

THESIS / THÈSE

MASTER EN SCIENCES MATHÉMATIQUES

La méthode de factorisation spectrale par extraction symétrique dans les systèmes à paramètres répartis: application aux systèmes de Sturm-Liouville

DEHAYE, Jérémy

Award date:
2009

[Link to publication](#)

General rights

Copyright and moral rights for the publications made accessible in the public portal are retained by the authors and/or other copyright owners and it is a condition of accessing publications that users recognise and abide by the legal requirements associated with these rights.

- Users may download and print one copy of any publication from the public portal for the purpose of private study or research.
- You may not further distribute the material or use it for any profit-making activity or commercial gain
- You may freely distribute the URL identifying the publication in the public portal ?

Take down policy

If you believe that this document breaches copyright please contact us providing details, and we will remove access to the work immediately and investigate your claim.

14, 6, 36, 37



FACULTÉS UNIVERSITAIRES NOTRE-DAME DE LA PAIX
NAMUR

Faculté des Sciences
Département de Mathématique

**LA METHODE DE FACTORISATION SPECTRALE PAR EXTRACTION
SYMÉTRIQUE DANS LES SYSTEMES A PARAMETRES REPARTIS :
APPLICATION AUX SYSTEMES DE STURM-LIOUVILLE**

**Mémoire présenté pour l'obtention
du grade académique de master en Sciences Mathématiques**

Jérémy DEHAYE

Janvier 2009

Promoteur : J. Winkin

Remerciements

Je tiens à remercier tout particulièrement mon promoteur de mémoire, Mr Joseph Winkin, pour sa patience, son suivi régulier, et les nombreux conseils qu'il a dispensés, et sans lesquels ce travail n'aurait pu aboutir.

Je tiens également à exprimer ma gratitude envers mes proches et les nombreuses personnes qui m'ont entourées durant l'élaboration de ce mémoire.

En particulier, je souhaiterais témoigner ma profonde reconnaissance à ma famille, dont les précieux encouragements ont été les bienvenus, et à mes amis, qui, par leur présence, leur soutien et leur bonne humeur, auront apporté leur contribution à ce travail.

Je tenais enfin à remercier Mme Valérie Henry pour ses conseils qui ont grandement contribué à l'amélioration de la qualité de la rédaction dans son ensemble.

Facultés Universitaires Notre-Dame de la Paix
FACULTE DES SCIENCES
Secrétariat du Département de Mathématique
Rempart de la Vierge, 8 - 5000 NAMUR
Téléphone: + 32(0)81.72.49.25 / 26 - Téléfax: + 32(0)81.72.49.14
E-mail: secretariat@math.fundp.ac.be - <http://www.fundp.ac.be/fundp.html>

La méthode de factorisation spectrale par extraction symétrique dans les systèmes à paramètres répartis : application aux systèmes de Sturm-Liouville

DEHAYE Jérémy

Résumé

Ce travail traite du problème de factorisation spectrale pour les systèmes à paramètres répartis, et en particulier de la méthode de factorisation spectrale par extraction symétrique. Ce problème a fait l'objet de nombreuses études récemment, et joue un rôle central dans la résolution de plusieurs problèmes de contrôle associés à ces systèmes linéaires en dimension infinie, notamment le problème de contrôle linéaire-quadratique optimal.

Ce travail porte, entre autres, sur l'étude d'un opérateur de réaction-diffusion appartenant à la classe des opérateurs de Sturm-Liouville définis de façon dense dans l'espace de Lebesgue des fonctions carré-intégrables. Un tel opérateur intervient dans la modélisation de réacteurs biochimiques tubulaires à dispersion axiale.

Le résultat central de ce travail consiste à montrer que la méthode de factorisation spectrale par extraction symétrique est convergente pour une classe de systèmes à paramètres répartis basée sur cet opérateur, en utilisant les liens existant entre les théories des systèmes de semigroupes commandés, des systèmes de Sturm-Liouville et des systèmes spectraux de Riesz.

Abstract

This work deals with the spectral factorization problem for distributed parameter systems, especially the method of spectral factorization by symmetric extraction. This problem has been the heart of many studies recently, and plays a central role in solving control problems associated with infinite-dimensional linear systems, including the linear-quadratic optimal control problem.

This work focuses on the study of an operator belonging to the class of Sturm-Liouville operators that are densely defined in the Lebesgue space of square-integrable functions. This particular operator is used in the modelling of biochemical tubular reactors with axial dispersion.

The main result of this work states that the method of spectral factorization by symmetric extraction is convergent for a class of distributed parameter systems which is based on this operator. This result involves several results linking the theories of semigroup state-space systems, Sturm-Liouville systems and Riesz-spectral systems.

Mémoire de master en Sciences Mathématiques

Janvier 2009

Promoteur: J. Winkin

Notations

Dans la suite, les notations suivantes seront utilisées.

$\mathcal{L}[f]$ désigne la transformée de Laplace de la fonction f .

Pour toute classe \mathcal{F} de fonctions dont la transformée de Laplace existe, $\hat{\mathcal{F}}$ désigne la classe constituée de toutes les transformées de Laplace de fonctions de \mathcal{F} .

LTD (respectivement LTD^+, LTD^-) désigne l'ensemble des fonctions à valeur dans \mathbb{C} et à support sur \mathbb{R} (respectivement $\mathbb{R}_+, \mathbb{R}_-$) dont la transformée de Laplace existe.

$\text{Mat}(X)$ désigne l'ensemble des fonctions matricielles à entrées dans la classe X .

$\Re(z)$ et $\Im(z)$ désignent respectivement la partie réelle et la partie imaginaire du nombre complexe z .

$\mathbb{C}_{\sigma+}$ désigne le demi-plan droit fermé $\{s \in \mathbb{C} : \Re(s) \geq \sigma\}$.

$\overset{\circ}{\mathbb{C}}_{\sigma+}$ désigne le demi-plan droit ouvert $\{s \in \mathbb{C} : \Re(s) > \sigma\}$.

\mathbb{C}_+ et $\overset{\circ}{\mathbb{C}}_+$ désignent respectivement $\mathbb{C}_{\sigma+}$ et $\overset{\circ}{\mathbb{C}}_{\sigma+}$ avec $\sigma = 0$.

\mathbb{C}_- désigne le demi-plan gauche fermé $\{s \in \mathbb{C} : \Re(s) \leq 0\}$.

$\overset{\circ}{\mathbb{C}}_-$ désigne le demi-plan gauche ouvert $\{s \in \mathbb{C} : \Re(s) < 0\}$.

$S(\sigma_1, \sigma_2)$ désigne une bande du plan complexe de la forme $\{s \in \mathbb{C} : \sigma_1 \leq \Re(s) \leq \sigma_2\}$.

$\overset{\circ}{S}(\sigma_1, \sigma_2)$ désigne une bande du plan complexe de la forme $\{s \in \mathbb{C} : \sigma_1 < \Re(s) < \sigma_2\}$.

S_σ , avec $\sigma < 0$, désigne une bande du plan complexe de la forme $\{s \in \mathbb{C} : \sigma \leq \Re(s) \leq -\sigma\}$.

$\overset{\circ}{S}_\sigma$, avec $\sigma < 0$, désigne une bande du plan complexe de la forme $\{s \in \mathbb{C} : \sigma < \Re(s) < -\sigma\}$.

M^* désigne l'adjointe de la matrice M , i.e. la matrice M transposée et conjuguée.

F_* désigne la transposée parahermitienne de $F \in \text{Mat}(\text{LTD})$, i.e. $F_*(t) := F(-t)^*$, ou, de façon équivalente, $\hat{F}_*(s) = \hat{F}(-\bar{s})^*$.

$\mathcal{FD}(X)$ désigne la classe des opérateurs définis de manière dense dans l'espace X .

$\mathcal{L}(X)$ désigne la classe des opérateurs linéaires bornés définis sur l'espace X et à valeurs dans X .

$\rho(A)$ désigne l'ensemble résolvant de l'opérateur A .

Remarque

La formulation des résultats présentés dans les deux premiers chapitres, ainsi que leurs preuves, sont inspirés de [5].
Les chapitres 3 et 4, quant à eux, se basent essentiellement sur le travail effectué dans [7] et [10].

Table des matières

Introduction	1
1 Problème de factorisation spectrale	3
1.1 Contexte et définitions préalables	3
1.2 Description du problème et cadre théorique	6
1.3 Existence des facteurs spectraux	7
2 Résolution du problème de contrôle LQ-optimal par factorisation spectrale	14
2.1 Contexte : systèmes différentiels linéaires	14
2.2 Application du problème de factorisation spectrale	16
2.3 Exemple	29
3 Introduction à différentes classes de systèmes linéaires en dimension infinie	35
3.1 Introduction à la théorie des C_0 -semigroupes	35
3.2 Opérateurs spectraux de Riesz	37
3.3 Opérateurs et systèmes de Sturm-Liouville	39
4 Application de la méthode de factorisation spectrale par extraction symétrique	46
4.1 Contexte	47
4.2 Factorisation spectrale par extraction symétrique	49
4.2.1 Description de la méthode	49
4.2.2 Résultats de convergence	51
4.2.3 Exemple	55
4.3 Théorème d'application de la méthode de factorisation spectrale par extraction symétrique	55
4.4 Calcul de la densité spectrale	62
4.5 Tests numériques	70

Conclusion	72
5 Annexes	73
5.1 Définitions	73
5.2 Lemmes et théorèmes préliminaires	74
5.3 Codes MATLAB	75

Introduction

Le problème de factorisation spectrale et sa résolution sont utilisés pour différentes classes de systèmes différentiels linéaires en dimensions finie et infinie, notamment les systèmes à paramètres répartis où l'état est une fonction de la position et du temps, et dont la dynamique est décrite par une équation aux dérivées partielles.

De nombreux problèmes de contrôle faisant intervenir de tels systèmes impliquent la conception et la mise en place d'un système de contrôle par asservissement d'état. La factorisation spectrale est liée à la solution de certains de ces problèmes et intervient en particulier dans la résolution du problème de contrôle linéaire-quadratique optimal en dimension infinie.

Dans ce travail, nous nous intéresserons à la méthode de factorisation spectrale par extraction symétrique pour les systèmes à paramètres répartis, et plus particulièrement dans le cadre des systèmes de Sturm-Liouville. Ces derniers permettent de modéliser de nombreux systèmes physiques impliquant des phénomènes de vibration ou de diffusion, rendant leur analyse et la résolution de problèmes de contrôle associés particulièrement intéressante.

Le premier chapitre présente le cadre dans lequel les développements et raisonnements ultérieurs seront effectués, et décrit les différentes classes de fonctions de transfert qui seront étudiées. Cette première partie contient également une introduction au problème de factorisation spectrale et aborde la question de l'existence des facteurs spectraux recherchés.

Dans le deuxième chapitre, nous présenterons une autre approche du problème de contrôle linéaire-quadratique optimal, basée sur la recherche du facteur spectral inversible d'une densité spectrale particulière et la résolution d'une équation diophantienne dépendant de ce dernier.

Nous donnerons ensuite une brève introduction à quelques classes de systèmes différentiels linéaires en dimension infinie que nous étudierons dans ce contexte. La théorie des systèmes spectraux de Riesz et des systèmes de Sturm-Liouville évoqués précédemment sera ainsi abordée, et nous mettrons en évidence quelques propriétés importantes pour l'application de la méthode de factorisation spectrale par extraction symétrique.

Celle-ci sera présentée dans le dernier chapitre, dans lequel nous introduirons également une classe de systèmes à paramètres répartis permettant de modéliser des réacteurs biochimiques tubulaires à dispersion axiale. Un résultat de convergence important lié à la structure spectrale de l'opérateur et à la théorie des systèmes spectraux de Riesz sera ensuite rappelé. Nous nous ba-

serons sur ce résultat pour établir que la méthode de factorisation spectrale par extraction symétrique est convergente pour cette classe de systèmes. Nous étudierons enfin brièvement le comportement des solutions obtenues numériquement afin d'illustrer ce résultat.

Chapitre 1

Problème de factorisation spectrale

Ce premier chapitre a pour but de décrire le cadre de travail dans lequel intervient le problème de factorisation spectrale. Les principaux résultats seront présentés dans un contexte de dimension finie, mais ils se généralisent assez naturellement en dimension infinie.

1.1 Contexte et définitions préalables

Afin d'aborder le problème de factorisation spectrale, nous nous plaçons dans le cadre des fonctions de transfert engendrées par des réponses impulsionnelles définies sur \mathbb{R}_+ et dont la transformée de Laplace existe. Nous commençons par introduire quelques notions liées à ces fonctions de transfert dont le rôle sera crucial dans l'analyse qui va suivre.

Définition 1 Une fonction $\hat{f} : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{C}$ est rationnelle si \hat{f} est un quotient de polynômes définis sur \mathcal{C} et à valeurs dans \mathcal{C} .

Définition 2 Une fonction de transfert \hat{f} est dite propre si

$$\lim_{|s| \rightarrow +\infty} \hat{f}(s) = a < \infty.$$

De même, une fonction de transfert est strictement propre si

$$\lim_{|s| \rightarrow +\infty} \hat{f}(s) = 0.$$

Notation : la classe des fonctions de transfert rationnelles propres sera notée $\hat{\mathcal{B}}_p$.

Nous rappelons maintenant la notion capitale de *stabilité* d'une fonction de transfert.

Définition 3 Une fonction de transfert rationnelle \hat{f} est stable si tous ses pôles possèdent une partie réelle strictement négative, i.e. $\mathcal{P}[f] \subset \mathring{\mathcal{C}}_-$, ou encore si \hat{f} est continue et holomorphe dans un demi-plan droit ouvert contenant \mathcal{C}_+ .

Notation : la classe des fonctions de transfert rationnelles propres stables sera notée RH^∞ .

Nous signalons ici une propriété intéressante des fonctions de transfert rationnelles propres.

Propriété 1 Une fonction de transfert $\hat{f} \in \hat{\mathcal{B}}_p$ peut toujours s'écrire sous forme d'une fraction à droite, i.e.

$$\hat{f} = \hat{n}\hat{d}^{-1}$$

où \hat{n} et \hat{d} sont rationnelles propres stables, et \hat{d} n'est pas strictement propre.

Cette propriété se généralise aux fonctions de transfert rationnelles propres matricielles. Dans ce cadre, la définition de fraction à droite nécessite cependant une condition supplémentaire.

Nous introduisons pour cela la notion de *fraction première à droite*.

Définition 4 Considérons une matrice de transfert (que nous appellerons par la suite fonction de transfert sans faire de distinction) $\hat{G} \in \text{Mat}(\hat{\mathcal{B}}_p)$.

La paire (\hat{N}, \hat{D}) est appelée une fraction première à droite de \hat{G} si

(i) la fonction \hat{G} vérifie

$$\hat{P} = \hat{N}\hat{D}^{-1}$$

où $\hat{N}, \hat{D} \in \text{Mat}(RH^\infty)$, c'est à dire si \hat{N} et \hat{D} sont des fonctions matricielles rationnelles propres stables, et $\det \hat{D}$ n'est pas strictement propre

(ii) il existe des fonctions matricielles $\hat{U}, \hat{V} \in \text{Mat}(RH^\infty)$ telles que

$$\hat{U}\hat{N} + \hat{V}\hat{D} = I \tag{1.1.1}$$

(identité de Bezout), ou, de façon équivalente, $[\hat{N}(s)^T \hat{D}(s)^T]^T$ est de rang plein pour tout $s \in \mathcal{C}_+$.

Nous énonçons maintenant un résultat similaire à la Propriété 1.

Propriété 2 Une fonction de transfert $\hat{G} \in \text{Mat}(\hat{\mathcal{B}}_p)$ peut toujours s'écrire sous forme d'une fraction première à droite.

Par ailleurs, \hat{D} peut toujours être choisie de telle sorte que $\hat{D}(\infty) = I$.

Il est également intéressant de présenter une condition plus forte que la stabilité. La définition suivante concerne la notion de *marge de stabilité*.

Définition 5 Une fonction de transfert rationnelle \hat{f} possède une marge de stabilité $|\sigma|$, avec $\sigma < 0$, si tous ses pôles possèdent une partie réelle strictement inférieure à σ , ou encore si elle est continue et holomorphe dans un demi-plan droit ouvert contenant $\mathcal{C}_{\sigma+}$.

Notation : nous noterons $\widehat{L\Delta}^+(\sigma)$, avec $\sigma < 0$, la classe des fonctions de transfert rationnelles propres stables avec une marge de stabilité $|\sigma|$.

Notation : la classe de fonctions $\widehat{L\Delta}^-(\sigma)$ désigne l'ensemble des transformées de Laplace de fonctions à support sur \mathbb{R}_- de la forme

$$\hat{f}(s) = \hat{g}(-s),$$

où g est à support sur \mathbb{R}_+ et $\hat{g} \in \widehat{L\Delta}^+(\sigma)$.

On définit également

$$\widehat{L\Delta}(\sigma) := \widehat{L\Delta}^+(\sigma) + \widehat{L\Delta}^-(\sigma).$$

Remarque 1 : Les définitions et notations précédentes ont été données dans un cadre fréquentiel, mais elles possèdent également une interprétation temporelle qui sera utile dans certaines démonstrations.

En effet, on dira qu'une réponse impulsionnelle $f(\cdot) = f_a(\cdot) + f_0\delta(\cdot)$ à support sur \mathbb{R}_+ est dans $L\Delta^+(\sigma)$, avec $\sigma \leq 0$, si \hat{f} est rationnelle propre et

$$\int_0^{+\infty} e^{-\sigma t} |f_a(t)| dt < \infty.$$

De même, une fonction $f(\cdot) = f_a(\cdot) + f_0\delta(\cdot)$ à support sur \mathbb{R} est dans $L\Delta(\sigma)$ si \hat{f} est rationnelle propre et

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\sigma|t|} |f_a(t)| dt < \infty.$$

Remarque 2 : La définition de stabilité peut être étendue à un cadre plus général dans lequel nous ne nous restreignons pas aux fonctions de transfert rationnelles.

Considérons pour cela $\sigma \leq 0$. Une réponse impulsionnelle $f \in \text{LTD}^+$ est dans la classe notée $\mathcal{A}(\sigma)$ si et seulement si, pour tout $t < 0$, $f(t) = 0$ (i.e. f est à support sur \mathbb{R}_+) et, pour tout $t \geq 0$, $f(t) = f_a(t) + f_{sa}(t)$, où

(i) la partie fonctionnelle régulière f_a vérifie

$$\int_0^{+\infty} |f_a(t)| e^{-\sigma t} dt < \infty$$

(ii) la partie atomique singulière $f_{sa}(\cdot) := \sum_{i=0}^{\infty} f_i \delta(\cdot - t_i)$, où $t_0 = 0$, $t_i > 0$ pour tout $i \in \mathbb{N}$, et $f_i \in \mathbb{C}$ pour tout $i \in \mathbb{N}$, vérifie

$$\sum_{i=0}^{\infty} |f_i| e^{-\sigma t_i} < \infty.$$

Nous dirons qu'une réponse impulsionnelle f est dans \mathcal{A}_- si et seulement si $f \in \mathcal{A}(\sigma)$ pour un certain $\sigma < 0$.

La classe $\hat{\mathcal{A}}_-$ désigne alors la classe des fonctions de transfert propres stables. Dans un premier temps, nous travaillerons avec la classe RH^∞ plutôt qu'avec $\hat{\mathcal{A}}_-$.

1.2 Description du problème et cadre théorique

Nous abordons maintenant la factorisation spectrale proprement dite et quelques résultats cruciaux qui y sont liés.

Nous commençons par définir ce que l'on entend par *facteur spectral*.

Définition 6 Soit une fonction $\hat{F} = \hat{F}_a(\cdot) + F_0$ vérifiant

(i) $\hat{F}_a(\cdot)$ est une fonction matricielle à valeurs complexes et F_0 est une matrice hermitienne définie positive constante,

(ii) \hat{F} est parahermitienne, i.e.

$$F(t) = F_*(t) = F(-t)^*$$

ou encore

$$\hat{F}(s) = \hat{F}_*(s) = \hat{F}(-\bar{s})^*,$$

- (iii) $F \in \text{Mat}(\widehat{L\Delta}(\sigma))$ pour un certain $\sigma < 0$,
(iv) \hat{F} est semi-définie positive sur l'axe imaginaire, i.e., pour tout $\omega \in \mathbb{R}$,

$$\hat{F}(j\omega) \succeq 0.$$

Une telle fonction \hat{F} est appelée une densité spectrale.
Une fonction matricielle carrée de la forme

$$\hat{R} = \hat{R}_a(\cdot) + R_0 \in \text{Mat}(\widehat{LTD}^+),$$

où $\hat{R}_a(\cdot)$ est une fonction et R_0 est une matrice constante non singulière, est appelée facteur spectral (à droite) inversible de \hat{F} si et seulement si, pour tout $\omega \in \mathbb{R}$,

$$\hat{F}(j\omega) = \hat{R}_*(j\omega)\hat{R}(j\omega),$$

où \hat{R} et \hat{R}^{-1} sont dans $\text{Mat}(RH^\infty)$ (i.e. \hat{R} et \hat{R}^{-1} sont des matrices rationnelles propres stables).

Remarquons que cette définition ne fournit aucune garantie concernant l'existence d'un facteur spectral inversible pour une densité spectrale donnée. Il est cependant possible de donner une condition nécessaire et suffisante pour qu'un tel facteur spectral existe.

Ce problème est traité plus en détails dans la section suivante.

1.3 Existence des facteurs spectraux

Dans la suite, nous aurons besoin du Lemme 9 donné en annexe, ainsi que du lemme suivant.

Lemme 1 (Callier et Winkin, 1990, Fact 1)

Les assertions suivantes sont vérifiées :

- (i) $\hat{F} = \hat{F}_a(\cdot) + F_0$ est inversible dans $\text{Mat}(RH^\infty)$ si et seulement si

$$\inf\{|\det \hat{F}(s)| : s \in \mathcal{C}_+\} > 0$$

ou, de façon équivalente, avec $\det F_0 \neq 0$, pour tout $s \in \mathcal{C}_+$,

$$\det \hat{F}(s) \neq 0.$$

(ii) $\hat{F} = \hat{F}_a(\cdot) + F_0$ est inversible dans $\text{Mat}(\widehat{L\Delta}^+(\sigma))$ si et seulement si

$$\inf\{|\det \hat{F}(s)| : s \in \mathcal{C}_{\sigma+}\} > 0$$

ou, de façon équivalente, avec $\det F_0 \neq 0$, pour tout $s \in \mathcal{C}_{\sigma+}$,

$$\det \hat{F}(s) \neq 0.$$

Nous pouvons maintenant énoncer un résultat crucial concernant l'existence des facteurs spectraux.

Théorème 1 (Callier et Winkin, 1990, Théorème 1)

Soit $\hat{F} = \hat{F}_a(\cdot) + F_0$ vérifiant les hypothèses de la définition 6. Alors,

(i) La densité spectrale \hat{F} possède un facteur spectral $\hat{R} = \hat{R}_a(\cdot) + R_0$ inversible dans $\text{Mat}(RH^\infty)$ si et seulement si, pour tout $\omega \in \mathbb{R}$,

$$\det \hat{F}(j\omega) \neq 0.$$

(ii) Tous les facteurs spectraux de \hat{F} sont uniques modulo multiplication à gauche par une matrice unitaire constante.

(iii) Si $F_0 = I$, alors R_0 est une matrice unitaire et \hat{F} possède un unique facteur spectral standard, i.e. tel que R_0 est la matrice unité.

Preuve :

(i)

Nécessité :

Supposons que la densité spectrale \hat{F} admette un facteur spectral $\hat{R} = \hat{R}_a(\cdot) + R_0$ inversible dans $\text{Mat}(RH^\infty)$.

Alors, en utilisant le point (i) du Lemme 1, nous obtenons, pour tout $\omega \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned} \det \hat{F}(j\omega) &= \det \hat{R}_*(j\omega) \det \hat{R}(j\omega) \\ &= \det \hat{R}(j\omega)^* \det \hat{R}(j\omega) \\ &= |\det \hat{R}(j\omega)|^2 \\ &\neq 0 \end{aligned}$$

et la première étape de la preuve est terminée.

Suffisance :

Supposons maintenant que

$$\det \hat{F}(j\omega) \neq 0 \quad \text{pour tout } \omega \in \mathbb{R}.$$

Par (Gohberg et Krein, 1960, Théorème 8.2), les hypothèses de la définition et cette condition impliquent l'existence d'une fonction matricielle carrée

$$\hat{R} = \hat{R}_a(\cdot) + R_0,$$

où R_0 est une matrice constante non-singulière, telle que \hat{R} soit la transformée de Laplace d'une fonction matricielle définie sur \mathbb{R}_+ et

a)

$$\hat{F}(j\omega) = \hat{R}_*(j\omega)\hat{R}(j\omega) \quad \text{pour tout } \omega \in \mathbb{R}. \quad (1.3.1)$$

b)

$$\hat{R} \in \text{Mat}(\widehat{L\Delta}^+(0))$$

et

$$\det \hat{R}(s) \neq 0 \quad \text{pour tout } s \in \mathbb{C}_+$$

ou encore, par le point 2) du Lemme 1, \hat{R} et \hat{R}^{-1} sont dans $\text{Mat}(\widehat{L\Delta}^+(0))$ puisque R_0 est non-singulière.

Il reste donc à montrer que \hat{R} et \hat{R}^{-1} sont stables.

Pour cela, nous commençons par réécrire (1.3.1) sous la forme

$$\hat{R} = \hat{R}_*^{-1}\hat{F}. \quad (1.3.2)$$

Puisque \hat{R} est dans $\text{Mat}(\widehat{L\Delta}^+(0))$, le membre de gauche de cette équation est continu dans \mathbb{C}_+ et holomorphe dans $\overset{\circ}{\mathbb{C}}_+$.

Le membre de droite, quant à lui, est continu dans $S(\sigma, 0)$ et holomorphe dans $\overset{\circ}{S}(\sigma, 0)$.

En effet, puisque \hat{R}^{-1} est dans $\text{Mat}(\widehat{L\Delta}^+(0))$ et

$$\hat{R}_*^{-1}(s) = \hat{R}^{-1}(-\bar{s})^*,$$

nous voyons que \hat{R}_*^{-1} est continue dans \mathbb{C}_- et holomorphe dans $\overset{\circ}{\mathbb{C}}_-$.

De plus, par hypothèse, \hat{F} est dans $\text{Mat}(\widehat{L\Delta}(\sigma))$ pour un certain $\sigma < 0$. On en déduit que \hat{F} est continue dans S_σ et holomorphe dans $\overset{\circ}{S}_\sigma$.

Le produit est donc continu dans $S_\sigma \cap \mathbb{C}_- = S(\sigma, 0)$ et holomorphe dans

$$\mathring{S}_\sigma \cap \mathring{\mathbb{C}}_- = \mathring{S}(\sigma, 0).$$

Nous pouvons alors appliquer le Lemme 9 avec

$$\begin{aligned} D_1 &= \mathring{S}(\sigma, 0), \\ D_2 &= \mathring{\mathbb{C}}_+, \\ \gamma &= \{s \in \mathbb{C} : s = j\omega, \omega \in \mathbb{R}\}, \\ f_1(s) &= \hat{R}_*^{-1}(s)\hat{F}(s), \\ f_2(s) &= \hat{R}(s). \end{aligned}$$

Les domaines D_1 et D_2 sont simplement connexes et disjoints, et

$$\begin{aligned} \overline{D_1} \cap \overline{D_2} &= S(\sigma, 0) \cap \mathbb{C}_+ \\ &\equiv \gamma \end{aligned}$$

L'axe imaginaire, quant à lui, est un arc lisse (rectifiable) dont chaque point possède un voisinage dans

$$D := D_1 \cup \text{Int}(\gamma) \cup D_2 = \mathbb{C}_{\sigma+}.$$

De plus, f_1 est holomorphe dans D_1 et continue dans $S(\sigma, 0)$, et donc en particulier dans $D_1 \cup \gamma$.

Par ailleurs, f_2 est holomorphe dans D_2 et continue dans $D_1 \cup \gamma = \mathbb{C}_+$.

Enfin, les deux fonctions coïncident sur l'axe imaginaire et la condition limite est donc vérifiée.

Dés lors, par extension analytique, l'équation (1.3.2) reste valable dans $S(\sigma, 0)$.

En particulier, nous pouvons écrire

$$\hat{R}(\sigma + s) = \hat{R}_*^{-1}(\sigma + s)\hat{F}(\sigma + s) \quad \text{pour } s = j\omega.$$

Nous remarquons maintenant que, pour tout i, j ,

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\sigma t} |F_{a,ij}(t)| dt \leq \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\sigma|t|} |F_{a,ij}(t)| dt < \infty$$

par définition de $L\Delta(\sigma)$, et donc que $e^{-\sigma \cdot} F(\cdot)$ est dans $\text{Mat}(L\Delta(0))$.

Or,

$$\begin{aligned} \hat{F}(\sigma + s) &= \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-(\sigma+s)t} F(t) dt \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-st} e^{-\sigma t} F(t) dt \\ &= \mathcal{L}[e^{-\sigma \cdot} F(\cdot)](s). \end{aligned}$$

On en déduit que

$$\hat{F}(\sigma + \cdot) \in \text{Mat}(\widehat{L\Delta}(0)).$$

De façon similaire, nous pouvons montrer que

$$\hat{R}_*^{-1}(\sigma + \cdot) \in \text{Mat}(\widehat{L\Delta}^-(0)).$$

En effet, puisque $\hat{R}^{-1} = \widehat{R}^{-1}$ et que \hat{R}^{-1} est dans $\text{Mat}(\widehat{L\Delta}^+(0))$, on obtient immédiatement que R^{-1} est dans $\text{Mat}(L\Delta^+(0))$, i.e.

$$\int_0^{+\infty} |R_{a,ij}(t)| dt < \infty \quad \text{pour tout } i, j.$$

On en déduit que $e^\sigma R^{-1}$ est dans $\text{Mat}(L\Delta^+(0))$ également puisque

$$\int_0^{+\infty} e^{\sigma t} |R_{a,ij}^{-1}(t)| dt \leq \int_0^{+\infty} |R_{a,ij}^{-1}(t)| dt < \infty.$$

On voit alors immédiatement que

$$\int_0^{+\infty} e^{\sigma t} |\overline{R_{a,ij}^{-1}(t)}| dt = \int_0^{+\infty} e^{\sigma t} |R_{a,ij}^{-1}(t)| dt < \infty,$$

i.e. $e^\sigma (R^{-1})^*$ est dans $\text{Mat}(L\Delta^+(0))$, ou, de façon équivalente

$$e^{-\sigma} R^{-1}(-\cdot)^* = e^{-\sigma} R_*^{-1} \in \text{Mat}(L\Delta^-(0)).$$

De la même façon qu'au point précédent, on en arrive alors à la conclusion que

$$\hat{R}_*^{-1}(\sigma + \cdot) \in \text{Mat}(\widehat{L\Delta}^-(0)).$$

En utilisant maintenant le fait que $L\Delta(0)$ muni du produit de convolution

$$(f * g)(t) := \int_{-\infty}^{+\infty} f(t-s)g(s) ds \quad \text{pour tout } t \in \mathbb{R}$$

est une algèbre de Banach, on peut alors voir (en passant du domaine temporel au fréquentiel) que

$$\hat{R}(\sigma + \cdot) \in \text{Mat}(\widehat{L\Delta}(0)).$$

On peut finalement remarquer que $e^{-\sigma t} R$ est à support sur \mathbb{R}_+ et donc que

$$\hat{R}(\sigma + \cdot) \in \text{Mat}(\widehat{L\Delta}^+(0))$$

ou encore

$$\hat{R} \in \text{Mat}(\widehat{L\Delta}^+(\sigma))$$

pour un certain $\sigma < 0$.

Puisqu'il a été montré précédemment que R_0 est non-singulière et que

$$\det \hat{R}(s) \neq 0 \quad \text{pour tout } s \in \mathbb{C}_+,$$

il suffit d'utiliser le Lemme 1 et le premier point est démontré.

(ii) Supposons que la densité spectrale \hat{F} admette deux facteurs spectraux \hat{R}_1 et \hat{R}_2 . Ces derniers vérifient par conséquent l'égalité

$$\hat{R}_{1*}(j\omega)\hat{R}_1(j\omega) = \hat{R}_{2*}(j\omega)\hat{R}_2(j\omega)$$

ou encore

$$\hat{R}_1\hat{R}_2^{-1} = \hat{R}_{1*}^{-1}\hat{R}_{2*} \quad (1.3.3)$$

sur l'axe imaginaire.

Comme précédemment, nous pouvons alors appliquer le principe de réflexion de Schwarz, avec $f_1(s) := \hat{R}_1(s)\hat{R}_2^{-1}(s)$ et $f_2(s) := \hat{R}_{1*}^{-1}(s)\hat{R}_{2*}(s)$, pour en déduire que l'identité (1.3.3) reste valable sur \mathbb{C} tout entier.

En effet, il est facile de voir que f_1 est stable (produit de fonctions stables) et donc continue et holomorphe sur un demi-plan droit ouvert contenant \mathbb{C}_+ .

De façon similaire, $f_2 \in \text{Mat}(\widehat{L\Delta}^-(\sigma))$ pour un certain $\sigma < 0$, et f_2 est alors continue et holomorphe dans un demi-plan gauche ouvert contenant \mathbb{C}_- . En choisissant $D_1 := \overset{\circ}{\mathbb{C}}_+$ et $D_2 := \overset{\circ}{\mathbb{C}}_-$, ainsi que l'axe imaginaire en tant qu'arc rectifiable γ , toutes les hypothèses sont satisfaites et l'on en déduit que, par extension analytique, l'identité (1.3.3) est valable sur $D_1 \cup \gamma \cup D_2 = \mathbb{C}$.

On obtient donc que, pour tout $s \in \mathbb{C}$,

$$\hat{R}_{1*}(s)\hat{R}_1(s) = \hat{R}_{2*}(s)\hat{R}_2(s).$$

Par conséquent, pour tout $s \in \mathbb{C}$,

$$\hat{R}_1(s) = \hat{R}_{1*}^{-1}(s)\hat{R}_{2*}(s)\hat{R}_2(s).$$

Il reste donc à montrer que la fonction $\hat{R}_{1*}^{-1}(s)\hat{R}_{2*}(s)$ est une matrice unitaire constante.

Pour démontrer cette dernière affirmation, considérons $s \in \mathbb{C}$ quelconque et montrons que

$$[\hat{R}_{1*}^{-1}(s)\hat{R}_{2*}(s)]^*[\hat{R}_{1*}^{-1}(s)\hat{R}_{2*}(s)] = I. \quad (1.3.4)$$

Par définition de la transposée parahermitienne, nous obtenons que

$$\begin{aligned}
[\hat{R}_{1*}^{-1}(s)\hat{R}_{2*}(s)]^*[\hat{R}_{1*}^{-1}(s)\hat{R}_{2*}(s)] &= [\hat{R}_1^{-1}(-\bar{s})^*\hat{R}_2(-\bar{s})^*]^*[\hat{R}_1^{-1}(-\bar{s})^*\hat{R}_2(-\bar{s})^*] \\
&= \hat{R}_2(-\bar{s})\hat{R}_1^{-1}(-\bar{s})\hat{R}_1^{-1}(-\bar{s})^*\hat{R}_2(-\bar{s})^* \\
&= \hat{R}_2(-\bar{s})\hat{R}_2^{-1}(-\bar{s})[\hat{R}_2(-\bar{s})^*]^{-1}\hat{R}_1(-\bar{s})^*\hat{R}_1^{-1}(-\bar{s})^*\hat{R}_2(-\bar{s})^* \\
&= I,
\end{aligned}$$

ce qui prouve (1.3.4).

(iii) Supposons maintenant que $F_0 = I$. Considérons à nouveau la relation

$$\hat{F}(j\omega) = \hat{R}_*(j\omega)\hat{R}(j\omega)$$

et faisons tendre ω vers l'infini dans cette égalité. Par les propriétés de $\widehat{L\Delta}(\sigma)$, nous voyons alors que le premier membre de l'égalité tend vers $F_0 = I$, tandis que le deuxième tend vers $R_0^*R_0$. A la limite, nous obtenons donc

$$R_0^*R_0 = I$$

et R_0 est donc unitaire par définition. Puisque, par le point (ii), tous les facteurs spectraux de \hat{F} sont uniques modulo multiplication à gauche par une matrice unitaire constante U , il est alors évident que le facteur spectral standard, obtenu avec $U = R_0^*$, est unique, ce qui termine la preuve.

□

Chapitre 2

Résolution du problème de contrôle LQ-optimal par factorisation spectrale

Dans ce chapitre, nous analyserons les liens existant entre le problème de factorisation spectrale et la résolution du problème de contrôle linéaire-quadratique optimal en horizon infini associé à un système différentiel linéaire donné.

Nous commencerons par décrire brièvement le cadre des systèmes différentiels linéaires permettant de modéliser de nombreux systèmes physiques et intervenant dans plusieurs domaines des mathématiques appliquées.

Nous montrerons ensuite que la factorisation spectrale d'une densité spectrale associée à un système de ce type fournit une alternative à la résolution du problème de contrôle LQ-optimal en horizon infini.

Nous terminerons ce chapitre par un exemple très simple illustrant plusieurs résultats importants signalés dans les deux premiers chapitres, afin de se familiariser avec la philosophie du problème de factorisation spectrale.

Pour des raisons pédagogiques, nous nous limiterons ici à des systèmes où l'espace d'état est de dimension finie, faisant intervenir des matrices et non des opérateurs linéaires bornés.

2.1 Contexte : systèmes différentiels linéaires

Le problème de factorisation spectrale présente un intérêt particulier dans le cadre des systèmes différentiels linéaires commandés (en dimension finie)

de la forme

$$\begin{cases} \dot{x}(t) &= Ax(t) + Bu(t) \\ y(t) &= Cx(t) \end{cases}$$

avec

$$x(0) = x_0$$

et où, pour tout $t \geq 0$,

$$x(t) \in \mathbb{R}^n,$$

$$u(t) \in \mathbb{R}^m,$$

$$y(t) \in \mathbb{R}^p,$$

$$A \in \mathbb{R}^{n \times n},$$

$$B \in \mathbb{R}^{n \times m},$$

$$\text{et } C \in \mathbb{R}^{p \times n}.$$

Un tel système sera souvent noté $\Sigma[A, B, C, 0]$ ou $R = [A, B, C, 0]$.

La fonction de transfert d'un système différentiel linéaire de cette forme est donnée par

$$\hat{G}(s) = C(sI - A)^{-1}B.$$

Cette fonction vérifie

$$\hat{y}(s) = \hat{G}(s)\hat{u}(s),$$

établissant de cette façon un lien explicite entre l'entrée et la sortie du système.

Une telle fonction est rationnelle et strictement propre, i.e.

$$\hat{G}(s) \rightarrow 0 \text{ quand } |s| \rightarrow +\infty.$$

Nous donnons maintenant un premier résultat utile concernant les systèmes différentiels, que nous énonçons sous forme de lemme.

Lemme 2 (Callier et Winkin, 1990, Lemme 2)

Considérons un système différentiel linéaire temps-invariant dont la dynamique est donnée par

$$\begin{cases} \dot{x}(t) &= Ax(t) + Bu(t) \\ y(t) &= Cx(t) \end{cases}$$

avec condition initiale

$$x(0) = x_0 \in \mathbb{R}^n.$$

Considérons également sa fonction de transfert

$$\hat{G}(s) = C(sI - A)^{-1}B.$$

Supposons que la paire (A, B) soit stabilisable.

Alors, pour tout asservissement d'état stabilisant $K \in \mathbb{R}^{m \times n}$, la paire (\hat{N}, \hat{D}) donnée par

$$\begin{cases} \hat{N}(s) &= C(sI - A - BK)^{-1}B \\ \hat{D}(s) &= I + K(sI - A - BK)^{-1}B \end{cases}$$

est dans $\text{Mat}(\mathcal{RH}^\infty)$ et est une fraction première à droite de \hat{G} , i.e.

$$\hat{G}(s) = \hat{N}(s)\hat{D}(s)^{-1}$$

où \hat{N} et \hat{D} vérifient l'identité de Bezout (1.1.1).

Remarque : Comme nous le verrons ultérieurement, les résultats présentés dans ce chapitre se généralisent à des classes de systèmes différentiels linéaires en dimension infinie, où l'espace d'état est un espace de Hilbert et A , B et C sont des opérateurs linéaires bornés.

2.2 Application du problème de factorisation spectrale

Nous énonçons un premier résultat explicitant une relation entre les facteurs spectraux d'une densité spectrale particulière et l'asservissement d'état stabilisant obtenu par la résolution du problème de contrôle LQ-optimal en horizon infini.

Théorème 2 (Callier et Winkin, 1990, Théorème 2)

Soit un système différentiel linéaire avec (A, B) stabilisable et (C, A) détectable.

Soit (\hat{N}, \hat{D}) une fraction à droite de la fonction de transfert \hat{G} (strictement propre) du système de la forme

$$\begin{cases} \hat{N}(s) &= \hat{N}_a(s) \\ \hat{D}(s) &= \hat{D}_a(s) + I. \end{cases}$$

Soit enfin l'asservissement d'état K_0 , solution du problème LQ-optimal associé au système, donné par

$$K_0 = -B^*Q_0,$$

où Q_0 est l'unique solution symétrique et semi-définie positive de l'équation algébrique de Riccati

$$A^*Q + QA + C^*C - QB B^*Q = 0.$$

Considérons le problème de factorisation spectrale

$$\hat{F} := \hat{N}_* \hat{N} + \hat{D}_* \hat{D} = \hat{R}_* \hat{R}$$

où $\hat{R} = \hat{R}_a(\cdot) + R_0$ est un facteur spectral inversible dans $Mat(RH^\infty)$.
Alors

- (i) \hat{F} possède un facteur spectral avec R_0 unitaire et un unique facteur spectral standard.
(ii) Tous les facteurs spectraux de \hat{F} vérifient

$$\hat{R}(s) = U [I - K_0(sI - A)^{-1}B] \hat{D}(s) \quad (2.2.1)$$

$$= U [I + K_0(sI - A - BK_0)^{-1}B]^{-1} \hat{D}(s), \quad (2.2.2)$$

où U est une matrice unitaire constante et $I - K_0(sI - A)^{-1}B \in Mat(\hat{\mathcal{B}}_p)$ est la différence de retour. Le facteur spectral standard est obtenu avec $U = I$.

Preuve :

- (i) La densité spectrale \hat{F} vérifie les hypothèses de la définition et du Théorème 1. En effet,

$$\begin{aligned} \hat{F}(s) &:= \hat{N}_*(s)\hat{N}(s) + \hat{D}_*(s)\hat{D}(s) \\ &= (\hat{N}_a)_*(s)\hat{N}_a(s) + [(\hat{D}_a)_*(s) + I](\hat{D}_a(s) + I) \\ &= (\hat{N}_a)_*(s)\hat{N}_a(s) + (\hat{D}_a)_*(s)\hat{D}_a(s) + (\hat{D}_a)_*(s) + \hat{D}_a(s) + I \\ &= \hat{F}_a(s) + F_0 \end{aligned}$$

où

$$\hat{F}_a(\cdot) := (\hat{N}_a)_*(\cdot)\hat{N}_a(\cdot) + (\hat{D}_a)_*(\cdot)\hat{D}_a(\cdot) + (\hat{D}_a)_*(\cdot) + \hat{D}_a(\cdot)$$

et

$$F_0 := I.$$

Nous pouvons maintenant vérifier les hypothèses.

- a) $\hat{F}_a(\cdot)$ est une fonction et $F_0 = I$ est bien une matrice hermitienne définie-positive constante.

b) F est parahermitienne puisque

$$\begin{aligned}
\hat{F}_*(s) &= (\hat{N}_* \hat{N} + \hat{D}_* \hat{D})_*(s) \\
&= [\hat{N}_*(-\bar{s}) \hat{N}(-\bar{s}) + \hat{D}_*(-\bar{s}) \hat{D}(-\bar{s})]^* \\
&= [\hat{N}(s)^* \hat{N}(-\bar{s}) + \hat{D}(s)^* \hat{D}(-\bar{s})]^* \\
&= \hat{N}(-\bar{s})^* \hat{N}(s) + \hat{D}(-\bar{s})^* \hat{D}(s) \\
&= \hat{N}_*(s) \hat{N}(s) + \hat{D}_*(s) \hat{D}(s)
\end{aligned}$$

c) Nous savons, par construction de la fraction (\hat{N}, \hat{D}) , que les fonctions matricielles \hat{N}_a et \hat{D}_a sont dans $\widehat{L\Delta}^+(\sigma)$. Par conséquent, $(\hat{N}_a)_*$ et $(\hat{D}_a)_*$ sont dans $\widehat{L\Delta}^-(\sigma)$, et donc, puisque $L\Delta(\sigma)$ est une algèbre munie du produit de convolution, on en déduit que

$$\hat{F}(s) = (\hat{N}_a)_*(s) \hat{N}_a(s) + (\hat{D}_a)_*(s) \hat{D}_a(s) + (\hat{D}_a)_*(s) + \hat{D}_a(s) + I$$

est dans $\widehat{L\Delta}^+(\sigma)$.

d) \hat{F} est semi-définie positive sur l'axe imaginaire. En effet,

$$\begin{aligned}
\hat{F}(j\omega) &= \hat{N}_*(j\omega) \hat{N}(j\omega) + \hat{D}_*(j\omega) \hat{D}(j\omega) \\
&= \hat{N}(j\omega)^* \hat{N}(j\omega) + \hat{D}(j\omega)^* \hat{D}(j\omega),
\end{aligned}$$

qui est semi-définie positive.

e) La densité spectrale est non-singulière le long de l'axe imaginaire, i.e.

$$\det \hat{F}(j\omega) \neq 0 \quad \text{pour tout } \omega \in \mathbb{R}$$

ou encore $\hat{F}(j\omega)$ est définie-positive pour tout $\omega \in \mathbb{R}$.

On peut constater cela en observant que \hat{F} peut aussi s'écrire comme un produit matriciel de la forme

$$\hat{F}(j\omega) = [\hat{N}(j\omega)^* \quad \hat{D}(j\omega)^*] \begin{bmatrix} \hat{N}(j\omega) \\ \hat{D}(j\omega) \end{bmatrix},$$

où les matrices du membre de droite sont toutes deux de rang plein sur \mathbb{C}_+ (et donc en particulier en $s = j\omega$) par la définition d'une fraction première à droite (caractérisation de l'identité de Bezout). Leur produit est donc de rang plein et par conséquent inversible.

Toutes les conditions sont donc vérifiées et l'on peut appliquer le théorème d'existence des facteurs spectraux dans le cas particulier où $F_0 = I$.

(ii) Puisque K_0 est stabilisant, par le Lemme 2, la paire

$$(\hat{N}_{0p}(s), \hat{D}_{0p}(s)) := (C(sI - A - BK_0)^{-1}B, I + K_0(sI - A - BK_0)^{-1}B)$$

forme une fraction à droite de la fonction de transfert \hat{G} .

Par ailleurs, \hat{D}_{0p} étant une fonction matricielle rationnelle,

$$\hat{D}_{0p}(s)^{-1} = I - K_0(sI - A)^{-1}B$$

est bien définie sauf en un nombre fini de pôles.

De plus, puisque Q_0 est solution de l'équation algébrique de Riccati, on obtient

$$A^*Q_0 + Q_0A + C^*C - Q_0BB^*Q_0 + j\omega Q_0 - j\omega Q_0 = 0,$$

et cette dernière équation peut être réécrite comme

$$-(-j\omega I - A^*)Q_0 - Q_0(j\omega I - A) + C^*C - Q_0BB^*Q_0 = 0.$$

Il en résulte que

$$I + B^*(-j\omega I - A^*)^{-1}[-(-j\omega I - A^*)Q_0 - Q_0(j\omega I - A) + C^*C - Q_0BB^*Q_0](j\omega I - A)^{-1}B = I.$$

En développant le produit, on en déduit que

$$I + [-B^*Q_0(j\omega I - A)^{-1}B - B^*(-j\omega I - A^*)^{-1}Q_0B + B^*(-j\omega I - A^*)^{-1}C^*C(j\omega I - A)^{-1}B - B^*(-j\omega I - A^*)^{-1}Q_0BB^*Q_0(j\omega I - A)^{-1}B] = I,$$

ou encore, en regroupant les termes intéressants

$$\begin{aligned} & I + B^*(-j\omega I - A^*)^{-1}C^*C(j\omega I - A)^{-1}B \\ &= I + B^*Q_0(j\omega I - A)^{-1}B + B^*(-j\omega I - A^*)^{-1}Q_0B \\ & \quad + B^*(-j\omega I - A^*)^{-1}Q_0BB^*Q_0(j\omega I - A)^{-1}B \\ &= I - K_0(j\omega I - A)^{-1}B - B^*(-j\omega I - A^*)^{-1}K_0^* \\ & \quad + B^*(-j\omega I - A^*)^{-1}K_0^*K_0(j\omega I - A)^{-1}B \\ &= [I - B^*(-j\omega I - A^*)^{-1}K_0^*][I - K_0(j\omega I - A)^{-1}B] \end{aligned}$$

puisque

$$K_0 = -B^*Q_0$$

et

$$Q_0 = Q_0^*.$$

En utilisant l'expression de \hat{P} et de \hat{D}_{0p}^{-1} , on obtient finalement

$$I + \hat{P}_*(j\omega)\hat{P}(j\omega) = (\hat{D}_{0p}^{-1})_*(j\omega)\hat{D}_{0p}^{-1}(j\omega) \quad (2.2.3)$$

qui est donc valable excepté en au plus un nombre fini de pôles. Observons maintenant que, puisque la paire (\hat{N}, \hat{D}) forme également une fraction à droite de la fonction de transfert, nous devons avoir

$$(\hat{N}, \hat{D}) = (\hat{N}_{0p}, \hat{D}_{0p})\hat{R},$$

où \hat{R} est inversible dans $\text{Mat}(RH^\infty)$, et

$$\hat{R} = \hat{D}_{0p}^{-1}\hat{D}. \quad (2.2.4)$$

En effet, la fraction à droite est unique modulo multiplication à droite par un facteur inversible dans $\text{Mat}(RH^\infty)$.

Réécrivons maintenant (2.2.3) en prémultipliant les deux membres de l'égalité par \hat{D}_* et en les postmultipliant par \hat{D} . On obtient donc

$$\hat{D}_*\hat{D} + \hat{D}_*\hat{P}_*\hat{P}\hat{D} = \hat{D}_*(\hat{D}_{0p}^{-1})_*\hat{D}_{0p}^{-1}\hat{D}$$

pour $s = j\omega$.

En utilisant (2.2.4) et le fait que

$$\hat{P} = \hat{N}\hat{D}^{-1},$$

on en déduit finalement que

$$\hat{F}(j\omega) = \hat{R}_*(j\omega)\hat{R}(j\omega).$$

Cette dernière égalité montre que \hat{R} est un facteur spectral de \hat{F} , qui s'écrit, par (2.2.4),

$$\hat{R}(s) = [I - K_0(sI - A)^{-1}B]\hat{D}(s).$$

L'unicité des facteurs spectraux modulo multiplication à gauche par une matrice unitaire permet d'obtenir la thèse.

□

Remarque : En considérant le facteur spectral standard ($U = I$) dans les équations (2.2.1) et (2.2.2), on observe que

$$C(sI - A - BK_0)^{-1}B = \hat{N}\hat{R}^{-1} \quad (2.2.5)$$

où \hat{R}^{-1} est dans $\text{Mat}(RH^\infty)$ par définition d'un facteur spectral.

En effet, on a

$$\begin{aligned} \hat{N}\hat{R}^{-1} &= \hat{N}\hat{D}^{-1}[I + K_0(sI - A - BK_0)^{-1}B] \\ &= C(sI - A)^{-1}B[I + K_0(sI - A - BK_0)^{-1}B] \\ &= C(sI - A)^{-1}B + C(sI - A)^{-1}BK_0(sI - A - BK_0)^{-1}B \\ &= C[(sI - A)^{-1}[I + BK_0(sI - A - BK_0)^{-1}]]B. \end{aligned}$$

Or,

$$\begin{aligned} (sI - A)^{-1}[I + BK_0(sI - A - BK_0)^{-1}](sI - A - BK_0) \\ &= (sI - A)^{-1}(sI - A - BK_0) + (sI - A)^{-1}BK_0 \\ &= (sI - A)^{-1}(sI - A) \\ &= I. \end{aligned}$$

On en déduit que

$$(sI - A - BK_0)^{-1} = (sI - A)^{-1}[I + BK_0(sI - A - BK_0)^{-1}]$$

et donc que

$$\hat{N}\hat{R}^{-1} = C(sI - A - BK_0)^{-1}B.$$

L'égalité (2.2.5) peut être interprétée comme le fait que, si la paire (\hat{N}, \hat{D}) forme une fraction à droite de la fonction de transfert du système en boucle ouverte, alors la paire (\hat{N}, \hat{R}) forme une fraction à droite de la fonction de transfert du système en boucle fermée résultant de l'asservissement LQ-optimal.

Il n'est pas inintéressant de montrer que le théorème précédent peut être appliqué en particulier dans le cas des systèmes à une entrée et une sortie, où l'espace d'état \mathbb{R}^n est muni d'un produit scalaire, noté $\langle \cdot, \cdot \rangle$.

Considérons donc un tel système et supposons qu'il soit stabilisable et détectable. Supposons également que la matrice A soit hermitienne et possède n valeurs propres distinctes.

La fonction de lecture de sortie d'un tel système se réduit à une matrice

uniligne, ou encore, par le théorème de représentation des formes linéaires de Riesz, à un vecteur c de telle sorte que

$$Cx = \langle c, x \rangle \quad \text{pour tout } x \in \mathbb{R}^n.$$

Le même raisonnement est valable pour l'asservissement d'état K_0 , solution du problème LQ-optimal associé au système, et l'on peut donc écrire

$$K_0x = \langle k_0, x \rangle \quad \text{pour tout } x \in \mathbb{R}^n.$$

De plus, la matrice B se réduit quant à elle à une matrice unicolonne que nous noterons $b \in \mathbb{R}^n$.

La fonction de transfert devient donc

$$\hat{G}(s) = \langle c, (sI - A)^{-1}b \rangle$$

et peut s'écrire sous forme d'une fraction à droite.

Puisque A possède n valeurs propres distinctes, elle est donc diagonalisable à l'aide d'une matrice unitaire dont les colonnes forment une base orthonormale de \mathbb{R}^n . Appelons ces vecteurs ϕ_i , $i = 1, \dots, n$. Sans perte de généralité, les ϕ_i peuvent toujours être choisis de telle sorte que les valeurs propres soient triées en ordre décroissant, i.e.

$$P^{-1}AP = P^TAP = \text{diag}(\lambda_i)$$

où

$$\lambda_1 > \lambda_2 > \dots > \lambda_n.$$

La résolvante $(sI - A)^{-1}$ possède des valeurs propres de la forme $\frac{1}{s - \lambda_i}$ et peut être diagonalisée à l'aide de la même matrice unitaire.

On obtient donc

$$\begin{aligned} (sI - A)^{-1}x &= P [\text{diag} [(s - \lambda_i)^{-1}]] P^T x \\ &= \sum_{i=1}^n (s - \lambda_i)^{-1} \langle x, \phi_i \rangle \phi_i \end{aligned}$$

pour tout $x \in \mathbb{R}^n$.

On en déduit que

$$\begin{aligned} K_0(sI - A)^{-1}B &= \langle k_0, (sI - A)^{-1}b \rangle \\ &= \sum_{i=1}^n (s - \lambda_i)^{-1} \langle b, \phi_i \rangle \langle k_0, \phi_i \rangle. \end{aligned}$$

Par ailleurs, si λ_1 est la seule valeur propre instable, i.e.

$$\lambda_1 \geq 0 > \lambda_2 > \dots > \lambda_n,$$

alors une fraction à droite de \hat{G} est donnée par

$$(\hat{N}(s), \hat{D}(s)) = (\hat{G}(s)\hat{D}(s), \hat{D}(s)) = (\hat{G}(s)(s - \lambda_1)(s - \lambda)^{-1}, (s - \lambda_1)(s - \lambda)^{-1})$$

où $\lambda < 0$.

Les fonctions \hat{N} et \hat{D} sont bien des fonctions rationnelles (puisque \hat{G} est rationnelle) propres (puisque \hat{G} est (strictement) propre) stables.

On peut donc appliquer le théorème et en déduire que tout facteur spectral de $\hat{F} = \hat{N}_* \hat{N} + \hat{D}_* \hat{D}$ peut s'écrire

$$\begin{aligned} \hat{R}(s) &= U [1 - K_0(sI - A)^{-1}B] \hat{D}(s) \\ &= U \left[1 - \sum_{i=1}^n \langle b, \phi_i \rangle \langle k_0, \phi_i \rangle (s - \lambda_i)^{-1} \right] \hat{D}(s) \end{aligned}$$

où $|U|=1$.

Remarque 1 : Si la matrice A n'est pas hermitienne, les valeurs propres ne sont pas nécessairement réelles et ne peuvent donc pas toujours être ordonnées, même si le résultat reste bien évidemment valable dans ce cas.

Remarque 2 : Si la matrice A ne possède pas n valeurs propres distinctes mais est tout de même diagonalisable, la multiplicité des valeurs propres instables doit bien entendu être prise en compte lors de la détermination de la fraction à droite de la fonction de transfert.

Remarque 3 : Si la matrice A possède plusieurs valeurs propres instables, dénotées $\lambda_1, \dots, \lambda_r$, avec $r \leq n$, i.e.

$$\lambda_1 > \lambda_2 > \dots > \lambda_r \geq 0 > \lambda_{r+1} > \dots > \lambda_n,$$

alors une fraction à droite de \hat{G} est donnée par

$$\begin{aligned} (\hat{N}(s), \hat{D}(s)) &= (\hat{G}(s)\hat{D}(s), \hat{D}(s)) \\ &= (\hat{G}(s)(s - \lambda_1)(s - \lambda_2)\dots(s - \lambda_r)(s - \mu_1)^{-1}(s - \mu_2)^{-1}\dots(s - \mu_r)^{-1}, \\ &\quad (s - \lambda_1)(s - \lambda_2)\dots(s - \lambda_r)(s - \mu_1)^{-1}(s - \mu_2)^{-1}\dots(s - \mu_r)^{-1}), \end{aligned}$$

où $\mu_i < 0$ pour $i = 1, \dots, r$.

Nous allons maintenant montrer que le problème de factorisation spectrale est intimement lié à la résolution du problème de contrôle LQ-optimal en horizon infini. Pour rappel, l'unique solution (stabilisante) de ce problème peut être calculée via la résolution de l'équation algébrique de Riccati. La factorisation spectrale fournit une autre manière de résoudre le problème, comme le montre le résultat suivant, que nous prouvons en dimension finie.

Théorème 3 (Callier et Winkin, 1990, Théorème 3)

Soit un système différentiel linéaire tel que (A, B) soit complètement contrôlable et (C, A) soit détectable.

Soit un asservissement d'état stabilisant K quelconque et soit enfin la fraction à droite de la fonction de transfert du système décrite par

$$\hat{N}(s) := C(sI - A - BK)^{-1}B \quad (2.2.6)$$

et

$$\hat{D}(s) := I + K(sI - A - BK)^{-1}B. \quad (2.2.7)$$

Définissons

$$\hat{N}(s) := (sI - A - BK)^{-1}B \quad (2.2.8)$$

et considérons le problème de factorisation spectrale

$$\hat{F}(s) = \hat{N}_*(s)\hat{N}(s) + \hat{D}_*(s)\hat{D}(s) = \hat{N}(s)_*C^*C\hat{N}(s) + \hat{D}_*(s)\hat{D}(s) = \hat{R}_*(s)\hat{R}(s)$$

pour $s = j\omega$, où \hat{R} est un facteur spectral inversible dans $Mat(RH^\infty)$.

Alors, l'unique solution du problème de contrôle LQ-optimal en horizon infini associé au système, $K_0 = -B^*Q_0$, est également donnée par

$$K_0 = -U^{-1}\mathcal{V} = -U^*\mathcal{V}$$

où la paire (U, \mathcal{V}) , avec U unitaire, est l'unique solution constante de l'équation diophantienne

$$U\hat{D}(s) + \mathcal{V}\hat{N}(s) = \hat{R}(s) \quad (2.2.9)$$

induite par la fraction à droite

$$(sI - A)^{-1}B = \hat{N}(s)\hat{D}(s)^{-1} \quad (2.2.10)$$

vérifiant l'identité

$$\hat{D}(s) - K\hat{N}(s) = I. \quad (2.2.11)$$

Preuve :

Commençons par remarquer que, puisque l'asservissement K est stabilisant par hypothèse, les pôles de $(sI - A - BK)^{-1}$ sont tous à partie réelle strictement négative et $\hat{N}(s) = (sI - A - BK)^{-1}B$ est donc une fonction matricielle rationnelle propre stable. Elle est par conséquent holomorphe dans un demi-plan droit contenant \mathbb{C}_+ .

Cette propriété est également valable pour \hat{D} puisque la paire (\hat{N}, \hat{D}) forme une fraction à droite de \hat{G} .

Observons maintenant que

$$(sI - A)(sI - A - BK)^{-1}B = [(sI - A - BK) + BK](sI - A - BK)^{-1}B,$$

qui peut être réécrit comme

$$\begin{aligned} (sI - A)\hat{N}(s) &= [(sI - A - BK) + BK](sI - A - BK)^{-1}B \\ &= B + BK(sI - A - BK)^{-1}B \\ &= B\hat{D}(s), \end{aligned}$$

où l'égalité est valable dans un demi-plan droit contenant \mathbb{C}_+ .

On en déduit donc que

$$(sI - A)^{-1}B = \hat{N}(s)\hat{D}(s)^{-1},$$

excepté en un nombre fini de pôles, ce qui prouve l'équation (2.2.10).

Par ailleurs, on observe très facilement grâce aux équations (2.2.7) et (2.2.8) que

$$\begin{aligned} \hat{D}(s) - K\hat{N}(s) &= I + K(sI - A - BK)^{-1}B - K(sI - A - BK)^{-1}B \\ &= I. \end{aligned}$$

Considérons maintenant l'équation diophantienne (2.2.9), où les données \hat{R} , \hat{N} et \hat{D} sont des fonctions matricielles rationnelles propres stables, et où la solution constante $(\mathcal{U}, \mathcal{V})$ est également vue comme une paire de fonctions matricielles rationnelles propres stables.

Par le deuxième point du Théorème 2, tout facteur spectral de \hat{F} est donné par

$$\begin{aligned} \hat{R}(s) &= U[I - K_0(sI - A)^{-1}B]\hat{D}(s) \\ &= U\hat{D}(s) - UK_0(sI - A)^{-1}B\hat{D}(s), \end{aligned}$$

ou encore, en utilisant l'équation (2.2.10),

$$\hat{R}(s) = U\hat{D}(s) - UK_0\hat{N}(s), \quad (2.2.12)$$

où U est une matrice unitaire constante.
On en déduit que la paire

$$(\mathcal{U}, \mathcal{V}) := (U, -UK_0)$$

est une solution (constante) de l'équation diophantienne.
Nous allons maintenant montrer que cette solution est unique.
Considérons donc une solution quelconque $(\mathcal{U}, \mathcal{V})$ de l'équation diophantienne et montrons que

$$(\mathcal{U}, \mathcal{V}) = (U, -UK_0).$$

En utilisant (2.2.10) et (2.2.12), nous pouvons réécrire l'équation (2.2.9) sous la forme

$$\mathcal{U}\hat{D}(s) + \mathcal{V}(sI - A)^{-1}B\hat{D}(s) = U\hat{D}(s) - UK_0(sI - A)^{-1}B\hat{D}(s)$$

ou, de façon équivalente,

$$\mathcal{U} + \mathcal{V}(sI - A)^{-1}B = U - UK_0(sI - A)^{-1}B.$$

Le deuxième terme de chacun des membres de cette équation est une fonction matricielle rationnelle stable strictement propre.
En passant à la limite quand $|s| \rightarrow +\infty$, on obtient donc

$$\mathcal{U} = U.$$

On en déduit que

$$\mathcal{V}(sI - A)^{-1}B = -UK_0(sI - A)^{-1}B$$

et donc que

$$(\mathcal{V} + UK_0)(sI - A)^{-1}B = 0,$$

excepté en un nombre fini de pôles.
Par injectivité de la transformée de Laplace, nous pouvons donc écrire

$$(\mathcal{V} + UK_0)e^{At}B = 0$$

ou encore

$$B^*e^{A^*t}(\mathcal{V}^* + K_0^*U^*) = 0.$$

En considérant cette égalité colonne par colonne et en utilisant l'aspect dual de la contrôlabilité (observabilité du dual), on obtient

$$\mathcal{V}^* + K_0^* U^* = 0,$$

ce qui est équivalent à

$$\mathcal{V} + U K_0 = 0.$$

Nous obtenons donc finalement

$$\mathcal{V} = -U K_0,$$

ce qui signifie que la solution de l'équation diophantienne donne bien lieu à l'égalité

$$K_0 = -U^{-1} \mathcal{V} = -U^* \mathcal{V},$$

et la preuve est terminée.

□

Remarque : Ce résultat reste également valable dans le cadre plus général de la théorie des *systèmes de C_0 -semigroupes*, pour lesquels l'espace d'états X est un espace de Hilbert, et les matrices A , B et C du système considéré sont remplacées par des *opérateurs linéaires bornés*. Dans ce cas, le problème de factorisation spectrale donne lieu à la recherche d'un facteur spectral $\hat{R} \in \text{Mat}(\hat{\mathcal{A}}_-)$, où $\hat{\mathcal{A}}_-$ est la classe décrite dans la première section.

Le calcul de la solution s'effectue donc essentiellement en deux étapes :

- 1) Résolution du problème de factorisation spectrale faisant intervenir les deux termes de la fraction à droite de la fonction de transfert du système.
- 2) Résolution de l'équation diophantienne à l'aide du facteur spectral calculé précédemment.

Il existe de nombreuses méthodes permettant de résoudre cette dernière équation (notamment des méthodes numériques). Il est également possible de la réécrire sous une forme plus facile à traiter et à interpréter.

Dans cette optique, nous commençons par prouver le lemme suivant.

Lemme 3 *Soit $R = [A, B, C, 0]$ une réalisation d'un système différentiel linéaire temps-invariant.*

Supposons que la matrice A soit inversible.

Alors, la paire (A, B) est complètement contrôlable si et seulement si la paire (A^{-1}, B) l'est également.

Preuve :

Nous savons que la paire (A, B) est complètement contrôlable si et seulement si la matrice de contrôlabilité

$$C = [B \quad AB \quad A^2B \quad \dots \quad A^{n-1}B]$$

est de rang plein, ou encore si elle contient n colonnes linéairement indépendantes.

Supposons que ces n vecteurs soient des colonnes de $A^{i_1}B, A^{i_2}B, \dots, A^{i_n}B$ où $\{i_1, i_2, \dots, i_n\} \subset \{0, 1, \dots, n-1\}$ (les i_j ne sont pas nécessairement distincts). Alors, en prémultipliant par la matrice (inversible) $A^{-(n-1)}$, les colonnes correspondantes des matrices $A^{1-n+i_1}B, A^{1-n+i_2}B, \dots, A^{1-n+i_n}B$ sont également linéairement indépendantes. La matrice de contrôlabilité correspondant à $R_{\text{inv}} = [A^{-1}, B, C, 0]$, donnée par

$$C_{\text{inv}} = [B \quad A^{-1}B \quad A^{-2}B \quad \dots \quad A^{-(n-1)}B],$$

comporte donc n colonnes linéairement indépendantes, et la paire (A^{-1}, B) est par conséquent complètement contrôlable.

□

Considérons maintenant le facteur spectral standard de \hat{F} . Celui-ci est obtenu pour

$$U = U = I$$

et nous déduisons alors des équations du Théorème 3 que

$$\begin{aligned} \hat{R}_a(s) &= \hat{R}(s) - I \\ &= U\hat{D}(s) + V\hat{N}(s) - \hat{D}(s) + K\hat{N}(s) \\ &= (V + K)\hat{N}(s) \\ &= (K - K_0)(sI - A - BK)^{-1}B. \end{aligned}$$

Les deux membres de cette équation sont holomorphes dans un voisinage de $s = 0$ et, en effectuant un développement de Taylor, nous pouvons écrire

$$\frac{\hat{R}_a^{(l)}(0)}{l!} = (K - K_0)(A + BK)^{-(l+1)}B \quad \text{pour tout } l = 0, 1, 2, \dots$$

On en déduit donc que, pour tout $l \in \mathbb{N}$,

$$B^*[(A + BK)^*]^{-(l+1)}(K - K_0)^* = \frac{[\hat{R}_a^{(l)}(0)]^*}{l!}.$$

Cette dernière équation est une équation matricielle classique dont la seule inconnue (après détermination du facteur spectral standard) est l'asservissement K_0 .

Par ailleurs, puisque (A, B) est complètement contrôlable, $(A + BK, B)$ est complètement contrôlable et donc, par le Lemme 3, $((A + BK)^{-1}, B)$ l'est également. L'observabilité de la paire duale $(B^*, [(A + BK)^{-1}]^*)$ permet alors de déterminer $(K - K_0)^*$ (et donc K_0) colonne par colonne de manière unique.

La réécriture de l'équation diophantienne, et en particulier cette dernière remarque, démontrent une fois de plus la nécessité de travailler sur un système complètement contrôlable afin de pouvoir appliquer ce résultat capital, alors que la première méthode (résolution de l'équation algébrique de Riccati) ne demandait que le caractère stabilisable.

Remarque 1 : Si le facteur spectral utilisé dans l'équation diophantienne est le facteur spectral standard, alors $U = I$ et la solution se réduit à

$$(\mathcal{U}, \mathcal{V}) = (I, -K_0).$$

Remarque 2 : Les équations

$$(sI - A)^{-1}B = \hat{N}(s)\hat{D}(s)^{-1}$$

et

$$\hat{D}(s) - K\hat{N}(s) = I$$

peuvent s'interpréter comme le fait que la paire (\hat{N}, \hat{D}) forme une fraction à droite de la fonction de transfert entrée-état $(sI - A)^{-1}B$.

L'identité de Bezout est donnée par l'équation (2.2.11), où la matrice constante K est vue comme une fonction matricielle rationnelle propre stable.

2.3 Exemple

Dans cette partie, nous développons un exemple simple afin d'illustrer quelques résultats énoncés précédemment.

Considérons pour cela la fonction de transfert (stable) donnée par

$$\hat{g}(s) = \frac{\sqrt{a^2 - b^2}}{s + b},$$

où $a, b \in \mathbb{R}$ et $a > b > 0$, possédant un seul pôle stable en $s = -b$.
 Considérons également une réalisation $R = [A, B, C]$ de cette fonction de transfert, où

$$A = \begin{bmatrix} -b & 0 \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix},$$

avec $a_{21} \neq 0$ et $a_{22} < 0$,

$$B = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

et

$$C = [\sqrt{a^2 - b^2} \quad 0].$$

Nous voyons en effet que

$$\begin{aligned} C(sI - A)^{-1}B &= [\sqrt{a^2 - b^2} \quad 0] \begin{bmatrix} \frac{1}{s+b} & 0 \\ \frac{a_{21}}{(s+b)(s-a_{22})} & \frac{1}{s-a_{22}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \\ &= \frac{\sqrt{a^2 - b^2}}{s+b} \\ &= \hat{g}(s). \end{aligned}$$

Il est très aisé de vérifier que ce système est internement exponentiellement stable et complètement contrôlable.

Par ailleurs, nous remarquons que

$$\begin{aligned} \hat{g}_*(s) &= \overline{\hat{g}(-\bar{s})} \\ &= \hat{g}(-s) \\ &= \frac{\sqrt{a^2 - b^2}}{b - s}. \end{aligned}$$

Puisque le système est stable, une fraction à droite de la fonction de transfert est donnée par

$$(\hat{n}(s), \hat{d}(s)) = (\hat{g}(s), 1).$$

La densité spectrale $\hat{f} := \hat{n}_* \hat{n} \hat{d}_* \hat{d}$ est de la forme

$$\hat{f}(s) = 1 + \hat{g}_*(s) \hat{g}(s)$$

et nous obtenons donc que

$$\begin{aligned} \hat{f}(s) &= 1 + \frac{a^2 - b^2}{b^2 - s^2} \\ &= \frac{a^2 - s^2}{b^2 - s^2}. \end{aligned}$$

Cette densité vérifie les hypothèses de la définition 6 et la condition du Théorème 1, comme nous le montrons dans la suite.

(i) Comme nous l'avons vu précédemment, \hat{f} peut s'écrire sous la forme

$$\begin{aligned}\hat{f}(s) &= \frac{a^2 - b^2}{b^2 - s^2} + 1 \\ &= \hat{f}_a(s) + f_0\end{aligned}$$

où

$$\hat{f}_a(s) := \frac{a^2 - b^2}{b^2 - s^2}$$

est une fonction d'une variable complexe et

$$f_0 = 1$$

est bien une constante non-nulle.

(ii) La densité \hat{F} est parahermitienne puisque

$$\begin{aligned}\hat{f}_*(s) &= \hat{f}(-\bar{s})^* \\ &= \overline{\hat{f}(-\bar{s})} \\ &= \overline{\frac{a^2 - (-\bar{s})^2}{b^2 - (-\bar{s})^2}} \\ &= \frac{a^2 - s^2}{b^2 - s^2} \\ &= \hat{f}(s).\end{aligned}$$

(iii) Il est possible de décomposer \hat{f} comme suit :

$$\hat{f}(s) = \frac{a^2 - b^2}{2b(b+s)} + \frac{a^2 - b^2}{2b(b-s)} + 1$$

ou encore

$$\hat{f} = \hat{f}^+ + \hat{f}^-$$

avec

$$\begin{aligned}\hat{f}^+(s) &= \frac{a^2 - b^2}{2b(b+s)} + \frac{1}{2}, \\ \hat{f}^-(s) &= \frac{a^2 - b^2}{2b(b-s)} + \frac{1}{2}.\end{aligned}$$

On voit immédiatement que \hat{f}^+ est rationnelle propre stable (avec un unique pôle en $s = -b$) et que

$$\hat{f}^+ = \hat{f}_*^-.$$

En combinant ces deux affirmations, on en arrive à la conclusion que

$$\hat{f} \in \text{Mat}(\widehat{L\Delta}(\sigma))$$

pour un certain $\sigma < 0$.

(iv) \hat{f} est strictement positive sur l'axe imaginaire car

$$\begin{aligned} \hat{f}(j\omega) &= \frac{a^2 - (j\omega)^2}{b^2 - (j\omega)^2} \\ &= \frac{a^2 + \omega^2}{b^2 + \omega^2} \\ &> 0. \end{aligned}$$

Le théorème d'existence nous permet alors de déduire l'existence d'un facteur spectral $\hat{r} = \hat{r}_a(\cdot) + r_0$ rationnel propre stable et dont l'inverse est rationnel propre stable.

De plus, puisque $f_0 = 1$, la constante r_0 est un complexe vérifiant

$$|r_0| = 1$$

et le facteur spectral standard (tel que $r_0 = 1$) est unique.

Nous pouvons maintenant effectuer la factorisation en remarquant que

$$\begin{aligned} \hat{f}(s) &= \frac{(a-s)(a+s)}{(b-s)(b+s)} \\ &= \frac{a-s}{b-s} \frac{a+s}{b+s} \end{aligned}$$

et, en particulier,

$$\hat{f}(j\omega) = \hat{r}_*(j\omega)\hat{r}(j\omega)$$

où

$$\hat{r}(s) := \frac{a+s}{b+s}.$$

En effet, on voit immédiatement que

$$\hat{r}_*(s) = \frac{a-s}{b-s}.$$

De plus, \hat{r} est bien une fonction rationnelle propre (valant 1 à l'infini) et stable puisque son unique pôle se situe en

$$s = -b < 0.$$

Par ailleurs, on remarque que

$$\hat{r}(s) = \frac{a-b}{b+s} + 1.$$

La fonction \hat{r} est donc l'unique facteur spectral standard de \hat{f} et tout autre facteur spectral s'écrit

$$\hat{r}(s) = u \frac{a-b}{b+s} + u$$

où u est une constante telle que

$$|u| = 1.$$

Appliquons maintenant le Théorème 3 pour résoudre le problème de contrôle LQ-optimal en horizon infini.

Puisque \hat{r} est le facteur spectral standard, nous avons que $\mathcal{U} = 1$, et l'équation diophantienne (2.2.9) se réduit à

$$1 + \mathcal{V}\hat{\mathcal{N}}(s) = \hat{r}(s),$$

où $\hat{\mathcal{N}}(s) := (sI - A)^{-1}B$ est donné par

$$\hat{\mathcal{N}}(s) = \begin{bmatrix} \frac{1}{s+b} \\ \frac{a_{21}}{(s+b)(s-a_{22})} \end{bmatrix}.$$

Si nous notons

$$\mathcal{V} := [\mathcal{V}_1 \quad \mathcal{V}_2],$$

il suffit donc de résoudre l'équation

$$\frac{1}{s+b}\mathcal{V}_1 + \frac{a_{21}}{(s+b)(s-a_{22})}\mathcal{V}_2 = \frac{a-b}{s+b}.$$

Nous voyons immédiatement que l'unique solution constante est

$$\mathcal{V} = [a-b \quad 0]$$

et l'asservissement d'état optimal est donné par

$$K_0 = -\mathcal{U}^{-1}\mathcal{V} = -\mathcal{V}.$$

Nous obtenons donc finalement que

$$K_0 = [b - a \quad 0].$$

Il est par ailleurs aisé de vérifier que la solution obtenue correspond bien à l'asservissement d'état calculé en résolvant l'équation algébrique de Riccati. Notons $Q := [q_{ij}]_{i,j=1}^2$. Un rapide calcul montre que

$$A^*Q + QA + C^*C - QBB^*Q = \begin{bmatrix} -q_{11}^2 - 2bq_{11} + a_{21}(q_{12} + q_{21}) + a^2 - b^2 & -q_{11}q_{12} + a_{22}q_{12} - bq_{12} + a_{21}q_{22} \\ -q_{11}q_{21} + a_{22}q_{21} - bq_{21} + a_{21}q_{22} & 2a_{22}q_{22} - q_{12}q_{21} \end{bmatrix}.$$

La résolution de l'équation algébrique de Riccati

$$A^*Q + QA + C^*C - QBB^*Q = 0$$

donne lieu à l'unique solution symétrique et semi-définie positive Q_0 donnée par

$$Q_0 = \begin{bmatrix} a - b & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Puisque $K_0 = -B^*Q_0$, nous obtenons finalement que

$$K_0 = [b - a \quad 0],$$

ce qui correspond à la solution calculée précédemment.

Chapitre 3

Introduction à différentes classes de systèmes linéaires en dimension infinie

Après cette introduction au problème de factorisation spectrale et à la résolution du problème de contrôle LQ-optimal en dimension finie, nous considérons maintenant une classe de systèmes différentiels linéaires appelés *systèmes de Sturm-Liouville*.

Ce chapitre débutera par une brève introduction aux systèmes de C_0 -semigroupes commandés évoqués précédemment.

Nous définirons ensuite les opérateurs spectraux de Riesz et nous présenterons quelques-unes de leurs caractéristiques.

La troisième section du chapitre introduit la théorie des opérateurs et des systèmes de Sturm-Liouville, qui constituent le cadre applicatif principal de ce travail et que nous traiterons plus particulièrement dans le dernier chapitre.

3.1 Introduction à la théorie des C_0 -semigroupes

Commençons par définir ce que nous entendons par *système de C_0 -semigroupe commandé*.

Définition 7 *Un système de C_0 -semigroupe commandé est un système dif-*

férentiel linéaire de la forme

$$\begin{cases} \dot{x}(t) &= Ax(t) + Bu(t) \\ y(t) &= Cx(t) + Du(t) \end{cases} \quad (3.1.1)$$

pour tout $t \geq 0$, avec condition initiale

$$x(0) = x_0, \quad (3.1.2)$$

où

- (i) $x(t) \in H$ pour tout $t \geq 0$, avec H un espace de Hilbert séparable muni d'un produit interne $\langle \cdot, \cdot \rangle : H \times H \rightarrow \mathbb{C}$,
- (ii) $u(t) \in U$ pour tout $t \geq 0$, où U est l'espace des entrées,
- (iii) $y(t) \in Y$ pour tout $t \geq 0$, où Y est l'espace des sorties,
- (iv) $A : D(A) \subset H \rightarrow H$ engendre le C_0 -semigroupe $(T(t))_{t \geq 0} \subset \mathcal{L}(H)$,
- (v) $B \in \mathcal{L}(U, H)$ est un opérateur de contrôle linéaire borné,
- (vi) $C \in \mathcal{L}(H, Y)$ est un opérateur d'observation linéaire borné, et
- (vii) $D \in \mathcal{L}(U, Y)$ est un opérateur linéaire borné.

De façon générale, lorsque nous considérons un système différentiel linéaire en dimension infinie de la forme (3.1.1)-(3.1.2), sous certaines conditions, l'opérateur A engendrera un C_0 -semigroupe, que nous noterons $(T(t))_{t \geq 0}$ ou $(e^{At})_{t \geq 0}$. L'opérateur A sera alors appelé *générateur du C_0 -semigroupe $(T(t))_{t \geq 0}$* et, dans ce cas, la solution du système sera donnée par

$$x(t) = T(t)x_0 + \int_0^t T(t-s)Bu(s)ds$$

pour tout $t \geq 0$.

Tout C_0 -semigroupe est caractérisé par une constante réelle appelée *constante de croissance*.

Définition 8 La constante de croissance (ou type) d'un C_0 -semigroupe $(T(t))_{t \geq 0}$ est la constante ω_0 définie comme

$$\omega_0 = \inf_{t > 0} \left(\frac{1}{t} \|T(t)\| \right) = \lim_{t \rightarrow 0} \left(\frac{1}{t} \|T(t)\| \right) < \infty.$$

Nous verrons par la suite que, sous certaines conditions (et notamment dans le cas des opérateurs spectraux de Riesz), la constante de croissance pourra s'écrire sous une autre forme dépendant explicitement des valeurs propres de l'opérateur A .

3.2 Opérateurs spectraux de Riesz

Avant d'aborder la définition centrale de cette section, il est utile d'introduire une notion très importante : le concept de *base de Riesz* d'un espace de Hilbert.

Définition 9 (Base de Riesz) Soit H , un espace de Hilbert (complexe) séparable.

Un ensemble $\{\phi_n\}_{n=1}^\infty \subset H$ est une base de Riesz de H si et seulement s'il existe un isomorphisme de Banach $U \in \mathcal{L}(H)$ et un ensemble $\{e_n\}_{n=1}^\infty$ formant une base orthonormée de H tels que, pour tout $n \in \mathbb{N}_0$, $\phi_n = Ue_n$.

Remarquons que, par (Gohberg et Krein, 1969, Théorème 2.1 p. 310), il est également possible de définir une base de Riesz d'un espace de Hilbert H comme un ensemble de vecteurs formant une base orthonormée de cet espace par rapport à un produit scalaire topologiquement équivalent.

Nous pouvons maintenant définir ce qu'est un *opérateur spectral de Riesz* sur un espace de Hilbert.

Définition 10 Un opérateur A défini sur un espace de Hilbert H et à valeurs dans H est un opérateur spectral de Riesz si et seulement si

- (i) A est fermé,
- (ii) le spectre de A est composé de valeurs propres simples, notées λ_n ,
 $n \in \mathbb{N}_0$,
- (iii) $\{\lambda_n\}_{n=1}^\infty$ est totalement déconnecté,
- (iv) l'ensemble des vecteurs propres associés, $\{\phi_n\}_{n=1}^\infty$, est une base de Riesz de H .

Définition 11 Un système de C_0 -semigroupe commandé $\Sigma[A, B, C, D]$, où l'opérateur A est un opérateur spectral de Riesz, sera appelé un système spectral de Riesz.

Nous introduisons maintenant un lemme donnant une condition nécessaire et suffisante pour qu'un opérateur défini de façon dense dans un espace de Hilbert, et possédant des valeurs propres simples ainsi qu'une base de Riesz de vecteurs propres, soit le générateur d'un C_0 -semigroupe. Ce résultat fournit également une expression du C_0 -semigroupe engendré, ainsi qu'une autre représentation de sa constante de croissance.

Nous utiliserons ce lemme dans une preuve ultérieure.

Base Hilbertien ?

Lemme 4 Soit H , un espace de Hilbert séparable muni du produit interne $\langle \cdot, \cdot \rangle$.

Soit également un opérateur $A \in \mathcal{FD}(H)$, dont le spectre est composé de valeurs propres simples $\{\lambda_n\}_{n=1}^\infty \subset \mathcal{C}$, et dont l'ensemble des vecteurs propres $\{\phi_n\}_{n=1}^\infty \subset H$ forme une base de Riesz de H .

Alors,

(i) A est le générateur d'un C_0 -semigroupe $(T(t))_{t \geq 0} \subset \mathcal{L}(H)$ si et seulement si

$$\omega_0 := \sup_{n \in \mathbb{N}_0} \Re(\lambda_n) < \infty.$$

(ii) Dans ce cas, pour tout $t \geq 0$ et pour tout $x_0 \in H$,

$$T(t)x_0 = \sum_{k=1}^{\infty} e^{\lambda_k t} \langle x_0, \psi_k \rangle \phi_k,$$

où $\{\psi_n\}_{n=1}^\infty$ est la base de Riesz de vecteurs propres de A^* biorthonormée par rapport à $\{\phi_n\}_{n=1}^\infty$ (où le vecteur propre ψ_n est associé à la valeur propre $\bar{\lambda}_n$), et

(iii) la constante de croissance de $(T(t))_{t \geq 0}$ est ω_0 .

Nous remarquons immédiatement que les hypothèses du lemme sont, par définition, automatiquement vérifiées dans le cas d'un opérateur spectral de Riesz défini de manière dense dans H .

Nous terminons cette section en rappelant un critère permettant de déterminer si un système spectral de Riesz est exponentiellement stabilisable ou détectable, que nous présentons sous forme d'un lemme.

Lemme 5 (Curtain et Zwart, 1995, Théorème 5.2.10)

Considérons un système spectral de Riesz $\Sigma[A, B, C]$, où

(i) A est un opérateur spectral de Riesz défini sur un espace de Hilbert H , et est donné par

$$Az = \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n \langle z, \psi_n \rangle \phi_n,$$

où $\{\lambda_n\}_{n=1}^\infty$ est l'ensemble des valeurs propres de A avec l'ensemble des vecteurs propres correspondants, $\{\phi_n\}_{n=1}^\infty$, et $\{\psi_n\}_{n=1}^\infty$ est la base biorthonormée des vecteurs propres de A^* ,

(ii) B est un opérateur de rang fini donné par

$$Bu = \sum_{i=1}^m b_i u_i,$$

avec $b_i \in H$, et

(iii) C est un opérateur de rang fini donné par

$$Cz = (\langle z, c_1 \rangle, \langle z, c_2 \rangle, \dots, \langle z, c_k \rangle)^T,$$

avec $c_i, z \in H$.

La paire (A, B) est β -exponentiellement stabilisable si et seulement s'il existe $\epsilon > 0$ tel que $\sigma_{\beta-\epsilon}^+(A) := \sigma(A) \cap \mathbb{C}_{\beta-\epsilon}^+$ comprend au plus un nombre fini de valeurs propres, et

$$\text{rg}(\langle b_1, \psi_n \rangle, \langle b_2, \psi_n \rangle, \dots, \langle b_m, \psi_n \rangle) = 1$$

pour tout $n \in \mathbb{N}_0$ tel que $\lambda_n \in \sigma_{\beta-\epsilon}^+(A)$.

La paire (C, A) est β -exponentiellement détectable si et seulement s'il existe $\epsilon > 0$ tel que $\sigma_{\beta-\epsilon}^+(A) := \sigma(A) \cap \mathbb{C}_{\beta-\epsilon}^+$ comprend au plus un nombre fini de valeurs propres, et

$$\text{rg}(\langle c_1, \phi_n \rangle, \langle c_2, \phi_n \rangle, \dots, \langle c_m, \phi_n \rangle) = 1$$

pour tout $n \in \mathbb{N}_0$ tel que $\lambda_n \in \sigma_{\beta-\epsilon}^+(A)$.

3.3 Opérateurs et systèmes de Sturm-Liouville

Cette section a pour but de présenter les opérateurs de Sturm-Liouville et la classe de systèmes à paramètres répartis dans laquelle ils interviennent.

Définition 12 Soit un opérateur A défini sur un domaine $D(A) \subset L^2(a, b)$, où $L^2(a, b)$ est muni du produit interne usuel $\langle \cdot, \cdot \rangle$ donné par

$$\langle f, g \rangle = \int_a^b f(z) \overline{g(z)} dz$$

pour tout $f, g \in L^2(a, b)$, et

$$D(A) = \left\{ f \in L^2(a, b) : f, \frac{df}{dz} \text{ sont absolument continues, } \frac{d^2 f}{dz^2} \in L^2(a, b), \right. \\ \left. \alpha_a \frac{df}{dz}(a) + \beta_a f(a) = 0, \alpha_b \frac{df}{dz}(b) + \beta_b f(b) = 0 \right\}. \quad (3.3.1)$$

L'opérateur A est un opérateur de Sturm-Liouville si, pour tout $f \in D(A)$,

$$Af(z) = \frac{1}{\rho(z)} \left[\frac{d}{dz} \left(-\rho(z) \frac{df}{dz}(z) \right) + q(z)f(z) \right], \quad (3.3.2)$$

où p , $\frac{dp}{dz}$, q et ρ sont des fonctions continues à valeurs réelles telles que $\rho > 0$ et $p > 0$.

Définition 13 *Considérons un système différentiel linéaire $\Sigma[A, B, C]$, où A est un opérateur linéaire défini sur l'espace de Hilbert $L^2(a, b)$, avec $a, b \in \mathbb{R}$, B est un opérateur linéaire borné défini sur l'espace de Hilbert U et à valeurs dans $L^2(a, b)$, et C est un opérateur linéaire borné défini sur $L^2(a, b)$ et à valeurs dans l'espace de Hilbert Y .*

Un tel système est appelé un système de Sturm-Liouville si $-A$ est un opérateur de Sturm-Liouville.

Les systèmes de Sturm-Liouville possèdent de nombreuses applications pratiques, impliquant notamment des phénomènes de diffusion ou de vibration en mécanique. Ils interviennent, par exemple, dans la modélisation de réacteurs chimiques tubulaires à dispersion axiale. Leur étude et la résolution de problèmes de contrôle associés présentent donc un intérêt pratique tout particulier.

Nous signalons maintenant un résultat capital dans l'analyse de ces systèmes.

Théorème 4 (Delattre *et al.*, 2003, Théorème 1)

Tout système de Sturm-Liouville est un système spectral de Riesz.

Par la définition d'un système spectral de Riesz, il suffit de prouver le lemme suivant pour obtenir la thèse.

Lemme 6 (Delattre *et al.*, 2003, Lemme 1)

Soit A l'opposé d'un opérateur de Sturm-Liouville.

Alors,

- (i) *A est un opérateur spectral de Riesz, et*
- (ii) *A est le générateur d'un C_0 -semigroupe d'opérateurs linéaires bornés sur $L^2(a, b)$.*

Pour cela, nous aurons besoin de deux lemmes d'analyse fonctionnelle (donnés en annexe). La preuve (effectuée dans (Delattre *et al.*, 2003)) s'appuie également sur de nombreux résultats présents dans la littérature, et faisant intervenir, notamment, des notions d'analyse fonctionnelle et de théorie

des équations différentielles ordinaires. Il n'est donc pas inintéressant de détailler cette démonstration.

Preuve du Lemme 6 :

(i) Nous commençons donc par montrer que A est fermé. Pour cela, remarquons tout d'abord que, si 0 n'est pas une valeur propre de $-A$, alors ce dernier est un opérateur linéaire inversible dont l'inverse est linéaire et borné.

Si nous définissons

$$P_1 f := \alpha_a \frac{df}{dz}(a) + \beta_a f(a)$$

et

$$P_2 f := \alpha_b \frac{df}{dz}(b) + \beta_b f(b),$$

(Naylor et Sell, 2000, Théorème 7.5.4) montre en effet que l'inverse de $-A$ est de la forme

$$[(-A)^{-1} f](z) = \int_a^b g(z, y) f(y) \rho(y) dy, \quad (3.3.3)$$

où $g(z, y)$ est une fonction de Green donnée par

$$p(a)W(a)g(z, y) = -u_1(z)u_2(y) \quad \text{si } a \leq z \leq y \leq b$$

et

$$p(a)W(a)g(z, y) = -u_2(z)u_1(y) \quad \text{si } a \leq y \leq z \leq b,$$

avec u_1 et u_2 des solutions indépendantes de

$$p \frac{d^2 u_1}{dz^2} + \frac{dp}{dz} \frac{du_1}{dz} - qu_1 = 0, \quad P_1 u_1 = 0, P_2 u_1 \neq 0, \quad (3.3.4)$$

$$p \frac{d^2 u_2}{dz^2} + \frac{dp}{dz} \frac{du_2}{dz} - qu_2 = 0, \quad P_1 u_2 \neq 0, P_2 u_2 = 0, \quad (3.3.5)$$

et

$$W(z) = u_1(z) \frac{du_2}{dz}(z) - u_2(z) \frac{du_1}{dz}(z).$$

Par conséquent, par le Lemme 10, $-A$ est fermé, et on en déduit immédiatement que A l'est également.

Il est également possible (Curtain et Zwart, 1995, pp. 82-83) de démontrer que $-A$ est fermé dans le cas où il admet 0 comme valeur propre.

Il faut maintenant montrer que les valeurs propres de A sont simples. D'après (Naylor et Sell, 2000, Théorème 7.5.6), le spectre d'un opérateur de Sturm-Liouville est composé de valeurs propres réelles et (au plus) dénombrables. Par ailleurs, le problème aux valeurs propres

$$-Af = \lambda f$$

peut également s'écrire

$$\frac{d}{dz} \left(p(z) \frac{df}{dz}(z) \right) + (-q(z) + \lambda \rho(z))f(z), \quad (3.3.6)$$

où f vérifie les conditions frontières

$$\alpha_a \frac{df}{dz}(a) + \beta_a f(a) = 0, \quad (3.3.7)$$

$$\alpha_b \frac{df}{dz}(b) + \beta_b f(b) = 0, \quad (3.3.8)$$

et peut donc être mis très facilement sous la forme d'un problème aux bords auto-adjoint décrit dans (Sagan, 1961, Chapitre V §2). Nous déduisons alors de (Sagan, 1961, Théorème V.8) que les valeurs propres de $-A$ sont simples. Or, si les λ_n sont les valeurs propres de l'opérateur A , les valeurs propres de l'opérateur de Sturm-Liouville $-A$ sont les réels $-\lambda_n$, et les propriétés sont donc également vérifiées pour A .

Considérons maintenant $\lambda \in \rho(-A)$. Nous déduisons de (Naylor et Sell, 2000, Corollaire 7.5.5) que l'opérateur $\lambda I - (-A)$ est inversible et que son inverse est compact. Puisque $\lambda \in \rho(-A)$, nous avons également que $0 \in \rho(\lambda I + A)$ et, par le Lemme 11, le spectre de $\lambda I + A$ est donc composé de valeurs propres isolées. Le spectre de A l'est alors également, et est par conséquent totalement déconnecté.

Il reste alors à démontrer que les vecteurs propres de A forment une base de Riesz de $L^2(a, b)$. Pour cela, considérons sur $L^2(a, b)$ le produit scalaire $\langle \cdot, \cdot \rangle_\rho$ défini comme

$$\langle f, g \rangle_\rho = \int_0^1 \rho(z) f(z) \overline{g(z)} dz$$

pour tout $f, g \in L^2(a, b)$.

Il a été démontré dans (Sagan, 1961, Chapitre V.2.4) que, si ϕ_m et ϕ_n sont deux vecteurs propres distincts d'un opérateur de Sturm-Liouville, alors les fonctions $\sqrt{\rho}\phi_m$ et $\sqrt{\rho}\phi_n$ sont orthogonales par rapport au produit scalaire

usuel de $L^2(a, b)$. Par conséquent, les vecteurs propres de $-A$ (et donc de A) vérifient

$$\langle \phi_m, \phi_n \rangle_\rho := \int_0^1 \rho(z) \phi_m(z) \phi_n(z) dz = 0.$$

L'ensemble des vecteurs propres $\{\phi_n\}_{n=1}^\infty$ de A forme donc une base ortho-normée de $L^2(a, b)$ par rapport au produit interne $\langle \cdot, \cdot \rangle_\rho$, qui est équivalent au produit interne usuel $\langle \cdot, \cdot \rangle$.

On en déduit donc que $\{\phi_n\}_{n=1}^\infty$ forme une base de Riesz de $L^2(a, b)$.

Par conséquent, A est bien un opérateur spectral de Riesz.

(ii) Par le Lemme 4, et puisque A est un opérateur spectral de Riesz défini de façon dense dans $L^2(a, b)$, nous voyons que A est le générateur d'un C_0 -semigroupe si et seulement si

$$\omega_0 := \sup_{n \in \mathbb{N}_0} \Re(\lambda_n) = \sup_{n \in \mathbb{N}_0} \lambda_n < \infty.$$

Or, (Sagan, 1961, Théorème V.7) montre qu'il existe une constante $\lambda_0 \in \mathbb{R}$ telle que le problème de Sturm-Liouville (3.3.6)-(3.3.8) n'admet pas de solution pour $\lambda < \lambda_0$. Les valeurs propres de $-A$ vérifient donc $-\lambda_n > \lambda_0$ pour tout $n \in \mathbb{N}_0$, ce qui implique que, pour tout $n \in \mathbb{N}_0$, $\lambda_n < -\lambda_0 < +\infty$.

□

Remarque 1 : Il est assez aisé de montrer que, si u_1 et u_2 sont deux solutions linéairement indépendantes du problème aux valeurs propres

$$Au = \lambda u, \tag{3.3.9}$$

alors λ est une valeur propre de A si et seulement si

$$\Delta(\lambda) := \begin{vmatrix} P_1 u_1 & P_1 u_2 \\ P_2 u_1 & P_2 u_2 \end{vmatrix} = 0.$$

En effet, puisque u_1 et u_2 sont des solutions indépendantes, toute solution u de (3.3.9) peut s'écrire comme

$$u = c_1 u_1 + c_2 u_2,$$

où $c_1, c_2 \in \mathbb{C}$. Les conditions aux bords $P_1 u = 0$ et $P_2 u = 0$ deviennent donc

$$\begin{aligned} c_1 P_1 u_1 + c_2 P_1 u_2 &= 0, \\ c_1 P_2 u_1 + c_2 P_2 u_2 &= 0, \end{aligned}$$

et forment par conséquent un système linéaire de la forme $Ac = 0$. Si λ est une valeur propre, ce système admet une solution (c_1, c_2) non-nulle (puisque $u \neq 0$), et le déterminant associé $\Delta(\lambda)$ doit donc être nul. Par ailleurs, si $\Delta(\lambda) = 0$, le système admet une solution $(c_1, c_2) \neq (0, 0)$, et le problème (3.3.9) admet une solution $u \neq 0$, à laquelle est associée la valeur propre λ .

Pour prouver qu'un opérateur de Sturm-Liouville admet un inverse de la forme (3.3.3), les auteurs cherchent la solution du problème $\mathcal{A}u = v$ en fonction de v , qui est ici une équation différentielle ordinaire de la forme

$$-\frac{d}{dz} \left(-p(z) \frac{du}{dz}(z) \right) + q(z)u(z) = \rho(z)v(z),$$

ou, plus simplement,

$$-(-pu')' + qu = \rho v.$$

Ils se basent pour cela sur l'utilisation d'un Wronskien associé à l'équation homogène. Plus précisément, ils considèrent le problème

$$pu'' + p'u' - qu = 0,$$

qui est exactement le problème (3.3.9) avec $\lambda = 0$, et deux solutions réelles non-nulles u_1 et u_2 vérifiant les conditions aux bords $P_i u_i = 0$. Grâce au critère évoqué précédemment, et puisque 0 n'est pas une valeur propre de \mathcal{A} , il est alors facile de voir que u_1 et u_2 sont linéairement indépendantes et vérifient

$$P_i u_j \neq 0 \quad \text{pour } i \neq j$$

(sans quoi le déterminant $\Delta(0)$ serait nul et 0 serait une valeur propre de \mathcal{A}).

Avec le Wronskien associé

$$W(z) = \begin{vmatrix} u_1(z) & u_2(z) \\ u_1'(z) & u_2'(z) \end{vmatrix},$$

par la théorie des équations différentielles ordinaires, la solution générale du problème $\mathcal{A}u = v$ est de la forme

$$u(z) = c_1 u_1(z) + c_2 u_2(z) + x(z),$$

où $x(z)$ est donné par

$$x(z) = \int_a^z \frac{u_1(z)u_2(y) - u_2(z)u_1(y)}{p(a)W(a)} v(y)\rho(y) dy.$$

Il reste alors à déterminer les constantes c_1 et c_2 pour que $u \in D(A)$. Cette dernière condition est vérifiée avec $c_2 = 0$ et

$$c_1 = - \int_a^b \frac{u_2(y)}{p(a)W(a)} v(y) \rho(y) dy.$$

Avec ces constantes, la solution devient

$$u(z) = - \int_z^b \frac{u_1(z)u_2(y)}{p(a)W(a)} v(y) \rho(y) dy - \int_a^z \frac{u_2(z)u_1(y)}{p(a)W(a)} v(y) \rho(y) dy$$

et la conclusion en découle alors immédiatement.

Remarque 2 : Pour prouver que les valeurs propres de tout opérateur de Sturm-Liouville A sont réelles et dénombrables, les auteurs se servent du fait que les vecteurs propres de A associés à des valeurs propres distinctes sont mutuellement orthogonaux. Puisque l'espace de Hilbert $L^2(a, b)$ est séparable, ils en déduisent qu'il existe au plus un ensemble dénombrable de vecteurs propres mutuellement orthogonaux non nuls, et, par conséquent, les valeurs propres associées sont au plus dénombrables.

Remarque 3 : Le fait que l'opérateur $\lambda I + A$, avec $\lambda \in \rho(-A)$, soit inversible est une conséquence directe du caractère inversible de $-A$ dans le cas où $0 \in \rho(-A)$.

Ce résultat possède une valeur théorique très importante puisqu'il fait le lien entre la classe des systèmes de Sturm-Liouville, permettant de décrire plusieurs problèmes physiques tels que les phénomènes de diffusion, et la théorie des systèmes de C_0 -semigroupes commandés, dont les propriétés peuvent s'avérer très utiles dans ce cadre.

Par ailleurs, il permettra une résolution plus rapide du problème posé dans le chapitre suivant, concernant simultanément une classe de systèmes de Sturm-Liouville particulière et le problème de factorisation spectrale en dimension infinie intervenant dans le cadre de la théorie des systèmes de C_0 -semigroupes commandés.

Chapitre 4

Application de la méthode de factorisation spectrale par extraction symétrique

Dans le chapitre précédent, nous nous sommes intéressés aux systèmes de Sturm-Liouville en toute généralité. Nous allons maintenant restreindre ce cadre général afin de nous concentrer sur une certaine classe de systèmes à paramètres répartis permettant de modéliser certains phénomènes de réaction-diffusion.

L'objectif de ce chapitre est d'appliquer la *méthode de factorisation spectrale par extraction symétrique* à cette classe de systèmes afin de donner une ouverture pour la résolution du problème de contrôle LQ-optimal en horizon infini associé.

Nous commencerons par remarquer que les systèmes de cette forme entrent bien dans le cadre de la théorie des systèmes de Sturm-Liouville.

Nous poursuivrons par une introduction à la méthode de factorisation spectrale par extraction symétrique. Nous montrerons comment cette méthode peut-être appliquée dans le cadre des systèmes spectraux de Riesz décrits précédemment et nous donnerons des résultats de convergence capitaux dans l'analyse des systèmes à paramètres répartis traités ici.

Dans la troisième partie, nous utiliserons les résultats du chapitre précédent concernant les opérateurs spectraux de Riesz et les systèmes de Sturm-Liouville afin de démontrer que cette méthode est convergente pour de tels systèmes.

Enfin, nous calculerons explicitement la fonction de transfert et la densité spectrale à factoriser dans le but de résoudre le problème de contrôle LQ-

optimal en horizon infini associé.
 Quelques tests numériques viendront clore ce chapitre.

4.1 Contexte

Nous considérons l'espace de Hilbert $L^2(0, 1)$ et un opérateur différentiel linéaire $A : D(A) \rightarrow L^2(0, 1)$ donné par

$$Ax = D \frac{d^2 x}{dz^2} - v \frac{dx}{dz} - kx, \quad (4.1.1)$$

où le domaine $D(A)$ est défini comme

$$D(A) := \left\{ x \in L^2(0, 1) : x, \frac{dx}{dz} \text{ sont absolument continues, } \frac{d^2 x}{dz^2} \in L^2(0, 1), \right. \\ \left. D \frac{dx}{dz}(0) - vx(0) = 0 = \frac{dx}{dz}(1) \right\}.$$

Il est très aisé de vérifier que A est l'opposé d'un opérateur de Sturm-Liouville, i.e. $A = -\mathcal{A}$, où \mathcal{A} est donné par (3.3.2) pour tout $f \in L^2(0, 1)$, avec

$$\rho(z) = e^{-\frac{v}{D}z}, \quad p(z) = D\rho(z), \quad q(z) = k\rho(z),$$

et son domaine $D(\mathcal{A})$ est donné par (3.3.1), avec

$$\alpha_0 = D, \quad \beta_0 = -v, \quad \alpha_1 = 0, \quad \beta_1 = 1.$$

En effet, pour tout $f \in D(\mathcal{A})$,

$$\begin{aligned} -\mathcal{A}f(z) &= -\frac{1}{e^{-\frac{v}{D}z}} \left[\frac{d}{dz} \left(-De^{-\frac{v}{D}z} \frac{df}{dz}(z) \right) + ke^{-\frac{v}{D}z} f(z) \right] \\ &= -e^{\frac{v}{D}z} \left[-D \left(-\frac{v}{D} \right) e^{-\frac{v}{D}z} \frac{df}{dz}(z) - De^{-\frac{v}{D}z} \frac{d^2 f}{dz^2}(z) + ke^{-\frac{v}{D}z} f(z) \right] \\ &= D \frac{d^2 f}{dz^2}(z) - v \frac{df}{dz}(z) - kf(z) \\ &= Af(z). \end{aligned}$$

Les résultats concernant les systèmes de Sturm-Liouville (et donc des systèmes spectraux de Riesz) présentés dans le chapitre précédent pourront donc être utilisés dans le contexte qui nous préoccupe maintenant.

Signalons également que, d'après (Delattre *et al.*, 2003), le spectre de A est composé de valeurs propres simples réelles de la forme

$$\lambda_n = -\frac{s_n^2 + v^2}{4D} - k < -\left(\frac{v^2}{4D} + k\right) < 0,$$

où $\{s_n, n \geq 1\}$ est l'ensemble des solutions de l'équation

$$\tan\left(\frac{s}{2D}\right) = \frac{2vs}{s^2 - v^2}, \quad s > 0,$$

tel que $0 < s_n < s_{n+1}$ pour tout $n \geq 1$. Les vecteurs propres associés sont donnés par

$$\phi_n(z) = K_n e^{\frac{v}{2D}z} \left[\cos\left(\frac{s_n}{2D}z\right) + \frac{v}{s_n} \sin\left(\frac{s_n}{2D}z\right) \right] \quad (4.1.2)$$

pour tout $n \in \mathbb{N}_0$, où les K_n sont des constantes non-nulles.

Nous voyons immédiatement que la fermeture du spectre de A est totalement déconnectée puisque

$$|\lambda_{n+1} - \lambda_n| \rightarrow \infty \quad \text{quand } n \rightarrow \infty.$$

Par ailleurs, puisque tout opérateur de Sturm-Liouville est un opérateur spectral de Riesz, $\{\phi_n\}_{n=1}^\infty$ forme une base de Riesz de $L^2(0, 1)$. Nous pouvons également vérifier cette propriété en observant que les vecteurs propres de l'opérateur A forment une base orthonormée de $L^2(0, 1)$ par rapport au produit scalaire $\langle \cdot, \cdot \rangle_\rho$ défini comme

$$\langle f, g \rangle_\rho := \int_0^1 e^{-\frac{v}{D}z} f(z) \overline{g(z)} dz$$

pour tout $f, g \in L^2(0, 1)$. Il est en effet très facile de montrer que

$$\langle \phi_m, \phi_n \rangle_\rho = \int_0^1 e^{-\frac{v}{D}z} \phi_m \phi_n dz = 0$$

pour tout $m, n \in \mathbb{N}_0$, avec $m \neq n$, et

$$\langle \phi_n, \phi_n \rangle_\rho = 1$$

pour tout $n \in \mathbb{N}_0$, avec K_n choisi de façon appropriée.

En posant

$$\psi_n(z) := K_n e^{-\frac{v}{2D}z} \left[\cos\left(\frac{s_n}{2D}z\right) + \frac{v}{s_n} \sin\left(\frac{s_n}{2D}z\right) \right], \quad (4.1.3)$$

on en déduit par ailleurs immédiatement que

$$\langle \phi_m, \psi_n \rangle = \int_0^1 \phi_m(z) \psi_n(z) = \delta_{mn}.$$

L'ensemble $\{\psi_n\}_{n=1}^\infty$ forme par conséquent une base de Riesz de $L^2(0,1)$ biorthonormée par rapport à $\{\phi_n\}_{n=1}^\infty$.

La structure spectrale de l'opérateur A sera exploitée dans des développements ultérieurs.

4.2 Factorisation spectrale par extraction symétrique

4.2.1 Description de la méthode

Nous nous plaçons maintenant dans le cas où nous sommes en présence d'une densité spectrale coercive réelle \hat{F} pouvant s'écrire sous la forme

$$\hat{F}(s) = \prod_{n=1}^{\infty} \hat{F}_n(s) \quad (4.2.1)$$

pour tout s dans une bande verticale autour de l'axe imaginaire, où les facteurs élémentaires $\hat{F}_n(s)$ sont des densités spectrales réelles coercives rationnelles données par

$$\hat{F}_n(s) = \frac{z_n^2 - s^2}{p_n^2 - s^2} \quad (4.2.2)$$

où $z_n, p_n \in \mathbb{R}$, avec $z_n < 0$ et $p_n < 0$, ou par

$$\hat{F}_n(s) = \frac{(z_n^2 - s^2)(\bar{z}_n^2 - s^2)}{(p_n^2 - s^2)(\bar{p}_n^2 - s^2)} \quad (4.2.3)$$

où $z_n, p_n \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$, avec $\Re(z_n) < 0$ et $\Re(p_n) < 0$. L'objectif de la méthode est d'obtenir des approximations successives du facteur spectral \hat{R} de la forme $\prod_{n=1}^N \hat{R}_n$, où \hat{R}_n est le facteur spectral (réel) inversible de la densité spectrale \hat{F}_n et est donné par

$$\hat{R}_n(s) = \frac{z_n - s}{p_n - s} \quad (4.2.4)$$

si \hat{F}_n est définie par (4.2.2), ou par

$$\hat{R}_n(s) = \frac{(z_n - s)(\bar{z}_n - s)}{(p_n - s)(\bar{p}_n - s)} \quad (4.2.5)$$

si \hat{F}_n est définie par (4.2.3).

On remarque que dans les deux cas, le facteur \hat{R}_n est tel que $\hat{R}_n(\infty) = 1$. Les facteurs spectraux (4.2.4) et (4.2.5) sont appelés respectivement *facteur du premier ordre* et *facteur du second ordre*.

Cette méthode est motivée par le fait que, sous certaines hypothèses, la suite

$$\left(\prod_{n=1}^N \hat{R}_n \right)_{N \geq 1} \quad (4.2.6)$$

converge vers le facteur spectral standard inversible $\hat{R} \in \hat{\mathcal{A}}_-$ de \hat{F} au sens de la topologie induite par la norme $\|\cdot\|_{\hat{\mathcal{A}}(\sigma)}$ sur l'algèbre de Banach $\hat{\mathcal{A}}(\sigma)$ définie dans le premier chapitre. On écrira alors

$$\hat{R}(s) = \prod_{n=1}^{\infty} \hat{R}_n(s) = \lim_{N \rightarrow \infty} \prod_{n=1}^N \hat{R}_n(s).$$

De même, la suite

$$\left(\prod_{n=1}^N \hat{R}_n^{-1} \right)_{N \geq 1} \quad (4.2.7)$$

converge vers le facteur spectral inverse $\hat{R}^{-1} \in \hat{\mathcal{A}}_-$.

Remarque 1 : Il existe des résultats théoriques très généraux permettant de déterminer sous quelles hypothèses une densité spectrale coercive réelle peut s'écrire sous la forme (4.2.1) et la méthode de factorisation spectrale par extraction symétrique est convergente. Nous ne développerons pas ces résultats généraux ici, mais nous nous concentrerons sur des applications et des théorèmes de convergence plus spécifiques concernant les systèmes spectraux de Riesz dans la section suivante.

Remarque 2 : Les relations

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{|z_n - p_n|}{|\Re(p_n)|} < \infty$$

et

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{|z_n - p_n|}{|\Re(z_n)|} < \infty$$

sont deux des hypothèses permettant d'obtenir la convergence de la méthode, et peuvent être remplacées par les conditions

$$\frac{|z_n - p_n|}{|\Re(p_n)|} = O\left(\frac{1}{n^\alpha}\right)$$

et

$$\frac{|z_n - p_n|}{|\Re(z_n)|} = O\left(\frac{1}{n^\alpha}\right).$$

La vitesse de convergence des suites (4.2.6) et (4.2.7), quant à elle, dépend du paramètre α donné dans les deux dernières conditions. Plus ce dernier est grand, plus la convergence de la méthode sera rapide.

L'équation de la chaleur, par exemple, se prête parfaitement à la méthode de factorisation spectrale par extraction symétrique puisque les conditions sont vérifiées avec $\alpha = \infty$, permettant une convergence extrêmement rapide. Dès lors, les premiers termes de la suite fournissent déjà une estimation très acceptable du facteur spectral \hat{R} et de son inverse \hat{R}^{-1} .

Le principe de la méthode d'extraction symétrique consiste donc à extraire successivement les zéros et les pôles de la densité spectrale, ainsi que leurs symétriques par rapport à l'axe réel et à l'axe imaginaire. En pratique, afin d'améliorer la qualité des premières estimations, un algorithme d'extraction symétrique efficace commencera par sélectionner les racines et les pôles dominants, c'est-à-dire les racines et les pôles les plus proches de l'axe imaginaire. Ce raisonnement permettra d'atteindre plus rapidement une estimation convenable du facteur spectral et de son inverse en considérant le produit tronqué.

4.2.2 Résultats de convergence

Nous nous plaçons maintenant dans le cadre d'un espace de Hilbert séparable muni d'un produit interne $\langle \cdot, \cdot \rangle$.

Considérons un système de C_0 -semigroupe commandé à une entrée de la forme

$$\begin{cases} \dot{x}(t) &= Ax(t) + Bu(t) \\ y(t) &= Cx(t) \end{cases}$$

pour tout $t \geq 0$, avec condition initiale

$$x(0) = x_0,$$

où $x(t) \in H$, $u(t) \in \mathbb{R}$ et $y(t) \in \mathbb{R}^p$ pour tout $t \geq 0$, et

- (i) $A : D(A) \subset H \rightarrow H$ engendre le C_0 -semigroupe $(T(t))_{t \geq 0} \subset \mathcal{L}(H)$,
(ii) $B \in \mathcal{L}(\mathbb{R}, H)$ est un opérateur de contrôle linéaire borné donné par

$$Bu = bu \quad \text{pour tout } u \in \mathbb{R},$$

avec $b \in H$,

- (iii) $C \in \mathcal{L}(H, \mathbb{R}^p)$ est un opérateur de sortie linéaire borné.

Nous supposons également que A est un opérateur spectral de Riesz doté d'un spectre discret

$$\sigma(A) = \sigma_p(A) = \{\lambda_n : n \in \mathbb{N}_0\} \subset \mathbb{C}$$

constitué de valeurs propres simples vérifiant

$$\inf\{|\lambda_n - \lambda_m| : n, m \in \mathbb{N}_0, n \neq m\} > 0 \quad (4.2.8)$$

et

$$\sup \left\{ \sum_{\substack{l=1 \\ l \neq n}}^{\infty} \frac{1}{|\lambda_l - \lambda_n|^2} : n \in \mathbb{N}_0 \right\} < \infty. \quad (4.2.9)$$

Supposons finalement que (A, B) soit exponentiellement stabilisable et que (C, A) soit exponentiellement détectable.

Nous pouvons maintenant introduire les trois résultats suivants, qui sont d'une importance capitale dans le cadre de l'application de la méthode de factorisation spectrale par extraction symétrique aux systèmes spectraux de Riesz.

Lemme 7 (Callier *et al.*, 2005, Lemme 4.6)

Considérons le système de C_0 -semigroupe à une entrée décrit par

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t) \\ y(t) = Cx(t) \end{cases} \quad (4.2.10)$$

pour tout $t \geq 0$, avec condition initiale

$$x(0) = x_0,$$

où

- (i) $x(t) \in H$ pour tout $t \geq 0$, avec H un espace de Hilbert séparable muni d'un produit interne $\langle \cdot, \cdot \rangle : H \times H \rightarrow \mathbb{R}$,

- (ii) $u(t) \in \mathbb{R}$ pour tout $t \geq 0$,
- (iii) $y(t) \in \mathbb{R}^p$ pour tout $t \geq 0$,
- (iv) $A : D(A) \subset H \rightarrow H$ est le générateur du C_0 -semigroupe $(T(t))_{t \geq 0} \subset \mathcal{L}(H)$,
- (v) $B \in \mathcal{L}(\mathbb{R}, H)$ est un opérateur de contrôle linéaire borné donné par

$$Bu = bu \text{ pour tout } u \in \mathbb{R}, \text{ avec } b \in H,$$

- (vi) $C \in \mathcal{L}(H, \mathbb{R}^p)$ est un opérateur d'observation linéaire borné.
Soit $(\phi_n)_{n \in \mathbb{N}}$, une base de Riesz de vecteurs propres de A correspondant aux valeurs propres λ_n , et soit $(\psi_n)_{n \in \mathbb{N}}$, la base duale biorthogonale de vecteurs propres de l'opérateur adjoint A^* .
Considérons l'opérateur d'asservissement LQ -optimal $K_0 \in \mathcal{L}(H, \mathbb{R})$ donné par

$$K_0 x = \langle k_0, x \rangle \text{ pour tout } x \in H,$$

où $k_0 \in H$.

Alors le générateur de semigroupe avec asservissement

$$\begin{aligned} A_c &:= A + BK_0 \\ &= A + b \langle k_0, \cdot \rangle \end{aligned}$$

possède un spectre discret composé de valeurs propres λ_{cn} , $n \in \mathbb{N}$, i.e.

$$\sigma(A_c) = \sigma_p(A_c) = \{\lambda_{cn} : n \in \mathbb{N}\}.$$

De plus, les vecteurs propres correspondants forment une base de Riesz de H .

Enfin, pour n suffisamment grand,

$$|\lambda_{cn} - \lambda_n| = O(|\langle k_0, \phi_n \rangle \cdot \langle b, \psi_n \rangle|),$$

d'où

$$\sum_{n=1}^{\infty} |\lambda_{cn} - \lambda_n| < \infty.$$

Lemme 8 (Callier et al., 2005, Lemme 4.7)

Soit $\hat{G}(s) = C(sI - A)^{-1}B$, la fonction de transfert du système de C_0 -semigroupe décrit par (4.2.10).

Considérons la fraction à droite (sans zéros communs dans \mathcal{C}_+) de \hat{G} donnée par la paire

$$(\hat{\mathcal{N}}(s), \hat{\mathcal{D}}(s)) = (C(sI - A - BK)^{-1}B, 1 + K(sI - A - BK)^{-1}B), \quad (4.2.11)$$

où $K \in \mathbf{L}(H, \mathbb{R})$ est un opérateur d'asservissement stabilisant tel que

$$\sigma(A + BK) = (\sigma(A) \cap \overset{\circ}{\mathcal{C}}_{\sigma-}) \dot{\cup} \Sigma. \quad (4.2.12)$$

Considérons également la fonction réelle \hat{F} donnée par

$$\begin{aligned} \hat{F} &:= \hat{N}_* \hat{N} + \hat{D}_* \hat{D} \\ &= \hat{D}_* (1 + \hat{G}_* \hat{G}) \hat{D}. \end{aligned} \quad (4.2.13)$$

Alors \hat{F} est une densité spectrale coercive réelle, holomorphe dans une bande verticale S_δ pour un certain $\delta > 0$, et telle que

$$\hat{F}(\infty) = 1.$$

De plus, \hat{F} est une fonction méromorphe d'ordre fini $\rho \leq 2$ et peut être décrite comme une fraction de fonctions entières parahermitiennes réelles, i.e.

$$\hat{F}(s) = \frac{N(s)}{D(s)},$$

où les fonctions $D = D_*$ et $N = N_*$ sont des fonctions entières dont les ensembles de zéros, dénotés respectivement par $\mathcal{Z}[D]$ et $\mathcal{Z}[N]$, sont dénombrables. Avec $\mathcal{P}[\hat{F}]$, l'ensemble des pôles de \hat{F} , et $\sigma < 0$ tel que

$$\sigma(A) = (\sigma(A) \cap \overset{\circ}{\mathcal{C}}_{\sigma-}) \dot{\cup} (\sigma(A) \cap \mathcal{C}_+),$$

on a également que

$$\mathcal{Z}[D] = \mathcal{P}[\hat{F}] \subset \{p, -\bar{p} : p \in (\sigma(A) \cap \overset{\circ}{\mathcal{C}}_{\sigma-}) \dot{\cup} \Sigma\}$$

et

$$\mathcal{Z}[N] = \mathcal{Z}[\hat{F}] \subset \{z, -\bar{z} : z \in \sigma(A_c) = \sigma(A + BK_0)\}.$$

Théorème 5 (Callier et al., 2005, Théorème 4.8)

Considérons que les hypothèses du Lemme 7 soient vérifiées.

Considérons la densité spectrale coercive réelle \hat{F} donnée par (4.2.13), où la paire (\hat{N}, \hat{D}) donnée par (4.2.11) est la fraction à droite de la fonction de transfert \hat{G} pour un opérateur stabilisant tel que (4.2.12) soit vérifiée.

Alors la méthode de factorisation spectrale par extraction symétrique de la densité spectrale \hat{F} est convergente.

Ce résultat présente un intérêt particulier dans la mesure où il permet de déterminer rapidement si la méthode d'extraction symétrique peut être appliquée à une certaine classe de systèmes différentiels linéaires, sans devoir vérifier plusieurs hypothèses assez techniques et complexes.

Il est en revanche crucial de s'assurer que le système considéré entre bien dans le cadre des systèmes spectraux de Riesz et des systèmes de C_0 -semigroupes commandés, et vérifie les propriétés nécessaires à l'application de ces résultats.

4.2.3 Exemple

Remarquons que l'exemple développé dans la section 2.3 entre précisément dans ce cadre.

En effet, la densité spectrale \hat{f} est de la forme

$$\hat{f}(s) = \prod_{n=1}^{\infty} \hat{F}_n(s),$$

où $\hat{F}_n(s) = 1$ pour tout $n \geq 2$ et $\hat{F}_1 = \hat{f}$ est un facteur élémentaire du premier ordre donné par

$$\hat{F}_1(s) := \frac{z_1^2 - s^2}{p_1^2 - s^2} = \frac{a^2 - s^2}{b^2 - s^2},$$

donnant lieu à un zéro $z_1 := -a < 0$ et à un pôle $p_1 := -b < 0$.

Le facteur spectral inversible du premier ordre de cette densité spectrale rationnelle est donc tout naturellement donné par

$$\hat{r}(s) := \frac{z_n - s}{p_n - s} = \frac{-a - s}{-b - s} = \frac{a + s}{b + s}$$

et correspond au facteur spectral obtenu dans l'exemple.

4.3 Théorème d'application de la méthode de factorisation spectrale par extraction symétrique

Dans cette section, nous considérons l'espace de Hilbert $L^2(0, 1)$ et un système de Sturm-Liouville à une entrée de la forme

$$\begin{cases} \frac{\partial x}{\partial t}(z, t) &= Ax(z, t) + b(z)u(t) \\ y(t) &= Cx(z, t) \end{cases} \quad (4.3.1)$$

avec condition initiale

$$x(z, 0) = x_0(z) \quad (4.3.2)$$

pour tout $z \in [0, 1]$, où l'opérateur différentiel A est donné par (4.1.1), $b \in L^2(0, 1)$, $C \in \mathcal{L}(L^2(0, 1), \mathbb{R}^p)$, $u(t) \in \mathbb{R}$ et $x(\cdot, t) \in D(A)$ pour tout $t \geq 0$.

L'objectif visé ici est de démontrer que la méthode de factorisation spectrale par extraction symétrique peut être appliquée à cette classe de systèmes et est convergente. Nous énonçons donc le résultat central suivant.

Théorème 6 *Considérons un système de Sturm-Liouville décrit par (4.3.1)-(4.3.2), où l'opérateur A est donné par (4.1.1).*

Supposons que (C, A) soit détectable.

Soit \hat{F} , la densité spectrale donnée par (4.2.13), où la paire (\hat{N}, \hat{D}) est définie par (4.2.11).

Alors, la méthode de factorisation spectrale par extraction symétrique appliquée à la densité spectrale \hat{F} est convergente.

Preuve :

Avant de pouvoir appliquer le théorème de convergence de la méthode, il est nécessaire de s'assurer que l'opérateur de Sturm-Liouville étudié vérifie les hypothèses préliminaires décrites dans la section précédente et entre bien dans le cadre de cette analyse. La preuve s'effectue donc en deux étapes : nous montrons d'abord que ces hypothèses sont vérifiées, et nous prouvons ensuite que la méthode de factorisation spectrale par extraction symétrique est convergente.

1) Puisque A est un opérateur de Sturm-Liouville, par le Théorème 4, A est également un opérateur spectral de Riesz défini de manière dense dans $L^2(a, b)$.

Nous en déduisons que l'opérateur A est le générateur d'un C_0 -semigroupe $(T(t))_{t \geq 0} \subset \mathcal{L}(L^2(0, 1))$.

De plus, il a été signalé précédemment que le spectre de A est composé de valeurs propres simples réelles de la forme

$$\lambda_n = -\frac{s_n^2 + v^2}{4D} - k < -\left(\frac{v^2}{4D} + k\right) < 0,$$

où $\{s_n, n \geq 1\}$ est l'ensemble des solutions de l'équation

$$\tan\left(\frac{s}{2D}\right) = \frac{2vs}{s^2 - v^2}, \quad s > 0, \quad (4.3.3)$$

tel que $0 < s_n < s_{n+1}$ pour tout $n \geq 1$.

Puisque toutes les valeurs propres sont strictement négatives, le système décrit par (4.3.1)-(4.3.2) est exponentiellement stable, et la paire (A, B) est donc stabilisable.

Pour démontrer que l'opérateur A vérifie les autres hypothèses, nous prouvons au préalable que

$$|s_n - 2(n-1)D\pi| \rightarrow 0 \text{ quand } n \rightarrow \infty. \quad (4.3.4)$$

Commençons par poser

$$f(a) := \tan\left(\frac{a}{2D}\right), \quad a \geq 0,$$

et considérons $n \in \mathbb{N}_0$ quelconque, ainsi que l'intervalle $(2(n-1)D\pi, s_n)$.

Par le Théorème des Accroissements Finis, il existe un réel $c_n \in (2(n-1)D\pi, s_n)$ tel que

$$f'(c_n) = \frac{f(s_n) - f(2(n-1)D\pi)}{s_n - 2(n-1)D\pi},$$

ce qui implique ici que

$$\frac{1}{2D \cos^2\left(\frac{c_n}{2D}\right)} = \frac{\tan\left(\frac{s_n}{2D}\right) - \tan((n-1)\pi)}{s_n - 2(n-1)D\pi}.$$

Nous en déduisons que

$$s_n - 2(n-1)D\pi = 2D \tan\left(\frac{s_n}{2D}\right) \cos^2\left(\frac{c_n}{2D}\right).$$

Le dernier facteur étant borné, la convergence de la suite vers 0 dépend uniquement de la convergence de $\tan\left(\frac{s_n}{2D}\right)$.

Or, puisque s_n est solution de l'équation (4.3.3), nous avons que

$$\tan\left(\frac{s_n}{2D}\right) = \frac{2vs_n}{s_n^2 - v^2} \rightarrow 0$$

puisque $s_n \rightarrow \infty$. Par conséquent, la propriété (4.3.4) est vérifiée.

Montrons maintenant que les relations (4.2.8) et (4.2.9) sont vérifiées.

Observons pour cela que l'écart entre deux valeurs propres distinctes dépend uniquement du carré des s_n . En effet, avec $m, n \in \mathbb{N}$, $m \neq n$, nous avons que

$$\begin{aligned} |\lambda_n - \lambda_m| &= \left| -\frac{s_n^2 + v^2}{4D} - k - \left(-\frac{s_m^2 + v^2}{4D} - k \right) \right| \\ &= \frac{1}{4D} |s_m^2 - s_n^2|. \end{aligned}$$

Or, les s_n sont tous distincts et il a été démontré précédemment que ces derniers se rapprochent asymptotiquement des $2(n-1)D\pi$. Nous voyons alors immédiatement que

$$\inf\{|s_n^2 - s_m^2| : n, m \in \mathbb{N}, n \neq m\} > 0$$

et donc que

$$\inf\{|\lambda_n - \lambda_m| : n, m \in \mathbb{N}, n \neq m\} > 0.$$

Nous nous intéressons maintenant à la série (4.2.9). Grâce à la relation (4.3.4), nous voyons que les propriétés de convergence de cette dernière seront similaires à celles de

$$S_n := \sum_{\substack{l=1 \\ l \neq n}}^{\infty} \frac{1}{[4(n-1)^2 D^2 \pi^2 - 4(l-1)^2 D^2 \pi^2]^2}.$$

Si $n = 1$, la série se réduit à

$$\begin{aligned} S_n &= \sum_{l=2}^{\infty} \frac{1}{[4(l-1)^2 D^2 \pi^2]^2} \\ &= \frac{1}{16D^4 \pi^4} \sum_{l=1}^{\infty} \frac{1}{l^4} \\ &= \frac{1}{16D^4 \pi^4} \frac{\pi^4}{90} \\ &= \frac{1}{1440D^4}. \end{aligned}$$

Considérons maintenant le cas où $n \geq 2$. Une simple mise en évidence montre que

$$S_n = \frac{1}{16D^4 \pi^4} \sum_{\substack{l=1 \\ l \neq n}}^{\infty} \frac{1}{(n-l)^2 (n+l-2)^2}.$$

Par ailleurs, puisque $l, n \in \mathbb{N}$ et $l \neq n$, nous voyons immédiatement que $n - l \geq 1$ et, par conséquent,

$$\begin{aligned}
 S_n &\leq \frac{1}{16D^4\pi^4} \sum_{\substack{l=1 \\ l \neq n}}^{\infty} \frac{1}{(n+l-2)^2} \\
 &= \frac{1}{16D^4\pi^4} \sum_{\substack{l=1 \\ l \neq n}}^{\infty} \frac{1}{l^2 + (n-2)^2 + 2l(n-2)} \\
 &\leq \frac{1}{16D^4\pi^4} \sum_{\substack{l=1 \\ l \neq n}}^{\infty} \frac{1}{l^2} \\
 &= \frac{1}{16D^4\pi^4} \sum_{l=1}^{\infty} \frac{1}{l^2} \\
 &= \frac{1}{16D^4\pi^4} \frac{\pi^2}{6} \\
 &= \frac{1}{96D^4\pi^2}.
 \end{aligned}$$

Donc, pour $n \in \mathbb{N}_0$ quelconque, la série S_n est convergente et

$$S_n \leq \frac{1}{96D^4\pi^2}.$$

Puisque cette dernière constante ne dépend pas de n , nous avons bien que

$$\sup \left\{ \sum_{\substack{l=1 \\ l \neq n}}^{\infty} \frac{1}{|\lambda_l - \lambda_n|^2} : n \in \mathbb{N} \right\} < \infty$$

et toutes les propriétés préliminaires sont vérifiées.

2) Puisque tout système de Sturm-Liouville est un système spectral de Riesz, nous voyons immédiatement que toutes les hypothèses du Lemme 7 sont vérifiées, et l'on en déduit que la méthode de factorisation spectrale par extraction symétrique de la densité spectrale \hat{F} donnée par (4.2.13) est convergente pour la classe de systèmes de Sturm-Liouville étudiée dans ce chapitre.

□

La figure suivante illustre le comportement asymptotique des réels s_n intervenant dans les valeurs propres de l'opérateur A pour des paramètres normalisés. Nous remarquons que la différence entre les valeurs propres et leurs estimations de la forme $2nD\pi$ converge assez rapidement vers 0.

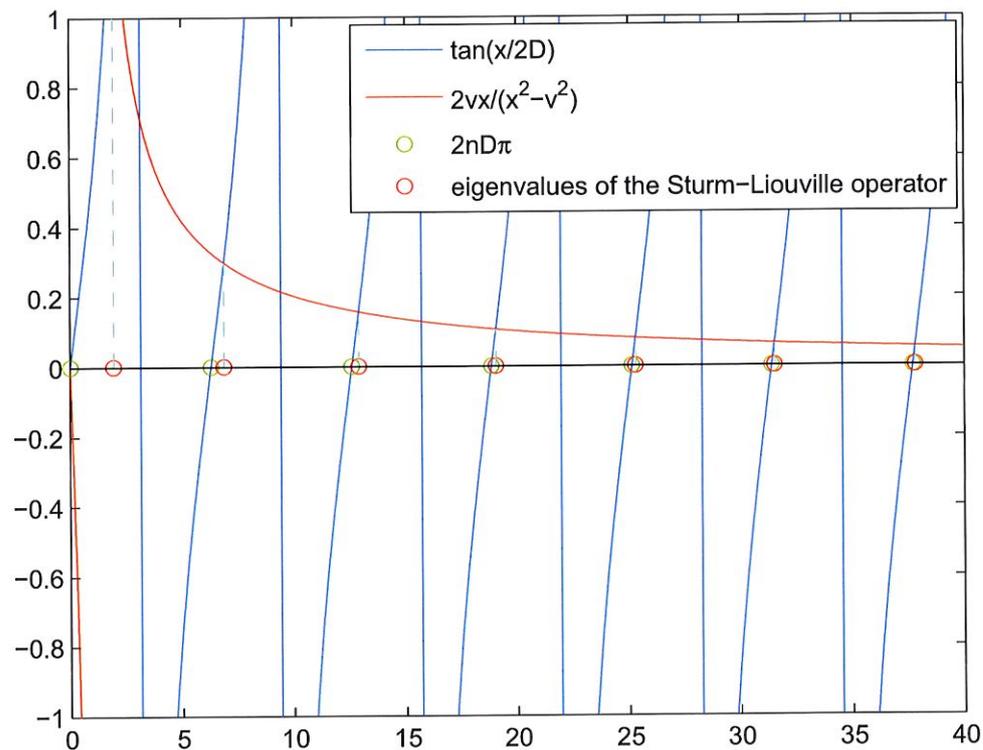


FIG. 4.1 – Comportement asymptotique des valeurs propres de l'opérateur de Sturm-Liouville, avec $D = v = k = 1$

Remarque 1 : La relation (4.3.4) signifie que les réels s_n se rapprochent asymptotiquement des racines de l'équation

$$\tan\left(\frac{s}{2D}\right) = 0,$$

et que les valeurs propres de l'opérateur A se rapprochent asymptotiquement des valeurs propres de l'opérateur

$$A_2x = D\frac{d^2x}{dz^2} - kx,$$

c'est-à-dire l'opérateur A avec $v = 0$.

Remarque 2 : Remarquons que la stabilisabilité et la détectabilité des systèmes étudiés ici pourrait être vérifiée très facilement grâce au Lemme 5. En effet, puisque nous nous trouvons dans le cas d'un système de Sturm-Liouville à une entrée, nous avons que $Bu = bu$, et la condition à vérifier se réduit à

$$\langle b, \psi_n \rangle \neq 0.$$

Cependant, puisque toutes les valeurs propres de l'opérateur A sont strictement négatives, le système est exponentiellement stable, et par conséquent exponentiellement stabilisable, et il n'est donc pas nécessaire d'utiliser le critère du lemme.

Remarque 3 : Nous déduisons également du Lemme 7 que la résolution du problème de contrôle LQ-optimal associé au système (possible via la factorisation spectrale de la densité spectrale \hat{F} et la résolution de l'équation diophantienne présentée dans le premier chapitre) donne lieu à un asservissement d'état K_0 tel que le générateur de C_0 -semigroupe avec asservissement

$$A_c := A + BK_0 = A + \langle k_0, \cdot \rangle$$

possède un spectre discret de valeurs propres, ainsi qu'un ensemble de vecteurs propres associés formant une base de Riesz de $L^2(0, 1)$. De plus, les valeurs propres du système en boucle fermée se rapprochent asymptotiquement de celles du système en boucle ouverte et

$$\sum_{n=1}^{\infty} |\lambda_{cn} - \lambda_n| < \infty.$$

Remarque 4 : Puisque le système est exponentiellement stable, la paire (4.2.11) peut être choisie comme

$$(\hat{N}, \hat{D}) := (\hat{G}, 1).$$

Le Théorème 6 est donc valable en particulier pour la densité spectrale donnée par

$$\hat{F} = 1 + \hat{G}_* \hat{G}.$$

4.4 Calcul de la densité spectrale

Nous nous intéressons maintenant à un système à entrée et sortie scalaires de la forme

$$\begin{cases} \frac{\partial x}{\partial t}(z, t) &= D \frac{\partial^2 x}{\partial z^2}(z, t) - v \frac{\partial x}{\partial z}(z, t) - kx(z, t) + u(t) \\ y(t) &= \int_0^1 x(z, t) dz \end{cases} \quad (4.4.1)$$

avec condition initiale

$$x(z, 0) = 0 \quad (4.4.2)$$

pour tout $z \in [0, 1]$, où $x(\cdot, t) \in D(A)$ pour tout $t \geq 0$.

L'objectif est de calculer la fonction de transfert du système, $\hat{g}(s)$, afin de déterminer la densité spectrale à factoriser. Pour cela, calculons la transformée de Laplace de l'équation aux dérivées partielles décrivant la dynamique de (4.4.1). Nous obtenons que

$$s\hat{x}(z, s) - x(z, 0) = D \frac{\partial^2 \hat{x}}{\partial z^2}(z, s) - v \frac{\partial \hat{x}}{\partial z}(z, s) - k\hat{x}(z, s) + \hat{u}(s) \quad (4.4.3)$$

pour tout $z \in [0, 1]$.

Considérons $s \in \mathbb{C}$ fixé. Afin d'alléger l'écriture des équations, nous noterons

$$\hat{x}(z) := \hat{x}(z, s)$$

et nous considérerons \hat{x} comme une fonction d'une variable réelle.

En tenant compte de la condition initiale (4.4.2), l'équation (4.4.3) devient une équation différentielle linéaire à coefficients constants complexes de la forme

$$D \frac{d^2 \hat{x}}{dz^2} - v \frac{d\hat{x}}{dz} - (k + s)\hat{x} = -\hat{u}(s).$$

Commençons par considérer l'équation homogène associée

$$D \frac{d^2 \hat{x}}{dz^2} - v \frac{d\hat{x}}{dz} - (k + s)\hat{x} = 0$$

dont l'équation caractéristique est

$$D\lambda^2 - v\lambda - (k + s) = 0.$$

Le réalisant (complexe) de cette équation est donné par

$$\Delta = v^2 + 4D(k + s)$$

et, avec $s := a + ib$, celui-ci s'écrit

$$\Delta = v^2 + 4D(a + k) + i4Db.$$

Cherchons maintenant les racines complexes de Δ sous la forme $x + iy$. Ces dernières vérifient les conditions

$$\begin{cases} (x + iy)^2 = \Delta \\ |x + iy|^2 = |\Delta| \end{cases}$$

qui sont équivalentes aux équations

$$x^2 - y^2 = v^2 + 4D(a + k), \quad (4.4.4)$$

$$2xy = 4Db, \quad (4.4.5)$$

$$x^2 + y^2 = \sqrt{v^4 + 16D^2(a + k)^2 + 8v^2D(a + k) + 16D^2b^2}. \quad (4.4.6)$$

La sommation des équations (4.4.4) et (4.4.6) montre que

$$x^2 = \frac{1}{2} \left[v^2 + 4D(a + k) + \sqrt{v^4 + 16D^2(a + k)^2 + 8v^2D(a + k) + 16D^2b^2} \right]$$

et donc que

$$x = \pm \frac{\sqrt{2}}{2} \sqrt{v^2 + 4D(a + k) + \sqrt{v^4 + 16D^2(a + k)^2 + 8v^2D(a + k) + 16D^2b^2}}.$$

Par ailleurs,

$$y^2 = \frac{1}{2} \left[-v^2 - 4D(a + k) + \sqrt{v^4 + 16D^2(a + k)^2 + 8v^2D(a + k) + 16D^2b^2} \right]$$

et donc

$$y = \pm \frac{\sqrt{2}}{2} \sqrt{-v^2 - 4D(a + k) + \sqrt{v^4 + 16D^2(a + k)^2 + 8v^2D(a + k) + 16D^2b^2}}.$$

L'équation (4.4.5) montre alors que le signe de x et de y dépend du signe de b . Plus précisément, en considérant x et y comme les racines positives, les deux racines du réalisant Δ sont

$$\begin{aligned} r_1 &= x + i \operatorname{sgn}(b)y, \\ r_2 &= -x - i \operatorname{sgn}(b)y. \end{aligned}$$

Les racines de l'équation caractéristique sont, quant à elles, données par

$$\begin{aligned}\lambda_1 &= \frac{v + x + i \operatorname{sgn}(b)y}{2D}, \\ \lambda_2 &= \frac{v - x - i \operatorname{sgn}(b)y}{2D}.\end{aligned}$$

La solution de l'équation homogène est donc de la forme

$$\hat{x}_H(z) = c_1 e^{\lambda_1 z} + c_2 e^{\lambda_2 z},$$

où $c_1, c_2 \in \mathbb{C}$.

Déterminons maintenant une solution particulière de l'équation différentielle. Puisque le second membre, $-\hat{u}(s)$, est une constante par rapport à z , nous voyons immédiatement qu'une solution particulière est donnée par

$$\hat{x}_P(z) = \frac{\hat{u}(s)}{k+s} \text{ si } s \neq -k$$

et

$$\hat{x}_P(z) = \frac{\hat{u}(s)}{v} z \text{ si } s = -k.$$

Considérons la première situation ($s \neq -k$).

La solution générale de l'équation différentielle est donc de la forme

$$\hat{x}(z) = c_1 e^{\lambda_1 z} + c_2 e^{\lambda_2 z} + \frac{\hat{u}(s)}{k+s},$$

où $c_1, c_2 \in \mathbb{C}$.

Utilisons maintenant les conditions aux bords du domaine $D(A)$ pour déterminer les constantes c_1 et c_2 . Ces conditions sont

$$D \frac{d\hat{x}}{dz}(0) - v\hat{x}(0) = 0 = \frac{d\hat{x}}{dz}(1),$$

qui s'écrivent ici

$$\begin{cases} c_1 \lambda_1 e^{\lambda_1} + c_2 \lambda_2 e^{\lambda_2} & = 0 \\ D(c_1 \lambda_1 + c_2 \lambda_2) - v \left(c_1 + c_2 + \frac{\hat{u}(s)}{k+s} \right) & = 0. \end{cases}$$

Trouver les constantes c_1 et c_2 revient donc à résoudre le système de deux équations linéaires à coefficients complexes

$$\begin{cases} \lambda_1 e^{\lambda_1} c_1 + \lambda_2 e^{\lambda_2} c_2 & = 0 \\ (D\lambda_1 - v)c_1 + (D\lambda_2 - v)c_2 & = \frac{v\hat{u}(s)}{k+s}. \end{cases}$$

Nous déduisons de la première équation que

$$c_2 = -\frac{\lambda_1 e^{\lambda_1}}{\lambda_2 e^{\lambda_2}} c_1. \quad (4.4.7)$$

En substituant dans la deuxième équation, nous obtenons alors que

$$(D\lambda_1 - v)c_1 - \frac{\lambda_1 e^{\lambda_1}(D\lambda_2 - v)}{\lambda_2 e^{\lambda_2}} c_1 = \frac{v\hat{u}(s)}{k+s},$$

ou encore

$$\frac{\lambda_2 e^{\lambda_2}(D\lambda_1 - v) - \lambda_1 e^{\lambda_1}(D\lambda_2 - v)}{\lambda_2 e^{\lambda_2}} c_1 = \frac{v\hat{u}(s)}{k+s}.$$

Finalement, nous obtenons que

$$c_1 = \frac{v\lambda_2 e^{\lambda_2}}{\lambda_2 e^{\lambda_2}(D\lambda_1 - v) - \lambda_1 e^{\lambda_1}(D\lambda_2 - v)} \frac{\hat{u}(s)}{k+s}$$

et, par (4.4.7),

$$c_2 = -\frac{v\lambda_1 e^{\lambda_1}}{\lambda_2 e^{\lambda_2}(D\lambda_1 - v) - \lambda_1 e^{\lambda_1}(D\lambda_2 - v)} \frac{\hat{u}(s)}{k+s}.$$

Notons

$$k_1(s) := \frac{v\lambda_2 e^{\lambda_2}}{\lambda_2 e^{\lambda_2}(D\lambda_1 - v) - \lambda_1 e^{\lambda_1}(D\lambda_2 - v)}$$

et

$$k_2(s) := -\frac{v\lambda_1 e^{\lambda_1}}{\lambda_2 e^{\lambda_2}(D\lambda_1 - v) - \lambda_1 e^{\lambda_1}(D\lambda_2 - v)}.$$

Avec ces notations, la solution générale devient finalement

$$\hat{x}(z) = (k_1(s)e^{\lambda_1 z} + k_2(s)e^{\lambda_2 z} + 1) \frac{\hat{u}(s)}{k+s}. \quad (4.4.8)$$

Par ailleurs, puisque

$$y(t) = \int_0^1 x(z, t) dz,$$

nous voyons immédiatement que

$$\hat{y}(s) = \int_0^1 \hat{x}(z, s) dz.$$

Par (4.4.8), nous obtenons alors que

$$\begin{aligned}
\hat{y}(s) &= \int_0^1 (k_1(s)e^{\lambda_1 z} + k_2(s)e^{\lambda_2 z} + 1) \frac{\hat{u}(s)}{k+s} dz \\
&= \frac{\hat{u}(s)}{k+s} \left[\frac{k_1(s)}{\lambda_1} e^{\lambda_1 z} + \frac{k_2(s)}{\lambda_2} e^{\lambda_2 z} + z \right]_0^1 \\
&= \frac{\hat{u}(s)}{k+s} \left(\frac{k_1(s)e^{\lambda_1}}{\lambda_1} + \frac{k_2(s)e^{\lambda_2}}{\lambda_2} + 1 - \frac{k_1(s)}{\lambda_1} - \frac{k_2(s)}{\lambda_2} \right) \\
&= \frac{\hat{u}(s)}{k+s} \frac{k_1(s)\lambda_2 e^{\lambda_1} + k_2(s)\lambda_1 e^{\lambda_2} + \lambda_1 \lambda_2 - k_1(s)\lambda_2 - k_2(s)\lambda_1}{\lambda_1 \lambda_2} \\
&= \hat{u}(s) \frac{k_1(s)\lambda_2(e^{\lambda_1} - 1) + k_2(s)\lambda_1(e^{\lambda_2} - 1) + \lambda_1 \lambda_2}{\lambda_1 \lambda_2(k+s)}.
\end{aligned}$$

Puisque $\hat{g}(s) = \hat{y}(s)/\hat{u}(s)$, nous obtenons finalement que

$$\hat{g}(s) = \frac{k_1(s)\lambda_2(e^{\lambda_1} - 1) + k_2(s)\lambda_1(e^{\lambda_2} - 1) + \lambda_1 \lambda_2}{\lambda_1 \lambda_2(k+s)}.$$

Il est également possible d'écrire la fonction de transfert du système sous la forme d'une somme de série. En effet, avec $u \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, nous obtenons que

$$\begin{aligned}
\hat{g}(s)u &= C(sI - A)^{-1}Bu \\
&= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{s - \lambda_n} \langle Bu, \psi_n \rangle C\phi_n \\
&= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{s - \lambda_n} \int_0^1 u\psi_n(z)dz \int_0^1 \phi_n(z)dz,
\end{aligned}$$

où $\{\phi_n\}_{n=1}^{\infty}$ et $\{\psi_n\}_{n=1}^{\infty}$ sont respectivement la base de Riesz de vecteurs propres de A et la base de Riesz biorthonormée.

L'expression de ϕ_n et de ψ_n donnée par (4.1.2) et (4.1.3) montre alors que

$$\begin{aligned}
\hat{g}(s) &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{s - \lambda_n} \int_0^1 K_n e^{-\frac{v}{2D}z} \left[\cos\left(\frac{s_n}{2D}z\right) + \frac{v}{s_n} \sin\left(\frac{s_n}{2D}z\right) \right] dz \\
&\quad \cdot \int_0^1 K_n e^{\frac{v}{2D}z} \left[\cos\left(\frac{s_n}{2D}z\right) + \frac{v}{s_n} \sin\left(\frac{s_n}{2D}z\right) \right] dz.
\end{aligned}$$

Remarque : La paire (\hat{g}, \hat{R}) forme une fraction à droite de la fonction de

transfert du système en boucle fermée obtenu par l'application de l'asservissement d'état optimal K_0 . Puisque \hat{g} et \hat{R} sont des fonctions scalaires, cette fonction de transfert est donc donnée par

$$\hat{g}_{cl}(s) = C(sI - A - BK_0)^{-1}B = \frac{\hat{g}(s)}{\hat{R}(s)}.$$

L'étape suivante consiste habituellement à trouver un asservissement d'état K de façon à pouvoir écrire la fonction de transfert sous la forme $\hat{g} = \hat{N}\hat{D}^{-1}$, où

$$(\hat{N}(s), \hat{D}(s)) := (C(sI - A - BK)^{-1}B, 1 + K(sI - A - BK)^{-1}B).$$

En pratique, cela revient à éliminer les pôles instables du dénominateur en multipliant (et en divisant simultanément) la fonction de transfert par des termes de la forme $(s - \lambda_i)$, où les λ_i sont les pôles instables, et à introduire un nombre équivalent (en tenant compte des multiplicités) de pôles stables via une division au numérateur et au dénominateur.

Plus formellement, si $\{\lambda_i\}_{i=1}^r$ est l'ensemble (fini) des pôles instables, où les λ_i peuvent être répétés plusieurs fois en fonction de leur multiplicité, l'objectif est d'écrire la fonction de transfert comme

$$\hat{g}(s) = \frac{\hat{n}(s)}{\hat{d}(s)} \quad (4.4.9)$$

$$= \frac{\hat{n}(s) \prod_{i=1}^r (s - \lambda_i)}{\hat{d}(s) \prod_{i=1}^r (s - \lambda_i)} \quad (4.4.10)$$

$$= \frac{\hat{n}(s)}{\hat{d}_s(s) \prod_{i=1}^r (s - \lambda_i)} \quad (4.4.11)$$

$$= \frac{\hat{n}(s)}{\hat{d}_s(s) \prod_{i=1}^r (s - \mu_i)} \frac{\prod_{i=1}^r (s - \lambda_i)}{\prod_{i=1}^r (s - \mu_i)}, \quad (4.4.12)$$

où \hat{d}_s dénote la partie stable du dénominateur et $\{\mu_i\}_{i=1}^r \subset \mathbb{C}$ est un ensemble arbitraire de nombres complexes tels que $\Re(\mu_i) < 0$ pour tout $1 \leq i \leq r$.

Remarquons que les étapes (4.4.9)-(4.4.11) correspondent à l'élimination des pôles instables du numérateur, alors que l'étape (4.4.12) correspond à l'insertion de pôles stables supplémentaires afin d'obtenir le caractère propre (respectivement, strictement propre) du dénominateur (respectivement, du numérateur).

Cette écriture permet d'obtenir une fraction à droite de la fonction de transfert de la forme

$$\begin{aligned} (\hat{N}(s), \hat{D}(s)) &= (\hat{g}(s)\hat{D}(s), \hat{D}(s)) \\ &= (\hat{g}(s) \prod_{i=1}^r (s - \lambda_i) \prod_{i=1}^r (s - \mu_i)^{-1}, \prod_{i=1}^r (s - \lambda_i) \prod_{i=1}^r (s - \mu_i)^{-1}), \end{aligned}$$

où \hat{N} est strictement propre et stable, et \hat{D} est une fonction rationnelle propre stable telle que

$$\lim_{|s| \rightarrow \infty} \hat{D}(s) = 1.$$

Ce développement permet également de visualiser très facilement le résultat de l'application de l'asservissement d'état stabilisant qui élimine les pôles instables λ_i en les remplaçant par les pôles stables μ_i .

Remarque : Le choix des pôles stables μ_i détermine entièrement l'asservissement d'état stabilisant K .

Dans le cas qui nous préoccupe ici, le système est exponentiellement stable et la fonction de transfert ne possède donc aucun pôle instable. Nous pouvons alors choisir l'asservissement d'état stabilisant $K = 0$, donnant lieu à la fraction à droite

$$(\hat{N}(s), \hat{D}(s)) := (C(sI - A)^{-1}B, 1) = (\hat{g}(s), 1).$$

Nous pouvons dès lors calculer la densité spectrale \hat{F} , qui s'écrira ici

$$\hat{F} := 1 + \hat{g}_* \hat{g}.$$

Remarquons que, par le Lemme 8, la densité spectrale \hat{F} peut être écrite sous la forme d'une fraction de fonctions réelles parahermitiennes entières, i.e.

$$\hat{F}(s) = \frac{N(s)}{D(s)},$$

où les zéros de D sont des valeurs propres du système en boucle ouverte ou leurs opposés, i.e.

$$\mathcal{Z}[D] = \mathcal{P}[\hat{F}] \subset \{\lambda_n\}_{n=1}^{\infty} \cup \{-\lambda_n\}_{n=1}^{\infty}.$$

Les fonctions N et D sont ici données par

$$N(s) := n(-s)n(s) + d(-s)d(s)$$

et

$$D(s) := d(-s)d(s),$$

où les fonctions entières n et d sont respectivement le numérateur et le dénominateur de la fonction de transfert. En notant $\rho(s) := \rho = v^2 + 4D(k + s)$, ceux-ci sont donnés par

$$\begin{aligned} d(s) &:= \frac{\rho(s) + v^2}{\sqrt{-\rho}} \sin\left(\frac{\sqrt{-\rho}}{2D}\right) + 2v \cos\left(\frac{\sqrt{-\rho}}{2D}\right) \\ &= \frac{\rho(s) + v^2}{\sqrt{\rho}} \sinh\left(\frac{\sqrt{\rho}}{2D}\right) + 2v \cosh\left(\frac{\sqrt{\rho}}{2D}\right) \end{aligned}$$

et

$$n(s) := \hat{g}(s)d(s).$$

On remarque que les zéros de d sont les valeurs propres du système en boucle ouverte.

Le Théorème 6, conjointement avec le calcul de la densité spectrale effectué dans cette section, offre une perspective pour la résolution du problème de contrôle LQ-optimal pour tout système de Sturm-Liouville de la forme (4.4.1)-(4.4.2).

Grâce à ce résultat, nous savons que l'implémentation d'un algorithme de factorisation spectrale par extraction symétrique donnera lieu à une méthode convergente, et fournira une estimation du facteur spectral intervenant dans la résolution de l'équation diophantienne (2.2.9) en dimension infinie.

4.5 Tests numériques

Dans les sections précédentes, nous avons montré que la méthode de factorisation spectrale par extraction symétrique est convergente pour la classe de systèmes étudiée. Nous effectuons maintenant quelques tests numériques afin d'illustrer cette convergence. La méthode implémentée génère le facteur spectral estimé, ainsi que son inverse, et nous comparons graphiquement la densité spectrale réelle et le produit tronqué des facteurs spectraux élémentaires sur l'axe imaginaire.

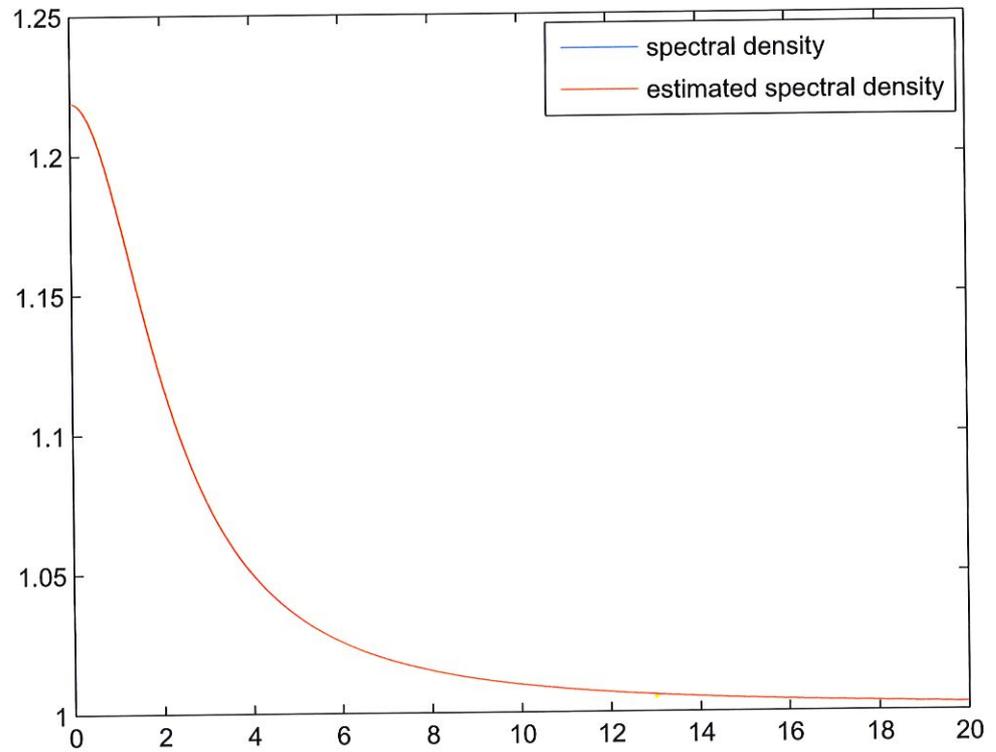


FIG. 4.1 – Comparaison entre les densités spectrales réelle et estimée sur l'axe imaginaire avec $D = v = k = 1$ et $N = 4$

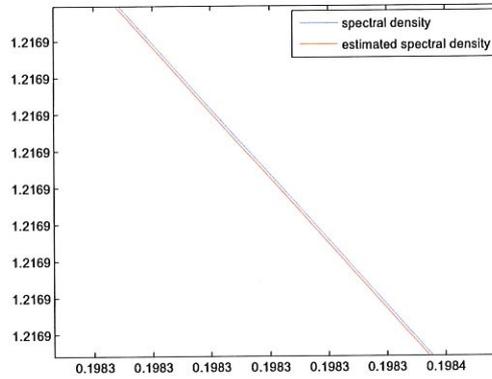


FIG. 4.2 – Comparaison entre les densités spectrales réelle et estimée sur l'axe imaginaire avec $D = v = k = 1$ et $N = 4$

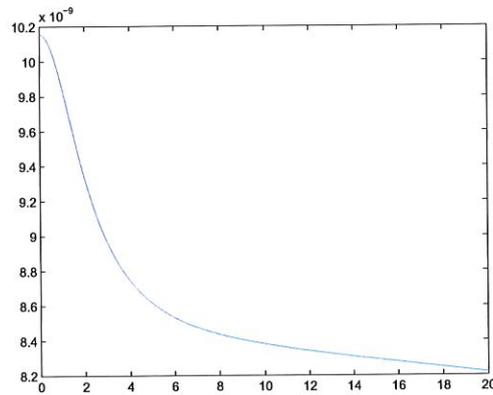


FIG. 4.3 – Erreur absolue sur l'estimation

Comme nous pouvons le constater, la méthode produit des résultats intéressants, malgré le fait que seuls les quatre premiers facteurs spectraux élémentaires (correspondant aux zéros et aux pôles dominants) ont été utilisés.

Les densités spectrales réelle et estimée sont extrêmement proches, mettant en évidence une convergence très rapide pour cette classe de systèmes.

Conclusion

Comme nous l'avons vu au cours de ce travail, le problème de factorisation spectrale et la méthode de factorisation spectrale par extraction symétrique offrent des alternatives très intéressantes pour la résolution de problèmes de contrôle divers. Cette méthode s'intègre parfaitement dans le cadre des systèmes spectraux de Riesz et des systèmes de Sturm-Liouville. En revanche, comme nous l'avons signalé, il est au préalable nécessaire d'établir la convergence de la méthode pour une certaine classe de systèmes avant de pouvoir implémenter avec succès un algorithme fournissant une estimation de la solution du problème de factorisation spectrale avec une précision donnée.

Nous avons d'abord rappelé un résultat montrant sous quelles conditions le problème de factorisation spectrale admet une solution inversible. Nous avons ensuite synthétisé les relations entre la résolution du problème de factorisation spectrale et celle du problème de contrôle linéaire-quadratique optimal en dimension finie. Nous avons notamment étudié la manière dont le calcul d'un facteur spectral inversible, pour une densité spectrale associée à un système différentiel linéaire donné, permet de trouver l'asservissement d'état optimal recherché sans passer par la résolution de l'équation algébrique de Riccati.

Plusieurs classes de systèmes différentiels linéaires en dimension infinie ont à leur tour été introduites. En particulier, nous nous sommes intéressés aux systèmes de Sturm-Liouville. Nous avons signalé que ces derniers étaient des systèmes spectraux de Riesz, pour lesquels des résultats de convergence cruciaux de la méthode de factorisation spectrale par extraction symétrique ont été établis au préalable.

Le résultat principal de ce travail est le Théorème 6 présenté dans le chapitre 4. Celui-ci montre que la méthode de factorisation spectrale par extraction symétrique est convergente et peut être implémentée pour une certaine classe de systèmes à paramètres répartis modélisant des réacteurs biochimiques tubulaires à dispersion axiale.

Ce travail peut également servir de base à une étude approfondie de la résolution du problème de contrôle linéaire-quadratique optimal associé à de tels systèmes. Conjointement avec les résultats présentés dans le chapitre 2, ce théorème suggère en effet l'utilisation de la méthode de factorisation spectrale par extraction symétrique dans le cadre de la résolution de ce problème de contrôle et donne une ouverture pour sa résolution numérique.

Chapitre 5

Annexes

5.1 Définitions

Définition 14 Un ensemble totalement déconnecté est un ensemble X tel que

$$\forall a, b \in X, \exists x \in [a, b] : x \notin X.$$

Définition 15 Soit X , un espace vectoriel.

Un isomorphisme de Banach sur X est une application $A : X \rightarrow X$ telle que $A \in \mathcal{L}(X)$ et $A^{-1} \in \mathcal{L}(X)$.

Définition 16 Deux produits internes $\langle \cdot, \cdot \rangle_1$ et $\langle \cdot, \cdot \rangle_2$ définis sur un espace vectoriel X sont dits topologiquement équivalents s'ils engendrent des normes équivalentes, i.e. s'il existe des constantes c_1 et c_2 strictement positives telles que, pour tout $x \in X$,

$$c_1 \langle x, x \rangle_2 \leq \langle x, x \rangle_1 \leq c_2 \langle x, x \rangle_2.$$

Définition 17 Soit X , un espace métrique muni du produit interne $\langle \cdot, \cdot \rangle$, et $\{\phi_n\}_{n=1}^\infty \subset X$.

Un ensemble $\{\psi_n\}_{n=1}^\infty \subset X$ est dit biorthonormé par rapport à $\{\phi_n\}_{n=1}^\infty$ si, pour tout $k, l \in \mathbb{N}_0$,

$$\langle \phi_k, \psi_l \rangle = \delta_{kl},$$

où δ_{ij} est le symbole de Kronecker.

Définition 18 Une fonction f est dite méromorphe (dans \mathcal{C}) s'il existe un ensemble dénombrable $S \subset \mathcal{C}$ tel que S ne possède pas de point d'accumulation, f est holomorphe dans S^c , et f possède un pôle à chaque point de S .

Définition 19 [Ordre d'une fonction méromorphe]

Considérons une fonction méromorphe f ne possédant pas de pôle en $s = 0$, et définissons les fonctions

$$N(r, f) := \int_0^r \frac{n(t, f)}{t} dt,$$

où $n(t, f)$ est le nombre de pôles de f (en tenant compte de leur multiplicité) dans le disque fermé $\{s \in \mathcal{C} : |s| \leq t\}$, et

$$m(r, f) := \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \log^+ |f(re^{j\theta})| d\theta,$$

où $\log^+(x) := \max\{0, \log x\}$ et l'on suppose que f ne possède pas de pôles sur le cercle $\{s \in \mathcal{C} : |s| = r\}$.

Définissons également la fonction caractéristique de f , qui est donnée par

$$T(r) := T(r, f) := m(r, f) + N(r, f).$$

L'ordre de f est défini comme l'ordre de sa fonction caractéristique, i.e.

$$\rho := \limsup_{r \rightarrow \infty} \frac{\log T(r)}{\log r}.$$

5.2 Lemmes et théorèmes préliminaires

Lemme 9 [Principe de réflexion de Schwarz] (Hille, Théorème 7.7.1)

Soient D_1 et D_2 des domaines simplement connexes vérifiant

$$D_1 \cap D_2 = \emptyset$$

et

$$\overline{D_1} \cap \overline{D_2} \equiv \gamma$$

où γ est un arc lisse simple rectifiable tel que chaque point de $\text{Int}(\gamma)$ admette un voisinage dans

$$D := D_1 \cup \text{Int}(\gamma) \cup D_2.$$

Soient $f_1(z)$ et $f_2(z)$ deux fonctions d'une variable complexe holomorphes respectivement dans D_1 et dans D_2 , et continues respectivement dans $D_1 \cup \gamma$ et dans $D_2 \cup \gamma$.

Supposons que, pour tout point ξ sur γ , l'on ait

$$\lim_{\substack{z \rightarrow \xi \\ z \in D_1}} f_1(z) = \lim_{\substack{z \rightarrow \xi \\ z \in D_2}} f_2(z) \equiv h(\xi).$$

Alors, il existe une fonction $f(z)$, holomorphe dans D , telle que

$$f(z) = f_1(z) \quad \text{pour tout } z \in D_1$$

et

$$f(z) = f_2(z) \quad \text{pour tout } z \in D_2.$$

Lemme 10 (Curtain et Zwart, 1995, Théorème A.3.46)

Soient X et Y deux espaces de Banach, et soit un opérateur linéaire

$$T : D(T) \subset X \rightarrow Y.$$

Si T est inversible avec $T^{-1} \in \mathcal{L}(Y, X)$, alors T est un opérateur linéaire fermé.

Lemme 11 (Curtain et Zwart, 1995, Lemme A.4.19)

Soit A un opérateur linéaire fermé tel que $0 \in \rho(A)$, et A^{-1} est compact.

Alors le spectre de A est composé de valeurs propres isolées de multiplicité finie.

5.3 Codes MATLAB

```

%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
%
% RESOLVENT EQUATION Y=0 %
%
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%

function y=resolvent(x,D,v);

y=tan(x/(2*D))-(2*v*x)/(x^2-v^2);

%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
%
% ASYMPTOTIC BEHAVIOUR OF THE EIGENVALUES %
% OF THE STURM-LIOUVILLE OPERATOR WITH %
% NORMALIZED PARAMETERS %
%
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%

clc;

```

```

clear all;

% PARAMETERS

D = 1;
v = 1;
k = 1;

% PLOT

x = 0:0.01:40;

y = 0:2*D*pi:12*D*pi;
X0 = y(2)/4;
z(1) = FZERO(@(x) resolvent(x,D,v),X0);

for i=2:7
z(i) = FZERO(@(x) resolvent(x,D,v),y(i));
end

plot(x,tan(x/(2*D)));
axis([0,40,-1,1]);

hold on;

plot(x,(2*v*x)./(x.^2-v^2),'r');

hold on;

plot(y,zeros(1,7),'go');

hold on;

plot(z,zeros(1,7),'ro');

hold on;

for i=1:7
plot([z(i),z(i)+0.000001],[0,tan(z(i)/(2*D))],'c--');
end

```

```

plot(0:0.01:40,0,'k');

legend('tan(x/2D)', '2vx/(x^2-v^2)', '2nD\pi', ...
'eigenvalues of the Sturm-Liouville operator');
set(h,'Interpreter','none');

%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
%                               %
% TRANSFER FUNCTION           %
%                               %
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%

function z = ghat(s,D,v,k)

a = real(s);
b = imag(s);

if (b == 0)
    for n = 1:length(b)
        sgn(n) = 1;
    end
else
    sgn = sign(b);
end

% ROOTS OF THE CHARACTERISTIC EQUATION

x = (sqrt(2)/2)*sqrt(...
v^2+4*D*(a+k)+sqrt(v^4+16*D^2*(a+k).^2+8*v^2*D*(a+k)+16*D^2*b.^2));
y = (sqrt(2)/2)*sqrt(...
-(v^2)-4*D*(a+k)+sqrt(v^4+16*D^2*(a+k).^2+8*v^2*D*(a+k)+16*D^2*b.^2));

l1 = (v+x+i*sgn.*y)/(2*D);
l2 = (v-x-i*sgn.*y)/(2*D);

% TRANSFER FUNCTION

k1 = (v*l2.*exp(l2))./(l2.*exp(l2).*(D*l1-v)-l1.*exp(l1).*(D*l2-v));
k2 = -(v*l1.*exp(l1))./(l2.*exp(l2).*(D*l1-v)-l1.*exp(l1).*(D*l2-v));

```

```
z = (1./(k+s)).*(((k1.*exp(l1))./l1)+(k2.*exp(l2))./l2)-(k1./l1)-(k2./l2)+1);
```

```
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%  
%                               %  
% SPECTRAL DENSITY %  
%                               %  
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
```

```
function x = fhat(s,D,v,k)
```

```
x = real(1+conj(ghat(-conj(s),D,v,k)).*ghat(s,D,v,k));
```

```
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%  
%                               %  
% SPECTRAL FACTORISATION BY SYMMETRIC EXTRACTION : %  
% COMPARISON BETWEEN THE SPECTRAL DENSITY OF A STURM-LIOUVILLE SYSTEM %  
% AND ITS ESTIMATION BASED ON A PRODUCT OF ELEMENTARY SPECTRAL FACTORS %  
%                               %  
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
```

```
clc;
```

```
clear all;
```

```
% SETTING THE PARAMETERS
```

```
D = input('Set the axial dispersion coefficient :')
```

```
v = input('Set the fluid superficial velocity :')
```

```
k = input('Set the kinetic constant :')
```

```
N = input(...
```

```
'Set the number of elementary spectral factors used in the product :');
```

```
c1 = 1e-3;
```

```
c2 = 1e-6;
```

```
% DOMAIN
```

```
omega = 0:0.01:20;
```

```
% SOLUTIONS OF THE RESOLVENT EQUATION
```

```

y = 0:2*D*pi:2*(N-1)*D*pi;

X0 = pi/4;
sn(1) = FZERO(@(x) resolvent(x,D,v),X0);
for n=2:N
sn(n) = FZERO(@(x) resolvent(x,D,v),y(n));
end

% POLES OF THE SPECTRAL DENSITY

p = -((sn.^2+v^2)/(4*D))-k;

% SEARCH FOR THE ZEROS OF THE SPECTRAL DENSITY

for n=1:N

x = p(n)-c1;

if (fhat(x,D,v,k) < 1)

X0 = [p(n)-c2,p(n)-1];

else

X0 = [p(n)+c2,p(n)+1];

end

z(n) = fzero(@(x) fhat(x,D,v,k),X0);

end

% PRODUCT OF THE ELEMENTARY SPECTRAL FACTORS

restim = 1;

for n = 1:N
restim = restim.*(z(n)-i*omega)./(p(n)-i*omega);
end

```

```

% ESTIMATED SPECTRAL DENSITY

specdensestim = abs(restim).^2;

% SPECTRAL DENSITY VS ESTIMATED PRODUCT OF THE ELEMENTARY
% SPECTRAL FACTORS

plot(omega,fhat(i*omega,D,v,k));

hold on;

plot(omega,specdensestim,'r');

legend('spectral density','estimated spectral density');
set(h,'Interpreter','none');

% ERROR

error = abs(fhat(i*omega,D,v,k)-specdensestim);

figure;

plot(omega,error);

```

Bibliographie

- [1] Curtain, R. F. et Zwart, H.J., *An Introduction to Infinite-Dimensional Linear Systems Theory*, New York : Springer-Verlag, 1995.
- [2] Sagan, H., *Boundary and Eigenvalue problems in mathematical physics*, New York : Wiley, 1961.
- [3] Naylor, A. W. et Sell, G. R., *Linear Operator Theory in Engineering and Science*, New York : Springer, 2000.
- [4] Hille, E., *Analytic Function Theory*, vol. 1, Boston : Ginn and Company, 1959.
- [5] Callier, F. M. et Winkin, J., *Spectral Factorization and LQ-optimal Regulation for Multivariable Distributed Systems*, Internat. J. Control, 1990, vol. 52, n° 1, pp. 55-75.
- [6] Callier, F. M. et Winkin, J., *LQ-optimal control of infinite-dimensional systems by spectral factorization*, Automatica J. IFAC, 1992, vol. 28, n° 4, pp. 757-770.
- [7] Winkin, J. *et al.* *Spectral factorization by symmetric extraction for distributed parameter systems*, Siam J. Control Optim., 2005, vol. 43, n° 4, pp. 1435-1466.
- [8] Callier, F. M., *On polynomial Matrix Spectral Factorization by Symmetric Extraction*, IEEE Transactions on automatic control, 1985, vol. 30, n° 5, pp. 453-464.
- [9] Winkin, J., Dochain, D. et Ligarius, P., *Dynamical analysis of distributed parameter tubular reactors*, Automatica J. IFAC, 2000, vol. 36, n° 3, pp. 349-361.
- [10] Delattre, C., Dochain, D. et Winkin, J., *Sturm-Liouville systems are Riesz-spectral systems*, Int. J. Appl. Math. Comput. Sci., 2003, vol. 13, n° 4, pp. 481-484.

- [11] Gohberg, I. C. et Krein, M. G., *Introduction to the Theory of Linear Nonselfadjoint Operators in Hilbert Space*, Providence, Rhode Island : AMS Bookstore, 1969.
- [12] Gohberg, I. C. et Krein, M. G., AMS Transl., vol. 2, 1960.