rockafellar toujours dans [15] a aussi montré que sous ce critère, le taux de convergence était donné par :

Théorème 3 Soit $\{x^k\}$ une suite générée par l'algorithme inexact de point proximal utilisant le critère (2.2.8) avec $\{c_k\}$ croissante. Supposons que la suite $\{x^k\}$ est bornée et que l'opérateur T^{-1} soit Lipschitz continu de constante $L > 0$ dans un voisinage de zéro. Soit $\mu_k = L/(L^2 + c_k^2)^{1/2} < 1$. Alors, la suite $\{x^k\}$ converge fortement vers \bar{x} , l'unique solution de $0 \in T(x)$. De plus, il existe un indice \bar{k} pour lequel

$$\|x^{k+1} - \bar{x}\| \leq \frac{\mu_k + \delta_k}{1 - \delta_k} \|x^k - \bar{x}\| \quad \text{pour tout } k \geq \bar{k}.$$

Dans l'algorithme précédent, nous avons approximé la valeur de la résolvante $J_{cT}(x^k)$ à l'aide de coefficients variables c_k . Nous allons à présent introduire un paramètre de "relâchement" $\rho_k \in (0, 2)$ pour obtenir l'algorithme suivant :

Algorithme de point proximal "relâché"

Soit $x^k \in H$ et les paramètres $\epsilon_k \geq 0$ et $c_k > 0$. Il s'agit de trouver $w^k \in H$ tel que

$$\|w^k - J_{c_k T}(x^k)\| \leq \epsilon_k.$$

Définir l'itéré suivant par

$$x^{k+1} = (1 - \rho_k)x^k + \rho_k w^k. \tag{2.2.9}$$

Lorsque $\rho_k = 1$, l'itération (2.2.9) coïncide avec l'itération inexacte de point proximal (2.2.1). Par une preuve tout à fait similaire à celle réalisée dans le théorème 2, on trouve que si l'opérateur T est monotone et si

$$E = \sum_{k=0}^{\infty} \epsilon_k < \infty, \quad c_k \geq c > 0, \quad 0 < \hat{\rho} \leq \rho_k \leq \bar{\rho} < 2, \quad \forall k,$$

alors la suite $\{x^k\}$ générée par l'itération (2.2.9) converge faiblement vers un zéro de T .

Le fait de considérer les paramètres ρ_k peut s'avérer bénéfique. Supposons que l'opérateur T soit univoque, fortement monotone (de module $\alpha > 0$) et Lipschitz continu (de constante $L > 0$). On suppose que $L > \alpha$. Puisque T est fortement monotone, on sait de la proposition 10, que J_{cT} est une contraction de constante $(1 + \alpha c_k)^{-1}$. Soit $x^k \in H$ et supposons que $\epsilon_k = 0$. Soit aussi x^* un zéro de T . On distingue deux cas : $\rho_k = 1$ et $\rho_k > 1$.

1. $\rho_k = 1$

Le nouvel itéré est $\bar{x}^{k+1} = J_{c_k T}(x^k)$ et par la relation (2.2.7), il suit que

$$\|\bar{x}^{k+1} - x^*\| = \|J_{c_k T}(x^k) - J_{c_k T}(x^*)\| \leq (1 + c_k \alpha)^{-1} \|x^k - x^*\| \quad (2.2.10)$$

2. $\rho_k > 1$

Le nouvel itéré est

$$x^{k+1} = (1 - \rho_k)x^k + \rho_k J_{c_k T}(x^k) = (1 - \rho_k)x^k + \rho_k \bar{x}^{k+1}.$$

Comme $x^k = (I + c_k T)(\bar{x}^{k+1})$, on a

$$x^{k+1} = (1 - \rho_k)(\bar{x}^{k+1} + c_k T(\bar{x}^{k+1})) + \rho_k \bar{x}^{k+1} = \bar{x}^{k+1} + c_k(1 - \rho_k)T(\bar{x}^{k+1}).$$

Ensuite, en utilisant successivement la dernière relation, le fait que $T(x^*) = 0$, que T est fortement monotone et Lipschitz continu, on obtient

$$\begin{aligned} \|x^{k+1} - x^*\|^2 &= \|\bar{x}^{k+1} - x^* + c_k(1 - \rho_k)T(\bar{x}^{k+1})\|^2 \\ &= \|\bar{x}^{k+1} - x^*\|^2 - 2c_k(\rho_k - 1)\langle \bar{x}^{k+1} - x^*, T(\bar{x}^{k+1}) - T(x^*) \rangle + \\ &\quad c_k^2(1 - \rho_k)^2 \|T(\bar{x}^{k+1}) - T(x^*)\|^2 \\ &\leq [1 - 2c_k(\rho_k - 1)\alpha + c_k^2(1 - \rho_k)^2 L^2] \|\bar{x}^{k+1} - x^*\|^2. \end{aligned}$$

Il est facile de voir que le minimum de $1 - 2c_k(\rho_k - 1)\alpha + c_k^2(1 - \rho_k)^2 L^2$ est obtenu pour

$$\rho_k = 1 + \frac{\alpha}{c_k L^2} > 1.$$

Puisque que $\rho_k < 2$, on doit choisir $\frac{\alpha}{c_k L^2} < 1$, i.e, $c_k > \alpha L^{-2}$. On obtient alors

$$1 - 2c_k(\rho_k - 1)\alpha + c_k^2(1 - \rho_k)^2 L^2 = 1 - 2c_k \frac{\alpha^2}{c_k L^2} + c_k^2 \frac{\alpha^2}{c_k^2 L^4} L^2 = 1 - \frac{\alpha^2}{L^2}$$

On trouve enfin

$$\|x^{k+1} - x^*\| \leq \left(1 - \frac{\alpha^2}{L^2}\right)^{1/2} (1 + c_k \alpha)^{-1} \|x^k - x^*\|. \quad (2.2.11)$$

En comparant (2.2.10) et (2.2.11), on remarque que le taux de convergence est meilleur pour $\rho_k = 1 + \frac{\alpha}{c_k L^2} > 1$. Ceci montre l'intérêt de considérer de tels paramètres.

□

Chapitre 3

Méthode hybride de point proximal avec pas de projection

Dans le chapitre précédent, nous avons présenté la méthode exacte de point proximal pour résoudre le problème suivant :

$$\text{trouver } x \in H \text{ tel que } 0 \in T(x),$$

où T est maximal monotone sur un espace de Hilbert H .

Étant donné que la résolution exacte du sous problème $0 \in c_k T(x) + (x - x^k)$ ou de façon équivalente le calcul exact de $(I + c_k T)^{-1}(x^k)$ est très difficile en pratique, l'utilisation d'approximations est essentiel à l'élaboration d'algorithmes implémentables.

Dans ce chapitre, nous allons considérer dans un premier temps de nouveaux critères et ensuite nous présenterons la méthode avec pas de projection.

3.1 Nouveaux critères

Nous avons étudié les critères suivants :

$$\|x^{k+1} - (I + c_k T)^{-1}(x^k)\| \leq \epsilon_k, \quad \sum_{k=0}^{\infty} \epsilon_k < \infty, \quad (3.1.1)$$

$$\|x^{k+1} - (I + c_k T)^{-1}(x^k)\| \leq \delta_k \|x^{k+1} - x^k\|, \quad \sum_{k=0}^{\infty} \delta_k < \infty. \quad (3.1.2)$$

Nous avons prouvé la convergence de l'algorithme inexact de point proximal lorsque le critère d'approximation (3.1.1) était utilisé, nous avons aussi énoncé le taux de convergence de l'algorithme lorsque le critère (3.1.2) était utilisé.

Cependant, ces critères ne sont pas pratiques parce qu'ils supposent que la résolvante de l'itération courante x^k soit connue !

3.1. NOUVEAUX CRITÈRES

Rockafellar dans [15] (proposition 3) a établi que les critères (3.1.1) et (3.1.2) se retrouvent dans les conditions suivantes :

$$\text{dist}(0, c_k T(x^{k+1}) + x^{k+1} - x^k) \leq \epsilon_k, \quad \sum_{k=0}^{\infty} \epsilon_k < \infty. \quad (3.1.3)$$

$$\text{dist}(0, c_k T(x^{k+1}) + x^{k+1} - x^k) \leq \delta_k \|x^{k+1} - x^k\|, \quad \sum_{k=0}^{\infty} \delta_k < \infty. \quad (3.1.4)$$

Ces conditions constituent nos deux nouveaux critères et ont l'avantage de se vérifier facilement en pratique puisqu'elles ne nécessitent qu'une seule évaluation de T en x^{k+1} . Ceci est expliqué dans la proposition :

Proposition 11 *L'estimation suivante est satisfaite :*

$$\|x^{k+1} - J_{c_k T}(x^k)\| \leq \text{dist}(0, c_k T(x^{k+1}) + x^{k+1} - x^k).$$

Preuve

Pour tout $w \in c_k T(x^{k+1}) + x^{k+1} - x^k$, nous avons

$$w + x^k \in (I + c_k T)(x^{k+1}),$$

ainsi,

$$x^{k+1} = (I + c_k T)^{-1}(w + x^k) = J_{c_k T}(w + x^k).$$

Alors, par le fait que la résolvante est non-expansive, on a

$$\|x^{k+1} - J_{c_k T}(x^k)\| = \|J_{c_k T}(w + x^k) - J_{c_k T}(x^k)\| \leq \|w\|.$$

Et comme w est arbitraire dans $c_k T(x^{k+1}) + x^{k+1} - x^k$, on obtient la thèse. □

Remarquons que comme l'opérateur T est maximal monotone, $T(x)$ est aussi fermé, ainsi pour tout $\epsilon \geq 0$, l'inégalité suivante

$$\text{dist}(0, c_k T(x^{k+1}) + x^{k+1} - x^k) \leq \epsilon$$

est équivalent à

$$\exists v^{k+1} \in T(x^{k+1}) \text{ tel que } \|c_k v^{k+1} + x^{k+1} - x^k\| \leq \epsilon.$$

3.1. NOUVEAUX CRITÈRES

En vue de ces deux nouveaux critères, l'algorithme inexact de point proximal peut se reformuler de la façon suivante :

Algorithme inexact de point proximal

Soit x^k l'itération courante. Il s'agit de trouver $x^{k+1} \in H$ et $v^{k+1} \in T(x^{k+1})$ tels que

$$0 = c_k v^{k+1} + (x^{k+1} - x^k) - r^k, \quad (3.1.5)$$

où $r^k \in H$ est l'erreur associée à l'approximation.

Avec ces notations, les critères (3.1.1) et (3.1.2) deviennent

$$\|r^k\| \leq \epsilon_k, \quad \sum_{k=0}^{\infty} \epsilon_k < \infty. \quad (3.1.6)$$

$$\|r^k\| \leq \delta_k \|x^{k+1} - x^k\|, \quad \sum_{k=0}^{\infty} \delta_k < \infty. \quad (3.1.7)$$

Cependant, nous constatons qu'il existe une infinité de suites sommables et il n'est pas précisé comment choisir la valeur des paramètres ϵ_k et δ_k à une itération spécifique k pour le problème donné dans le but d'assurer la convergence. De plus, d'un point vue algorithmique, il est préférable d'avoir une condition de tolérance sur l'erreur.

3.2 Rappels sur la projection

Définition 14 Soit K un ensemble convexe fermé et non vide de \mathbb{R}^n . Pour chaque vecteur $x \in \mathbb{R}^n$, il existe un vecteur unique $\bar{x} \in K$ qui est plus proche de x en norme euclidienne

$$\|\cdot\| : \|x\|^2 = \sum_{i=1}^n |x_i|^2.$$

Ce vecteur $\bar{x} \in K$ est appelé la **projection euclidienne** de x sur K et est noté par $P_K(x)$.

L'application $P_K : x \rightarrow \bar{x} = P_K(x)$ est appelé **projecteur euclidien** sur K .

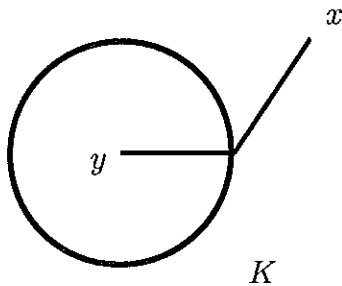
$\bar{x} = P_K(x)$ est l'unique solution du problème de minimisation convexe :

$$\min_{y \in K} \frac{1}{2} \|y - x\|^2. \quad (3.2.1)$$

Pour chaque $x \in \mathbb{R}^n$, $\bar{x} = P_K(x)$ est l'unique vecteur de K satisfaisant l'inégalité suivante :

$$\langle y - \bar{x}, x - \bar{x} \rangle \leq 0 \quad \forall y \in K,$$

c'est ce que l'on appelle la **caractérisation de la projection**.



Dans le théorème suivant, nous avons rassemblé les principales propriétés sur la projection.

Théorème 4 Soit K un ensemble convexe fermé et non vide de \mathbb{R}^n . Les affirmations suivantes sont vérifiées :

1. Pour chaque $x \in \mathbb{R}^n$, $\bar{x} = P_K(x)$ existe et est unique.
2. Pour tous vecteurs $x, y \in \mathbb{R}^n$, $P_K(\cdot)$ est 1-co-coercif :

$$\langle P_K(x) - P_K(y), x - y \rangle \geq \|P_K(x) - P_K(y)\|^2,$$

où $\|\cdot\|$ désigne la norme euclidienne.

3. $P_K(\cdot)$ est non-expansif, i.e, pour tous vecteurs $x, y \in \mathbb{R}^n$, on a

$$\|P_K(x) - P_K(y)\| \leq \|x - y\|.$$

Et donc, P_K est une fonction globalement Lipschitz continue sur \mathbb{R}^n .

Preuve

1. Etant donné que la fonction objective du problème (3.2.1) est fortement convexe, l'existence et l'unicité est assurée.
2. Par la caractérisation de la projection, on sait que

$$\langle y - \bar{x}, \bar{x} - x \rangle \geq 0 \quad \forall y \in K.$$

Prenons dans cette dernière inégalité $x = v$ et $y = P_K(u)$, on a

$$\langle P_K(u) - \bar{v}, \bar{v} - v \rangle \geq 0,$$

et si l'on prend $x = u$ et $y = P_K(v)$, on a

$$\langle P_K(v) - \bar{u}, \bar{u} - u \rangle \geq 0.$$

En additionnant les deux dernières inégalités et en organisant les termes, on trouve

$$\begin{aligned} \langle P_K(u) - P_K(v), u - v \rangle &\geq \|\bar{u} - \bar{v}\|^2 \\ &= \|P_K(u) - P_K(v)\|^2. \end{aligned}$$

3. Pour montrer que $P_K(\cdot)$ est non-expansif, il suffit de reprendre la définition de co-coercivité de $P_K(\cdot)$ et d'utiliser l'inégalité de Cauchy-Schwarz. Quant à la continuité Lipschitzienne, il s'agit d'une conséquence directe de la définition de l'assertion 3.

□

Définition 15 *Considérons un hyperplan $\mathcal{H} = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \langle a, x \rangle = b\}$, avec $a \in \mathbb{R}^n$, $a \neq 0$ et $b \in \mathbb{R}$. La projection d'un point arbitraire $x \in \mathbb{R}^n$ sur l'hyperplan \mathcal{H} est définie par*

$$w^k := P_{\mathcal{H}}(x^k) = \begin{cases} x^k & \text{si } x^k \in \mathcal{H} \\ x^k + \frac{b - \langle a, x^k \rangle}{\|a\|^2} a & \text{sinon.} \end{cases}$$

3.3 Principe de la méthode hybride de point proximale avec pas de projection

Nous allons montrer que les conditions sur la tolérance pour la résolution de sous problèmes de point proximal peuvent être moins contraignantes si la solution de chaque sous problème est suivie par une projection sur un certain hyperplan séparant strictement l'itéré courant de l'ensemble des solutions du problème.

Il s'agit donc de construire un hyperplan à l'aide d'une itération fournie par la méthode de point proximal inexacte, dans le but de séparer strictement l'itéré courant de l'ensemble des solutions du problème. Cette étape est ensuite suivie par la projection de l'itéré courant sur l'hyperplan. On montrera aussi, que la nouvelle itération sera plus proche de la solution en utilisant des arguments de séparation, ce qui permettra d'obtenir la convergence globale de l'algorithme.

Concrètement, on va utiliser l'itéré obtenu avec un δ fixé pour construire un hyperplan approprié séparant strictement x^k de l'ensemble des solutions du problème. Ensuite on projettera x^k sur cet hyperplan pour obtenir l'itéré suivant x^{k+1} . Toujours avec un argument de séparation, il est possible de montrer que le nouvel itéré est plus proche de l'ensemble des solutions que le précédent. C'est ce qu'illustre la proposition suivante :

3.3. PRINCIPE DE LA MÉTHODE HYBRIDE DE POINT PROXIMALE AVEC PAS DE PROJECTION

Proposition 12 Soit x^k , l'itéré courant et soit $y^k \in H$.

Considérons aussi $v^k \in T(y^k)$ tel que $r^k = c_k v^k + (y^k - x^k)$ satisfasse

$$\|r^k\| \leq \sigma \max\{c_k \|v^k\|, \|y^k - x^k\|\} \quad \text{avec } \sigma \in [0, 1) \quad (3.3.1)$$

Si $v^k = 0$ ou $y^k = x^k$, alors y^k est solution.

Sinon, l'hyperplan $\mathcal{H}_k = \{x \in H \mid \langle v^k, x - y^k \rangle = 0\}$ ne contient pas x^k et sépare strictement x^k de l'ensemble des solutions.

Si $r^k = 0$, alors $y^k = J_{c_k T}(x^k)$ et y^k est la projection de x^k sur \mathcal{H}_k .

Preuve

Considérons n'importe quel zéro \bar{x} de T , puisque T est monotone, on sait que

$$\langle v^k, \bar{x} - y^k \rangle \leq 0.$$

Supposons que $v^k \neq 0$ et $y^k \neq x^k$. Alors, $\langle v^k, x^k - y^k \rangle > 0$. En effet, deux cas doivent être considérés :

1. Si $\|r^k\| \leq c_k \|v^k\|$, nous obtenons alors

$$\begin{aligned} \|c_k v^k + (y^k - x^k)\|^2 &\leq c_k^2 \|v^k\|^2 && \text{par définition de } r^k \\ 2\langle c_k v^k, y^k - x^k \rangle + \|y^k - x^k\|^2 &\leq 0 && \text{en développant le carré} \\ \langle v^k, x^k - y^k \rangle &\geq \frac{1}{2c_k} \|y^k - x^k\|^2 > 0 \end{aligned}$$

2. Si $\|r^k\| \leq \|y^k - x^k\|$, alors

$$\begin{aligned} \|c_k v^k + (y^k - x^k)\|^2 &\leq \|y^k - x^k\|^2 && \text{par définition de } r^k \\ 2\langle c_k v^k, y^k - x^k \rangle + c_k^2 \|v^k\|^2 &\leq 0 && \text{en développant le carré} \\ \langle v^k, x^k - y^k \rangle &\geq \frac{c_k}{2} \|v^k\|^2 > 0 \end{aligned}$$

Finalement, si $r^k = 0$, alors y^k est la solution du sous problème $0 \in c_k T(x) + (x - x^k)$, et donc, $y^k = J_{c_k T}(x^k)$.

De plus,

$$Proj_{\mathcal{H}_k}(x^k) = x^k - \frac{\langle v^k, x^k - y^k \rangle}{\|v^k\|^2} \cdot v^k = x^k - c_k v^k = y^k.$$

□

Nous pouvons à présent présenter l'algorithme avec pas de projection.

3.4 L'algorithme avec pas de projection

Algorithme : Méthode de point proximal hybride avec pas de projection

Pas 0 : Initialisation.

Choisir un point de départ $x^0 \in H$ et $\sigma \in [0, 1)$

En ayant l'itéré x^k , choisir $c_k > 0$ et trouver

$$y^k \in H \text{ et } v^k \in T(y^k) \text{ tel que } r^k = c_k v^k + (y^k - x^k) \quad (3.4.1)$$

satisfaisant

$$\|r^k\| \leq \sigma \max\{c_k \|v^k\|, \|y^k - x^k\|\}. \quad (3.4.2)$$

Critère d'arrêt

Si $v^k = 0$ ou $y^k = x^k$, STOP,

Sinon, calculer

$$x^{k+1} = x^k - \frac{\langle v^k, x^k - y^k \rangle}{\|v^k\|^2} v^k. \quad (3.4.3)$$

Remarquons que (3.4.3) est équivalent à $x^{k+1} = Proj_{\mathcal{H}_k}(x^k)$ où

$$\mathcal{H}_k = \{x \in H \mid \langle v^k, x - y^k \rangle = 0\}.$$

Ainsi, la projection sur \mathcal{H}_k est explicite et le pas de projection nécessité ne coûte pas cher.

Remarquons que si $\sigma = 0$, alors l'algorithme de point proximal avec pas de projection est réduit à l'algorithme exact de point proximal. Et ce car $\sigma = 0$ implique que $r^k = 0$ et par conséquent $x^{k+1} = y^k$ (cf. fin de la proposition (12)).

Lorsque $\sigma \neq 0$, le paramètre de relâchement σ peut être fixé, alors que dans les méthodes précédentes, il devait être "sommable" et donc converger vers 0 ($\sum \epsilon_k < \infty$).

Nous allons à présent donner une interprétation du critère (3.4.1) en tant que tolérance sur l'erreur relative. Une solution approximée du sous problème $0 \in c_k T(x) + x - x^k$ peut être considérée comme étant un couple (y, v) satisfaisant

$$v \in T(y), \quad c_k v + y - x^k = r \approx 0.$$

Pour estimer l'erreur relative dans la relation ci-dessus, il faut regarder les ratios entre $\|r\|$ et $\|c_k v\|$, $\|r\|$ et $\|y - x^k\|$, i.e, les rapports suivants

$$\frac{\|r\|}{\|c_k v\|}, \quad \frac{\|r\|}{\|y - x^k\|}.$$

Ainsi, (3.4.2) revient à dire que la borne sur l'erreur relative dans la résolution du sous problème proximal peut être fixée (à σ) et n'a pas besoin de tendre vers 0.

3.4. L'ALGORITHME AVEC PAS DE PROJECTION

A présent, nous allons montrer que le pas de projection est essentiel pour assurer la convergence de cet algorithme. **Solodov et Svaiter** dans [18] ont donné l'exemple suivant.

Exemple 2

Soit $H = \mathbb{R}^2$ et $T(x) = A(x)$, il s'agit de résoudre le problème suivant :

trouver une solution du système linéaire $Ax = 0$,

où

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Il est clair que ce problème possède une solution unique, $x^* = (0, 0)^\top$.

Soit $\sigma = \frac{1}{\sqrt{2}}$ et $c_k = 1$ pour tout k .

Supposons, à présent, que $x^k = (1, 0)^\top$. Alors

$$y^k = (0, 1)^\top$$

satisfait les critères (3.4.1)-(3.4.3). Puisque

$$v^k = Ay^k = (1, 0)^\top, \quad y^k - x^k = (-1, 1)^\top, \quad r^k = (0, 1)^\top$$

ce qui implique que le critère (3.4.3) soit satisfait.

Si on accepte y^k comme l'itéré suivant x^{k+1} , on obtient $x^{k+1} = (0, 1)^\top$.

En recommençant, on trouve successivement

$$x^{k+2} = (-1, 0)^\top, \quad x^{k+3} = (0, -1)^\top, \quad x^{k+4} = x^k.$$

On remarque que la suite $\{x^k\}$ ne converge pas vers $x^* = (0, 0)^\top$, cependant, si l'on prend x^{k+1} comme étant la projection de y^k sur \mathcal{H}_k , on trouve $x^{k+1} = (0, 0)^\top$.

Autrement dit, on obtient la solution en une seule étape.

3.5 Convergence

Cette méthode conserve les mêmes propriétés de convergence que la méthode de point proximal exacte, et ce sous les mêmes hypothèses. Nous allons énoncer ces différents théorèmes, ils ont été démontrés par M.V. Solodov et B.F. Svaiter dans [18](théorème 2.2 et théorème 2.4).

Théorème 5 *Soit $\{x^k\}$ une suite générée par l'algorithme hybride de point proximal avec pas de projection. Si l'ensemble des solutions du problème $0 \in T(x)$ est non vide, alors*

1. *La suite $\{x^k\}$ est bornée et la suite $\{x^k - y^k\}$ converge fortement vers 0.*
2. *Si $c_k \geq c > 0, \forall k$, alors la suite $\{v^k\}$ converge fortement vers 0, et la suite $\{x^k\}$ converge faiblement vers un zéro de T .*

Théorème 6 *Supposons que T^{-1} est Lipschitz continu dans un voisinage de 0. Alors n'importe quelle suite générée par l'algorithme hybride de point proximal avec pas de projection avec $c_k \geq c > 0, \forall k$, converge fortement vers \bar{x} et le taux de convergence est linéaire :*

$$\|x^{k+1} - \bar{x}\|^2 \leq \left(1 - \frac{(1 - \sigma)^4}{(1 + \sigma)^4(Lc^{-1}(1 - \sigma) + 1)^2}\right) \|x^k - \bar{x}\|^2.$$

Remarque

La dernière inégalité du théorème 6 implique une convergence super-linéaire. Celle-ci sera obtenue lorsque le paramètre de tolérance σ ainsi que le paramètre de régularisation c_k convergeront vers zéro.

Chapitre 4

Méthode hybride de point proximal avec pas extra-gradient

Dans l'algorithme hybride de point proximal avec pas de projection, on calcule à l'itération k un premier couple (y^k, v^k) satisfaisant les propriétés suivantes :

$$r^k = c_k v^k + (y^k - x^k)$$

$$\|r^k\| \leq \sigma \max\{c_k \|v^k\|, \|y^k - x^k\|\}$$

et ensuite, y^k est projeté sur H_k pour obtenir l'itéré suivant x^{k+1} .

Dans ce chapitre, nous proposons une modification des algorithmes classiques de pas extra-gradient et de point proximal pour la recherche de zéros d'un opérateur maximal monotone, dans un espace de Hilbert.

Principe :

A chaque itération de la méthode, un pas extra-gradient est réalisé en utilisant les informations résultant d'une solution approximée du sous problème de point proximal. Il s'agit donc d'un algorithme hybride combinant pas extra-gradient et méthode proximale. Cet algorithme va pouvoir être appliqué, entre autre, dans le cas où $T = \partial f$ le sous-différentiel d'une fonction convexe.

M.V. Solodov et **B.F Svaiter** ont démontré dans [19] que sous des hypothèses adéquates, cet algorithme possède une convergence faible et globale.

4.1 Notions de sous-différentiel

Nous allons à présent décrire la notion de sous-différentiel. Lorsqu'une fonction convexe f n'est pas dérivable en un point x_0 , on substitue la notion de sous-gradient à celle de dérivée :

Définition 16 On appelle *sous-gradient de la fonction f au point x* , un élément $u \in H$ tel que $\forall y \in H$:

$$f(y) \geq f(x) + \langle u, y - x \rangle.$$

L'ensemble de tous les sous-gradients est appelé sous-différentiel et est noté ∂f :

Définition 17

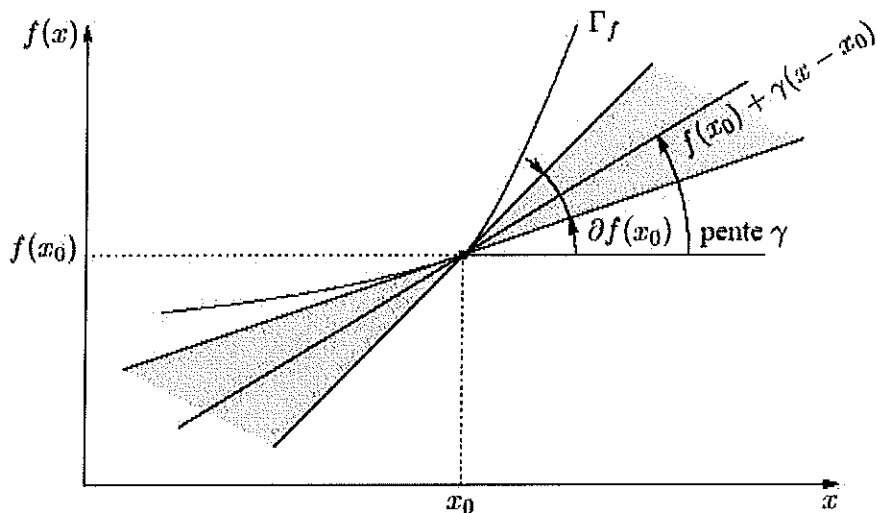
$$\partial f(x) = \{u \in H \mid f(y) - f(x) - \langle u, y - x \rangle \geq 0 \quad \forall y \in H\}.$$

Interprétation géométrique

L'inégalité selon laquelle $u \in \partial f(x)$:

$$\forall y \in H \quad f(y) \geq f(x) + \langle u, y - x \rangle$$

signifie que u est la pente d'une fonction affine qui minore la fonction f et qui passe par le point $(x, f(x))$.

FIG. 4.1 – Représentation du sous-différentiel en x_0 **Exemple 3**

Considérons la fonction

$$f(x) = \begin{cases} e^x - 1 & \text{si } x \geq 0 \\ 0 & \text{si } x < 0 \end{cases}$$

On observe alors que

$$\begin{aligned} \partial f(0) &= [0, 1], \\ \partial f(x_0) &= \{e^{x_0}\} \text{ si } x_0 > 0, \\ \partial f(x_0) &= \{0\} \text{ si } x_0 < 0. \end{aligned}$$

Exemple 4

Considérons la fonction $f(x) = |x|$, qui n'est pas différentiable en 0. Il est facile de voir que

$$\begin{aligned} \partial f(0) &= [-1, 1], \\ \partial f(x_0) &= \{1\} \text{ si } x_0 > 0, \\ \partial f(x_0) &= \{-1\} \text{ si } x_0 < 0. \end{aligned}$$

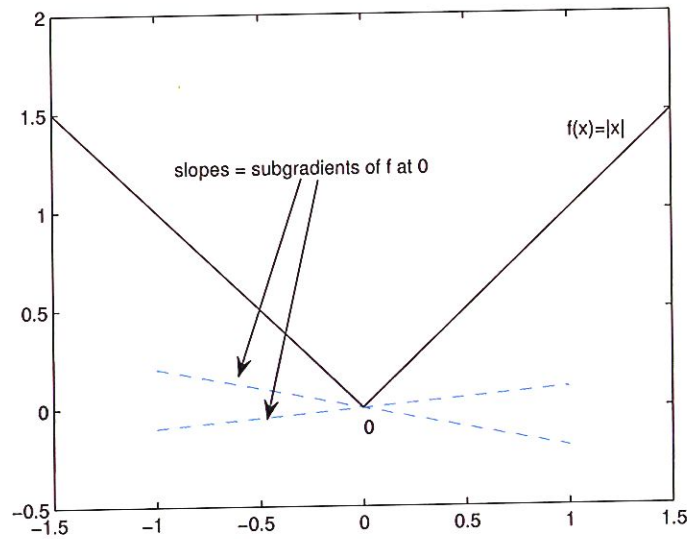


FIG. 4.2 – Illustration graphique de l'exemple 4

Proposition 13 Soit f une fonction, fermée, propre et convexe sur H . Alors le sous-différentiel de f est un opérateur maximal monotone sur H . De plus, la résolvante $J_{cT}(x)$ est l'unique minimum de la fonction fortement convexe

$$g : z \rightarrow f(z) + \frac{1}{2c} \|z - x\|^2.$$

Preuve

1. Montrons que le sous-différentiel est un opérateur monotone.

Si $y_1 \in \partial f(x_1)$ et $y_2 \in \partial f(x_2)$, par la définition on a

$$f(x_2) \geq f(x_1) + \langle y_1, x_2 - x_1 \rangle \quad \text{et} \quad f(x_1) \geq f(x_2) + \langle y_2, x_1 - x_2 \rangle.$$

Et donc, en additionnant, on trouve $\langle y_1 - y_2, x_1 - x_2 \rangle \geq 0$.

2. Montrons que le sous-différentiel est un opérateur maximal monotone.

En vue du théorème 1, il faut montrer que $R(I + \partial f) = H$. Soit $x \in H$. La fonction g est convexe et fermée. Puisque f est bornée inférieurement par une fonction affine (par la proposition 1.2.1 de [4] et par le théorème de Hahn-Banach), cette fonction est aussi coercive, i.e, qu'elle tend vers $+\infty$ lorsque $\|z\| \rightarrow +\infty$. Ainsi, elle atteint son minimum en un point $z^* \in H$, i.e, $0 \in \partial g(z^*)$ et donc, $0 \in z^* - x + \partial f(z^*)$. Ce qui signifie que $x \in z^* + \partial f(z^*) = (I + \partial f)(z^*)$.

□

Il existe une extension de ce concept appelé ϵ - sous-différentiel, noté $\partial_\epsilon f$ et défini pour $\epsilon \geq 0$ par

Définition 18

$$\partial_\epsilon f(x) = \{u \in H \mid f(y) - f(x) - \langle u, y - x \rangle \geq -\epsilon \quad \forall y \in H\}.$$

Exemple 5

Soit C un sous-ensemble de \mathbb{R}^n non-vide, fermé, convexe et soit I_C la fonction indicatrice de C ($I_C = 0$ si $x \in C$ et $+\infty$ sinon). Le domaine de I_C est C et pour chaque $x \in C$, on

$$\begin{aligned} \partial_\epsilon I_C(x) &= \{s \in \mathbb{R}^n \mid \forall y \in C \ I_C(y) \geq I_C(x) + \langle s, y - x \rangle - \epsilon\} \\ &= \{s \in \mathbb{R}^n \mid \forall y \in C \ \langle s, y - x \rangle \leq \epsilon\}. \end{aligned}$$

Cet ensemble est appelé l'ensemble des directions ϵ -normales de C en x . Quand $\epsilon = 0$, cet ensemble devient :

$$\partial I_C(x) = \{s \in \mathbb{R}^n \mid \forall y \in C \ \langle s, y - x \rangle \leq 0\}.$$

Ceci n'est rien d'autre que le cône normal de C en x noté $N_C(x)$.

On a montré que cette notion était étroitement liée avec les algorithmes d'optimisation. En effet, lorsque des algorithmes nécessitent le calcul de zéros de $\partial f(x)$, i.e, le calcul d'un minimiseur de f , les propriétés de convergence sont conservées et même atteintes lorsque l'on remplace $\partial f(x)$, par son extension $\partial_\epsilon f(x)$ avec un ϵ choisi de façon adéquate.

Un tel échange apporte deux choses supplémentaires à savoir plus de "liberté" et l'algorithme est plus "robuste".

Etant donné que l'on travaille avec un élargissement de la notion de $\partial f(x)$, il semble normal de considérer $T^\epsilon(y^k)$ dans le prolongement de $T(y^k)$ lorsque $T = \partial f$. En vue de ces nouvelles notions on définit :

Définition 19 *Un couple (y^k, v^k) est une solution approximée si*

$$v^k \in T^{\epsilon_k}(y^k) \text{ et } c_k v^k + (y^k - x^k) - r^k = 0,$$

où ϵ_k et r^k sont relativement petit par rapport à $\|y^k - x^k\|$.

L'itéré suivant est obtenu en calculant $x^{k+1} = x^k - c_k v^k$.

Dans le paragraphe suivant, nous allons donner une définition précise de T^ϵ et énoncer quelques propriétés de celui-ci.

4.2 Définition et propriétés de T^ϵ

Définition 20 *Soit T un opérateur multivoque défini sur H et soit $\epsilon \geq 0$. L'élargissement T^ϵ est défini pour tout $x \in H$ par*

$$T^\epsilon(x) = \{v \in H \mid \langle w - v, z - x \rangle \geq -\epsilon \quad \forall z \in H, w \in T(z)\}.$$

On appelle aussi T^ϵ l'élargissement BIS en hommage à ces auteurs : Burachik, Iusem, Svaiter.

Exemple 6

Soit $H = \mathbb{R}$, considérons la fonction $f(x) = \frac{1}{2}x^2$, $T = \partial f$. Nous obtenons :

$$\partial_\epsilon f(x) = [x - \sqrt{2\epsilon}, x + \sqrt{2\epsilon}],$$

$$T^\epsilon f(x) = [x - 2\sqrt{\epsilon}, x + 2\sqrt{\epsilon}].$$

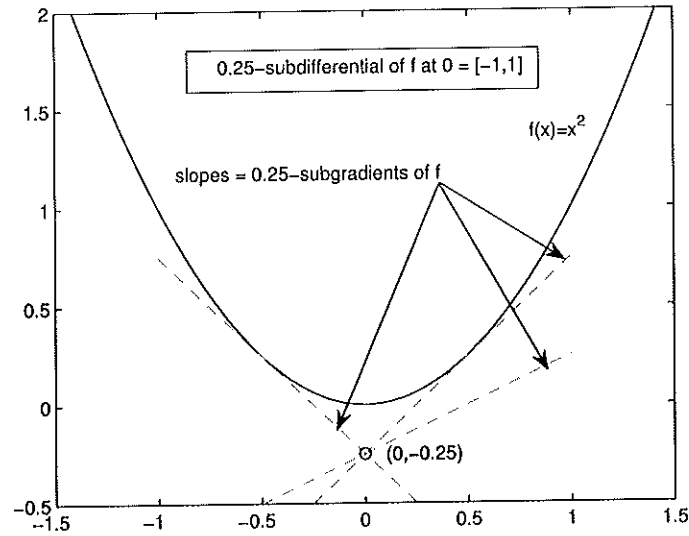


FIG. 4.3 – Illustration graphique de l'exemple 6

Proposition 14 *Supposons que T soit un opérateur maximal monotone.*

Alors,

- $T^0 = T$,
- $T(x) \subseteq T^\epsilon(x)$, pour n'importe quel $\epsilon \geq 0$ et pour tout $x \in H$.

Preuve

Soit $x \in H$.

1. $T(x) \subseteq T^0(x)$.

Soit $v \in T(x)$, étant donné que T est monotone, il suit que $\forall (z, w) \in \text{gph } T$ on a $\langle w - v, z - x \rangle \geq 0$ et donc que $v \in T^0(x)$.

2. $T^0(x) \subseteq T(x)$.

Soit $v \in T^0(x)$. $\forall (z, w) \in \text{gph } T$, on a $\langle w - v, z - x \rangle \geq 0$, ce qui implique $v \in T(x)$ puisque T est maximal monotone (proposition 2).

4.2. DÉFINITION ET PROPRIÉTÉS DE T^ϵ

3. $T(x) \subseteq T^\epsilon(x)$.

On sait aussi que si $x \in H$ et si $0 \leq \epsilon_1 \leq \epsilon_2$, alors $T^{\epsilon_1}(x) \subseteq T^{\epsilon_2}(x)$. Il suffit de prendre $\epsilon_1 = 0$ et $\epsilon_2 = \epsilon$.

□

Proposition 15 *Si $T = \partial f$ où f est une fonction convexe, alors*

$$\partial_\epsilon f(x) \subseteq T^\epsilon(x) \quad \forall x \in H.$$

Preuve

Prenons $u \in \partial_\epsilon f(x)$. Alors, pour tout $y \in H$, et tout $v \in T(y) = \partial f(y)$, on a

$$\epsilon + \langle u, x - y \rangle \geq f(x) - f(y) \geq \langle v, x - y \rangle.$$

Ainsi $\langle u - v, x - y \rangle \geq -\epsilon$, i.e, $u \in T^\epsilon(x)$.

□

4.2.1 La tolérance sur l'erreur du sous problème proximal

Nous pouvons à présent introduire la définition suivante :

Définition 21 *Soit $x \in H$, $c > 0$, et $\sigma \in [0, 1)$. Le couple (y, v) est une **solution approximée** avec une tolérance sur l'erreur σ du sous problème $0 \in cT(\cdot) + (\cdot - x)$, si pour $\epsilon \geq 0$*

$$v \in T^\epsilon(y), \quad cv + (y - x) = r$$

et

$$\|r\|^2 + 2c\epsilon \leq \sigma^2 \|y - x\|^2. \quad (4.2.1)$$

Le théorème 1 nous permet de conclure que puisque T est un opérateur maximal monotone, le sous problème $0 \in cT(\cdot) + (\cdot - x)$ a toujours une solution. Dans ce cas, $r = 0$ et $\epsilon = 0$, il est évident que cette solution est aussi **une solution approximée** du sous problème $0 \in cT(\cdot) + (\cdot - x)$, et ce pour n'importe quel $\sigma \in [0, 1)$. Il peut donc exister une ou plusieurs solutions approximées.

Et lorsque $\sigma = 0$ (pas de tolérance sur l'erreur), l'**unique solution approximée** est la solution exacte du problème.

4.2. DÉFINITION ET PROPRIÉTÉS DE T^ϵ

Remarquons que lorsque $\epsilon = 0$, la définition devient alors $v \in T(y)$, $cv + y - x = r$ et $\|r\| \leq \sigma\|y - x\|$. Dans ce cas, n'importe quelle solution est une solution approximée dans le sens développé dans la méthode de point proximal avec pas de projection (chapitre 3) car $\sigma\|y - x\| \leq \sigma \max\{c\|v\|, \|y - x\|\}$.

Il est intéressant de se demander si cette solution approximée est proche de la solution exacte? Une réponse est apportée dans la proposition suivante :

Proposition 16 *Soit $x \in H$ et $c > 0$. Supposons que le couple (y, v) soit une solution approximée, avec une tolérance sur l'erreur $\sigma \in [0, 1)$ du sous problème $0 \in cT(\cdot) + (\cdot - x)$.*

Considérons z , la solution exacte de ce problème. L'assertion suivante est vérifiée :

$$\|z - y\| \leq \sigma\|y - x\|.$$

Preuve

Soit (y, v) une solution approximée. Il existe alors un $\epsilon \geq 0$ tel que

$$v \in T^\epsilon(y), \quad \|r\|^2 + 2c\epsilon \leq \sigma^2\|y - x\|^2 \quad (4.2.2)$$

où $r = cv + (y - x)$.

Puisque z est la solution exacte, on sait que $0 \in cT(z) + z - x$ et donc $u := -\frac{1}{c}(z - x) \in T(z)$. La définition de $T^\epsilon(y)$ implique alors

$$\langle u - v, z - y \rangle \geq -\epsilon. \quad (4.2.3)$$

Observons qu'en utilisant les définitions de u et de v ,

$$u - v = -\frac{1}{c}(z - x) - \frac{1}{c}(r - (y - x)) = -\frac{1}{c}r - \frac{1}{c}(z - y). \quad (4.2.4)$$

En combinant (4.2.3) et (4.2.4), on obtient

$$-\frac{1}{c}\langle r, z - y \rangle - \frac{1}{c}\|z - y\|^2 \geq -\epsilon,$$

i.e,

$$\frac{1}{c}\|z - y\|^2 + \frac{1}{c}\langle r, z - y \rangle - \epsilon \leq 0.$$

En multipliant par c et en utilisant l'inégalité de Cauchy Schwarz, on déduit

$$\|z - y\|^2 - \|r\|\|z - y\| - c\epsilon \leq 0.$$

Cette inégalité du second degré sera satisfaite si $\|z - y\|$ est compris entre les deux racines carrées (et sera donc plus petite que la plus grande des deux racines carrées) de l'équation $s^2 - \|r\|s - c\epsilon = 0$ où $s := \|z - y\|$. On obtient

$$\|z - y\| \leq \frac{\|r\| + \sqrt{\|r\|^2 + 4c\epsilon}}{2} \leq \sqrt{\frac{1}{2}\|r\|^2 + \frac{1}{2}[\|r\|^2 + 4c\epsilon]}. \quad (4.2.5)$$

Ainsi,

$$\|z - y\| \leq \sqrt{\|r\|^2 + 2c\epsilon}.$$

Ce qui nous permet de conclure la preuve avec le critère (4.2.2).

□

La propriété suivante nous montre toute l'utilité des solutions approximées. Il s'agit aussi d'un résultat important pour la convergence de l'algorithme de pas extra-gradient.

Proposition 17 *Soit $x \in H$ et $c > 0$. Soit (y, v) une solution approximée avec une tolérance sur l'erreur $\sigma \in [0, 1)$ du sous problème $0 \in cT(\cdot) + (\cdot - x)$. Définissons le pas extra-gradient*

$$x^+ = x - cv.$$

Ainsi, pour n'importe quel zéro de T , on a

$$\|x^* - x\|^2 - \|x^* - x^+\|^2 \geq (1 - \sigma^2)\|y - x\|^2.$$

Preuve

Par quelques manipulations algébriques, on trouve

$$\|x^* - x\|^2 - \|x^* - x^+\|^2 = \|x^* - y\|^2 + 2\langle x^* - y, y - x \rangle + \|y - x\|^2 - \|x^* - y\|^2 - 2\langle x^* - y, y - x^+ \rangle - \|y - x^+\|^2,$$

et donc

$$\|x^* - x\|^2 - \|x^* - x^+\|^2 = 2\langle x^* - y, x^+ - x \rangle + \|y - x\|^2 - \|y - x^+\|^2. \quad (4.2.6)$$

Comme (y, v) est une solution approximée, il existe $\epsilon \geq 0$ tel que

$$v \in T^\epsilon(y) \text{ et } \|r\|^2 + 2c\epsilon \leq \sigma^2\|y - x\|^2,$$

4.3. L'ALGORITHME DE PAS EXTRA-GRADIENT

où $r = cv + (y - x)$.

Puisque $0 \in T(x^*)$ et que $v \in T^\epsilon(y)$, par la définition de T^ϵ et celle du pas extra-gradient, il suit que

$$\langle x^* - y, x^+ - x \rangle = \langle x^* - y, -cv \rangle = c \langle x^* - y, 0 - v \rangle \geq -c\epsilon.$$

De plus, puisque $r = cv + (y - x)$, on a $y - x^+ = r$. En combinant (4.2.6) avec la relation ci-dessus, on obtient :

$$\begin{aligned} \|x^* - x\|^2 - \|x^* - x^+\|^2 &\geq -2c\epsilon + \|y - x\|^2 - \|r\|^2 \\ &= \|y - x\|^2 - (\|r\|^2 + 2c\epsilon) \\ &\geq (1 - \sigma^2)\|y - x\|^2. \end{aligned}$$

□

4.3 L'algorithme de pas extra-gradient

Algorithme : Méthode hybride de point proximal avec pas extra-gradient.

Pas 0 : Initialisation.

Choisir un point de départ $x^0 \in H$ et $\sigma \in [0, 1)$.

Pour $k = 0, 1, \dots$

Calcul de la solution approximée :

Choisir $c_k > 0$ et trouver un couple (y^k, v^k) , solution approximée avec une tolérance sur l'erreur σ du sous problème $0 \in c_k T(\cdot) + (\cdot - x^k)$, c'est à dire, pour $\epsilon_k \geq 0$:

$$\begin{aligned} v^k &\in T^{\epsilon_k}(y^k), \\ \|c_k v^k + (y^k - x^k)\|^2 + 2c_k \epsilon_k &\leq \sigma^2 \|y^k - x^k\|^2. \end{aligned}$$

Mise à jour : pas extra-gradient .

Définir $x^{k+1} = x^k - c_k v^k$.

Remarquons que si le $k^{\text{ième}}$ sous problème de point proximal est résolu de façon exacte, alors la $k^{\text{ième}}$ itération de l'algorithme ci-dessus coïncide avec l'itération classique de point proximal puisque $c_k v^k + (y^k - x^k) = 0$ et $\epsilon_k = 0$ implique alors $x^{k+1} = y^k$ et $v^k \in T(y^k)$.

Ce qui signifie que dans le cas particulier où $\sigma = 0$, nous retrouvons la méthode exacte de point proximal.

M.V. Solodov et B.F. Svaiter dans [19] ont illustré toute l'importance de réaliser un pas extra-gradient :

Exemple 7

Soit $H = \mathbb{R}^2$ et T l'opérateur de rotation $\frac{\pi}{2}$, i.e, $T(x) := Mx$, où

$$M := \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Etant donné que M est semi définie positive, T est un opérateur maximal monotone et l'origine est l'unique zéro de $T(x)$.

Considérons une suite définie par les relations suivantes :

$$w^{k+1} \in T(x^{k+1}) \text{ et } \|c_k w^{k+1} + x^{k+1} - x^k\| \leq \sigma \|x^{k+1} - x^k\|. \quad (4.3.1)$$

Il s'agit à présent de montrer que la suite satisfaisant (4.3.1) peut diverger. Prenons $x^0 \neq (0, 0)$, $\sigma \in (\frac{1}{\sqrt{2}}, 1)$ et $c_k = \frac{1}{2}$ pour tout k . Définissons

$$Q := \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix},$$

et désignons par $Q^{(k)}$ la $k^{\text{ième}}$ puissance de Q . Définissons en plus, deux suites $\{x^k\}$ et $\{w^k\}$ par

$$x^k := Q^{(k)}x^0, \text{ et } w^k := Mx^k \in T(x^k).$$

Observons que dans telles conditions, la suite $\|x^k\| \rightarrow +\infty$. Puisque, pour tout k , on a $\|Qx^k\|^2 = 2\|x^k\|^2$ et par conséquent $\|x^k\| = (\sqrt{2})^k \|x^0\| \rightarrow +\infty$ lorsque k tend vers $+\infty$. Il nous faut cependant montrer que cette suite vérifie les conditions (4.3.1). Comme $x^{k+1} = Qx^k$, on obtient

$$\begin{aligned} x^{k+1} - x^k &= (Q - I)x^k, \\ c_k w^{k+1} + x^{k+1} - x^k &= \left(\frac{1}{2}MQ + Q - I\right)x^k, \end{aligned}$$

où, I désigne la matrice identité. Remarquons aussi que

$$\left(\frac{1}{2}MQ + Q - I\right) = \begin{bmatrix} 1/2 & 1/2 \\ -1/2 & 1/2 \end{bmatrix}.$$

Il est ainsi plus facile de constater que

$$\|c_k w^{k+1} + x^{k+1} - x^k\| = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)\|x^k\|,$$

et

$$\|x^{k+1} - x^k\| = \|x^k\|,$$

4.4. ANALYSE DE CONVERGENCE

puisque $\sigma > \frac{1}{\sqrt{2}}$. On obtient donc

$$\|c_k w^{k+1} + x^{k+1} - x^k\| < \sigma \|x^{k+1} - x^k\|$$

ce qui signifie que la condition (4.3.1) est satisfaite pour les suites $\{x^k\}$ et $\{w^k\}$. Mais la suite $\{x^k\}$ ne converge pas vers l'origine, elle est divergente!

□

Cet exemple nous montre à quel point le pas extra-gradient est essentiel pour assurer la convergence de la méthode. Puisque la méthode proximale approximée avec le même critère de tolérance sur l'erreur ne peut pas converger.

Dans la suite nous allons considérer $\{c_k\}$ comme étant la suite des paramètres de régulation et $\{x^k\}$, $\{(y^k, v^k)\}$, $\{\epsilon_k\}$, les suites générées par l'algorithme hybride de pas extra-gradient.

4.4 Analyse de convergence

Pour assurer la convergence de l'algorithme, nous allons supposer que le problème :

$$\text{trouver } x \in H \text{ tel que } 0 \in T(x)$$

admet une solution, et que les paramètres de régulation c_k sont tels que $c_k \geq c > 0$ pour tout k .

Les résultats importants de convergence sont les suivants :

Théorème 7 *Supposons que $c_k \geq c > 0$ pour tout k . Si T a au moins un zéro, alors la suite $\{x^k\}$ générée par l'algorithme hybride de pas extra-gradient converge faiblement vers un zéro de T .
Si T n'a pas de zéros, alors la suite $\{x^k\}$ est non bornée.*

Théorème 8 *Si en plus des hypothèses du théorème 7, l'opérateur T^{-1} est Lipschitz continu dans un voisinage de zéro, alors la suite $\{x^k\}$ converge fortement et linéairement vers l'unique zéro de T .*

La preuve de ces différents théorèmes se trouve dans l'article écrit par M.V. Solodov et B.F. Svaiter [19] (théorèmes 3.1 et 3.2). Nous avons choisi de ne pas démontrer ces propriétés de convergence, dans le but de bien détailler celles du chapitre 5.

4.5 Application

Afin d'illustrer la méthode décrite ci-dessus, nous avons choisi la méthode de Newton pour la résolution de systèmes d'équations. Dans cette application on considère $\epsilon = 0$.

On suppose que $H = \mathbb{R}^n$ et l'on considère le problème de résolution d'un système d'équations :

$$F(x) = 0,$$

où $F : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ est un opérateur monotone. On suppose aussi que F est de classe C^1 et que le Jacobien ∇F est Lipschitz continu sur \mathbb{R}^n , i.e, qu'il existe $\gamma > 0$ tel que

$$\|\nabla F(x) - \nabla F(y)\| \leq \gamma \|x - y\|, \quad \forall x, y \in \mathbb{R}^n.$$

L'algorithme fondamental pour la résolution de ce système d'équations est la méthode de Newton. On sait que cette méthode possède une vitesse soit super-linéaire, soit quadratique proche des solutions régulières, i.e, des solutions pour lesquelles le Jacobien est non singulier. De plus, nous savons aussi que la globalisation de la méthode, i.e, le fait de pouvoir obtenir la convergence de la méthode en partant de n'importe quel point dans \mathbb{R}^n , peut se faire facilement par des techniques de recherches linéaires ou encore par des fonctions de mérites permettant de réguler la méthode tout en imposant certaines hypothèses.

Ici, nous nous intéressons à un autre type de méthode de Newton basée sur la méthode de point proximal avec pas extra-gradient pour laquelle $T = F$.

Principe :

On considère l'itéré x^k qui n'est pas une solution du système $F(x) = 0$. On souhaite obtenir, grâce à un pas de la méthode de Newton appliquée au sous problème proximal suivant :

$$0 = c_k F(x) + (x - x^k), \tag{4.5.1}$$

un point y^k vérifiant la condition suivante :

$$\|c_k F(y^k) + (y^k - x^k)\| \leq \sigma \|y^k - x^k\|, \tag{4.5.2}$$

pour $c_k > 0$ et $\sigma \in [0, 1)$.

Le couple (y^k, v^k) avec $v^k = F(y^k)$ est une solution approximée avec une tolérance

4.5. APPLICATION

sur l'erreur σ du sous problème $0 \in c_k F(\cdot) + (\cdot - x^k)$. Ainsi l'itéré suivant x^{k+1} est obtenu en réalisant un pas extra-gradient.

Rappelons que la direction de Newton du problème (4.5.1) est donnée par

$$s^k = -(c_k \nabla F(x^k) + I)^{-1} c_k F(x^k).$$

La proposition suivante établit les bornes pour c_k dans lesquelles la condition (4.5.2) est satisfaite ainsi que la valeur de σ .

Proposition 18 Soit $y^k = x^k + s^k$ où s^k est la direction de Newton.

La condition

$$\|c_k F(y^k) + (y^k - x^k)\| \leq \sigma \|y^k - x^k\|$$

est vérifiée si

$$c_k \in \left[\frac{1}{10} (\gamma \|F(x^k)\|)^{-\frac{1}{2}}, (\gamma \|F(x^k)\|)^{-\frac{1}{2}} \right] \text{ et } \sigma \in \left[\frac{1}{2}, 1 \right).$$

Preuve

Par la continuité Lipschitsienne de ∇F , on sait que (par la proposition 4.1.12 de [4])

$$\|F(y^k) - F(x^k) - \nabla F(x^k)(y^k - x^k)\| \leq \frac{\gamma}{2} \|y^k - x^k\|^2. \quad (4.5.3)$$

Ainsi par la définition de s^k on a

$$c_k \nabla F(x^k) s^k + s^k = -c_k F(x^k). \quad (4.5.4)$$

Il suit que

$$y^k - x^k = s^k = -c_k F(x^k) - c_k \nabla F(x^k) s^k,$$

et donc,

$$\|c_k F(x^k) + y^k - x^k\| = \|c_k F(y^k) - c_k F(x^k) - c_k \nabla F(x^k) s^k\|.$$

En utilisant (4.5.3) et en multipliant par c_k la borne supérieure du membre de droite de cette inégalité devient

$$\|c_k F(y^k) + y^k - x^k\| \leq \frac{c_k \gamma}{2} \|y^k - x^k\|^2 = \frac{c_k \gamma}{2} \|s^k\| \|y^k - x^k\|. \quad (4.5.5)$$

De plus, puisque $\nabla F(x^k)$ est semi-définie positive (car F est monotone), on obtient $(s^k)^\top \nabla F(x^k) s^k \geq 0$. En multipliant le membre de gauche de (4.5.4) par s^k et en utilisant l'inégalité de Cauchy Schwarz, on trouve

$$\|s^k\|^2 \leq \|s^k\|^2 + c_k (s^k)^\top \nabla F(x^k) s^k = -c_k (s^k)^\top F(x^k) \leq c_k \|s^k\| \|F(x^k)\|,$$

et donc $\|s^k\| \leq c_k \|F(x^k)\|$.

En utilisant cette dernière inégalité dans (4.5.5), on déduit que

$$\|c_k F(y^k) + y^k - x^k\| \leq \frac{c_k^2 \gamma}{2} \|F(x^k)\| \|y^k - x^k\|.$$

Pour conclure la preuve, remarquons que par hypothèse $c_k^2 \leq (\gamma \|F(x^k)\|)^{-1}$ et donc

$$\frac{c_k^2 \gamma}{2} \|F(x^k)\| \leq \frac{1}{2} \leq \sigma.$$

□

On peut dès lors écrire l'algorithme pour la méthode de Newton :

Algorithme : Méthode de Newton régulée

Pas 0 : Initialisation.

Choisir un point de départ $x^0 \in \mathbb{R}^n$ et $\sigma \in [\frac{1}{2}, 1)$.

Pour $k = 0, 1, \dots$

Pas 1 Choisir $c_k > 0$ comme dans la proposition 18 et résoudre le système linéaire suivant :

$$(c_k \nabla F(x^k) + I) s = -c_k F(x^k)$$

pour obtenir s^k . Poser $y^k = x^k + s^k$.

Pas 2 : mise à jour par pas extra-gradient

$$x^{k+1} = x^k - c_k F(y^k).$$

En vue des théorèmes de convergence du paragraphe 4.4, on sait que la suite $\{x^k\}$ est bornée indépendamment du choix de $\{c_k\}$, et donc $\{F(x^k)\}$ est aussi bornée. En utilisant l'hypothèse de la proposition 18, on constate que c_k est tel que $c_k \geq c > 0$ pour tout k .

En conséquence, on peut alors appliquer le théorème 7 pour en déduire que la suite $\{x^k\}$ converge vers un zéro de F , s'il en existe un.

On observe aussi que cette convergence se produit sans hypothèse de régulation comme c'était le cas pour la globalisation de la méthode de Newton. La seule difficulté avec l'algorithme régulé est que la constante de Lipschitz γ du Jacobien ∇F est supposée connue. Une recherche linéaire de type Armijo peut être utilisé pour trouver c_k .

Chapitre 5

Un cadre unifié pour des algorithmes de point proximal inexacts

Dans les chapitres précédents nous avons étudié la méthode de point proximal et nous avons mis en évidence les belles propriétés de convergence de celle-ci. Cependant, cette méthode a un gros inconvénient : les sous problèmes utilisés sont aussi difficiles à résoudre que le problème de départ. Ce qui entraîne des difficultés dans beaucoup de situations et rend aussi la méthode pas très implémentable.

Etant donné qu'il s'agit d'une théorie très intéressante, de nombreuses améliorations ont été réalisées pour obtenir de meilleurs résultats numériques.

Lors de l'étude des méthodes hybrides avec pas de projection et pas extra-gradient, on a élaboré des critères d'approximations constructifs pour pouvoir implémenter ces méthodes.

L'objectif de ce chapitre est d'unifier les méthodes de point proximal avec pas de projection et pas extra-gradient pour créer un nouveau cadre de travail. Cette union utilisera un critère d'approximation pour les solutions des sous-problèmes meilleurs que ceux décrits jusqu'à présent.

5.1 Cadre général

Soient $x \in H$ et $c > 0$. Considérons le problème de point proximal associé au système suivant :

$$\begin{cases} v \in T(y) \\ cv + y - x = 0, \end{cases} \quad (5.1.1)$$

avec H un espace de Hilbert et T un opérateur maximal monotone sur H . Comme déjà expliqué précédemment, la résolution exacte d'un tel problème peut s'avérer très difficile en pratique. L'utilisation d'approximations des solutions est essentielle à l'aboutissement d'algorithmes implémentables.

Définition 22 Soit $x \in H$, $c > 0$ et $\sigma \in [0, 1)$. Un triplet $(y, v, \epsilon) \in H \times H \times \mathbb{R}_+$ est une *solution approximée* du problème proximal (5.1.1), si

$$\begin{cases} v \in T^\epsilon(y), \\ \|cv + y - x\|^2 + 2c\epsilon \leq \sigma^2 (\|cv\|^2 + \|y - x\|^2). \end{cases} \quad (5.1.2)$$

Remarques :

- On constate que le critère (5.1.2) est plus général que les critères (3.3.1) et (4.2.1), tout simplement parce que le membre de droite du nouveau critère est plus large. De plus, le critère (3.3.1) ne considère que les valeurs exactes de l'opérateur, i.e, $\epsilon = 0$.
- Si $\sigma = 0$, alors la seule solution approximée est la solution exacte avec $\epsilon = 0$.
- Si (y, v) est la solution exacte du problème (5.1.1) et si $\epsilon = 0$, alors (y, v, ϵ) satisfait la condition (5.1.2) pour n'importe quel $\sigma \in [0, 1)$.

5.2 Propriétés des solutions approximées

Lemme 2 Soit $x \in H$, $c > 0$.

Le triplet $(y, v, \epsilon) \in H \times H \times \mathbb{R}_+$, est une solution approximée du problème (5.1.1) avec une tolérance sur l'erreur $\sigma \in [0, 1)$, si et seulement si les relations suivantes sont vérifiées :

1. $v \in T^\epsilon(y)$
2. $\langle v, x - y \rangle - \epsilon \geq \frac{1-\sigma^2}{2c} (\|cv\|^2 + \|y - x\|^2)$.

De plus, on a

$$\frac{1-\rho}{1-\sigma^2} c \|v\| \leq \|y - x\| \leq \frac{1+\rho}{1-\sigma^2} c \|v\|,$$

où $\rho = \sqrt{1 - (1 - \sigma^2)^2}$.

Enfin, dans cette situation, les trois conditions suivantes sont équivalentes et impliquent $\epsilon = 0$:

1. $0 \in T(x)$,
2. $v = 0$,
3. $y = x$.

Preuve :

1.

Par hypothèse, le triplet (y, v, ϵ) vérifie $v \in T^\epsilon(y)$.

2.

Toujours par hypothèse, on a

$$\|cv + y - x\|^2 + 2c\epsilon \leq \sigma^2 (\|cv\|^2 + \|y - x\|^2)$$

Écrivons cette dernière inégalité autrement :

$$\begin{aligned} \sigma^2 (\|cv\|^2 + \|y - x\|^2) &\geq \|cv + y - x\|^2 + 2c\epsilon \\ &= 2c\epsilon + \|cv\|^2 + \|y - x\|^2 + 2c\langle v, y - x \rangle \quad c > 0 \end{aligned}$$

En arrangeant les termes, il suit que

$$\begin{aligned} 2c\langle v, y - x \rangle + 2c\epsilon &\leq \sigma^2 (\|cv\|^2 + \|y - x\|^2) - \|cv\|^2 - \|y - x\|^2 \\ &\Leftrightarrow \\ 2c(\langle v, x - y \rangle - \epsilon) &\geq (1 - \sigma^2) (\|cv\|^2 + \|x - y\|^2) \\ &\Leftrightarrow \end{aligned}$$

$$\langle v, y - x \rangle - \epsilon \geq \frac{1 - \sigma^2}{2c} (\|cv\|^2 + \|y - x\|^2).$$

5.2. PROPRIÉTÉS DES SOLUTIONS APPROXIMÉES

En utilisant l'inégalité de Cauchy Schwarz et la non négativité de ϵ , on obtient

$$\begin{aligned} \|cv\| \|y - x\| &\geq c\langle v, y - x \rangle \\ &\geq c\langle v, y - x \rangle - c\epsilon \\ &\geq \frac{1 - \sigma^2}{2} (\|cv\|^2 + \|y - x\|^2) \quad \text{par l'assertion 2.} \end{aligned}$$

En posant $t = \|y - x\|$, la dernière inégalité ci-dessus devient :

$$2\|cv\|t \geq (1 - \sigma^2) (\|cv\|^2 + t^2),$$

ou encore

$$t^2 - \frac{2\|cv\|}{1 - \sigma^2} \cdot t + \|cv\|^2 \leq 0.$$

Donc, t doit être compris entre les racines de l'équation du second degré :

$$t^2 - \frac{2\|cv\|}{1 - \sigma^2} \cdot t + \|cv\|^2 = 0.$$

Le réalisant de cette équation est :

$$\Delta = 4\|cv\|^2 - 4\|cv\|^2(1 - \sigma^2)^2 = 4\|cv\|^2\rho^2, \quad \text{où } \rho = \sqrt{1 - (1 - \sigma^2)^2}.$$

Les racines carrées sont

$$t_1 = c\|v\| \left(\frac{1 - \rho}{1 - \sigma^2} \right) \quad \text{et} \quad t_2 = c\|v\| \left(\frac{1 + \rho}{1 - \sigma^2} \right).$$

Et donc,

$$\frac{1 - \rho}{1 - \sigma^2} c\|v\| \leq t \leq \frac{1 + \rho}{1 - \sigma^2} c\|v\|.$$

Il nous reste encore à montrer les dernières équivalences.

\Rightarrow :

1. Supposons que $0 \in T(x)$

Puisque $v \in T^\epsilon(y)$, on a par définition de $T^\epsilon(y)$ que $\langle v, y - x \rangle \geq -\epsilon$, i.e., $\langle v, x - y \rangle \leq \epsilon$.

Ainsi, en utilisant l'assertion 2, nous pouvons écrire successivement

$$\begin{aligned}
 \langle v, x - y \rangle - \epsilon &\geq \frac{1 - \sigma^2}{2c} (\|cv\|^2 + \|y - x\|^2) \geq 0 && \Rightarrow \text{car } \langle v, x - y \rangle \leq \epsilon \\
 \epsilon - \epsilon &\geq \frac{1 - \sigma^2}{2c} (\|cv\|^2 + \|y - x\|^2) \geq 0 \\
 &&& \Leftrightarrow \\
 0 &\geq \frac{1 - \sigma^2}{2c} (\|cv\|^2 + \|y - x\|^2) \geq 0 && \Rightarrow \text{par le théorème de l'étau} \\
 \frac{1 - \sigma^2}{2c} (\|cv\|^2 + \|y - x\|^2) &\rightarrow 0 \\
 &&& \Rightarrow \\
 &&& v = 0 \text{ et } y - x = 0.
 \end{aligned}$$

2. Supposons alors que $v = 0$

Alors en utilisant le même raisonnement que précédemment, l'assertion 2 implique $x = y$ et $\epsilon = 0$.

◀:

1. Supposons que $x = y$

Alors en utilisant encore une fois le même raisonnement, l'inégalité 2 implique $v = 0$ et $\epsilon = 0$.

2.

Toutes ces conditions impliquent, de façon évidente, que $0 \in T(x)$.

□

Le lemme suivant est un résultat essentiel pour le développement d'un algorithme convergent, itératif, basé sur les solutions approximées décrites ci-dessus.

Lemme 3 Soit $x \in H$. Supposons que $\langle v, x - y \rangle - \epsilon > 0$, où $\epsilon \geq 0$ et $v \in T^\epsilon(y)$. Alors pour tout $x^* \in T^{-1}(0)$ et $\tau \geq 0$, on a

$$\|x^* - x^+\|^2 \leq \|x^* - x\|^2 - (1 - (1 - \tau)^2)\|av\|^2$$

où

$$x^+ = x - \tau av,$$

$$a = \frac{\langle v, x - y \rangle - \epsilon}{\|v\|^2}.$$

Preuve

Définissons le demi espace fermé $\mathcal{H} = \{z \in H \text{ tq } \langle v, z - y \rangle - \epsilon \leq 0\}$. On sait par hypothèse que $x \notin \mathcal{H}$ car $\langle v, x - y \rangle - \epsilon > 0$. Soit \bar{x} la projection de x sur \mathcal{H} . Ainsi, par la définition de projection, $\bar{x} = x - av$, où a est défini comme dans les hypothèses.

Montrons que pour n'importe quel $z \in \mathcal{H}$, nous avons $\langle z - \bar{x}, v \rangle \leq 0$. En effet, par la caractérisation de projection, on a

$$\begin{aligned} \langle z - \bar{x}, \bar{x} - x \rangle &\geq 0 \\ &\Leftrightarrow \text{car } \bar{x} = x - av \\ \langle z - \bar{x}, -av \rangle &\geq 0 \\ &\Leftrightarrow \\ -a\langle z - \bar{x}, v \rangle &\geq 0. \end{aligned}$$

Et donc, $\langle z - \bar{x}, v \rangle \leq 0$. De plus, comme $\tau a \geq 0$,

$$\langle z - \bar{x}, x^+ - x \rangle = \langle z - \bar{x}, -\tau av \rangle \geq 0. \quad (5.2.1)$$

En utilisant de nouveau la définition de x^+ , on trouve successivement :

$$\begin{aligned} \|z - x\|^2 &= \|(z - x^+) + (x^+ - x)\|^2 \\ &= \|z - x^+\|^2 + \|x^+ - x\|^2 + 2\langle z - x^+, x^+ - x \rangle \\ &= \|z - x^+\|^2 + \|x^+ - x\|^2 + 2\langle \bar{x} - x^+, x^+ - x \rangle + 2\langle z - \bar{x}, x^+ - x \rangle \\ &\geq \|z - x^+\|^2 + \|x^+ - x\|^2 + 2\langle \bar{x} - x^+, x^+ - x \rangle \quad \text{par (5.2.1)} \\ &= \|z - x^+\|^2 + \|x - \tau av - x\|^2 + 2\langle x - av - x + \tau av, x - \tau av - x \rangle \\ &= \|z - x^+\|^2 + \|\tau av\|^2 + 2\langle -av + \tau av, -\tau av \rangle \\ &= \|z - x^+\|^2 + 2\tau a^2\|v\|^2 - \tau^2 a^2\|v\|^2 \\ &= \|z - x^+\|^2 + [1 - (1 - \tau)^2] a^2\|v\|^2 \end{aligned}$$

Supposons maintenant que $x^* \in T^{-1}(0)$.

Par définition de T^ϵ , $\langle v-0, y-x^* \rangle \geq -\epsilon$ et par conséquent, $\langle v, x^*-y \rangle - \epsilon \leq 0$, ce qui signifie que $x \in \mathcal{H}$. En remplaçant x^* par z dans la chaîne d'inégalités ci-dessus, nous obtenons :

$$\begin{aligned} \|x^* - x\|^2 &\geq \|x^* - x^+\|^2 + [1 - (1 - \tau)^2] a^2 \|v\|^2 \\ &\Leftrightarrow \\ \|x^* - x^+\|^2 &\leq \|x^* - x\|^2 - [1 - (1 - \tau)^2] a^2 \|v\|^2. \end{aligned}$$

□

Ce lemme nous indique que si l'on considère le paramètre τ dans l'intervalle $(0, 2)$, alors le point x^+ sera plus proche de l'ensemble des solutions de $T^{-1}(0)$ que le point x . Ces deux premiers lemmes, seront les fondements de la construction d'un algorithme convergent et itératif. Dans le but de pouvoir unifier les algorithmes avec pas de projection et pas extra-gradient, nous avons choisi de faire varier τ dans l'intervalle $(0, 2)$. Nous pouvons, à présent, décrire cet algorithme :

Algorithme unifiant les méthodes de point proximal proposées par Solodov et Svaiter

Pas 0 : Initialisation.

Choisir un point de départ $x^0 \in H$ et les constantes $0 \leq \bar{\sigma} < 1$, $\bar{c} > 0$ et $\theta \in (0, 1)$.

Pas 1 : Calcul de la solution approximée.

Choisir $c_k \geq \bar{c}$ et trouver un triplet $(v^k, y^k, \epsilon_k) \in H \times H \times \mathbb{R}_+$, solution approximée avec une tolérance sur l'erreur $\sigma_k \leq \bar{\sigma}$ du système proximal suivant :

$$\begin{cases} v \in T(y) \\ cv + y - x = 0, \end{cases}$$

c'est à dire,

$$v^k \in T^{\epsilon_k}(y^k),$$

$$\|c_k v^k + y^k - x^k\|^2 + 2c_k \epsilon_k \leq \sigma_k^2 \left(\|c_k v^k\|^2 + \|y^k - x^k\|^2 \right).$$

Pas 2 : Critère d'arrêt.

Si $y^k = x^k$, STOP. Sinon,

Pas 3 : Mise à jour.

Choisir $\tau_k \in [1 - \theta, 1 + \theta]$, et calculer

$$a^k = \frac{\langle v^k, x^k - y^k \rangle - \epsilon_k}{\|v^k\|^2},$$

$$x^{k+1} = x^k - \tau_k a_k v^k, \tag{5.2.2}$$

et retourner au pas 1.

Remarques :

- L'algorithme s'arrête lorsque $y^k = x^k$, ce qui signifie en vertu du lemme 2 que $x^k \in T^{-1}(0)$.
- Il s'agit de montrer que les méthodes proposées dans les chapitres 3 et 4 s'avèrent être des cas particuliers de cet algorithme. D'abord et comme déjà remarqué précédemment, n'importe quelle solution approximée du sous problème de point proximal vérifiant les critères (3.3.1) et (4.2.1) vérifie aussi le critère (5.1.2) utilisé dans l'algorithme ci-dessus. Il nous faut encore montrer que l'itéré suivant x^{k+1} obtenu par les méthodes de projection (3.4.3) et de pas extra-gradient (proposition 17), sont aussi deux cas particuliers de la mise à jour définie en (5.2.2). Pour le cas de la projection, il suffit de prendre $\tau_k = 1$ et $\epsilon_k = 0$. Pour le pas extra-gradient, c'est

moins évident, il faut montrer qu'il existe $\tau_k \in [1 - \theta, 1 + \theta]$ tel que $\tau_k a_k = c_k$, ou de façon équivalente, qu'il existe $\theta \in (0, 1)$ tel que

$$(1 - \theta)a_k \leq c_k \leq (1 + \theta)a_k.$$

La proposition suivante met en évidence ce dernier fait.

Proposition 19 *Soient $x, y, v \in H$ et $\epsilon \geq 0$, $c > 0$ et $\sigma \in [0, 1)$ tels que $0 \notin T(x)$ et*

$$v \in T^\epsilon(y),$$

$$\|cv + y - x\|^2 + 2c\epsilon \leq \sigma^2 (\|y - x\|^2).$$

Alors,

$$(1 - \sigma)a \leq c \leq (1 + \sigma)a \tag{5.2.3}$$

où,

$$a = \frac{\langle v, x - y \rangle - \epsilon}{\|v\|^2}.$$

Preuve

D'abord, nous constatons par hypothèse, que le lemme 1 est applicable puisque le triplet (x, y, v) satisfait la définition de solution approximée et donc $v \neq 0$ et $a > 0$.

Ensuite, nous savons que $\|cv + y - x\| \leq \sigma\|y - x\|$. Nous allons utiliser l'inégalité triangulaire pour obtenir les membres de gauche et de droite de (5.2.3)

$$\begin{aligned} c\|v\| &\leq \|cv + (y - x)\| + \|y - x\|, \\ &\leq \sigma\|y - x\| + \|y - x\|, \\ &\leq (1 + \sigma)(\|y - x\|). \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} \|y - x\| &\leq \|y - x + cv\| + \|cv\|, \\ &\leq \sigma\|y - x\| + \|cv\|, \\ \|y - x\| - \sigma\|y - x\| &\leq \|cv\|, \\ (1 - \sigma)\|y - x\| &\leq \|cv\|. \end{aligned}$$

On en conclut que

$$(1 - \sigma)\|y - x\| \leq c\|v\| \leq (1 + \sigma)(\|y - x\|). \tag{5.2.4}$$

5.2. PROPRIÉTÉS DES SOLUTIONS APPROXIMÉES

A présent, nous utilisons la définition de a , le fait que $\epsilon \geq 0$ et l'inégalité de Cauchy Schwarz, pour montrer que

$$a \leq \frac{\|y - x\|}{\|v\|^2} \leq \frac{\|y - x\|}{\|v\|}. \quad (5.2.5)$$

En combinant (5.2.5) et (5.2.4) et en divisant par $\|v\|$ où $v \neq 0$,

$$(1 - \sigma)a \leq c \quad (5.2.6)$$

Ce qui démontre une partie de l'assertion.

Pour prouver l'autre partie, remarquons d'abord que

$$\|cv + y - x\|^2 = \|cv\|^2 + \|y - x\|^2 + 2c\langle v, y - x \rangle.$$

La définition de a devient :

$$\begin{aligned} a &= \frac{\|cv\|^2 + \|y - x\|^2 - (\|cv + y - x\|^2 + 2c\epsilon)}{2c\|v\|^2} \\ &\geq \frac{\|cv\|^2 + (1 - \sigma^2)\|y - x\|^2}{2c\|v\|^2} \\ &= \frac{c}{2} \left(1 + (1 - \sigma^2) \frac{\|x - y\|^2}{\|cv\|^2} \right). \end{aligned}$$

Or, par (5.2.4), on sait que

$$\frac{1}{\|cv\|^2} \geq \frac{1}{(1 + \sigma)^2 \|x - y\|^2},$$

ainsi

$$\begin{aligned} a &\geq \frac{c}{2} \left(\frac{(1 - \sigma^2)\|x - y\|^2}{(1 + \sigma)^2 \|x - y\|^2} \right) \\ &= \frac{c}{2} \left(1 + \frac{1 - \sigma}{1 + \sigma} \right) \\ &= \frac{c}{1 + \sigma}. \end{aligned}$$

On peut donc conclure que

$$c \leq a(1 + \sigma). \quad (5.2.7)$$

Ce qui démontre la deuxième partie de l'assertion.

On termine la preuve en regroupant (5.2.6) et (5.2.7).

□

Cette proposition implique que si l'on choisit $\theta \geq \bar{\sigma}$ dans l'algorithme décrit ci-dessus, pour chaque k , il existe $\tau_k \in [1 - \theta, 1 + \theta]$ tel que $\tau_k a_k = c_k$, et donc la méthode hybride de point proximal avec pas extra-gradient est un cas particulier de la méthode décrite dans l'algorithme ci-dessus.

Chapitre 6

Analyse de la convergence de l'algorithme unifiant les méthodes proposées par Solodov et Svaiter

Comme déjà remarqué, si l'algorithme décrit au chapitre précédent se termine après un nombre fini d'itérations, on obtient une solution au problème.

Dans ce chapitre, on suppose que les suites $\{x^k\}$, $\{v^k\}$, $\{y^k\}$, $\{\epsilon_k\}$ générées par l'algorithme sont infinies. En utilisant le lemme 2, on conclut que pour tout k , $v^k \neq 0$, $x^k \neq y^k$ et

$$\langle v^k, x^k - y^k \rangle - \epsilon_k \geq \frac{1 - \sigma_k^2}{2c_k} (\|c_k v^k\|^2 + \|y^k - x^k\|^2) > 0 \quad (6.0.1)$$

D'où, par la définition de a_k , on a

$$a_k \geq \frac{1 - \sigma_k^2}{2} \frac{\|c_k v^k\|^2 + \|y^k - x^k\|^2}{c_k \|v^k\|^2} \quad (6.0.2)$$

On sait aussi que $\|c_k v^k\|^2 + \|y^k - x^k\|^2 \geq 2c_k \|v^k\| \|y^k - x^k\|$.
Ainsi,

$$a_k \|v^k\| \geq (1 - \sigma_k^2) \|y^k - x^k\|. \quad (6.0.3)$$

6.1 Convergence

Lemme 4 *Si l'ensemble des solutions du problème suivant,*

$$\text{trouver } x \in H \text{ tel que } 0 \in T(x),$$

est non vide alors,

1. *La suite $\{x^k\}$ est bornée,*
2. $\sum_{k=0}^{\infty} \|a_k v^k\|^2 < \infty,$
3. $\lim_{k \rightarrow \infty} \|y^k - x^k\| = \lim_{k \rightarrow \infty} \|v^k\| = \lim_{k \rightarrow \infty} \epsilon_k = 0.$

Preuve

1. **La suite $\{x^k\}$ est bornée**

Commençons par remarquer que, en vue de la définition de τ_k ,

$$-(1 - (1 - \tau_k)^2) \leq -(1 - \theta^2),$$

puisque

$$\begin{aligned} -\theta^2 &\leq -(1 - \tau_k)^2, \\ &\Leftrightarrow \\ |1 - \tau_k| &\leq \theta, \\ &\Leftrightarrow \\ (1 - \theta) &\leq \tau_k \leq (1 + \theta). \end{aligned}$$

Ensuite en appliquant le lemme 3 et en se servant de l'inégalité (6.0.1) on a pour n'importe quel $x^* \in T^{-1}(0)$, que

$$\begin{aligned} \|x^* - x^{k+1}\|^2 &\leq \|x^* - x^k\|^2 - (1 - (1 - \tau_k)^2) a_k^2 \|v^k\|^2, \\ &\leq \|x^* - x^k\|^2 - (1 - \theta^2) a_k^2 \|v^k\|^2 \quad \text{car } \tau_k \in [1 - \theta, 1 + \theta]. \end{aligned}$$

La suite $\{x_k\}$ est donc décroissante et minorée, par conséquent, elle est bornée.

2. **Montrons la série des $\|a_k v^k\|^2$ est finie**

Pour ce faire appliquons de manière successive le lemme 3 :

$$\begin{aligned}
 \|x^* - x^{k+1}\|^2 &\leq \|x^* - x^k\|^2 - (1 - \theta^2)a_k^2\|v^k\|^2, \\
 (1 - \theta^2)a_k^2\|v^k\|^2 &\leq \|x^* - x^k\|^2 - \|x^* - x^{k+1}\|^2, \\
 (1 - \theta^2) \sum_{i=0}^k \|a_i v^i\|^2 &\leq \|x^* - x^0\|^2 - \underbrace{\|x^* - x\|^2 + \|x^* - x\|^2 - \|x^* - x^2\|^2 + \dots + \|x^* - x^k\|^2}_{-\|x^* - x^{k+1}\|^2}, \\
 &\leq \|x^* - x^0\|^2 - \|x^* - x^{k+1}\|^2, \\
 &\leq \|x^* - x^0\|^2.
 \end{aligned}$$

Ainsi, quand $k \rightarrow \infty$, on a

$$(1 - \theta^2) \sum_{i=0}^{+\infty} \|a_i v^i\|^2 \leq \|x^* - x^0\|^2 < +\infty$$

3. Il nous reste à montrer l'assertion 3

Pour cela, nous allons partir de (6.0.2) et nous allons multiplier chaque membre par $\|v^k\|$:

$$\begin{aligned}
 a_k \|v^k\| &\geq \frac{1 - \sigma_k^2 \|c_k v^k\|^2 + \|y^k - x^k\|^2}{2 c_k \|v^k\|^2} \|v^k\|, \\
 &\geq \frac{1 - \sigma_k^2 \|c_k v^k\|^2}{2 c_k \|v^k\|}, \\
 &= \frac{1 - \sigma_k^2}{2} \|c_k v^k\|.
 \end{aligned}$$

Donc,

$$a_k \|v^k\| \geq \frac{1 - \sigma_k^2}{2} \|c_k v^k\| \geq 0.$$

et quand $k \rightarrow \infty$, le théorème de l'étau implique alors,

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{1 - \sigma_k^2}{2} c_k \|v^k\| \rightarrow 0.$$

Comme $\sigma_k \leq \bar{\sigma} < 1$ et $c_k \geq \bar{c} \gg 0$, on en déduit que

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \|v^k\| = 0.$$

De même, en utilisant (6.0.3) on a

$$a_k \|v^k\| \geq (1 - \sigma_k^2) \|y^k - x^k\| \geq 0.$$

Quand $k \rightarrow \infty$, le théorème de l'étau implique alors,

$$\lim_{k \rightarrow \infty} (1 - \sigma_k^2) \|y^k - x^k\| \rightarrow 0,$$

Ce qui entraîne à son tour que

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \|y^k - x^k\| \rightarrow 0.$$

En combinant le fait que $\epsilon_k \geq 0$ et (6.0.1), on a $\lim_{k \rightarrow \infty} \epsilon_k = 0$.

□

Nous sommes prêt maintenant pour démontrer la convergence de notre algorithme.

Théorème 9 *Si l'ensemble des solutions du problème suivant,*

$$\text{trouver } x \in H \text{ tel que } 0 \in T(x),$$

est non vide alors, la suite $\{x^k\}$ converge faiblement vers la solution.

De plus, ce point limite est unique.

Enfin, si T n'a pas de solution, alors la suite $\{x^k\}$ n'est pas bornée.

Preuve

1. Montons la convergence faible vers la solution

En vue du lemme 4, la suite $\{x^k\}$ est bornée et donc possède au moins un point limite \bar{x} . Considérons la sous-suite $\{x^{k_j}\}$ convergeant faiblement vers \bar{x} .

Par le lemme 4, on sait que $\|y^k - x^k\| \rightarrow 0$ et comme $x^{k_j} \rightharpoonup \bar{x}$, $y^{k_j} \rightharpoonup \bar{x}$.
De plus, $v^{k_j} \rightarrow 0$ et $\epsilon^{k_j} \rightarrow 0$.

Considérons alors $x \in H$ et $u \in T(x)$. Pour tout indice j , nous avons

$$\langle u - v^{k_j}, x - y^{k_j} \rangle \geq -\epsilon_{k_j} \quad \text{car } v^k \in T^{\epsilon_k}(y^k).$$

Et donc,

$$\begin{aligned} \langle u - 0, x - y^{k_j} \rangle - \langle v^{k_j}, x - y^{k_j} \rangle &\geq -\epsilon_{k_j} \\ &\Leftrightarrow \\ \langle u - 0, x - y^{k_j} \rangle &\geq \langle v^{k_j}, x - y^{k_j} \rangle - \epsilon_{k_j} \end{aligned}$$

Or, la sous-suite $\{y^{k_j}\}$ converge faiblement vers \bar{x} , la sous-suite $\{v^{k_j}\}$ converge fortement vers 0 et la sous-suite $\{\epsilon_{k_j}\}$ converge vers 0, si bien que lorsque l'on prend la limite quand $j \rightarrow \infty$ dans l'inégalité ci-dessus on a

$$\langle u - 0, x - \bar{x} \rangle \geq 0.$$

Mais, le couple (x, u) a été choisi de manière arbitraire dans le graphe de T . Et comme, T est maximal, la proposition 2 implique alors que $0 \in T(\bar{x})$, \bar{x} est donc solution du problème considéré.

2. Nous allons à présent montrer l'unicité du point limite

Considérons à présent deux points limites quelconques de la suite $\{x^k\}$: \bar{x}_1 et \bar{x}_2 . On sait que chacun d'eux est un zéro de T , donc

$$\alpha_1 = \lim_{k \rightarrow \infty} \|x^k - \bar{x}_1\| \quad \text{et} \quad \alpha_2 = \lim_{k \rightarrow \infty} \|x^k - \bar{x}_2\|,$$

existent et sont finies. Remarquons que

$$\|x^k - \bar{x}_2\|^2 = \|x^k - \bar{x}_1\|^2 + 2\langle x^k - \bar{x}_1, x^k - \bar{x}_2 \rangle + \|\bar{x}_1 - \bar{x}_2\|^2,$$

on en conclut alors

$$2 \lim_{k \rightarrow \infty} \langle x^k - \bar{x}_1, x^k - \bar{x}_2 \rangle = (\alpha_2^2 - \alpha_1^2 - \|\bar{x}_1 - \bar{x}_2\|^2).$$

Etant donné que \bar{x}_1 est un point limite de $\{x^k\}$, cette limite est nulle, ce qui entraîne

$$\alpha_2^2 = \alpha_1^2 + \|\bar{x}_1 - \bar{x}_2\|^2.$$

De même pour \bar{x}_2 , on a

$$\alpha_2^2 = \alpha_1^2 + \|\bar{x}_1 - \bar{x}_2\|^2.$$

On en déduit que $\|\bar{x}_1 - \bar{x}_2\| = 0$, i.e, $\bar{x}_1 = \bar{x}_2$. La suite $\{x^k\}$ admet donc exactement un seul point limite.

3. Montrons que la suite $\{x^k\}$ est non bornée lorsque T ne possède pas de zéros

Stratégie :

L'idée de la preuve consiste à construire un opérateur maximal monotone T' ayant des zéros, de sorte que les suites $\{x^k\}$, $\{y^k, v^k\}$ et $\{\epsilon_k\}$ puissent être considérées comme étant générées par l'algorithme unifiant les méthodes de point proximal proposées par Solodov et Svaiter appliqué au problème $0 \in T'(x)$. Nous allons supposer dans le but d'avoir une contradiction que $\{x^k\}$ est bornée.

Construction de l'opérateur T'

De l'algorithme, on sait que $x^k - x^{k+1} = \tau_k a_k v^k$ où $\tau_k \in [1 - \theta, 1 + \theta]$ et

$\theta \in (0, 1)$. Comme la suite $\{x^k\}$ est bornée, la suite $\{\tau_k a_k v^k\}$ est bornée. La suite $\{y^k\}$ est aussi bornée car en utilisant (6.0.3) on trouve

$$\|a_k v^k\| \geq (1 - \sigma_k^2) \|y^k - x^k\|,$$

on sait aussi que la suite $\{\tau_k\}$ est bornée.

Maintenant prenons n'importe quel $\bar{z} \in \text{dom } T$, on sait que cet ensemble est non vide car l'opérateur T est maximal monotone.

Définition 23 Soit K un ensemble convexe et fermé de \mathbb{R}^n et soit $x^* \in K$. Le cône normal de K en x^* est défini par l'ensemble :

$$N_K(x^*) \equiv \{d \in \mathbb{R}^n \mid \langle d, x - x^* \rangle \leq 0 \quad \forall x \in K\}.$$

Définissons

$$R > \max\{\|\bar{z}\|, \sup_k \|x^k\|, \sup_k \|y^k\|\},$$

et $B = \{z \in H \mid \|z\| \leq 2R\}$. Considérons aussi N_B l'opérateur cône normal de B ($N_B = \partial I_B$, où I_B est la fonction indicatrice de B). Puisque que N_B est maximal monotone, et $\bar{z} \in \text{dom } T \cap \text{int}(\text{dom } N_B)$, l'opérateur $T' = T + N_B$ est maximal monotone. De plus, T' possède un domaine bornée car il est contenu dans B et par conséquent, l'opérateur T' a au moins un zéro (proposition 7).

Montrons que $\forall k \quad v^k \in (T')^{\epsilon_k}(y^k)$

Il s'agit de montrer que $\langle w' - v^k, z - y^k \rangle \geq -\epsilon_k$ pour tout couple $(z, w') \in \text{gph } T'$. Soit $(z, w') \in \text{gph } T'$. Alors, par définition de T' , il existe $w, v \in H$ tel que

$$w' = w + v, \quad w \in T(z), \quad v \in N_B(z)$$

Remarquons aussi que $y^k \in B$ pour tout k . Ainsi, par la définition du cône normal $\langle v, z - y^k \rangle \geq 0$ on a

$$\langle w' - v^k, z - y^k \rangle = \langle w - v^k, z - y^k \rangle + \langle v, z - y^k \rangle \geq -\epsilon,$$

où on a utilisé le fait que $v^k \in T^{\epsilon_k}(y^k)$ et $(z, w) \in \text{gph } T$.

T a des zéros.

Par les points précédents, on sait que les suites $\{x^k\}$, $\{(y^k, v^k)\}$ et $\{\epsilon_k\}$ peuvent être considérée comme étant générées par l'algorithme unifiant les méthodes de point proximal proposées par Solodov et Svaiter appliquées au problème $0 \in T'$. On peut donc appliquer la première partie du théorème puisque $c_k \geq$

$c > 0$ pour tout k , et conclure que la suite $\{x^k\}$ converge faiblement vers x' une solution de l'opérateur T' . On obtient donc

$$0 \in T'(x') = T(x') + N_B(x').$$

Or, $\|x'\| \leq R$ et donc $x' \in \text{int}B$. Ce qui entraîne que $N_B(x') = \{0\}$ et $0 \in T(x')$ ce qui contredit le fait que l'on avait supposé que l'opérateur T n'avait pas de zéros.

□

6.2 Vitesse de convergence

Nous allons, à présent, nous intéresser à la vitesse de convergence de notre algorithme.

Pour ce faire, nous allons supposer que l'opérateur T^{-1} est Lipschitz continu dans un voisinage de 0, i.e,

Définition 24 Soit T un opérateur univoque sur H . L'opérateur inverse T^{-1} est dit *Lipschitz continu* dans un voisinage de 0, de constante $L > 0$, s'il existe une solution unique $x^* \in T^{-1}(0)$ et $\delta > 0$ tels que

$$v \in T(x), \quad \|v\| \leq \delta \Rightarrow \|x - x^*\| \leq L\|v\|$$

Avant de commencer l'étude de la vitesse de convergence de l'algorithme, nous avons besoin d'un résultat provenant de l'article écrit par **M.V. Solodov et B.F. Svaiter** [21], corollaire 2.1. Celui-ci sera essentiel pour conclure notre analyse. Il s'agit d'un théorème fournissant une borne d'erreur.

Lemme 5 Soit y^*, v^* la solution exacte du système proximal suivant :

$$\begin{cases} v \in T(y) \\ cv + y - x = 0. \end{cases}$$

Alors, pour n'importe quel $y \in H$, $v \in T^\epsilon(y)$,

$$\|y - y^*\|^2 + c^2\|v - v^*\|^2 \leq \|cv + y - x\|^2 + 2c\epsilon.$$

6.2. VITESSE DE CONVERGENCE

On a aussi besoin d'une borne sur a_k . Ainsi, en utilisant (6.0.2) et le lemme ci-dessus, on trouve

$$a_k \geq \frac{1 - \sigma_k^2}{2} \left[1 + \frac{\|y^k - x^k\|^2}{\|c_k v^k\|^2} \right] \cdot c_k \quad (6.2.1)$$

Remarquons que

$$\begin{aligned} 1 + \frac{\|y^k - x^k\|^2}{c_k^2 \|v^k\|^2} &\geq 1 + \frac{(1 - \rho)^2}{(1 - \bar{\sigma}^2)^2} \quad \text{par le lemme 2,} \\ &\geq \frac{(1 - \bar{\sigma}^2)^2 + (1 - \rho)^2}{(1 - \bar{\sigma}^2)^2}, \\ &= \frac{(1 - \bar{\sigma}^2)^2 + 1 - 2\rho + \rho^2}{(1 - \bar{\sigma}^2)^2}, \\ &= \frac{(1 - \bar{\sigma}^2)^2 + 1 - 2\sqrt{1 - (1 - \bar{\sigma}^2)^2} + 1 - (1 - \bar{\sigma}^2)^2}{(1 - \bar{\sigma}^2)^2} \\ & \qquad \qquad \qquad \text{car } \rho = 1 - (1 - \bar{\sigma}^2)^2, \\ &= \frac{2 \left[1 - \sqrt{1 - (1 - \bar{\sigma}^2)^2} \right]}{(1 - \bar{\sigma}^2)^2}, \end{aligned}$$

et donc, en combinant ce dernier résultat avec (6.2.1) on a,

$$a_k \geq \frac{\left[1 - \sqrt{1 - (1 - \bar{\sigma}^2)^2} \right]}{(1 - \bar{\sigma}^2)} \cdot c_k.$$

Or,

$$\frac{(1 - \bar{\sigma}^2)}{1 + \sqrt{1 - (1 - \bar{\sigma}^2)^2}} = \frac{1 - \sqrt{1 - (1 - \bar{\sigma}^2)^2}}{(1 - \bar{\sigma}^2)},$$

(6.2.1) devient alors

$$a_k \geq \frac{(1 - \bar{\sigma}^2)}{1 + \sqrt{1 - (1 - \bar{\sigma}^2)^2}} \cdot \bar{c} \quad \text{car } c_k \geq \bar{c}. \quad (6.2.2)$$

Théorème 10 *Supposons que T^{-1} soit Lipschitz continu dans un voisinage de 0, et que $\forall k, \tau_k \in [1 - \theta, 1 + \theta]$. Alors, pour k suffisamment grand,*

$$\|x^* - x^{k+1}\| \leq \frac{\lambda + \theta}{\sqrt{(1 - \theta^2) + (\lambda + \theta)^2}} \|x^* - x^k\|,$$

où $\lambda = \sqrt{\alpha^2 + 1} \cdot \sqrt{\beta^2 - 1} + \alpha\beta$ avec

$$\alpha = \frac{L[1 + \sqrt{1 - (1 - \bar{\sigma}^2)^2}]}{\bar{c}(1 - \bar{\sigma}^2)},$$

$$\beta = \frac{1}{1 - \bar{\sigma}^2}.$$

Preuve

1. Avant de débiter la preuve proprement dite, nous allons montrer un petit résultat qui permettra de simplifier l'étape 5 de cette preuve. Il s'agit de montrer que

$$\sqrt{\left(\frac{L}{a_k}\right)^2 + 1} \cdot \sqrt{(1 - \sigma_k^2)^{-2} - 1} + \frac{L}{a_k} \frac{1}{1 - \sigma_k^2} \leq \lambda$$

Pour cela on a successivement

$$\frac{L^2}{a_k^2} \leq \frac{L^2[1 + \sqrt{1 - (1 - \bar{\sigma}^2)^2}]^2}{\bar{c}^2(1 - \bar{\sigma}^2)^2} \quad \text{par (6.2.2) et } \bar{\sigma} \geq \sigma_k$$

$$= \alpha^2.$$

$$(1 - \sigma_k^2)^{-2} - 1 = \beta^2 - 1 \quad \text{car } \bar{\sigma} \geq \sigma_k.$$

$$\frac{L}{a_k} \frac{1}{1 - \sigma_k^2} \leq \frac{L}{\bar{c}} \cdot \frac{1 + \sqrt{1 - (1 - \bar{\sigma}^2)^2}}{(1 - \bar{\sigma}^2)} \quad \text{par (6.2.2) et } \bar{\sigma} \geq \sigma_k$$

$$= \alpha\beta.$$

Donc,

$$\sqrt{\left(\frac{L}{a_k}\right)^2 + 1} \cdot \sqrt{(1 - \sigma_k^2)^{-2} - 1} + \frac{L}{a_k} \frac{1}{1 - \sigma_k^2} \leq \sqrt{\alpha^2 + 1} \cdot \sqrt{\beta^2 - 1} + \alpha\beta = \lambda.$$

6.2. VITESSE DE CONVERGENCE

2. Définissons pour chaque k , \hat{x}^k et $\hat{v}^k \in T(\hat{x}^k)$ la solution du problème proximal $0 \in a_k T(x) + x - x^k$, où $a_k > 0$ a été défini dans l'algorithme algorithm unifiant les méthodes de point proximal proposées par Solodov et Svaiter.

3. Puisque $v^k \in T^{\epsilon_k}(y^k)$, il suit du lemme 5 que

$$\|\hat{x}^k - y^k\|^2 + a_k^2 \|\hat{v}^k - v^k\|^2 \leq \|a_k v^k + y^k - x^k\|^2 + 2a_k \epsilon_k.$$

Par la définition de a_k , on constate que $\epsilon_k = \langle v^k, x^k - y^k \rangle - a_k \|v^k\|^2$, ce qui entraîne que

$$\begin{aligned} \|a_k v^k + y^k - x^k\|^2 + 2a_k \epsilon_k &= \|a_k v^k + y^k - x^k\|^2 + 2a_k [\langle v^k, x^k - y^k \rangle - a_k \|v^k\|^2], \\ &= \|a_k v^k\|^2 + \|y^k - x^k\|^2 + 2a_k \langle v^k, y^k - x^k \rangle, \\ &\quad - 2a_k \langle v^k, y^k - x^k \rangle - 2\|a_k v^k\|^2, \\ &= \|y^k - x^k\|^2 - \|a_k v^k\|^2. \end{aligned}$$

Finalement, $\|\hat{x}^k - y^k\|^2 + a_k^2 \|\hat{v}^k - v^k\|^2 \leq \|y^k - x^k\|^2 - \|a_k v^k\|^2$.

En utilisant (6.0.3), nous trouvons

$$\|\hat{x}^k - y^k\|^2 + a_k^2 \|\hat{v}^k - v^k\|^2 \leq \frac{a_k^2 \|v^k\|^2}{(1 - \sigma_k^2)^2} - \|a_k v^k\|^2.$$

$$\|\hat{x}^k - y^k\|^2 + a_k^2 \|\hat{v}^k - v^k\|^2 \leq [(1 - \sigma_k^2)^{-2} - 1] \|a_k v^k\|^2, \quad (6.2.3)$$

et donc,

$$\begin{aligned} \|\hat{v}^k - v^k\|^2 &\leq [(1 - \sigma_k^2)^{-2} - 1] \|v^k\|^2 - \underbrace{\frac{\|\hat{x}^k - y^k\|^2}{a_k^2}}_{\geq 0}, \\ &\leq [(1 - \sigma_k^2)^{-2} - 1] \|v^k\|^2, \\ &\leq [(1 - \bar{\sigma}^2)^{-2} - 1] \|v^k\|^2 \quad \bar{\sigma} \geq \sigma_k. \end{aligned}$$

4. Grâce au lemme 4, on sait que v^k converge vers 0, on pourra donc conclure que \hat{v}^k converge aussi vers 0.

En effet, $\underbrace{0}_{\rightarrow 0} \leq \|\hat{v}^k - v^k\|^2 \leq [(1 - \bar{\sigma}^2)^{-2} - 1] \underbrace{\|v^k\|^2}_{\rightarrow 0}$

Le théorème de l'étau implique alors que $\|\hat{v}^k - v^k\|^2 \rightarrow 0$ ce qui entraîne $\hat{v}^k - v^k \rightarrow 0 \Rightarrow \hat{v}^k = \hat{v}^k - v^k + v^k \rightarrow 0$.

Ainsi, pour k assez grand et par la condition de Lipschitz avec $\|\hat{v}^k\| \leq \delta$, on a

$$\|x^* - \hat{x}^k\| \leq L \|\hat{v}^k\| = \frac{L}{a_k} \|\hat{x}^k - x^k\| \quad \text{car } 0 = a_k \hat{v}^k + \hat{x}^k - x^k. \quad (6.2.4)$$

5. On considère encore k assez grand, de sorte que (6.2.4) ait lieu. En utilisant l'inégalité triangulaire avec $\bar{x} = x^k - a_k v^k$,

$$\begin{aligned} \|x^* - \bar{x}\| &\leq \|x^* - \hat{x}^k\| + \|\hat{x}^k - \bar{x}\|, \\ &\leq \underbrace{\frac{L}{a_k} \|\hat{x}^k - x^k\|}_{\text{}} + \|\hat{x}^k - \bar{x}\|, \end{aligned}$$

$$\|x^* - \bar{x}\| \leq \underbrace{\frac{L}{a_k} \|\hat{x}^k - y^k\| + \frac{L}{a_k} \|y^k - x^k\|}_{\text{}} + \|\hat{x}^k - \bar{x}\|. \quad (6.2.5)$$

Comme $\hat{x}^k = x^k - a_k \hat{v}^k$ et $\bar{x} = x^k - a_k v^k$, on a $\|\hat{x}^k - \bar{x}\| = a_k \|\hat{v}^k - v^k\|$. En utilisant la relation (6.2.3) et cette dernière égalité, on obtient

$$\|\hat{x}^k - y^k\|^2 + \|\hat{x}^k - \bar{x}\|^2 \leq [(1 - \sigma_k^2)^{-2} - 1] \|a_k v^k\|^2. \quad (6.2.6)$$

D'où, il suit que

$$\begin{aligned} \frac{L}{a_k} \|\hat{x}^k - y^k\| + \|\hat{x}^k - \bar{x}\| &\leq \sqrt{\left(\frac{L}{a_k}\right)^2 + 1} \cdot \sqrt{\|\hat{x}^k - y^k\|^2 + \|\hat{x}^k - \bar{x}\|^2}, \\ &\leq \sqrt{\left(\frac{L}{a_k}\right)^2 + 1} \cdot \sqrt{(1 - \sigma_k^2)^{-2} - 1} \cdot \|a_k v^k\| \end{aligned}$$

par, (6.2.6).

Ainsi, si on reprend (6.2.5) avec (6.2.6), on trouve

$$\begin{aligned} \|x^* - \bar{x}\| &\leq \sqrt{\left(\frac{L}{a_k}\right)^2 + 1} \cdot \sqrt{(1 - \sigma_k^2)^{-2} - 1} \cdot \|a_k v^k\| + \frac{L}{a_k} \|y^k - x^k\|, \\ &\leq \left[\sqrt{\left(\frac{L}{a_k}\right)^2 + 1} \cdot \sqrt{(1 - \sigma_k^2)^{-2} - 1} + \frac{L}{a_k} (1 - \sigma_k^2)^{-1} \right] \|a_k v^k\| \end{aligned}$$

par (6.0.3).

En se servant de la définition de λ et de l'étape 1, on obtient

$$\|x^* - \bar{x}\| \leq \lambda \|a_k v^k\|. \quad (6.2.7)$$

6. Pour terminer, on définit $x^{k+1} = x^k - \tau_k a_k v^k$. Par l'inégalité triangulaire,

$$\begin{aligned} \|x^* - x^{k+1}\| &\leq \|x^* - \bar{x}\| + \|\bar{x} - x^{k+1}\|, \\ &\leq \|x^* - \bar{x}\| + a_k \|v^k\| (1 - \tau_k). \end{aligned}$$

et comme $\tau_k \in [1 - \theta, 1 + \theta]$,

$$\|x^* - x^{k+1}\| \leq \lambda \|a_k v^k\| + \theta a_k \|v^k\|. \quad (6.2.8)$$

En utilisant le lemme 3,

$$\begin{aligned} \|x^* - x^k\|^2 &\geq \|x^* - x^{k+1}\|^2 + (1 - \theta^2) \|a_k v^k\|^2 \quad \text{car } (1 - \tau)^2 \leq \theta^2, \\ &\geq \|x^* - x^{k+1}\|^2 + \frac{(1 + \theta^2)}{(\lambda + \theta)^2} \|x^* - x^{k+1}\|^2 \quad \text{par (6.2.8),} \\ &\geq \left[1 + \frac{(1 + \theta^2)}{(\lambda + \theta)^2} \right] \|x^* - x^{k+1}\|^2. \end{aligned}$$

Donc,

$$\|x^* - x^k\|^2 \left[\frac{(\lambda + \theta)^2}{(\lambda + \theta)^2 + (1 + \theta^2)} \right] \geq \|x^* - x^{k+1}\|^2.$$

Ce qui nous permet de conclure la preuve puisque

$$\|x^* - x^{k+1}\| \leq \frac{\lambda + \theta}{\sqrt{(\lambda + \theta)^2 + (1 + \theta^2)}} \|x^* - x^k\|.$$

□

Remarques

- On constate assez facilement que l'on peut répéter l'analyse effectuée pour ce théorème avec α_k , β_k et λ_k , définis pour chaque k , comme étant des fonctions de c_k et σ_k , au lieu d'être définis par leurs bornes \bar{c} et $\bar{\sigma}$. L'analyse précédente nous montre que si $c_k \rightarrow \infty$ et si $\sigma_k \rightarrow 0$, alors $\alpha_k \rightarrow 0$, $\beta_k \rightarrow 1$ et $\lambda_k \rightarrow 0$. Cela se vérifie facilement par les différentes définitions. On peut alors conclure sous ces hypothèses que $\{x^k\}$ converge super-linéairement vers la solution x^* .
- Si dans l'énoncé du théorème, on considère $\tau_k = 1$, on peut démontrer par la même stratégie que la suite $\{x^k\}$ converge linéairement vers la solution x^* avec un taux $\frac{\lambda}{\sqrt{1+\lambda^2}}$.

Chapitre 7

Applications

Après avoir décrit l'algorithme unifiant les méthodes de point proximal proposées par Solodov et Svaiter et après avoir montré sa convergence, on va appliquer cet algorithme à deux grandes familles de problèmes, à savoir les méthodes de décomposition forward-backward et les méthodes faisceaux.

7.1 La méthode de décomposition forward-backward

Ce paragraphe sera consacré à l'application de l'algorithme établi dans le chapitre précédent dans le cas où l'opérateur T est la somme de deux opérateurs $A + B$. Dans ce cadre, le calcul de la résolvante J_{cT} s'avère encore plus difficile. Mais, si les résolvantes J_{cA} et/ou J_{cB} existent et si elles sont plus faciles à calculer que celle de l'opérateur T , il est intéressant de les utiliser plutôt que celle de l'opérateur T .

7.1.1 Description

Considérons un opérateur multivoque dont le domaine est non vide et fermé. Supposons que $T = A + B$ où B est un opérateur maximal monotone et $A : \text{dom} B \rightarrow H$ univoque. Remarquons, pour $c > 0$, que

$$\begin{aligned} 0 \in T(x) &\Leftrightarrow -cA(x) \in cB(x) \Leftrightarrow (I - cA)(x) \in (I + cB)(x) \\ &\Leftrightarrow x = J_{cB}[(I - cA)(x)]. \end{aligned}$$

La proposition 8, nous assure que

$$x^{k+1} = J_{c_k B}[(I - c_k A)(x^k)] = J(x^k, c_k) = (I + c_k B)^{-1}(I - c_k A)(x^k). \quad (7.1.1)$$

On utilise uniquement la résolvante de B . De plus, comme $J_{c_k B} : H \rightarrow \text{dom} B$ (puisque $y = J_{c_k B}(x) \Leftrightarrow x \in (I + c_k B)y$), x^{k+1} appartient au domaine de B et l'itération est bien définie.

Chaque itération consiste à faire deux pas : un en "avant" en utilisant la résolvante de A et un pas en "arrière" en utilisant la résolvante de B , d'où le nom de la méthode. La convergence de cette méthode a été démontrée par **P. Tseng** dans [24] et se formule de la façon suivante :

Théorème 11 *Soit T un opérateur univoque de domaine convexe, fermé et non vide. Supposons qu'il possède au moins un zéro. Supposons aussi que $T = A + B$ où B est maximal monotone et $A : \text{dom } B \rightarrow H$ univoque. Considérons $x^0 \in \text{dom } B$ et soit $\{x^k\}$ la suite engendrée par l'itération "forward-backward" (7.1.1). Si A est α -co-coercif et si*

$$0 < \delta \leq c_k \leq 2\alpha - \delta, \quad \forall k,$$

pour $\delta \in [0, \alpha]$, alors la suite $\{x^k\}$ converge faiblement vers un zéro de T .

Si en plus, soit A ou soit B est fortement monotone, alors la suite converge fortement et linéairement avec un taux égale à

$$\sqrt{(1 - \eta_A^2 \delta^2) / (1 - \eta_B^2 \delta^2)},$$

où η_A et η_B désignent les modules de forte monotonie de A et de B .

Supposons à présent, que l'opérateur A univoque, soit continu et monotone et que son domaine soit tel que $\text{dom } A = H$, ainsi, par la proposition 5, on sait que A est maximal monotone.

Remarquons que si A est α -co-coercif, alors A est Lipschitz continu de constante α^{-1} . En effet, par définition, on a

$$\forall x, y \in H \quad \langle A(x) - A(y), x - y \rangle \geq \alpha \|A(x) - A(y)\|^2.$$

En utilisant l'inégalité de Cauchy-Schwarz et en divisant par $\|A(x) - A(y)\|$, on trouve

$$\|x - y\| \geq \alpha \|A(x) - A(y)\|,$$

ce qui revient à dire que A est Lipschitz continu de constante $L = \alpha^{-1}$.

Cependant, l'hypothèse selon laquelle l'opérateur A doit être α -co-coercif est trop contraignante et assez limitante, c'est pourquoi on va montrer que cette hypothèse n'est pas nécessaire pour établir la convergence. Pour y parvenir, nous allons réaliser un pas supplémentaire (défini par notre algorithme unifiant les méthodes de point proximal proposées par Solodov et Svaiter) après le pas "forward-backward". La proposition suivant fait le lien entre ces deux pas.

Proposition 20 Soient $y^k = J(x^k, c_k)$ et

$$v^k = A(y^k) - A(x^k) + \frac{1}{c_k}(x^k - y^k).$$

Alors, $v^k \in T(y^k)$ et le couple (y^k, v^k) est une solution approchée (avec $\epsilon_k = 0$) du sous problème proximal

$$0 \in c_k T(\cdot) + (\cdot - x^k),$$

si et seulement si la condition suivante est satisfaite :

$$\|c_k[A(y^k) - A(x^k)]\|^2 \leq \sigma^2 [\|c_k[A(y^k) - A(x^k)] + x^k - y^k\|^2 + \|y^k - x^k\|^2].$$

Mise à jour :

$$x^{k+1} = x^k - \tau_k a_k v^k.$$

avec,

$$\tau_k \in [1 - \theta, 1 + \theta], \text{ où } \theta \in (0, 1) \text{ et } a_k = \frac{\langle v^k, x^k - y^k \rangle}{\|v^k\|^2}.$$

Preuve

Par la définition de la résolvante J (7.1.1), on a $y^k = J(x^k, c_k) = J_{c_k B}[(I - c_k A)(x^k)]$, on trouve successivement

$$\begin{aligned} x^k - c_k A(x^k) &\in (I + c_k B)(y^k) \\ 0 &\in c_k [B(y^k) + A(x^k)] + (y^k - x^k) \\ \frac{1}{c_k}(x^k - y^k) - A(x^k) &\in B(y^k) \end{aligned}$$

et donc $v^k = A(y^k) - A(x^k) + \frac{1}{c_k}(x^k - y^k) \in (A + B)(y^k) = T(y^k)$. De plus, le critère pour être solution approchée (5.1.2), devient

$$\|c_k[A(y^k) - A(x^k)]\|^2 \leq \sigma^2 [\|c_k[A(y^k) - A(x^k)] + x^k - y^k\|^2 + \|y^k - x^k\|^2]$$

Ce qui termine la preuve. □

L'algorithme forward-backward modifié s'écrit alors

Algorithme forward-backward modifié.

Pas 0 : Initialisation

Choisir $x^0 \in H$, $\sigma \in [0, 1)$ et $\theta \in (0, 1)$.

Pour $k = 0, 1, \dots$

1. Choisir $c_k > 0$ tel que $y^k = J(x^k, c_k)$ et

$$v^k = A(y^k) - A(x^k) + \frac{1}{c_k}(x^k - y^k)$$

satisfaisant le critère

$$\|c_k[A(y^k) - A(x^k)]\|^2 \leq \sigma^2 [\|c_k[A(y^k) - A(x^k)] + x^k - y^k\|^2 + \|y^k - x^k\|^2]. \quad (7.1.2)$$

2. Mise à jour :

$$x^{k+1} = x^k - \tau_k a_k v^k, \quad (7.1.3)$$

avec,

$$\tau_k \in [1 - \theta, 1 + \theta] \text{ et } a_k = \frac{\langle v^k, x^k - y^k \rangle}{\|v^k\|^2}.$$

On constate que cet algorithme n'a de sens que si l'on peut trouver un élément $c_k > 0$. Pour établir la bonne définition de l'algorithme, nous avons besoin du lemme suivant :

Lemme 6 *Considérons deux opérateurs A et B tout deux maximaux monotones sur H de tel sorte que A soit univoque sur $\text{dom } B \subseteq \text{dom } A$. Alors,*

$$\frac{1}{c} \|J(x, c) - x\| \leq \min_{w \in A(x) + B(x)} \|w\| \quad \forall x \in \text{dom } B, \forall c > 0.$$

Preuve

Soit $x \in \text{dom } B$ fixé et $c > 0$. Soit aussi $z = J(x, c)$. Alors, par la définition de $J(x, c)$, il suit que $(x - z)/c \in A(x) + B(z)$, ainsi pour tout $w \in A(x) + B(x)$, la monotonie de B implique alors que

$$\left\langle \frac{x - z}{c} - A(x) - (w - A(x)), z - x \right\rangle \geq 0.$$

Ce qui donne en simplifiant et en réorganisant les termes

$$\frac{1}{c}\|x - z\|^2 \leq \langle w, x - z \rangle \leq \|w\|\|x - z\|,$$

ce qui donne l'inégalité souhaitée. □

Proposition 21 *Supposons que A soit un opérateur univoque continu monotone avec $\text{dom } A = H$ (et donc maximal monotone) et B un opérateur maximal monotone sur H . Si x^k n'est pas un zéro de $A + B$, alors on peut trouver $c_k > 0 \forall k$ acceptable (i.e, vérifiant (7.1.2)). De plus, si A est Lipschitz continu sur $\text{dom } B$ avec une constante $L > 0$, alors n'importe quel $c_k \leq \frac{\sigma}{L}$ est acceptable.*

Preuve

1. Un élément $c_k > 0$ acceptable existe

En utilisant le lemme précédent avec $x^k = x$, on sait que

$$\|J(x^k, c) - x^k\| \leq c \min_{w \in A(x^k) + B(x^k)} \|w\| \quad \forall c > 0.$$

Ainsi, par le théorème de l'étau, la résolvante $J(x^k, c)$ converge fortement vers x^k lorsque $c \rightarrow 0$ et la continuité de A implique

$$\|A(J(x^k, c)) - A(x^k)\| \rightarrow 0 \text{ lorsque } c \rightarrow 0. \quad (7.1.4)$$

De plus, par la définition de $J(x^k, c)$, on peut écrire

$$\frac{1}{c}(x^k - J(x^k, c)) \in A(x^k) + B(J(x^k, c)). \quad (7.1.5)$$

Et on en conclut que

$$\liminf_{c \rightarrow 0} \frac{1}{c}\|x^k - J(x^k, c)\| > 0. \quad (7.1.6)$$

En effet, supposons que cette limite soit égale à zéro. Comme $J(x^k, c)$ converge fortement vers x^k , il suit de (7.1.5) et de la proposition 4 appliquée à B que $0 \in A(x^k) + B(x^k)$. Mais ceci contredit le fait que x^k n'est pas un zéro de $A + B$. Donc l'inégalité (7.1.6) est satisfaite.

Maintenant, de (7.1.4) et (7.1.6), on en déduit que l'on peut trouver un $c_k > 0$ acceptable.

2. Tout $c_k \leq \sigma/L$ est acceptable

Supposons que A soit Lipschitz continu sur le domaine de B . Alors,

$$\|c_k[A(y^k) - A(x^k)]\| \leq c_k L \|y^k - x^k\|.$$

Donc, si $c_k L \leq \sigma$, alors le critère (7.1.2) est satisfait.

□

En pratique, on détermine c_k par une recherche linéaire du type backtracking. La convergence de cette méthode est assurée en appliquant les résultats obtenus par les théorèmes 9 et 10. Avant de décrire la deuxième méthode il nous faut décrire la notion de problèmes d'inégalités variationnelles.

7.2 Problèmes d'inéquations variationnelles

On retrouve les inéquations variationnelles dans un grand éventail de problèmes à travers diverses disciplines comme par exemple les modèles physique, les équations différentielles ou encore les problèmes d'équilibre. Cette section sera consacrée à la description du problème d'inéquations variationnelles et à ses principales caractéristiques.

Définition 25 *Considérons un sous-ensemble K de \mathbb{R}^n et une application $F : K \rightarrow \mathbb{R}^n$. Le problème d'inéquations variationnelles, noté $VIP(K; F)$ est de trouver un vecteur $x^* \in K$ tel que*

$$\langle F(x^*), x - x^* \rangle \geq 0 \quad \forall x \in K. \quad (7.2.1)$$

L'ensemble des solutions de ce problème est noté $SOL-VIP(K; F)$.

Généralement, on impose deux hypothèses supplémentaires à cette définition, pour obtenir des résultats théoriques et pour les arguments de convergence :

- K est fermé et non vide,
- F est continue sur un ensemble ouvert contenant K .

On conclut de ces hypothèses que $SOL-VIP(K; F)$ est un ensemble fermé.

Interprétation géométrique.

L'équation (7.2.1) nous fournit une première interprétation : le vecteur $x^* \in K$ est une solution du problème $VIP(K; F)$ si et seulement si $F(x^*)$ forme un angle

aigu avec chaque vecteur de la forme $x - x^*$ pour tout $x \in K$.

Cette observation peut se formaliser en utilisant la notion de cône normal, dont nous rappelons la définition :

Définition 26 Soit K un ensemble convexe et fermé de \mathbb{R}^n et soit $x^* \in K$. Le cône normal de K en x^* est défini par l'ensemble :

$$N_K(x^*) \equiv \{d \in \mathbb{R}^n \mid \langle d, x - x^* \rangle \leq 0 \quad \forall x \in K.$$

Les vecteurs d sont appelés les vecteurs normaux de K en x^* .

En reprenant l'équation (7.2.1), on trouve

$$\begin{aligned} (7.2.1) \quad &\Leftrightarrow \langle -F(x^*), x - x^* \rangle \leq 0 \quad \forall x \in K \\ &\Leftrightarrow -F(x^*) \text{ est le cône normal de } K \text{ en } x^* \\ &\Leftrightarrow -F(x^*) \in N_K(x^*). \end{aligned}$$

Cette dernière équivalence peut encore se ré-écrire de la façon suivante :

$$0 \in F(x^*) + N_K(x^*),$$

cette relation s'appelle **Equation généralisée**.

Problèmes d'optimisation et problèmes VIP.

Considérons le problème d'optimisation suivant :

$$\min_{x \in K} \varphi(x),$$

où K est un ensemble fermé et convexe, φ est une fonction continûment différentiable sur un ensemble $U \subset \mathbb{R}^n$ contenant K .

Le principe du minimum nous permet de dire que si x^* est un minimiseur local de φ sur K , alors

$$\nabla \langle \varphi(x^*), x - x^* \rangle \geq 0 \quad \forall x \in K.$$

Ce problème est le $\text{VIP}(K; \nabla \varphi)$. Une solution de ce problème est appelé point stationnaire du problème d'optimisation initialement considéré.

7.2.1 Inéquations variationnelles et méthode proximale

Dans ce paragraphe, nous définissons le problème VIP suivant,

Définition 27 Soit K un sous-ensemble de H non vide, convexe et fermé. Soit aussi $F : K \rightarrow H$ un opérateur monotone et univoque. Le problème d'inéquations variationnelles est de trouver un vecteur $x \in K$ tel que

$$\langle F(x), y - x \rangle \geq 0 \quad \forall y \in K.$$

On sait que ce problème est équivalent à rechercher un zéro de l'opérateur $T = F + N_K$.

Proposition 22 Soit K un sous-ensemble de H non vide, fermé et convexe. Le cône normal est un opérateur maximal monotone et sa résolvante est donné par $J_{cN_K}(x) = Proj_K(x)$, avec $c > 0$ et où $Proj(x)$ désigne la projection orthogonal de x sur K .

Preuve

1. Le cône normal est un opérateur maximal monotone

Nous savons de par l'exemple (5) que le cône normal $N_K(x)$ est le sous-différentiel de la fonction indicatrice I_K de K , il suit donc de par la proposition (13) que l'opérateur N_K est maximal monotone.

2. La résolvante de l'opérateur N_k est la projection orthogonal de x sur K

$$\begin{aligned} y \in J_{cN_k}(x) = (I + cN_k)^{-1}(x) &\Leftrightarrow x - y \in N_k(x) \\ &\Leftrightarrow \langle y - x, z - y \rangle \geq 0 \quad \forall z \in K \\ &\Leftrightarrow y = Proj_K(x). \end{aligned}$$

Ainsi, $J_{cN_K}(x) = Proj_K(x)$.

□

Il serait intéressant de pouvoir dire que l'opérateur $T = F + N_K$ est maximal monotone, c'est l'objet du théorème suivant.

Théorème 12 Soit K un sous-ensemble de H non vide, convexe et fermé. Soit aussi $F : K \rightarrow H$ un opérateur monotone et univoque. Si F est héli-continu sur K , alors l'opérateur $T = F + N_K$ est maximal monotone. De plus, pour tout $c > 0$, la résolvante J_{cT} est donnée par

$$J_{cT}(x) = \text{SOL-VIP}(K; F_{c,x}), \quad \text{où, } F_{c,x}(y) = y - x + cF(y).$$

Preuve

Puisque que N_K et F sont monotones, la somme $T = F + N_K$ est monotone. Pour montrer que T est maximal monotone, en vue de la proposition 2, il nous suffit vérifier la condition :

si $(y, x) \in H \times H$ satisfait

$$\langle x - y, u - v \rangle \geq 0, \quad \forall x \in K, \forall u \in T(x),$$

alors $v \in T(y)$.

Puisque $T = F + N_K$, cette condition devient :

si (y, v) satisfait

$$\langle x - y, x_1^* \rangle + \langle x - y, F(x) - v \rangle \geq 0, \quad \forall x \in K, \forall x_1^* \in N_K(x), \quad (7.2.2)$$

alors $v - F(y) \in N_K(y)$.

Considérons un couple (y, v) vérifiant l'équation (7.2.2).

1. Montrons que $0 \in N_K(y)$ et donc que $y \in K$

Puisque $N_K(x)$ est maximal monotone, il suffit de montrer que $\langle x - y, x_1^* - 0 \rangle \geq 0$ pour tout $x \in K$ et $x_1^* \in N_K(x)$. Soit $x \in K$ et $x_1^* \in N_K(x)$. Alors, $\lambda x_1^* \in N_K(x)$ pour chaque $\lambda \geq 0$, ainsi par (7.2.2),

$$\lambda \langle x - y, x_1^* \rangle + \langle x - y, F(x) - v \rangle \geq 0 \quad \forall \lambda > 0.$$

En divisant par $\lambda > 0$ et en prenant la limite quand $\lambda \rightarrow +\infty$, on obtient $\langle x - y, x_1^* \rangle \geq 0$.

2. Montrons que $v - F(y) \in N_K(y)$

Il s'agit de prouver que $\langle v - F(y), u - y \rangle \leq 0$ pour tout $u \in K$. Fixons $u \in K$ et soit $x_\lambda = \lambda u + (1 - \lambda)y$ avec $\lambda \in (0, 1)$. Etant donné que $y \in K$ et que K est convexe, $x_\lambda \in K$. Ainsi, la condition (7.2.2) est vérifiée pour $x = x_\lambda$ et pour $x_1^* = 0$. Ce qui nous donne

$$\begin{aligned} 0 &\leq \langle x_\lambda - y, F(x_\lambda) - v \rangle \\ &= \lambda \langle u - y, F(x_\lambda) - v \rangle \\ &= \lambda \langle u - y, F(x_\lambda) - F(y) \rangle - \lambda \langle u - y, v - F(y) \rangle. \end{aligned}$$

Ce qui implique que

$$\langle u - y, v - F(y) \rangle \leq \langle u - y, F(x_\lambda) - F(y) \rangle \quad 0 < \lambda < 1.$$

Et comme F est héli-continue sur K , F est continue sur le segment $[u, y]$ pour la topologie faible. Ainsi, $F(x_\lambda)$ converge faiblement vers $F(y)$ lorsque $\lambda \rightarrow 0$. En prenant la limite lorsque $\lambda \rightarrow 0$ dans la dernière inégalité, on a $\langle u - y, v - F(y) \rangle \leq 0$.

□

7.3 Une méthode faisceau pour résoudre des inéquations variationnelles généralisées

Dans cette section, nous allons considérer le problème d'inéquations variationnelles généralisées. Ce problème combine un problème de minimisation convexe et le problème $VIP(K; F)$:

Définition 28 Soient K un sous-ensemble convexe et non-vide de H , $F : K \rightarrow H$ un opérateur maximal monotone univoque et soit φ une fonction convexe, propre et fermée sur H dont le domaine contient K . Le problème d'inéquations variationnelles généralisées, noté $GVIP(K; F; \varphi)$ est de trouver un vecteur $x \in K$ tel que

$$\langle F(x), y - x \rangle + \varphi(y) - \varphi(x) \geq 0 \quad \forall y \in K.$$

Lorsque $\varphi = 0$, le problème $GVIP(K; F; \varphi)$ coïncide avec le problème $VIP(K; F)$. Lorsque $F = 0$, il s'agit de minimiser la fonction convexe φ sur K . Observons aussi que ce problème peut s'écrire de la façon suivante :

$$\text{trouver un zéro de l'opérateur univoque } T = F + \partial(\varphi + I_K),$$

où I_K la fonction indicatrice de K .

Dans un premier temps, nous effectuons le lien avec la première méthode décrite : la méthode "forward-backward". Pour ce faire, commençons par écrire l'opérateur T sous la forme d'une somme de deux opérateurs $A + B$ avec $A = F$ et $B = \partial(\varphi + I_K)$. Ensuite, on peut écrire le problème d'inéquations variationnelles généralisés sous la forme suivante :

$$\text{trouver un zéro de l'opérateur } T = F + \partial(\varphi + I_K).$$

Après, on peut appliquer la proposition (13) pour exprimer la résolvante de B avec $c > 0$:

$$\begin{aligned} J_{cB}(x) &= \arg \min_{y \in H} \{ \varphi(y) + I_K(y) + \frac{1}{2c} \|y - x\|^2 \} \\ &= \arg \min_{y \in K} \{ \varphi(y) + \frac{1}{2c} \|y - x\|^2 \} \end{aligned}$$

L'itération "forward-backward" (7.1.1) devient :

$$x^{k+1} = J_{c_k B} [(I - c_k F)(x^k)] = \arg \min_{y \in K} \{ \varphi(y) + \frac{1}{2c_k} \|y - x^k + c_k F(x^k)\|^2 \}.$$

Or, comme $\|y - x^k + c_k F(x^k)\|^2 = \|y - x^k\|^2 + 2\langle c_k F(x^k), y - x^k \rangle + c_k^2 \|F(x^k)\|^2$, l'itération forward-backward devient,

$$x^{k+1} = \arg \min_{y \in K} \{ \varphi(y) + \frac{1}{2c_k} \|y - x^k\|^2 + \langle F(x^k), y - x^k \rangle \}.$$

De plus, le théorème 11 est applicable et nous assure la convergence faible de la suite $\{x^k\}$ vers un zéro de $F + \partial(\varphi + I_K)$, i.e, vers une solution du problème $\text{GVIP}(K; F; \varphi)$, lorsque F est α -co-coercive. Et si F est fortement monotone, alors la suite $\{x^k\}$ converge fortement et linéairement vers l'unique solution du problème $\text{GVIP}(K; F; \varphi)$.

On sait que si on applique la méthode "forward-backward" décrite ci-dessus, il n'est pas nécessaire que F soit α -co-coercive. La convergence est alors assurée en effectuant un pas supplémentaire après le pas "forward-backward". Afin de fixer les choses, supposons que F soit Lipschitz continue de constante $L > 0$. Dans ce cas, on sait par la proposition 21 que tout $c_k \leq \sigma/L$ est acceptable. L'algorithme s'écrit alors,

Algorithme forward-backward pour le problème $\text{GVIP}(K; F; \varphi)$.

Pas 0 : Initialisation

Choisir $x^0 \in H$ un point de départ, $\sigma \in [0, 1)$ et $\theta \in (0, 1)$.

Pour $k = 0, 1, \dots$

1. Choisir $0 < c_k \leq \sigma/L$ et calculer

$$y^k = \arg \min_{y \in K} \{ \varphi(y) + \frac{1}{2c_k} \|y - x^k\|^2 + \langle F(x^k), y - x^k \rangle \}.$$

2. Mise à jour : $x^{k+1} = x^k - \tau_k a_k v^k$,

avec

$$\tau_k \in [1-\theta, 1+\theta], \quad a_k = \frac{\langle v^k, x^k - y^k \rangle}{\|v^k\|^2}, \quad \text{et } v^k = F(y^k) - F(x^k) + \frac{1}{c_k} (x^k - y^k).$$

7.3. UNE MÉTHODE FAISCEAU POUR RÉSOUDRE DES INÉQUATIONS VARIATIONNELLES GÉNÉRALISÉES

Cependant, trouver y^k peut être difficile à faire, surtout lorsque la fonction φ n'est pas différentielle, ce qui est souvent le cas. Mais, comme on souhaite garder un algorithme implémentable, on a besoin de pouvoir approximer la fonction φ . Cette approximation va se faire par une fonction convexe φ^k qui va simplifier la résolution de notre problème de minimisation et qui permettra d'assurer la convergence sous les mêmes hypothèses.

Stratégie

On va choisir une fonction $\varphi^k \leq \varphi$ telle que

$$y^k = \operatorname{arg\,min}_{y \in K} \left\{ \varphi^k(y) + \frac{1}{2c_k} \|y - x^k\|^2 + \langle F(x^k), y - x^k \rangle \right\}, \quad (7.3.1)$$

vérifie les propriétés suivantes :

$$v^k \in T^{\epsilon_k}(y^k), \quad \text{où } v^k = F(y^k) - F(x^k) + \frac{1}{c_k}(x^k - y^k), \quad (7.3.2)$$

et avec $\epsilon_k \geq 0$

$$\|c_k [F(y^k) - F(x^k)]\|^2 + 2c_k \epsilon_k \leq \sigma^2 [\|c_k [F(y^k) - F(x^k)] + x^k - y^k\|^2 + \|y^k - x^k\|^2]. \quad (7.3.3)$$

Donc, φ^k doit être choisie telle que $\varphi^k \leq \varphi$ et le triplet (y^k, v^k, ϵ_k) est une solution approximée du sous-problème proximal $0 \in T(\cdot) + (\cdot - x^k)$ avec $T = F + \partial(\varphi + I_K)$.

La proposition suivante, prouve que si $\epsilon_k = \varphi(y^k) - \varphi^k(y^k)$, alors la propriété (7.3.2) est toujours satisfaite :

Proposition 23 *Soit $\varphi^k \leq \varphi$ une fonction convexe, propre et fermée sur H telle que y^k défini par (7.3.1) et vérifiant (7.3.3) avec $\epsilon_k = \varphi(y^k) - \varphi^k(y^k)$, alors*

$$v^k = F(y^k) - F(x^k) + \frac{1}{c_k}(x^k - y^k) \in T^{\epsilon_k}(y^k),$$

où $T = F + \partial(\varphi + I_K)$.

Preuve

Il s'agit de montrer que $v^k \in T^{\epsilon_k}(y^k)$, i.e, que

$$\forall y \in H, \forall w \in T(y) \quad \langle w - v^k, y - y^k \rangle \geq -\epsilon_k.$$

7.3. UNE MÉTHODE FAISCEAU POUR RÉSOUDRE DES INÉQUATIONS VARIATIONNELLES GÉNÉRALISÉES

En utilisant les définitions de y^k, v^k et la définition du sous-gradient, on obtient successivement que

$$\begin{aligned} 0 &\in \frac{1}{c_k}(y^k - x^k) + F(x^k) + \partial(\varphi^k + I_K)(y^k), \\ \frac{1}{c_k}(x^k - y^k) - F(x^k) &\in \partial(\varphi^k + I_K)(y^k), \\ v^k - F(y^k) &\in \partial(\varphi^k + I_K)(y^k), \\ \varphi^k(z) &\geq \varphi^k(y^k) + \langle v^k - F(y^k), z - y^k \rangle \quad \text{pour tout } z \in K. \end{aligned}$$

Puisque $\varphi^k \leq \varphi$ et $\epsilon_k = \varphi(y^k) - \varphi^k(y^k)$, on a

$$\forall z \in K \quad \varphi(z) \geq \varphi(y^k) - \epsilon_k + \langle v^k - F(y^k), z - y^k \rangle. \quad (7.3.4)$$

Soit $y \in H$ et $w \in T(y) = (F + \partial(\varphi + I_K))(y)$.

Ainsi, $y \in K$ et $w - F(y) \in \partial(\varphi + I_K)(y)$. Donc,

$$\forall z \in K \quad \varphi(z) \geq \varphi(y) + \langle w - F(y), z - y \rangle. \quad (7.3.5)$$

Si on choisit $z = y$ dans (7.3.4) et $z = y^k$ dans (7.3.5) et si l'on additionne les deux inégalités, on trouve

$$0 \geq -\epsilon_k + \langle w - v^k, y^k - y \rangle + \langle F(y) - F(y^k), y - y^k \rangle.$$

Et comme F est monotone, $\langle F(y) - F(y^k), y - y^k \rangle \geq 0$, par conséquent,

$$\langle w - v^k, y^k - y \rangle \geq -\epsilon_k.$$

□

L'algorithme approché s'écrit alors

Algorithme forward-backward approché pour le problème GVIP($K; F; \varphi$).

Pas 0 : Initialisation

Choisir $x^0 \in H$ un point de départ, $\sigma \in [0, 1)$ et $\theta \in (0, 1)$.

Pour $k = 0, 1, \dots$

1. Choisir $c_k > 0$ et rechercher une fonction convexe $\varphi^k \leq \varphi$ telle que y^k défini par (7.3.1) vérifiant (7.3.3) avec $\epsilon_k = \varphi(y^k) - \varphi^k(y^k)$.

2. Mise à jour : $x^{k+1} = x^k - \tau_k a_k v^k$,
avec

$$\tau_k \in [1-\theta, 1+\theta], \quad a_k = \frac{\langle v^k, x^k - y^k \rangle}{\|v^k\|^2}, \quad \text{et } v^k = F(y^k) - F(x^k) + \frac{1}{c_k}(x^k - y^k)$$

7.3. UNE MÉTHODE FAISCEAU POUR RÉSOUDRE DES INÉQUATIONS VARIATIONNELLES GÉNÉRALISÉES

Théoriquement cet algorithme est toujours bien défini car il est toujours possible de choisir $\varphi^k = \varphi$. Mais ce choix n'est absolument pas judicieux car la résolution des sous problèmes avec φ et φ^k sont les mêmes et donc toujours aussi difficiles à résoudre.

Des théorèmes 9 et 10, il suit avec $c_k \geq c > 0$ pour tout k , la suite $\{x^k\}$ générée par cet algorithme converge faiblement vers une solution du problème GVIP($K; F; \varphi$). De plus, si l'opérateur T^{-1} est Lipschitz continu dans un voisinage de zéro, alors la convergence est forte et linéaire.

Cette méthode a l'avantage de permettre de choisir une fonction convexe φ^k rendant le problème de minimisation (7.3.1) plus facile à résoudre.

Quelle est la forme de cette fonction convexe φ^k ?

Elle peut par exemple être le **maximum d'un nombre fini de fonctions linéaires**. Dans ce cas, le sous problème (7.3.1) est facile à résoudre. En effet, si l'on suppose que

$$\varphi^k(y) = \max_{i=1, \dots, m} \{ \langle a_i, y \rangle + b_i \} \quad \forall y \in H,$$

où les $a_i \in H$ et les $b_i \in \mathbb{R}$ pour $i = 1, \dots, m$. Alors en ajoutant une nouvelle variable réelle w , le problème (7.3.1) est équivalent au problème suivant :

$$\begin{cases} \min & w + \frac{1}{2c_k} \|y - x^k\|^2 + \langle F(x^k), y - x^k \rangle \\ \text{s.c} & \langle a_i, y \rangle + b_i \leq w, i = 1, \dots, m \\ & y \in K. \end{cases}$$

Lorsque $H = \mathbb{R}^n$ et lorsque K est défini par des inégalités ou des égalités linéaires, ce problème est alors un problème de programmation quadratique. Il existe de nombreuses méthodes très efficaces pour résoudre ce genre de problèmes. Néanmoins, pour construire φ^k , on doit aussi tenir compte du fait que à chaque $y \in K$, il n'est pas possible ou il est trop coûteux de calculer le sous-différentiel de φ en y , on ne calculera donc qu'un seul sous-gradient de φ en chaque y .

Maintenant, si l'on veut que φ^k soit **une fonction linéaire par morceaux**, il est recommandé de la construire morceau par morceau en générant successivement les modèles φ_i^k , $i = 1, 2, \dots$ jusqu'au moment où l'on trouve, si possible, un $\varphi_{i_k}^k$ acceptable au point x^k pour $i_k \geq 1$.

Pour $i = 1, 2, \dots$ on note par y_i^k la solution unique du problème

$$(P_i^k) \quad \min_{y \in K} \{ \varphi_i^k(y) + \frac{1}{2c_k} \|y - x^k\|^2 + \langle F(x^k), y - x^k \rangle \},$$

et l'on définit $\varphi^k = \varphi_{i_k}^k$ et $y^k = y_{i_k}^k$.

Dans le but d'obtenir une approximation appropriée $\varphi_{i_k}^k$ de φ en x^k , il faut imposer quelques conditions sur les modèles successifs φ_i^k , $i = 1, 2, \dots$

7.3. UNE MÉTHODE FAISCEAU POUR RÉSOUDRE DES INÉQUATIONS VARIATIONNELLES GÉNÉRALISÉES

Cependant, avant de pouvoir décrire ces conditions, il nous faut définir des fonctions affines l_i^k , $i = 1, 2, \dots$. Ces fonctions sont

$$l_i^k(y) = \varphi_i^k(y_i^k) + \langle \gamma_i^k - F(x^k), y - y_i^k \rangle \quad \forall y \in H,$$

où $\gamma_i^k = \frac{1}{c_k}(x^k - y_i^k)$. Par l'optimalité de y_i^k , on sait que

$$\gamma_i^k - F(x^k) \in \partial(\varphi_i^k + I_K)(y_i^k). \quad (7.3.6)$$

Ainsi, il est facile de constater que

$$l_i^k(y_i^k) = \varphi_i^k(y_i^k) \quad \text{et} \quad l_i^k(y) \leq \varphi_i^k(y) \quad \forall y \in H. \quad (7.3.7)$$

Supposons à présent, que les conditions suivantes soient satisfaites par les modèles convexes φ_i^k ,

1. $\varphi_i^k \leq \varphi$ sur H pour $i = 1, 2, \dots$
2. $\varphi_{i+1}^k \geq \varphi(y_i^k) + \langle s(y_i^k), \cdot - y_i^k \rangle$ sur H pour $i = 1, 2, \dots$
3. $\varphi_{i+1}^k \geq l_i^k$ sur H pour $i = 1, 2, \dots$,

où $s(y_i^k)$ désigne le sous-gradient de φ disponible à chaque y_i^k .

Plusieurs modèles remplissent ces conditions, par exemple la fonction linéaire suivante

$$\varphi_1^k(y) = \varphi(x^k) + \langle s(x^k), y - x^k \rangle \quad \forall y \in H.$$

Comme $s(x^k) \in \partial\varphi(x^k)$, la condition (1) est satisfaite pour $i = 1$. Pour les autres modèles φ_i^k , $i = 1, 2, \dots$, il y a plusieurs possibilités. On peut par exemple choisir pour $i = 1, 2, \dots$

$$\varphi_{i+1}^k(y) = \max\{l_i^k(y), \varphi(y_i^k) + \langle s(y_i^k), y - y_i^k \rangle\} \quad \forall y \in H. \quad (7.3.8)$$

Les conditions (2) et (3) sont évidemment satisfaites, la condition (1) est aussi vérifiée puisque chaque morceau linéaire de ces fonctions est sous φ .

Une autre possibilité est de prendre pour $i = 1, 2, \dots$

$$\varphi_{i+1}^k(y) = \max_{0 \leq j \leq i} \{\varphi(y_j^k) + \langle s(y_j^k), y - y_j^k \rangle\} \quad \forall y \in H, \quad (7.3.9)$$

avec $y_0^k = x^k$. Etant donné que $s(y_j^k) \in \partial\varphi(y_j^k)$ pour $j = 0, \dots, i$ et puisque $\varphi_{i+1}^k \geq \varphi_i^k \geq l_i^k$, toutes les conditions sont alors vérifiées.

En comparant (7.3.8) et (7.3.9), on remarque que la fonction l_i^k joue le même rôle : la $i^{\text{ième}}$ fonction linéaire $\varphi(y_j^k) + \langle s(y_j^k), y - y_j^k \rangle$, $j = 0, \dots, i - 1$.

L'algorithme suivant décrit ce que l'on appelle le pas "sérieux" : on ne passe à l'itération suivante que lorsque l'approximation est adéquate.

Algorithme du pas sérieux.

Choisir $x^k \in H$ un point de départ, $\sigma \in [0, 1)$ et $c_k > 0$.

$i = 1$.

1. Choisir une fonction convexe φ_i^k vérifiant les conditions (1)-(3) et résoudre le problème (P_i^k) pour obtenir y_i^k .

2. Si

$$\begin{aligned} \|c_k [F(y_i^k) - F(x^k)]\|^2 + 2c_k(\varphi(y_i^k) - \varphi_i^k(y_i^k)) \\ \leq \sigma^2 [\|c_k [F(y_i^k) - F(x^k)] + x^k - y_i^k\|^2 + \|y_i^k - x^k\|^2], \end{aligned}$$

alors $y^k = y_i^k$, $i_k = i$ et STOP

y^k est le pas sérieux.

3. $i = i + 1$ et retourner au pas 1.

Notre objectif maintenant est de montrer que si x^k n'est pas une solution du problème $GVIP(K; F; \varphi)$ et si les modèles φ_i^k , $i = 1, \dots$ vérifient les conditions (1)-(3), alors il existe $i_k \in \mathbb{N}_0$ tel que $\varphi_{i_k}^k$ est une bonne approximation de φ au point x^k , i.e, que l'algorithme s'arrête après un nombre fini d'itérations à l'étape 2.

Pour établir ce résultat, nous avons besoin d'un lemme très technique qui a été démontré par **G.Salmon, J.J Strodiot, et V.H Nguyen** dans l'article [16], proposition 2.1

Lemme 7 *Supposons que le problème $GVIP(K; F; \varphi)$ possède au moins une solution, et que le sous-différentiel $\partial\varphi$ est borné sur des sous-ensemble bornés de K . Supposons aussi que pour k , la suite des modèles φ_i^k , $i = 1, 2, \dots$ vérifie les conditions (1)-(3), et soit pour chaque i , y_i^k l'unique solution du problème (P_i^k) . Alors*

(1) $\varphi(y_i^k) - \varphi_i^k(y_i^k) \rightarrow 0$,

(2) La suite $\{y_i^k\}$ converge fortement vers

$$\bar{y}^k = \arg \min_{y \in K} \left\{ \varphi(y) + \frac{1}{2c_k} \|y - x^k\|^2 + \langle F(x^k), y - x^k \rangle \right\},$$

lorsque $i \rightarrow +\infty$.

Théorème 13 *Si en plus des hypothèses du lemme 7, F est Lipschitz continue sur K de constante $L > 0$, et si $0 < c_k \leq \sigma/(2L)$ et si x^k n'est pas une solution du problème $GVIP(K; F; \varphi)$, alors l'algorithme ci-dessus s'arrête après un nombre fini d'itérations i_k , $\varphi_{i_k}^k$ est une bonne approximation de φ en x^k et $y^k = y_{i_k}^k$.*

Preuve

Comme F est Lipschitz continue sur K de constante $L > 0$, le critère d'arrêt dans l'étape 2 est vérifié si

$$c_k^2 L^2 \|y_i^k - x^k\|^2 + 2c_k [\varphi(y_i^k) - \varphi_i^k(y_i^k)] \leq \sigma^2 \|y_i^k - x^k\|^2,$$

et donc

$$2c_k [\varphi(y_i^k) - \varphi_i^k(y_i^k)] \leq \|y_i^k - x^k\|^2 [\sigma^2 - c_k^2 L^2]. \quad (7.3.10)$$

Par le lemme 7, on sait que $\varphi(y_i^k) - \varphi_i^k(y_i^k) \rightarrow 0$ et que $\|y_i^k - x^k\|^2 \rightarrow \|\bar{y}^k - x^k\|^2$, ainsi le membre de gauche de l'inégalité (7.3.10) converge vers 0. De plus, on sait que $c_k \leq \sigma/(2L)$ et comme x^k n'est pas une solution du problème $GVIP(K; F; \varphi)$, on a

$$[\sigma^2 - c_k^2 L^2] > 0 \quad \text{et} \quad \|\bar{y}^k - x^k\|^2 > 0,$$

et donc le membre de droite de l'inégalité (7.3.10) converge vers un nombre positif. En conséquence, cette dernière inégalité sera satisfaite pour i suffisamment grand, ce qui veut dire que le critère d'arrêt sera vérifié après un nombre fini d'itérations.

□

Algorithme faisceau 1.

Pas 0 : Initialisation

Soit $x^0 \in K$ un point de départ, une tolérance $\sigma \in [0, 1)$ et $\theta \in (0, 1)$.

Définir $y_0^0 = x^0$, $k = 0$ et $i = 1$.

Pas 1 : résolution du problème (P_i^k)

Choisir $0 < c_k \leq \sigma/(2L)$ et une fonction linéaire convexe définie par morceaux φ_i^k vérifiant les conditions (1)-(3). Résoudre le problème

$$(P_i^k) \quad \min_{y \in K} \left\{ \varphi_i^k(y) + \frac{1}{2c_k} \|y - x^k\|^2 + \langle F(x^k), y - x^k \rangle \right\},$$

pour obtenir l'unique solution optimale y_i^k .

Pas 2 : Condition pour le pas sérieux.

Si

$$\begin{aligned} \|c_k [F(y_i^k) - F(x^k)]\|^2 + 2c_k(\varphi(y_i^k) - \varphi_i^k(y_i^k)) \\ \leq \sigma^2 [\|c_k [F(y_i^k) - F(x^k)] + x^k - y_i^k\|^2 + \|y_i^k - x^k\|^2] \end{aligned}$$

alors, définir $y^k = y_i^k$, $x^{k+1} = x^k - a_k \tau_k v^k$ et $y_0^{k+1} = x^{k+1}$, avec

$$\tau_k \in [1 - \theta, 1 + \theta], \quad a_k = \frac{\langle v^k, x^k - y^k \rangle}{\|v^k\|^2}, \quad \text{et } v^k = F(y_i^k) - F(x^k) + \frac{1}{c_k}(x^k - y_i^k).$$

$k = k + 1$ et $i = 0$.

Pas 3 : incrémentation.

$i = i + 1$ et retourner au pas 1.

Des théorèmes 9 et 10, on peut déduire le résultat de convergence suivant :

Théorème 14 *Supposons que F soit Lipschitz continue sur K de constante $L > 0$, que le sous-différentiel $\partial\varphi$ soit borné sur des sous-ensembles bornés de K , que la suite $\{\varphi_i^k\}$ vérifie les conditions (1)-(3) pour tout k et que $c_k \geq c > 0$. Supposons aussi que le problème $GVIP(K; F; \varphi)$ possède au moins une solution. Si la suite $\{x^k\}$ générée par l'algorithme faisceau 1 est infinie, elle converge faiblement vers une solution du problème $GVIP(K; F; \varphi)$. Si après un certain k , le pas 2 n'a pas encore été satisfait, alors x^k est la solution du problème $GVIP(K; F; \varphi)$. La convergence sera forte et linéaire, si en plus, $(F + \partial(\varphi + I_K))^{-1}$ est Lipschitz continu dans un voisinage de zéro.*

7.3. UNE MÉTHODE FAISCEAU POUR RÉSOUDRE DES INÉQUATIONS VARIATIONNELLES GÉNÉRALISÉES

Pour pouvoir implémenter cet algorithme, il est nécessaire de définir un critère d'arrêt. Mais d'abord, rappelons qu'un point $x^* \in K$ est un point δ -stationnaire pour le problème $\text{GVIP}(K; F; \varphi)$ si

$$\exists \gamma \in F(x^*) + \partial_\delta(\varphi + I_K)(x^*) \quad \text{tel que } \|\gamma\| \leq \delta.$$

En utilisant successivement la définition de x^* point δ -stationnaire, la définition du sous-différentiel, l'inégalité de Cauchy-Schwarz, on trouve

$$\begin{aligned} \forall y \in K \quad \varphi(y) - \varphi(x^*) &\geq \langle \gamma - F(x^*), y - x^* \rangle - \delta \\ \forall y \in K \quad \langle F(x^*), y - x^* \rangle + \varphi(y) - \varphi(x^*) &\geq -\|\gamma\| \|y - x^*\| - \delta \\ \forall y \in K \quad \langle F(x^*), y - x^* \rangle + \varphi(y) - \varphi(x^*) &\geq -\delta \|y - x^*\| - \delta. \end{aligned}$$

Par l'optimalité de y_i^k , on a

$$\gamma_i^k - F(x^k) \in \partial(\varphi_i^k + I_K)(y_i^k), \quad (7.3.11)$$

avec $\gamma_i^k = \frac{1}{c_k}(x^k - y_i^k)$.

En utilisant la définition du sous-différentiel et le fait que $\varphi_i^k \leq \varphi$, on a que (7.3.11) implique chacun des résultats suivants :

$$\begin{aligned} \forall y \in K \quad \varphi_i^k(y) &\geq \varphi_i^k(y_i^k) + \langle \gamma_i^k - F(x^k), y - y_i^k \rangle \\ \forall y \in K \quad \varphi(y) &\geq \varphi_i^k(y) \geq \varphi(y_i^k) + \langle \gamma_i^k - F(x^k), y - y_i^k \rangle - (\varphi(y_i^k) - \varphi_i^k(y_i^k)) \\ \gamma_i^k - F(x^k) &\in \partial_{\delta_i^k}(\varphi + I_K)(y_i^k), \end{aligned}$$

avec $\delta_i^k = \varphi(y_i^k) - \varphi_i^k(y_i^k)$.

En conséquence, si $\|\gamma_i^k\| \leq \delta$ et si $\delta_i^k \leq \delta$, alors y_i^k est un point δ -stationnaire pour le problème $\text{GVIP}(K; F; \varphi)$.

7.3. UNE MÉTHODE FAISCEAU POUR RÉSOUDRE DES INÉQUATIONS VARIATIONNELLES GÉNÉRALISÉES

La proposition suivante va nous aider à montrer que le critère d'arrêt est vérifié après un nombre fini d'itérations.

Proposition 24 *Supposons que $c_k \geq c > 0$ pour tout k . Si la suite $\{x^k\}$ générée par l'algorithme faisceau 1 est infinie, alors $\|\gamma_{i_k}^k\| \rightarrow 0$ et $\delta_{i_k}^k \rightarrow 0$ lorsque $k \rightarrow +\infty$. Si la suite $\{x^k\}$ est finie où k est le dernier indice de cette suite, alors $\|\gamma_i^k\| \rightarrow 0$ et $\delta_i^k \rightarrow 0$ lorsque $i \rightarrow +\infty$.*

Preuve

1. La suite $\{x^k\}$ est infinie.

Soit x^* une solution de l'opérateur $T = F + \partial(\varphi + I_K)$, on sait par le lemme 4, que

$$\lim_{k \rightarrow +\infty} \|y^k - x^k\| = 0,$$

par conséquent, $\{\|y_{i_k}^k - x^k\|\}$ que tend vers zéro lorsque $k \rightarrow +\infty$, et comme $\gamma_{i_k}^k = \frac{1}{c_k}(x^k - y_{i_k}^k)$ où $c_k \geq c > 0$, $\gamma_{i_k}^k \rightarrow 0$.

Ensuite, en utilisant le critère 2 de l'algorithme faisceau 1, et la continuité de F ,

$$\delta_{i_k}^k = (\varphi(y_{i_k}^k) - \varphi_{i_k}^k(y_{i_k}^k)) \leq \frac{\sigma^2}{2c_k} \|y_{i_k}^k - x^k\|^2,$$

et donc $\delta_{i_k}^k \rightarrow 0$ quand $k \rightarrow +\infty$.

2. La suite $\{x^k\}$ est finie et k est le dernier indice de celle-ci.

Par le théorème 14, x^k est une solution du problème GVIP($K; F; \varphi$). De plus, par le lemme 7, $\varphi(y_i^k) - \varphi_i^k(y_i^k) \rightarrow 0$ lorsque $i \rightarrow +\infty$ et la suite $\{y_i^k\}$ converge fortement vers

$$\bar{y}^k = \arg \min_{y \in K} \left\{ \varphi(y) + \frac{1}{2c_k} \|y - x^k\|^2 + \langle F(x^k), y - x^k \rangle \right\},$$

lorsque $i \rightarrow +\infty$. Or, $\bar{y}^k = x^k$ lorsque x^k est une solution du problème GVIP($K; F; \varphi$), on obtient finalement que $\|\gamma_i^k\| \rightarrow 0$ et $\delta_i^k \rightarrow 0$ lorsque $i \rightarrow +\infty$.

□

Avec ce critère d'arrêt on peut ré-écrire l'algorithme faisceau de cette façon :

Algorithme faisceau 2.

Pas 0 :Initialisation

Soit $x^0 \in K$ un point de départ, une tolérance $\sigma \in [0, 1)$, $\delta > 0$ et $\theta \in (0, 1)$. Définir $y_0^0 = x^0$, $k = 0$ et $i = 1$.

Pas 1 : résolution du problème (P_i^k)

Choisir $0 < c_k \leq \sigma/(2L)$ et une fonction linéaire convexe définie par morceaux φ_i^k vérifiant les conditions (1)-(3). Résoudre le problème

$$(P_i^k) \quad \min_{y \in K} \left\{ \varphi_i^k(y) + \frac{1}{2c_k} \|y - x^k\|^2 + \langle F(x^k), y - x^k \rangle \right\},$$

pour obtenir l'unique solution optimale y_i^k .

Calculer $\gamma_i^k = \frac{1}{c_k}(x^k - y_i^k)$. Si $\|\gamma_i^k\| \leq \delta$ et si $\varphi(y_i^k) - \varphi_i^k(y_i^k) \leq \delta$, alors STOP. y_i^k est un point δ -stationnaire.

Pas 2 : Condition pour le pas serious.

Si

$$\begin{aligned} \|c_k [F(y_i^k) - F(x^k)]\|^2 &+ 2c_k(\varphi(y_i^k) - \varphi_i^k(y_i^k)) \\ &\leq \sigma^2 [\|c_k [F(y_i^k) - F(x^k)] + x^k - y_i^k\|^2 + \|y_i^k - x^k\|^2] \end{aligned}$$

alors, définir $y^k = y_i^k$, $x^{k+1} = x^k - a_k \tau_k v^k$ et $y_0^{k+1} = x^{k+1}$, avec

$$\tau_k \in [1 - \theta, 1 + \theta], \quad a_k = \frac{\langle v^k, x^k - y^k \rangle}{\|v^k\|^2}, \quad \text{et } v^k = F(y_i^k) - F(x^k) + \frac{1}{c_k}(x^k - y_i^k).$$

$k = k + 1$ et $i = 0$.

Pas 3 : incrémentation.

$i = i + 1$ et retourner au pas 1.

De cet algorithme on déduit le théorème de convergence suivant

Théorème 15 *Sous les hypothèses du théorème 14, l'algorithme faisceau 2 existe après un nombre fini d'itérations avec un point δ -stationnaire. En d'autres termes, il existe k et i tels que*

$$\|\gamma_i^k\| \leq \delta \quad \text{et} \quad \varphi(y_i^k) - \varphi_i^k(y_i^k) \leq \delta.$$

7.4 Application

Dans cette partie on propose une application de l'algorithme faisceau 2 décrit à la section précédente lorsque F est linéaire. Les résultats de cette application seront repris plus loin dans des tableaux où nous aurons testés les divers paramètres et regarder lesquels nous fournissaient les meilleurs résultats. Tout ceci a été réalisé à l'aide du logiciel Matlab.

7.4.1 Description du problème

On considère l'application F définie par $F(x) = Qx$ où x est un vecteur de \mathbb{R}^n , Q une matrice carrée ($n \times n$) non-symétrique générée aléatoirement et rendue semi-définie positive par la suite. Dans ce cas, F sera monotone et Lipschitz continue sur \mathbb{R}^n .

La fonction φ est définie sur \mathbb{R}^n et est le maximum de cinq fonctions quadratiques :

$$\varphi_j(x) = x^\top C^j x - d^j \top x, \quad j = 1, \dots, 5,$$

avec C^j une matrice ($n \times n$) symétrique définie par

$$C_{ik}^j = \exp\left(\frac{i}{k}\right) \cos(ik) \sin j, \quad i < k \quad C_{ii}^j = \frac{i}{n} |\sin j| + \sum_{i \neq k} |C_{ik}^j|,$$

et d^j est un vecteur de \mathbb{R}^n dont les composantes sont les $d_i^j = \exp\left(\frac{i}{k}\right) \sin(ij)$.

L'ensemble des contraintes K est défini par les contraintes d'inégalités suivantes :

$$\sum_{i=1}^n x_i \geq 1, \quad 0 \leq x_i \leq 5, \quad i = 1, \dots, n.$$

Remarquons que comme $\text{dom}\varphi = \mathbb{R}^n$, $K \subseteq \text{int}(\text{dom}\varphi)$.

Pour les fonctions φ_i^k , on a choisit pour $k \in \mathbb{N}$ et pour $i = 1, 2, \dots$

$$\varphi_{i+1}^k = \max_{0 \leq j \leq i} \{ \varphi(y_j^k) + \langle s(y_j^k), \cdot - y_j^k \rangle \}.$$

Le sous problème (P_i^k) est ici un problème de programmation quadratique :

$$(P_i^k) = \begin{cases} \min & \{ w + \frac{1}{2c_k} \|y - x^k\|^2 + \langle F(x^k), y - x^k \rangle \} \\ \text{s.c} & w \geq \varphi(y_j^k) + \langle s(y_j^k), y - y_j^k \rangle, \quad j = 0, \dots, i-1 \\ & y \in K \\ & w \in \mathbb{R}. \end{cases}$$

Nous avons utilisé la fonction "quadprog" prédéfinie en Matlab dans le "Optimization Toolbox".

7.4.2 Résultats

Nous avons choisi de tester notre problème sur 10 matrices (10×10) générées de façon aléatoire. Nous avons obtenu des matrices avec des coefficients divers : négatifs, quasi nuls, mais aussi de grands coefficients proches de 10000. Voici les résultats obtenus en comparaison avec la méthode de pas extra-gradient.

1. Méthode de pas extra gradient.

Nous avons testé les valeurs suivantes :

$$\sigma = 0.99, \delta = 10^{-6}, \theta = 0.5 \text{ et } \tau_k = 1$$

Matrice	Pas sérieux	Phi final	Cpu
Q_1	36	0.2657	22.4370
Q_2	30	0.2679	13.6560
Q_3	32	0.2659	16.7820
Q_4	33	0.2657	21.1560
Q_5	37	0.2619	22.5000
Q_6	35	0.2920	15.1410
Q_7	36	0.2943	29.1880
Q_8	36	0.2664	18.0150
Q_9	35	0.2909	31.5780
Q_{10}	36	0.2634	16.5470

2. Méthode unifiée.

Nous avons pris les valeurs suivantes pour nos paramètres :

$$\sigma = 0.99, \delta = 10^{-6}, \theta = 0.5 \text{ et } \tau_k = 0.5$$

Matrice	Pas sérieux	Phi final	Cpu
Q_1	38	0.2657	29.9680
Q_2	35	0.2679	23.0780
Q_3	29	0.2659	18.9060
Q_4	28	0.2657	11.5930
Q_5	31	0.2619	13.2500
Q_6	25	0.2920	14.7190
Q_7	17	0.2943	11.1090
Q_8	28	0.2664	18.5470
Q_9	27	0.2909	17.7810
Q_{10}	35	0.2634	15.6100

7.4. APPLICATION

Nous avons testé les valeurs suivantes :
 $\sigma = 0.99$, $\delta = 10^{-6}$, $\theta = 0.5$ et $\tau_k = 1$

Matrice	Pas sérieux	Phi final	Cpu
Q_1	38	0.2657	26.8280
Q_2	36	0.2679	19.3900
Q_3	29	0.2659	17.8130
Q_4	29	0.2657	12.8750
Q_5	33	0.2619	14.1400
Q_6	29	0.2920	14.7500
Q_7	21	0.2943	12.2960
Q_8	28	0.2664	12.3750
Q_9	28	0.2909	17.7190
Q_{10}	36	0.2634	15.7660

Nous avons testé les valeurs suivantes :
 $\sigma = 0.99$, $\delta = 10^{-6}$, $\theta = 0.5$ et $\tau_k = 1.5$

Matrice	Pas sérieux	Phi final	Cpu
Q_1	39	0.2657	25.9370
Q_2	36	0.2679	21.7180
Q_3	30	0.2659	17.4840
Q_4	30	0.2657	14.5940
Q_5	33	0.2619	13.6090
Q_6	29	0.2920	14.4370
Q_7	21	0.2943	10.6090
Q_8	31	0.2664	14.4680
Q_9	26	0.2909	15.3280
Q_{10}	36	0.2634	15.5000

Pour chaque matrice nous avons représenté en rouge la méthode qui donnait le meilleur temps d'exécution. La méthode unifiée avec $\tau_k = 1.5$ donne en majorité de meilleurs résultats.

En bleu nous avons représenté la méthode qui effectuait le moins de pas sérieux, il s'agit de la méthode unifiée en majorité pour $\tau_k = 0.5$.

On constate que la méthode unifiée fournit de meilleurs résultats que la méthode extra-gradient à l'exception des tests se rapportant aux matrices Q_1 et Q_2 . Il s'agit de deux matrices contenant des coefficients assez grands (proche de 10000).

Pour ce qui est des paramètres de la méthode unifiée, nous avons surtout choisi de faire varier τ_k .

7.4. APPLICATION

Lorsque l'on compare les résultats obtenus pour $\tau_k = 0.5$ et $\tau_k = 1$, on observe que c'est assez mitigé : dans certains cas, on effectue un pas sérieux en plus et on obtient la solution plus rapidement, par contre dans d'autres cas, le fait d'en faire plus ne diminue pas le temps d'exécution. Dans ces cas là, la méthode avec $\tau_k = 0.5$ est à préférer.

Par contre pour $\tau_k = 1.5$, le temps d'exécution est de façon général meilleur par rapport aux deux autres tableaux mais l'on effectue généralement plus de pas sérieux que dans les deux résultats précédents.

On constate aussi que dans les 4 cas, la valeur de la fonction φ a toujours la même valeur.

Cependant, il ne s'agit que d'un seul exemple pour lequel la méthode a été appliquée, il est donc très difficile de tirer des conclusions générales.

Conclusion

Dans ce mémoire nous nous sommes intéressés à une famille d'algorithmes pour résoudre des problèmes de recherche de zéros d'opérateurs maximaux monotones définis sur des espaces de Hilbert réels.

Dans un premier temps, il était important de bien définir le problème, d'analyser les principales techniques de résolution de celui-ci et d'en retirer les résultats nécessaires à l'élaboration de l'objectif de ce mémoire.

Il s'agissait de décrire une méthode pour permettre l'unification de deux méthodes proposées dans les articles de Solodov et Svaiter, à savoir la méthode hybride de point proximal avec pas de projection et de la méthode hybride de point proximal avec pas extra-gradient, pour résoudre ces problèmes. Nous avons pu constater qu'en élargissant le critère de définition de solutions approchées et en modifiant la définition de l'itéré suivant, d'une part les méthodes hybrides de pas de projection et de pas extra-gradient se retrouvaient comme cas particulier de cette union, et d'autre part nous obtenons de bons résultats de convergence globale et un taux de convergence localement (super) linéaire.

Nous avons aussi mis en évidence que cette méthode pouvait s'appliquer à divers problèmes, comme les méthodes faisceaux ou encore les méthodes de décomposition forward-backward. D'un point de vue numérique, nous avons choisi de tester notre algorithme sur un exemple bien précis et nous avons pu constater que les résultats fournis étaient dans la majeure partie de cas, meilleurs que ceux obtenus avec la méthode de pas extra-gradient.

Mais, il faudrait encore faire de nombreux tests numériques avec des problèmes les plus diversifiés possibles pour démontrer toute l'efficacité de cette unification.

Bibliographie

- [1] M.V. Solodov & B.F. Svaiter, *A unified framework for some inexact proximal point algorithms*, Numerical Functional Analysis and Optimization, Vol. 22, pp 1013-1035, 2001.
- [2] H. Brezis, *Opérateurs maximaux monotones et semi-groupes de contractions dans les espaces de Hilbert*, Amsterdam : North-Holland, 1973, Collection Notas de matematica.
- [3] V.H. Nguyen, *An Introduction to Variational Inequalities and Related Problems*, Departement of Mathematics University of Namur, Belgium, Janvier 2004.
- [4] J.B. Hiriart-Urruty & C. Lemaréchal, *Convex Analysis and Minimization Algorithms*, Springer Verlag, 1993.
- [5] R. Burachik & A. Iusem, *A Generalized Proximal Point Algorithm for the Variational Inequality Problem in Hilbert Space*, SIAM Journal on Optimization, Vol. 8, pp 197-216, 1998.
- [6] R. Burachik, A. Iusem & B.F. Svaiter, *Enlargement of Monotone Operators with Applications to Variational Inequalities*, Set-Valued Analysis, Vol. 5, pp 159-180, 1997.
- [7] R. Burachik & B.F. Svaiter, *A Relative Error Tolerance for a Family of Generalized Proximal Point Methods*, Mathematics of Operations Research, Vol. 26, pp 816-831, 2001.
- [8] G. Chen & M. Teboulle, *A Proximal-based Decomposition Method for Convex Minimization Problems*, Mathematical Programming, Vol. 64, pp.81-101, 1994.

- [9] O. Güler, *On The Convergence of the Proximal Point Algorithm for convex Minimization*, SIAM J.Control and Optimization, Vol. 29, pp. 403-419, 1991.
- [10] D. Han, *A New Hybrid Generalized Proximal Point for Variational Inequality Problems*, Journal of Global Optimization, Vol. 26, pp. 125-140, 2003.
- [11] P.L. Lions & B. Mercier, *Splitting Algorithms for the Sum of Two Nonlinear Operators*, SIAM Numer. Anal., Vol.16, pp.964-979, 1979.
- [12] B. Martinet, *Regularization d'Inéquations Variationnelles par Approximations successives*, Revue Française d'Informatique et de Recherche Opérationnelle, Vol. 4, pp. 154-159, 1970.
- [13] R.T. Rockafellar, *Convex Analysis*, Princeton Press University, NJ, 1970.
- [14] R.T. Rockafellar, *On The Maximality of Sums of Nonlinear Monotone Operators*, Transactions of the Americal Mathematical Society, Vol. 149, pp.75-88, 1970.
- [15] R.T. Rockafellar, *Monotone Operators and the Proximal Point Algorithm*, SIAM J.Control and Optimization, VOL. 14, pp.877-898, 1976.
- [16] G. Salmon, J.J. Strodiot & V.H. Nguyen, *A Bundle Method for Solving Variational Inequalities*, SIAM Journal on Optimization, Vol. 14, pp. 869-893, 2004.
- [17] M.V. Solodov & B.F. Svaiter, *Forcing Strong Convergence of Proximal Point Iterations in a Hilbert Space*, Mathematical Programming, Vol. 87, pp. 189-202, 2000.
- [18] M.V. Solodov & B.F. Svaiter, *A Hybrid Projection-Proximal Point Algorithm*, Journal of Convex Analysis, Vol. 6, pp. 59-70, 1999.
- [19] M.V. Solodov & B.F. Svaiter, *A Hybrid Approximate Extragradient Proximal Point Algorithm Using the Elargement of a Maximal Monotone Operator*, Set-Valued Analysis, Vol. 7, pp. 323-345, 1999.

BIBLIOGRAPHIE

- [20] M.V. Solodov & B.F. Svaiter, *An Inexact Hybrid Generalized Proximal Point Algorithm and Some New Results on the Theory of Bregman Functions*, Mathematics of Operations Research, Vol. 25, pp. 214-230, 2000.
- [21] M.V. Solodov & B.F. Svaiter, *Errors Bounds for Proximal Point Subproblems and Associated inexact proximal point algorithms*, Mathematical Programming, Vol 88, pp. 371-389, 2000.
- [22] M.V. Solodov, *A Class of Decomposition Methods for Convex Optimization and Monotone Variational Inclusions Via the Hybrid Inexact Proximal Point Framework*, Optimization Methods and Software, to appear, 2004.
- [23] J.J Strodiot, *Inexact Proximal Point Methods*, 4th Summer School on Optimization and Applied Mathematics, Nha Trang University, Nha Trang, Vietnam, 2004.
- [24] P. Tseng, *Applications of a splitting Algorithm to Decomposition in Convex Programming and Variational Inequalities*, SIAM J.Control and Optimization, Vol. 29, pp.119-138, 1991.
- [25] P. Tseng, *A Modified Forward-Backward Splitting Method for Maximal Monotone Mappings*, SIAM J.Control and Optimization, Vol. 38, pp.431-446, 2000.
- [26] D. Zhu and P. Marcotte, *Co-Coercivity and its Role in the Convergence of Iterative Schemes for Solving Variational Inequalities*, SIAM Journal on Optimization, Vol. 76, pp.714-726, 1996.