MASTER EN SCIENCES MATHÉMATIQUES

Difficultés d'apprentissage et d'enseignement de la dérivée : quelques repères épistémologiques et didactiques

Colot, Emmanuelle

Award date:
2001

FUNDP
Faculté des Sciences
Département de Mathématique

Rempart de la Vierge, 8
B – 5000 NAMUR (Belgique)

Difficultés d'apprentissage et d'enseignement de la dérivée : quelques repères épistémologiques et didactiques.

Mémoire présenté pour l'obtention
du grade de
Licencié en Sciences Mathématiques
par

Colot Emmanuelle &
Corbu Anne-Catherine

Promotrices :
M. Schneider &
S. Thiry

Résumé

Dans ce mémoire nous nous intéressons aux difficultés d'apprentissage et d'enseignement associées au concept de dérivée. Une première difficulté apparaît pour associer la dérivée au taux de variation instantané. D'autres obstacles sont de type épistémologique et semblent persister à travers les siècles. Pour cette raison nous examinons premièrement quelques aspects historiques en rapport avec la dérivée. Deuxièmement, nous essayons de comprendre comment ces obstacles sont habituellement surmontés aujourd'hui. Pour ce faire, nous analysons quelques cahiers d'élèves ainsi que deux manuels scolaires.

Abstract

In this paper we are concerned with learning and teaching difficulties associated with the concept of derivative. One difficulty arises when defining the derivative as an instantaneous rate of change. Other obstacles are of epistemological kind and seem to persist through centuries. For this reason we first investigate some historical aspects connected with the derivative. Secondly we try to understand how these obstacles are practically overcome today. To do this we analyse some pupils' notes as well as two schoolbooks.

À Madame Maggy Schneider, à Madame Suzanne Thiry, pour nous avoir suivies, conseillées et guidées semaine après semaine,

Aux élèves de première candidature en Biologie, pour avoir accepté de répondre à notre enquête,

À Monsieur Emmanuel Clipp, pour sa réponse à une interview,

À Aurélie, Damien, Gilles, Laurent, Rosalie, Philippe, Virginie, Xavier, pour nous avoir gentiment prêté leur cours de Mathématiques,

À Monsieur Daniel Rousselet, Pauline, Laurence, Sébastien, pour avoir accepté de se soumettre à une résolution d'équation différentielle,

À Emmanuelle… à Anne-Catherine, pour la complicité et l'aide mutuelle,

La liste ne s'arrête pas là, nous ne pouvons pas citer tous ceux qui ont su participer, d'une manière ou d'une autre à l'élaboration de ce travail. Que ce soit pour vos encouragements ou pour l'ambiance que vous avez créée autour de nous, nous ne vous oublions pas,

À vous tous,

Nous disons simplement, mais très sincèrement :

Merci

Table des matières

Introduction.

Vous pourrez remarquer que dans ce mémoire se trouvent deux introductions ainsi que deux conclusions. Ceci repose sur un souhait de nos promotrices Mesdames Schneider et Thiry.

Introduction vue par Anne-Catherine.

Un mémoire en didactique : pour quelle raison ?
Ce choix plutôt qu'un autre provient de mon attrait pour l'enseignement. Ce sujet à caractère didactique m'a plu car il représentait pour moi en temps que « future » enseignante une première approche du métier.

Ce sujet concernant la dérivée nous a été proposé par M. Schneider et S. Thiry. Celles-ci se sont en effet aperçues, au cours d'expériences, qu'un des gros problèmes des élèves du secondaire, des étudiants du supérieur et des personnes qui dans la pratique de leur profession utilisent la dérivée, était de ne pas percevoir le taux de variation instantané au sein du concept de la dérivée. Nous aurions aimé voir subsister dans l'esprit des étudiants, en ce qui concerne la dérivée, un concept qui explique les taux de variation, concept qui s'exprime par la limite du rapport de deux accroissements. Mais nous sommes encore loin de ces résultats. L'optique de ce mémoire est de confirmer ce fait. Nous le ferons par le biais d'enquêtes que nous avons réalisées auprès des étudiants de première candidature en biologie. Nous tenterons également une expérience similaire auprès de personnes diplômées en biologie et en sciences pharmaceutiques. Après cela, nous essayerons de déterminer l'origine de cette lacune. Pour cela nous questionnerons différents cahiers d'élèves ainsi que deux manuels scolaires qui nous semblent être représentatifs des documents habituellement utilisés dans les classes.

De nombreux domaines font appel à la notion de dérivée comme outil ; ils nous semblaient intéressant de réfléchir à la manière dont celle-ci était enseignée afin de comprendre pourquoi il n'en reste rien ou presque quelques années plus tard dans l'esprit de la plupart des élèves ayant reçu cet enseignement. Il est vrai en effet que l'utilisation du concept de dérivée a une ampleur beaucoup plus importante qu'on ne pourrait l'imaginer. Son utilisation ne se limite pas uniquement à celle d'un simple cours de mathématique mais est nécessaire dans de nombreux domaines scientifiques comme nous pourrons le voir dans ce travail.

Comme pour toute approche d'un travail de recherche, il est intéressant de connaître les origines lointaines du sujet et peut-être de se rendre compte que ce qui pose problème actuellement l'a peut-être déjà posé avant. Au sujet de la mise en place de la notion de dérivée, il nous semblait utile d'être conscientes des difficultés rencontrées par les mathématiciens, de l'Antiquité jusqu'à nos jours, pour mieux comprendre celles que nos étudiants vivent encore aujourd'hui.

Les mathématiciens au point de départ sont partis de leurs intuitions. Nous remarquerons que les difficultés rencontrées par ceux-ci et les étudiants sont du même type. Ces difficultés forment les *obstacles épistémologiques* : ils surviennent quand les notions mathématiques sont trop éloignées de l'univers familier de l'individu ou de sa perception intuitive. Ce fait, nous le verrons est complexe et peu aisé à cerner.

Introduction vue par Emmanuelle.

La notion de dérivée n'étant pas issue de l'expérience sensible, son élaboration fut longue et suscita pas mal de difficultés avant d'être définie. Pensons par exemple à la notion de vitesse instantanée qui n'est pas évidente, qui posait déjà problème durant l'Antiquité et en pose toujours aujourd'hui.
Notre travail, comprenant trois parties, s'intéresse à deux types de problèmes liés à cette notion, à savoir: les obstacles épistémologiques et la difficulté à associer dérivée et taux de variation instantané.

Notre première partie intitulée « Analyse historique et difficultés épistémologiques » contient trois chapitres: le premier donne quelques étapes du développement du concept de la dérivée afin que dans le deuxième chapitre on puisse cibler et développer les différents obstacles épistémologiques ressentis aussi bien par les élèves que par les anciens mathématiciens. Une fois ces obstacles débusqués, nous pourrons établir une grille d'analyse en vue d'une étude des pratiques actuelles de l'enseignement de la dérivée. Cette grille sera constituée de questions qui tenteront de cibler si dans l'enseignement de la dérivée ces obstacles sont franchis ou contournés.

Notez que les première et deuxième parties de ce travail ont pour but de soulever des questions et hypothèses qui seront alors étudiées et vérifiées dans la troisième partie intitulée «Pratiques actuelles d'enseignement » .

Notre deuxième partie intitulée « Que doit-on espérer d'un futur utilisateur de la dérivée ? » repose sur l'hypothèse selon laquelle : « il est probable qu'un élève qui sort de l'enseignement secondaire n'ait pas une représentation assez riche du concept de dérivée pour aborder efficacement un cours de mathématiques générales tel que ceux qu'on dispense dans les candidatures en sciences. En particulier, si l'élève a associé dérivée et pente de tangente, il pense rarement au taux de variation instantané pourtant incontournable dans la plupart des applications des dérivées ».
Dans un premier temps, nous citerons une liste de problèmes où la dérivée devrait être utilisée sans que le mot dérivée y apparaisse. Nous présenterons un tableau de divers noms que porte la dérivée dans des situations concrètes.
Dans un second temps, nous nous proposerons de réaliser une enquête auprès d'élèves de première candidature en biologie au début de l'année académique afin de constater si pour eux la dérivée est associée à taux de variation instantané. Ensuite une seconde enquête réalisée entre autres auprès d'universitaires diplômés, permettra d'analyser la véracité de l'hypothèse selon laquelle les étudiants éprouvent des difficultés à recontextualiser la dérivée, cette notion de recontextualisation ainsi que celles de contextualisation et décontextualisation seront définies au cours de cette deuxième partie. Mais nous entendons par « difficulté à recontextualiser », le fait que les étudiants se trouvant face à un énoncé ne présentant pas le mot dérivée mais qui en nécessiterait l'utilisation ont du mal à voir qu'il faut y avoir recours.

Dans la troisième partie apparaîtront d'une part les résultats de ces deux enquêtes et d'autre part, on étudiera comment la notion de dérivée est enseignée dans le secondaire, comment les obstacles relevés dans la première partie sont franchis ou contournés et cela sur base de cours d'élèves du secondaire et de deux manuels :

- « Espace Math 54 » (A.ADAM et F. LOUSBERG,[14]), très proche des pratiques des enseignants.
- « Vers l'infini pas à pas, manuel pour l'élève. »(Groupe AHA,[10]) moins classique, présentant des situations problèmes et étant en partie construit pour favoriser le franchissement d'obstacles.

Partie I :

Analyse historique

et

difficultés épistémologiques

1.1 Flashs historiques

Le calcul infinitésimal trouve sa source dans les problèmes d'évaluation d'aires et de volumes traités dès l'Antiquité par les mathématiciens grecs, mais c'est le $17^{\text{ème}}$ siècle qui le voit prendre son essor et son autonomie. Ses concepts de base (limite, dérivée, et intégrale), dont certains n'ont été définis rigoureusement qu'au $19^{\text{ème}}$ siècle, sont enseignés désormais à tous les élèves ayant reçu un enseignement de type général ou technique.

Nous pensons qu'une approche historique du concept de dérivée permet de mieux le comprendre, éventuellement de mieux l'enseigner.
Il nous paraît important de savoir comment ces idées et ces théories, que les mathématiciens manipulent maintenant de façon courante, sont nées; de quels problèmes elles sont issues ; quelles ont été les étapes de leur élaboration ; quels problèmes logiques elles ont posés. En effet, la facilité d'application des règles de calcul est dans une certaine mesure responsable du fait que les utilisateurs de la dérivée deviennent insensibles aux subtilités délicates requises dans le développement logique de cette discipline.

Dans cette partie historique, nous nous sommes basées sur deux ouvrages : *« The History of the Calculus and its Conceptual Development »* de Carl B. Boyer (Boyer, [1]) et *« Aux origines du calcul infinitésimal »* du cercle d'histoire des sciences IREM de Basse-Normandie (IREM de Basse-Normandie, [2]). Nous avons également utilisé un article de Judith

Grabiner : « *The changing concept of change : The derivative from Fermat to Weierstrass* » (Grabiner, [3]).
Judith Grabiner a distingué quatre étapes dans le développement du concept de dérivée : la dérivée fut d'abord utilisée, puis découverte, elle fut alors explorée et développée et finalement définie. Notre partie historique se base sur ces étapes, mais Judith Grabiner quant à elle ne commence son étude qu'à partir de Fermat, c'est à dire au 17ème siècle.
Et comme les périodes précédant Fermat nous paraissent avoir également joué un rôle, nous avons un peu développé la conception de la dérivée dans l'Antiquité ainsi que les contributions médiévales.

1.1.1 Conception de la dérivée dans l'Antiquité (-3000 à +476)

Aristote (-384 à -322), conformément à une opinion largement acceptée en ce temps-là, regarde les mathématiques comme un modèle du monde connu à travers les sens. Des concepts purement formels comme ceux des infinitésimaux et de la vitesse instantanée ne sont pas élaborés dans la physique aristotélicienne ni dans la géométrie euclidienne car ils ne sont pas sensoriellement perceptibles (la vitesse instantanée en effet fait appel à la considération d'un intervalle de temps de plus en plus petit tendant vers zéro).
Déjà bien avant que Kepler (1571 à 1630), Fermat (1601 à 1665), Liebniz (1646 à 1716), Newton (1642 à 1727) rendent possible le concept de dérivée et d'intégrale, Archimède de Syracuse (-287 à –212), que l'on peut considérer comme le plus grand mathématicien de l'Antiquité, ressentait les premières intuitions qui mèneront aux prémisses de ces concepts.
En fait, les méthodes et problèmes d'Archimède ont fournit une motivation pour le développement de tels concepts.

1.1.2 Contributions médiévales (476 à 1453).

Richard Suiseth (au environ de l'an 1300) s'intéresse aux concepts physiques de mouvement et de variabilité. Il introduit en mathématique la notion de quantités variables et de dérivées.
Suiseth utilise le mot fluxion, définissant un taux de variation. Ce terme sera employé par Newton à peu près trois cents ans plus tard.

Le travail de Suiseth a certainement influencé Oresme (1323 à 1382). Oresme associe les variations à un diagramme géométrique. Par exemple, une ligne horizontale (longitude) peut

représenter le temps et, la hauteur verticale (latitude), la distance. Les termes longitude et latitude sont utilisés par Oresme pour représenter ce que nous appelons maintenant l'abscisse et l'ordonnée.
Bien qu'Aristote ait nié l'existence d'une vitesse instantanée (voir 1.1.1.) cette notion a continué d'être invoquée implicitement, par les géomètres grecs. Oresme est apparemment le premier à représenter le taux de variation instantané par une ligne droite (fig.1). Il fait également remarquer que pour une forme représentée graphiquement par un demi-cercle, le taux de variation est plus petit au point extremum.

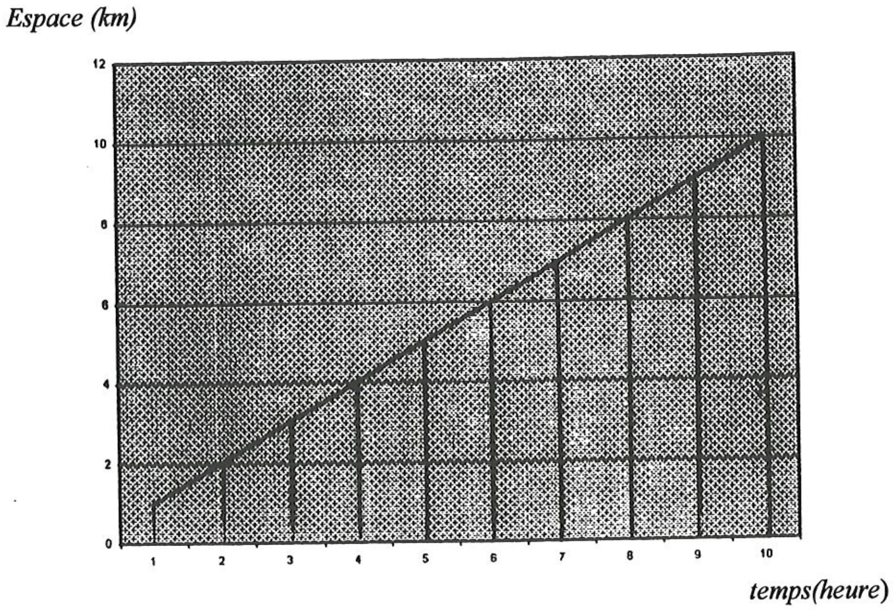


fig.1

1.1.3 La « dérivée » est utilisée.

D'après Judith Grabiner (ib.), c'est dans la méthode de Fermat (1601 à 1665) datant de 1630 que la dérivée est utilisée pour la première fois. Cette méthode permet de résoudre à la fois des problèmes de tangentes et d'extrema. Auparavant, pour résoudre des problèmes d'optimisation, on devait procéder par tâtonnement numérique. C'est ainsi que Kepler (1571 à 1630) analyse de nombreux problèmes sur les maxima et minima. Il montre parmi d'autres choses que de tout parallélépipède droit inscrit dans une sphère et ayant une base carrée, le cube est le plus volumineux. Ces résultats sont obtenus en établissant des tables contenant la liste des volumes pour des ensembles de valeurs de dimensions données afin de sélectionner les meilleures proportions.

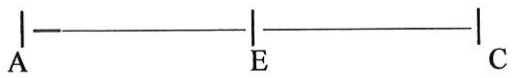
Comme nous venons de le mentionner, Judith Grabiner voit dans les ouvrages de Fermat la première utilisation de la dérivée. Mais est-ce si évident que cela ?
Essayons de comprendre.

Premièrement, nous allons regarder le texte original de la méthode de Fermat permettant de trouver d'une part les minima et maxima et d'autre part la tangente à une courbe.
Deuxièmement, nous observerons en quoi la première utilisation de la dérivée peut être attribuée à Fermat.

1.1.3.1 Textes de Fermat (Fermat, [5]) :

Problème d'optimisation

Soit à partager la droite AC *en* E, *en sorte que* AE×EC *soit maximum.*



Posons AC = b *;*
soit a *un des segments,*
l'autre sera $b-a$,
et le produit dont ont doit trouver le maximum : $ba-a^2$.
Soit maintenant $a+e$ *le premier segment de* b,
le second sera $b-a-e$,
et le produit des segments : $ba-a^2+be-2ae-e^2$ *;*

il doit être adégalé au précédent : $ba-a^2$;
supprimant les termes communs : $be \sim 2ae+e^2$;
divisant tous les termes : $b \sim 2a+e$;
Supprimez e *:* $b = 2a$.
Pour résoudre le problème il faut donc prendre la moitié de b.
Il est impossible de donner une méthode plus générale.

Tangente à une courbe

Nous ramenons à la méthode précédente l'invention des tangentes en des points donnés à des courbes quelconques.
Soit données, par exemple, la parabole BDN (fig.2), *de sommet* D, *de diamètre* DC *; soit donné sur elle le point* B, *par lequel il faut mener la droite* BE *tangente à la parabole et rencontrant le diamètre en* E.

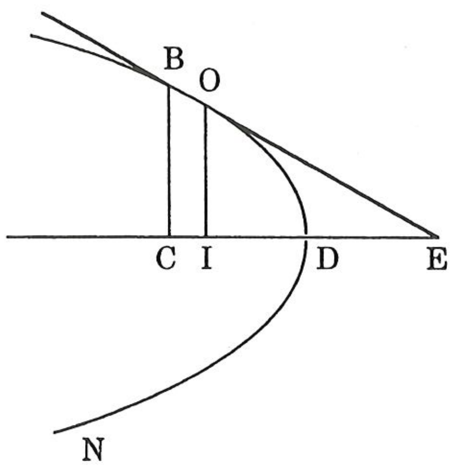


fig. 2

si l'on prend sur la droite BE *un point quelconque* O, *dont on mène l'ordonnée* OI, *en même temps que l'ordonnée* BC *du point* B, *on aura :*

$$\frac{CD}{DI} > \frac{(BC)^2}{(OI)^2}$$, *puisque le* O *est extérieur à la parabole.*

Mais

$$\frac{(BC)^2}{(OI)^2} = \frac{(CE)^2}{(IE)^2}$$,*à cause de la similitude des triangles.*

donc

$$\frac{CD}{DI} > \frac{(CE)^2}{(IE)^2}.$$

Or le point B *est donné, donc l'ordonnée* BC, *donc le point* C, *donc* CD.
Soit donc CD=d, *donnée.*
Posons CE=a *et* CI=e *;*
On aura

$$\frac{d}{d-e} > \frac{a^2}{a^2+e^2-2ae}$$

faisons le produit des moyens et des extrêmes,

$$da^2 + de^2 - 2dae > da^2 - a^2e.$$

Adégalons, donc, d'après la méthode précédente ; on aura, en retranchant les termes communs :

$$de^2 - 2dae \sim -a^2e,$$

ou ce qui revient au même :

$$de^2 + a^2e \sim 2dae.$$

Diviser tous les termes par e :

$$de + a^2 \sim 2da.$$

Supprimer de *; il reste :*

$$a^2 = 2da,$$

Donc :

$$a = 2d.$$

nous prouvons ainsi que CE *est double de* CD, *ce qui est conforme à la vérité.*
Cette méthode ne trompe jamais. [...]

1.1.3.2 Fermat peut-il être vu comme le premier utilisateur de la dérivée ?

Nous allons observer si les « ingrédients » qui font que l'on se trouve face à une dérivée sont présents, à savoir : idée de variation, limite de quotients différentiels, infinitésimaux,...

Les textes d'Euclide, de Barrow, de Roberval et d'Appolonius de Perge ainsi que la description de Barrow par Kline sont issus du mémoire d'Isabelle SAELENS (I.SAELENS, [4]).

a) Présence d'une idée de variation chez Fermat ?

Si on compare l'énoncé de Fermat : « on donne un segment et on demande de le diviser en deux parties de telle façon que le produit des parties soit maximal », à l'énoncé que propose Euclide (voir ci-dessous), bien que ces deux problèmes soient semblables, il n'y a que chez Fermat où il apparaît clairement que l'on se trouve face à un problème d'optimisation. En effet, l'idée de variation apparaît dans l'énoncé de Fermat par l'intermédiaire du mot « maximum », il n'en est pas de même pour la proposition d'Euclide.

Proposition 5 du Livre II des Eléments d'Euclide.

« Si on partage une ligne droite (segment AB) *en deux segments égaux* (AC et CB) *d'une part et inégaux* (AD et DB) *d'autre part, le rectangle contenu par les segments inégaux ajouté au carré sur la ligne droite entre les points de section* (C et D) *est égal au carré sur la moitié. »*

Par soucis de clarté, nous avons ajouté ce qui se trouve entre parenthèse.
La figure ci-dessous (fig. 3) est fournie par Euclide, ce qui selon nous justifie le fait qu'il ne se sent pas obligé par exemple d'exprimer que la longueur du segment CB est égale à celle du segment BF.

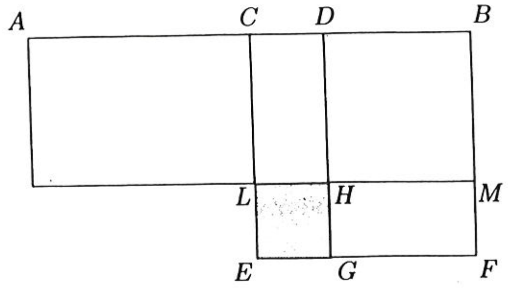


fig. 3

Cependant, aussi étonnant que cela puisse paraître à première vue, ce problème d'Euclide est le même que celui de Fermat. En effet, avec les notations de la figure (fig.3), l'énoncé d'Euclide signifie que

rectangle (AD, DB) + carré (CD) = carré (CB)

et donc que

rectangle (AD, DB) < carré (CB).

Cette situation est identique au problème posé par Fermat. Ici on est également amené à trouver la plus grande aire obtenue par le produit de deux parties formant un segment. Cette plus grande aire est dans ce cas-ci le carré(CB) obtenu en divisant le segment AB en son milieu.

Notons de plus que la méthode de Fermat est algébrisée de manière à rendre parfaitement compte d'une variation. En effet, Fermat adopte la lettre a pour désigner une variable et la lettre e pour désigner un incrément de cette variable.

On peut donc donner une première raison pour laquelle Judith Grabiner aurait pu attribuer l'utilisation de la dérivée à Fermat à savoir le fait que ce dernier fait apparaître l'idée de variation.

b) Présence d'une idée de limite et d'infinitésimaux chez Fermat ?

Remarquons que l'écriture fonctionnelle classique n'apparaît pas dans l'un ou l'autre des deux problèmes posés par Fermat. Cependant, une idée de fonction serait peut-être plus présente dans le problème d'optimisation par le biais de $a(b-a)$, alors que dans le problème de la tangente à une courbe, il semble plus difficile d'y trouver une fonction.

Nous pensons pouvoir observer une idée de limite et d'infinitésimaux dans les textes de Fermat à travers sa suppression de termes (les incréments de variables *a* désignés par la lettre *e*). Cependant, Fermat ne parle pas d'infiniment petit ou de passage à la limite, il n'explique pas comment on peut d'abord manipuler *e* comme s'il était différent de zéro, et tout de suite après comme s'il valait zéro. Mais Fermat a conscience d'avoir découvert une méthode générale qui permet de résoudre des problèmes d'extrémés.

Nous attirons l'attention sur le fait qu'obtenir une réponse correcte par une suppression de termes lors du passage à la limite a posé un problème dans l'histoire et pose encore problème aux étudiants d'aujourd'hui. Pour plus d'explication à ce sujet, consultez nos sections 1.2.1.2. et 1.2.3.

Si Judith Grabiner dit que la première utilisation de la dérivée apparaît chez Fermat, c'est peut-être par comparaison avec d'autres méthodes de détermination de tangentes - celles de Barrow (1630 à 1677), Appolonius de Perge (vers 262 à vers 180 avant J.-C.), Roberval (1602 à 1675), que nous verrons plus loin - où la notion d'infinitésimaux est peu ou pas présente.
Chez Fermat, on trouve la notion d'infinitésimaux par le biais du *e* uniquement. Cependant, au 17ème siècle, Barrow, comme vous pourrez le voir dans le texte ci-dessous, utilise également la notion d'infinitésimaux, par le biais des deux incréments *a* et *e*. Si on regarde la description de Kline (KLINE, [6]) de la tangente à la parabole chez Barrow -que nous citerons après le texte de Barrow-, on voit apparaître le quotient différentiel *a/e* qui est plus proche de la définition de dérivée que l'on connaît. En effet, Barrow va considérer le triangle caractéristique (fig. 4), dont les côtés sont *e* et *a*, ce qui va lui permettre de passer d'un triangle non assignable à un triangle assignable (c'est-à-dire d'un triangle dont les dimensions sont infinitésimales à un triangle dont les dimensions ne le sont pas). Ce passage d'un triangle à l'autre va lui permettre de passer d'un rapport d'infinitésimaux à un rapport « normal ». Si Barrow ne sait pas bien ce que vaut le rapport *a/e*, il sait par contre exactement ce que vaut *MN/PM*. Il n'y a donc plus de problème pour Barrow puisqu'il assimile le rapport *a/e* au rapport *MN/PM* (fig.4).

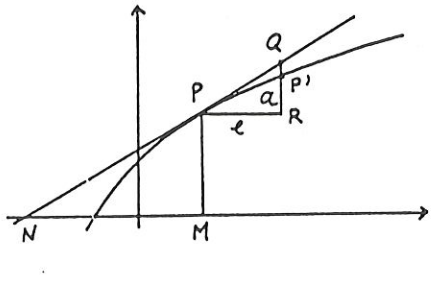


Fig. 4

Ce rapport *a/e* préfigure notre dérivée. En effet, *e* est l'accroissement de *x* et *a* celui de *f(x)* ; *a/e* peut donc s'écrire $\frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x}$. De plus, le rapport *a/e* contient une idée intuitive de la limite puisque *a* et *e* sont des infinitésimaux.

Voyant que Fermat et Barrow emploient tous deux la notion d'infinitésimaux, on pourrait se demander si Fermat est bien le premier à utiliser cette notion mais, comme la méthode de ce dernier date de 1630, et que cette date correspond à la naissance de Barrow, il est alors tout à fait possible que Fermat ait été le premier.

A propos de la tangente à une courbe : introduction de Barrow (1630 – 1677)

[...]Ainsi nous nous sommes acquittés de la première partie de notre exposé. En complément, sous forme d'un appendice nous ajouterons une méthode que nous utilisons du calcul des tangentes. Toutefois je ne sais pas, après tant de méthodes déjà connues et rejetées, si on peut faire quelque chose de l'emploi de celle-ci. Encore fais-je ceci sur les conseils d'un ami ; d'autant plus volontiers que ce que j'ai traité devant les autres paraît fructueux et général. Je procède de cette façon.

Soient AP, PM *deux lignes droites données en position (telles que* PM *coupe la courbe en* M*) et* MT *supposée toucher la courbe en* M, *et couper la droite* AP *en* T, *comme je cherche maintenant la quantité* PT *de la même droite, je pose l'arc de courbe* MN *indéfiniment petit ; alors je trace les droites,* NQ *parallèles à* MP, *et* NR *à* AP *; je nomme* MP = m *;* PT = t ; MR = a ; NR = e *; quant aux restes des droites,*

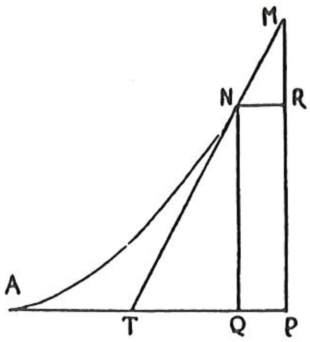


fig.5

déterminées par la nature particulière de la courbe et utiles à la proposition, je les désigne par leur nom ; je compare par le calcul au moyen de l'Equation considérée MR, NR *elles mêmes (et par le moyen de celles-ci* MP, PT*) ; en observant simultanément ces règles.*

a. *Parmi ce qui est calculé je jette tous les termes dans lesquels* a *ou bien* e *sont des puissances d'eux-mêmes, ou bien dans lesquels ils sont multipliés entre eux (en effet ces termes ne valent rien).*
b. *Après avoir établi l'égalité, je jette tous les termes dont les lettres désignent des quantités constantes ou bien fixées ; ou bien dans lesquels on n'a pas* a *ou* e *(en effet ces termes amenés dans une des parties de l'égalité seront toujours rendus égaux à rien).*
c. *Je substitue à la place de* a, m *lui-même ; (ou bien* MP*) à la place de* e, t *lui-même (ou bien* PT*). De là on trouvera précisément les valeurs de* PT *elles-mêmes.*

Parce que si une partie indéfiniment petite d'une courbe quelconque entre dans le calcul ; on pourra substituer à cet endroit une petite partie de tangente ; ou bien (à cause de l'infini ténuité de l'arc de courbe) n'importe quelle droite équipollente à celle-ci.

Description par Kline de la tangente à la parabole chez Barrow

Barrow assimile, tout comme Fermat, un arc de courbe PP' *au segment* PQ *de la tangente* (fig.6), *ce qui lui permet de conclure au rapport* $a/e = PM/MN$ *où* $e = PR$ *et* $a = P'R$ *(il assimile le triangle* PP'R *au triangle* PQR*).*

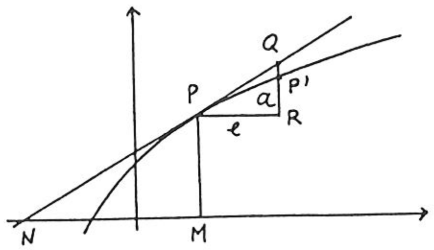


fig. 6

Ensuite, il utilise l'équation de la courbe $y^2 = px$ *où il remplace x par* $x+e$ *et* y *par* $y+a$, *ce qui donne*

$$y^2+2ay+a^2 = px+pe.$$

Il soustrait $y^2 = px$ *et obtient*

$$2ay+a^2 = pe.$$

En négligeant a^2, *il trouve*

$$a/e = p/2y,$$

d'où $PM/MN = p/2y$, *ou encore* $y/MN = p/2y$ *et aboutit à* :

$$MN = 2y^2/p = 2x.$$

La tangente a également été déterminée par Roberval sans considérer les infinitésimaux mais en ayant recours à des vitesses. Roberval présente dans le texte que nous proposons ci-dessous, d'abord une construction de la parabole et ensuite il s'intéresse à la tangente. La parabole pour Roberval est la trajectoire engendrée par la composition de deux mouvements : le point *E* de la parabole s'éloigne à la même vitesse du foyer *A* et de la génératrice (droite qui est issue du point *B* et perpendiculaire au diamètre de la parabole). Ayant ces deux vitesses, le segment *AE* et le segment de même longueur construit à partir de *E* sur la droite *EH*, il suffit de compléter le parallélogramme des vitesses qui est ici un losange pour obtenir la tangente qui est la résultante de ces deux vitesses (la diagonale du losange).
Notons que dans le texte de la tangente à la parabole chez Roberval, les deux vitesses sont constantes en norme mais une des deux varie en direction. Tout se passe comme si on « figeait » l'espace d'un instant cette direction. Si on suppose que le point *E* se

déplace dans une glissière, on peut aussi imaginer la tangente comme la direction que prendrait le point *E* si subitement on faisait un trou dans la glissière.

La tangente à la parabole chez Roberval (1602 – 1675).

Soit que l'on nous ait donné la parabole EFE *et le moyen de la décrire par la cinquième méthode générale de Monsieur Mydorge livre second, proposition 25 qui est telle.*

Le sommet et le foyer de la parabole étant donnés de position, trouver dans le même plan tant de points qu'on voudra par lesquels la parabole est décrite.

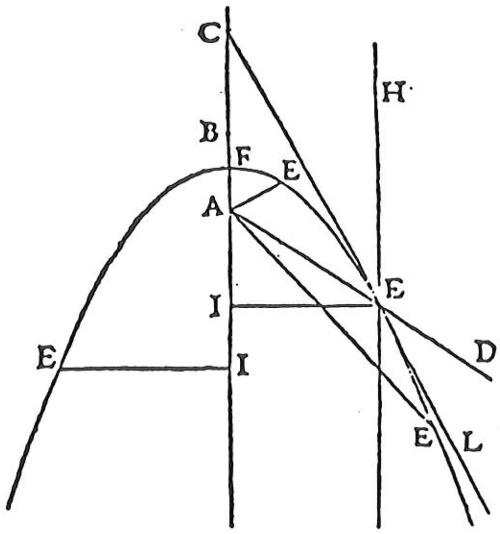


fig. 7

Soit A *le foyer et* F *le sommet : soit tirée la ligne* AF *et prolongée de* F *vers* B, *et soit* FB *égale à* AF *la même ligne* BFA *fera l'axe de la parabole. Prenez dans* FA *autant de points* I *qu'il vous plaira, tirez par ces points des perpendiculaires à* FA *; du centre* A *et de l'intervalle d'entre chaque perpendiculaire et le point* B *comme* BI, *décrivez des arcs de cercle dont chacun coupe une de ces perpendiculaires comme en* E, *la parabole passera par les points* E. *Cela pose si l'on demande la touchante de la parabole au point* E, *soit tirée la ligne* AE *prolongée comme en* D, *et la ligne* EI *perpendiculaire à* AB *et encore la ligne* HE *parallèle à l'axe* FAI, *alors il est clair par la description ci-dessus, que le mouvement du point* E *décrivant la parabole, est composé de deux mouvements droits égaux, dont l'un est la ligne* AE *et l'autre est la ligne* HE *sur laquelle il se meut de même vitesse que le point* I *dans la ligne* BA, *laquelle vitesse est pareille à celle de la ligne* AE *par la construction, puisque* AE *est toujours égale à* BI. *Partant puisque la direction de ces mouvements égaux est connue, à savoir suivant les lignes*

droites AED, HE *données de position, si vous divisez l'angle* AEH *en deux également par la ligne* LEC *qui est le diamètre (1) du rhombe (2) autour de l'angle* AEH *(et par conséquent la direction du mouvement composé des deux* HE, AE*) la ligne* LEC *est la touchante*
(1) le diamètre = la diagonale
(2) un rhombe = un losange

Même sans cette notion d'infinitésimaux, Appolonius de Perge, bien avant, est parvenu à déterminer le concept de tangentes et ce par manipulation géométrique comme on le voit dans le texte ci-dessous.

La tangente à la parabole d'Apollonius de Perge (vers 262 à vers 180 avant J.-C.) : proposition XXXIII

Proposition :

« Si l'on prend un point sur une parabole ; et si de ce point, l'on abaisse une droite de manière ordonnée sur le diamètre, et si l'on pose une droite égale à celle que cette dernière droite découpe sur le diamètre, dans la direction de celui-ci, et à partir de ce sommet, la droite de jonction, menée du point ainsi obtenu au point que l'on a pris, sera tangente à la section. »

Démonstration :

Soit une parabole dont un diamètre est la droite AB. *Abaissons une droite* ΓΔ *de manière ordonnée ; posons une droite* AE *égale à la droite* EΔ, *et menons la droite de jonction* AΓ. *Je dis que la droite* AΓ *prolongée tombera à l'extérieure de la section.*

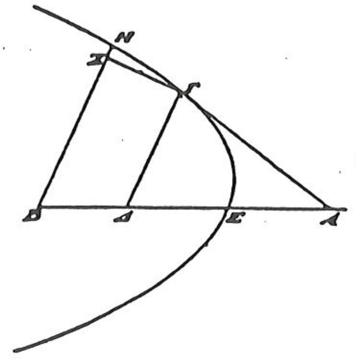


fig. 8

En effet, qu'elle tombe à l'intérieure comme la droite ΓZ, *et abaissons la droite* HB *de manière ordonnée. Dès lors, puisque le rapport du carré de* BH *au carré de* ΓΔ *est plus* *grand que celui du carré de* ZB *au carré de* ΓΔ *; mais que le carré de* BA *est au carré de* AΔ *comme le carré de* ZB *est au carré de* ΓΔ, *et que* BE *est à* ΔE *comme le carré de* HB *est au carré de* ΓΔ, *il s'ensuit que le rapport de* BE *à* EΔ *est plus grand que celui du carré de* BA *au carré de* AΔ. *Or le quadruple du rectangle délimité sous* BE, EA *est au quadruple du rectangle délimité sous* AE, EΔ *comme* BE *est à* EΔ *; donc le rapport du quadruple du rectangle délimité sous* BE, EA *au quadruple du rectangle délimité sous* AE, EΔ *est plus grand que celui du carré de* BA *au carré de* AΔ. *Dès lors, par permutation, le rapport du quadruple du rectangle délimité sous* BE, EA *au carré de* AB *est plus grand que celui du quadruple du rectangle délimité sous* AE, EΔ *au carré de* AΔ*; ce qui ne peut avoir lieu car,* AΔ *étant égal à* AE, *le quadruple du rectangle délimité sous* AE, EΔ *équivaut au carré de* AΔ, *et le quadruple du rectangle délimité sous* BE, EA *est moindre que le carré de* BA, *puisque le point* E *n'est pas le milieu de la droite* AB. *Dès lors, la droite* AΓ *ne tombe pas à l'intérieur de la section, donc elle lui est tangente.*

Suite aux écrits de Barrow, Roberval et Appolonius concernant la tangente que nous venons de présenter, nous serions d'accord de dire que Fermat est bien le premier à avoir utilisé les infinitésimaux.

c) Réponse à la question : « Fermat peut-il être vu comme le premier utilisateur de la dérivée ? »

L'idée de variation, nous l'avons vu au point a), apparaissait chez Fermat ; nous venons maintenant de faire remarquer au point b) qu'une idée d'infinitésimaux y est également présente. Ces deux raisons réunies donnent une justification (bien sur subjective) d'attribuer l'utilisation de la dérivée à Fermat.

La découverte des tangentes occupe tout autant le 17ème siècle que le problème des extrema.
La tangente était généralement pensée comme une sécante pour laquelle deux points se rapprochent jusqu'à ce qu'ils coïncident. Les méthodes basées sur cette approche sont concluantes. Etant donné l'équation d'une courbe *y : f(x),*(fig. 9)

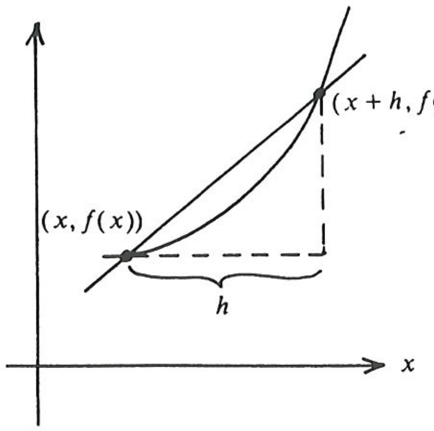


fig. 9

Fermat, Descartes, John Wallis, Isaac Barrow et beaucoup d'autres mathématiciens du 17ème siècle sont capables d'en trouver la tangente.
La méthode consiste à calculer la pente de la sécante :

$$\frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

Quand la quantité h « disparaît », la sécante devient la tangente si bien que négliger h dans l'expression de la pente de la sécante donne la pente pour la tangente.

En 1660, apparaissent les relations calculatoires et géométriques entre le problème d'extréma et le problème de tangente. Un maximum est trouvé en calculant la pente de la tangente et en se demandant quand elle vaut zéro. Cependant, le concept général de dérivation n'existe pas, mais ies mathématiciens ont de riches méthodes pour résoudre ces problèmes.

1.1.4 La dérivée est découverte.

Judith Grabiner affirme que dans le dernier tiers du 17ème siècle, Newton (1642 à 1727) et Leibniz (1646 à 1716), chacun indépendamment, inventent le calcul. Par « inventer le calcul », Judith Grabiner veut dire qu'ils ont fait évoluer les connaissances acquises à cette époque.
Premièrement, ils prennent la richesse des méthodes qui existent déjà pour trouver les tangentes, les extrema et l'aire et ils subsument toutes ces méthodes sous l'entête de deux concepts généraux : les concepts que nous appelons maintenant dérivées et intégrales.

Deuxièmement, Newton et Liebniz, chacun, aboutissent à une notation qui rend le calcul de la dérivée et de l'intégrale plus faciles, plus automatiques. Nous utilisons le $\dot{x}$ de Newton et nous utilisons le *dy/dx* et $\int y\,dx$ de Liebniz.

Troisièmement, Newton et Liebniz, chacun, donnent un argument pour déterminer ce que nous appelons le théorème fondamental du calcul : la dérivée et l'intégrale sont inverses l'une de l'autre.

Le théorème fondamental chez Newton (extrait de (I. SAELENS,[4])).

- *Première apparition.*

Le théorème fondamental qui dit que la dérivée et l'intégrale sont inverses l'une de l'autre apparaît pour la première fois sous la plume de Newton dans un traité écrit en 1669 sous le titre « De analysi ple aequationes infinitas ». Il l'énonce d'abord sous la forme d'une règle qui est la suivante :

Soit l'ordonnée BD *perpendiculaire à la base* AB *d'une courbe* AD *;*
posons AB=x *et* BD=y.
Soient de plus a,b,c,... *des quantités données et* m, n *des entiers.*
Alors
Si $ax^{m/n} = y$, *on aura* $\frac{n}{m+n} ax^{(m+n)/n}$ = *aire* ABD

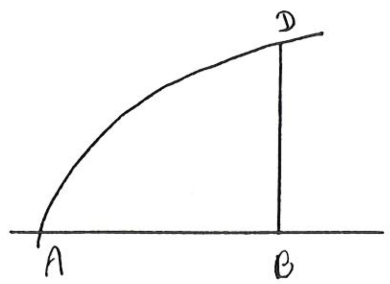


fig. 10

Exemple

Si $y = x^{1/2}$ *c'est-à-dire si* a = 1 = m *et* n = 2, *alors* 2/3 $x^{3/2}$ = *aire* ABD.

Travaillons à partir de cet exemple.
Prenons l'aire ABD = z = 2/3 $x^{3/2}$

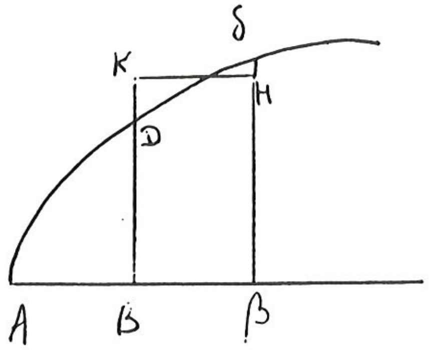


fig. 11

Soit la courbe ADδ, *ayant* AB = x *pour base,* BD = y *pour ordonnée perpendiculaire et* ABD = z *pour aire.*
Posons Bβ = o (o ≠ zéro), BK = v *et le rectangle* BβHK (=ov) *égal à l'espace* BβδD. *On a par conséquent que* Aβ = x+o *et* Aδβ = z+ov. *Avec ces prémisses et à partir d'une relation arbitraire entre* x *et* z *qui est :*

$$z = 2/3\ x^{3/2} \quad ou \quad 4/9\ x^3 = z^2 \qquad (3)$$

on va rechercher y *de la manière suivante :*
Quand on remplace x *par* x+o *et* z *par* z+ov *dans (1), on a*

$$4/9(x^3 + 3x^2o + 3xo^2 + o^3) = z^2 + 2zov + o^2v^2.$$

En enlevant les quantités égales ($4/9\ x^3$ *et* z^2*) et en divisant par o, on a :*

$$4/9(3x^2 + 3xo + o^2) = 2zv + ov^2$$

Si maintenant nous supposons que Bβ *soit infiniment petit, càd que* o *est zéro,* v *et* y *seront égaux et les termes multipliés par* o *vont disparaître, et donc, il restera :*

$$\frac{4}{9}\,3\ x^2 = 2zv$$

càd $2/3\ x^2 = zv = zy = 2/3\ x^{3/2}\ y$ *cette dernière égalité est obtenue par (3)*

$$2/3\ x^2 = 2/3\ x^{3/2}\ y$$
$$x^{1/2} = y$$

donc

si $x^{1/2} = y$, *on aura* $2/3\ x^{3/2} = z$

Newton poursuit la démonstration en traitant exactement de la même façon, le cas général où

$$\frac{n}{m+n}\ ax^{(m+n)/n} = z$$

- *Deuxième apparition.*

Durant l'hiver 1670-1671, Newton rédige, sur le même sujet, un deuxième traité dans lequel il affirme sensiblement son point de vue théorique et traite nombre un beaucoup plus grand d'applications. Il s'agit du *« De methodis serierum et fluxiorum »*.

Il situe d'emblée son analyse non plus dans le contexte des aires sous les courbes, mais dans celui des mouvements. Voici comment il entame la partie du traité correspondant, en langage moderne, au théorème fondamental.

« Mais tout d'abord, je voudrais observer que les difficultés de cette sorte peuvent toutes être ramenées à celle de deux problèmes seulement, qu'on me permettra de proposer en relation avec l'espace parcouru par un mouvement local (4) accéléré ou retardé de manière quelconque :

1. La longueur de l'espace étant donnée continûment (c'est-à-dire à tout instant), trouver la vitesse du mouvement à n'importe quel instant donné.

2. La vitesse du mouvement étant donnée continûment, trouver la longueur de l'espace parcouru à un instant donné quelconque. »

(4) Un mouvement local n'est autre chose, dans la langue d'aujourd'hui, qu'un mouvement, c'est-à-dire un changement de lieu. Cette locution remonte à Aristote, pour qui mouvement voulait dire changement (de n'importe quoi).

Ainsi dans l'équation $x^2 = y$, si y désigne la longueur de l'espace parcouru en un temps quelconque mesuré et représenté par un second espace x croissant à vitesse uniforme : alors $2\dot{x}x$ désignera la vitesse avec laquelle l'espace y se trouve parcouru au même moment du temps.

Notons que Newton appelle notre « dérivée » une « fluxion » c'est à dire, un taux de variation ; Liebniz quant à lui voit la dérivée comme un rapport de différences infinitésimales et l'appelle quotient différentiel.

Faisons remarquer ici que le quotient différentiel vu par l'Huilier ($18^{ème}$ siècle) est en contraste avec le travail de Newton et Liebniz. En effet, vers la fin du $18^{ème}$ siècle, Simon L'Huilier voit la dérivée comme la limite de *dy/dx* où *dx* et *dy* sont prises non indépendamment l'une de l'autre. De façon imagée, on peut dire qu'il considère « *(dy/dx)* » et non « *(dy)/(dx)* ». Ceci est en contraste avec le travail de Newton et Leibniz dans lequel les différentielles *dx* ou *dy* sont vues comme ayant une signification indépendante du rapport dans lequel elles interviennent. Le quotient différentiel de L'Huilier est un seul nombre ou une fonction équivalente à la fonction de Lagrange dont nous parlerons plus loin, et représente essentiellement la conception actuelle de la dérivée. Il garde le nom « quotient différentiel », et le symbole « *dy/dx* » pour représenter cette quantité. Il insiste donc sur le fait que ce dernier n'est rien d'autre qu'un symbole qui doit être interprété comme un seul nombre.

Le quotient différentiel de L'Huilier n'est rien d'autre que la dérivée $f'(x)$ de Cauchy, que l'on verra aussi plus tard. Mais cette notation dy/dx offre une plus grande facilité opérationnelle dans la résolution d'équation différentielle du type :

$$x(y) = -k.x(y),$$

qu'on résout de la manière suivante :

$$x(y) = \frac{dx}{dy},$$

$$\frac{dx}{dy} = -k\, x(y),$$

$$\frac{dx}{x(y)} = -k\, dy,$$

Intégrons de part et d'autre,

$$\int 1/x(y)\ dx = -k \int dy,$$

$$\ln x(y) = -k\ y + constante,$$

$$x(y) = e^{-k\,y + constante},$$

où la constante est déterminée en fonction des conditions initiales.

Mais quels que soient les termes utilisés, le concept de dérivée est alors gravé dans un sujet général - le calcul - et sa relation avec l'autre concept de base que Liebniz appelle intégrale, est comprise.
Notons que les prémisses de ce « calcul » sont apparues en 1659 avec Johann Hudde. Il propose une formulation du modèle engendré par la théorie de Fermat, qui en notation moderne s'écrit :

Étant donné un polynôme de la forme

$$y = \Sigma_{k=o,\dots,n}\, a_k\ x^k,$$

Il y a, un maximum ou un minimum quand :

$$\Sigma_{k=1,\dots,n}\, ka_k\ x^{k-1} = 0$$

Nous avons ainsi atteint le stade de découverte.

1.1.5 La dérivée est explorée et développée.

Euler (1707 à 1783) met en évidence le concept de fonction et Lagrange (1739 à 1813) le développe.
Pour des fonctions comme *sin(x), cos(x),* e^x, Euler trouve des développements en séries de puissances infinies. Si de telles fonctions ont des développements en séries de puissances, il est alors possible de tout réduire en séries de puissances. Lagrange quant à lui établit en 1797, et pense avoir prouvé que chaque fonction, c'est-à-dire chaque expression analytique finie ou infinie, a un développement en séries de puissances :

$$f(x+h) = f(x) + p(x)\,h + q(x)\,h^2 + r(x)\,h^3 + \ldots \qquad (5)$$

sauf probablement pour un nombre fini de valeurs isolées de x.
Il définit alors une nouvelle fonction : le coefficient du terme linéaire en h lequel est $p(x)$ dans le développement montré en (5) et l'appelle « fonction dérivée première de $f(x)$ ».
Le terme de Lagrange « fonction dérivée » est l'origine de notre terme dérivation.
Lagrange introduit de nouvelles notations, $f'(x)$, pour cette fonction.
Il définit $f''(x)$ pour être la fonction dérivée première de $f'(x)$ et ainsi, récursivement, finalement, utilisant ces définitions, il prouve que dans le développement ci-dessus (5)

$q(x) = f''(x)/2,$
$r(x) = f'''(x)/6,$
et ainsi de suite.

Texte original sur le calcul des dérivées successives chez Lagrange.

Extrait d'un texte de Lagrange provenant de la « Théorie des Fonctions Analytiques », œuvres complètes, tome IX, Paris.

« Calcul des dérivées successives chez Lagrange. »

Nous étant ainsi assurés de la forme générale du développement de la fonction f(x+i), *voyons plus particulièrement en quoi ce développement consiste et ce que signifie chacun de ces termes.*
On voit d'abord que, si l'on cherche dans cette fonction ce qui est indépendant de la quantité i, *il n'y a qu'à faire* i=0, *ce qui la réduit à* f(x). *Ainsi* f(x) *est la partie de* f(x+i) *qui reste lorsque la quantité* i *devient nulle, de sorte que* f(x+i) *sera égale à* f(x), *plus à une quantité qui doit disparaître en faisant* i=0 *et qui sera par conséquent ou pourra être censé multipliée par une puissance positive de* i ; *et, comme nous venons de démontrer que dans le développement de* f(x+i) *il ne peut entrer aucune puissance fractionnaire de* i, *il s'en suit que la quantité dont il s'agit ne pourra être multipliée que par une puissance positive et entière de* i ; *elle sera donc de la forme* iP, P *étant une fonction de* x *et* i *qui ne deviendra point infinie lorsque* i=0.
On aura donc ainsi

$$f(x+i) = f(x) + iP;$$

donc $f(x+i)-f(x)=iP$, *et par conséquent divisible par* i; *la division faite, on aura*

$$P = \frac{f(x+i) - f(x)}{i}$$

Or, P *étant une nouvelle fonction de* x *et* i, *on pourra de même en séparer ce qui est indépendant de* i *et par conséquent, ne s'évanouit pas lorsque* i *devient nul. Soit donc* p *ce que devient* P *lorsqu'on fait* $i=0$; p *sera une fonction de* x *sans* i, *et , par un raisonnement semblable au précédent, on prouvera que* $P=p+iQ$, iQ *étant la partie de* P *qui devient nulle lorsque* $i=0$, *et* Q *étant une nouvelle fonction de* x *et* i *qui ne devient pas infinie lorsque* $i=0$.
On aura donc $P-p=iQ$, *et par conséquent divisible par* i ; *la division faite, on aura*

$$Q = \frac{P - p}{i}$$

Soit q *la valeur de* Q *en y faisant* $i=0$; q *sera une fonction de* x *sans* i, *et la partie de* Q *qui devient nulle lorsque* i *devient nul sera, comme ci-dessus, de la forme* iR, R *étant une fonction de* x *et* i *qui ne deviendra pas infinie lorsque* $i=0$ *et qu'on trouvera en divisant* $Q-q$ *par* i, *et ainsi de suite.*
On aura ,par ce procédé,

$$\begin{aligned} f(x+i) &= f(x) + iP, \\ P &= p + iQ, \\ Q &= q + iR, \\ R &= r + iS, \ldots; \end{aligned}$$

donc, substituant successivement,

$$f(x+i) = f(x)+iP = f(x)+ip+i^2Q = f(x)+ip+i^2q+i^3R = \ldots,$$

ce qui donnera, pour le développement de $f(x+i)$, *une série de la forme que nous avons supposée au commencement.*

Soit, par exemple, $f(x) = 1/x$; *on aura*
$f(x+i) = 1/(x+i)$;

donc

$$iP = \frac{1}{x+i} - \frac{1}{x} = -\frac{i}{x(x+i)}, \quad P = -\frac{1}{x(x+i)}, \quad p = -\frac{1}{x^2};$$

$$iQ = \frac{1}{x(x+i)} + \frac{1}{x^2} = \frac{i}{x^2(x+i)}, \quad Q = \frac{1}{x^2(x+i)}, \quad q = \frac{1}{x^3};$$

$$iR = \frac{1}{x^2(x+i)} - \frac{1}{x^3} = -\frac{i}{x^3(x+i)}, \quad R = -\frac{1}{x^3(x+i)}, \quad r = -\frac{1}{x^4};$$

....

ainsi l'on aura

$$\frac{1}{x+i} = \frac{1}{x} - \frac{i}{x(x+i)} = \frac{1}{x} - \frac{i}{x^2} + \frac{i^2}{x^2(x+i)} = \frac{1}{x} - \frac{i}{x^2} + \frac{i^2}{x^3} - \frac{i^3}{x^3(x+i)} = \ldots,$$

comme il résulte de la division actuelle.

Pour Lagrange, la dérivée première est une fonction, le même genre d'objet que la fonction d'origine. La dérivée seconde est précisément le même genre d'objet que la première dérivation, et ainsi de suite. Cette définition conduit Lagrange à un grand nombre de propriétés importantes de la dérivation.
Il applique sa définition avec le critère d'Euler de 1755 - établissant que « pour chaque série de puissances, $a + bx + cx^2 + dx^3 + \ldots$, on peut trouver x suffisamment petit tel que, si on casse la série après un certain terme particulier (disons x^2), le terme x^2 dépasse en valeur absolue la somme de tout ce qui reste de la série » -, pour utiliser les séries de puissances tronquées afin de donner une caractérisation plus pratique de la dérivation d'une fonction :

$$f(x+h) = f(x) + hf'(x) + hH,$$

où H tend vers o avec h (appelé la propriété de Lagrange).

Lagrange interprète la phrase *« H tend vers o avec h »* en termes d'inégalités.
Il écrit que :

Soit D petit, h peut être choisi tel que $f(x+h) - f(x)$ se trouve entre $h\,(f'(x)-D)$ et $h\,(f'(x)+D)$

càd $$h(f'(x)-D) \leq f(x+h)-f(x) \leq h(f'(x)+D)$$

Grâce à cette notation, il prouve qu'une fonction ayant une dérivée positive sur un intervalle y est croissante.

La dérivation est ici clairement une fonction plutôt qu'une proportion ou une vitesse.
Mais Cauchy quant à lui (1789 à 1857) fait remarquer que la manipulation des séries de Taylor n'est pas infaillible. Pour cette raison, Cauchy remplace la définition de dérivation de Lagrange par la sienne.

Envisageons maintenant la définition de la dérivée.

1.1.6 La dérivée est définie.

En 1823, Cauchy définit la dérivation de $f(x)$ comme la limite, quand elle existe, du quotient des différences :

$$\frac{f(x+h)-f(x)}{h} \text{ quand } h \to 0.$$

Cauchy prend de Lagrange le nom « dérivation » et la notation $f'(x)$, soulignant la nature fonctionnelle de la dérivation. Cauchy adapte et améliore la méthode de preuve des inégalités de Lagrange pour prouver des résultats comme le « théorème de la valeur moyenne ».
Utilisant son concept de limite pour définir l'intégrale comme la limite de somme, Cauchy fait une première ébauche de la preuve du « théorème fondamental du calcul ».

Après Cauchy, le calcul de la dérivée est vu différemment. Il est vu en effet comme un sujet rigoureux accompagné de bonnes définitions, et de théorèmes dont les preuves sont basées sur des définitions, plutôt que simplement comme un ensemble de méthodes puissantes.
Weierstrass (1815 à 1897) contribue à cette rigueur, il introduit la définition de limites en ε-δ.

Si on se limite au développement de Judith Grabiner (de Fermat à Weierstrass), il aura fallu plus de 200 ans pour définir rigoureusement la dérivée.
On voit donc que la dérivée est le résultat de nombreux débats, questions et intuitions.

Dans la section suivante, nous verrons que les obstacles rencontrés au cours de l'élaboration du concept de dérivée par les mathématiciens sont semblables à ceux rencontrés par les élèves.

1.2 Difficultés épistémologiques

Suite à la partie historique, on peut se rendre compte que de nombreux éléments ont posé problème dans l'histoire de la dérivée. Nous avons relevé deux difficultés principales à savoir :

- Refus de la vitesse instantanée car les anciens mathématiciens avaient une perception sensorielle des choses.
- Problème au niveau des discours sur les infiniment petits. En effet, si on se réfère à la méthode de Fermat pour trouver les maxima et minima (cf. section 1.1.3.1.), on voit qu'il n'hésite pas à considérer un incrément de variable comme non nul car il divise par celui-ci et tout de suite après le considère comme nul car il le supprime. Tout cela sans se justifier.

Les étudiants à l'heure actuelle sont encore confrontés à ces obstacles. On retrouve chez les élèves les difficultés suivantes :

- Refus de la vitesse instantanée ou du débit instantané. Ce refus pouvant trouver sa source dans le fait que la vitesse est un objet mental difficile.

  En effet :

  - Considérer un intervalle de temps qui tend vers zéro pose problème.

- La vitesse et le débit instantanés sont des objets mentaux plus éloignés de la vitesse et du débit moyen que ne l'est l'aire curviligne (fig. 12 a) de l'aire rectiligne (fig. 12 b).

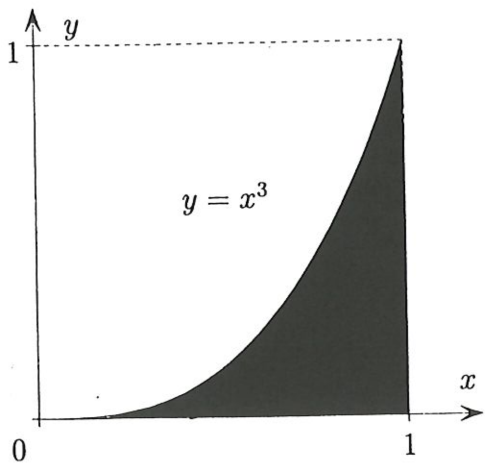


fig. 12 a

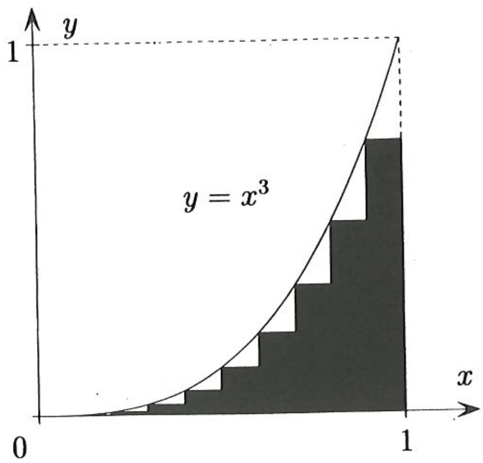


fig. 12 b

- Concevoir la vitesse instantanée comme limite de vitesse moyenne est difficile.

- Réticences vis-à-vis d'une limite obtenue par la suppression de termes.

Mis à part ces problèmes, on retrouve également d'autres difficultés chez les élèves :

- Difficulté à associer la pente de la tangente à la limite d'une suite de quotients différentiels.

- Difficulté à associer la dérivée à une idée de variation. Les élèves ressentiraient peut-être mieux l'idée de variation si la dérivée était introduite dans un contexte temporel. Cependant, ne pouvant nous contenter de dériver uniquement par rapport au temps il faudra pouvoir sortir de ce contexte temporel ce qui engendrera encore des problèmes. Ces deux dernières difficultés à savoir la perception d'une idée de variation et l'extraction du contexte temporel ont également posé problème dans l'histoire. Mais Newton parviendra à surmonter ces obstacles. Nous aurons recours aux aires et aux volumes pour expliquer ces obstacles de façon plus claire.
  Nous montrerons que :

  - Les aires et volumes sont souvent perçus comme étrangers à toute idée de variation.

  - L'élimination du temps pose problème.

Toutes les difficultés que nous venons de citer sont reprises dans certains textes didactiques sous le nom d'obstacles épistémologiques. Nous expliquerons ce que l'on entend par obstacle épistémologique plus loin mais il s'agit entre autres d'un obstacle inhérent au contenu enseigné c'est-à-dire qu'il se manifeste d'une manière ou d'une autre presque indépendamment du mode d'enseignement choisi. Cependant, l'obstacle épistémologique n'est pas le seul obstacle que peuvent rencontrer les élèves. Il existe différentes sortes d'obstacles sur lesquelles nous ne nous attarderons pas mais il nous a paru bon de les citer et de les expliquer brièvement. Une fois ceci fait, nous développerons les différents obstacles épistémologiques cités ci-dessus.

Les définitions suivantes proviennent de notre cours de « Didactiques des Mathématiques » dispensé par M. Schneider.

Voici ces différents obstacles :

- obstacles psychologiques : ils apparaissent lorsqu'on se fixe des restrictions mentales implicites qui consistent à s'imaginer des interdits que l'énoncé du problème ne stipule pas.

  Par exemple :
  Illustrons ceci par le problème des allumettes de Duncker qui consiste à construire quatre triangles équilatéraux avec six allumettes : la solution attendue est un tétraèdre, soit une figure dans l'espace. Or beaucoup de sujets se restreignent d'office au plan pour chercher la solution sans que personne ne leur ait imposé.

- obstacles méthodologiques : ces obstacles consistent en la méconnaissance des méthodes de résolution de problèmes.

  Par exemple :
  En ce qui concerne la démonstration par récurrence, supposons que l'on ait la forme polynomiale de la somme des cubes des n premiers nombres entiers : $\sum_{i=1,\dots,n} i^3 = [n(n+1)/2]^2$. On se propose alors de la démontrer. Pour qui ne connaît pas la méthode de démonstration par récurrence, cette démonstration est quasiment insurmontable.

- obstacles ontogéniques : ils sont liés au développement de l'intelligence chez l'enfant et l'adolescent. Il ne faut pas vouloir aller trop vite, chaque âge a ses stades.
  Brousseau en référence à Jean Piaget : *« les obstacles d'origine ontogénique sont ceux qui surviennent du fait des limitations du sujet à un moment donné de son développement : il développe des connaissances appropriées à ses moyens et à ses buts à cet âge-là ».*

- <u>obstacles didactiques</u> : les obstacles d'origine didactique sont ceux qui semblent ne dépendre que d'un choix ou d'un projet du système éducatif. Ils sont causés par le système d'enseignement lui-même.

  <u>Par exemple :</u>
  Beaucoup d'élèves ne parviennent pas à percevoir une ordonnée positive f(x) comme la longueur d'un segment. Cette difficulté est manifeste lorsqu'on demande aux élèves d'expliquer le théorème fondamental du calcul intégral. Ils n'y parviennent pas parce qu'ils pensent que f(x) désigne la courbe ou un de ses points au lieu de la hauteur d'un « rectangle élémentaire ». Cette difficulté pourrait trouver son origine dans le côté réducteur des activités habituellement proposées aux élèves à propos des fonctions. Ceux-ci seraient trop exclusivement confrontés aux exercices de variations de fonctions qui consistent à déterminer les caractéristiques graphiques d'une fonction donnée par son expression analytique. De ce fait, ils seraient enclins à ne plus s'intéresser qu'à ces seules caractéristiques graphiques au risque d'oublier la relation entre les variables. On peut pointer l'absence d'activités qui feraient apparaître un graphique comme la stylisation de formes plus primitives de représentation, un peu comme cela s'est passé dans l'histoire, en particulier sous l'influence de N. Oresme au $14^{\text{ème}}$ siècle (fig. 13 a)) : une grandeur est représentée par un segment, une grandeur variable l'est par une surface composée de segment dont les extrémités inférieures forment un segment horizontal et dont les longueurs variables rendent compte de la variation de la grandeur représentée ; enfin, on remplace cette surface par la courbe que forment les extrémités non alignées de ces segments (fig. 13 b)).

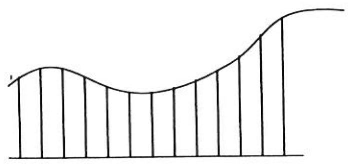


fig. 13 a)

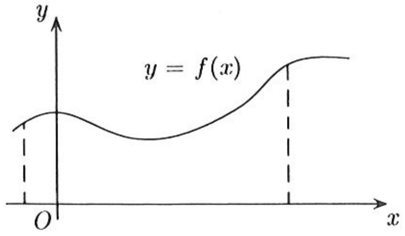


fig. 13 b)

- <u>obstacles épistémologiques</u> : ils surviennent quand les notions mathématiques sont trop éloignées de l'univers familier des élèves ou de leur perception intuitive. Le concept d'obstacle épistémologique est de loin le plus difficile à cerner. Cet obstacle est inhérent au contenu enseigné (c'est-à-dire qu'il se manifeste d'une manière ou d'une autre presque indépendamment du mode d'enseignement choisi).

Par exemple :
Tout mouvement en mécanique classique est régi par la loi de Newton $F = ma$. Malgré un enseignement sur ce sujet, plusieurs réactions d'étudiants vont à l'encontre de cette loi laissant supposer un « raisonnement spontané » résistant. Selon ce raisonnement, c'est la vitesse d'un mobile et non son accélération qui serait proportionnelle aux forces qui s'exercent sur lui. L. Viennot (L. VIENNOT, [7]) a montré l'existence d'un tel raisonnement sur base d'expériences telles que la suivante :
Un jongleur joue avec six balles identiques. À l'instant t, les six balles sont en l'air à la même altitude, sur les trajectoires indiquées en pointillé sur la fig. 14. On a également représenté sur celle-ci les vecteurs vitesses des six balles à cet instant. Les forces s'exerçant sur ces balles sont-elles les mêmes pour les six ? Différentes pour chacune des six ? Les mêmes pour certaines (lesquelles) ? Différentes pour d'autres (lesquelles) ? Justifier votre réponse (on négligera la résistance de l'air).

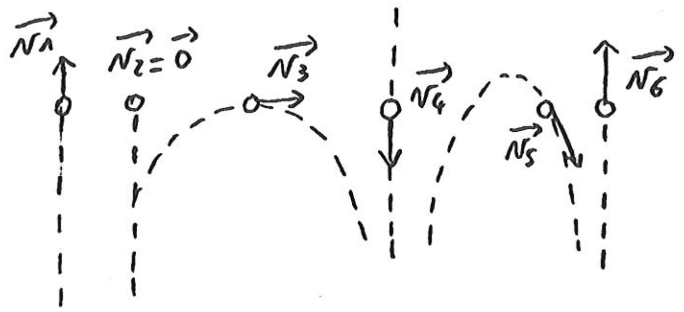


fig. 14

Les forces agissant ici sont les mêmes et sont dirigées verticalement vers le bas, puisqu'il s'agit des poids des balles. Or, les réponses fournies par les étudiants contredisent ce fait en laissant supposer une force proportionnelle à la vitesse. Par exemple, ils supputent au sommet dans le troisième dessin, l'existence d'une force horizontale assimilée à la composante horizontale de la vitesse. Ou encore, dans le deuxième dessin, ils considèrent qu'à une vitesse nulle correspond une force nulle. Globalement, ils attribuent des forces différentes en direction et/ou en module, en rapport avec la vitesse spécifiée.

De plus, ce qui fonde en quelque sorte les obstacles épistémologiques, c'est le fait qu'ils apparaissent dans l'histoire, qu'ils persistent à travers les siècles, et qu'on puisse les retrouver chez les élèves d'aujourd'hui. Les obstacles épistémologiques peuvent être qualifiés de robustes, ils embarrassent autant les professeurs que leurs élèves, et ce indépendamment de leur réussite scolaire : les élèves jugés « forts » sont tout aussi démunis que les autres.

Développons maintenant les différents obstacles épistémologiques liés à la dérivée.

Notons que la dérivée tout comme l'intégrale sont des limites particulières en ce sens qu'elles permettent de définir des objets mathématiques. La dérivée permet de définir la vitesse instantanée et la tangente tandis que l'intégrale permet de définir les aires et volumes. Cependant, contrairement à la notion de vitesse instantanée, les élèves n'ont aucune difficulté à se représenter les aires et volumes. Par conséquent, nous aurons recours à l'étude des obstacles liés aux aires et aux volumes pour nous aider à comprendre les difficultés d'apprentissage rencontrées par les élèves lors de l'enseignement des dérivées.

1.2.1 Un même obstacle, l'obstacle géométrique de la limite, pour expliquer

- **la difficulté à associer pente de tangente et quotient différentiel ;**
- **la difficulté à percevoir que le passage à la limite donne la valeur exacte.**

1.2.1.1 Difficulté à associer la pente de la tangente à la limite d'une suite de quotients différentiels (obstacle géométrique de la limite).

Nous avons relevé dans le manuel méthodologique du groupe AHA (GROUPE AHA, [9]) que plusieurs recherches notamment de B. Cornu, A. Sierpinska et M. Schneider témoignent d'une réelle difficulté des élèves du secondaire à associer la pente d'une tangente à la limite d'une suite de quotients différentiels.

M. Schneider a observé des élèves qui n'avaient reçu aucun enseignement sur les dérivées et qui étaient invités à déterminer les tangentes respectives au graphique de $y = x^2$ et $y = x^3$ au point de coordonnées (1,1).

M. Schneider met en évidence le fait que la pente d'une tangente semble bien secondaire, dans l'esprit des élèves, par rapport à la tangente elle-même : il s'agit pour eux de déterminer d'abord la tangente, ensuite sa pente, plutôt que le contraire. Aucune des conceptions de la tangente spontanément évoquée par ceux-ci ne fait mention de sa pente. Un élève propose même de prendre précisément la tangente pour trouver la pente d'une droite sécante dont les deux points d'intersection avec la courbe se rejoignent. La plupart des élèves semblent donc très loin de l'idée de définir la tangente par le biais de sa pente.

Elle exprime ce fait de la manière suivante : Cette prégnance de la tangente par rapport à sa pente peut s'expliquer par le fait que la pente est un rapport et donc n'est susceptible que d'une expression symbolisée, tandis que la tangente est un objet. Dès lors, la tentation est grande de concevoir la tangente comme un objet géométrique défini au moyen d'autre objet géométrique, à savoir, les sécantes, pour ensuite seulement revenir à sa pente.

La manière de penser des élèves peut être synthétisée par le schéma suivant (schéma 1). Celui-ci met en évidence le fait que les élèves voient la tangente comme la « limite » (ils prennent abusivement le mot limite en un sens géométrique) des sécantes et non comme une droite dont la pente est la limite de la fonction « taux d'accroissement ».
En mathématique, la tangente est un objet second par rapport à sa pente, et est synthétisée par le schéma ci-dessous (schéma 2). Grâce à ce schéma, on voit qu'on ne peut aller d'un objet géométrique qu'est la sécante à un autre objet géométrique qu'est la tangente sans passer par un domaine autre que la géométrie et que l'on qualifiera de « numérique symbolisé ». Ce glissement du domaine numérique à celui des grandeurs géométriques est l'obstacle géométrique de la limite.

domaine géométrique		domaine « numérique symbolisé »
sécantes	$\longrightarrow$	pentes
$\downarrow$ « limite » (conception géométrique au sens d'une topologie implicite et confuse sur l'ensemble des droites)		
tangente (objet premier)	$\longrightarrow$ impasse du 0/0	pente

schéma 1

domaine géométrique		domaine « numérique symbolisé »
sécantes	⟶	pentes
		↓ limite (au sens mathématique) de la suite des quotients différentiels
tangente (objet second)	⟵	pente (objet premier)

schéma 2

M. Schneider fait également remarquer que plusieurs élèves interrogés après un enseignement sur les tangentes, à propos de l'interprétation géométrique du nombre dérivé, parlent exclusivement des droites sécantes qui se rapprochent de la droite tangente et ne mentionnent pas la suite de leurs pentes. Le glissement verbal : tangente au lieu de pente de tangente est fréquent. Cependant, une fois la tangente perçue comme limite géométrique de sécantes, revenir à sa pente, soulève d'énormes difficultés. En effet, le passage d'une sécante à sa pente s'effectue au moyen d'un objet géométrique (un triangle). Mais le passage de la tangente à sa pente est beaucoup plus compliqué puisque le triangle est dégénéré en un point (fig.15).

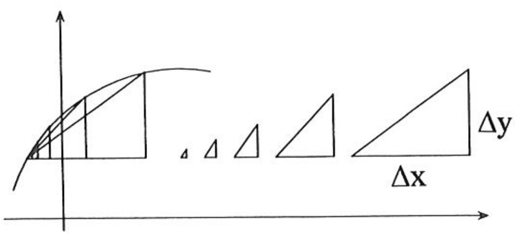


fig. 15

L'idée de mouvement donc, donne du sens à la tangente perçue comme « limite » de sécantes.
Mais quand ce mouvement s'accomplit jusqu'au bout, le triangle de côté Δy et Δx se réduit à un point, $\underline{\Delta x}$ devient nul et Δy aussi. On se retrouve alors avec 0/0, ce qui est bien ennuyeux.

1.2.1.2 Difficulté à percevoir que le passage à la limite donne la valeur exacte de l'aire.

Nous emprunterons la description et l'analyse du problème suivant à M. Schneider (Groupe AHA, [9]).
Pour calculer l'aire sous la courbe $y = x^3$ entre les abscisses 0 et 1, les élèves écrivent après un temps de recherche et avec l'aide du professeur, l'expression de la somme des aires de n rectangles de largeur $1/n$ inscrits à la surface considérée, comme sur la fig. 16 a, et obtiennent

$$(1 - 2/n + 1/n^2)/4 \qquad (6)$$

Ils font de même avec les n rectangles de la fig. 16 b, ce qui donne

$$(1 + 2/n + 1/n^2)/4 \qquad (7)$$

Voici une brève démarche pour en arriver aux formules (6) et (7).
La somme $\underline{S}$ des aires des n rectangles inscrits vaut

$$\underline{S} = \frac{1}{n}\left[(1/n)^3 + (2/n)^3 + (3/n)^3 + \ldots + (n-1/n)^3\right]$$
$$= \frac{1}{n} \times \frac{1}{n^3}\left(1^3 + 2^3 + 3^3 + \ldots + (n-1)^3\right),$$

et $\overline{S}$ celle des rectangles circonscrits

$$\overline{S} = \frac{1}{n}\left[(1/n)^3 + (2/n)^3 + (3/n)^3 + \ldots + (n-1/n)^3 + (n/n)^3\right]$$
$$= \frac{1}{n} \times \frac{1}{n^3}\left(1^3 + 2^3 + 3^3 + \ldots + (n-1)^3 + n^3\right),$$

Utilisons la formule

$$1^3 + 2^3 + 3^3 + \ldots + n^3 = (1 + 2 + 3 + \ldots + n)^2 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}$$

d'où

$$\underline{S} = \frac{1}{n^4}\,\frac{(n-1)^2 n^2}{4}$$
$$= \frac{(n-1)^2}{4n^2} = \frac{1}{4} - \frac{1}{2n} + \frac{1}{4n^2}$$

et

$$\overline{S} = \underline{S} + 1/n = \frac{1}{4} + \frac{1}{2n} + \frac{1}{4n^2}$$

Ainsi, l'aire A cherchée est encadrée par (6) et (7), c'est-à-dire :

$$\frac{1}{4} - \frac{1}{2n} + \frac{1}{4n^2} < A < \frac{1}{4} + \frac{1}{2n} + \frac{1}{4n^2}$$

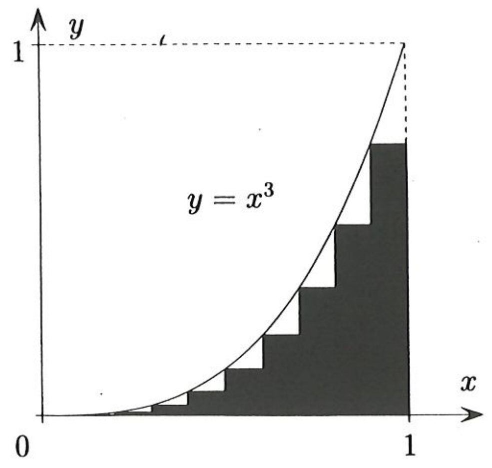


fig. 16 a

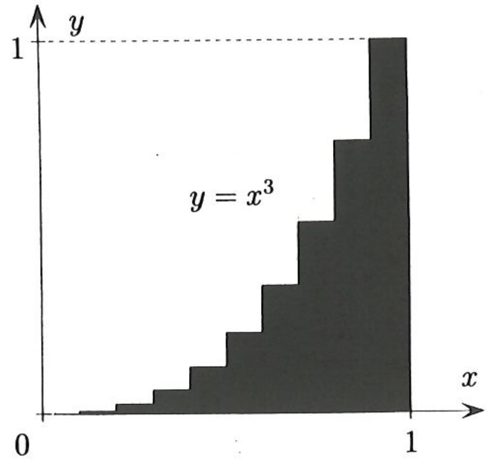


fig. 16 b

Aucun élève n'exprime de doute quant à l'existence d'un nombre qui mesure l'aire sous $y = x^3$ entre 0 et 1. Ce dont ils ne sont pas tous convaincus, c'est la possibilité de déterminer exactement ce nombre. Selon eux, on ne pourrait donc jamais déterminer la surface totale exacte, bien qu'elle existe.

En particulier, tous ne pensent pas que la valeur exacte de l'aire puisse être obtenue en prenant la limite des suites (6) et (7) quand n tend vers $+\infty$.
Voici leurs réactions.
La plupart des élèves acceptent de négliger les termes de la forme a/n et b/n^2 dans les suites (6) et (7) et en concluent que l'aire cherchée vaut à peu près 1/4 (qui est limite commune aux deux suites).
Arguant du fait que les sommes (6) et (7) encadrent cette aire et que leur limite est commune, certains disent que l'aire vaut exactement 1/4. Mais les autres refusent de croire qu'il s'agit là de la mesure exacte de l'aire cherchée. Leur principal argument, qui sème le doute dans la tête des premiers, se résume à l'alternative suivante :

> *Tant que les rectangles ont une certaine épaisseur, ils ne remplissent pas tout à fait la surface considérée ou bien ils la dépassent : il reste des petits triangles à combler ou à enlever et lorsqu'ils se réduisent à des segments, ils ont une aire nulle et on voit mal comment obtenir une aire non nulle en sommant des zéros.*

Il se passe ici un glissement dans l'esprit des élèves entre le contexte des nombres-mesures, et celui des grandeurs.
En effet, pour obtenir l'aire sous $y = x^3$ entre les bornes 0 et 1, on doit calculer la limite d'une suite de nombres, chacun d'eux représentant un somme d'aires de rectangles. Mais la limite elle-même (égale à 1/4) est, dans ce cas, extérieure à la suite, en ce sens qu'elle n'est pas un de ces termes. Il n'y a donc pas lieu de

l'interpréter en se référant aux rectangles. Elle donne l'aire sous la courbe et non pas une somme d'aires de rectangles, ceux-ci fussent-ils devenus des segments.
Mais dans l'esprit de l'élève, tout se passe comme s'il effectuait le « passage à la limite » au niveau de la perception visuelle des grandeurs où les rectangles se rétrécissent jusqu'à devenir des segments, au lieu de prendre la limite, au sens numérique, de la suite. Le mot limite prendrait une signification géométrique en s'appliquant aux segments perçus comme vestiges (« limite ») des rectangles. Il revient ensuite dans le domaine des mesures où il tente d'interpréter 1/4 comme la somme des mesures des segments. On retrouve ici ce qui caractérise l'obstacle géométrique de la limite.

Pour permettre aux élèves de percevoir que la limite fournit bien la valeur exacte de l'aire sous la courbe, on peut leur présenter une preuve par l'absurde provenant du manuel « Vers l'infini pas à pas » (Groupe AHA, [9]) que nous présenterons plus tard. Nous tenterons également de réaliser une preuve équivalente dans le contexte des dérivées (voir section 1.2.3.).

1.2.2 Refus de la vitesse instantanée ou du débit instantané.

1.2.2.1 La vitesse et le débit instantanés échappent à l'univers des sens et des mesures.

La vitesse et le débit instantanés suscitent des réserves.

Certains élèves disent :
« Une vitesse instantanée, ça n'existe pas, il n'y a pas moyen de mesurer, car le temps de regarder sa montre, du temps s'est déjà écoulé »
« Si le temps est nul, le mobile ne bouge plus »
« Pour avoir un débit, il faut qu'il reste un petit volume »
« Aucun volume n'est versé en un temps nul »

Il n'y a pas que chez les élèves que la vitesse instantanée pose problème. Ainsi Aristote, (-384 à –322) conformément à une opinion largement acceptée en son temps, regarde les mathématiques comme un modèle du monde connu à travers les sens. Des concepts purement formels comme ceux des infinitésimaux et de la vitesse instantanée ne sont pas élaborés dans la physique aristotélicienne ni dans la géométrie euclidienne car ils ne sont pas perceptibles sensoriellement.

L'évêque irlandais Berkeley écrivait (17-18ème siècle) :
« Un point peut être la limite d'une ligne ; une ligne peut être la limite d'une surface ; un instant peut terminer le temps. Mais comment peut-on concevoir une vitesse au moyen d'une telle limite ? Une vitesse dépend du temps et de l'espace et ne peut être conçue sans eux.(...) Considérer le rapport de deux choses suppose que ces deux choses aient une grandeur et que cette grandeur puisse être mesurée. »

Il est vrai qu'en se contentant d'observer et mesurer, on ne peut pas arriver à la vitesse instantanée. Plus précisément : toute mesure tourne court parce qu'elle donne une vitesse moyenne sur un certain intervalle de temps et n'atteint donc jamais l'instantané.
Seul l'esprit peut dépasser l'expérience : c'est une décision d'appeler « vitesse instantanée » l'expression obtenue en faisant tendre Δt vers zéro dans l'expression de la vitesse moyenne.

La vitesse instantanée est un concept imaginé par l'être humain pour répondre à une question qui relève de l'instantané. Cette démarche paraît sans doute inhabituelle car on s'imagine souvent qu'il suffit d'observer les choses de la nature pour en tirer des concepts immédiatement disponibles pour raisonner. Nombreux sont ceux qui s'attendent à ce que les concepts mathématiques et leurs propriétés prolongent en quelque sorte leur perception première de ces objets issus du monde sensible, comme si les mathématiques étaient une copie quasi-conforme de ces objets.

On peut donc interpréter les réticences vis-à-vis de la vitesse instantanée par le fait qu'il n'existe pas de séparation claire et précise entre le monde sensible, caractérisé par des grandeurs appréhendées grâce aux sens et aux mesures, et les mathématiques, caractérisées par des concepts imaginés (définis) par l'esprit humain.

Monde sensible | | **Mathématiques**

Grandeurs | $\approx$ glissement (séparation non nette) | Concepts (dérivée,...)

↓

La vitesse et le débit instantanés échappent à l'univers des sens et des mesures. → on dénie aux mathématiques la possibilité de les circonscrire avec exactitude.

1.2.2.2 Les vitesses instantanées sont des objets mentaux plus fuyant que les aires et les volumes.

Même si le processus d'apprentissage des vitesse et débit instantanés n'est pas, en tout point, similaire à celui des aires et des volumes, nous les rapprocherons pour permettre de mieux comprendre le premier par rapport au second.

La vitesse instantanée est un objet mental très difficile à concevoir qui suscite des réticences chez les élèves.

D'une part, la vitesse instantanée est un objet difficile à imaginer, à percevoir. En effet, la vitesse instantanée est loin d'être sur pied d'égalité avec les autres vitesses, du fait que cette perception provient de la coordination de deux sensations : les images dynamiques d'une part, le sentiment de durée d'autre part. Par contre, le fait que la perception se déroule dans le temps, ne creuse aucun fossé entre l'aire rectiligne et l'aire curviligne : la vue à elle seule permet d'appréhender aussi bien l'une que l'autre. L'aire se concrétise par une surface qui est là, sous nos yeux, et qui le reste aussi longtemps qu'on le désire. On perçoit donc aussi bien l'aire curviligne que l'aire rectiligne sans avoir à assimiler la première à la seconde. D'un certain point de vue la filiation mentale est plus aisée entre les aires curvilignes et les aires rectilignes qu'entre les vitesses instantanées et les vitesses moyennes. Ceci ne signifie évidemment pas qu'il n'y ait pas de difficultés à concevoir l'aire curviligne comme limite d'aire rectiligne.

D'un autre côté, le refus de la vitesse instantanée est lié à la manière dont ce concept est défini au sein des mathématiques elles-mêmes, c'est-à-dire comme une limite de vitesses moyennes.
Étant une grandeur intensive (c'est-à-dire une espèce de grandeur pour laquelle l'addition n'est pas définie, mais où on peut définir la relation d'inégalité « plus grand que »), une vitesse instantanée ne peut se penser en termes d'ajouts successifs, ce qui contribue à son éloignement des vitesses moyennes dont elle est la limite. En effet, une vitesse ne peut être décomposée en somme de parties de vitesse. La suite - en un sens familier puisqu'il s'agit en fait de la limite d'une fonction-vitesse - dont la limite définit une vitesse instantanée ne se pense donc nullement en termes de série, c'est-à-dire en termes d'ajouts successifs. On doit, à chaque étape, abandonner la vitesse moyenne déjà calculée pour envisager la suivante, ce qui peut paraître fort peu naturel et frustrant.
Une observation a été faite par M. Schneider dans le cadre de calcul d'aire. Pour estimer l'aire de la surface délimitée par le graphe de $y = x^3$, l'axe Ox et la droite d'équation $x = 1$, beaucoup d'élèves choisissent d'emblée un découpage inspiré par la forme de la surface, comme celui de la fig. 17 a et mettent du temps à évoquer un découpage laminaire suggéré par la fig. 17 b. Ce qui s'explique par le fait que seul le premier découpage conduit naturellement à l'idée de série assez spontanée chez les élèves : on approche l'aire au moyen d'un triangle le plus gros possible s'inscrivant dans la surface considérée ; triangle qu'on garde et auquel on adjoint des plus petits triangles se logeant dans la partie restante, et ainsi de suite. Par contre, un premier découpage laminaire en n rectangles est abandonné, à l'étape suivante au profit d'un autre (en $n + 1$ ou $2n$ rectangles) plus « dense ». Ces abandons successifs peuvent paraître a priori frustrants, voire aberrants : pourquoi ne pas garder ce qui est déjà

acquis ! La considération des premiers termes de la suite n'a donc de sens que pour celui qui conçoit d'emblée le déroulement du processus jusqu'à son terme, c'est-à-dire la limite de la suite, ou éventuellement pour celui qui espère pouvoir généraliser les premiers termes par le biais d'un algorithme de calcul. Tout ceci explique pourquoi les découpages laminaires sont, dans un premier temps peu souvent évoqués par les élèves.

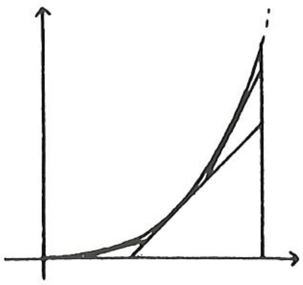


fig. 17 a

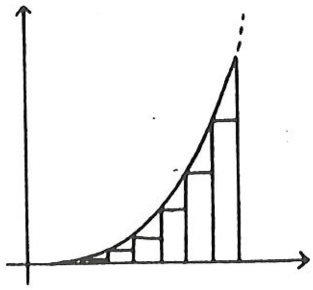


fig. 17 b

Mais il y a dans le cas des vitesses une difficulté nouvelle par rapport aux aires. C'est que, même dans le cas où l'aire curviligne est la limite d'une suite qui ne se voit pas aisément sous son aspect série (comme dans le cas de la fig. 16 b), le but à atteindre est visible depuis le début : à chaque étape, on peut comparer à vue le terme de la suite à l'aire curviligne et ainsi évaluer la progression, en une succession de dessins bien entendu. Rien de tel dans le cas des vitesses.

Il ne s'agit donc plus d'un but perceptible à atteindre, par rapport auquel on peut évaluer périodiquement la progression, mais d'un processus un peu aveugle dont le terme est inconnu car non identifié à l'avance et qui d'ailleurs ne reçoit existence que par le truchement d'une définition, par le processus même dont il est le terme.

1.2.3 Une limite définie par la suppression de termes ; notion d'infinitésimal.

On définit une vitesse instantanée qu'on appelle limite de l'expression d'une vitesse moyenne, comme le résultat obtenu en supprimant de cette expression tous les termes contenant Δt, une fois toutes les simplifications algébriques effectuées. Cette méthode rappelle celle utilisée par Fermat (17$^{\text{ème}}$ siècle) pour déterminer des extréma et des tangentes (voir section 1.1.3.1.); elle mobilise ce que l'on appelle un infinitésimal, soit un incrément e de la variable que l'on rend nul en fin de calcul. Ces infinitésimaux ont suscité dans l'histoire des mathématiques de nombreux débats : tantôt ils sont pris comme valant zéro, tantôt ils sont pris comme différents de zéro.

Notons que calculer la limite d'une suite ou d'une fonction lorsque x tend vers l'infini revient également au bout du compte à supprimer des termes. Par exemple, le calcul suivant :

$$\lim_{x\to\infty} \frac{2x-1}{x+3} = \lim_{x\to\infty} \frac{x\left(2-\frac{1}{x}\right)}{x\left(1+\frac{3}{x}\right)} = \lim_{x\to\infty} \frac{2}{1} = 2$$

revient à « laisser tomber $1/x$ et $3/x$ » . Mais ces termes n'ont pas même allure que Δt : « $1/x$ ne peut égaler 0 sans que x n'atteigne l'infini, ce qui n'arrivera jamais » disent les élèves. Par contre qu'est-ce qui empêche Δt, incrément d'une variable continue, de devenir tout à fait nul ? L'annulation de Δt est donc plus spontanée.

Remarquons aussi que le calcul de

$$\lim_{x\to\infty} \frac{2x-1}{x+3} = 2$$

conduit à l'asymptote horizontale $y = 2$ dont s'approche le graphique de la fonction, sans l'atteindre dans ce cas. Le fait que la fonction ne se confonde pas avec son asymptote, mais s'en approche seulement, est en accord avec le sentiment d'avoir commis des erreurs, fussent-elles minimes, en négligeant les termes $1/x$ et $3/x$.
Par contre, dans le contexte des vitesses, on obtiendrait une vitesse instantanée, considérée inaccessible a priori, après avoir commis des erreurs analogues : le choc mental est tout autre !

Cette négligence de termes qui fournit une réponse exacte apparaît également pour le calcul des aires. Mais dans ce cas, une preuve par l'absurde peut être faite pour permettre aux élèves de se rendre compte qu'on arrive à une réponse correcte.
Regardons cette preuve sur l'exemple du calcul de l'aire sous la courbe $y = x^3$ sur l'intervalle $[0, 1]$.

Montrons que l'aire est bien égale à 1/4 .

- Supposons que l'aire soit égale à

  $$\frac{1}{4} - \frac{1}{10^m} \quad \text{(avec m aussi grand qu'on veut).}$$

  Ce n'est pas possible, car en subdivisant l'intervalle en $10^m/2$ segments, la somme des rectangles inscrits vaut

  $$\frac{1}{4} - \frac{1}{10^m} + \frac{1}{10^{2m}}$$

  ce qui est strictement plus grand que

  $$\frac{1}{4} - \frac{1}{10^m}$$

- Supposons que l'aire soit égale à

  $$\frac{1}{4} + \frac{1}{10^m} \quad \text{(avec m aussi grand qu'on veut).}$$

Ce n'est pas possible, car en subdivisant l'intervalle en $10^{2m}/2$ segments, la somme des rectangles circonscrits vaut

$$\frac{1}{4} + \frac{1}{10^{2m}} + \frac{1}{10^{4m}}$$

ce qui est strictement plus petit que

$$\frac{1}{4} + \frac{1}{10^{m}}$$

Finalement, puisque l'aire en question ne peut être ni strictement plus petit que 1/4 , ni strictement plus grande, il faut bien qu'elle soit égale à 1/4 .

Cette preuve est formulée avec des puissances de 1/10. Remplaçons-les ici par ε qui deviendra pour les élèves une notation suggérant « un tout petit quelque chose ». Cela devient : l'aire sous $y = x^3$ ne peut valoir $1/4 + \varepsilon$, aussi petit que soit ε, car en subdivisant l'intervalle en un nombre suffisant de segments, on peut intercaler entre 1/4 et $1/4 + \varepsilon$, la somme correspondante de rectangles circonscrits (fig. 18). D'où la contradiction : l'aire cherchée est supérieure à une de ses approximations par excès. De façon analogue, on montre que cette aire ne peut valoir $1/4 - \varepsilon$.

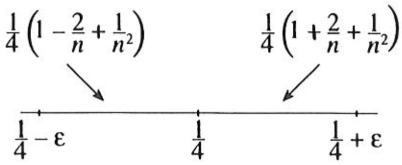


fig. 18

Cette preuve est proposée dans le guide méthodologique et dans le manuel pour l'élève « Vers l'infini pas à pas » (Groupe AHA, [9] et [10]). Les auteurs de ces manuels font remarquer que cette preuve amorce le concept de limite d'une suite, définie en (ε, N).

Si le concept de limite est mobilisé ici, c'est de manière implicite et à l'état d'ébauche seulement. On est encore loin de sa formulation symbolique.

Mais ce qui paraît important aux auteurs du projet AHA dans cette preuve par l'absurde, c'est qu'elle fait pressentir ce qui débouchera sur la formulation technique précise du concept de limite et que ce dernier joue un rôle instrumental dans son élaboration. Cette preuve repose en effet sur la possibilité de rendre à la fois

$$\frac{1}{4}\left(1 + \frac{2}{n} + \frac{1}{n^2}\right) \quad \text{et} \quad \frac{1}{4}\left(1 - \frac{2}{n} + \frac{1}{n^2}\right)$$

aussi proche qu'on veut de 1/4 à partir d'un certain rang.

Dans cette preuve par l'absurde, on voit clairement apparaître la contradiction : l'aire par défaut (respectivement par excès) est supérieure (respectivement inférieure) à l'aire véritable, ce qui permet d'accepter qu'on en arrive à l'aire exacte par la suppression de termes.
Si, comme dans le cas des aires, avec une contradiction aussi marquante, on pouvait réaliser le même type de preuve pour convaincre les élèves que la suppression du Δt (respectivement Δx) dans l'expression des vitesses moyennes (respectivement dans l'équation des pentes des sécantes) fournit la vitesse instantanée (respectivement la tangente), cela les aiderait à avoir une attitude moins réticente vis-à-vis de la vitesse instantanée (respectivement pente de tangente). Comme on le verra, la contradiction est moins nette.

Regardons cette preuve :

Considérons la fonction t^2.

Le taux moyen de variation sur l'intervalle $[t, t+\Delta t]$ vaut

$$\frac{(t+\Delta t)^2 - t^2}{\Delta t} = \frac{t^2 + 2t\Delta t + (\Delta t)^2 - t^2}{\Delta t} = 2t + \Delta t$$

Montrons que le taux de variation instantané vaut

$$\lim_{\Delta t \to 0} 2t + \Delta t = 2t$$

Nous allons faire cette démonstration dans le cas des vitesses et des tangentes en nous plaçant en $t=1$. Il s'agira donc de montrer que la vitesse instantanée et la pente de la tangente en $t=1$ vaut 2.

a) <u>Plaçons-nous dans le contexte des vitesses</u>

La fonction t^2 exprime la position d'un mobile sur une trajectoire rectiligne. Étudions cette fonction en $t=1$.

Supposons par l'absurde que la vitesse instantanée est différente de 2.

- Supposons que la vitesse instantanée au temps $t=1$ vaut $2+\varepsilon$ avec $\varepsilon > 0$.
  Alors il existe un $\Delta t > 0$ tel que
  $$2+\Delta t < 2+\varepsilon \qquad (8)$$
  (8) entraîne que la vitesse instantanée au temps $t=1$ est supérieure à la vitesse moyenne entre 1 et $1+\Delta t$, ce qui est impossible car le mobile accélère (les élèves se rendent compte que le mobile accélère sur quelques exemples numériques ou par graphique) et donc la valeur de la vitesse moyenne devrait être supérieure à la valeur de la vitesse instantanée. Par conséquent, la vitesse instantanée ne vaut pas $2+\varepsilon$ pour tout $\varepsilon > 0$.

- Supposons maintenant que la vitesse instantanée au temps $t=1$ vaut $2-\varepsilon$ avec $\varepsilon > 0$.
  Alors il existe un $\Delta t > 0$ tel que
  $$2-\Delta t > 2-\varepsilon$$
  ce qui est équivalent à
  $$2+\varepsilon > 2+\Delta t \qquad (9)$$
  (on retrouve la même contradiction que (8))
  (9) entraîne que la vitesse instantanée au temps $t=1$ est supérieure à la vitesse moyenne entre 1 et $1+\Delta t$, ce qui est impossible car le mobile accélère la valeur de la vitesse

moyenne devrait être supérieure à la valeur de la vitesse instantanée. Par conséquent, la vitesse instantanée ne vaut pas 2-ε pour tout ε > 0.

Puisque la vitesse instantanée ne vaut ni 2+ε, ni 2-ε pour tout ε > 0, elle vaut 2.

b) Plaçons-nous dans le contexte des tangentes

Étudions la tangente à la courbe t^2 en t=1.

Supposons par l'absurde que la pente de la tangente est différente de 2.

- Supposons que la pente de la tangente au point t=1 vaut 2+ε avec ε > 0.
  Alors il existe un Δt > 0 tel que
  $$2+\Delta t < 2+\varepsilon \qquad (10)$$
  (10) entraîne que la pente de la tangente au temps t=1 est supérieure à la pente de la sécante passant par les points de coordonnées (1,1) et $(1+\Delta t,(1+\Delta t)^2)$, ce qui est impossible si on le représente graphiquement car la pente de la sécante sera supérieure à la pente de la tangente. Par conséquent, la pente de la tangente ne vaut pas 2+ε pour tout ε > 0.

- Supposons que la pente de la tangente au point t=1 vaut 2-ε avec ε > 0.
  Alors il existe un Δt > 0 tel que
  $$2-\Delta t > 2-\varepsilon$$
  ce qui est équivalent à
  $$2+\varepsilon > 2+\Delta t \qquad (11)$$
  (11) entraîne que la pente de la tangente au temps t=1 est supérieure à la pente de la sécante passant par les points de coordonnées (1,1) et $(1+\Delta t,(1+\Delta t)^2)$, ce qui est impossible si on le représente graphiquement car la pente de la sécante sera supérieure à la pente de la tangente. Par conséquent, la pente de la tangente ne vaut pas 2-ε pour tout ε > 0.

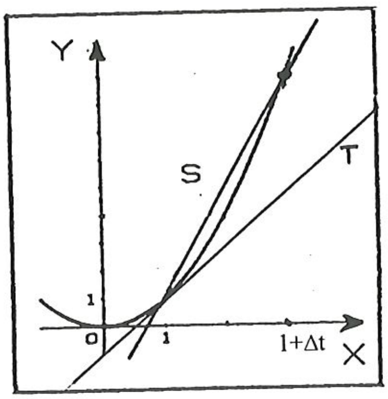


fig.19

Puisque la pente de la tangente ne vaut ni 2+ε, ni 2-ε pour tout ε > 0, elle vaut 2.

Ainsi, on voit qu'il était également possible d'effectuer une preuve par l'absurde dans le cas des vitesses instantanées et des pentes de tangente mais la contradiction saute moins aux yeux que dans le cas des aires. En effet, des aires sont plus perceptibles visuellement que des vitesses et des pentes de tangentes.

1.2.4. Ce qui a trait au théorème fondamental.

Cette section est en grande partie inspirée de « Vers l'infini pas à pas, guide méthodologique » (Groupe AHA, [9]).

Lorsqu'on interroge des élèves de l'enseignement secondaire ou étudiants universitaires sur le calcul intégral, certaines notions subsistent encore dans leur mémoire : comme par exemple l'exploitation du calcul des primitives pour déterminer l'aire et l'approximation d'une aire par des sommes de rectangles.
Quant au théorème fondamental dont on rappelle l'énoncé :

Soit f : [a, b] $\rightarrow$ IR continue (a, b $\in$IR, a < b)
Soit F une primitive de f sur [a, b]
Alors,

$$\int_{[a,\,b]} f(t)\,dt = F(b) - F(a)$$

(dans cet énoncé l'intégrale est définie comme la limite d'une somme)

il ne subsiste que peu ou pas de souvenir. Les quelques rares élèves qui donnent un sens au théorème évoquent une variation d'aire.
Notons que l'aire apparaît souvent comme étrangère à toute idée de variation. C'est Newton qui sera le premier, au 17$^{\text{ème}}$ siècle, à penser l'aire et le volume comme des quantités variables, fonctions d'une abscisse.
Les élèves éprouvent, eux aussi, quelque peine à associer à une aire ou à un volume ne fût-ce qu'une conception commune de variabilité et a fortiori le concept mathématique de fonction. C'est ce qui fait que beaucoup ne trouvent aucun sens particulier au fait que la dérivée de l'aire du disque, par rapport au rayon est l'expression de son périmètre : faute d'imaginer le disque qui varie, on ne peut concevoir que son taux de variation est la mesure du cercle.

Si les aires et les volumes ne sont pas spontanément perçus comme des fonctions, peut-être est-ce parce qu'ils sont fonctions d'une variable indépendante autre que le temps. En effet, on conçoit aisément que les quantités qui varient dans le temps soient a priori perçues comme des fonctions : une idée intuitive de variation s'impose par le fait même qu'elles changent effectivement pendant qu'on les considère ou qu'on les observe.
Notons qu'une fois qu'on perçoit l'aire comme quantité variable, on associe cette variabilité au temps. Si on regarde dans l'histoire, avant d'être pensée comme quantité dépendant de l'abscisse x, l'aire sous une courbe est perçue par Newton en terme de quantité variant en fonction du temps. Toute autre quantité variable est également considérée de la sorte, du moins au début de son œuvre. Effectivement, les concepts de base choisis par Newton au début de son œuvre sont les concepts de *fluente* et de *fluxion*. Une fluente x est précisément

une quantité qui évolue en fonction du temps, tandis que sa fluxion x' représente sa vitesse, ou comme le dit Newton lui-même, son « taux d'écoulement dans le temps ».
Le balayage de l'aire sous une courbe par le segment de hauteur $f(x)$ est donc à l'origine un balayage temporel. Newton imagine un point qui se meut dans le temps sur l'axe des x ; à hauteur de ce point, il se représente un segment qui balaye l'aire dans le même temps. Il envisage donc d'abord les variations temporelles concomitantes de l'abscisse et de l'aire. Ensuite seulement, il exclut le facteur temps pour ne plus tenir compte que de la seule dépendance entre l'aire et l'abscisse.

Pour éliminer le paramètre temps dans la suite de son œuvre, Newton choisit une variable : Soit x dont il suppose la vitesse uniforme : par exemple $x' = 1$; il accorde alors la priorité non plus au concept de fluxion lui-même mais au rapport de deux fluxions, c'est-à-dire à l'ultima ratio :

$$\frac{y'}{x'} = \frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}} = \frac{dy}{dx}$$

Dès ce moment, ce n'est plus du temps, mais d'une variable quelconque x choisie comme variable de référence que dépendent toutes les autres variables.

L'élimination du temps chez Newton permet de comprendre une difficulté fondamentale éprouvée par plusieurs élèves : passer d'une vitesse instantanée qui est une dérivée par rapport au temps, au taux de variation instantané dans lequel la variable indépendante ne serait plus le temps.
Dans le problème de la tache d'huile (voir ci-dessous) où la surface sous une courbe apparaît comme une tache d'huile en formation, la vitesse instantanée de l'aire est la longueur du segment $f(x)$ car $x = t$.
Mais si, par exemple, $x = 2t$, $f(x)$ est la dérivée de l'aire par rapport à x et non plus par rapport à t. Les élèves réalisent difficilement ce fait. En effet, au lieu de percevoir $f(x)$ comme le taux d'accroissement instantané de l'aire sous la courbe par rapport à x, les élèves percevraient le segment (dont $f(x) > 0$ est la longueur) comme l'accroissement instantané de cette aire, au sens de grandeur minimale qu'on doit rajouter, à la vitesse de la pensée, pour constituer la surface en allant de gauche à droite. Il ne s'agirait même pas pour eux d'un taux, étant donné que la variable indépendante est implicite : le temps du déroulement de la pensée.

Problème de la tache d'huile proposé dans « Vers l'infini pas à pas, manuel pour l'élève » (Groupe AHA, [10])

Soit la courbe d'équation

$$y = f(x) = 1 - x^4$$

dont le graphique est donné en partie par la figure 20. Que vaut l'aire comprise sous cette courbe entre les abscisses 0 et 1 ?

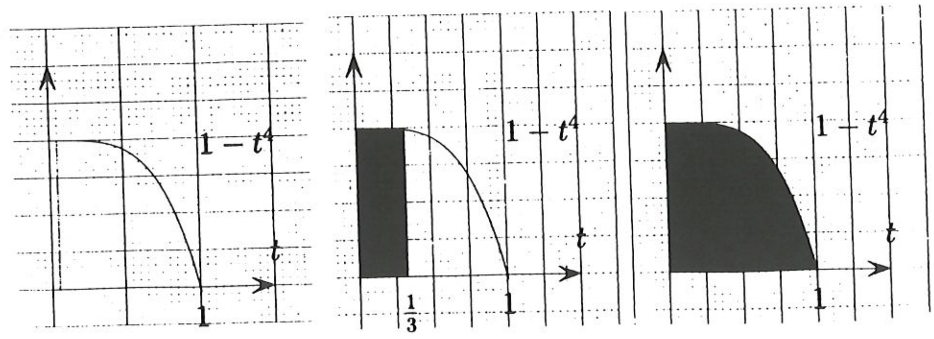


fig. 20

On propose l'expérience mentale suivante : imaginons que la surface considérée soit progressivement recouverte par une tache d'huile qui grandit au fil du temps, atteignant au temps t tous les points situés sous la courbe jusqu'à l'abscisse $x = t$. La tache avance avec une vitesse constante égale à l'unité ($x=t$).

a) Calculez la vitesse de croissance de l'aire.
b) Déduisez-en l'aire recherchée.

Comme nous avons vu que l'idée de variation est intuitivement liée au temps, il semble légitime, dans un cours, d'introduire la dérivée au sein d'un contexte cinématique. Il faudra sortir ensuite du contexte temporel, ce qui ne sera pas évident si on s'en réfère au cas des aires comme vu ci-dessus.

1.3 Quelques éléments d'analyse pour la partie III.

Après avoir réalisé un relevé des différents obstacles épistémologiques qui peuvent être rencontrés lors de l'apprentissage de la dérivée, nous proposons ici quelques éléments constitutifs d'une grille d'analyse qui nous permettra de voir si ces différents obstacles sont franchis ou contournés actuellement dans l'enseignement secondaire et de quelles manières. Cette grille d'analyse comportera également d'autres questions qui nous semblent utiles pour une analyse de l'enseignement de la dérivée tel qu'il est pratiqué actuellement. Cette grille sera complétée à la fin de la deuxième partie où une grille définitive sera donnée avant d'entamer la troisième partie.

Que reste-t-il de la dérivée pour un élève qui entre en 1ère candidature ?

Comment amène-t-on la notion de dérivée dans le secondaire ? Par la notion de vitesse ou la notion de pente de tangente ? Quel est leur poids respectif ? Les problèmes de mouvements occupent-ils une place importante ?

Comment dans l'enseignement secondaire passe-t-on de la limite de quotients différentiels à la pente de la tangente ?

Comment sont définis les objets-tangentes ? N'y a-t-il pas un cercle vicieux avec la définition de dérivée, ne se définissent-ils pas l'un l'autre ?

Comment est gérée la façon de faire assimiler aux élèves le fait de poser $\Delta t=0$ dans l'expression de la vitesse moyenne ou de poser $\Delta x=0$ dans l'expression des pentes des sécantes ? Choisit-on une notation mettant en évidence le 0/0 ou opte-t-on plutôt pour une notation qui l'évite ?

Présente-t-on assez d'exemples de contextes différents dans lesquels la dérivée apparaît de façon à ce que l'élève soit amené à penser à la dérivée?

Partie II :

Que doit-on espérer d'un futur utilisateur de la dérivée ?

2.1 Qu'attend-t-on d'un futur utilisateur de la dérivée ?

On attend d'un futur utilisateur de la dérivée qu'il reconnaisse quand il doit utiliser la dérivée et qu'il y parvienne. En effet, dans les problèmes nécessitant l'utilisation de la dérivée, le mot « dérivée » n'apparaît pas toujours tel quel. On retrouve par exemple des mots tels que débit instantané, puissance instantanée, vitesse instantanée,… et on voudrait que les utilisateurs y décèlent la *dérivée*.

Pour en arriver à montrer la variété de situations concrètes pour la dérivée, nous avons repris différents énoncés nécessitant l'utilisation de la dérivée dans différents contextes. Ces énoncés n'utilisent pas le mot « dérivée » mais bien les mots : taux de variation, vitesse, taux de croissance, taux marginal,…
La dérivée apparaît dans différentes branches (physique, biologie,…) mais aussi dans différentes situations mathématiques, à savoir, calcul de dérivée, problèmes d'optimisation, équations différentielles. Nous proposerons des exercices variés à partir de ces différentes situations.

• Calcul de dérivée

Nous avons puisé les neufs exemples suivants dans « Atelier 103, calcul différentiel et intégral I (troisième édition) » de l'Equipe Mathécrit (Equipe MATHECRIT, [12]) composée d'environ vingt-cinq professeurs enseignant dans différentes régions du Quebec de niveau collégial.

La dérivée en physique

1. Un automobiliste part de Québec pour se rendre à Chicoutimi, 222 km plus loin. La distance qu'il a parcourue t heure après son départ de Québec est donné par

$$d(t) = 8\,t^2 + 66\,t \text{ km} \qquad 0 \leq t \leq 3$$

Le panneau indiquant « Lac Jacques Cartier » est situé à 117 km de Chicoutimi.

(a) Est-il exact d'affirmer que l'automobiliste mettra 1 heure 30 minutes pour se rendre au Lac jacques Cartier ?

(b) Où se trouvera l'automobiliste après 3 heures de route ?

(c) Que représente, dans ce contexte, l'expression

i) $\dfrac{d(3/2) - d(0)}{3/2}$?

ii) $\lim_{\Delta t \to 0} \dfrac{d(3/2 + \Delta t) - d(3/2)}{\Delta t}$?

(d) Quelle est la vitesse de l'automobiliste au moment précis où il passe le panneau indiquant « Lac Jacques Cartier » ?

Nos commentaires :

Ce premier exercice est un exercice type de ce qui peut apparaître dans les cours de mathématiques pour donner une interprétation physique de la dérivée (nous nous permettons d'avancer ce propos en nous basant sur quelques cahiers d'élèves que nous avons observés).

Très souvent dans les cours, on se limite à une interprétation physique, géométrique et économique (des exercices comme le 2, 3, 4, 5, 6 et 7 n'apparaissent pas).

Notons de plus que la forme de ce premier énoncé n'est pas tout à fait réaliste car dans la vie courante, il est rare de trouver une distance exprimée en termes d'équation.

Par ailleurs, l'exercice suivant (2.) nous semble intéressant : il nécessite de dériver par rapport à une autre variable que le temps (l'altitude). Il peut permettre de montrer aux élèves que la dérivation ne se fait pas uniquement par rapport au temps.

2. Dans la troposphère (région située entre 0 et 11 km au-dessus du sol), la température T (en degré Celsius) diminue avec l'altitude h (en kilomètres), selon l'équation suivante :

$T(h) = T_0 - 6{,}4h$ où $0 \leq h \leq 11$ est la température au sol.

(a) Dans ce contexte, que représente l'expression

i) $T(11)$?

ii) $T(10) - T(5)$?

iii) $\lim_{h\to 10} \dfrac{T(h) - T(10)}{h - 10}$?

(b) Si la température au sol est de 15°C

i) Quelle est la température dans la troposphère à 11 km d'altitude ?

ii) Quel est, à l'altitude h, le taux de diminution instantané de la température dans la troposphère ?

(c) Quel est le taux de diminution instantané de la température dans la troposphère

i) à une altitude de 1 km ?

ii) si la température au sol est de 20°C ?

La dérivée en écologie

3. Au rythme où il va, l'homme est en voie de faire de sa planète un immense dépotoir. Après analyse, un comité pour la protection de l'environnement prévoit que dans x années (à compter d'aujourd'hui), la quantité de déchets accumulés sera :

$$Q(x) = 10^4\,(x^2 + 15x + 70) \text{ tonnes métriques} \qquad 0 \le x \le 10$$

(a) Quelle est la quantité de déchets accumulés actuellement ?
Que sera-t-elle dans dix ans ?

(b) Quel sera le taux de variation moyen de la quantité de déchets accumulés durant les 3 prochaines années ?

(c) Que représente, dans ce contexte, l'expression

i) $\dfrac{Q(10) - Q(5)}{5}$?

ii) $\lim_{x\to 5} \dfrac{Q(x) - Q(5)}{x - 5}$?

(d) Quel sera le taux de variation instantané de la quantité de déchets accumulés dans x années ? dans 5 ans ? Quel est-il actuellement ?

(e) Dans combien d'années le taux de variation instantané de la quantité de déchets accumulés sera-t-il exactement de 30×10^4 tonnes/an ?

4. Dans t jours à compter d'aujourd'hui, la quantité d'algues dans un aquarium sera :

$$Q(t) = 3t^2 + 4 \text{ grammes.}$$

(a) Que représente, dans ce contexte, l'expression

i) $Q(4) - Q(0)$?

ii) $\lim_{\Delta t\to 0} \dfrac{Q(4 + \Delta t) - Q(4)}{\Delta t}$?

(b) Quel sera le taux de variation instantané de la quantité d'algues dans l'aquarium au temps t ?

(c) Ce taux de variation instantané augmentera-t-il au fil des jours ? Justifier.

La dérivée en chimie

5. Deux produits chimiques A et B réagissent pour former un produit C. La quantité $Q(t)$ du produit C formée au temps t (en secondes) est donnée par

$$Q(t) = 2 - 1/t \quad \text{grammes, } t \geq 1.$$

(a) Que représente, dans ce contexte, l'expression

i) $\dfrac{Q(2) - Q(1)}{2 - 1}$?

ii) $\lim_{t\to 2} \dfrac{Q(t) - Q(2)}{t - 2}$?

(b) Calculer le taux de variation moyen de la quantité du produit C entre la première et la deuxième seconde.

(c) Calculer le taux de variation instantané de la quantité du produit C à la deuxième seconde.

La dérivée en biologie

6. On fait des expériences en laboratoire pour étudier un vaccin. Un médecin injecte ce vaccin à un de ses patients. Les analyses sanguines révèlent que le nombre $N(t)$ de microbes vivants par millilitre, t heure après l'injection, est

$$N(t) = 10^4 (72 - 2t)^2 \qquad t \geq 10$$

(a) Que représente, dans ce contexte, l'expression

i) $N(12)$?

ii) $N(24) - N(12)$?

iii) $\dfrac{N(24) - N(12)}{12}$?

(b) Dans combien d'heures le patient sera-t-il libéré de ces microbes ?

(c) Quel est le taux de diminution instantané du nombre de microbes vivants, par millilitre, 12 heures après l'injection ?

La dérivée en démographie

7. Après analyse, des démographes prédisent que la population d'un certain village dans x années à compter d'aujourd'hui, sera donnée par

$$P(x) = 3000 - x^2 + 70x$$

(a) Quelle est la population actuelle du village ? Que sera-t-elle dans dix ans ?
(b) Quel sera le taux de croissance moyen de cette population dans les dix prochaines années ?
(c) Quel est le taux de croissance actuel de cette population ? Que sera-t-il dans exactement dix ans ?
(d) Dans combien d'années le taux de croissance de cette population sera-t-il de 30 habitants/an ?

Nos commentaires :
On voit que bon nombre d'exercices utilisent des dérivées par rapport au temps, probablement car la variable temps introduit particulièrement bien une idée de variation. Ici, sur les sept exercices proposés, un seul ne fait pas intervenir le temps (2.).

La dérivée en économie

Commentaires des auteurs en guise d'introduction à l'exercice 8 :
Le coût total C pour fabriquer un produit est composé des coûts fixes (loyer, assurance,...) qui ne dépendent pas de la quantité q d'unités fabriquées, et des coûts variables (main d'œuvre, matières premières,...) qui eux, dépendent de la quantité q d'unités fabriquées. Donc le coût total est fonction de la quantité q d'unités fabriquées et sera noté C(q).

8. Un éditeur veut publier un livre d'art dont le tirage n'excèdera pas 150 exemplaires. Il estime que le coût total, en dollars, pour produire q livres est donné par

$$C(q) = 2400 + 30q - 0.1q^2 \text{ où } q = 0,1,2,\ldots,150$$

(a) Calculer le coût total pour produire les 100 premiers livres.
(b) Quel est le coût moyen pour fabriquer les 100 premiers livres ?
(c) Quel est le taux de variation moyen du coût total entre le 10^e et le 11^e livre ?
(d) Quelle est l'augmentation du coût total causée par la production du 11^e livre ?

Définition et remarque des auteurs :
Les économistes appellent coût marginal l'augmentation du coût total causée par la fabrication d'une unité supplémentaire du produit. Ainsi, si le coût de fabrication pour 10 unités est de $2690 et pour 11 unités de $2717.90, on dira que le coût marginal à la dixième unité est de $27.90 ; c'est-à-dire, il en coûte $27.90 pour fabriquer une unité supplémentaire lorsqu'on en a déjà fabriqué 10.

Comme on ne peut fabriquer ni vendre des fractions d'objets, la plupart des fonctions rencontrées en économie sont de type discontinu. En pratique, les économistes traitent ces fonctions comme des fonctions continues, c'est-à-dire, ils font comme si l'on pouvait relier les points de leur graphe par une ligne continue. Cela laisse supposer que l'on peut fabriquer des fractions d'unité du produit, ce qui n'est évidemment pas conforme à la *réalité. Cette façon de procéder permet cependant d'obtenir des résultats intéressants en économie.*

Si on considère la fonction C comme une fonction continue, son graphique (fig. 21) a l'allure suivante :

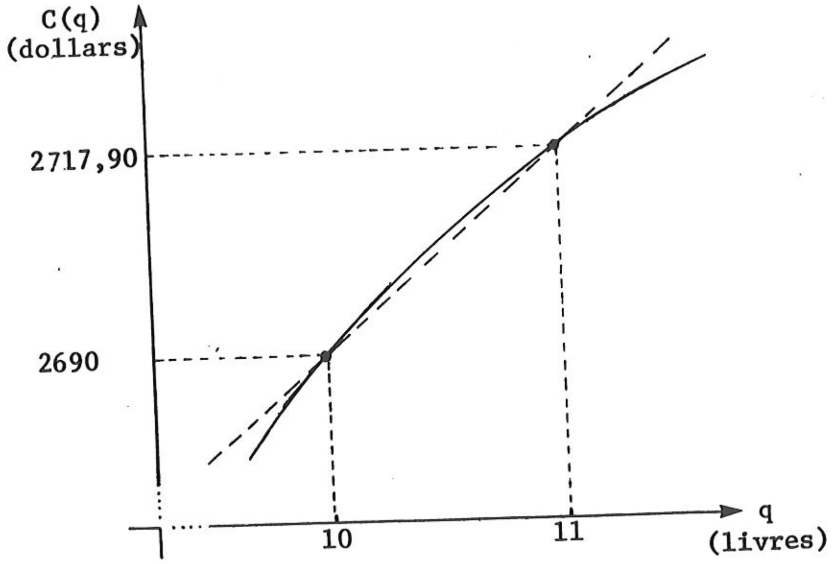


fig. 21

(e) La pente de la sécante à la courbe aux points d'abscisses 10 et 11 est

$$\frac{C(11) - C(10)}{11 - 10} = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \text{(compléter)}$$

Or au point (d), on a trouvé que le coût marginal à la 10^e unité était de $27.90.

Le coût marginal à la 10^e unité correspond donc graphiquement à.............. .

(f) Tracer la tangente au graphe de C au point d'abscisse 10.

Il est facile de constater que cette tangente et la sécante déjà tracées sont presque confondues. La pente de la sécante est donc approximativement égale à celle de la tangente.

Or la pente de la tangente au point d'abscisse 10 est donnée par

$$C'(10) = \lim_{\Delta q \to 0} \frac{C(10 + \Delta q) - C(10)}{\Delta q}$$

$$= \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \text{(compléter)}$$

Effectivement, la pente de la tangente (28) est presque égale à la pente de la sécante (27.9).

On peut donc approximer le coût marginal à la 10^e unité par la dérivée de la fonction coût en 10. (i.e. $C(11) - C(10) \simeq C'(10)$).

<u>Commentaire des auteurs</u> :
Si C(q) représente le coût total pour fabriquer q objets, le coût marginal à la p^e unité représente l'augmentation du coût total entraînée par la fabrication d'une unité supplémentaire.

La valeur du coût marginal à la p^e unité est donnée (approximativement) par C'(p).

9. Constatant que la demande de vélomoteurs augmente constamment, une petite entreprise décide de lancer un nouveau modèle pour tenter de s'approprier une part du marché. Le comptable de la compagnie propose de vendre chaque vélomoteurs au prix de $240 et estime que le coût total pour produire x modèles sera

$$C(x) = 180x + 120\,000 \text{ dollars.}$$

(a) Quel profit réalisera l'entreprise en vendant 2000 vélomoteurs?
(b) Trouver une expression qui donne le profit réalisé sur la vente de x modèles.
(c) Calculer le profit marginal à la 3000^e unité.

La dérivée peut être intéressante pour résoudre des problèmes d'optimisation.

- **Problème d'optimisation**

L'exercice suivant est un exercice classique que l'on retrouve dans les cours d'élèves.

Un carton publicitaire doit comporter 300 cm² de surface imprimée, 2 cm de marge en haut et en bas et 1,5 cm latéralement. Quelles sont ses dimensions possibles ? (indication : calculer l'aire du carton en fonction d'une de ses dimensions.)

La dérivée est nécessaire aussi dans la résolution d'équations différentielles.

- **Equations différentielles**

<u>Problème1</u>

1. Pendant le premier mois de croissance de certaines plantes, la vitesse de croissance (exprimée en grammes/jour) est proportionnelle au poids w(t) du moment (la variable t

désigne le temps exprimé en jours et la fonction w(t) désigne le poids au temps t, exprimé en grammes).
Pour certaines espèces de coton, on a

$$w'(t) = 0.21\ w(t).$$

Évaluer le poids d'un plant à la fin du mois (t = 30) si le plant pesait 70 mg au début du mois. (exercice provenant du cours de mathématiques en $1^{\text{ère}}$ candidature biologie donné par Madame S. Thiry (F.U.N.D.P.))

Ce problème peut être désarçonnant pour l'élève car on demande de trouver une vitesse qui doit être exprimée en grammes/jour.

Problème 2

2. Selon la loi de Newton, la vitesse de variation de la température d'un corps est proportionnelle à la différence de température entre le corps et le milieu ambiant. Si la température de l'air est de 30°C et que le corps passe de 100°C à 70°C en 15 minutes, au bout de combien de temps se trouvera-t-il à 40°C? (Exercice extrait de « Théorie et applications du calcul différentiel et intégral » de Frank Ayres (F. AYRES, [13])).

Dans le livre où nous avons pris cet énoncé, il n'est pas écrit « vitesse de variation de la température d'un corps » mais « refroidissement d'un corps ». Nous avons transformé cette expression car il nous semblait que la version exprimée dans le livre n'explicitait pas assez le concept de dérivée. Cependant, des biologistes nous ont fait remarquer qu'ils n'utilisaient jamais le terme « taux de variation de la température d'un corps » mais bien « refroidissement d'un corps ».

Ce problème sera proposé à une biologiste et un pharmacien tout deux actuellement étudiant en agrégation, ainsi qu'à un professeur en Biologie afin de voir s'ils y reconnaissaient la nécessité d'utiliser la dérivée. Leurs réactions seront décrites et analysées dans la partie III.

Problème 3

3. Votre équipe est consultée pour résoudre un problème qui préoccupe les dirigeants d'une firme pharmaceutique. Le voici :

   La concentration dans le sang résultant de l'injection d'une dose de médicament décroît avec le temps au fur et à mesure que le médicament est éliminé par l'organisme. Cette diminution est proportionnelle à la quantité de médicament injectée.
   La firme se demande comment modéliser l'évolution de la concentration du médicament dans le sang en fonction du temps. Les unités choisies sont l'heure pour le temps et les mg/ml pour la concentration. Si d'autres quantités apparaissent dans la

modélisation, il faut en préciser les unités. Proposez une modélisation simple de cette évolution. (Exercice extrait d'un cours de Mathématiques Générales 1ère candidature en sciences pharmaceutiques à l'U.C.L.)

Pour ce problème, nous analyserons les réactions d'une étudiante en 1ère candidature en sciences pharmaceutiques dans la partie III.

Bien que l'utilisation de la dérivée soit nécessaire pour la résolution de ces différents exemples, nous avons vu que le mot « dérivée » n'apparaissait pas. On y utilise des termes tels que vitesse instantanée, taux d'accroissement instantané,...
La dérivée d'une fonction porte parfois un nom précis qui évoque la signification concrète de la notion.
Dans le livre « Mathématiques Générales, à l'usage des Sciences économiques, de gestion et A.E.S » (J. BAIR, [11]) apparaît un petit tableau des significations concrètes de la dérivée de certaines fonctions :

Fonction	**variable indépendante**	**Dérivée**
espace parcouru par un mobile	temps	vitesse
vitesse	temps	accélération
longueur d'une barre	température	coefficient de dilatation
chaleur de l'unité de masse	température	chaleur spécifique
énergie	temps	puissance
chaleur électrique	temps	intensité de courant
altitude des points d'une route	projection de la distance sur un plan horizontal	pourcentage local du profil de la route
volume d'un fluide	temps	débit
poids animal	temps	taux d'engraissement (amaigrissement)
taille d'une population	temps	taux de natalité (mortalité)
capital	temps	taux d'enrichissement (appauvrissement)
distribution d'effectifscumulés	effectif	densité de fréquence

Suite à ce tableau, nous faisons remarquer que la variable indépendante la plus présente est le temps. Rien d'étonnant à cela car la dérivée est une variation et qu'induit mieux une idée de variation que le temps.

2.2 Eléments d'analyse pour la troisième partie.

Nous pourrions idéaliser un cours type suivant le schéma suivant :

contextualisation
↓
décontextualisation
↓
recontextualisation

La première phase, celle de contextualisation, permet de donner du sens et de situer le concept dans un ou plusieurs contextes. Celle-ci correspond aux exemples introductifs d'une matière (ou situations problème). Un exemple de contextualisation de la dérivée serait du type du problème du vase conique. En voici son énoncé :

> *Une pompe alimente un vase conique. Elle est réglée de telle manière que le niveau de l'eau y monte régulièrement de 1 cm/min. L'angle au sommet du cône vaut 90°. Jusqu'à quand le débit de la pompe sera-t-il inférieur à 100 cm³/min ?* (Exercice extrait du manuel AHA (Groupe AHA, [10]))

Ce problème va permettre aux élèves d'approcher le concept de taux de variation instantané par le biais d'un problème de vitesses liées qui les amène à considérer spontanément des taux de variation et qui leur permet d'exprimer et de gérer leurs réticences éventuelles vis-à-vis du passage à la limite. Ce problème, sur lequel nous reviendrons dans la troisième partie incite les élèves à mettre à l'épreuve le concept de débit constant et à s'apercevoir qu'ici, le débit croît constamment. En effet, dans ce problème de vitesses liées, le fait qu'une grandeur (ici le niveau d'eau) varie à vitesse constante induit l'intuition que l'autre grandeur (ici le volume) ne peut varier à vitesse constante (puisque le vase est de plus en plus large). Dès lors, pour évaluer la vitesse de variation du volume, il faut procéder à un découpage du temps de plus en plus fin, ce qui conduit les élèves à considérer des quotients différentiels ou taux de variation moyens sur des intervalles de temps de plus en plus petits qui vont conduire à la notion de débit instantané en considérant un intervalle de temps nul. Considérer un tel intervalle va susciter des réticences chez l'élève. Une expérience de pensée sera alors proposée pour les convaincre que le résultat obtenu de cette façon est exact.
La deuxième phase, celle de décontextualisation, correspond à la synthèse théorique, à l'établissement de règles, de formules. Une décontextualisation sera, pour nous, jugée efficace si le futur utilisateur du concept parvient à le recontextualiser (troisième phase) c'est-à-dire par exemple dans le cas de la dérivée si l'utilisateur voit qu'il doit utiliser la dérivée même si le mot n'apparaît pas en tant que tel mais sous une autre forme comme vitesse de variation de température,...
Dans la section 2.1, nous trouvons des exemples qui illustrent la phase de recontextualisation.

Nous pensons a priori que les élèves éprouvent des difficultés pour la phase de recontextualisation. Ceci sera mis en évidence dans la troisième partie en nous basant d'une part sur une expérience que nous avons pu réaliser auprès d'une biologiste et d'un pharmacien tous deux actuellement étudiants en agrégation, ainsi que d'un professeur en Biologie. Cette expérience consistait à leur proposer un exercice (2$^{\text{ième}}$ exercice des équations différentielles de notre section 2.1) nécessitant l'utilisation de la dérivée sans que cela ne soit précisé et pouvait nous permettre de nous rendre compte s'ils y reconnaissaient ce concept. D'autre part, nous avons proposé un travail ayant valeur d'examen à l'U.C.L. à une étudiante de première candidature en sciences pharmaceutiques (3$^{\text{ième}}$ exercice des équations différentielles de notre section 2.1).

Bien que notre échantillonnage ne soit pas très vaste, nous ne pensons pas être loin de la réalité.

Avant d'aborder la troisième partie de notre mémoire, nous vous proposons notre grille d'analyse.

2.3 Grille d'analyse pour la partie III.

Voici les différentes questions auxquelles nous tenterons de répondre dans la partie III.

Dans un premier temps, nous regarderons si le sens de la dérivée, à savoir l'idée de variation, est perçu. Pour cela, nous évaluerons tout d'abord la capacité des étudiants à identifier une dérivée en tant que taux de variation instantanée grâce à des enquêtes réalisées en première candidature section biologie aux facultés Notre-Dame de la Paix à Namur. Nous évaluerons ensuite la capacité des étudiants à recontextualiser la dérivée au moyen d'interviews auprès d'une biologiste et d'un pharmacien tous deux actuellement étudiants en agrégation d'une part, ainsi que d'un professeur en Biologie d'autre part.

Dans un second temps, nous observerons comment la notion de dérivée est amenée dans le secondaire en répondant à toute une série de questions (présentées ci-dessous) en nous basant d'une part sur le manuel « Vers l'infini pas à pas » du groupe AHA (Groupe AHA, [10]) et d'autre part sur le manuel « Espace Math 54 » (A. ADAM et F. LOUSBERG, [14]) sans oublier également les cours d'élèves.

Notre troisième partie s'articulera autour des questions suivantes :

- Le sens de la dérivée, en tant qu'idée de variation, est-t-il perçu par ceux ayant reçu un enseignement de la dérivée ?
    - Évaluation de la capacité des étudiants à identifier une dérivée en tant que taux de variation instantanée.
    - Évaluation de la capacité des étudiants à recontextualiser la dérivée.

- Comment la notion de dérivée est-elle enseignée dans le secondaire ?
    - Comment est introduite la notion de dérivée ? Par la notion de vitesse ou la notion de pente de tangente ?
    - Quel est le poids respectif de la tangente et de la vitesse dans l'enseignement de la dérivée ? Les problèmes de mouvement occupent-ils une place importante ?
    - Comment dans l'enseignement secondaire passe-t-on de la limite de quotients différentiels à la pente de la tangente ? Comment sont définis les objets-tangentes ? N'y a-t-il pas un cercle vicieux avec la définition de dérivée, ne se définissent-ils pas l'un l'autre ?
    - Comment est gérée la façon de faire assimiler aux élèves le fait de poser $\Delta t=0$ dans l'expression de la vitesse moyenne ou de poser $\Delta x=0$ dans l'expression des pentes des sécantes ? Choisit-on une notation mettant en évidence le 0/0 ou opte-t-on plutôt pour une notation qui l'évite ?
    - Dans quels types de contextes voit-on la dérivée ?
    - Résout-on des équations différentielles dans le secondaire ?

Partie III :

Pratiques actuelles d'enseignement.

3.1 Le sens de la dérivée, en tant qu'idée de variation, est-t-il perçu par ceux ayant reçu un enseignement de la dérivée ?

3.1.1Évaluation de la capacité des étudiants à identifier une dérivée en tant que taux de variation instantané.

En début d'année académique, avant que la notion de dérivée n'ait été reprise dans le cours de mathématiques, nous avons réalisé une enquête auprès des premières candidatures en biologie afin de savoir ce qu'il reste du concept de dérivée pour un étudiant qui quitte le secondaire et entre en première candidature. Il serait intéressant qu'ils aient gardé l'idée-clé associée à la dérivée, à savoir, le taux de variation instantané.

Voici les deux questions qui leur ont été proposées :

Enquête

1) Quand on vous dit « dérivée », à quoi pensez-vous ?

2) Au cours de vos études secondaires, quel(s) type(s) de problèmes a (ont) fait appel à la notion de dérivée ?

a) Dans le cours de Mathématiques :

b) Dans les autres cours :

Dans cette enquête, nous avons opté pour des questions assez vagues afin de ne pas influencer les élèves. Nos questions voulaient laisser libre cours à la réflexion des étudiants.
En effet, notre premier essai d'enquête comportait en plus de ces deux questions, des questions plus précises. Par exemple : *« Utilise-t-on la dérivée pour résoudre ce problème ? Cocher la case adéquate sans résoudre le problème : Donner à un fil de fer de longueur 212 cm la forme d'un rectangle d'aire maximale : oui – non – je ne sais pas ».* Avec cette question, on voulait voir s'ils associaient les problèmes d'optimisation à la dérivée. Mais sans cette question, auraient-ils pensé que la dérivée pouvait servir dans des problèmes d'optimisation ou alors est-ce en voyant la question qu'ils s'en sont souvenus. C'est pour cette raison que nous avons décidé de modifier notre enquête en restant plus générales.

Conclusion suite à cette enquête.

Suite à cette enquête, on voit que pour les étudiants, c'est le calcul qui prime (on retrouve souvent (2x)'= 2) ainsi que les études complètes de fonction. Ceci est probablement dû au fait que le calcul de dérivée et les études de fonction prennent une place importante dans le cours de mathématiques des élèves comme nous pourrons le constater dans notre section 3.2.6. c). On a pu remarquer que les étudiants n'ont pas mentionné la notion de taux de variation instantané. La notion de dérivée en tant que pente de tangente n'est apparue que très peu. Probablement car les professeurs ne passent pas énormément de temps là-dessus, mais l'utilisent dans le but d'arriver à une définition, du moins c'est ce que nous avons pu constater lorsque nous avons eu l'occasion de regarder des cours d'élèves.

En ce qui concerne notre question 2b), nous n'avons pas tenu compte de leurs réponses car nous voulions tester leur connaissance du secondaire. Or en fait au début de leur première candidature dans le cadre du cours de physique, la notion de loi des vitesses comme dérivée de la loi des positions a été vue.

3.1.2. Évaluation de la capacité des étudiants à recontextualiser la dérivée.

Notre hypothèse est la suivante : nous pensons a priori que les étudiants éprouvent des difficultés à recontextualiser la dérivée. Nous entendons par-là qu'ils ont énormément de mal à se rendre compte qu'il faut utiliser la dérivée comme outil lorsque l'énoncé ne le stipule pas explicitement.

Nous allons évaluer la véracité de notre hypothèse en proposant à une biologiste et un pharmacien tous deux actuellement étudiants en agrégation ainsi qu'à un professeur en biologie un exercice nécessitant l'utilisation de la dérivée sans que cela ne soit précisé. Nous nous baserons également sur un travail, nécessitant l'utilisation des équations différentielles, ayant valeur d'examen pour une étudiante en première candidature en sciences pharmaceutiques dans le cadre de son cours de Mathématiques générales.
Nous observerons si ces étudiants y reconnaissent la dérivée.

a) Analyse de l'exercice proposé à une biologiste et un pharmacien tous deux actuellement étudiants en agrégation ainsi qu'à un professeur en biologie.

- Voici l'énoncé qui leur a été proposé :

Selon la loi de Newton, la vitesse de variation de la température d'un corps est proportionnelle à la différence de température entre le corps et le milieu ambiant. Si la température de l'air est de 30°C et que le corps passe de 100°C à 70°C en 15 minutes, au bout de combien de temps se trouvera-t-il à 40°C? (Exercice extrait de « Théorie et applications du calcul différentiel et intégral » de Frank Ayres (F. AYRES, [13])).

Dans le livre où nous avons pris cet énoncé, il n'est pas écrit « vitesse de variation de la température d'un corps » mais « refroidissement d'un corps ». Nous avons transformé cette expression car il nous semblait que la version exprimée dans le livre n'explicitait pas assez le concept de dérivée. Cependant, des biologistes nous ont fait remarquer qu'ils n'utilisaient jamais le terme « taux de variation de la température d'un corps » mais bien « refroidissement d'un corps ».

➢ Voici la résolution qui aurait été souhaitée :

Face à cet énoncé, on s'attend a priori à ce que l'étudiant reconnaisse la nécessité d'utiliser la dérivée et qu'il en arrive à l'équation suivante :

$(T(t))' = k\,(T(t) - 30)$,

ce qui traduit le fait que la vitesse de variation de la température d'un corps est proportionnelle à la différence de température entre le corps et le milieu ambiant. Si la température de l'air est de 30°C.

On s'attend alors à ce qu'il se rende compte qu'il a affaire à un modèle exponentiel (en effet ce qui caractérise une exponentielle est qu'elle est identique à sa dérivée à une constante multiplicative près.) S'il ne le remarque pas tout de suite une écriture équivalente à cette équation l'éclairera peut-être :

$(T(t) - 30)' = k\,(T(t) - 30)$,

L'étudiant devrait maintenant pouvoir résoudre l'équation de la façon suivante :

S'étant rendu compte que l'on se trouve dans un modèle exponentiel, on se trouve devant l'équation suivante :

$T(t) - 30 = c\,e^{kt}$

ie $T(t) = 30 + c\,e^{kt}$

par hypothèse on obtient que

- au temps $t = 0$, la température est de 100°C
  d'où $100 = T(0) = 30 + c.1$
  et donc
  $c = 70$
- au temps $t = 15$, la température est de 70°C
  d'où
  $70 = T(15) = 30 + c\,e^{15k}$
  d'où
  $40 = c\,e^{15k}$
  or
  $c = 70$
  donc
  $4/7 = e^{15k}$

La question est : Au bout de combien de temps le corps se trouvera-t-il à 40°C ?
C'est-à-dire,

quand $T(t) = 30 + 70\, e^{kt} = 40$?

ie qu'il faut trouver t tel que

$$70\, e^{kt} = 10$$

ie

$$e^{kt} = 1/7$$

or on obtient que

$$e^{15k} = 4/7$$

donc $15\, k = \ln 4/7$

et $$k = \frac{\ln 4/7}{15}$$

il nous faut donc trouver *t* tel que

$$e^{((\ln 4/7)/15)\, t} = 1/7$$

$$\frac{\ln 4/7}{15}\, t = \ln 1/7$$

$$t = 15\, \frac{\ln 1/7}{\ln 4/7} = 52 \text{ min.}$$

Ainsi, si la température de l'air est de 30°C et que le corps passe de 100°C à 70°C en 15 minutes, c'est au bout de 52 minutes que le corps se trouvera à 40°C.

➢ Voici leur première réaction :

Leur première réaction face à cet énoncé a été : « C'est bien un problème de matheux ! ». En mathématique en effet on considère un corps comme ponctuel, on modélise le corps c'est-à-dire qu'on suppose que le corps à une température partout uniforme de 40°C tandis qu'en réalité, en biologie, la température du corps varie d'un endroit à un autre. Par exemple, notre température sera différente suivant qu'elle sera prise dans la bouche ou sous l'aisselle.
Nous en profitons pour signaler que les modélisations mathématiques sont parfois très scabreuses. Par exemple, en mathématiques, le modèle exponentiel est souvent proposé comme modélisation de la reproduction des bactéries, ce qui n'est pas conforme à l'étude des biologistes car dans une culture de bactéries, toutes les bactéries se divisent au même instant ce qui entraîne en fait non pas un modèle exponentiel mais un modèle en escalier.

Nous avons ensuite interrogé chaque personne séparément.

➢ Voici la réaction de la biologiste étudiante en agrégation :

Après avoir lu l'énoncé, elle note toutes les hypothèses de façon mathématique
« T° air = 30°

T° corps : 100° à 70° en 15 min
t = ? (T° corps = 40°) »

Ensuite elle se dit que le corps passe de 100° à 70° en 15 minutes, il y a donc une variation de 30° en 15 minutes, c'est-à-dire de 2°/min. Elle se dit que ce ne doit pas être correct car ce à quoi elle est arrivée est une variation moyenne, or intuitivement elle sent que ce n'est pas une variation moyenne car elle dit : « plus le corps diminue de température, plus la différence de température entre le milieu ambiant et la température du corps diminue lentement ». Elle fait remarquer que le graphe doit être une exponentielle.

Nous lui avons alors demandé : « Si ce n'est pas une moyenne, alors qu'est-ce ? ». Elle a ensuite parlé de « quelque chose induit en un temps » pour petit à petit arriver au terme « instantané ».

Elle nous a demandé comment noter une variation en mathématiques afin de pouvoir écrire que la vitesse de variation de la température d'un corps est proportionnelle à la différence de température entre le corps et le milieu ambiant. Nous ne lui avons pas donné réponse. Nous avons attiré son attention sur les mots « vitesse » et « variation ». Elle a alors dit qu'une vitesse était une différence d'espace sur une différence de temps et que pour avoir une variation il faut faire une différence. Le mot « dérivée » n'apparaissant pas, on lui a demandé à quoi lui faisait penser la dérivée. Elle est restée sans rien dire. On lui a alors demandé s'il n'y avait pas un lien entre la dérivée et la vitesse. Elle s'est tout de suite souvenue que « en dérivant l'espace, on obtient la vitesse ».

Suite à cela, nous avons écrit avec elle :

$$\text{« vitesse} = \frac{\text{variation d'espace}}{\text{variation de temps}}$$

$$v(t) = (e(t))' = \frac{de(t)}{dt} \text{ »}$$

Elle a ensuite écrit « T' = k ($t_1 - t_2$) où t_2 = 30° ». Nous lui avons demandé si T ne dépendait pas de quelque chose et elle s'est empressée de dire que la température dépendait du temps. On lui a alors proposé la notation suivante : (T(t))'

Suite à cela elle a finalement écrit :

« T'(t) = k (t – 30) »

Nous lui avons posé la question : « Que t'inspire la notion de dérivée ? » Elle a immédiatement donné l'idée de vitesse. Puis on poursuit avec : « Et la dérivée ? N'induit-elle pas l'idée de variation ? ». Sa réponse a été : « non, la dérivée donne l'idée de vitesse et la variation, celle de différence ».

Ici, nous remarquons une difficulté de recontextualisation de la dérivée qui est, selon nous, certainement liée au fait qu'elle ne voit pas la dérivée comme un taux de variation instantané et qu'il lui manque aussi une formalisation mathématique. Nous avons pu également constater suite à cette première interview que la perception de la vitesse était fort restrictive. En effet, l'idée de vitesse se limite à un mobile qui se déplace. On a le sentiment qu'elle ne voit pas apparaître l'idée de variation d'une chose en fonction d'une autre.

Nous n'avons pas eu le temps de lui laisser résoudre l'équation une fois formulée, mais elle nous a dit pouvoir y parvenir en retournant voir dans son cours de mathématiques.

- Voici les réactions du pharmacien étudiant en agrégation et du professeur en biologie :

Ils ne mettent pas sous équation et raisonnent intuitivement en disant que : « plus grand est l'écart entre la température ambiante et la température du corps, plus la variation est rapide ». Ils tracent une exponentielle. On leur demande alors pourquoi privilégier une exponentielle à une autre courbe et ils répondent : « Si c'est courbe, c'est une exponentielle !».

Nous leur avons ensuite demandé de se baser sur les hypothèses de l'énoncé (notre idée était de leur faire écrire une équation différentielle). Ils ont dit alors que comme la température du corps diminuait de 100° à 70° en 15 minutes, ce serait après 30 minutes que la température du corps serait descendue de 60°, c'est-à-dire qu'elle serait à 40°. Ils ont donc dit que la température du corps diminuait de 2°/min. et là, d'eux même, ils ont senti que quelque chose n'allait pas car cette représentation est linéaire, or ils étaient partis sur l'intuition d'un modèle exponentiel. Nous avons essayé de poursuivre le raisonnement sur l'idée du modèle exponentiel pour les faire arriver au concept de dérivée en leur demandant quelle était la particularité de la fonction exponentielle (une exponentielle en effet est caractérisée par le fait que $(e(x))' = e(x)$), mais ils ne voyaient pas cette particularité.

Nous leur avons alors demandé que représente la dérivée et ils ont dit : « la dérivée, c'est une variation de l'espace en fonction de la variation du temps ». Nous leur avons ensuite demandé s'ils ne voyaient la dérivée que dans le cadre d'un mouvement et ils ont proposé d'autres cas : « variation de distance, augmentation de population, variation de quelque chose, du moment qu'il y a une variation ! ».

De plus, ils nous ont dit ne plus utiliser la dérivée : « la dérivée, même son calcul, m'est sorti de la tête ».

Une fois que nous leur avons donné toutes ces indications, nous leur re-demandons d'essayer de résoudre le problème proposé. Et là, ils disent clairement être incapables de mettre sous équation cet exercice et a fortiori de le résoudre algébriquement. Mais lorsqu'ils reviennent sur la résolution graphique, ils se retrouvent face à un problème : « avec deux données (T° = 100° en t = 0 et T° = 70° en t =15min), on ne peut trouver que deux points et par deux points, on peut tracer plusieurs courbes et donc on ne peut pas avoir de juste valeur ».

Nous remarquons également ici une difficulté à recontextualiser la dérivée. Même lorsque ces étudiants se rappellent qu'une dérivée est un taux de variation, ils ne parviennent pas à résoudre ce problème. L'explication que nous pourrions trouver à cela est que l'aspect technique de calcul et de l'écriture mathématique formalisée n'est pas maîtrisée. Nous entendons par là une difficulté à transcrire en langage mathématique un langage littéraire.

b) Analyse de l'exercice proposé à une étudiante en première candidature en sciences pharmaceutiques.

- Voici l'énoncé qui lui a été proposé :

  Votre équipe est consultée pour résoudre un problème qui préoccupe les dirigeants d'une firme pharmaceutique. Le voici :

  La concentration dans le sang résultant de l'injection d'une dose de médicament décroît avec le temps au fur et à mesure que le médicament est éliminé par l'organisme. Cette diminution est proportionnelle à la quantité de médicament injectée.
  La firme se demande comment modéliser l'évolution de la concentration du médicament dans le sang en fonction du temps. Les unités choisies sont l'heure pour le temps et les mg/ml pour la concentration. Si d'autres quantités apparaissent dans la modélisation, il faut en préciser les unités. Proposez une modélisation simple de cette évolution. (Partie d'exercice ayant valeur d'examen pour un cours de Mathématiques Générales 1ère candidature en sciences pharmaceutiques à l'U.C.L.)

- Voici la résolution qui aurait été souhaitée :

  Face à cet énoncé, on aurait pu s'attendre à ce que l'étudiante reconnaisse la nécessité d'utiliser la dérivée et qu'elle en arrive à l'équation suivante :

  $C'(t) = -k\, C(t)$

  où la fonction $C(t)$ est la concentration au temps t.

  On s'attendait alors à ce qu'elle se rende compte qu'elle se trouvait face à un modèle exponentiel et qu'elle en arrive à la solution :

  $C(t) = C_0\, e^{-kt}$
  où C_0 est la concentration au temps t_0.

- Voici la réaction de l'étudiante :

  Elle se braque sur deux conditions limites qui sont la concentration de médicament dans le sang avant l'injection et la concentration de médicament dans le sang juste après l'injection et ne reconnaît pas qu'il faut utiliser la dérivée. Elle ne parvient donc pas à une équation fonctionnelle – une équation dont la solution est une fonction - , ce qui lui pose problème car elle pressent que la solution est une fonction.

c) Conclusion

Notre hypothèse que les étudiants et futurs utilisateurs de la dérivée éprouvent des difficultés à recontextualiser la dérivée, est vérifiée. Nous entendons par là qu'ils ont beaucoup de difficultés à se rendre compte qu'il faut utiliser la dérivée même lorsque l'énoncé ne le stipule pas explicitement. Bien sûr, notre échantillonnage n'est pas très large, mais nous ne pensons pas être loin de la réalité.

3.2 Comment la notion de dérivée est-elle enseignée dans le secondaire ?

3.2.0 Outils pour notre analyse.

Nous venons de voir que malheureusement, les étudiants ne perçoivent pas la dérivée comme taux de variation instantané et ne voient pas non plus quand l'utiliser. Cette mauvaise perception trouve peut-être sa source dans l'enseignement qui a été et est encore proposé. Pour analyser la manière dont la dérivée apparaît, nous avons parcouru attentivement différents cours d'élèves provenant des écoles suivantes :

C.N.D.P. – Erpent (1 élève option math 6 heures)
Séminaire de Floreffe (1 élève option math 4 heures et 2 élèves option math 6 heures)
Institut Saints-Pierre et Paul – Florennes (1 élève option math 4 heures)
Institut Saint-Berthuin – Malonne (1 élève option math 6 heures)
Institut Saint-Jean-Baptiste – Tamines (2 élèves option math 6 heures)

ainsi que deux ouvrages où la notion de dérivée apparaît. Le premier livre que nous examinerons, « Espace Math 54 » (A. ADAM et F. LOUSBERG, [14]) est un type de manuel couramment utilisé, et le second, « Vers l'infini pas à pas » (Groupe AHA, [10]), envisage l'approche des mathématiques sous un nouveau jour.

a) Description des deux ouvrages - « Vers l'infini pas à pas, manuel pour l'élève » et « Espace Math 54 » - par leurs auteurs respectifs.

- **« Vers l'infini pas à pas, manuel pour l'élève. »** (Groupe AHA, [10])

Ce manuel est destiné aux élèves étudiant l'analyse mathématique en 5$^{\text{ème}}$ et 6$^{\text{ème}}$ Rénové ainsi qu'à des autodidactes. Ce projet ne suppose aucun acquis chez les élèves et part de leurs propres intuitions.
Le projet AHA - Approche Heuristique de l'Analyse - part des intuitions communes sur les pentes, les vitesses, les aires... pour construire pas à pas les concepts de l'analyse. En ce sens, l'approche est heuristique.
Ce manuel est rédigé sous forme de questions-réponses. Dans les réponses, on trouvera parfois décrites de fausses pistes auxquelles le problème peut mener. Ainsi, l'analyse se construit dans ce manuel d'une question à l'autre, un peu comme elle l'a fait dans l'histoire.
De plus, le projet AHA, et son approche différente des mathématiques, est fort prisé actuellement (situations-problèmes), on y trouve une alternance de moment didactique et a-didactique. Une situation a-didactique peut-être interprétée par la mise à distance du professeur pour laisser jouer au maximum les mécanismes d'appropriation du problème par l'élève. Ceci permet de restituer à l'élève sa responsabilité dans son propre apprentissage. « Comme l'a souvent répété Piaget, la connaissance résulte d'une intervention active de la part du sujet sur l'objet, non d'un simple enregistrement » (Y.LENOIR, [15]).
Certaines situations du projet AHA se prêtent à une certaine dévolution (exemple, le problème de vase conique (voir ci-après)). A y regarder de plus près, le « bon » fonctionnement de ces situations exige souvent de conjuguer des moments a-didactiques et des moments qui ne le sont pas.
Il paraît opportun d'organiser la dévolution de certains problèmes ou de moments de dévolution dans la résolution de ceux-ci en particulier lorsqu'un travail de deuil (détruire l'idée intuitive fausse de l'élève) est en jeu.
Le projet AHA est en partie construit pour favoriser le franchissement d'obstacles. Ce projet rejoint le point de vue défendu par A. Sierpinska, (A. SIERPINSKA, [16]) : « Il est important de noter qu'une chose (une croyance, un schème de pensée) ne joue souvent le rôle d'obstacle qu'en autant qu'elle demeure consciente ou qu'on ne la remet pas en question, parce qu'on la considère comme un dogme. Surmonter un obstacle ne signifie pas adhérer à un autre système de croyance ou à un autre schème de pensée, immuable et universelle, mais plutôt modifier la conception qu'on a d'une chose en en faisant « une des façons possibles de voir », « une des attitudes possibles », « une méthode valable dans certains cas pour aborder des problèmes », etc. ».

- **« Espace Math 54 »** (A. ADAM et F. LOUSBERG, [14])

En ce qui concerne « Espace Math 54 », voici comment ses auteurs le présentent :
Ce manuel veut être un outil souple et efficace pour les enseignants et pour les élèves, dans deux domaines de prédilections :

- *La pédagogie des situations* qui confronte l'élève à des activités qu'il doit organiser personnellement ou en équipe ;

- *L'enseignement en spirale* qui ne veut pas épuiser d'emblée le contenu global des notions rencontrées et qui procède par touches progressives.

Dans ce manuel, les notions théoriques sont dégagées à partir des démarches effectuées lors de ces activités d'approche.

De nombreux exercices sont répartis en plusieurs séries dans la deuxième partie du manuel :
- *exercices pour appliquer* qui ont pour but de fixer les notions et d'assurer le savoir-faire de base ;
- *exercices pour s'autocontrôler* accompagnés des solutions ;
- *exercices pour chercher* qui demande une réflexion en profondeur ou qui font appel à plusieurs points de la matière.

Les auteurs de l'ouvrage ont introduit « Un petit bout d'histoire » car ils sont convaincus qu'un cours de mathématiques doit être replacé dans son contexte historique afin de convaincre les élèves de l'utilité et de la richesse des démarches entreprises dans cette discipline.

Ce manuel est structuré notions après notions.
Chaque chapitre est structuré de la façon suivante : il commence par proposer des activités dans le but d'introduire, de faire percevoir les notions aux élèves. Ensuite, ces notions sont définies et formalisées. Les propriétés sont instaurées et parfois démontrées et lorsque cela est possible il donne une marche à suivre (genre « truc ») pour résoudre les problèmes. Par exemple, on peut lire page 86 du « Espace math 54 » :

> *Synthèse de la recherche des asymptotes à une courbe.*
>
> *Pour déterminer*
> - ***les asymptotes verticales à G_f***
>   - *on recherche les réels qui sont des bornes de dom f et qui n'appartiennent pas à dom f ;*
>   - *on calcule les limites à gauche et à droite de $f(x)$ en ces réels ;*
>   *si, en le réel a, au moins une de ces limites est infinie, alors G_f admet une asymptote verticale d'équation $x = a$;*
>
> - ***les asymptotes horizontales à G_f,***
>   *on calcule les limites de $f(x)$ en $-\infty$ et en $+\infty$;*
>   - *si la limite en $-\infty$ est égale au réel b, alors G_f admet une asymptote horizontale à gauche d'équation $y = b$;*
>   - *si la limite en $+\infty$ est égale au réel c, alors G_f admet une asymptote horizontale à droite d'équation $y = c$;*
>
> - ***les asymptotes obliques à G_f,***
>   *on calcule $\lim_{x\to-\infty}\frac{f(x)}{x}$ et $\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}$;*
>   - *si cette limite est un réel a non nul, alors on calcule*
>   *$\lim_{x\to-\infty}(f(x)-ax)$ et $\lim_{x\to+\infty}(f(x)-ax)$*
>   - *si cette limite est un réel b, alors G_f admet la droite d'équation $y = ax+b$ comme asymptote oblique à gauche ou à droite.*

b) Commentaires personnels et comparaison des deux ouvrages : « Vers l'infini pas à pas » et « Espace Math 54 ».

Comparaison et commentaire au point de vue de la structure.

En ce qui concerne « Vers l'infini pas à pas », nous ne pensons pas qu'une année scolaire puisse être basée du début jusqu'à la fin sur ce manuel car nous trouvons que les différents concepts ne sont pas assez scindés chapitre par chapitre. Nous pensons que les élèves seraient plus à l'aise avec une structure comme celle proposée dans « Espace Math 54 ». De plus comme M. Schneider nous l'a fait remarquer : « Le projet AHA est un projet long, non seulement à cause de la durée de l'apprentissage en jeu, mais aussi parce que la progression dans le texte du savoir se fait avec des va-et-vient, suppose de nombreuses reprises et postpose la réponse à des questions qui demeurent donc momentanément en suspens. C'est donc une organisation qui fait violence à l'épistémologie spontanée des élèves laquelle suppose que le temps d'apprentissage d'un objet d'enseignement doit être court et leur fait préférer un nouveau cours à une reprise. »
On peut s'inspirer de certains problèmes de « Vers l'infini pas à pas » comme exercices d'introduction à une matière, à un concept.
AHA permet d'entrer dans la théorie sur base d'exemples concrets.
AHA ne sépare pas la théorie des problèmes, celle-ci est vue au sein même de l'exercice, ce qui est une façon de faire tout à fait originale. « Espace Math 54 », quant à lui propose aussi quelques activités introductrices à la théorie mais les sépare bien de celles-ci.

AHA ne sépare peut-être pas assez les différents concepts à apprendre. Dans le chapitre 6 par exemple, il considère en même temps les problèmes d'optimisation et les comportements de fonctions à l'infini. Qu'en pense les élèves...

Comparaison et commentaire au point de vue de la philosophie concernant les « trucs ».

Nous pensons de plus que AHA veut faire sentir, deviner le sens des choses et donc ne fournit pas beaucoup de formules. Pour le calcul des limites par exemple, on ne voit pas apparaître que les indéterminations sont 0/0, ∞/∞, $\infty - \infty$, $0.\infty$ et peuvent être résolues par... Tandis que dans « Espace Math 54 » les indéterminations sont citées et on donne des techniques de calcul pour résoudre, calculer les limites.
Les auteurs de « Espace Math 54 », eux, proposent des « trucs », des marches à suivre.

Comparaison et commentaire au point de vue de la définition de limite.

Dans le manuel AHA la définition de limite en ε-δ apparaît péniblement après onze chapitres, alors que dans « Espace Math 54 », elle apparaît rapidement.

Voici comment « Espace Math 54 » introduit la définition de limite :

Soit $f : IR \rightarrow IR : x \rightarrow f(x)$
Lorsque x tend vers le réel a, la limite de f est le réel b signifie intuitivement :
f(x) peut être rendu aussi proche que l'on veut de b, en prenant x assez proche de a, mais distinct de a.

Ensuite, les auteurs formalisent la notion « proche de » de la façon suivante :

> *Le réel p est proche du réel k*
> *signifie*
> *La différence entre p et k peut être rendue plus petite que n'importe quel réel strictement positif*
> *ou encore*
> $| p - k | < \alpha$ *où α est un réel arbitrairement choisi* (12).

Puis vient la définition en ε-δ :

> *Soit $f : IR \rightarrow IR : x \rightarrow f(x)$.*
> $\lim_{x \to a} f(x) = b$
> *si et seulement si*
> *pour tout réel strictement positif ε il est possible de déterminer un réel strictement positif δ (pouvant dépendre de ε) tel que :*
> $0 < | x - a | < \delta \Longrightarrow | f(x) - b | < \varepsilon$

Vient ensuite une représentation graphique:

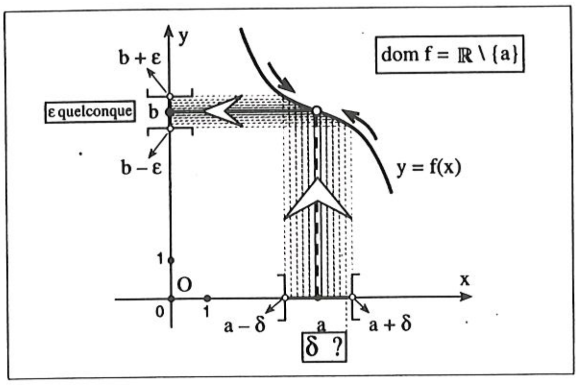


fig. 22

Cependant, la démarche des auteurs de ce dernier manuel pour aboutir à la définition de limite montre la difficulté qu'il y a à rendre rigoureuse l'intuition des élèves. Les auteurs en effet vont avoir recours à un subterfuge qui n'est pas correct, du moins en analyse standard. Ce subterfuge consiste à vouloir exprimer l'intuition du terme « proche de ». Mais en fait, la définition qu'ils en donnent (12) exprime que | p – k | = 0, c'est-à-dire que p est <u>égal à</u> k et non <u>proche de</u> k. Ainsi, dans leur définition de « proche de », il manque une notion de dépendance, laquelle est présente dans la définition de limite en ε-δ, où le δ dépend du ε.

<u>Comparaison et commentaire au point de vue du mouvement.</u>

La notion de mouvement est très présente dans le manuel AHA. Ce dernier utilise cette notion comme marche-pied : par exemple, dans le chapitre 5, pour mettre en évidence les notions de croissance et de décroissance par l'étude de la fonction dérivée. Cependant, il faut s'assurer que les notions de mouvement soient bien maîtrisées par l'élève. Par exemple lorsqu'on considère le graphe suivant qui représente l'espace parcouru en fonction du temps :

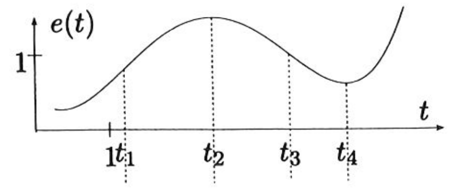


fig. 23

il n'est pas rare que les élèves ne perçoivent pas qu'entre les instants t_2 et t_4, la particule recule. Ils auraient plus tendance à dire que la particule ralentit.
« Espace Math 54 » ne se place pas beaucoup dans les concepts de mouvements, il y fait seulement une brève incursion.

3.2.1 Comment introduit-on la dérivée ? Par la notion de vitesse ou la notion de pente de tangente ?

a) Selon « Vers l'infini pas à pas »

Dans le projet AHA, la dérivée naît du rapprochement au chapitre 5 du concept de tangente (chapitre 3) et du concept de vitesses instantanées (chapitre 4). Dans le chapitre 4, les auteurs vont faire évoluer le concept géométrique de tangente vers celui d'approximation affine (cf. section 3.2.3 a). Ce rapprochement va se faire par le biais d'un exemple où nous verrons que la technique de calcul pour la détermination de la tangente dans le cas de l'approximation affine est équivalent au calcul de la vitesse instantanée. Cet exemple sera développé à la section 3.2.3.a. Nous allons ici plutôt regarder le contexte cinématique qui a une importance particulière pour introduire la dérivée car, d'après les auteurs, la variable « temps » induit assez naturellement une idée de variation, laquelle n'est présente a priori, dans la tête des élèves, ni à propos des tangentes, ni à propos des calculs d'aires et de volumes. En effet, percevoir l'aire et le volume comme quantités variables suppose qu'on ait surmonté l'obstacle épistémologique que nous avons traité dans la partie I (section 1.2.4).

Le projet AHA propose aux élèves d'approcher le concept de taux de variation instantané par le biais d'un problème de vitesses liées (problème du vase conique voir ci-dessous) qui les amène à considérer spontanément des taux de variation et qui leur permet d'exprimer et de gérer leur réticence éventuelle vis-à-vis du passage à la limite.

Examinons ce problème proposé par AHA.

➢ Le problème du vase conique :

Une pompe alimente un vase conique. Elle est réglée de telle manière que le niveau de l'eau y monte régulièrement de 1 cm/min. L'angle au sommet du cône vaut 90°. Jusqu'à quand le débit de la pompe sera-t-il inférieur à 100 cm³/min ?

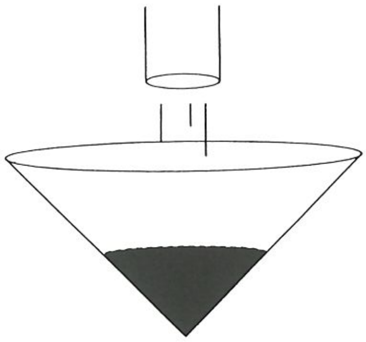


fig. 24

Comme dans la plupart des problèmes proposés dans le chapitre 4 de AHA qui aboutira aux dérivées, ce problème s'inscrit dans le schéma suivant :

Soit deux grandeurs G_1 et G_2, elles varient toutes deux en fonction du temps et la vitesse de variation de l'une (prenons G_1) est constante. De plus ces deux grandeurs dépendent l'une de l'autre, ce qui fait que leurs vitesses sont liées. La question porte sur la vitesse de G_2.
La démarche consiste alors à déterminer d'abord $G_2(t)$ en jouant avec les fonctions $G_1(t)$ et $G_2(G_1(t))$, ensuite la vitesse moyenne $\Delta G_2 / \Delta t$, et enfin sa limite, appelée vitesse instantanée.

Ici G_1 est le niveau h de l'eau versée et G_2 est son volume.

Etant donné la géométrie de ce problème (vase conique), on perçoit bien que si G_1 est constant, G_2 doit varier. Ici, on a bien l'intuition qu'une des deux grandeurs varie car l'autre pas. Ce qui n'est pas le cas de tous les problèmes de vitesses liées. Par exemple, supposons une échelle appuyée contre un mur. La vitesse de glissement de celle-ci sur le sol est supposée constante. On a alors envie de dire que la vitesse de descente le long du mur est également constante car la longueur de l'échelle l'est. On a l'intuition ici que comme une vitesse est constante, l'autre l'est aussi. Malheureusement notre intuition est fausse.

➢ Objectifs de ce problème.

Le fait que G_1 varie à vitesse constante induit ou fonde l'intuition que la vitesse de G_2 varie et qu'il faut donc envisager des découpages du temps de plus en plus fin. C'est là le principal intérêt des problèmes de vitesses liées envisagées dans le manuel AHA.

Les auteurs du projet AHA font également remarquer qu'un autre intérêt de ces problèmes est de faire accéder les élèves à l'idée de vitesses au sens large. Il ne s'agit pas ici uniquement de la vitesse d'un mobile sur une trajectoire, mais bien de la vitesse de variation d'une grandeur quelconque. Même si la variable indépendante demeure le temps, cet élargissement prépare les élèves à concevoir un taux de variation d'une variable quelconque par rapport à une autre tout aussi quelconque.

Au nombre dérivé peuvent être associées deux images mentales : celle de pente de tangente et celle de taux de variation instantané. Cette deuxième image est tout aussi importante que la première, surtout si l'on regarde les applications des dérivées dans d'autres disciplines : la vitesse en physique bien sûr, mais aussi la vitesse d'une réaction en chimie, le flux sanguin en physiologie, le coût marginal en économie, etc.

➢ Réactions des élèves face à ce problème.

Tous imaginent sans peine une telle expérience, même s'il est matériellement difficile de régler une pompe de la sorte. En effet, il serait plus facile de considérer une pompe à débit constant. Cependant, les auteurs n'optent pas pour ce choix car ils se seraient retrouvés avec des racines cubiques, ce qui aurait posé un problème de calcul pour certains élèves. La plupart des élèves sont convaincus que le débit de la pompe passe à 100 à un moment précis, ce qui suppose implicitement que le vase ne débordera pas avant. Ils s'appuient pour justifier ce fait sur la croissance de ce débit, ce qui est évident pour eux, et sur une hypothèse implicite de continuité : « Le débit est faible au départ et de plus en plus fort par la suite. Donc il passera bien par 100 à un moment donné. ».

En s'épaulant, les élèves expriment les liens existant entre le volume V du cône d'eau versé, sa profondeur h, son rayon r et le temps t, en supposant que $t = 0$ est l'instant où l'on commence à verser :

$$V = \frac{1}{3} \pi r^2 h$$

Or $r = h = t$ (via l'énoncé)

Donc $V(t) = \dfrac{\pi t^3}{3}$

Notons que si les élèves ne parviennent pas à cette formule, le professeur peut les y aider car ce n'est pas le but premier du problème.

Une première réaction qui peut être observée est celle d'élèves qui se retranchent derrière l'idée que le débit est le rapport du volume au temps pour écrire :

$$\frac{V(t)}{t} = \frac{\pi t^2}{3} = 100,$$

d'où $t \approx 9{,}77$.

S'ils ne se corrigent pas spontanément, le professeur peut leur faire remarquer que ce calcul prend en compte tout le volume versé depuis $t = 0$ jusqu'à $t = 9.77$, comme si le débit n'avait pas varié pendant cette période et valait 100 cm³/min. Mais comme on le pressent via l'énoncé, le débit doit croître continûment, puisque le niveau de l'eau monte régulièrement alors que le vase est de plus en plus large. Le débit est donc vraisemblablement plus petit que 100 au départ et dépasse 100 à un moment donné.

D'autres élèves approchent le problème autrement, ils calculent le débit de minute en minute et s'arrêtent à la septième minute car entre $t = 5$ et $t = 6$, le débit vaut environ 95 (débit moyen = $\frac{\pi 6^3}{3} - \frac{\pi 5^3}{3} = 95{,}295$) et entre $t = 6$ et $t = 7$, il a largement dépassé 100 ($\frac{\pi 7^3}{3} - \frac{\pi 6^3}{3} = 132{,}994$)

A partir de ces calculs, grâce à l'aide du professeur, ils en concluent et non sans peine que le débit passera par 100 à un moment qui se situe entre $t = 5$ et $t = 7$. En effet, s'il valait déjà 100 en $t = 5$, il serait supérieur à 100 après et la moyenne ne pourrait être de 95.295 entre 5 et 6. De même, il ne peut valoir 100 en $t = 7$ seulement puisque la moyenne est supérieure à 100 entre 6 et 7.

Le professeur peut alors faire remarquer qu'on est bien loin de $t = 9{,}77$.

D'autres élèves tentent de résoudre une équation suggérée par les données numériques :

$$V(t+1) - V(t) = \frac{\pi(t+1)^3}{3} - \frac{\pi(t)^3}{3} = 100$$

dont la racine positive est $t = 5{,}1345$. Elle fournit un intervalle de temps d'une minute, soit [5 .13 ; 6.13] durant lequel le débit moyen égal 100. Le professeur peut ici encourager tous les élèves, si nécessaire, à affiner les résultats en travaillant sur des intervalles de temps plus court, par exemple 0.1 minute, 0.01 minute.

Pour $t = 0{,}1$ min, on a :

$$\frac{V(t+0.1) - V(t)}{0.1} = \frac{\frac{\pi(t+0.1)^3}{3} - \frac{\pi(t)^3}{3}}{0.1} = 100$$

Sa racine positive $t = 5.59$ fournit l'intervalle de temps [5.59 ; 5.69]. Mais il y a une façon plus astucieuse d'arriver au résultat : comme tous ces calculs se font selon le même schéma, appelons Δt la longueur de l'intervalle et cherchons la valeur de t pour laquelle

$$\frac{V(t+\Delta t) - V(t)}{\Delta t} = 100$$

Notons qu'en arriver à remplacer un intervalle de temps par un symbole n'est pas si simple. Ici, c'est le contrat didactique (13) qui joue et non pas l'énoncé du problème. L'élève a l'habitude que le professeur ne se limite pas à du numérique mais aime les équations, ainsi que la précision. Les élèves supposent donc qu'il faut passer à du littéral. De plus, ceux qui voudraient utiliser une calculatrice programmable devraient trouver plus vite une expression littérale. Pour en arriver à une écriture littérale, le professeur peut conseiller de regarder quels sont les invariants d'une équation à l'autre et de remplacer ce qui varie par une variable. Dans cette écriture littérale, l'élève est perturbé par le fait qu'il voit dans cette expression une équation à deux inconnues, à savoir t et Δt. Mais comme cette manœuvre a été dictée par le professeur, ils font confiance. De plus, la notation Δt est source de problèmes car elle est composée de deux symboles pour ne représenter qu'une seule chose.

(13) : le concept de « contrat didactique » renvoit à la part spécifique de la connaissance mathématique visée de la « relation qui détermine – explicitement pour une petite part, mais surtout implicitement – ce que chaque partenaire, l'enseignant et l'enseigné, a la responsabilité de gérer et dont il sera, d'une manière ou d'une autre responsable devant l'autre. (G. Brousseau, [17])

La valeur de t pour laquelle

$$\frac{V(t+\Delta t) - V(t)}{\Delta t} = 100$$

est le début de l'intervalle de longueur Δt pendant lequel le débit passe par 100 sur l'intervalle $[t\ ;\ t + \Delta t]$.

On a évidemment intérêt à prendre un Δt le plus petit possible.
L'expression du débit moyen sur $[t\ ;\ t + \Delta t]$ est donnée par

$$\frac{\Delta V}{\Delta t} = \frac{V(t+\Delta t) - V(t)}{\Delta t}$$

$$= \left(\frac{\pi(t+\Delta t)^3}{3} - \frac{\pi t^3}{3}\right)\frac{1}{\Delta t}$$

$$= \pi t^2 + \pi t\,\Delta t + \frac{\pi(\Delta t)^2}{3}$$

D'où l'équation $$\pi t^2 + \pi t\,\Delta t + \frac{\pi(\Delta t)^2}{3} = 100 \qquad (14)$$

Mais quel est ce Δt le plus petit possible ?

Il ne faut pas attendre très longtemps pour qu'un élève suggère : « Et si on remplaçait Δt par 0 ? »

Remplacer $\Delta t = 0$ dans (14) donne $\pi t^2 = 100$ ou $t = 10/\sqrt{\pi}$

Notons que comme il faut prendre des intervalles de temps de plus en plus petits, c'est-à-dire une tranche de surface de plus en plus petite, un élève a l'intuition de prendre la limite d'une tranche de surface ce qui lui donne la surface d'un disque qu'il égalera à 100. Notons que l'élève a utilisé une limite géométrique. Il a eu affaire à l'obstacle géométrique de la limite vue dans notre section 1.2.1. Cette façon de faire lui donne la réponse exacte : $\pi r^2 = 100$, or $r = t$ on a donc $\pi t^2 = 100$ et donc $t = 10/\sqrt{\pi}$. On peut lui montrer par l'exemple suivant que malgré sa réponse exacte, le procédé n'est pas correct.

Supposons que $r = \frac{h}{3}$ et $h = 2t$.

En suivant sa méthode, on a :

$\pi r^2 = 100$

or $r = h/3$

donc $\frac{\pi h^2}{9} = 100$

comme $h = 2t$

on a $\frac{\pi 4t^2}{9} = 100$

et donc $t = 8{,}46$

Par contre avec la méthode correcte,

on a que $V(h) = \frac{\pi r^2 h}{3} = \frac{\pi h^3}{27}$

car $r = h/3$.

Ainsi $V(t) = \frac{8\pi t^3}{27}$

$$\frac{\Delta V}{\Delta t} = \frac{8\pi}{27} \frac{((t+\Delta t)^3 + t^3)}{\Delta t}$$
$$= \frac{8\pi}{27} (3t^2 + 3t\,\Delta t + (\Delta t)^2)$$

$$\lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta V}{\Delta t} = \frac{8\pi}{27} 3t^2$$
$$= \frac{8\pi t^2}{9}$$

et donc $\frac{8\pi}{9} t^2 = 100$

ainsi $t = 5{,}98$ ce qui est différent de 8,46

et on voit que considérer une tranche de surface du cône et l'égaler à 100 est une intuition fausse bien qu'elle donne une réponse correcte dans le premier cas du vase conique (c'est-à-dire quand $r = h = t$).

Poser $\Delta t = 0$ soulève un problème chez l'élève: « Que signifie le débit si $\Delta t = 0$? »

Un débat peut alors être ouvert entre les élèves.

Il faut se donner les moyens de prouver qu'en négligeant des termes, on trouve la réponse exacte. Dans l'Histoire, ceci n'aura pas été prouvé avant le 19ème siècle. Avant cette période, les anciens mathématiciens se contentaient des exemples pour prouver le fonctionnement de leur raisonnement.
Une expérience est alors décrite dans le manuel AHA où l'annulation de Δt, sujette à caution, est validée : elle conduit à une réponse exacte, jugée incontestable d'un point de vue intuitif par les élèves eux-mêmes. Cette expérience sera décrite à la section 3.2.4. On voit apparaître une volonté des auteurs à vouloir faire franchir l'obstacle que nous avons décrit à la section 1.2.3., à savoir le fait d'accepter qu'une limite peut être obtenue par la suppression de termes.

Suite à ce problème, les auteurs du projet déduisent la notion suivante :

> Le **débit instantané** au temps t est dV/dt ou $\lim_{\Delta t \to 0} \Delta V/ \Delta t$, où le rapport $\Delta V/\Delta t$ est appelé débit moyen sur l'intervalle de temps $[t\,, t+\Delta t]$.

Le débit instantané est un concept imaginé par l'esprit humain pour résoudre exactement des problèmes qui relèvent de l'instantané, là où les mesures ne fournissent que des approximations.

b) Selon « Espace math 54 ».

Les auteurs démarrent par trois **activités**. La première fait apparaître le concept de pente de tangente comme limite de pente de sécantes (1.), la deuxième est un exercice d'approximation (2.) et la dernière fait apparaître la vitesse instantanée (3.).

> 1. « On te donne la fonction $f: R \to R : x \to 0.25x^2$, dont le graphe cartésien est la parabole $\mathcal{P}$.

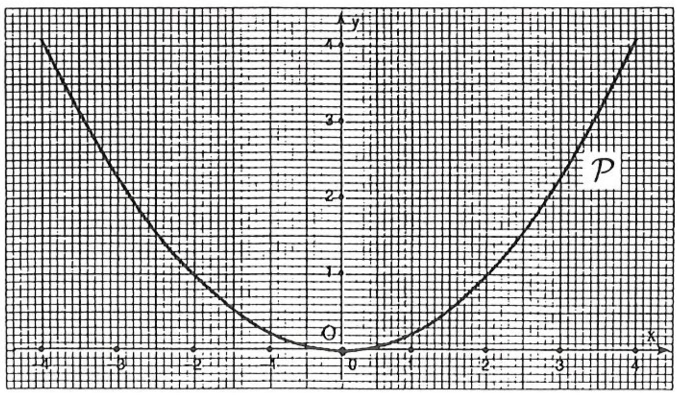


fig. 25

On nomme A, un point fixé de $\mathcal{P}$, d'abscisse a ;

B, un point non fixé de $\mathcal{P}$, voisin de A, d'abscisse $a+h$;

s, la droite passant par A et B ;

t, la droite passant par A,
de coefficient angulaire $0,5a$.

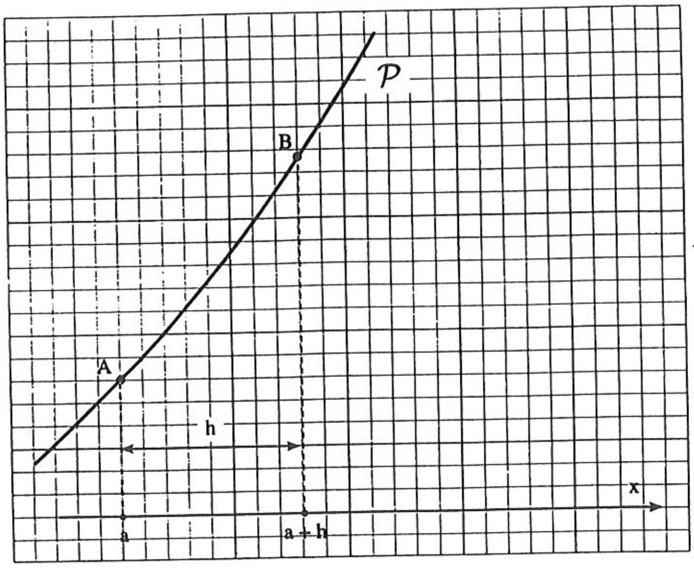


fig. 26

a) Lorsque $a = 2$, calcule
La coordonnée de A et celle de B ;
Le coefficient angulaire de s et celui de t.
Comment passes-tu algébriquement, du coefficient angulaire de s à celui de t ?

b) Trace avec précision la droite t.
T'inspirant de ce dessin, détermine le nombre de points d'intersection de t avec $\mathcal{P}$?
Vérifie par calcul.
Comment qualifierais-tu la droite t relativement à $\mathcal{P}$?

c) Trace les droites s obtenues pour les valeurs successives suivantes de h : 2 ; $1,5$; 1 ; $0,5$.
Comment ferais-tu varier h pour passer de s à t ?
Quel serait alors le déplacement de B relativement à A ?
Comment qualifierais-tu, en termes de limite, la position de la droite t par rapport aux positions successives des droites s ?

d) Reprends les mêmes démarches lorsque $a = -4$; $a = 0$.

e) Tente une généralisation en utilisant $f(x)$ au lieu de $0,25x^2$ et en ne donnant pas de valeur numérique au réel a. »

2. « On donne la fonction $f : IR \rightarrow IR : x \rightarrow 3x^2 + 4x - 6$.

a) Calcule $f(2)$ et $f(2+h)$.
Ecris $f(2+h)$ sous la forme $f(2) + mh + nh^2$.
Quelle erreur commets-tu si, pour calculer $f(2,1)$, tu négliges le terme nh^2 ?
Est-elle importante relativement à la valeur exacte ?
Qu'en est-il si tu calcules $f(2,01)$? Et $f(2,001)$?
Dirais-tu que $f(2) + mh$ est une bonne approximation de $f(2+h)$ pour de petites valeurs de h ?

b) Réponds aux mêmes questions en remplaçant 2 par 5.

c) Tente de généraliser en remplaçant 2 par a.
Est-il exact, que dans le développement obtenu, tu trouves,

$$m = \lim_{h \to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h} \; ?$$

Justifie. »

3. « Dans un ancien livre de mécanique, on, lit, entre autres:

« La vitesse moyenne d'un mobile, entre les instants t_0 et t_1, est égale au quotient entre d'une part, la distance parcourue par le mobile entre les deux instants, et, d'autre part, le temps mis à parcourir cette distance. »

« La vitesse instantanée au temps t_0 est la limite de la vitesse moyenne entre les instants t_0 et t_1, lorsque t_1 tend vers t_0. »

« L'espace parcouru par un mobile est une fonction du temps. »

a) L'espace parcouru par un mobile est donné par la fonction $f(t) = 5t^2 + 3t$ où t est compté en secondes et $f(t)$ est compté en mètres.
Détermine l'espace parcouru après 2 secondes et après 2,1 secondes.
Quelle est la vitesse moyenne du mobile entre ces deux instants ?
Quelle est la vitesse instantanée 2 secondes après le départ ?

b) Tente de généraliser entre les instants a et $a + h$.
Donne une formule donnent la vitesse instantanée à l'instant a en fonction de f, de a et de h. »

Les auteurs du manuel « Espace Math 54 » définissent ensuite les **notions** en commençant par le taux d'accroissement, suivi du nombre dérivé avec ses propriétés. Puis vient l'interprétation de la dérivée, d'abord d'un point de vue géométrique où on verra que le coefficient angulaire de la tangente au point a d'une courbe est donné par $f'(a)$. Ensuite vient une interprétation physique où la vitesse instantanée apparaît comme la dérivée de l'espace parcouru. Finalement, les auteurs présentent une interprétation économique qui montre la dérivée comme limite de taux de variation.

Même si les exercices introductifs à la notion de dérivée font apparaître les notions de vitesse et tangente, le concept de dérivée est vraiment défini à partir du taux d'accroissement :

« On donne la fonction $f : R \rightarrow R : x \rightarrow f(x)$,
le réel a du domaine de f,
l'intervalle I de centre a, inclus au domaine de f,
le réel h tel que $a+h$ appartienne à I.

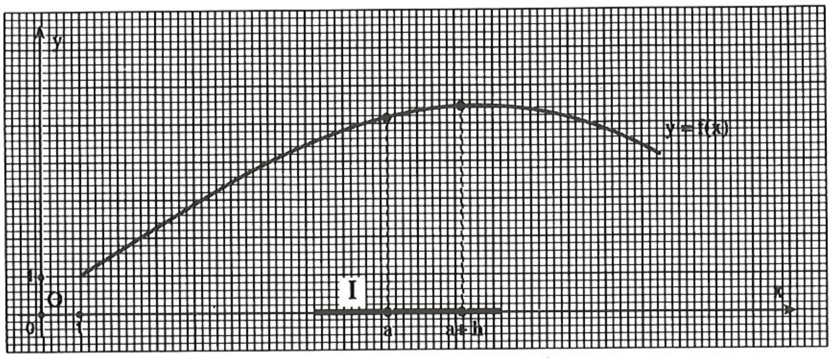


fig. 27

1. Le quotient $\frac{f(a+h) - f(a)}{h}$ est nommé **taux d'accroissement de f en a**.
2. La fonction f est dérivable en le réel a, si le taux d'accroissement de f en a admet une limite réelle lorsque h tend vers 0.
   Cette limite réelle porte le nom de nombre dérivé de f en a qui est noté f'(a) :

$$f'(a) = \lim_{h \to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$$ »

c) Selon les cours d'élèves.

Nous avions pensé analyser séparément les cours de math 4 heures et ceux de math 6 heures, ainsi, une fois cette analyse effectuée, nous aurions mis en évidence les différences entre un cours de math 4 heures et un cours de math 6 heures lors de l'introduction de la dérivée. Mais comme nous le verrons, il n'apparaît pas de distinction marquante. Cependant, dans ce paragraphe, nous laisserons quand même la séparation math 4h et math 6h pour que le lecteur se rendre compte que ce n'est pas nécessairement en math 6h que la dérivée est mieux enseignée.

Math 4

- Dans un de ces cours, la dérivée est introduite par le problème du vase conique (issu du manuel « Vers l'infini pas à pas ») qui est développé à la section 3.2.1 a). Un contact avec l'élève nous a appris que cet exemple avait été un peu compliqué à comprendre mais qu'après la résolution de l'exercice, le but était atteint : la notion de dérivée est ressentie. Nous avons eu l'occasion de rencontrer son professeur.

  Voici ce qu'il dit :
  « Ce problème est intéressant car il permet d'aborder la notion de débit moyen et de débit instantané en sortant un peu des notions plus classiques de vitesses. C'est un exercice qui n'est pas très abordable au premier abord. En 5° math 4h, il est nécessaire de bien préparer le terrain et de prendre le temps pour faire découvrir la notion de débit puis celle de débit moyen et celle de débit instantané. L'intérêt que j'y ai vu est l'approche de la définition assez théorique de la dérivée par un exemple assez concret. Malheureusement, je n'ai eu l'occasion de ne le traiter qu'une fois. Cela a assez bien marché en classe mais je ne suis pas certain que les élèves en aient retenu grand chose lorsque l'on a abordé la définition et les applications des dérivées. »
  Souvent en effet, on utilise des exemples trop complexes oubliant que l'élève ne connaît pas encore la notion qu'on va lui enseigner. Etant donné cette situation, les éléments démontrés dans l'introduction ne produisent pas les effets escomptés. Beaucoup d'élèves même ne reviendront jamais à cet exemple de départ jugé a priori inabordable. Cependant, ici la notion de débit instantané réapparaîtra plus tard dans des exercices.

- Dans le deuxième cahier de math 4, la dérivée est introduite en partant des pentes de sécantes. (voir annexe 1)

Math 6

- Dans son introduction, le professeur montre aux élèves que tracer un graphe n'est pas évident. Il leur fait remarquer qu'il existe des outils qui permettent de déterminer facilement les extrema, la croissance et la décroissance, les concavités. Il part d'un graphe, trace des tangentes en différents points, montre que la pente de tangente indique la croissance ou la décroissance des fonctions. Ensuite, il met en évidence que la dérivée est en fait la pente de la tangente (obtenue comme la limite des pentes des sécantes). Ce professeur procède plus ou moins de la même manière que celui dont nous avons proposé l'introduction en annexe 1.

- Nous avons aussi rencontré dans un cours de math 6 une introduction très succincte ne présentant qu'un graphe d'une fonction sur laquelle se trouvait une sécante et une tangente. Il est possible que le professeur ait donné oralement des explications complémentaires mais comme trace écrite, l'élève n'a gardé que quelques notes trop brèves. On a l'impression que cette introduction est là « parce qu'il en faut une ». Cela nous laisse croire qu'une telle manière de faire n'aura pas apporté grand chose aux élèves.

- Une autre introduction se fonde sur trois exemples, deux sur les vitesses et une sur les pentes de sécantes. Ils se trouvent en annexe 2.
  Dans le premier problème de l'annexe 2, on voit apparaître une confusion entre mesure et concept théorique par : « Ainsi un compteur de vitesse est un instrument donnant à chaque instant un nombre dérivé. »

  Suite à ces exemples, le professeur de math 6h utilise la même méthode que son collègue de math 4h (voir annexe 1) pour déduire la définition de la dérivée. Les exemples donnés quant à eux font partie des rares feuilles photocopiées du cours. Le fait que ces exemples soient photocopiés nous laisse supposer que le professeur ne désirait pas passer trop de temps sur ces exemples et qu'il voulait rapidement arriver à une définition de la dérivée par la pente de tangente. L'élève à qui appartient ce cours nous dit avoir compris le sens de ces exemples après avoir vu la définition de dérivée.

- Une autre introduction de cours est, elle, articulée sur base du manuel «Espace Math 54».

- Un cours cependant se différencie des autres en insistant particulièrement sur le taux d'accroissement. En effet, il commence par expliquer l'accroissement d'une variable, vient ensuite l'accroissement d'une fonction, suivi du taux d'accroissement moyen d'une fonction pour en arriver à la définition de la dérivée en terme de limite de taux d'accroissement moyen (Voir annexe 3). Pour chacune des notions intermédiaires, il est proposé des exercices. Il parle ensuite de la notion de tangente en un point d'une courbe. A ce sujet, à la page 4 de l'annexe 3, on se retrouve face à l'obstacle géométrique de la limite lorsqu'il écrit : « Conclusion : La tangente en un point P d'une courbe régulière est la limite d'une sécante passant par P lorsque le second point d'intersection P' tend vers P».

Notons que nous n'avons pas un nombre de descriptifs égal au nombre de cours que nous avons analysé car plusieurs d'entre eux se ressemblaient sur de nombreux points.

Dans l'introduction du cours de math 4h (annexe 1) dont beaucoup de professeurs s'inspirent, on voit apparaître le terme taux d'accroissement. Mais, il est probable que le sens ne soit pas ressenti par les élèves. Ceux-ci n'associeraient pas ce terme à une notion telle que débit et vitesse. Lorsqu'on propose des exercices introductifs sur le débit, sur la vitesse, les élèves se limitent-ils à cela ou voient-ils que ce ne sont en fait que des cas particuliers du taux de variation ? On peut en douter.
Selon nous, il serait intéressant de voir apparaître dans les cours une synthèse englobant les termes tangente, taux d'accroissement, débit instantané, vitesse instantanée, puissance instantanée, intensité instantanée, accélération instantanée et montrant que leur lien est la dérivée.
Ici, il nous semble que c'est la notion de tangente qui occupe la plus grande partie de l'introduction de la dérivée.

3.2.2 Quel est le poids respectif de la tangente et de la vitesse dans l'enseignement de la dérivée ? Les problèmes de mouvement occupent-ils une place importante ?

Dans le manuel « Vers l'infini pas à pas », un chapitre est consacré aux tangentes (chapitre 3 : « Juste frôler une courbe »), un autre aux vitesses (chapitre 4 : « Mouvements et vitesses ») et un troisième (chapitre 5 : « Rencontre entre tangente, pente et vitesse ») est consacré à ces deux notions pour arriver au concept de dérivée. Mais les auteurs du projet AHA font remarquer que le cadre des mouvements est particulièrement intéressant pour introduire une idée de variation et donc le concept de dérivée. Notons de plus que dans le manuel AHA le cas des vitesses est beaucoup plus exploité que dans le manuel « Espace Math 54 » ainsi que dans les cahiers d'élèves. Dans ces deux dernières références, on ne fait qu'une brève incursion à la vitesse par le biais de l'un ou l'autre exemple introductif et d'une interprétation physique du type :

1. Si $e : R^+ \rightarrow R : t \rightarrow e(t)$ est la fonction qui donne l'espace parcouru par un mobile en fonction du temps, alors la vitesse instantanée au temps t de ce mobile est donnée par $v(t) = e'(t)$.

2. Si $v : R^+ \rightarrow R : t \rightarrow v(t)$ est la fonction qui donne la vitesse d'un mobile en fonction du temps, alors l'accélération instantanée au temps t de ce mobile est donnée par $a(t) = v'(t)$.

Concernant les exercices sur la notion de mouvement, aussi bien dans « Espace Math 54 » que dans les cahiers d'élèves, il n'y a qu'un ou deux petits exercices.
Par contre, la notion de pente de tangente est plus présente dans les cahiers d'élèves et dans « Espace Math 54 ». Dans les cahiers d'élèves, elle mène à la définition, comme on l'a vu dans l'annexe 1. Dans « Espace Math », elle apparaît sous forme d'une interprétation géométrique. Mais aussi bien dans « Espace Math 54 » que dans les cahiers d'élèves, elle est utilisée pour la notion de concavité et, elle intervient dans une foule d'exercices où on demande de donner l'équation de la tangente en un point d'une courbe.

3.2.3 Comment dans l'enseignement secondaire passe-t-on de la limite de quotients différentiels à la pente de la tangente ? Comment sont définis les objets-tangentes ? N'y a-t-il pas un cercle vicieux avec la définition de dérivée ?

a) Selon « Vers l'infini pas à pas ».

Dans la tête des élèves, la notion de tangente est liée à l'idée d'une droite qui ne rencontre globalement la courbe qu'en un seul point sans la traverser. Leur conception est liée explicitement ou implicitement à la tangente au cercle.
Plusieurs élèves éprouvent des difficultés à associer spontanément la pente d'une tangente à la limite de la fonction taux d'accroissement. Pour eux, quand le professeur parle de la limite des pentes de sécantes, la filiation entre celle-ci et la pente de tangente n'est pas facilement perçue, le mot limite du langage mathématique étant probablement compris par les élèves comme « position limite » de droites au sens géométrique.
Le projet AHA va faire évoluer la conception géométrique qu'ils ont de la tangente vers l'idée d'approximation numérique. En effet, les élèves ont une conception statique globale de la tangente car ils associent la tangente à l'image d'une tangente au cercle. Les auteurs de cet ouvrage veulent les faire accéder à une conception dynamique locale de la tangente, à savoir que la pente de la tangente soit la limite des pentes des sécantes. Pour cela ils vont passer par une conception statique locale de la tangente en ayant recours à l'approximation affine.

Comme première situation pour aboutir à une approximation affine, on fournit à l'élève un dessin sur lequel est représenté une colline surmontée d'un mât.

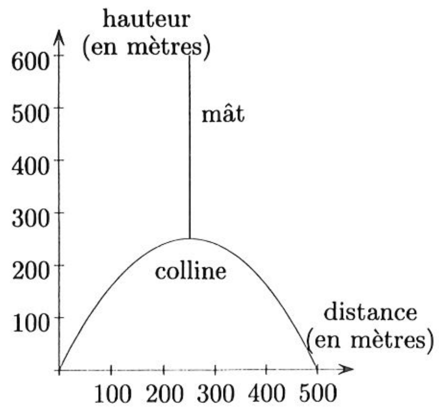


fig. 28

L'élève doit repérer la partie invisible du mât planté sur la colline, pour quelqu'un situé au pied. Cette situation conduit l'élève à tracer à vue une droite qui frôle la courbe en un point.

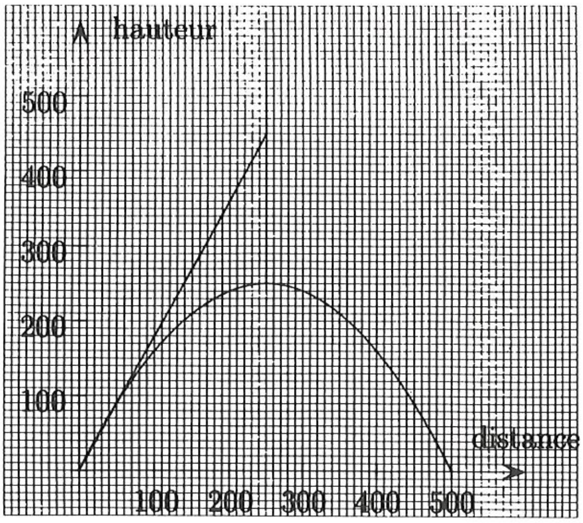


fig. 29

Le mot « tangente » est souvent évoqué spontanément par les élèves à propos de cette situation.

Les situations suivantes permettent aux élèves de confronter l'image d'une droite qui frôle la courbe à celle d'une droite qui ne rencontre globalement la courbe qu'en un seul point sans la traverser : par exemple, l'axe des x frôle bien la courbe $y = x^3$, mais la traverse.

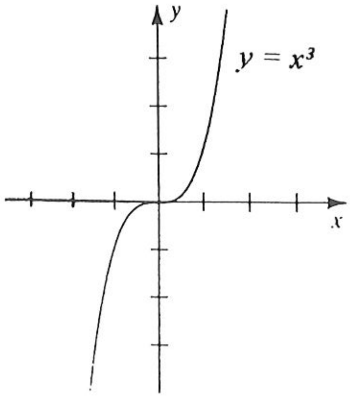


fig. 30

Néanmoins, on garde cette droite comme tangente car « frôler » l'emporte sur « traverser ». A priori, il n'y a pas de raison pour que « frôler » l'emporte sur « traverser », mais les élèves font confiance au professeur. C'est le contrat didactique qui « permet » cette manœuvre. Cependant, dans sa démarche, le professeur a une idée derrière la tête : il veut arriver à la notion d'approximation affine.

On leur propose ensuite la fonction $y = 1 + x + x^2$ grâce à laquelle on voit apparaître une nouvelle signification du verbe frôler : « frôler signifie qu'autour du point d'abscisse 0, la fonction $1 + x + x^2$ se comporte pratiquement comme $1 + x$. Numériquement, l'erreur commise est négligeable pour des x proches de 0 et correspondant à l'écart entre la courbe et sa tangente en $x = 0$ ».

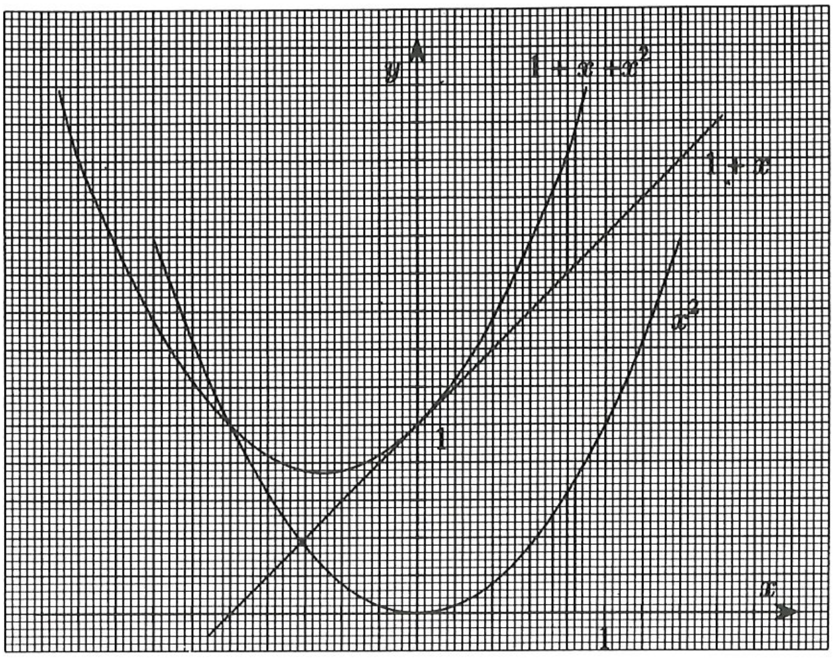


fig. 31

C'est à cet endroit du texte qu'est introduit l'expression « approximation affine ». Dans la synthèse en fin de chapitre, on annonce pour la première fois l'intention de remplacer localement une fonction par une fonction du premier degré plus simple qui l'approxime convenablement.

Voici cette synthèse (15):

- « En analyse, on privilégie un regard nouveau sur la tangente en un point d'une courbe : plutôt qu'une droite qui, comme dans le cas du cercle, ne rencontre globalement cette courbe qu'en un seul point sans la traverser, la tangente est envisagée comme une droite qui frôle la courbe, et qui peut donc la remplacer localement. Cette caractéristique aboutit à la définition suivante dans le cas des courbes polynomiales. »

- « La **tangente au point d'abscisse *0*** des courbes $y = a_0 + a_1 x + \ldots + a_n x^n$ est la droite

$y = a_0 + a_1 x$.

En effet, pour x proche de 0, cette droite peut à peu près remplacer la courbe car les termes en x^2, x^3, … sont négligeables. L'expression $a_0 + a_1 x$ s'appelle l'**approximation affine** de la fonction autour de $x = 0$. »

- « La **tangente au point d'abscisse x_0** de la courbe $y = f(x)$ est la translatée de la tangente en $x = 0$ de la courbe translatée $y = f(x + x_0)$. En particulier, la pente au point d'abscisse x_0 de la courbe $y = a_0 + a_1 x + ... + a_n x^n$ est donnée par $n\, a_n x_0^{n-1} + ... + 2a_2x_0 + a_1$. »

En fait, au cours de ce chapitre, AHA évacue l'idée de limites pour éviter que l'élève se retrouve face aux obstacles géométriques de la limite vus à la section 1.2.1.1. Cet obstacle vient du fait que les élèves éprouvent des difficultés à associer pente de tangente à limite d'une suite de quotients différentiels. (Pour plus d'information à ce sujet, se reporter à la section 1.2.1.1.)

Plus tard, après avoir vu les vitesses instantanées, les auteurs du projet AHA, au cours d'un exemple, rapprocheront les pentes de tangentes aux quotients différentiels en appliquant aux fonctions $e(t) = t^2$ et $e(t) = t^3$ le procédé employé pour obtenir la vitesse instantanée (limite de la vitesse moyenne). Nous observons qu'on arrive au même résultat que lors de la détermination de la pente de la tangente dans le cadre de l'approximation affine.

Voici l'exemple qui a été utilisé :

$$e(t) = t^2,\ v(t_0) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{e(t_0+\Delta t) - e(t_0)}{\Delta t}$$

$$= \lim_{\Delta t \to 0} \frac{(t_0+\Delta t)^2 - (t_0)^2}{\Delta t} = 2t_0$$

Pour $y = x^2$, la pente en $x = x_0$ vaut $2x_0$.

idem pour $e(t) = t^3$, on a $v(t_0)=3t_0^2$ et la pente de $y = x^3$ en $x = x_0$ vaut $3x_0^2$.

Ces deux observations amènent à la conclusion que ces deux notions, vitesse instantanée et pente de la tangente, sont aussi équivalentes.

Désormais, la pente de la tangente à une courbe quelconque au point x_0 peut s'obtenir par le calcul

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0+\Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$$

Ce nombre s'appelle la **dérivée** de la fonction au point considéré.

Il s'écrit $f'(x_0)$ ou $\frac{df}{dx}(x_0)$

Dans AHA on ne voit pas apparaître de cercle vicieux entre la notion de tangente et celle de dérivée (En effet, la tangente n'est pas définie par la dérivée pour qu'ensuite la dérivée soit définie par la tangente). La tangente a été définie avant le concept de dérivée, sans avoir recours à celui-ci (cf. synthèse de AHA (15) ci-dessus).

b) Selon « Espace Math 54 ».

Pour en arriver à la définition de tangente, les auteurs de ce manuel commencent par définir la tangente en un point du cercle de la manière suivante :
« Une tangente en un point d'un cercle est un droite qui coupe le cercle en un seul point sans le traverser ». Ils font ensuite remarquer que cette notion de tangente n'est pas généralisable par les trois exemples suivants.

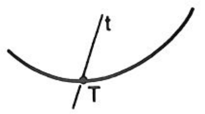
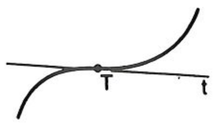
	Droite qui coupe la courbe en deux points et qui, pourtant est tangente à la courbe en un des deux points.
	Droite qui coupe la courbe en un seul point mais qui, manifestement, n'est pas tangente à la courbe.
	Droite qui traverse la courbe et qui, malgré tout, semble être tangente à la courbe.

fig. 32

Ils formalisent alors la notion de tangente à une courbe :

> « La **tangente en un point A d'une courbe** est la droite dont la position est la limite, si elle existe, de la position d'une sécante variable AB à cette courbe, lorsque le point variable B tend vers le point fixe A. »

Ensuite, ils proposent un « film » qui illustre cette définition :

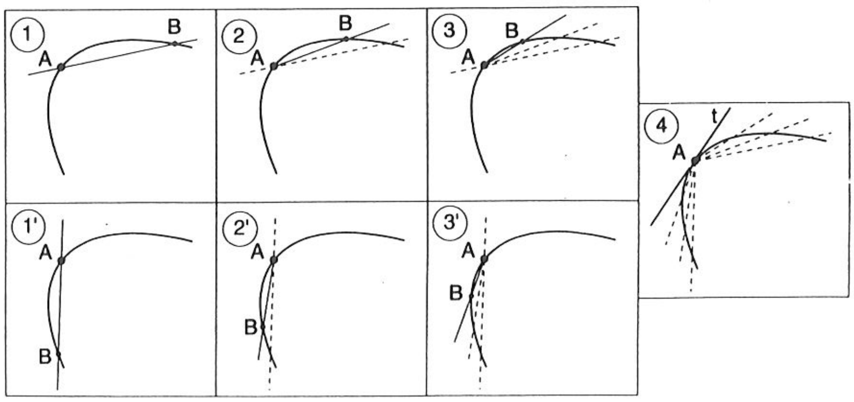


fig. 33

Ils développent la notion de position de la façon suivante :

> « Dans un repère orthonormé, **la position d'une droite** est donnée par le **coefficient angulaire de cette droite**, pour autant qu'elle ne soit pas verticale. »

Ils particularisent alors la définition dans le cas du graphe cartésien d'une fonction numérique d'une variable réelle.

> « Dans un repère orthonormé,
> si G_f est le graphe cartésien de $f : R \rightarrow R : x \rightarrow f(x)$,
> $A(a, f(a))$ est un point fixe de G_f,
> $B(a+h, f(a+h))$ est un point variable de G_f, voisinage de A,
> t est la tangente, non verticale, à G_f en A,
> m_t est le coefficient angulaire de t,
> m_{AB} est le coefficient angulaire de AB,

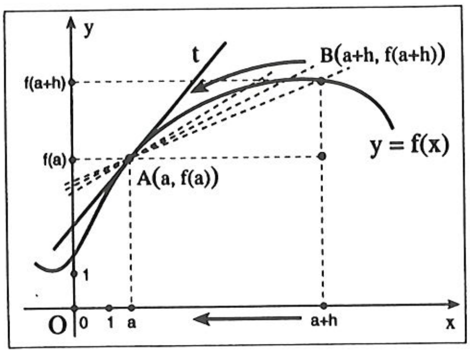


fig. 34

alors,

- B tend vers A signifie que h tend vers 0 ;
- $m_{AB} = \dfrac{f(a+h) - f(a)}{a + h - a} = \dfrac{f(a+h) - f(a)}{h}$
- $m_t = lim_{h\rightarrow 0}\, m_{AB} = f'(a)$ »

Il en résulte les propriétés suivantes :

1. Le coefficient angulaire de la tangente au point $(a, f(a))$ du graphe cartésien de la fonction $f : R \rightarrow R : x \rightarrow f(x)$ est égal au nombre dérivé de f en a pour autant que cette tangente ne soit pas verticale.
2. Une équation cartésienne de la tangente au point $(a, f(a))$ du graphe cartésien de la fonction $f : R \rightarrow R : x \rightarrow f(x)$ est $y - f(a) = (x - a) f'(a)$ pour autant que cette tangente ne soit pas verticale.

On voit ici que ces propriétés nécessitent la connaissance de la notion de dérivée. Mais ceci n'est pas un problème car la définition est apparue bien avant, suite aux exemples introductifs et à la notion de taux de variation (cf. section 3.2.1.b)). On n'a donc pas non plus ici le problème du cercle vicieux.

c) Selon les cours d'élèves.

Dans la plupart des cours, pour associer un quotient différentiel à la pente de la tangente, les professeurs procèdent de la même manière que leur collègue dont l'introduction se trouve en annexe 1.

Cette façon de faire pourrait peut-être laisser croire à un cercle vicieux : on a utilisé les tangentes pour en arriver au nombre dérivé mais ce n'est que plus tard que l'équation de la tangente est donnée en utilisant bien sûr la dérivée. D'une part, nous pensons que nous n'avons pas affaire à un cercle vicieux et ceci pour la raison suivante : lorsque la tangente est employée pour définir la dérivée, cette tangente n'est utilisée que d'un point de vue graphique.
Ce n'est qu'après la définition de la dérivée que cette tangente sera définie analytiquement.
Mais d'autre part, il se peut qu'il subsiste une ambiguïté pour l'élève tel que c'est présenté dans les cours où on fait implicitement « un peu comme si » la tangente avait été définie avant la dérivée.

3.2.4 Comment est gérée la façon de faire assimiler aux élèves le fait de poser $\Delta t=0$ dans l'expression de la vitesse moyenne ou de poser $\Delta x=0$ dans l'expression des pentes des sécantes ? Choisit-on une notation mettant en évidence le 0/0 ou opte-t-on pour une notation qui l'évite ?

Depuis toujours, les discours concernant les infiniment petits posent problèmes. En effet, si on se réfère à la méthode de Fermat (voir section 1.1, la « dérivée » est utilisée) pour trouver des extréma, on voit qu'il n'hésite pas à supprimer des incréments de variable pour en arriver à un résultat correct. Mais il ne justifie pas sa façon de faire et pourtant il dira « *cette méthode ne trompe jamais et peut s'étendre à nombre de questions très belles* », se contentant d'une vérification par des exemples.

Poser $\Delta t = 0$ ne suscite pas uniquement un problème de sens chez l'élève, ce problème apparaissait déjà dans l'Histoire

L'évêque irlandais Berkeley écrivait (17-18$^{\text{ème}}$ siècle) :

« Un point peut être la limite d'une ligne ; une ligne peut être la limite d'une surface ; un instant peut terminer le temps. Mais comment peut-on concevoir une vitesse au moyen d'une telle limite ? Une vitesse dépend du temps et de l'espace et ne peut être conçue sans eux.(...) Considérer le rapport de deux choses suppose que ces deux choses aient une grandeur et que cette grandeur puisse être mesurée. »

a) Selon « Vers l'infini pas à pas »

A la section 3.2.1, nous avons vu que dans le manuel « Vers l'infini pas à pas », la dérivée était amenée par un problème de vitesses liées que nous rappelons ici :

<u>Le problème du vase conique :</u>

Une pompe alimente un vase conique. Elle est réglée de telle manière que le niveau de l'eau y monte régulièrement de 1 cm/min. L'angle au sommet du cône vaut 90°. Jusqu'à quand le débit de la pompe sera-t-il inférieur à 100 cm³/min ?

Lors de la résolution de ce problème, nous avons vu que nous étions amenées à poser $\Delta t = 0$, pour en arriver à une réponse correcte. Mais le fait de négliger un terme et d'en arriver à une réponse correcte laisse les élèves perplexes. Afin de leur montrer que la réponse est malgré tout correcte, on leur propose une expérience équivalente. Ceci ne fournit évidemment pas une démonstration rigoureuse du fait que poser $\Delta t = 0$ donne une réponse exacte, mais déjà dans l'Histoire les anciens se contentaient d'un exemple pour se convaincre.

Voici cette expérience :

Posons à côté du vase conique un vase cylindrique dont la base mesure 100 cm²

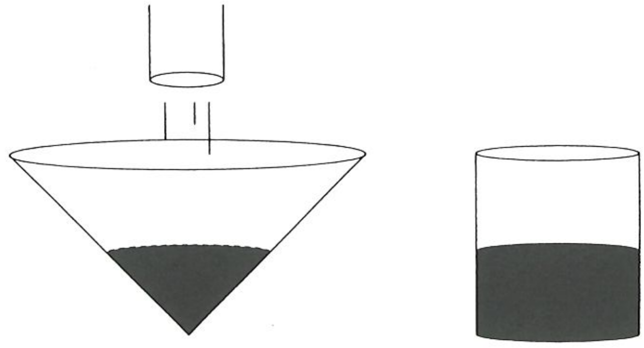


fig. 35

Au lieu de considérer une seule pompe, on en prend deux qui alimentent chacune un des vases, de telle manière que le niveau y monte régulièrement et simultanément de 1 cm/min. La pompe qui alimente le cylindre a évidemment un débit constant de 100 cm³/min. L'autre pompe devra verser moins vite que la première tant que le cône est plus étroit que le cylindre, et plus vite par la suite.
Les deux pompes ont donc le même débit de 100 cm³/min à l'instant précis où la superficie de l'eau dans le cône vaut 100 cm²,ce qui donne la même équation que précédemment :

$$\pi h^2 = \pi t^2 = 100$$

ou

$$t = 10/\sqrt{\pi}$$

On voit donc bien qu'on obtient la même réponse que lorsqu'on pose $\Delta t = 0$.

Notons que certaines notations permettent d'adoucir les choses alors que d'autres choquent.
En effet, la notation $\lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x}$ risque de perturber plus les élèves que la notation $\lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$. Regardons sur l'exemple suivant :

Considérons $f(x)=x^2$.

Si on choisit la notation en $\Delta x \to 0$,
On obtient

$$\begin{aligned}\lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x} &= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{(x+\Delta x)^2 - x^2}{\Delta x} \\ &= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{x^2 + 2x\Delta x + (\Delta x)^2 - x^2}{\Delta x} \\ &= \lim_{\Delta x \to 0} 2x + \Delta x\end{aligned}$$

Si on choisit la notation en $x \to a$,
On obtient

$$\begin{aligned}\lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} &= \lim_{x \to a} \frac{x^2 - a^2}{x - a} \\ &= \lim_{x \to a} \frac{(x - a)(x + a)}{x - a} \\ &= \lim_{x \to a} x + a\end{aligned}$$

Le choix de la première notation (Δx) est plus marquant pour l'élève car il obtient la limite en supprimant un terme. Les auteurs du projet AHA préféreront cette notation ce qui est en accord avec leur philosophie qui privilégie le fait de mettre l'élève face à l'obstacle.

b) Selon « Espace Math 54 » ainsi que les cours d'élèves.

Aussi bien dans le manuel « Espace Math 54 » que dans les cours d'élèves, nous n'avons trouvé aucune note mentionnant le problème du $\Delta t=0$ et du $\Delta x=0$.
Notons que les choses sont définies de façon à ce que les ambiguïtés n'apparaissent pas. Par exemple, la vitesse instantanée, dans « Espace Math 54 », est définie de la façon suivante :

> « Si $e : R^+ \rightarrow R : t \rightarrow e(t)$ est la fonction qui donne l'espace parcouru par un mobile en fonction du temps, alors la vitesse instantanée au temps t de ce mobile est donnée par $v(t) = e'(t)$ »

Si elle avait été définie comme :

$$lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{e(x+\Delta t) - e(t)}{\Delta t},$$

cela aurait posé peut-être plus de problèmes.

La notation en « Δ » ne se trouve pas dans le manuel « Espace Math 54 » et n'apparaît que très rarement dans les cahiers d'élèves, ce qui évite certaines questions de la part des élèves.

3.2.5 Dans quels types de contextes voit-on la dérivée ?

a) Selon « Vers l'infini pas à pas ».

La dérivée est introduite par le calcul de débit instantané, suivie par des calculs de vitesse instantanée et de vitesse de variation d'aire.

On peut observer que les contextes cinématiques, dans ce manuel, ont une importance particulière pour introduire la dérivée car la variable « temps » induit assez naturellement une idée de variation, laquelle n'est présente a priori, dans la tête des élèves, ni à propos des tangentes, ni à propos des calculs d'aires et de volumes.

Jusqu'ici les auteurs du projet ne proposent que des dérivées par rapport au temps. Ce n'est qu'après avoir identifié que le calcul des pentes de tangentes était identique à celui du calcul des vitesses instantanées, de même équivalent au calcul de dérivée, qu'apparaissent des dérivées par rapport à des variables autres que le temps, et ce par des calculs de pentes.

La dérivée sera ensuite utilisée au sein de problèmes d'optimisation (d'aire, du prix de revient, …)

La dérivée apparaît par la suite au sein des chapitres concernant les fonctions trigonométriques et de celui concernant les fonctions exponentielles, en calculant la dérivée de ces fonctions mais aussi par le biais d'équations différentielles. Par exemple dans ce chapitre, on propose une équation différentielle qui aura pour solution une sinusoïde. Dans le chapitre concernant les exponentielles et les logarithmes, la dérivée est aussi utilisée d'une autre manière. Par exemple, on obtient le nombre e en se demandant : « Quelle est la base a de la fonction a^x qui est partout égale à sa dérivée ? »

Dans l'ouvrage « Vers l'infini pas à pas », nous avons pu remarquer qu'il y avait peu de place octroyée au calcul de dérivée. Les élèves sont invités pendant un temps à dériver des fonctions, sans disposer des règles de calcul de dérivation. Ils doivent pour cela manipuler et simplifier des expressions du type $\Delta y/\Delta t$ parfois assez compliquées. Le temps passé à ces calculs entretient le sens des concepts en jeu alors que l'idée même de taux disparaît du calcul rapide.
Par ailleurs, les calculs de dérivées « artisanaux » font pressentir aux élèves l'existence de règles de dérivation et leur font conjecturer certaines d'entre elles. Par exemple, le traitement fait à $\Delta(t^2+t^3)/\Delta t$ peut se séparer en deux : celui de $\Delta t^2/\Delta t$ et celui de $\Delta t^3/\Delta t$. Pour traiter $\Delta(kt^2)/\Delta t$, on peut mettre k en évidence et le récupérer en fin de calcul.

b) Selon « Espace Math 54 ».

Dans « Espace Math 54 », la dérivée est introduite par trois applications : une sur les pentes de tangente, une sur l'approximation et une sur les vitesses instantanées (citées à la section 3.2.1 b).
Ensuite, les auteurs proposent une interprétation géométrique de la dérivée par le biais de la pente de la tangente. Celle-ci est suivie d'une interprétation physique dans laquelle apparaît le fait que : « la loi des vitesses est obtenue par dérivation de la loi des espaces » ; « la loi des accélérations est obtenue par dérivation de la loi des vitesses » ; « la dérivation de la fonction donnant la quantité de liquide traversant une section d'un tuyau en fonction du temps est le débit » ; « la dérivation de la fonction donnant la quantité d'électricité traversant un conducteur en fonction du temps est l'intensité » ; et, « la dérivée de la fonction qui donne l'énergie produite par un moteur en fonction du temps est la puissance ». De plus, la dérivée est vue dans un contexte économique, où on cite le fait qu'une bonne approximation de l'augmentation du coût est donnée par le coefficient angulaire de la tangente à la courbe coût. Ces différents contextes vont être utilisés au travers de différents exercices.
Notons que, dans « Espace Math 54 », pour ce qui concerne le calcul des dérivées, les auteurs proposent quelques exercices de calculs rapides, sans qu'ils soient, nous semble-t-il, excessifs. Il y a peu de problèmes d'optimisation, par contre le calcul d'étude de fonction est beaucoup plus important.

De plus, dans ce manuel, nous avons observé que contrairement à AHA, ils ne prennent pas en compte le fait que l'idée de variation est plus prégnante dans un contexte temporel.

La dérivée y est définie directement à partir d'un taux d'accroissement d'une fonction f quelconque en a et non d'une fonction vitesse. Ainsi dans « Espace Math 54 », on ne commence pas par dériver par rapport à t et ensuite par rapport à n'importe quelle autre variable.

c) Selon les cours d'élèves.

La quantité de petits calculs rapides de dérivées présents dans les cahiers ou plutôt en devoir, nous fait penser à un petit 'drill'. Les études de fonctions sont très présentes par opposition aux problèmes d'optimisation qui se font assez discrets.

En ce qui concerne le contexte temporel, nous pourrions faire la même remarque que pour « Espace math 54 », à savoir que la plupart du temps, ils ne commencent pas par dériver par rapport au temps. Cela doit être lié au fait que bien souvent la dérivée est introduite par les pentes de tangente.
En ce qui concerne les différents contextes, il y a toujours au moins un exercice mettant en évidence le fait que « la dérivée de la loi des espaces fournit la loi des vitesses » et que « la dérivée de la loi des vitesses fournit la loi des accélérations », avec parfois une petite incursion aux intensité instantanée, puissance instantanée et taux marginal.

3.2.6 Résout-on des équations différentielles dans le secondaire ?

Nous avons pu constater que ni dans les cours d'élèves, ni dans le manuel « Espace Math 54 » ne figurent des résolutions d'équations différentielles. Ceci est sans doute normal étant donné que les équations différentielles ne figurent pas dans le programme. Ceci demande bien sûr un niveau d'abstraction plus élevé (ici en effet l'inconnue est une fonction). On pourrait se demander si le fait de résoudre quelques équations différentielles ne faciliterait pas la jonction avec les études de candidatures. Notons cependant que la programme d'humanité est déjà bien chargé. Nous n'avons pas investigué dans ce sens là mais nous faisons remarquer qu'ils ont déjà à partir de la $5^{\text{ième}}$ rénovée tous les outils en main pour résoudre certaines équations différentielles. Par exemple, ils sont capables de résoudre une équation différentielle du type $y''(t) = -k\, y(t)$. Ils ont vu en effet au cours de Physique de $4^{\text{ème}}$ Rénovée que $F = m\, a$ et que dans le cas du ressort, on a une formule du type $F = -k\, x$ et donc en associant ces deux formules, on a $-k\, x = m\, \dot{x}$ sachant que $a = \dot{x}$. On en arrive alors à une fonction $-\frac{k}{m}\, x = \dot{x}$.

Ils ont déjà dérivé les fonctions trigonométriques et savent qu'en dérivant deux fois du sinus ou du cosinus, on obtient leur opposé. Ils parviennent à la solution de leur équation, bien que pour eux obtenir comme solution une fonction puisse poser problème.

Les auteurs du projet AHA mentionnent en outre d'autres types d'exercices. Voici par exemple deux énoncés provenant de AHA. Notons au passage que ces exercices n'apparaissent pas dans un chapitre réservé à la dérivée. Le premier intervient dans le chapitre sur les fonctions trigonométriques et le second provient d'un chapitre sur les exponentielles et les logarithmes.

<u>Problème 1</u>

Un bloc de masse *m* est suspendu à l'extrémité d'un ressort et sa face supérieure occupe la position d'équilibre 0 sur un axe dirigé vers le bas (fig. 36).

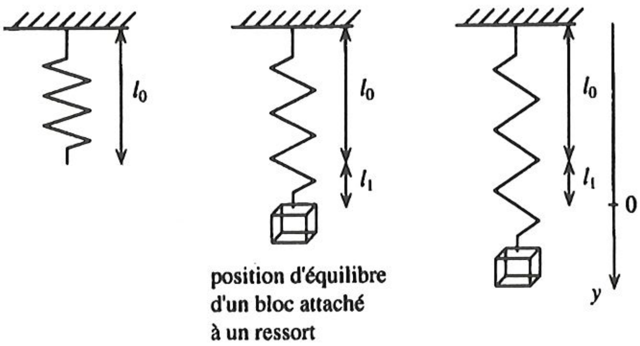


fig.36

Si on le tire vers le bas d'une longueur y_0 par rapport à sa position d'équilibre et qu'on le lâche, il se met à osciller. Supposons qu'aucune force extérieure (frottement de l'air, par exemple) ne le freine.
Exprimez le mouvement du bloc en fonction de son accélération, en tenant compte de la loi de Newton selon laquelle $F = ma$.
(Les auteurs veulent qu'on en arrive à $y(t) = -\frac{m}{k} y''(t)$) (16)

a) Quelle interprétation cinématique donner à l'équation (16) ?

b) Parmi les fonctions élémentaires, quelles sont celles qui pour toute valeur de *t* satisfont à la condition

$$y''(t) = -Ay(t)$$

où on a posé $A = k/m$? Et plus particulièrement les fonctions dont la dérivée seconde est égale à leur opposée

$$y''(t) = -y(t) \text{ ?}$$

Problème 2

La loi de Fechner

Lorsqu'une personne tient un poids dans sa main, elle éprouve une sensation. Et de même lorsqu'une lumière arrive à ses yeux ou un son à ses oreilles. On bande les yeux de la personne et on dépose dans sa main des poids croissants. On lui demande de dire quand elle pense éprouver une sensation double, triple, etc. La croissance des sensations n'est pas du tout la même que celle des poids déposés dans la main :
Un poids double ne donne pas une sensation double, un poids triple une sensation triple. Alors, comment les choses se passent-elles ?

Un physicien allemand nommé Fechner est arrivé, jusqu'à un certain point, à mesurer les sensations. Celles-ci sont essentiellement subjectives et donc, on ne peut que s'appuyer sur les déclarations des personnes soumises aux expériences. C'est une chose délicate, mais enfin, on y arrive.

Lorsqu'on tient 50 g dans sa main, une augmentation de 20 g est perçue comme assez importante. Lorsqu'on tient 500 g dans sa main, une augmentation de 20 g est estimée nettement plus faible. Fechner a établi que l'accroissement de la sensation est

- inversement proportionnel à l'augmentation Δx de l'excitation(le poids dans la mains) ;
- directement proportionnel à l'augmentation Δx de l'excitation. En d'autres termes,
  si $y = f(x)$ désigne la sensation et Δy son accroissement,

$$\Delta y = C\,\frac{\Delta x}{x} \text{ ou encore } \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{C}{x} \tag{17}$$

où C est une constante.

Pour revenir sur le terrain familier des dérivées, supposons (17) valable pour des accroissements aussi petits qu'on veut. Ceci amène à écrire

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{C}{x}$$

ou encore $$f'(x) = \frac{C}{x} \tag{18}$$

Connaissez-vous une fonction f vérifiant l'équation (18) ? Tracez- en approximativement le graphique.

En guise de conclusion à cette partie qui vise à savoir comment la notion de dérivée est enseignée dans le secondaire, nous pouvons faire ressortir deux tendances générales qui sont buter sur les obstacles ou les contourner. Le projet AHA fait buter les élèves sur l'obstacle tandis que les auteurs du manuel « Espace Math 54 » et les cours d'élèves que nous avons pu observer essaient de contourner les difficultés. Chacun de ces deux points de vue peut néanmoins se justifier. Notons que pour l'introduction de la dérivée, les enseignants devraient peut-être plus insister sur le contexte cinématique car comme le font remarquer les auteurs de AHA, ce contexte est propice à l'idée de variation.

Conclusion.

Conclusion vue par Anne-Catherine.

Le concept de dérivée nous l'avons vu est le résultat de nombreux débats, questions et intuitions. Partant d'Aristote avec son regard uniquement sensoriel sur les mathématiques, il aura fallu de nombreux siècles pour aboutir à une définition rigoureuse de la notion de dérivée élaborée par Cauchy et Weierstrass. De nombreux mathématiciens tels Fermat, Newton, Liebniz, Taylor, Euler, Mac Laurin et Lagrange viendront ajouter leur pierre à l'édifice qu'est la dérivée. La période écoulée entre le moment où Fermat, le premier, utilise implicitement la dérivée et celui où Weierstrass la définit s'étend sur plus de 200 ans. Pour rappel, Fermat, par le biais de l'idée de variation et d'infinitésimal permet dans sa méthode de trouver d'une part les extrema et d'autre part la tangente à une courbe.

Suite à cette partie historique, nous avons pu nous rendre compte que de nombreux éléments ont fait problème dans l'histoire de la dérivée. Les difficultés principales que nous avons relevées chez les Anciens se retrouvent chez les étudiants à l'heure actuelle : le problème au niveau du discours sur les infiniment petits et le refus de la vitesse instantanée (c'est-à-dire refus de considérer un intervalle de temps qui tend vers zéro). Comme le dit si judicieusement M. Schneider : « La vitesse instantanée est un concept imaginé par l'être humain pour répondre à une question qui relève de l'instantané. Cette démarche paraît sans doute inhabituelle car on s'imagine souvent qu'il suffit d'observer les choses de la nature pour en tirer des concepts immédiatement disponibles pour raisonner. Nombreux sont ceux qui s'attendent à ce que les concepts mathématiques et leurs propriétés prolongent en quelque sorte leur perception première de ces objets issus du monde sensible, comme si les mathématiques étaient une copie quasi-conforme de ces objets. On peut donc interpréter les réticences vis-à-vis de la vitesse instantanée par le fait qu'il n'existe pas de séparation claire et précise entre le monde sensible, caractérisé par des grandeurs appréhendées grâce aux sens et aux mesures, et les mathématiques, caractérisées par des concepts imaginés (définis) par l'esprit humain. »

Nous nous sommes intéressées à la manière dont on enseignait la notion de dérivée dans le secondaire et nous avons pu faire ressortir, à l'analyse des deux manuels ainsi que des cahiers d'élèves, deux tendances générales qui sont de mettre les élèves face à des difficultés réelles ou de les contourner en éludant certains points de matière ou en les simplifiant. Le projet AHA fait buter les élèves sur l'obstacle alors que dans le manuel « Espace Math 54 » et les cours d'élèves que nous avons pu observer, les auteurs essaient de contourner les difficultés. Je ne peux cependant prendre position en ce moment : chacun de ces deux points de vue peut se justifier.

À l'analyse, le problème principal qui ressort de ce travail de recherche est que les élèves du secondaire de même que les étudiants du supérieur ainsi que les utilisateurs du concept de dérivée éprouvent des difficultés à associer d'une part la dérivée à une idée de variation et d'autre part à recontextualiser cette notion. Au cours de cette année, nous avons mené une enquête auprès de personnes de différents horizons scientifiques. Nous espérions qu'ils reconnaissent le concept de dérivée au sein de l'exercice proposé mais il n'en fut rien car ils ne percevaient pas entre autre l'idée de taux de variation au sein de ces problèmes. Notons pour cela que pour introduire la dérivée, les enseignants devraient peut-être plus insister sur le contexte cinématique qui, comme le font remarquer les auteurs de AHA, est propice à l'idée de variation. Cette réflexion nous amène à confirmer le fait qu'effectivement les élèves du secondaire, les étudiants du supérieur ainsi que des personnes diplômées d'un grade scientifique en biologie ou en pharmacie faisant partie de l'échantillonnage interrogé perçoivent difficilement l'idée de taux de variation instantané.

Conclusion vue par Emmanuelle.

Nous aimerions que les élèves perçoivent et conservent du concept de dérivée, que celui-ci exprime les taux de variations instantanés et qu'il se définit par la limite du rapport de deux accroissements. Mais cet objectif est loin d'être atteint. En effet, la notion de dérivée se résume pour les élèves à un calcul, qui pour certains d'entre eux permet de calculer la pente de la tangente, mais très peu pensent aux taux de variation instantanés. L'utilité de la dérivée pourrait peut-être être mieux mise en évidence dans l'enseignement secondaire. Peut-être faudrait-il proposer des exercices dont la formulation est plus variée c'est-à-dire où le calcul de dérivée est présent en des termes comme débit instantané, taux de refroidissement instantané… Et il serait peut-être plus avantageux d'introduire le concept de dérivée dans le cadre de la cinématique plutôt qu'en partant des tangentes comme c'est le cas dans les cours d'élèves que nous avons analysés car la cinématique induit particulièrement bien une idée de variation. En particulier pourquoi ne pas introduire le concept de dérivée par le problème du vase conique que nous avons vu (cf. pg.88)? Ce dernier est concret, induit bien l'idée de variation et permet de plus une expérience qui aide à surmonter l'obstacle épistémologique qui empêche de voir que la limite fournit la valeur exacte. Mais il serait peut-être intéressant que ce type d'exemples réapparaisse régulièrement pour qu'une fois les formules mises en évidence, la dérivée ne se résume pas qu'à du calcul.
Pourquoi ne pas dresser avec les élèves une liste non exhaustive des différents types de problèmes où elle s'avère un outil efficace ? Cette liste mettrait en évidence que la dérivée permet de calculer une vitesse instantanée, un débit instantané,… en précisant bien que ces grandeurs (vitesse, débit, …) sont une variation d'une grandeur en fonction d'une autre. Cela rendrait la dérivée plus concrète et mettrait clairement en évidence que la dérivée exprime bien un taux de variation instantané.

Annexe 1

Les dérivées.

Approche géométrique du nombre dérivé.

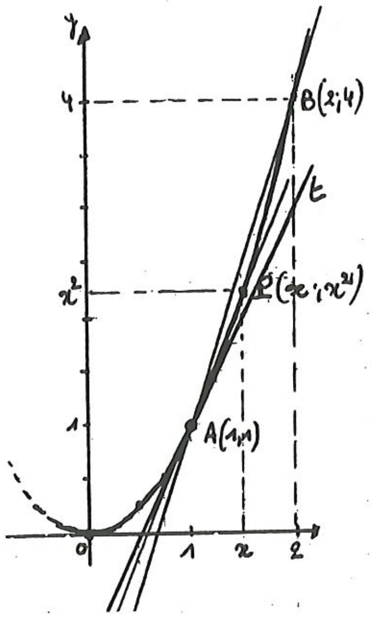


fig. A1

Soit $f : IR \to IR : x \to y = f(x) = x^2$

Si A(1,1) et B(2,4) alors la pente de la droite AB est

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{4-1}{2-1} = 3$$

Choisissons P entre A et B sur la parabole ; on a P(x ; x^2) et la pente de la sécante AP est

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{x^2 - 1}{x - 1}$$

Si le point P est choisi de plus en plus « proche » du point A, autrement dit lorsque x s'approche de 1, la sécante AP se « rapproche » de la tangente t à la parabole au point A ; on en déduit que la pente de la tangente au point A(1,1) est

$$\lim_{x\to 1} \frac{x^2 - 1}{x - 1} = \lim_{x\to 1} \frac{(x+1)(x-1)}{(x-1)} = \lim_{x\to 1} (x+1) = 2$$

2 est appelé le nombre dérivé de f en 1 et est noté $f'(1)$ tandis que $\frac{x^2 - 1}{x - 1}$ est appelé le taux d'accroissement de f en 1.

De manière générale, si $y = f(x)$

Le taux d'accroissement de f en a est $\frac{f(x) - f(a)}{x - a}$

et $f'(a) = \lim_{x\to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$ est le nombre dérivée de f en a.

Ce nombre $f'(a)$ est la pente (ou coefficient angulaire) de la tangente à la courbe d'équation $y = f(x)$ au point d'abscisse a

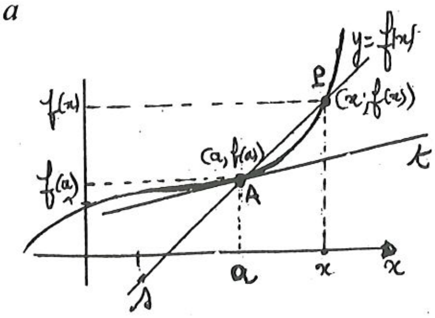


fig. A2

Annexe 2

1. Considérons un automobiliste parti d'Arlon à 8h, passé à Namur à 10h et arrivé à Bruxelles à 11h.
Sachant que les distances Arlons-Namur et Namur-Bruxelles sont de 120km et 80km.
Est-il exact de conclure qu'entre 10h et 10h15 il a parcouru 20km, ou bien qu'en chaque minute entre 10h et 11h il a parcouru 80/60km ? Rien n'est certain !
Soit t un « temps » compris entre 8h et 11h.
$f(t)$ la distance en km parcourue depuis Arlon.
Le rapport $\frac{f(t) - 120}{t - 10}$ indique la vitesse moyenne entre les instants t et 10.
L'information fournie par cette vitesse moyenne sera d'autant meilleure que t sera proche de 10h.(valeur pour laquelle le rapport n'est pas défini)
La limite de ce rapport, $t \to 10$, nous indiquera sa vitesse à 10h. Ainsi un compteur de vitesse est un instrument donnant à chaque instant un nombre dérivé.

2. Un voyageur est en pays de montagne et a parcouru une distance horizontale de x km pour une dénivellation de $H(x)$.
Mais la difficulté du chemin dépend moins de la hauteur atteinte que de la pente à l'endroit considéré.

La pente : $\frac{H(x + h) - H(x)}{h}$

La pente trouvée en A va dépendre du point choisi.

Entre A et D pente = 1.09
A et C " = 0.69
A et B " = 0.57

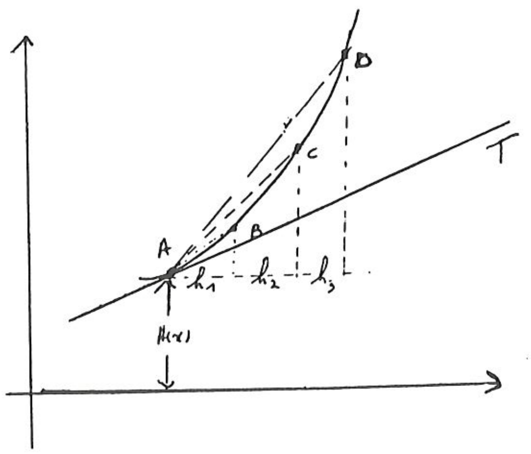


fig. A3

Si on voulait connaître la pente en A d'une manière exacte il faudrait prendre un intervalle de temps le plus petit possible c'est-à-dire :

$$\lim_{h\to 0} \frac{H(x+h)-H(x)}{h}.$$

3. Soit un axe gradué en mètres, parcouru par un mobile tombant en chute libre, dont l'origine est le point de départ du mobile et orienté positivement vers le bas. A l'instant t, l'abscisse x du mobile est

$$\frac{1}{2}gt^2$$

où g est l'accélération due à la pesanteur ($g = 9.81$ m /s²)
t est le temps du parcours mesuré en secondes.
En passant des grandeurs à leurs mesures, on est ainsi amené à introduire la fonction

$$x : IR_+ \to IR : t \to \frac{1}{2}.\ 9,81\ t^2.$$

A l'instant 2, l'abscisse du mobile est $\frac{1}{2}.\ 9,81\ .\ 4$

A l'instant t, l'abscisse du mobile est $\frac{1}{2}.\ 9,81\ .\ t^2$

La vitesse moyenne entre les instants 2 et t est

$$v_m = \frac{\text{espace parcouru}}{\text{temps de parcours}} = \frac{(1/2)\ .\ 9,81\ t^2 - (1/2)\ .9,81\ .\ 4}{t-2} = \frac{9,81}{2}\ .\ \frac{t^2-4}{t-2}.$$

Lorsque t « est voisin de 2 », la vitesse moyenne entre les instants 2 et t « est voisine de la vitesse instantanée à l'instant 2 ».
La vitesse instantanée v à l'instant 2 est la limite en 2 de la vitesse moyenne entre les instants 2 et t.

D'où : $v = \lim_2 v_m = \lim_2 \frac{9,81}{2}\ .\ \frac{t^2-4}{t-2} = 2\ .\ 9,81$

La fonction définie par $v(t) = \frac{9,81}{2}\ .\ \frac{t^2-4}{t-2}$ permet de calculer la vitesse moyenne du mobile entre les instants 2 et t. Elle est appelée taux d'accroissement en 2 de la fonction définie par $x(t) = \frac{1}{2}\ .\ 9,81\ t^2$.

Elle n'est pas définie en 2 ; sa limite en 2 est la vitesse instantanée à l'instant 2 et est appelée nombre dérivé de la fonction x en 2.

Annexe 3

Dérivées.

1 Notions d'accroissements.

1.1. Exemple introductif.

Considérons la fonction $f : IR \to IR : x \to f(x) = x^2$.
Nous connaissons bien le graphe de cette fonction représentée ci-contre.
Sur ce graphe, considérons 4 points :
A(-2,4), B(-1,1), C(1,1) et D(3,9)
Entre les points A et B, la fonction est décroissante. Si on calcule la pente de la sécante AB, on obtient : $\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{1-4}{-1-(-2)} = -3$.
Et nous trouvons bien une pente négative.
De même, entre les points C et D, la fonction est croissante.

La pente de la sécante CD vaut : $\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{9-1}{3-1} = \frac{8}{2} = 4$ qui est bien une pente positive.

Si maintenant, nous prenons les points B et D, la pente de BD vaut $\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{9-1}{3+1} = 2$. Mais la valeur de la pente de cette sécante ne nous donne aucun renseignement sur le comportement de la fonction entre ces deux points. On se rend compte qu'il va être nécessaire de travailler sur de petits intervalles et que la notion d'accroissement va être très importante. C'est pourquoi nous allons maintenant la préciser.

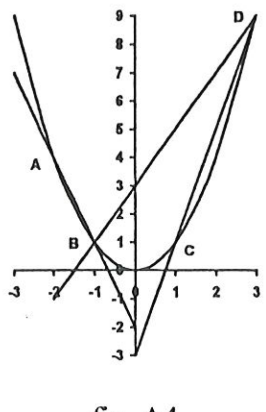


fig. A4

1.2 Accroissement de la variable x (Δx)

La variable x change de valeur : Si x passe de 5 à 7, $\Delta x = 2$
Si x passe de 5 à 2, $\Delta x = -3$

Δx = accroissement de la variable x = valeur « finale » - valeur « initiale » de la variable

$\Delta x > 0$ ssi l'accroissement de la variable x est une augmentation.

$\Delta x < 0$ ssi l'accroissement de la variable x est une diminution.

1.3 Accroissement d'une fonction $f(x)$ ($\Delta f = \Delta y$)

Comme la variable x, $f(x)$ est aussi variable.

Si x passe de x à $x + \Delta x$ alors f passe de $f(x)$ à $f(x + \Delta x)$

$\Delta f = f(x + \Delta x) - f(x)$

Si $\Delta f > 0$: f a augmenté

Si $\Delta f < 0$: f a diminué

Si $\Delta f = 0$: f est restée constante.

Nous allons maintenant calculer Δf pour quelques fonctions simples.

1.4 Exercices

[...]

2. Taux d'accroissement moyen d'une fonction.

2.1. Problème introductif.

Un sac de sable est lâché d'une montgolfière située à 80 m d'altitude. En négligeant la résistance de l'air, la position du sac à l'instant t est donnée par la fonction (position) :

$s(t) = \frac{1}{2} gt^2$ avec $g \approx 10$ m/s²

1.Où se trouve le sac aux instants t = 1s, 2s, 3s, 4s ?

2.Que vaut et que représente Δs ?

3.Quelle distance parcourt le sac de sable

1° entre l'instant 2s et l'instant 3s
2° entre l'instant 2s et l'instant 2,1s
3° entre l'instant 2s et l'instant 2,01s

4.Que vaut et que repésente le rapport $\frac{\Delta s}{\Delta t}$?

5.Que vaut la vitesse moyenne (v_{moy}) du sac

1° entre l'instant 2s et l'instant 3s ?
2° entre l'instant 2s et l'instant 2,1s ?
3° entre l'instant 2s et l'instant 2,01s ?

6. Que devient et que représente le rapport $\frac{\Delta s}{\Delta t}$ lorsque $\underline{\Delta t}$ tend vers zéro ?

7. Que vaut la vitesse du sac à l'instant $t = 2s$?

2.2 Définition

t.a.m = $\Delta f/\Delta x$ c'est-à-dire le rapport entre l'accroissement de f et l'accroissement correspondant de x.

On parle d'accroissement « moyen » sur l'intervalle $[x, x + \Delta x]$
Cet accroissement moyen dépend de x et de Δx.
Il peut être une vitesse moyenne, un débit moyen, une puissance moyenne, une intensité moyenne, une accélération moyenne…

2.3 Signification graphique.

Considérons une fonction f définie et continue sur l'intervalle considéré :
$f : x \rightarrow f(x)$
Soit $P(x,f(x))$, et $P'(x + \Delta x, f(x + \Delta x))$ deux points de cette courbe.
Dans le triangle PQP' ainsi formé, la pente de la droite PP' vaut

$$\frac{QP'}{PQ} = \frac{\Delta f}{\Delta x}$$

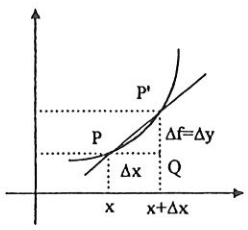


fig. A5

c'est-à-dire que le taux moyen d'accroissement entre $P(x,f(x))$ et $P'(x + \Delta x, f(x + \Delta x))$est la pente de la sécante à la courbe PP'

2.4 Exercices

[...]

2.5 Exemples de grandeurs physiques qui sont des t.a.m

Nous avons déjà rencontré plusieurs de ces grandeurs.

1.Si $s(t)$ décrit la position d'un mobile au cours du temps en MR. alors $\frac{\Delta s}{\Delta t}$ = vitesse moyenne (en m/s).

2. Si $V(t)$ est une fonction qui décrit le volume d'un fluide (liquide ou gaz) qui rentre au cours du temps , alors $\frac{\Delta V}{\Delta t}$ = le débit moyen (en m^3/s)

3. Si $E(t)$ est l'énergie fournie par une centrale au cours du temps (en joules) alors $\frac{\Delta E}{\Delta t}$ = puissance moyenne (en j/s)

4. Si $v(t)$ est la vitesse d'un mobile au cours du temps en MR, alors $\frac{\Delta v}{\Delta t}$ = accélération moyenne.(en m/sec^2)

3. Dérivée d'une fonction $f(x)$

3.1 Définition – notations

La dérivée d'une fonction $f(x)$ est la fonction $f'(x)$ égale à la limite du t.a.m de cette fonction lorsque l'accroissement Δx tend vers zéro.

Remarque : « la limite de » ≈ « ce que devient » comme on le considère dans le langage courant
« tend vers zéro » ≈ « devient pratiquement égal à zéro »

La fonction dérivée de la fonction $f(x)$ est notée $f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta f}{\Delta x} = \frac{dy}{dx} = \frac{df}{dx} = D_x f = y'$

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta f}{\Delta x}$$

et nous constatons que $f'(x)$ dépend de x.

Notation différentielle: Un accroissement infiniment petit Δx de la variable indépendante x se note dx. A cet accroissement dx correspond un accroissement dy. Et nous avons ainsi :

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta f}{\Delta x} = \frac{dy}{dx} = \frac{df}{dx}$$

Remarque :
Autre notation :
Soit a, une valeur de la variable et $a + \Delta x = x$
Alors $f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta f}{\Delta x}$ devient $f'(a) = \lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$

$f'(a)$ est le nombre dérivé de f en a. Il est aussi la valeur de la fonction dérivée de f en a.

3.2 Exemple

Soit $f(x) = x^2$
Cherchons $f'(x) = (x^2)' = ?$
$$(x^2)' = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta x^2}{\Delta x}$$

or $\frac{\Delta x^2}{\Delta x} = 2x + \Delta x$

Donc $(x^2)' = \lim_{\Delta x \to 0} (2x + \Delta x) = 2x + 0 = 2x$.

3.3 Tangente en un point d'une courbe.

Considérons une courbe. Sur celle-ci un point P.
Soit la sécante passant par P et un point P_1'.
Déplaçons P_1' en le rapprochant de P. Il occupe successivement les position P_2', P_3'.
A la limite, P' va se confondre avec P. A ce moment, la sécante devient tangente à la courbe au point P : elle frôle la courbe en P.

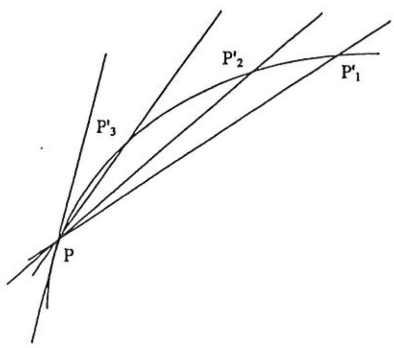


fig. A6

Conclusion : la tangente en un point P d'une courbe régulière est la limite d'une sécante passant par P lorsque le second point d'intersection P' tend vers P

Remarque : Ici aussi :

- « limite » ≈ « ce que devient »
- « tend vers P» ≈ se rapproche progressivement de P
- Le point P' peut se trouver à gauche de P.

3.4 Signification graphique de la dérivée.

Rappel : $f'(x) = lim_{\Delta x \to 0} \dfrac{\Delta f}{\Delta x}$

Considérons le graphique construit lors de l'étude du t.a.m.
Soit une courbe, et sur celle-ci deux points $P(x,f(x))$ et $P'(x+\Delta x,f(x + \Delta x))$
Nous obtenons ainsi la sécante PP' dont le coefficient angulaire vaut $\dfrac{\Delta f}{\Delta x}$
or $f'(x) = lim_{\Delta x \to 0} \dfrac{\Delta f}{\Delta x}$ = la limite du coefficient angulaire de PP' lorsque P' se rapproche de P c'est-à-dire $f'(x)$ = le coefficient angulaire de la tangente à la courbe au point P.

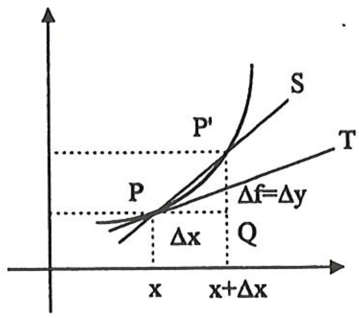


fig. A7

Conclusion.

La dérivée $f'(x)$ d'une fonction $f(x)$ est égale au coefficient angulaire de la tangente au graphique de $f(x)$ au point P d'abscisse x.

Bibliographie.

[1] C. BOYER, *The history of the calculus and its conceptual development*, Dover, New York, 1949.

[2] IREM de Basse-Normandie, *Aux origines du calcul infinitésimal*, Ellipses, Paris, 1999.

[3] J. GRABINER, *The changing concept of change: the derivative from Fermat to Weierstrass,* Mathematics Magazine, septembre 1983, vol.56, n°4, pg195-206.

[4] I. SAELENS, *Proposition de repères historiques et épistémologiques pour une approche heuristique de l'analyse dans l'enseignement secondaire*, mémoire présenté pour l'obtention du grade de Licencié en Sciences mathématiques, F.U.N.D.P., 1995.

[5] FERMAT, *Œuvres de Fermat*, Trad. P. Tannery, Gauthier-Villars, Paris, 1896.

[6] M. KLINE, *Mathematical thought from ancient to modern times*, Oxford Univ. Press, 1972.

[7] L. VIENNOT, *Le raisonnement spontané en dynamique élémentaire*, Hermann, Paris, 1979.

[8] G. BROUSSEAU, *Les obstacles épistémologiques et la didactique des mathématiques*, communication au colloque international : construction des savoirs – obstacles et conflits, Montréal, 1998.

[9] Groupe AHA, *Vers l'infini pas à pas : guide méthodologique,* De Boeck Wesmael, Bruxelles, 1999.

[10] Groupe AHA, *Vers l'infini pas à pas : manuel pour l'élève*, De Boeck Wesmael, Bruxelles, 1999.

[11] Jacques BAIR, *Mathématiques générales, à l 'usage des Sciences économiques, de gestion et A.E.S.*, Bruxelles, DeBoeck Université, 1993.

[12] Équipe MATHECRIT, *Atelier 103 : calcul différentiel et intégral I*, Montréal, 1978.

[13] Frank AYRES, *Théorie et applications du calcul différentiel et intégral*, Série Schaum, Mc Graw-Hill, 1978.

[14] A. ADAM et F. LOUSBERG, *Espace Math 54,* De Boeck Wesmael, Bruxelles, 1998.

[15] Y. LENOIR, *Médiation cognitive et médiation didactique*, In C. Raisky & M, 1996.

[16] A. SIERPINSKA, *La compréhension en mathématiques*, Bruxelles, De Boeck Université, 1995.

[17] M. SCHNEIDER, *Autour du mot problème, module 1 : problèmes et obstacles*, FUNDP Namur, SEDESS Liège.

[18] M. SCHNEIDER, A propos de l'apprentissage du taux de variation instantané *Educational Studies in Mathématics*, 1992, n°23, 317-350.