Institutional Repository - Research Portal
Dépôt Institutionnel - Portail de la Recherche
researchportal.unamur.be
University of Namur

THESIS / THÈSE

MASTER EN SCIENCES MATHÉMATIQUES

Une généralisation, au cas non différentiable, de la matrice hessienne d'une fonction convexe : le différentiel second

LEVECQ, Sophie

Award date:
1991

Awarding institution:
Universite de Namur

Link to publication

General rights
Copyright and moral rights for the publications made accessible in the public portal are retained by the authors and/or other copyright owners and it is a condition of accessing publications that users recognise and abide by the legal requirements associated with these rights.

- Users may download and print one copy of any publication from the public portal for the purpose of private study or research.
- You may not further distribute the material or use it for any profit-making activity or commercial gain
- You may freely distribute the URL identifying the publication in the public portal ?

Take down policy
If you believe that this document breaches copyright please contact us providing details, and we will remove access to the work immediately and investigate your claim.

Download date: 03. Jul. 2025

FACULTES UNIVERSITAIRES NOTRE-DAME DE LA PAIX
NAMUR
FACULTE DES SCIENCES

UNE GENERALISATION, AU CAS NON DIFFERENTIABLE, DE LA MATRICE HESSIENNE D'UNE FONCTION CONVEXE : LE DIFFERENTIEL SECOND.

Promoteur : J.-J. STRODIOT

Sophie LEVECQ

Année académique : 1990-1991

Je tiens à remercier Monsieur le Professeur J.-J. STRODIOT pour son aide précieuse, sa disponibilité et son soutien constant tout au long de l'élaboration de ce travail.

J'adresse également toute ma reconnaissance à D. GOELEVEN pour sa collaboration.

Enfin, je voudrais remercier ma famille et mes amis pour leurs encouragements, leur attention et leur patience.

CHAPITRE 0

MOTIVATION

Considérons le problème d'optimisation suivant

$$(P) = \begin{cases} \min f(x) \\ \text{sous } x \in I\!R^n \end{cases}$$

où f représente une fonction convexe deux fois différentiable, définie sur $I\!R^n$ et à valeurs réelles. La méthode de Newton permet de le résoudre en remplaçant la fonction par son développement en série de Taylor, à l'ordre deux, au voisinage d'un point x_0 de $I\!R^n$. De cette façon, le problème se réécrit

$$\begin{cases} \min \quad f(x_0) + \nabla f(x_0)^T(x - x_0) + \frac{1}{2}(x - x_0)^T \nabla^2 f(x_0)(x - x_0) \\ \text{sous} \quad x \in I\!R^n \end{cases}$$

ou de manière équivalente

$$\begin{cases} \min \quad \nabla f(x_0)^T d + \frac{1}{2} d^T \nabla^2 f(x_0) d \\ \text{sous} \quad d \in I\!R^n \end{cases}$$

Notant sa solution d_0, nous déterminons le point x_1 de l'itération suivante au moyen de la relation $x_1 = x_0 + d_0$. Si la condition d'optimalité, soit $\nabla f(x_1) = 0$, n'est pas satisfaite, on calculera un second point x_2 suivant la même procédure, jusqu'à obtenir finalement, une suite (x_k) répondant au critère de convergence locale. La vitesse de convergence est quadratique et en celà, cette méthode est performante, donc désirable. Cependant, celle-ci ne s'applique qu'aux fonctions deux fois différentiables et est, en ce sens, assez restrictive.

Pour généraliser la méthode de Newton au cas non différentiable, nous pouvons envisager plusieurs possibilités :

- remplacer $\nabla^2 f(x_0)$ par un ensemble de matrices appelé matrice hessienne généralisée. Cette approche est détaillée dans [9].

- trouver un ensemble, noté $\partial^2 f(x_0)$, jouant un rôle similaire à celui de la dérivée du premier ordre généralisée, $\partial f(x_0)$.

A cet effet, nous introduisons la notion de dérivée directionnelle du second ordre de f au point x_0, soit $f''(x_0; d)$, comme substitut du terme $d^T \nabla^2 f(x_0) d$ dans le développement de Taylor de f au point x_0. Cette fonction de d n'étant en général ni convexe, ni semi-continue inférieurement, ne pourra s'exprimer comme fonction d'appui d'un certain ensemble K convexe, fermé, non vide. Dès lors, nous définirons pour tout x_0^* dans $\partial f(x_0)$, la dérivée directionnelle du second ordre de f en (x_0, x_0^*) dont la racine carrée satisfera l'équation

$$cl\sqrt{f''(x_0, x_0^*; .)}(d) = \delta^*(\partial^2 f(x_0, x_0^*) \mid d)$$

c'est-à-dire constituera, à l'opération de fermeture près, la fonction d'appui d'un ensemble K qu'Hiriart-Urruty appellera différentiel second de f en (x_0, x_0^*) et notera $\partial^2 f(x_0, x_0^*)$. Considérant alors l'intersection de tous les $\partial^2 f(x_0, x_0^*)$ pour $x_0^* \in \partial^2 f(x_0)$, nous générerons le différentiel second de f en x_0, soit $\partial^2 f(x_0)$. Il s'agira d'un ensemble convexe compact, contenant l'origine et représentant, dans le cas deux fois différentiable, l'ellipsoïde de $\mathbb{R}^n$, associé à la matrice hessienne $\nabla^2 f(x_0)$.

Cette définition du différentiel second de f au point x_0 pouvant, dans certains cas, s'avérer difficile à appliquer effectivement, nous introduirons des règles de calcul permettant de dériver l'expression du différentiel second d'une fonction f, construite à partir d'autres fonctions f_i dont les $\partial^2 f_i(x_0)$ sont plus faciles à calculer.

Nous présenterons ensuite les concepts de dérivée seconde intérieure et extérieure, obtenues en associant à $\partial^2 f(x_0)$ deux matrices symétriques semi-définies positives $\underline{\nabla}^2 f(x_0)$ et $\overline{\nabla}^2 f(x_0)$. Celles-ci correspondent, d'une part, à l'unique ellipsoïde de volume maximal centré en l'origine et inclus dans $\hat{\partial^2} f(x_0)$ et, d'autre part, à l'unique ellipsoïde de volume minimal centré en 0 et contenant $\partial^2 f(x_0)$. Dans le cas deux fois différentiable, ces matrices ne sont autres que la matrice hessienne de f au point x_0.

Finalement, nous procéderons à une comparaison entre le différentiel second $\partial^2 f(x_0)$ et la matrice hessienne généralisée au sens de Clarke, soit $\partial_c^2 f(x_0)$, où f représente ici une fonction convexe, différentiable, dont l'application gradient est localement lipschitzienne.

Notre approche s'effectuera dans un cadre relativement simple puisque nous ne considérerons que des fonctions convexes définies sur $\mathbb{R}^n$ et valeurs dans $\mathbb{R}$. Une généralisation des résultats se trouve développée dans [3]. On y considère un espace vectoriel général X et des fonctions convexes à valeurs dans $\mathbb{R} \cup \{+\infty\}$. Les idées de base restent cependant les mêmes.

Notre texte est organisé comme suit.

Chapitre I : Dérivées directionnelles du second ordre

1. Quelques rappels concernant le premier ordre

2. Le second ordre

- **2.1** Définition de $f''(x_0; d)$
- **2.2** Propriétés
- **2.3** Développement de Taylor et méthode de Newton
- **2.4** Dérivée directionnelle du second ordre et fonction d'appui
  - **2.4.1** La notion de fonction d'appui
  - **2.4.2** Propriétés de la forme quadratique $d \to d^T \nabla^2 f(x_0) d$ dans le cas deux fois différentiable
  - **2.4.3** Dérivée directionnelle du second ordre et fonction d'appui
    - **A)** Comment convexifier $\sqrt{f''(x_0; d)}$?
    - **B)** Comment rendre $\sqrt{f''(x_0, x_0^*; d)}$ semi-continue inférieurement ?

Chapitre II : Différentiels seconds

1. Différentiel second de f en (x_0, x_0^*)

2. Différentiel second de f en x_0

3. Résultats complémentaires et méthode de Newton

- **3.1** Différentiels seconds de deux fonctions comparables dans un voisinage de x
- **3.2** Développements du second ordre

Chapitre III : Règles de calcul

1. La multiplication d'une fonction par un nombre réel positif (situé à gauche de la fonction)
2. La somme de fonctions
3. Le maximum de fonctions

Chapitre IV : Dérivées secondes intérieures et extérieures

1. Propriétés des ellipsoïdes
2. Dérivées secondes intérieure et extérieure, ou comment approcher $\partial^2 f(x_0)$ au moyen d'ellipsoïdes

Chapitre V : Relation entre le différentiel second et la matrice hessienne généralisée d'une fonction convexe $C^{1,1}$

1. Définitions et résultats préliminaires
2. Comparaison entre $\partial_c^2 f(x_0)$ et $\partial^2 f(x_0)$.

Annexe

CHAPITRE I

DERIVEES DIRECTIONNELLES DU SECOND ORDRE

1 Quelques rappels concernant le premier ordre

Considérons une fonction f convexe définie sur $\mathbb{R}^n$ et à valeurs dans $\mathbb{R}$ ainsi qu'un point $x_0 \in \mathbb{R}^n$.
Rappelons qu'on appelle dérivée directionnelle de f au point x_0 dans la direction $d \in \mathbb{R}^n$, le nombre

$$f'(x_0; d) = \lim_{\lambda \to 0+} \frac{f(x_0 + \lambda d) - f(x_0)}{\lambda}$$

Puisque la fonction est convexe, le quotient

$$\frac{f(x_0 + \lambda d) - f(x_0)}{\lambda}$$

est une fonction croissante en λ et nous pouvons écrire

$$f'(x_0; d) = \inf_{\lambda > 0} \frac{f(x_0 + \lambda d) - f(x_0)}{\lambda}$$

Lorsque f est différentiable en x_0, elle peut encore s'exprimer comme

$$f'(x_0; d) = \nabla f(x_0)^T d$$

où $\nabla f(x_0)$ désigne le gradient de f au point x_0. Par contre, lorsque f n'est plus différentiable en x_0, le vecteur gradient n'existe plus et est remplacé par l'ensemble

$$\partial f(x_0) = \{x^* \in \mathbb{R}^n \mid f(x) \geq f(x_0) + < x^*, x - x_0 > \ \forall\, x \in \mathbb{R}^n\}$$

appelé le sous-différentiel de f en x_0.
En dimension 1, il représente l'ensemble des pentes des minorantes affines au graphe de f, exactes en x_0.

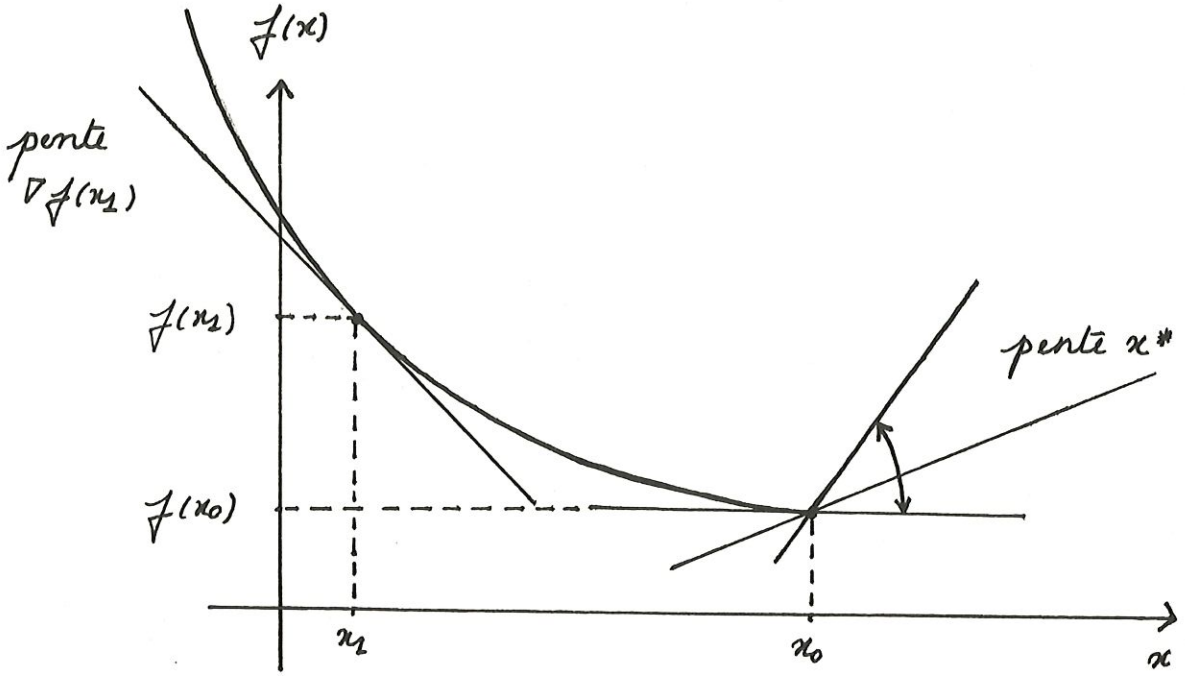


Figure 1

On trouvera en annexe quelques propriétés fondamentales des dérivées directionnelles et des sous-différentiels.

2 Le second ordre

Lorsque la fonction convexe $f : I\!R^n \to I\!R$ est deux fois différentiable en x_0, on peut écrire son développement de Taylor à l'ordre 2 autour de x_0 :

$\forall\, d \in I\!R^n,\ \forall\, \lambda > 0$

$$f(x_0 + \lambda d) = f(x_0) + \lambda \nabla f(x_0)^T d + \frac{1}{2}\lambda^2 d^T \nabla^2 f(x_0) d + o(\lambda^2)$$

où $\nabla^2 f(x_0)$ désigne la matrice hessienne de f en x_0.
Ce développement peut encore s'écrire

$$d^T \nabla^2 f(x_0) d = \lim_{\lambda \to 0^+} \frac{2}{\lambda} \left[\frac{f(x_0 + \lambda d) - f(x_0)}{\lambda} - \nabla f(x_0)^T d \right]$$

Lorsque f n'est pas deux fois différentiable, nous ne pouvons plus considérer la matrice hessienne de la fonction et devons chercher une solution de remplacement dans le développement ci-dessus. Plusieurs possiblités ont été soulevées dans le chapitre d'introduction et nous avons opté pour le remplacement direct du terme $d \to d^T \nabla^2 f(x_0) d$ par la dérivée directionnelle du second ordre de f en x_0 dans la direction d.

2.1 Définition

Nous appelons *dérivée directionnelle du second ordre* de f en x_0 dans la direction d, l'une quelconque des deux limites ci-dessous :

$$\lim_{\lambda \to 0^+} \frac{2}{\lambda} \left[\frac{f(x_0 + \lambda d) - f(x_0)}{\lambda} - f'(x_0; d) \right] \tag{1}$$

ou

$$\lim_{\lambda \to 0^+} \frac{1}{\lambda} [f'(x_0 + \lambda d; d) - f'(x_0; d)] \tag{2}$$

Un résultat de Jessen (cfr [4]) nous permet en effet d'affirmer que la limite lorsque $\lambda \to 0^+$ de la quantité (1) existe si et seulement si elle existe pour (2). Cette limite commune sera notée $f''(x_0; d)$. Nous constatons que dans le cas deux fois différentiable, nous retrouvons la forme quadratique $d^T \nabla^2 f(x_0) d$ puisque la dérivée directionnelle du premier ordre $f'(x_0; d) = \nabla f(x_0)^T d$.

Nous supposerons dorénavant que $f''(x_0; d)$ existe et est finie pour tout x_0 et tout d. (Ces restrictions pourraient être levées en considérant la

$$\lim_{\lambda \to 0^+} \sup \frac{2}{\lambda} \left[\frac{f(x_0 + \lambda d) - f(x_0)}{\lambda} - f'(x_0; d) \right]$$

dans $\mathbb{R}^+ \cup \{+\infty\}$. Voir [3]).

Nous examinons à présent les caractéristiques principales de $f''(x_0; d)$.

2.2 Propriétés de $f''(x_0; d)$

Proposition 2.2.1 :

$$f''(x_0; 0) = 0 \text{ et } f''(x_0; d) \geq 0 \ \forall \ d$$

Preuve :

La première assertion se vérifie immédiatement. Concernant la seconde, nous savons que

$$f''(x_0; d) = \lim_{\lambda \to 0^+} \frac{2}{\lambda} \left[\frac{f(x_0 + \lambda d) - f(x_0)}{\lambda} - \lim_{\mu \to 0^+} \frac{f(x_0 + \mu d) - f(x_0)}{\mu} \right]$$

et en utilisant l'hypothèse de convexité de la fonction f considérée, nous obtenons

$$f''(x_0; d) = \lim_{\lambda \to 0^+} \frac{2}{\lambda} \left[\frac{f(x_0 + \lambda d) - f(x_0)}{\lambda} - \inf_{\mu > 0} \frac{f(x_0 + \mu d) - f(x_0)}{\mu} \right]$$

où l'expression

$$\frac{f(x_0 + \lambda d) - f(x_0)}{\lambda} - \inf_{\mu > 0} \frac{f(x_0 + \mu d) - f(x_0)}{\mu}$$

est positive. ∎

Proposition 2.2.2 :

$f''(x_0; \cdot)$ est positivement homogène de degré 2
c'est-à-dire $\forall \ \alpha \geq 0 \ f''(x_0; \alpha d) = \alpha^2 \ f''(x_0; d)$

Preuve :

Par définition,

$$f''(x_0; \alpha d) = \lim_{\lambda \to 0^+} \frac{2}{\lambda} \left[\frac{f(x_0 + \lambda \alpha d) - f(x_0)}{\lambda} - \lim_{\lambda' \to 0^+} \frac{f(x_0 + \lambda' \alpha d) - f(x_0)}{\lambda'} \right]$$

et en considérant les changements de variable $\mu = \alpha\lambda$ et $\mu' = \alpha\lambda'$, nous établissons que

$$
\begin{aligned}
f''(x_0;\alpha d) &= \lim_{\mu\to 0^+} \frac{2\alpha}{\mu}\left[\frac{\alpha f(x_0+\mu d)-f(x_0)}{\mu}\right. \\
&\qquad\qquad \left. - \lim_{\mu'\to 0^+}\frac{\alpha f(x_0+\mu' d)-f(x_0)}{\mu'}\right] \\
&= \lim_{\mu\to 0^+} \frac{2\alpha}{\mu}\left[\frac{\alpha f(x_0+\mu d)-f(x_0)}{\mu} - \alpha f'(x_0;d)\right] \\
&= \alpha^2 f''(x_0;d)
\end{aligned}
$$

■

Nous pouvons cependant regretter qu'en général $f''(x_0;\cdot)$ ne soit ni convexe, ni semi-continue inférieurement comme nous le montre l'exemple suivant.

Exemple 1 : Considérons la fonction $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ définie par

$$f(x) = \max\{0, x_1^2 + x_2^2 + 2x_1\} \quad \forall\, x = (x_1, x_2)$$

On a que

$$x_1^2 + x_2^2 + 2x_1 \leq 0$$

est équivalent à

$$(x_1+1)^2 + x_2^2 \leq 1$$

Dès lors, $f(x)$ sera nulle sur le disque D de centre $(-1,0)$ et de rayon 1, et vaudra

$$x_1^2 + x_2^2 + 2x_1$$

ailleurs.
Prenons $x_0 = (0,0)$ et $d = (d_1, d_2)$ et envisageons deux cas :

a) $d_1 < 0$:

On a ainsi $f(x_0 + \lambda d) = f(\lambda d_1, \lambda d_2)$ où $(\lambda d_1, \lambda d_2)$ appartient au disque D pour λ suffisamment petit.

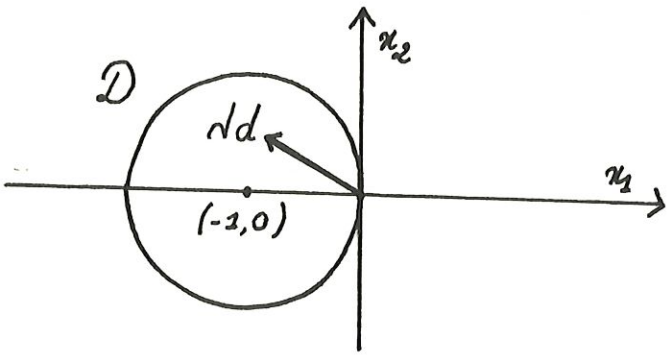


Figure 2

Autrement dit, $f(x_0 + \lambda d) = 0$ pour λ assez petit et, puisque

$$f(x_0) = f(0) = 0$$

nous obtenons

$$\begin{aligned} f''(x_0; d) &= \lim_{\lambda \to 0+} \frac{2}{\lambda} \left[\frac{f(x_0 + \lambda d) - f(x_0)}{\lambda} \right. \\ &\qquad \left. - \lim_{\mu \to 0+} \frac{f(x_0 + \mu d) - f(x_0)}{\mu} \right] \\ &= \lim_{\lambda \to 0+} \frac{2}{\lambda}[0 - 0] = 0 \end{aligned}$$

b) $d_1 \geq 0$:

Dans ce cas, $f(x_0 + \lambda d) = f(\lambda d_1, \lambda d_2)$ où $(\lambda d_1, \lambda d_2)$ ne se trouve pas dans le disque D. Ainsi,

$$f(x_0 + \lambda d) = \lambda^2 d_1^2 + \lambda^2 d_2^2 + 2\lambda d_1$$

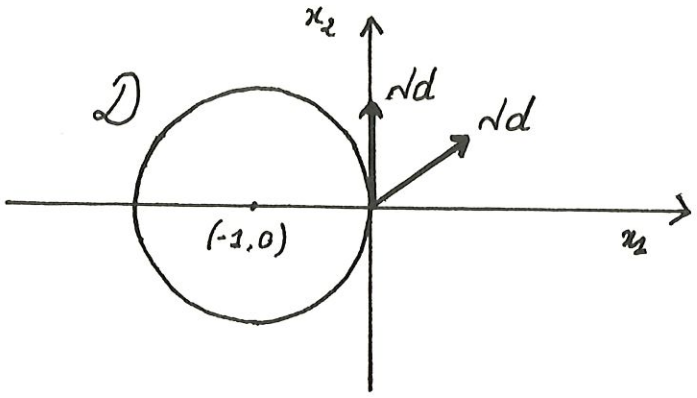


Figure 3

Par conséquent,

$$\begin{aligned} f''(x_0;d) &= \lim_{\lambda\to 0^+} \frac{2}{\lambda}\left[\frac{\lambda^2 d_1^2+\lambda^2 d_2^2+2\lambda d_1-0}{\lambda}\right. \\ &\qquad \left. - \lim_{\mu\to 0^+}\frac{\mu^2 d_1^2+\mu^2 d_2^2+2\mu d_1-0}{\mu}\right] \\ &= \lim_{\lambda\to 0^+}\frac{2}{\lambda}\left[\frac{\lambda^2 d_1^2+\lambda^2 d_2^2+2\lambda d_1-2d_1}{\lambda}\right] \\ &= 2d_1^2+2d_2^2 \end{aligned}$$

Nous aurions encore pu obtenir ce résultat en constatant que

$$f_2(x) \stackrel{\text{not}}{=} x_1^2+x_2^2+2x_1$$

constitue une fonction deux fois différentiable. Ainsi,

$$\begin{aligned} \forall\, d_1 \geq 0 \quad f''(x_0;d) &= d^T\nabla^2 f_2(x_0)d \\ &= (d_1\ d_2)\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} d_1 \\ d_2 \end{pmatrix} \\ &= 2(d_1^2+d_2^2) \end{aligned}$$

Finalement, nous obtenons pour la dérivée directionnelle du second ordre

$$f''(x_0;d) = \begin{cases} 0 & \text{si } d_1 < 0 \\ 2(d_1^2+d_2^2) & \text{si } d_1 \geq 0 \end{cases}$$

qui ne constitue évidemment pas une fonction convexe en d [cfr A.I.8].
Vérifions encore que $f''(x_0;\cdot)$ n'est pas semi-continue inférieurement aux points

$$\bar{d} = (0, \bar{d}_2) \text{ avec } \bar{d}_2 \neq 0$$

Il nous faut donc prouver [cfr A.II.1] que la propriété suivante est mise en défaut

$$\forall\, \lambda < f''(x_0;(0,\bar{d}_2))\ \ \exists\, \delta > 0 \text{ t.q. } ||d - \bar{d}|| < \delta \Rightarrow \lambda < f_0''(x_0;d)$$

ce qui peut se réécrire

$$\forall\, \lambda < 2\bar{d}_2^2\ \ \exists\, \delta > 0 \text{ t.q.}$$

$$d \in B(\bar{d},\delta) \Rightarrow \lambda < \begin{cases} 0 & \text{si } d_1 < 0 \\ 2(d_1^2 + d_2^2) & \text{si } d_1 \geq 0 \end{cases}$$

où $B(\bar{d},\delta)$ représente la boule ouverte de centre $\bar{d}$ et de rayon δ.
Représentons géométriquement $f''(x_0;d)$:

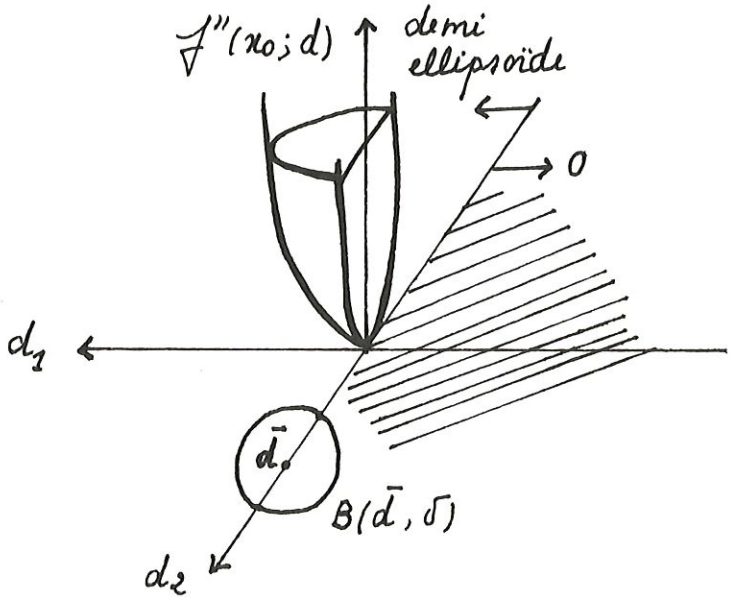


Figure 4

Nous constatons alors qu'il nous suffit de prendre $d = (d_1, d_2)$ avec $d_1 < 0$. Ainsi,

$$\forall\, \lambda < 2\bar{d}_2^2\ \ \exists\, \delta > 0 \text{ t.q. } d \in B(\bar{d},\delta) \not\Rightarrow \lambda < 0$$

■

Nous pouvons, à présent, nous pencher sur l'étude de deux cas particuliers pour lesquels $f''(x_0;\cdot)$ est convexe.

Proposition 2.2.3 : [Le cas polyédral]

Soit la fonction polyédrale définie par

$$f(x) = \max_{1\leq i\leq p} \{a_i x + b_i\}$$

Nous avons que $f''(x_0; d) = 0 \ \ \forall\, d \in I\!R^n$

Preuve :

En vertu de (1), il nous suffit de démontrer que

$$\exists\, \lambda_0 > 0 \text{ t.q. } \forall\, \lambda \leq \lambda_0 \ \ f'(x_0; d) = \frac{f(x_0 + \lambda d) - f(x_0)}{\lambda}$$

Considérons alors la fonction φ définie sur $I\!R^+$ et à valeurs dans $I\!R$ t.q.

$$\varphi(\lambda) = f(x_0 + \lambda d)$$

et montrons que :

$$\exists \lambda_0 > 0 \text{ t.q. } \forall\, \lambda \leq \lambda_0 \ \ \varphi'_+(0) = \frac{\varphi(\lambda) - \varphi(0)}{\lambda}$$

où $\varphi'_+(0)$ désigne la dérivée à droite de φ au point 0. La thèse s'en suivra.
Puisque φ est polyédrale, elle possède un nombre fini de points de non différentiabilité ou, d'une manière équivalente, son épigraphe contient un nombre fini de points extrémaux.

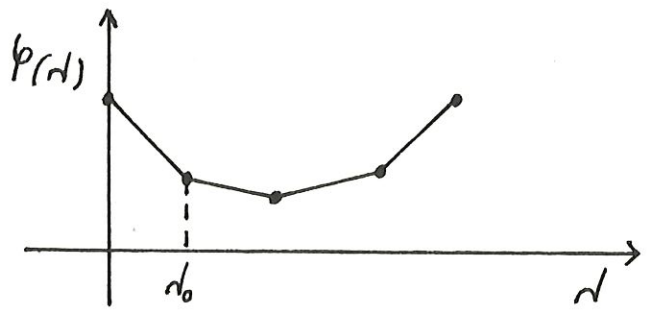


Figure 5

Choisissons alors pour λ_0, le premier point de non différentiabilité strictement positif. Dès lors, $f''(x_0;d) = 0$ et $f''(x_0;\cdot)$ constitue bien une fonction convexe. ∎

Proposition 2.2.4 : [Le cas différentiable]

Lorsque la fonction considérée est différentiable, $f''(x_0;\cdot)$ est convexe et continue.

Preuve :

Nous savons que

$$f''(x_0;d) = \lim_{\lambda \to 0^+} \frac{2}{\lambda}\left[\frac{f(x_0+\lambda d) - f(x_0)}{\lambda} - f'(x_0;d)\right]$$

et, dans le cas envisagé, nous avons que

$$f''(x_0;d) = \lim_{\lambda \to 0^+} \frac{2}{\lambda}\left[\frac{f(x_0+\lambda d) - f(x_0)}{\lambda} - \nabla f(x_0)^T d\right]$$

où $\nabla f(x_0)^T d$ est linéaire en d et

$$\frac{f(x_0+\lambda .) - f(x_0)}{\lambda}$$

constitue une fonction convexe.

En effet, en utilisant la convexité de la fonction f, nous avons $\forall\, \mu \in [0,1]$

$$\begin{aligned}
& \frac{f(x_0+\lambda[\mu d_1 + (1-\mu)d_2]) - f(x_0)}{\lambda} \\
= \; & \frac{f[\mu(x_0+\lambda d_1) + (1-\mu)(x_0+\lambda d_2)] - \mu f(x_0) - (1-\mu) f(x_0)}{\lambda} \\
\leq \; & \frac{\mu f(x_0+\lambda d_1) + (1-\mu) f(x_0+\lambda d_2) - \mu f(x_0) - (1-\mu) f(x_0)}{\lambda} \\
= \; & \mu \frac{[f(x_0+\lambda d_1) - f(x_0)]}{\lambda} + (1-\mu)\frac{[f(x_0+\lambda d_2) - f(x_0)]}{\lambda}
\end{aligned}$$

Comme la limite de fonctions convexes reste convexe, nous obtenons la première partie du résultat.
La continuité de $f''(x_0;\cdot)$ s'établit facilement grâce au corollaire A.I.13. ∎

2.3 Développement de Taylor et méthode de Newton

Grâce à la dérivée directionnelle du second ordre, nous pouvons généraliser le développement de Taylor de la fonction f au cas non différentiable.
Nous obtenons ainsi par construction,

$$\forall\, \lambda > 0 \quad f(x_0 + \lambda d) = f(x_0) + \lambda f'(x_0; d) + \frac{1}{2}\lambda^2 f''(x_0; d) + o(\lambda^2)$$

Dès lors, le problème d'optimisation (P) exposé dans le chapitre 0 se réécrit

$$(Q) \equiv \begin{cases} \min \quad f'(x_0; d) + \frac{1}{2} f''(x_0; d) \\ \text{sous } d \in I\!R^n \end{cases}$$

lorsque x_0 est pris comme point de départ.
La résolution du problème (Q) nous donne la direction d_0 et le point de l"itération suivante est déterminé par

$$x_1 = x_0 + d_0$$

Cette façon de procéder présente cependant quelques inconvénients comme la possibilité de non-convergence de la méthode. Examinons ainsi l'exemple suivant.

Soit $f(x) = \max\{\frac{1}{2}(x-1)^2, \frac{1}{2}(x+1)^2\}$.

Prenons $x_0 > 0$ et représentons géométriquement la fonction ci-dessus

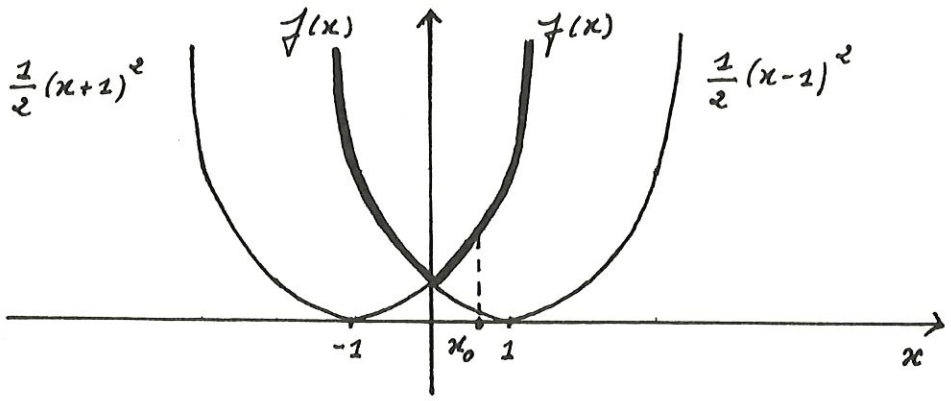


Figure 6

Pour obtenir le point x_1 de l'itération suivante, nous considérons l'approximation quadratique $\frac{1}{2}(x+1)^2$ de f. Celle-ci donne à x_1 la valeur -1. Nous répétons le processus et obtenons successivement $x_2 = 1, x_3 = -1, x_4 = 1, \cdots, x^k = (-1)^k, \cdots$, soit une suite de points oscillant entre -1 et 1. ∎

Un autre désavantage lié à cette méthode provient du fait que la fonction $f''(x_0;\cdot)$ n'est en général pas convexe, conne nous l'avons souligné précédemment. Dès lors, le problème (Q) devient difficile à résoudre ...

2.4 Dérivée directionnelle du second ordre et fonction d'appui

2.4.1 La notion de fonction d'appui

Soit un ensemble K convexe non vide inclus dans $\mathbb{R}^n$.
Nous rappelons que la fonction indicatrice de K, notée $\delta(K|\cdot)$ est une fonction convexe propre [cfr A.I.7] de $\mathbb{R}^n$ dans $\overline{\mathbb{R}}$ définie par

$$\delta(K|\cdot) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \in K \\ +\infty & \text{sinon} \end{cases}$$

Elle constitue, en outre, une fonction semi-continue inférieurement lorsque K est fermé [cfr 4].
Considérons alors la conjuguée [cfr A.III.1] de l'indicatrice.
Nous obtenons ainsi la fonction $\delta^*(K|\cdot)$ t.q.

$$\forall\, y \in \mathbb{R}^n \quad \delta^*(K|y) = \sup_{x \in \mathbb{R}^n} \{< y, x > -\delta(K|x)\}$$

c'est-à-dire

$$\delta^*(K|y) = \sup_{x \in K} < y, x >$$

Cette fonction définie sur $\mathbb{R}^n$ et à valeurs dans $\overline{\mathbb{R}}$ porte le nom de *fonction d'appui* (ou *support*) de K. Nous pouvons en donner une interprétation géométrique.
Nous savons que les vecteurs x_1 et x_2 de $\mathbb{R}^n$, représentés ci-dessous, donnent le même produit scalaire avec y. Dès lors, en supposant que $||y|| = 1, \delta^*(K|y)$ correspond à la longueur du segment $0T$ ou encore, $\delta^*(K|y) =< y, x^* >$.

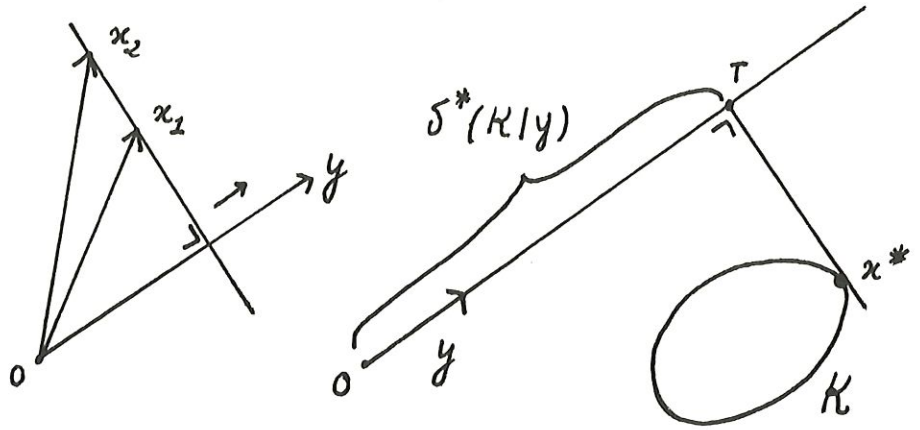


Figure 7

Nous avons immédiatement que,

K convexe fermé non vide
$\Rightarrow \delta^*(K|\cdot)$ *convexe, propre, semi-continue inférieurement, positivement homogène de degré 1.*

Nous énonçons à présent, un important théorème de Rockafellar (voir [8, proposition 13.2.1]).

Théorème 2.4.1.1 :

Soit g, une fonction convexe, propre semi-continue inférieurement, positivement homogène de degré 1.
Alors g est la fonction d'appui d'un convexe fermé, non vide K inclus dans $\mathbb{R}^n$.
De plus, $K = \{x^* \in \mathbb{R}^n | < x^*, d > \leq g(d) \quad \forall\, d \in \mathbb{R}^n\}$.

2.4.2 Propriétés de la forme quadratique $d \to d^T \nabla^2 f(x_0) d$ dans le cas deux fois différentiable

Nous savons que la matrice hessienne de f au point x_0, soit $\nabla^2 f(x_0)$, est symétrique et semi-définie positive. On peut dès lors lui associer un ellipsoïde [cfr A. VII]

$$E = [\nabla^2 f(x_0)]^{\frac{1}{2}}(\overline{B})$$

c'est-à-dire

$$E = \{\ [\nabla^2 f(x_0)]^{\frac{1}{2}}\ b \mid b \in \overline{B}\}$$

$\overline{B}$ désignant la boule unité fermée.
Dans le cas où $\nabla^2 f(x_0)$ est définie positive, donc inversible, on a aussi

$$E = \{y \in I\!R^n \mid y^T [\nabla^2 f(x_0)]^{-1} y \leq 1\}$$

En effet, nous prouvons le résultat plus général suivant.

Proposition 2.4.2.1 :

Si A est symétrique, inversible
Alors $A^{\frac{1}{2}}(\overline{B}) = \{y \mid y^T A^{-1} y \leq 1\}$

Démonstration :
Envisageons l'inclusion dans les deux sens.
Prenons $y = A^{\frac{1}{2}} z$ où $||z|| \leq 1$.
Nous avons alors, grâce au caractère symétrique de A,

$$\begin{aligned} y^T A^{-1} y &= z^T A^{\frac{1}{2}} A^{-1} A^{\frac{1}{2}} z \\ &= z^T z = ||z||^2 \leq 1 \end{aligned}$$

Considérons maintenant un élément y t.q. $y^T A^{-1} y \leq 1$
Nous cherchons donc à vérifier que

$$\exists z \text{ t.q. } ||z|| \leq 1 \text{ et } y = A^{\frac{1}{2}} z$$

Prenons alors $z = A^{-\frac{1}{2}}y$.
Nous obtenons ainsi

$$\begin{aligned} ||z||^2 &= ||A^{-\frac{1}{2}}y||^2 = y^T A^{-\frac{1}{2}} A^{-\frac{1}{2}} y \\ &= y^T A^{-1} y \leq 1 \end{aligned}$$

■

Nous établissons, à présent, le lien entre la forme quadratique $d \rightarrow d^T \nabla^2 f(x_0) d$ et la fonction d'appui de l'ellipsoïde E.

Proposition 2.4.2.2 :

$$\forall\, d \quad \sqrt{d^T \nabla^2 f(x_0) d} = \sup_{e \in E} < e, d >$$

Démonstration :

Puisque $E = [\nabla^2 f(x_0)]^{\frac{1}{2}}(\overline{B})$, nous avons

$$\begin{aligned} \forall\, d \quad \sup_{e \in E} < e, d > &= \sup_{||b|| \leq 1} < [\nabla^2 f(x_0)]^{\frac{1}{2}} b, d > \\ &= \sup_{||b|| \leq 1} d^T [\nabla^2 f(x_0)]^{\frac{1}{2}} b \end{aligned}$$

Comme le produit scalaire de deux vecteurs vaut le produit de leur norme par le cosinus de l'angle entre ces deux vecteurs, nous obtenons pour le vecteur b optimal,

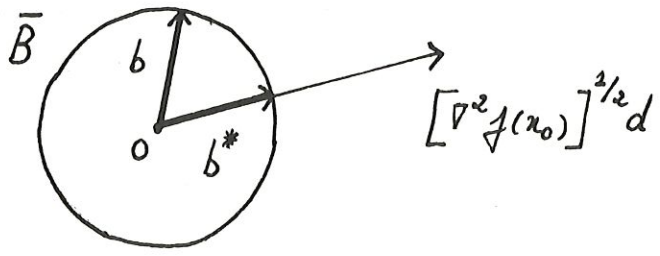


Figure 8

$$b^* = \frac{[\nabla^2 f(x_0)]^{\frac{1}{2}} d}{||\ [\nabla^2 f(x_0)]^{\frac{1}{2}} d\ ||} = \frac{[\nabla^2 f(x_0)]^{\frac{1}{2}} d}{\sqrt{d^T \nabla^2 f(x_0) d}}$$

D'où,

$$\begin{aligned}\sup_{e\in E} < e, d > &= \frac{d^T[\nabla^2 f(x_0)]^{\frac{1}{2}}[\nabla^2 f(x_0)]^{\frac{1}{2}}d}{\sqrt{d^T\nabla^2 f(x_0)d}} \\ &= \sqrt{d^T\nabla^2 f(x_0)d}\end{aligned}$$

■

2.4.3 Dérivée directionnelle du second ordre et fonction d'appui

Nous souhaitons obtenir une propriété analogue à la proposition 2.4.2.2. dans le cas où $d^T\nabla^2 f(x_0)d$ est remplacé par $f''(x_0;d)$ (f n'étant pas nécessairement deux fois différentiable). Pour ce faire, nous allons tenter d'appliquer le théorème de Rockafellar dont l'énoncé est repris sous le nom de théorème 2.4.1.1.
Nous voulons exprimer $\sqrt{f''(x_0;d)}$ comme fonction d'appui d'un certain ensemble K convexe, fermé et non vide. Mais si $\sqrt{f''(x_0;d)}$ est bien positivement homogène et propre, elle n'est en général ni convexe, ni semi-continue inférieurement.
D'où les questions suivantes :

A) Comment convexifier $\sqrt{f''(x_0;d)}$?

Par définition, nous avons

$$f''(x_0;d) = \lim_{\lambda\to 0^+} \frac{2}{\lambda}\left[\frac{f(x_0+\lambda d)-f(x_0)}{\lambda} - f'(x_0;d)\right]$$

où $f'(x_0;\cdot)$ constitue une fonction convexe [voir A.IV.2] et $\dfrac{f(x_0+\lambda\cdot)-f(x_0)}{\lambda}$ est également convexe (puisque f l'est).
Comme la différence de deux fonctions convexes n'est pas nécessairement convexe, nous allons chercher à linéariser $f'(x_0;\cdot)$. Nous savons [cfr A.IV.5] que

$$f'(x_0;d) = \sup_{x\in\partial f(x_0)} < x, d >= \delta^*(\partial f(x_0)|d)$$

où $\partial f(x_0)$, sous-différentiel de f en x_0, est un ensemble convexe, fermé, borné, non vide [voir A.IV.1].
Soit x^* un point de $\partial f(x_0)$ satisfaisant $f'(x_0;d) =< x^*, d >$. Un tel point existe toujours puisque $\partial f(x_0)$ est compact.

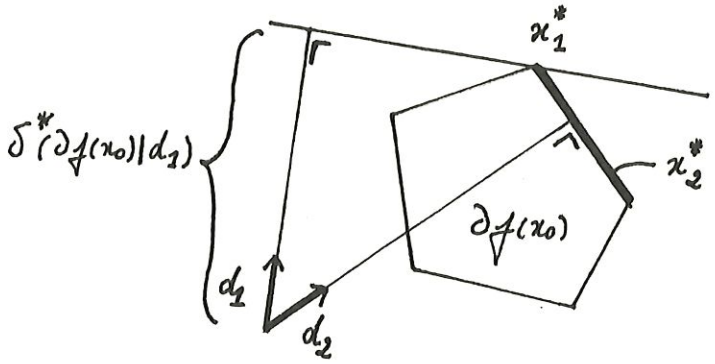


Figure 9

Inversément, nous nous posons la question de connaître $\{d \mid f'(x_0;d) =< x_0^*, d >\}$ pour x_0^* fixé dans $\partial f(x_0)$.
Dans le cas où $x_0^* \in$ intérieur de $\partial f(x_0)$, seule la direction nulle convient.
Si $x_0^* \in$ frontière de $\partial f(x_0)$, l'ensemble des directions répondant à la question est le cône normal [cfr A.V.1] $N(\partial f(x_0), x_0^*)$.

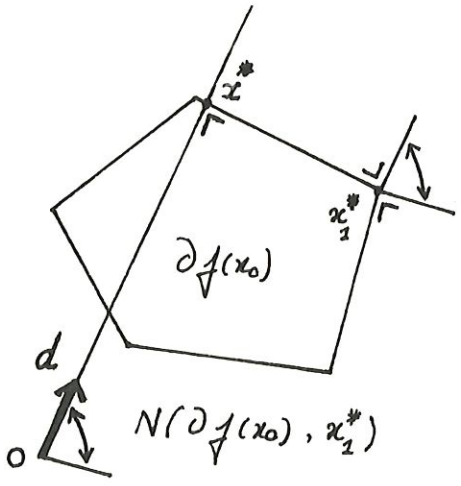


Figure 10

Ainsi, $f'(x_0;\cdot)$ est linéaire sur $N(\partial f(x_0), x_0^*)$ et l'on peut définir pour chaque $x_0^* \in \partial f(x_0)$

$$f''(x_0, x_0^*; d) = \begin{cases} \lim\limits_{\lambda \to 0^+} \frac{2}{\lambda} \left[\frac{f(x_0 + \lambda d) - f(x_0)}{\lambda} - < x_0^*, d > \right] \\ \qquad\qquad\qquad\qquad \text{si } d \in N(\partial(x_0), x_0^*) \\ +\infty \qquad\qquad\qquad\qquad \text{sinon} \end{cases}$$

En attribuant le nom de paire associée à tout couple (x_0^*, d) de $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$ t.q. $d \in N(\partial f(x_0), x_0^*)$, on obtient encore

$$f''(x_0, x_0^*; d) = \begin{cases} f''(x_0; d) & \text{si } (x_0^*; d) \text{ est une paire associée} \\ +\infty & \text{sinon} \end{cases}$$

Nous présentons ci-dessous quelques propriétés de $f''(x_0, x_0^*; \cdot)$.

Proposition 2.4.3.1 :

a) *Si $x_0^* \in$ intérieur de $\partial f(x_0)$, alors* $f''(x_0, x_0^*; \cdot) = \delta(0|\cdot)$

b) *Lorsque f est différentiable au point x_0,* $f''(x_0, \nabla f(x_0); \cdot) = f''(x_0; \cdot)$

Démonstration :

a) Quand $x_0^* \in$ intérieur de $\partial f(x_0)$, seul le couple $(x_0^*, 0)$ constitue une paire associée. Comme $f''(x_0; 0) = 0$,

$$f''(x_0, x_0^*; d) = \begin{cases} 0 & \text{si } d = 0 \\ +\infty & \text{sinon} \end{cases}$$

b) Puisque f est différentiable au point x_0, le sous-différentiel $\partial f(x_0)$ se réduit au gradient $\nabla f(x_0)$ [cfr A.IV.4]. Dès lors, le cône normal en x_0^*

$$N(\partial f(x_0), x_0^*) = \{d \mid \forall\, x^* \in \partial f(x_0) = \{\nabla f(x_0)\} \quad 0 \geq < d, x^* - \nabla f(x_0) >\}$$

autrement dit, le couple (x_0^*, d) est une paire associée quelque soit la direction d envisagée. ∎

Proposition 2.4.3.2 :

a) $f''(x_0, x_0^*; \cdot) = f''(x_0; \cdot) + \delta(N(\partial f(x_0), x_0^*)|\cdot)$

b) $f''(x_0, x_0^*; 0) = 0$

c) $f''(x_0, x_0^*; d) \geq 0 \ \ \forall\, d$

Démonstration :

a) Il suffit d'envisager séparément les deux cas suivants :

$$d \in N(\partial f(x_0), x_0^*) \text{ et } d \notin N(\partial f(x_0), x_0^*)$$

b) preuve immédiate puisque $(x_0^*, 0)$ est une paire associée [voir proposition 2.2.1].

c) Ce résultat provient du fait que $f''(x_0; d)$ est déjà positive $\forall\, d$. ∎

Proposition 2.4.3.3 :

$f''(x_0, x_0^*; .)$ est convexe et positivement homogène de degré 2.

Démonstration :

Attachons-nous tout d'abord à démontrer la convexité de $f''(x_0, x_0^*; .)$.
En vertu de la proposition A.I.9., il nous suffit de prouver que $f''(x_0, x_0^*; .)$ est propre, que son domaine [cfr A.I.6.] est convexe, et que

$$\forall\, d_1, d_2 \in \text{ dom } f''(x_0, x_0^*; .),\ \forall\, \mu \in [0,1] :$$

$$f''(x_0, x_0^*; \mu d_1 + (1-\mu)d_2) \leq \mu f''(x_0, x_0^*; d_1) + (1-\mu) f''(x_0, x_0^*; d_2)$$

Le caractère propre de $f''(x_0, x_0^*; .)$ s'établit immédiatement puisque cette fonction est positive et de valeur nulle en 0. Quant à la convexité du domaine, elle s'obtient tout aussi facilement en constatant que ce domaine correspond au cône normal $N(\partial f(x_0), x_0^*)$.
De plus, quand $d \in N(\partial f(x_0), x_0^*)$,

$$f'(x_0; d) = < x_0^*, d >$$

de sorte que

$$f''(x_0, x_0^*; .) = \lim_{\lambda \to 0^+} \frac{2}{\lambda} \left[\frac{f(x_0 + \lambda \cdot) - f(x_0)}{\lambda} - < x_0^*, . > \right]$$

Puisque $\dfrac{f(x_0+\lambda\cdot)-f(x_0)}{\lambda}$ est convexe [cfr preuve de la proposition 2.2.4.], $f''(x_0,x_0^*;.)$ le devient aussi comme limite de fonctions convexes.
Par ailleurs, puisque $f''(x_0;.)$ est positivement homogène de degré 2, la thèse suit. ∎

Rassemblant toutes les caractéristiques de $f''(x_0,x_0^*;d)$ nécessaires à l'application du théorème de Rockafellar, nous observons que $\sqrt{f''(x_0,x_0^*;d)}$ est bien convexe, propre, positivement homogène de degré un mais non nécessairement semi-continue inférieurement. En effet, reprenons l'exemple 1 avec $x_0=(0,0)$ et $x_0^*=(0,0)$. Le dernier point est bien un élément de $\partial f(x_0)$ puisque

$$f(x)\geq f(0)+<0,x> \quad \forall\, x\in I\!R^n\ .$$

Nous savons que le couple (x_0^*,d) constitue une paire associée si

$$d\in N(\partial f(x_0),x_0^*)$$

c'est-à-dire si

$$f'(x_0;d)=<x_0^*,d>$$

Or, pour $d=(d_1,d_2)$,

$$f'(x_0;d)=\begin{cases}0 & \text{si } d_1\leq 0\\ 2d_1 & \text{si } d_1>0\end{cases}$$

donc, $(x_0^*,d)=(0,d)$ sera paire associée pour $d_1\leq 0$.
Dès lors,

$$\forall\ d=(d_1,d_2)\quad f''(x_0,x_0^*;d)=\begin{cases}0 & \text{si } d_1<0\\ 2d_2^2 & \text{si } d_1=0\\ +\infty & \text{si } d_1>0\end{cases}$$

puisque

$$f''(x_0,;d)=\begin{cases}0 & \text{si } d_1<0\\ 2(d_1^2+d_2^2) & \text{si } d_1\geq 0\end{cases}$$

Ainsi que nous l'affirme la proposition A.I.12., $f''(x_0,x_0^*;\cdot)$ est continue, donc semi-continue inférieurement, sur l'intérieur de $N(\partial f(x_0),x_0^*)$ mais, comme observé précé-

demment pour $f''(x_0; d)$, le caractére semi-continu inférieurement est mis en défaut sur la frontière du cône normal. ∎

B) Comment rendre $\sqrt{f''(x_0, x_0^*; d)}$ semi-continue inférieurement ?

Nous rappelons que la fermeture d'une fonction convexe $g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ est la plus grande fonction semi-continue inférieurement qui minore g. On la note $cl\ g$.
D'un point de vue géométrique, $cl\ g$ est la fonction dont l'épigraphe est $\overline{epi\ g}$.
Nous illustrons cette propriété au moyen de l'exemple suivant.

Soit une fonction $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ t.q.

$$g(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x > 0 \\ +\infty & \text{si } x \leq 0 \end{cases}$$

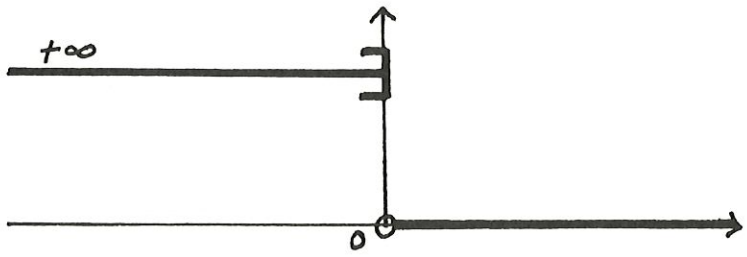


Figure 11

Nous avons

$$\begin{aligned} epi\ g &= \{(x, a) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \mid g(x) \leq a\} \\ &= \mathbb{R}_0^+ \times \mathbb{R}_0 \\ \text{et} \quad \overline{epi\ g} &= \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+ \end{aligned}$$

Nous considérons à présent $cl\ g : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ et obtenons

$$cl\ g(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \geq 0 \\ +\infty & \text{si } x < 0 \end{cases}$$

avec $epi\ cl\ g(x) = I\!R^+ \times I\!R^+$. ∎

Proposition 2.4.3.4 :

La fermeture d'une fonction convexe, positive, positivement homogène est convexe, positive, positivement homogène et semi-continue inférieurement.

Démonstration :

Grâce aux propositions A.II.6 et A.II.4, il ne nous reste plus qu'à prouver les caractères positif et positivement homogène de $cl\ f$ où f désigne une fonction convexe, positive et positivement homogène de $I\!R^n$ dans $\overline{R}$.

a) $f \geq 0 \Rightarrow cl\ f \geq 0$:
En effet,

$$\begin{aligned} f \geq 0 &\Leftrightarrow epi(f) \subseteq I\!R^n \times I\!R^+ \\ &\Leftrightarrow epi(cl\ f) = \overline{epi(f)} \subseteq \overline{I\!R^n \times I\!R^+} = I\!R^n \times I\!R^+ \\ &\Leftrightarrow cl\ (f) \geq 0 \end{aligned}$$

b) f positivement homogène $\Rightarrow cl(f)$ positivement homogène :
De fait, par la proposition A.II.7, nous avons $\forall\ \alpha \geq 0$

$$\begin{aligned} cl\ f(\alpha x) &= \lim_{y \to \alpha x} \inf f(y) \\ &= \lim_{z \to x} \inf f(\alpha z) \\ &= \lim_{z \to x} \inf \alpha f(z) \end{aligned}$$

Pour clôturer la preuve, il nous suffit donc de montrer que nous pouvons permuter le scalaire α avec la limite inférieure.
Nous savons (cfr [8]) que

$$\lim_{z \to x} \inf \alpha f(z) = \lim_{\varepsilon \to 0^+} \varphi(\varepsilon) = \sup_{\varepsilon > 0} \varphi(\varepsilon)$$

où

$$\varphi(\varepsilon) = \inf\{\alpha f(z) \mid |z - x| \leq \varepsilon\}$$

Puisque le scalaire α peut "sortir" de l'infimum et du supremum, le résultat annoncé est maintenant prouvé. ∎

Dès lors, $cl\ \sqrt{f''(x_0, x_0^*; .)}(d)$ satisfait les hypothèses du théorème de Rockafellar et constitue donc la fonction d'appui d'un ensemble convexe, fermé, non vide, que nous noterons $\partial^2 f(x_0, x_0^*)$.
Ainsi, nous avons

$$cl\ \sqrt{f''(x_0, x_0^*; .)}(d) = \delta^*(\partial^2 f(x_0, x_0^*)|d) \tag{3}$$

Pour la commodité de l'écriture, nous admettrons dorénavant, l'abus de notation suivant

$$cl\ \sqrt{f''(x_0, x_0^*; .)}(d) = cl\ \sqrt{f''(x_0, x_0^*; d)}$$

CHAPITRE II

DIFFERENTIELS SECONDS

1 Différentiel second de f en (x_0, x_0^*)

Nous savons déjà, en vertu du théorème I.2.4.1.1 et de l'égalité (3), que

$$\partial^2 f(x_0, x_0^*) = \{x_0^{**} \in I\!R^n \mid < x_0^{**}, d > \leq cl\sqrt{f''(x_0, x_0^*; d)} \quad \forall\, d \in I\!R^n\} \tag{4}$$

Cet ensemble portera le nom de *différentiel second* de la fonction f en (x_0, x_0^*).
Nous pouvons en donner une définition équivalente :

$$\partial^2 f(x_0, x_0^*) = \{x_0^{**} \in I\!R^n \mid < x_0^{**}, d > \leq \sqrt{f''(x_0, x_0^*; d)} \quad \forall\, d \in I\!R^n\} \tag{5}$$

En effet, le sens (4) $\Rightarrow$ (5) est immédiat par application de la propriété A.II.6. D'autre part, par définition de la fermeture [cfr A.II.3.],

$$cl\sqrt{f''(x_0, x_0^*; d)} = \sup_{\substack{F \text{ affine} \\ F \leq \sqrt{f''(x_0, x_0^*; .)}}} F(d)$$

Or, $< x_0^{**}, . >$ est une fonction affine minorant $\sqrt{f''(x_0, x_0^*, .)}$ et donc,

$$< x_0^{**}, . > \leq \sup_{\substack{F \text{ affine} \\ F \leq \sqrt{f''(x_0, x_0^*; .)}}} F(.) = cl\sqrt{f''(x_0, x_0^*; d)}$$

■

Proposition 1.1 :

$\partial^2 f(x_0, x_0^*) = I\!R^n$ lorsque $x_0^* \in$ intérieur de $\partial f(x_0)$.

Démonstration :

Quand $x_0^* \in$ intérieur de $\partial f(x_0)$, le cône normal à $\partial f(x_0)$ au point x_0^* se réduit à la direction nulle. Dès lors,

$$f''(x_0, x_0^*; d) = \begin{cases} 0 & \text{si } d = 0 \\ +\infty & \text{sinon} \end{cases}$$

et le résultat annoncé est ainsi prouvé, étant donné (5). ∎

Proposition 1.2 :

$\partial^2 f(x_0, x_0^*)$ est un ensemble convexe, fermé, contenant le cône tangent $T(\partial f(x_0), x_0^*)$ à $\partial f(x_0)$ au point x_0^*.

Démonstration :

Notons que les caractères convexe et fermé de $\partial^2 f(x_0, x_0^*)$ sont implicitement réalisés par définition ($\partial^2 f(x_0, x_0^*) = K$ dans le théorème I.2.4.1.1). Nous n'en faisons ici que la vérification.

Prouver la convexité du différentiel du second ordre revient à considérer deux points x_0^{**} et $y_0^{**} \in \partial^2 f(x_0, x_0^*)$ et à vérifier que

$$\forall\, \lambda \in [0,1] \;\; \lambda x_0^{**} + (1-\lambda) y_0^{**} \in \partial^2 f(x_0, x_0^*)$$

c'est-à-dire

$$\forall\, \lambda \in [0,1] \;\; < \lambda x_0^{**} + (1-\lambda) y_0^*, d > \leq \sqrt{f''(x_0, x_0^*; d)} \;\; \forall\, d$$

Ceci s'obtient par la propriété de linéarité du produit scalaire.
Etablissons à présent, le caractère fermé de $\partial^2 f(x_0, x_0^*)$. Pour ce faire, prenons une suite de points $(x_n^{**})_n$ dans $\partial^2 f(x_0, x_0^*)$, convergente vers un élément x^{**} et montrons que ce dernier appartient à $\partial^2 f(x_0, x_0^*)$. Autrement dit, vérifions que

$$< x^{**}, d > \leq \sqrt{f''(x_0, x_0^*; d)} \;\; \forall\, d$$

Or,

$$< x_n^{**}, d > \leq \sqrt{f''(x_0, x_0^*; d)} \;\; \forall\, d$$

et

$$< x_n^{**}, d > = < x_n^{**} - x^{**}, d > + < x^{**}, d >$$

Dès lors, par continuité du produit scalaire,

$$\begin{aligned} < \lim_{n\to\infty} (x_n^{**} - x^{**}), d > + < x^{**}, d > &= 0 + < x^{**}, d > \\ &\leq \sqrt{f''(x_0, x_0^*; d)} \ \forall\ d \end{aligned}$$

Montrons finalement que

$$T(\partial f(x_0), x_0^*) \subseteq \partial^2 f(x_0, x_0^*)$$

Nous avons

$$cl\ \sqrt{f''(x_0, x_0^*; .)} \geq \delta(N(\partial f(x_0), x_0^*) \mid .) \tag{6}$$

et

$$\begin{aligned} \delta(N(\partial f(x_0), x_0^*) \mid .) &= \delta^*(T(\partial f(x_0), x_0^*) \mid .) \\ &= \sup_{x \in T(\partial f(x_0), x_0^*)} < ., x > \end{aligned} \tag{7}$$

En effet, (6) s'obtient en séparant les cas :

(i) Si $d \in N(\partial f(x_0), x_0^*)$ c'est-à-dire (x_0^*, d) constitue une paire associée. Dans cette éventualité, le membre de droite de l'inégalité s'annule et le membre de gauche est positif.

(ii) Si $d \notin N(\partial f(x_0), x_0^*)$, chacun des deux membres de l'inégalité prend une valeur infinie.

Nous établissons l'égalité (7) en procédant de la même façon :

(i) Si $d \in N(\partial f(x_0), x_0^*)$, alors

$$\forall\ x \in T(\partial f(x_0), x_0^*) \quad < d, x > \leq 0$$

puisque $T(\partial f(x_0), x_0^*)^- = N(\partial f(x_0), x_0^*)\ \forall\ x_0^* \in \partial f(x_0)$ [cfr A.V.2]
Or, $0 \in N(\partial f(x_0), x_0^*)$, donc

$$\sup_{x \in T(\partial f(x_0), x_0^*)} < d, x > = 0$$

(ii) Si $d \notin N(\partial f(x_0), x_0^*)$ c'est-à-dire si $d \notin T(\partial f(x_0), x_0^*)^-$, alors $\exists x^* \in T(\partial f(x_0), x_0^*)$ tel que $< d, x^* > > 0$.
Mais si x^* appartient au cône tangent, λx^* y appartient également pour tout $\lambda > 0$. Dès lors,

$$\sup_{\lambda > 0} < d, \lambda x^* > \leq \sup_{x \in T(\partial f(x_0), x_0^*)} < d, x >$$

ou encore

$$\sup_{\lambda > 0} \lambda < d, x^* > \leq \sup_{x \in T(\partial f(x_0), x_0^*)} < d, x >$$

Nous concluons au moyen de la proposition A.VIII.1 appliquée aux deux convexes fermés suivants :

$$\partial^2 f(x_0, x_0^*) \text{ et } T(\partial f(x_0), x_0^*)$$

■

Penchons-nous à nouveau sur l'exemple 1 afin de constater que $\partial^2 f(x_0, x_0^*)$ n'est pas nécessairement borné.
Puisque, pour $x_0 = (0,0)$ et $x_0^* = (0,0)$,

$$f''(x_0, x_0^*; d) = \begin{cases} 0 & \text{si } d_1 < 0 \\ 2d_2^2 & \text{si } d_1 = 0 \\ +\infty & \text{si } d_1 > 0 \end{cases}$$

nous obtenons

$$\partial^2 f(x_0, x_0^*) = \{x_0^{**} \mid < x_0^{**}, d > \leq \begin{cases} 0 & \text{si } d_1 < 0 \\ \sqrt{2d_2^2} & \text{si } d_1 = 0 \\ +\infty & \text{si } d_1 > 0 \end{cases} \}$$

Les deux premières conditions peuvent se réécrire

$$x_{01}^{**} d_1 + x_{02}^{**} d_2 \leq 0 \quad \text{si } d_1 < 0 \ \forall\, d_2 \tag{8}$$

$$x_{02}^{**} d_2 \leq \sqrt{2d_2^2} \ \forall\, d_2 \tag{9}$$

avec $x_0^{**} = (x_{01}^{**}, x_{02}^{**})$.
Nous observons alors que (8) implique

$$x_{01}^{**} \geq 0 \text{ et } x_{02}^{*} = 0$$

(considérer respectivement $d_2 = 0$ puis, d_2 de très grande valeur).
Ainsi, (9) est toujours vérifiée.
Finalement, nous pouvons identifier $\partial^2 f(x_0, x_0^*)$ à

$$\{x_0^{**} \mid x_{01}^{**} \geq 0 \text{ et } x_{02}^{**} = 0\}$$

c'est-à-dire $\partial^2 f(x_0, x_0^*) = I\!R^n \times \{0\}$ qui n'est évidemment pas borné. ■

2 Différentiel second de f en x_0

Nous définirons le *différentiel second* de f en x_0 par

$$\partial^2 f(x_0) = \bigcap_{x_0^* \in \partial f(x_0)} \partial^2 f(x_0, x_0^*) \tag{10}$$

En fait, puisque $\partial^2 f(x_0, x_0^*)$ vaut l'espace tout entier lorsque x_0^* se trouve dans l'intérieur de $\partial f(x_0)$, seuls les x_0^* de la frontière de $\partial f(x_0)$ joueront un rôle significatif dans la définition donnée ci-dessus.
Nous pourrions également, restreindre l'ensemble sur lequel porte l'intersection en ne considérant que les points extrémaux de $\partial f(x_0)$.
En effet, il suffit de démontrer l'inclusion non triviale

$$\bigcap_{x_0^* \in \text{ Extr } \partial f(x_0)} \partial^2 f(x_0, x_0^*) \subseteq \partial^2 f(x_0)$$

Puisque $\partial f(x_0)$ est l'enveloppe convexe de ses points extrémaux, tout élément x_0^* de cet ensemble pourra s'exprimer comme combinaison convexe des points extrémaux $x_0^{*1}, \cdots, x_0^{*k}$. Ainsi,

$$x_0^* = \sum_{i=1}^{k} \alpha_i x_0^{*i}$$

avec

$$\sum_{i=1}^{k} \alpha_i = 1 \text{ et } \alpha_i > 0 \ \forall \ i$$

Considérons maintenant $d \in N(\partial f(x_0), x_0^*)$ de sorte que

$$< x_0^*, d >= \sum_{i=1}^{k} \alpha_i < x_0^{*i}, d >= f'(x_0; d)$$

Comme $x_0^{*i} \in \partial f(x_0) \ \forall \ i$, nous obtenons [cfr A.IV.3]

$$< x_0^{*i}, d >= f'(x_0; d) \ \ \forall \ i$$

ce qui signifie que $\alpha \in N(\partial f(x_0), x_0^{*i}) \ \forall \ i$.
Par conséquent, nous avons prouvé que

$$N(\partial f(x_0), x_0^*) \subseteq N(\partial f(x_0), x_0^{*i}) \ \ \forall \ i$$

Dès lors,

$$f''(x_0, x_0^*; .) \geq f''(x_0, x_0^{*i}; .) \ \ \forall \ i$$

ce qui implique par (5) que

$$\partial^2 f(x_0, x_0^*) \supseteq \partial^2 f(x_0, x_0^{*i}) \ \ \forall\, i$$

L'inclusion annoncée est ainsi démontrée. ∎

Nous pouvons donner du différentiel second de f en x_0 une définition équivalente.

Proposition 2.1 :

$$\partial^2 f(x_0) = \{x^* \in I\!R^n \mid \ < x^*, d > \leq \sqrt{f''(x_0; d)} \ \ \forall\, d\}$$

Démonstration :

Par les définitions (10) et (5), nous savons que $x_0^{**} \in \partial^2 f(x_0)$ si et seulement si

$$< x_0^{**}, d > \leq \inf_{x_0^* \in \partial f(x_0)} \sqrt{f''(x_0, x_0^*; d)} \ \ \forall\, d$$

D'autre part,

$$\inf_{x_0^* \in \partial f(x_0)} \sqrt{f''(x_0, x_0^*; d)} = \sqrt{f''(x_0; d)}$$

de telle sorte que

$$x_0^{**} \in \partial^2 f(x_0) \ \ \Leftrightarrow \ < x_0^{**}, d > \leq \sqrt{f''(x_0; d)} \ \ \forall\, d$$

∎

Nous prouvons à présent quelques propriétés fondamentales du différentiel second de f en x_0.

Proposition 2.2 :

$\partial^2 f(x_0)$ est un ensemble convexe, compact, contenant l'origine.

Démonstration :

Considérons deux éléments de $\partial^2 f(x_0)$, soient x_0^{**} et y_0^{**}.
Nous désirons prouver que $\lambda x_0^{**} + (1-\lambda) y_0^{**} \in \partial^2 f(x_0)$, c'est-à-dire que

$$\forall\, x_0^* \in \partial f(x_0) \ \ \lambda x_0^{**} + (1-\lambda) y_0^{**} \in \partial^2 f(x_0, x_0^*)$$

Or, $\forall\ x_0^* \in \partial f(x_0)$

$$x_0^{**} \text{ et } y_0^{**} \in \partial^2 f(x_0, x_0^*)$$

D'où, par convexité de ce dernier ensemble [cfr proposition 1.2], la première partie du résultat est obtenue.

Montrons à présent le caractère compact de $\partial^2 f(x_0)$.

Il s'agit tout d'abord d'un ensemble fermé puisque défini par une intersection de fermés.

Prouvons maintenant que $\partial^2 f(x_0)$ est borné. Prenons pour cela x_0^{**} dans $\partial^2 f(x_0)$, nous avons alors

$$\begin{aligned} ||x_0^{**}|| &= \sup_{||d||=1} < x_0^{**}, d > \\ &\leq \sup_{||d||=1} \sqrt{f''(x_0; d)} \end{aligned}$$

par la proposition 2.1.

D'autre part, au moyen de (2), nous pouvons écrire

$\forall\ \varepsilon > 0\ \ \exists \lambda_0 > 0$ tel que

$$\left| f''(x_0; d) - \frac{1}{\lambda_0}[f'(x_0 + \lambda_0 d; d) - f'(x_0; d)] \right| < \varepsilon$$

c'est-à-dire

$$|f''(x_0; d)| < \varepsilon + \frac{1}{\lambda_0}|f'(x_0 + \lambda_0 d; d)| + \frac{1}{\lambda_0}|f'(x_0; d)]$$

Or, par la proposition A.IV.5 et le caractère borné de $\partial f(x_0)$, nous avons

$$\begin{aligned} f'(x_0; d) &= \max_{x_0^* \in \partial f(x_0)} < x_0^*, d > \\ &\leq K\ ||d|| = K \end{aligned}$$

De même, nous obtenons

$$\begin{aligned} f'(x_0 + \lambda_0 d; d) &= \max_{x_0^* \in \partial f(x_0 + \lambda_0 d)} < x_0^*, d > \\ &\leq K_1\ \ ||d|| = K_1 \end{aligned}$$

Consécutivement,

$$|f''(x_0; d)| < \varepsilon + \frac{1}{\lambda_0}(|K| + |K_1|)$$

et ainsi $\partial^2 f(x_0)$ devient borné.

Prouver que l'origine est un élément de $\partial^2 f(x_0)$ ne pose aucune difficulté puisque $\forall\ x_0^* \in \partial f(x_0)\quad 0 \in \partial^2 f(x_0, x_0^*)$. ∎

Proposition 2.3 :

La fonction d'appui du différentiel second de f en x_0 est la biconjuguée de $\sqrt{f''(x_0;\cdot)}$.

Démonstration :

Montrons tout d'abord le résultat préliminaire suivant.
Si $g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ est une fonction positivement homogène, alors $g^* = 0$ sur dom (g^*).
En effet, pour tout $\lambda > 0, \lambda \neq 1$ et tout $y \in \mathbb{R}^n$, nous avons

$$g^*(y) = \sup_{x \in \mathbb{R}^n} \{< x, y > - g(x)\}$$

et donc,

$$\begin{aligned} \lambda g^*(y) &= \sup_{x \in \mathbb{R}^n} \{\lambda < x, y > - \lambda g(x)\} \\ &= \sup_{x \in \mathbb{R}^n} \{< \lambda x, y > - g(\lambda x)\} \\ &= \sup_{z \in \mathbb{R}^n} \{< z, y > - g(z)\} \\ &= g^*(y) \end{aligned}$$

D'où,

$$g^*(y) = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad y \in \text{dom } (g^*) \\ +\infty & \text{sinon} \end{cases}$$

Nous pouvons déduire de cette propriété le caractère positivement homogène de la biconjuguée de $\sqrt{f''(x_0; d)}$.
De fait, notant

$$g(.) = \sqrt{f''(x_0; .)}$$

(il s'agit bien d'une fonction positivement homogène [voir proposition I.2.2.2]), nous obtenons

$$g^{**}(\lambda x) = \sup_{y \in \mathbb{R}^n} \{< y, \lambda x > - g^*(y)\} = \sup_{y \in \text{dom } (g^*)} < y, \lambda x >$$

et

$$\lambda g^{**}(x) = \sup_{y \in I\!R^n} \{< y, \lambda x > - \lambda g^*(y)\} = \sup_{y \in \text{dom } (g^*)} < y, \lambda x >$$

Par ailleurs, nous savons, grâce à la proposition A.III.2, que $(\sqrt{f''(x_0;.)})^{**}$ constitue une fonction convexe, propre, semi-continue inférieurement.
Dès lors, nous pouvons appliquer le théorème I.2.4.1.1 afin de déduire que

$$(\sqrt{f''(x_0;.)})^{**} = \delta^*(K|.)$$

où

$$K = \{x_0^{**} \in I\!R^n \mid < x_0^{**}, d > \leq (\sqrt{f''(x_0;.)})^{**} \ \forall\, d \in I\!R^n\}$$

Ce dernier ensemble n'est autre que $\partial^2 f(x_0)$.
En effet, nous pouvons facilement prouver que

$$\{x_0^{**} \in I\!R^n \mid < x_0^*, d > \leq \sqrt{f''(x_0;d)} \ \forall\, d \in I\!R^n\} \supseteq K$$

en faisant appel à la propriété suivante :

$$f^{**} \leq f \ \forall\, f \qquad \text{[cfr 4]}$$

L'autre inclusion s'établit ensuite, en considérant

$$\begin{aligned} & < x_0^{**}, d > \quad \leq \sqrt{f''(x_0;.)} \\ \Rightarrow \quad & (< x_0^{**}, . >)^{**} \ \leq (\sqrt{f''(x_0;.)})^{**} \qquad \text{[cfr 4]} \end{aligned}$$

Nous pouvons alors conclure au moyen de la proposition A.III.4 puisque $< x_0^{**}, . >$ est convexe, propre, semi-continue inférieurement. ∎

Proposition 2.4 :

$\partial^2 f(x_0) + T(\partial f(x_0), x_0^*) \subseteq \partial^2 f(x_0, x_0^*)$.
L'égalité s'obtient lorsque $f''(x_0;.)$ est convexe.

Démonstration :

Soit $z^{**} \in \partial^2 f(x_0) + T(\partial f(x_0), x_0^*)$. Autrement dit, $z^{**} = z_1^{**} + z_2^{**}$ avec

$$z_1^{**} \in \partial^2 f(x_0) \text{ et } z_2^{**} \in T(\partial f(x_0), x_0^*) = N(\partial f(x_0), x_0^*)$$

Ainsi,

$$< z_1^{**}, d > \leq \sqrt{f''(x_0;d)} \ \forall\, d \in I\!R^n$$

et

$$< z_2^{**}, d > \leq \delta(N(\partial f(x_0), x_0^*)|d) \quad \forall\, d \in I\!R^n$$

Additionnons maintenant membre à membre ces deux inégalités. Nous obtenons

$$\begin{aligned} < z^{**}, d > &\leq \sqrt{f''(x_0; d)} + \delta(N(\partial f(x_0), x_0^*)|d) \\ &= \sqrt{f''(x_0, x_0^*; d)} \quad \forall\, d \in I\!R^n \end{aligned}$$

c'est-à-dire $z^{**} \in \partial^2 f(x_0, x_0^*)$ [cfr (5)].
Par ailleurs,

$$\begin{aligned} & x_0^{**} \in \partial(\sqrt{f''(x_0; .)} + \delta(N(\partial, f(x_0), x_0^*)|.)(0) \\ \Leftrightarrow \quad & \sqrt{f''(x_0; x)} + \delta(N(\partial f(x_0), x_0^*)|x) \geq 0 + < x_0^{**}, x > \quad \forall\, x \in I\!R^n \end{aligned}$$

expression encore équivalente [cfr proposition I.2.4.3.2.a.] à

$$< x_0^{**}, x > \leq \sqrt{f''(x_0, x_0^*; x)} \quad \forall\, x \in I\!R^n$$

c'est-à-dire $x_0^{**} \in \partial^2 f(x_0, x_0^*)$.
Ainsi,

$$\partial^2 f(x_0, x_0^*) = \partial(\sqrt{f''(x_0; .)} + \delta(N(\partial f(x_0), x_0^*)|.)(0)$$

Ajoutons à présent l'hypothèse de convexité de $f''(x_0; .)$ pour obtenir

$$\partial^2 f(x_0, x_0^*) \subseteq \partial\sqrt{f''(x_0; .)}(0) + \partial\delta(N(\partial f(x_0), x_0^*)|.)(0) \tag{11}$$

au moyen de la proposition A.IV.6.a. et A.I.13.
De plus, nous établissons que
$\partial\sqrt{f''(x_0; .)}(0) + \partial\delta(N(\partial f(x_0), x_0^*)(.)(0)$

$$\begin{aligned} &= \{x_0^* \in I\!R^n \mid \sqrt{f''(x_0, x)} \geq 0 + < x_0^*, x > \quad \forall\, x \in I\!R^n\} \\ &\quad + N(N(\partial f(x_0), x_0^*), 0) \end{aligned} \tag{12}$$

par définition du sous-différentiel et du cône normal.
Finalement, (11) et (12) permettent l'obtention de l'inclusion souhaitée, à savoir,

$$\partial^2 f(x_0, x_0^*) \subseteq \partial^2 f(x_0) + T(\partial f(x_0), x_0^*)$$

■

Proposition 2.5 :

Quand f est deux fois différentiable,

$$\partial^2 f(x_0) = E = [\nabla^2 f(x_0)]^{1/2}(\bar{B})$$

Démonstration :

Puisque $\partial^2 f(x_0)$ et l'ellipsoïde E sont des parties convexes fermées, nous obtiendrons la thèse en prouvant l'égalité des fonctions d'appui [cfr A.VIII.1].
Nous savons déjà, en vertu de sa proposition 2.3, que

$$\delta^*(\partial^2 f(x_0)|d) = (\sqrt{f''(x_0;d)})^{**} \ \forall\ d \in I\!R^n$$

Nous réécrivons alors cette égalité en tenant compte du caractère deux fois différentiable de f

$$\delta^*(\partial^2 f(x_0)|d) = (\sqrt{d^T \nabla^2 f(x_0) d})^{**}$$

Puisque $d \to \sqrt{d^T \nabla^2 f(x_0) d}$ constitue une fonction convexe, propre et semi-continue inférieurement [voir proposition I.2.2.4], nous pouvons déduire [cfr A.III.4] que

$$\delta^*(\partial^2 f(x_0)|d) = \sqrt{d^T \nabla^2 f(x_0) d} \ \ \forall\ d \in I\!R^n$$

D'autre part, nous avons déjà établi [cfr proposition 2.4.2.2] que

$$\sup_{e \in E} < e, d >= \sqrt{d^T \nabla^2 f(x_0) d} \ \ \forall\ d \in I\!R^n$$

Ainsi,

$$\delta^*(\partial^2 f(x_0)|d) = \delta^*(E|d)$$

■

Nous examinons maintenant quelques exemples .
Le premier reprend la fonction déjà considérée dans l'exemple 1.
Soit donc $f(x_1, x_2) = \max(0, x_0^2 + x_2^2 + 2x_1)$.
Pour $x_0 = (0,0)$, nous obtenons, au moyen de la proposition A.IV.6.b., que

$$\partial f(x_0) = Co\{ \bigcup_{i \in I(x_0)} \partial f_i(x_0)\}$$

où

$$I(x_0) = \{i = 1,2 \mid f_i(x_0) = \sup_{1 \leq j \leq 2} f_j(x_0)\}$$

c'est-à-dire

$$\partial f(x_0) = Co\{\bigcup_{i=1,2} \partial f_i(x_0)\}$$

avec

$$\partial f_1(x_0) = \{\nabla f_1(0,0)\} = (0,0)$$

et

$$\partial f_2(x_0) = \{\nabla f_2(0,0)\} = (2,0)$$

puisque f_1 et f_2 sont des fonctions différentiables.
Dès lors, nous envisageons les trois hypothèses suivantes pour le sous-gradient.

a) $x_0^* = (0,0)$:

Ce cas a déjà été étudié et nous recopions le résultat obtenu.

$$\partial^2 f(x_0, x_0^*) = I\!R^+ \times \{0\}$$

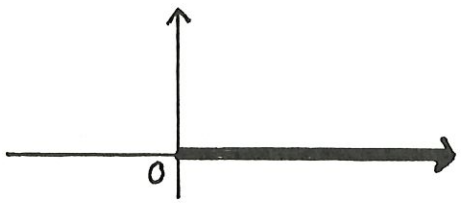


Figure 12

Nous remarquons que dans ce cas précis, nous obtenons l'égalité entre $\partial^2 f(x_0, x_0^*)$ et le cône tangent $T(\partial f(x_0), x_0^*)$ [voir proposition 1.2].

b) $x_0^* = (2,0)$:

Nous avons établi précédemment que

$$f''(x_0; d) = \begin{cases} 0 & \text{si } d_1 < 0 \\ 2(d_1^2 + d_2^2) & \text{si } d_1 \geq 0 \end{cases}$$

Par ailleurs, nous avons que

$$(x_0^*, d) \text{ constitue une paire associée } \Leftrightarrow \ < x_0^*, d >= f'(x_0; d)$$

ou encore, grâce à la proposition A.IV.7,

$$< x_0^*, d >= \max(\nabla f_1(x_0)^T d, \nabla f_2(x_0)^T d)$$

c'est-à-dire

$$2d_1 + 0 = \max(0, 2d_1)$$

Ainsi, (x_0^*, d) sera paire associée pour $d_1 \geq 0$.
Consécutivement,

$$f''(x_0, x_0^*; d) = \begin{cases} 2(d_1^2 + d_2^2) & \text{si } d_1 \geq 0 \\ +\infty & \text{si } d_1 < 0 \end{cases}$$

et

$$\partial^2 f(x_0, x_0^*) = \{x_0^{**} | < x_0^{**}, d > \leq \left\{ \begin{array}{ll} \sqrt{2(d_1^2 + d_2^2)} & \text{si } d_1 > 0 \\ \sqrt{2d_2^2} & \text{si } d_1 = 0 \\ +\infty & \text{si } d_1 < 0 \end{array} \right\} \ \forall \ d_2\}$$

Nous réécrivons ces conditions pour $x_0^{**} = (x_{01}, x_{02})$

$$\partial^2 f(x_0, x_0^*) = \{x_0^{**} | \left\{ \begin{array}{rcll} x_{01}d_1 + x_{02}d_2 & \leq & \sqrt{2d_1^2 + 2d_2^2} & \text{si } d_1 > 0 \ \forall \ d_2 \\ x_{02}d_2 & \leq & \sqrt{2}|d_2| & \forall \ d_2 \end{array} \right\}\}$$

Prouvons que ce dernier ensemble n'est autre que l'union disjointe

$$A_1 \dot{\cup} A_2$$

avec

$$A_1 = \{x_0^{**} = (x_{01}, x_{02}) \mid x_{01} \leq 0 \text{ et } x_{02}d_2 \leq \sqrt{2}d_2\}$$

et

$$A_2 = \{x_0^{**} = (x_{01}, x_{02}) \mid x_{01} > 0 \text{ et } x_{01}^2 + x0_2{}^2 - 2 \leq 0\}$$

Considérons premièrement l'inclusion

$$\partial^2 f(x_0, x_0^*) \subseteq A_1 \dot{\cup} A_2$$

Prenons x_0^{**} dans $\partial^2 f(x_0, x_0^*)$ et envisageons les deux possibilités suivantes

1°) $x_{01} \leq 0$:

Dans ce cas, x_0^{**} appartient à A_1 et donc à $A_1 \dot{\cup} A_2$.

2°) $x_{01} > 0$:

Posons alors $d_1 = x_{01} > 0$ et $d_2 = x_{02}$. Nous avons

$$x_{01}^2 + x_{02}^2 \leq \sqrt{2} \ \sqrt{x_{01}^2 + x_{02}^2}$$

c'est-à-dire

$$0 \leq \sqrt{x_{01}^2 + x_{02}^2} \leq \sqrt{2}$$

Ainsi, $x_0^{**} \in A_2$ et donc à $A_1 \dot{\cup} A_2$.

Démontrons à présent, l'autre inclusion.
Pour ce faire, considérons un élément x_0^{**} de $A_1 \dot{\cup} A_2$. Deux cas peuvent alors se présenter.

1°) $x_{01} \leq 0$:

Sous cette condition, nous avons que $x_0^{**} \in A_1$. Dès lors, nous trouvons déjà que $x_{02} d_2 \leq \sqrt{2} d_2$.
D'autre part,

$$\begin{aligned} x_{01} d_1 + x_{02} d_2 \leq x_{02} d_2 &\leq \sqrt{2} \ d_2 \\ &\leq \sqrt{2} \ |d_2| = \sqrt{2} \ \sqrt{d_2^2} \\ &\leq \sqrt{2} \ \sqrt{d_1^2 + d_2^2} \end{aligned}$$

Cette dernière inégalité étant vraie $\forall \ d_1$, le reste $\forall \ d_1 > 0$.

2°) $x_{01} > 0$:

Dans ce cas, nous pouvons affirmer que $x_0^{**} \in A_2$ c'est-à-dire que $x_0^{**} \in \sqrt{2} \bar{B}$.
Considérons tout d'abord

$$< x_0^{**}, d > = x_{01} d_1 + x_{02} d_2 \leq \ ||x_0^{**}|| \ \ ||d||$$

par l'inégalité de Cauchy-Schwarz.
Dès lors, puisque $x_0^{**} \in \sqrt{2} \bar{B}$, nous avons que

$$\begin{aligned} x_{01} d_1 + x_{02} d_2 &\leq \sqrt{2} \ ||d|| \\ &= \sqrt{2} \ \sqrt{d_1^2 + d_2^2} \end{aligned}$$

Cette inégalité est vérifiée $\forall\ d_1$ et donc $\forall\ d_1 > 0$.
Par ailleurs, nous pouvons affirmer que

$$-\sqrt{2} \leq x_{02} \leq \sqrt{2}$$

en utilisant à nouveau l'hypothèse $x_0^{**} \in \sqrt{2}\bar{B}$.
De là, nous déduisons,

(i) Si $d_2 \leq 0$:

$$x_{02}d_2 \leq -\sqrt{2}\ \ d_2 = \sqrt{2}\ \ |d_2|$$

(ii) Si $d_2 > 0$:

$$x_{02}d_2 \leq \sqrt{2}\ \ d_2 - \sqrt{2}\ |\ d_2|$$

L'égalité annoncée se trouve ainsi vérifiée.
Dès lors, nous obtenons la représentation géométrique suivante.

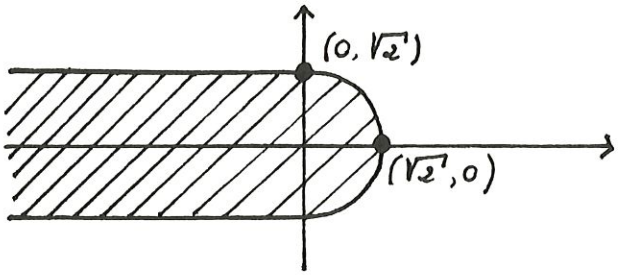


Figure 13

c) $x_0^* = (\alpha, 0)$ avec $\alpha \in]0, 2[$:
Sous cette hypothèse, nous obtenons que

$$\begin{aligned}(x_0^*, d) \text{ est une paire associée } &\Leftrightarrow\ < x_0^*, d >= f'(x_0; d) = \max(0, 2d_1)\\ &\Leftrightarrow\ \alpha d_1 = \max(0, 2d_1)\ \ \forall\ \alpha \in]0, 2[\\ &\Leftrightarrow\ d_1 = 0\end{aligned}$$

Dès lors,

$$\partial^2 f(x_0, x_0^*) = \{x_0^{**} |\ < x_0^{**}, d > \leq \left\{ \begin{array}{ll} \sqrt{2d_2^2} & \text{si } d_1 = 0 \\ +\infty & \text{si } d_1 \neq 0 \end{array} \right\}\ \forall\ d_2\}$$

Nous explicitons la première contrainte pour $x_0^{**} = (x_{01}, x_{02})$

$$x_{02} d_2 \leq \sqrt{2}|d_2|$$

Nous pouvons ainsi conclure que l'ensemble

$$\partial^2 f(x_0, x_0^*) = \{x_0^{**} = (x_{01}, x_{02}) \mid -\sqrt{2} \leq x_{02} \leq \sqrt{2}\}$$

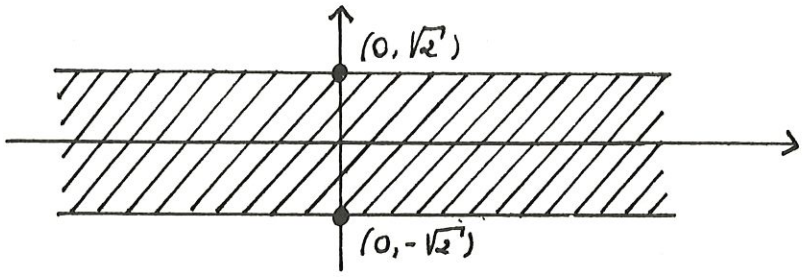


Figure 14

Consécutivement, nous trouvons au moyen de (10) que

$$\partial^2 f(x_0) = [0, \sqrt{2}] \times \{0\}$$

■

Exemple 2 : Considérons la fonction polyédrale $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ définie par

$$f(x) = \max_{1 \leq i \leq p} (a_i x + b_i)$$

Nous savons déjà [cfr proposition I.2.2.3] que $f''(x_0; d) = 0 \ \forall \ d$. Dès lors, pour $x_0^* \in \partial f(x_0)$, nous aurons que $f''(x_0, x_0^*; .)$ est la fonction indicatrice du cône normal $N(\partial f(x_0), x_0^*)$. Nous prouvons à présent que $\partial^2 f(x_0, x_0^*)$ se réduit au cône tangent $T(\partial f(x_0), x_0^*)$.
En effet,

$$\begin{aligned} f''(x_0, x_0^*; .) &= \delta(N(\partial f(x_0), x_0^*) \mid .) \\ &= \delta^*(T(\partial f(x_0), x_0^* \mid .) \qquad \text{[voir (7)]} \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} \delta^*(\partial^2(f(x_0, x_0^*) \mid .) &= cl\sqrt{f''(x_0, x_0^*; .)} \\ &\leq \sqrt{f''(x_0, x_0^*; .)} \qquad \text{[cfr A.II.6]} \\ &\leq f''(x_0, x_0^*; .) \end{aligned}$$

Ainsi, nous obtenons grâce à la proposition A.VIII.1,

$$\partial^2 f(x_0, x_0^*) \subseteq T(\partial f(x_0), x_0^*)$$

L'égalité s'établit finalement au moyen de la proposition 2.4.
Quant au différentiel du second ordre f au point x_0, il n'est rien d'autre que le singleton $\{0\}$ [cfr proposition 2.1]. ∎

Exemple 3 : Soient les fonctions $f_1, f_2 : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ définies au moyen des deux égalités suivantes

$$\begin{aligned} f_1(x_1, x_2) &= x_1^2 + 2x_1 + 2x_2^2 \\ f_2(x_1, x_2) &= 2x_1^2 + x_2^2 + 2x_2 \end{aligned}$$

Nous posons $f = \max(f_1, f_2)$ et désirons calculer $\partial^2 f(x_0)$ au point $x_0 = (0, 0)$.
Puisque f_1 et f_2 constituent des formes quadratiques, elles sont deux fois différentiables. Dès lors, la proposition 2.5 affirme que

$$\begin{aligned} & \partial^2 f_1(x_0) = E_1 = [\nabla^2 f_1(x_0)]^{1/2}(\overline{B}) \\ \text{et} \quad & \partial^2 f_2(x_0) = E_2 = [\nabla^2 f_2(x_0)]^{1/2}(\overline{B}) \end{aligned}$$

ou encore [cfr proposition I.2.4.2.1]

$$\partial^2 f_1(x_0) = \{(u, v) \mid (u, v)[\nabla^2 f_1(x_0)]^{-1} \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} \leq 1\}$$

et

$$\partial^2 f_2(x_0) = \{(u, v) \mid (u, v)[\nabla^2 f_2(x_0)]^{-1} \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} \leq 1\}$$

Ainsi, nous obtenons

$$\begin{aligned} \partial^2 f_1(x_0) &= \{(u, v) \mid \frac{u^2}{2} + \frac{v^2}{4} \leq 1\} \\ \partial^2 f_2(x_0) &= \{(u, v) \mid \frac{u^2}{4} + \frac{v^2}{2} \leq 1\} \end{aligned}$$

Par ailleurs, faisant appel à la proposition A.IV.7, nous établissons que

$$f'(x_0;d) = \max_{i \in I(x_0)} f_i'(x_0;d)$$

avec $I(x_0) = \{i \mid f_1(x_0) = f(x_0) = 0\} = \{1,2\}$.
Donc,

$$\begin{aligned} f'(x_0;d) &= \max\left(\nabla f_1(x_0)^T d, \nabla f_2(x_0)^T d\right) \\ &= \max\left((2,0)^T d, (0,2)^T d\right) \\ &= \max\left(2d_1, 2d_2\right) \\ &= 2\max\left(d_1, d_2\right) \end{aligned}$$

Nous avons aussi

$$f''(x_0;d) = \max_{i \in I(x_0;d)} f_i''(x_0;d)$$

où

$$\begin{aligned} I(x_0;d) &= \{i \in I(x_0) \mid f_i'(x_0;d) = f'(x_0;d)\} \\ &= \begin{cases} \{1\} & \text{si} \quad d_1 > d_2 \\ \{2\} & \text{si} \quad d_2 > d_1 \\ \{1,2\} & \text{si} \quad d_1 = d_2 \end{cases} \end{aligned}$$

Par conséquent, comme

$$\begin{aligned} f_1''(x_0;d) &= d^T[\nabla^2 f_1(x_0)]d \\ &= (d_1 d_2)\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} d_1 \\ d_2 \end{pmatrix} \\ &= 2d_1^2 + 4d_2^2 \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} f_2''(x_0;d) &= d^T[\nabla^2 f_2(x_0)]d \\ &= 4d_1^2 + 2d_2^2 \end{aligned}$$

Nous obtenons

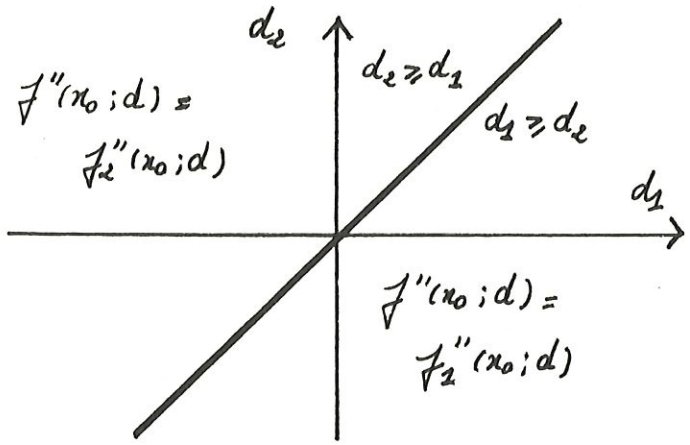


Figure 15

Considérant à présent la propriété A.IV.6.b.,

$$\begin{aligned} \partial f(x_0) &= Co\{\nabla f_1(x_0), \nabla f_2(x_0)\} \\ &= Co\{(2,0),(0,2)\} \end{aligned}$$

ce qui nous oblige, pour calculer $\partial^2 f(x_0, x_0^*), x_0^* \in \partial f(x_0)$, à distinguer les trois possibilités suivantes

a) $x_0^* = (2,0)$:

Sous cette hypothèse,

$$\begin{aligned} d \in N(\partial f(x_0), x_0^*) &\Leftrightarrow < x_0^*, d >= f'(x_0, d) = \max(2d_1, 2d_2) \\ &\Leftrightarrow 2d_1 = \max(2d_1, 2d_2) \\ &\Leftrightarrow d_1 \geq d_2 \end{aligned}$$

Dès lors,

$$f''(x_0, x_0^*; d) = \begin{cases} f''(x_0; d) = f_1''(x_0; d) = 2d_1^2 + 4d_2^2 & \text{si } d_1 \geq d_2 \\ +\infty & \text{sinon} \end{cases}$$

et

$$\partial^2 f(x_0, x_0^*) = \{x_0^{**}, (x_{01}, x_{02}) \mid x_{01}d_1 + x_{02}d_2 \leq \sqrt{2d_1^2 + 4d_2^2} \quad \forall\, (d_1, d_2) \text{ avec } d_1 \geq d_2\}$$

Il est admis que cet ensemble n'est rien d'autre que l'ellipsoïde $\partial^2 f_1(x_0)$ translaté dans la direction $(-1,1)$, c'est-à-dire

$$\partial^2 f(x_0, x_0^*) = \{z + \alpha(-1,1) \mid \alpha \geq 0 \text{ et } \frac{z_1^2}{2} + \frac{z_2^2}{4} \leq 1 \ \forall\, z = (z_1, z_2)\}$$

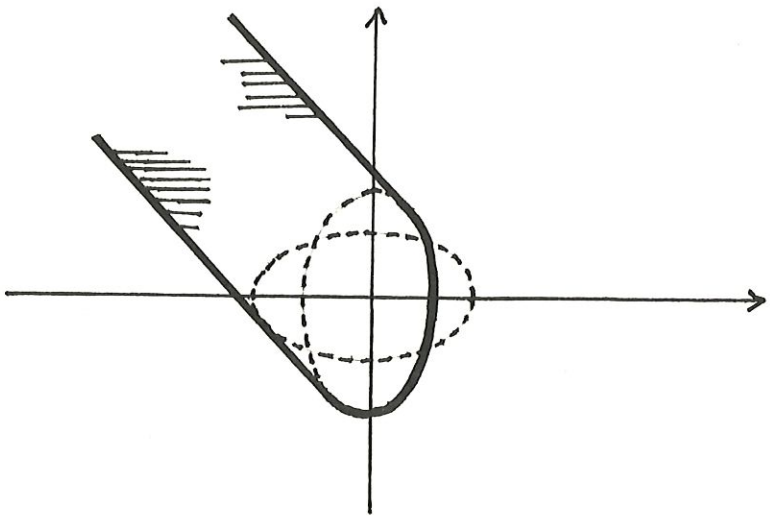


Figure 16

b) $x_0^* = (0,2)$:

De façon tout à fait analogue au cas a), nous obtenons

$$d \in N(\partial f(x_0), x_0^*) \Leftrightarrow d_1 \leq d_2$$

$$f''(x_0, x_0^*; d) = \begin{cases} f''(x_0; d) = f_2''(x_0; d) = 4d_1^2 + 2d_2^2 & \text{si } d_1 \leq d_2 \\ +\infty & \text{sinon} \end{cases}$$

$$\partial^2 f(x_0, x_0^*) = \{x_0^{**} | < x_0^{**}, d >= \sqrt{4d_1^2 + 2d_2^2} \ \forall\, (d_1, d_2) = d \text{ avec } d_1 \leq d_2\}$$

ce qui donne géométriquement,

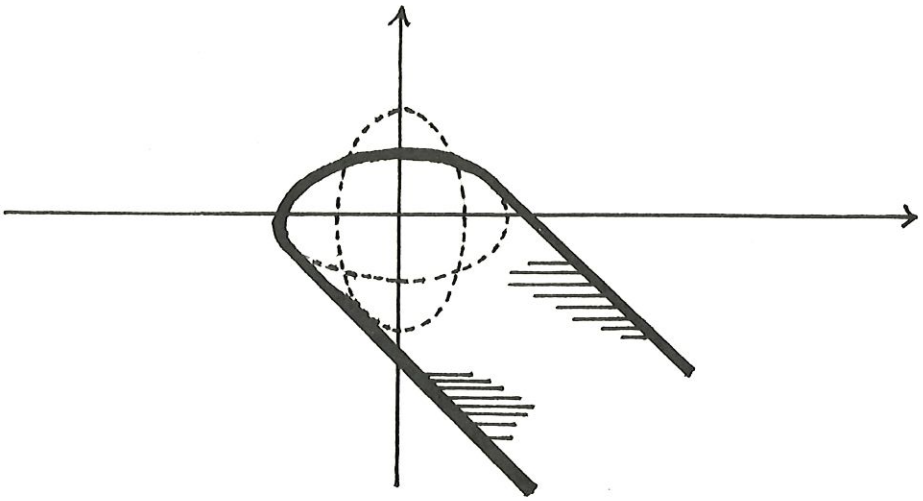


Figure 17

c) $x_0^* = (\alpha, 2-\alpha)$ avec $\alpha \in]0,2[$:

Ici,

$$\begin{aligned} d \in \dot{N}(\partial f(x_0), x_0^*) &\Leftrightarrow \alpha d_1 + (2-\alpha)d_2 = \max(2d_1, 2d_2) \\ &\Leftrightarrow d_1 = d_2 \end{aligned}$$

Par conséquent,

$$\partial^2 f(x_0, x_0^*) = \{x_0^{**} | < x_0^{**}, d > \leq \sqrt{6d_1^2} \ \forall\ (d_1, d_2) = d \text{ avec } d_2 = d_1\}$$

Cette condition sur $x_0^{**} = (x_{01}, x_{02})$ peut encore s'écrire

$$(x_{01} + x_{02})d_1 \leq \sqrt{6}\ |d_1| \ \forall\ d_1$$

et ainsi

$$\partial^2 f(x_0, x_0^*) = \{x_0^{**} | -\sqrt{6} \leq x_{01} + x_{02} \leq \sqrt{6}\}$$

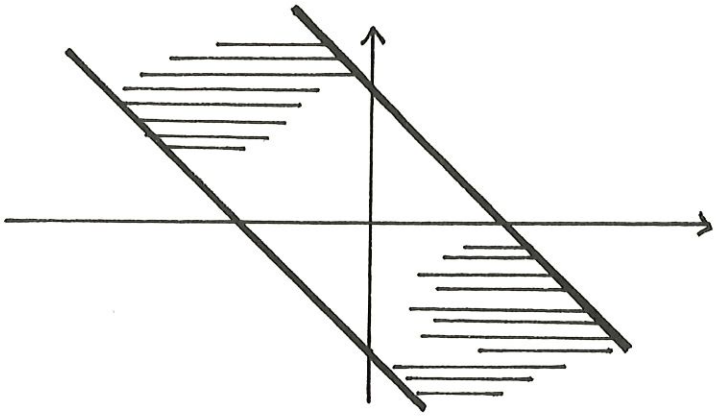


Figure 18

Nous considérons finalement l'intersection des différentiels seconds de f en (x_0, x_0^*) $\forall\ x_0^* \in \partial f(x_0)$ et obtenons donc pour $\partial^2 f(x_0)$

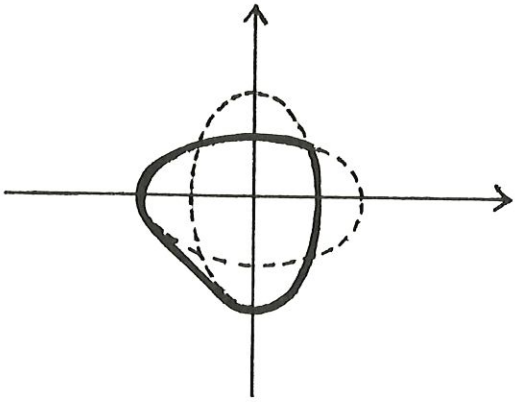


Figure 19

■

Exemple 4 : Considérons $f = ||\cdot||$ la norme euclidienne dans $\mathbb{R}^n$ et $x_0 = 0$. Nous obtenons immédiatement que

$$\begin{aligned} \partial f(x_0) &= \{x_0^* \in \mathbb{R} \mid \ ||x|| \geq < x_0^*, x > \ \forall\ x \in \mathbb{R}^n\} \\ &= \{x_0^* \in \mathbb{R}^n \mid \ ||x_0^*|| \leq 1\} \end{aligned}$$

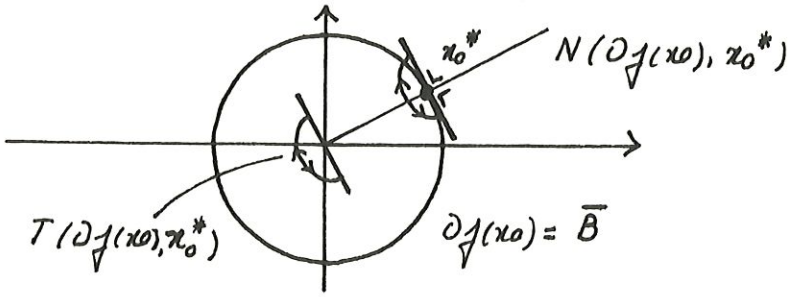


Figure 20

Dès lors, si $||x_0^*|| < 1$, nous pouvons affirmer [cfr proposition 1.1] que $\partial^2 f(x_0, x_0^*) = I\!R^n$. Par contre, si $||x_0^*|| = 1$, nous déduisons

$$\begin{aligned} f''(x_0; d) &= \lim_{\lambda \to 0^+} \frac{2}{\lambda} \left[\frac{f(x_0 + \lambda d) - f(x_0)}{\lambda} - f'(x_0; d) \right] \\ &= \lim_{\lambda \to 0^+} \frac{2}{\lambda} \left[\frac{||\lambda d||}{\lambda} - \lim_{\lambda' \to 0^+} \frac{||\lambda' d||}{\lambda'} \right] \\ &= 0 \end{aligned}$$

et

$$f''(x_0, x_0^*; d) = \delta(I\!R_+\{x_0^*\} | d)$$

où

$$I\!R_+\{x_0^*\} = \{d \in I\!R^n \mid \exists \lambda \geq 0 \quad d = \lambda x_0^*\}$$

Ainsi,

$$\begin{aligned} \partial^2 f(x_0, x_0^*) &= \{x_0^{**} | < x_0^{**}, d > \leq 0 \ \ \forall\, d = \lambda x_0^*\} \\ &= T(\partial f(x_0), x_0^*) \end{aligned}$$

et donc

$$\partial^2 f(x_0) = \bigcap_{||x_0^*||=1} T(\partial f(x_0), x_0^*) = \{0\}$$

■

3 Résultats complémentaires et méthode de Newton

3.1 Différentiels seconds de deux fonctions comparables dans un voisinage de x_0

Soient deux fonctions convexes f et g de $\mathbb{R}^n$ dans $\overline{\mathbb{R}}$ telles que

$$\begin{cases} f(x_0) = g(x_0) \\ f(x) \leq g(x) \text{ dans un voisinage de } x_0 \end{cases}$$

Si f et g sont deux fois différentiables au point x_0, nous savons que

$$\nabla f(x_0) = \nabla g(x_0) \text{ et } < \nabla^2 f(x_0)d, d > \leq < \nabla^2 g(x_0)d, d > \ \forall\ d$$

Envisageons à présent le cas où ni f, ni g, ne sont différentiables en x_0. Nous avons alors

$$\begin{aligned} \partial f(x_0) &= \{x^* | f(x) \geq f(x_0) + < x^*, x - x_0 > \ \forall\ x \in \mathbb{R}^n\} \\ &\subseteq \partial g(x_0) = \{x^* | g(x) \geq g(x_0) + < x^*, x - x_0 > \ \forall\ x \in \mathbb{R}^n\} \end{aligned}$$

La propriété suivante compare les différentiels seconds de f et de g.

Proposition 3.1.1 :

$$\partial^2 f(x_0, x_0^*) \subseteq \partial^2 g(x_0, x_0^*) \ \forall\ x_0^* \in \partial f(x_0) \tag{13}$$

D'où,

$$\partial^2 f(x_0) \subseteq \bigcap_{x_0^* \in\ bd\partial f(x_0) \cap bd\partial g(x_0)} \partial^2 g(x_0, x_0^*) \tag{14}$$

en prenant comme convention que $\bigcap_{\emptyset}$ *représente l'espace* $\mathbb{R}^n$ *tout entier.*

Démonstration :

Soit x_0^* un point arbitraire de $\partial f(x_0)$. Puisque $\partial f(x_0) \subset \partial g(x_0)$, nous obtenons que

$$\begin{aligned} N(\partial g(x_0), x_0^*) &= \{d \mid \forall\ x^* \in \partial g(x_0)\ \ 0 \geq < d, x^* - x_0^* >\} \\ &\subseteq N(\partial f(x_0), x_0^*) \end{aligned}$$

Prenons d dans $N(\partial g(x_0), x_0^*)$ ce qui correspond à prendre la paire associée (x_0^*, d). En vertu de l'inclusion précédente, (x_0^*, d) constitue encore une paire associée pour f. De sorte que,

$$\begin{aligned} < x_0^*, d > &= f'(x_0; d) \\ &= g'(x_0; d) \end{aligned}$$

Ainsi, $\forall\ d \in N(\partial g(x_0), x_0^*)$

$$\begin{aligned} f''(x_0; d) &= \lim_{\lambda \to 0+} \frac{2}{\lambda} \left[\frac{f(x_0 + \lambda d) - f(x_0)}{\lambda} - f'(x_0; d) \right] \\ &\leq g''(x_0; d) = \lim_{\lambda \to 0+} \frac{2}{\lambda} \left[\frac{g(x_0 + \lambda d) - f(x_0)}{\lambda} - f'(x_0; d) \right] \end{aligned}$$

D'où,

$$f''(x_0, x_0^*; d) \leq g''(x_0, x_0^*; d) \ \ \forall\ d$$

L'inclusion (13) est alors prouvée.
Le résultat (14) suit de la définition même de $\partial^2 f(x_0)$ en se rappelant que seuls les points frontières jouent un rôle significatif pour l'intersection. ∎

3.2 Développements du second ordre

Nous fournissons maintenant des estimations du second ordre de $f(x_0 + \lambda d)$ en termes de $\partial^2 f(x_0, x_0^*)$ et $\partial^2 f(x_0)$.

Proposition 3.2.1 :

$\forall\ \lambda > 0$

a)

$$f(x_0 + \lambda d) \geq f(x_0) + \lambda < x_0^*, d > + \frac{\lambda^2}{2} [\delta^*(\partial^2 f(x_0, x_0^*) | d)]^2 + o(\lambda^2) \qquad (15)$$

$\forall\ x_0^* \in \partial f(x_0)$ tel que (x_0^*, d) forme une paire associée.
Nous avons l'égalité quand $f''(x_0, x_0^*; \cdot)$ est semi-continue inférieurement en d.

b)

$$f(x_0 + \lambda d) \geq f(x_0) + \lambda \delta^*(\partial f(x_0) | d) + \frac{\lambda^2}{2} [\delta^*(\partial^2 f(x_0) | d)]^2 + o(\lambda^2) \qquad (16)$$

L'égalité s'obtient lorsque $f''(x_0; \cdot)$ est convexe.

Démonstration :

Prouvons tout d'abord le résultat auxiliaire suivant

$$cl\sqrt{g(d)} = \sqrt{cl\ g(d)} \tag{17}$$

pour toute fonction g convexe, propre et positive.
En effet, faisant appel à la proposition A.II.7, il nous suffit de démontrer que

$$\begin{aligned}\sqrt{\lim_{d'\to d} \inf\ g(d')} &= \lim_{d'\to d} \inf\ \sqrt{g(d')} \\ &= \sup_{\varepsilon>0} \inf_{|d'-d|<\varepsilon} \sqrt{g(d')}\end{aligned}$$

Dès lors, il nous reste à établir que

$$\inf_{|d'-d|\leq\varepsilon} \sqrt{g(d')} = \sqrt{\inf_{|d'-d|\leq\varepsilon} g(d')}$$

(Un raisonnement similaire nous autorisera à permuter le supremum et la racine).
Nous avons premièrement

$$\sqrt{g(d')} \geq \sqrt{\inf_{d'\in\bar{B}(d,\varepsilon)} g(d')} \quad \forall\ d' \in \bar{B}(d,\varepsilon)$$

et donc

$$\inf_{d'\in\bar{B}(d,\varepsilon)} \sqrt{g(d')} \geq \sqrt{\inf_{d'\in\bar{B}(d,\varepsilon)} g(d')}$$

Ensuite, montrons que

$$\forall\ \beta > 0\ \ \exists\ d' \in \bar{B}(d,\varepsilon)\ \ \sqrt{g(d')} < \sqrt{\inf_{d'\in\bar{B}(d,\varepsilon)} g(d')} + \beta$$

Comme l'infimum est le plus grand des minorants, nous obtenons

$$\forall\ \delta > 0\ \ \exists d'' \in \bar{B}(d,\varepsilon)\ \ g(d'') < \inf_{d'\in\bar{B}(d,\varepsilon)} g(d') + \delta$$

ce qui implique que

$$\begin{aligned}\sqrt{g(d'')} &< \sqrt{\inf_{d'\in\bar{B}(d,\varepsilon)} g(d') + \delta} \\ &\leq \sqrt{\inf_{d'\in\bar{B}(d,\varepsilon)} g(d')} + \sqrt{\delta}\end{aligned}$$

Ceci clôture la preuve de l'égalité (17). Venons-en à l'énoncé même.

a) Nous savons déjà, par définition de la dérivée directionnelle du second ordre de f en x_0, que

$$f(x_0 + \lambda d) = f(x_0) + \lambda f'(x_0; d) + \frac{\lambda^2}{2} f''(x_0; d) + o(\lambda^2) \quad \forall\, \lambda > 0 \qquad (18)$$

Puisque (x_0^*, d) constitue une paire associée

$$f'(x_0; d) =< x_0^*, d >$$

et

$$f''(x_0; d) = f''(x_0, x_0^*; d)$$

Or,

$$\begin{aligned} [\delta^*(\partial^2 f(x_0, x_0^*) \mid d)]^2 &= \left[cl\sqrt{f''(x_0, x_0^*; d)}\right]^2 \\ &= \left[\sqrt{cl\ f''(x_0; x_0; d)}\right]^2 \qquad \text{[cfr (17)]} \\ &= cl\ f''(x_0, x_0^*; d) \end{aligned}$$

donc,

$$\begin{aligned} f''(x_0; d) &= f''(x_0, x_0^*; d) \\ &\geq cl\ f''(x_0, x_0^*; d) \qquad \text{[cfr proposition A.II.6]} \\ &= [\delta^*(\partial^2 f(x_0, x_0^*) \mid d)]^2 \end{aligned}$$

De cette façon, l'inégalité (15) est obtenue.
Si l'on suppose en outre que $f''(x_0, x_0^*; d)$ est semi-continue inférieurement, alors, par la propriété A.II.5, $f''(x_0, x_0^*; d)$ est fermée et nous pouvons écrire

$$\begin{aligned} f''(x_0; d) = f''(x_0, x_0^*; d) &= cl\ f''(x_0, x_0^*; d) \\ &= [\delta^*(\partial^2 f(x_0, x_0^*) \mid d)]^2 \end{aligned}$$

Ainsi, l'inégalité fait place à une égalité dans (15).

b) Puisque $f'(x_0; d) = \delta^*(\partial f(x_0) \mid d)$ [cfr A.IV.5], il nous suffit de montrer, relativement à (18), que

$$f''(x_0; d) \geq [\delta^*(\partial^2 f(x_0)|d)]^2 = \left[\sup_{x \in \partial^2 f(x_0)} < x, d >\right]^2$$

l'égalité remplaçant l'inégalité dans le cas où $f''(x_0;.)$ est convexe.
Nous savons déjà que

$$\forall\, x \in \partial^2 f(x_0) \quad < x, d > \leq \sqrt{f''(x_0; d)} \quad \forall\, d$$

Donc,

$$\sup_{x \in \partial^2 f(x_0)} \quad < x, d > \leq \sqrt{f''(x_0; d)} \;\forall\, d$$

comme $0 \in \partial^2 f(x_0)$, nous obtenons

$$0 \leq \left[\sup_{x \in \partial^2 f(x_0)} \quad < x, d > \right]^2 \leq f''(x_0; d)$$

De plus, si $f''(x_0;.)$ est convexe

$$\begin{aligned}
[\delta^*(\partial^* f(x_0) \mid d)]^2 &= \left[(\sqrt{f''(x_0; d)})^{**} \right]^2 \\
&= \left[cl\, \sqrt{f''(x_0; d)} \right]^2 \qquad \text{[cfr A.III.3]} \\
&= \left[\sqrt{cl\, f''(x_0; d)} \right]^2 \qquad \text{[cfr(17)]} \\
&= cl\, f''(x_0; d)
\end{aligned}$$

Puisque $f''(x_0; d)$ est une fonction convexe de domaine $\mathbb{R}^n$ et à valeurs réelles, elle est continue, donc semi-continue inférieurement. En se référant alors à la proposition A.II.5, la thèse suit. ∎

Au moyen de cette proposition, nous pouvons généraliser la méthode de Newton décrite dans le chapitre d'introduction en réécrivant le problème (P) sous la forme

$$(Q_1) \equiv \begin{cases} \min & f'(x_0; d) + \frac{1}{2}[\delta^*(\partial^2 f(x_0) \mid d)]^2 \\ \text{sous} & d \in \mathbb{R}^n \end{cases}$$

A nouveau, nous prenons $x_0 \in \mathbb{R}^n$ comme point initial et définissons le point de l'itération suivante par $x_1 = x_0 + d_0$. Le problème (Q_1) présente l'avantage d'être convexe.

Nous pouvons envisager une interprétation géométrique dans le cas où f est différentiable. (Q_1) devient alors :

$$(Q_1) \equiv \begin{cases} \min & \nabla f(x_0)^T d + \frac{1}{2}[\delta^*(\partial^2 f(x_0) \mid d)]^2 \\ \text{sous} & d \in I\!R^n \end{cases}$$

$$\overset{\text{not}}{=} \begin{cases} \min & F(d) \\ \text{sous} & d \in I\!R^n \end{cases}$$

Considérons une solution d_0^*.
La condition nécessaire et suffisante d'optimalité du problème convexe (Q) [cfr A.VI.2] s'écrit ici

$$0 \in \partial F(d_0^*)$$

c'est-à-dire, en vertu des propriétés élémentaires du sous-différentiel [cfr A.IV.6]

$$0 \in \nabla f(x_0) + \delta^*(\partial^2 f(x_0) \mid d_0^*) \;\; \partial \delta^*(\partial^2 f(x_0) \mid .)(d_0^*)$$

Nous considérons que $\nabla f(x_0) \neq 0$ (sans quoi x_0 serait minimum puisque f est convexe). Dès lors, $d_0^* \neq 0$ et

$$\delta^*(\partial^2 f(x_0) \mid d_0^*) = \max_{x \in \partial^2 f(x_0)} < x, d_0^* > > 0$$

lorsque l'on suppose $\partial^2 f(x_0)$ non réduit à l'origine.
D'où,

$$\frac{-\nabla f(x_0)}{\delta^*(\partial^2 f(x_0) \mid d_0^*)} \in \partial \delta^*(\partial^2 f(x_0) \mid .)(d_0^*)$$

Nous appliquons maintenant le théorème A.IV.8 à la fonction indicatrice $\delta(\partial^2 f(x_0) \mid .)$ qui est bien convexe, propre, semi-continue inférieurement (puisque $\partial^2 f(x_0)$ est un convexe fermé).
Nous obtenons ainsi,

$$d_0^* \in \partial \delta(\partial^2 f(x_0) \mid .) \left(\frac{-\nabla f(x_0)}{\delta^*(\partial^2 f(x_0) \mid d_0^*)} \right)$$

où

$$\frac{-\nabla f(x_0)}{\delta^*(\partial^2 f(x_0) \mid d_0^*)} \in \text{dom } \delta(\partial^2 f(x_0) \mid .) = \partial^2 f(x_0)$$

Par conséquent,

$$d_0^* \in N \left(\partial^2 f(x_0), \frac{-\nabla f(x_0)}{\delta^*(\partial^2 f(x_0) \mid d_0^*)} \right)$$

Comme $d_0^* \neq 0$, nous avons que

$$\frac{-\nabla f(x_0)}{\delta^*(\partial^2 f(x_0) \mid d_0^*)} \in bd\ \partial f(x_0)$$

Nous représentons ci-dessous l'ensemble des directions possibles pour d_0^*.

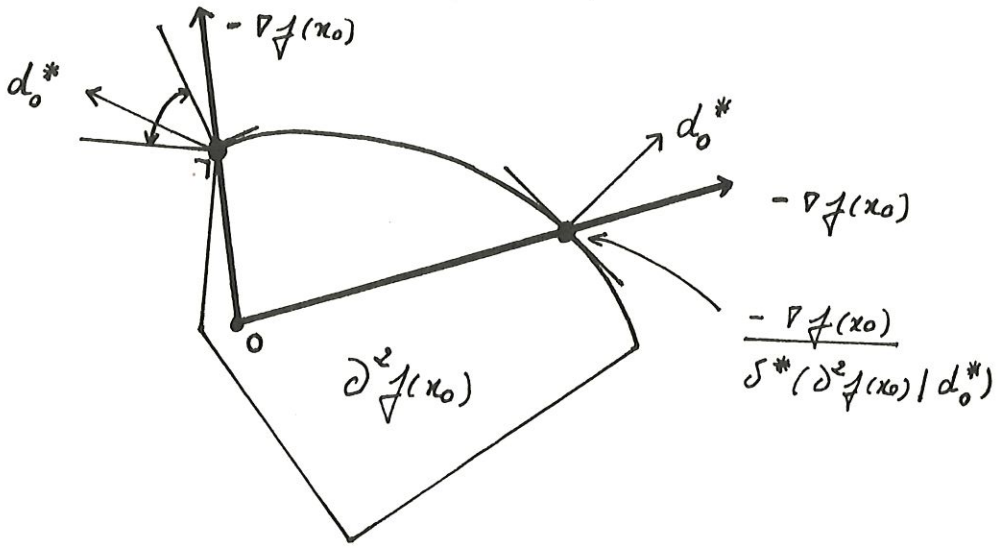


Figure 21

CHAPITRE III

REGLES DE CALCUL

Nous désirons, à présent, trouver les expressions des différentiels du second ordre d'une fonction f construite à partir d'autres fonctions f_i dont les propriétés sont mieux connues. Il s'agira donc d'exprimer $\partial^2 f$ en terme des $\partial^2 f_i$ plus faciles à calculer.
Pour ce faire, nous nous limiterons à trois opérations préservant la convexité, à savoir :

1 La multiplication d'une fonction par un nombre réel positif (situé à gauche de la fonction)

Rappelons que la multiplication à gauche par le scalaire $\alpha \geq 0$, produit la nouvelle fonction $\alpha f : x \to (\alpha f)x = \alpha f(x)$.

Proposition 1.1 :

$\forall\ \alpha \geq 0$, *nous avons que*

$$\partial^2(\alpha f)(x_0, x_0^*) = \sqrt{\alpha}\ \ \partial^2 f(x_0, x_0^*)\ \ \forall\ x_0^* \in \partial f(x_0)$$

et

$$\partial^2(\alpha f)(x_0) = \sqrt{\alpha}\ \ \partial^2 f(x_0)$$

Démonstration :

Constatons tout d'abord que

$$\begin{aligned}(\alpha f)'(x_0; d) &= \lim_{\lambda \to 0^+} \frac{(\alpha f)(x_0 + \lambda d) - (\alpha f)(x_0)}{\lambda} \quad \forall\ d \in I\!R^n \\ &= \alpha f'(x_0; d)\end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}(\alpha f)''(x_0;d) &= \lim_{\lambda\to 0^+}\frac{1}{\lambda}[(\alpha f)'(x_0+\lambda d;d)-(\alpha f)'(x_0;d)]\\ &= \alpha f''(x_0;d)\end{aligned}$$

Dès lors, nous obtenons que

$$\begin{aligned}\partial^2(\alpha f)(x_0,x_0^*) &= \{x_0^{**}|<x_0^{**},d>\leq\sqrt{(\alpha f)''(x_0,x_0^*;d)}\ \ \forall\ d\}\\ &= \{x_0^{**}|<x_0^{**},d>\leq\sqrt{(\alpha f)''(x_0;d)}\ \ \forall\ d\in N(\partial f(x_0),x_0^*)\}\\ &= \{x_0^{**}|<\frac{x_0^{**}}{\sqrt{\alpha}},d>\leq\sqrt{f''(x_0;d)}\ \ \forall\ d\in N(\partial f(x_0),x_0^*)\}\\ &= \{\sqrt{\alpha}z^{**}|\ z^{**}\in\partial^2 f(x_0,x_0^*)\}\\ &= \sqrt{\alpha}\ \partial^2 f(x_0,x_0^*)\end{aligned}$$

D'autre part,

$$\begin{aligned}\partial^2(\alpha f)(x_0) &= \{x_0^{**}|<x_0^{**},d>\leq\sqrt{(\alpha f)''(x_0;d)}\ \ \forall\ d\}\\ &= \{\sqrt{\alpha}z^{**}|\ z^{**}\in\partial^2 f(x_0)\}\\ &= \sqrt{\alpha}\ \partial^2 f(x_0)\end{aligned}$$

■

2 La somme de fonctions

Soient deux fonctions convexes f_1 et f_2, définies sur $\mathbb{R}^n$ et à valeurs dans $\mathbb{R}$ pour lesquelles la dérivée directionnelle du second ordre existe et est finie pour tout x_0 et tout d. Considérons la somme

$$f_1+f_2 : x\to(f_1+f_2)(x)=f_1(x)+f_2(x)$$

Nous savons que

$$(f_1+f_2)'(x_0;d)=f_1'(x_0;d)+f_2'(x_0;d)\quad\forall\ d \tag{19}$$

et

$$\partial(f_1+f_2)(x_0)=\partial f_1(x_0)+\partial f_2(x_0) \tag{20}$$

Proposition 2.1 :

Si

$$x_0^* = x_0^{*1} + x_0^{*2} \in \partial(f_1 + f_2)(x_0) \ \forall\ x_0^{*1} \in \partial f_1(x_0) \ et \ \forall\ x_0^{*2} \in \partial f_2(x_0)$$

Alors

a) $N(\partial(f_1 + f_2)(x_0), x_0^*) = N(\partial f_1(x_0), x_0^{*1}) \cap N(\partial f_2(x_0), x_0^{*2})$

b) $(f_1 + f_2)''(x_0; d) = f_1''(x_0; d) + f_2''(x_0; d)$

de sorte que $f_1 + f_2 = f$ constitue bien une fonction convexe, définie sur $\mathbb{R}^n$ et telle que $f''(x_0; d)$ existe et est finie.

Démonstration :

a) $d \in N(\partial(f_1 + f_2)(x_0), x_0^*)$

$\Leftrightarrow (x_0^*, d)$ forme une paire associée pour $f_1 + f_2$

$$\Leftrightarrow x_0^* \in \partial(f_1 + f_2)(x_0) \text{ et } < x_0^*, d > \ = \ (f_1 + f_2)'(x_0; d)$$
$$= f_1'(x_0; d) + f_2'(x_0; d) \quad \text{[cfr(19)]}$$

Comme $x_0^{*i} \in \partial f_i(x_0) \quad i = 1, 2$ nous avons aussi

$$< x_0^{*i}, d > \leq f_i'(x_0; d) \qquad \text{[voir proposition A.IV.3]}$$

Dès lors,

$$< x_0^{*i}, d > = f_i'(x_0; d)$$

et ainsi $d \in N(\partial f_1(x_0), x_0^{*1})$ et $d \in N(\partial f_2(x_0), x_0^{*2})$.
L'autre inclusion est tout aussi immédiate, en vertu de (19) et de (20).

b) Ce résultat s'obtient aisément au moyen de la définition de $(f_1, f_2)''(x_0; d)$ [cfr(2)] et de l'égalité (19). ∎

Proposition 2.2 :

Sous les mêmes hypothèses que la propriété 2.1, nous avons

$$\frac{1}{\sqrt{2}}\{\partial^2 f_1(x_0, x_0^{*1}) + \partial^2 f_2(x_0, x_0^{*2})\} \subseteq \partial^2(f_1 + f_2)(x_0, x_0^*) \qquad (21)$$
$$\subseteq \sqrt{2}\ Co\ \{\partial^2 f_1(x_0, x_0^{*1}) \cup \partial^2 f_2(x_0, x_0^{*2})\}$$

et

$$\frac{1}{\sqrt{2}}\{\partial^2 f_1(x_0) + \partial^2 f_2(x_0)\} \subseteq \partial^2(f_1 + f_2)(x_0) \tag{22}$$

Démonstration :

Des résultats de la proposition 2.1, nous pouvons déduire que

$$(f_1 + f_2)''(x_0, x_0^*; d) = f_1''(x_0, x_0^{*1}; d) + f_2''(x_0, x_0^{*2}; d) \ \ \forall\, d \tag{23}$$

De plus, nous avons

$$\begin{aligned}
\partial^2(f_1 + f_2)(x_0, x_0^*) &= \{x_0^{**} | < x_0^{**}, d > \leq \sqrt{(f_1 + f_2)''(x_0, x_0^*; d)} \ \ \forall\, d\} \\
&= \partial\sqrt{(f_1 + f_2)''(x_0, x_0^*; .)}(0) \\
&= \partial\sqrt{f_1''(x_0, x_0^{*1}; .) + f_2''(x_0, x_0^{*2}; .)}(0)
\end{aligned}$$

en vertu de l'égalité (23).
Par ailleurs, nous utilisons l'inégalité générale

$$\sqrt{a+b} \leq \sqrt{2} \ \ \mathrm{Max}\{\sqrt{a}, \sqrt{b}\} \ \ \forall\, a \geq 0, b \geq 0$$

de sorte que

$$\begin{aligned}
&\partial\sqrt{f_1''(x_0, x_0^{*1}; .) + f_2''(x_0, x_0^{*2}; .)}(0) \\
&= \{x_0^{**} | < x_0^{**}, d > \leq \sqrt{f_1''(x_0, x_0^{*1}; .) + f_2''(x_0, x_0^{*2}; .)} \ \ \forall\, d\} \\
&\subseteq \{x_0^{**} | < x_0^{**}, d > \leq \sqrt{2} \ \ \mathrm{Max}\{\sqrt{f_1''(x_0, x_0^{*1}; .)}, \sqrt{f_2''(x_0, x_0^{*2}; .)}\} \ \forall\, d\} \\
&= \sqrt{2} \ \ \partial[\mathrm{Max}\{\sqrt{f_1''(x_0, x_0^{*1}; .)}, \sqrt{f_2''(x_0, x_0^{*2}; .)}\}](0) \\
&= \sqrt{2}\ Co\ [\partial\sqrt{f_1''(x_0, x_0^{*1}; .)}(0) \cup \partial\sqrt{f_2''(x_0, x_0^{*2}; .)}(0)]
\end{aligned}$$

la dernière ligne pouvant s'établir au moyen de la proposition A.IV.6.b.
Nous obtenons par conséquent

$$\begin{aligned}
\partial^2(f_1 + f_2)(x_0, x_0^*) &\subseteq \sqrt{2}\ Co[\partial\sqrt{f_1''(x_0, x_0^{*1}; .)}(0) \cup \partial\sqrt{f_2''(x_0, x_0^{*2}; .)}] \\
&= \sqrt{2}\ Co[\partial^2 f_1(x_0, x_0^{*1}) \cup \partial^2 f_2(x_0, x_0^{*2})]
\end{aligned}$$

Concernant l'estimation inférieure de $\partial^2(f_1 + f_2)(x_0, x_0^*)$, nous nous servons cette fois de l'inégalité générale

$$\frac{1}{\sqrt{2}}(\sqrt{a} + \sqrt{b}) \leq \sqrt{a+b} \ \ \forall\, a \geq 0, b \geq 0$$

provenant du caractère concave de la fonction racine carrée.

Dès lors,

$$\begin{aligned}
\partial^2(f_1+f_2)(x_0,x_0^*) &= \partial\sqrt{(f_1+f_2)''(x_0,x_0^*;.)}(0) \\
&= \partial\sqrt{f_1''(x_0,x_0^{*1};.)+f_2''(x_0,x_0^{*2};.)}(0) \qquad \text{[cfr (23)]} \\
&\supseteq \frac{1}{\sqrt{2}}\,\partial\,(\sqrt{f_1''(x_0,x_0^{*1};.)}+\sqrt{f_2''(x_0,x_0^{*2};.)}](0) \\
&= \frac{1}{\sqrt{2}}[\partial\sqrt{f_1''(x_0,x_0^{*1};.)}(0)+\partial\sqrt{f_2''(x_0,x_0^{*2};.)}(0)] \\
&= \frac{1}{\sqrt{2}}[\partial^2 f_1(x_0,x_0^{*1})+\partial^2 f_2(x_0,x_0^{*2})]
\end{aligned}$$

Finalement, nous prouvons l'inclusion (22).

Soit

$$z^{**} \in \frac{1}{\sqrt{2}}\{\partial^2 f_1(x_0)+\partial^2 f_2(x_0)\}$$

c'est-à-dire

$$z^{**} \in \frac{1}{\sqrt{2}}\{\partial^2 f_1(x_0,x_0^{*1})+\partial^2 f_2(x_0,x_0^{*2})\} \quad \forall\, x_0^{*1}\in\partial f_1(x_0), x_0^{*2}\in\partial f_2(x_0)$$

Il suit ainsi de la première inclusion de (21) que

$$z^{**} \in \partial^2(f_1+f_2)(x_0,x_0^*) \;\; \forall\, x_0^* \in \partial(f_1+f_2)(x_0)$$

donc,

$$z^{**} \in \partial^2(f_1+f_2)(x_0)$$

■

Nous donnons à présent des estimations inférieures de $\partial^2(f_1+f_2)(x_0,x_0^*)$ et $\partial^2(f_1+f_2)(x_0)$ du type enveloppe convexe.

Proposition 2.3 :

Considérons

$$x_0^* = x_0^{*1}+x_0^{*2} \in \partial(f_1+f_2)(x_0) \;\; \forall\, x_0^{*1}\in\partial f_1(x_0), x_0^{*2}\in\partial f_2(x_0)$$

Nous avons alors

$$Co\{\partial^2 f_1(x_0,x_0^{*1})\cup\partial^2 f_2(x_0,x_0^{*2})\} \subseteq \partial^2(f_1+f_2)(x_0,x_0^*)$$

et

$$Co\{\partial^2 f_1(x_0) \cup \partial^2 f_2(x_0)\} \subseteq \partial^2(f_1 + f_2)(x_0)$$

Démonstration :

Au moyen de l'inégalité

$$\sqrt{f_1''(x_0, x_0^{*1}; .)} \leq \sqrt{(f_1 + f_2)''(x_0, x_0^*; .)}$$

nous déduisons

$$\begin{aligned}
\partial^2 f_1(x_0, x_0^{*1}) &= \partial\sqrt{f_1''(x_0, x_0^{*1}; .)}(0) \\
&= \{x_0^{**} | < x_0^{**}, d > \leq \sqrt{f_1''(x_0, x_0^{*1}; d)} \ \ \forall\ d\} \\
&\subseteq \partial\sqrt{(f_1 + f_2)''(x_0, x_0^*; .)}(0) \\
&= \partial^2(f_1 + f_2)(x_0, x_0^*)
\end{aligned}$$

De façon similaire, nous obtenons

$$\partial^2 f_2(x_0, x_0^{*2}) \subseteq \partial^2(f_1 + f_2)(x_0, x_0^*)$$

Comme le différentiel du second ordre de $(f_1 + f_2)$ en (x_0, x_0^*) est un ensemble convexe, nous retrouvons la première inclusion annoncée.
Quant à la seconde, elle s'obtient en considérant l'inégalité

$$f_1''(x_0; .) \leq (f_1 + f_2)''(x_0; .)$$

de laquelle nous tirons

$$\begin{aligned}
\partial^2 f_1(x_0) &= \partial\sqrt{f_1''(x_0; .)}(0) \\
&= \{x_0^{**} | < x_0^{**}, d > \leq \sqrt{f_1''(x_0, d)} \ \ \forall\ d\} \\
&\subseteq \partial\sqrt{(f_1 + f_2)''(x_0; .)}(0) \\
&= \partial^2(f_1 + f_2)(x_0)
\end{aligned}$$

De manière analogue, nous pouvons montrer que

$$\partial^2 f_2(x_0) \subseteq \partial^2(f_1 + f_2)(x_0)$$

Ainsi, $\partial^2(f_1 + f_2)(x_0)$, ensemble convexe, contient bien l'enveloppe convexe de $U_i \partial^2 f_i(x_0) \quad i = 1, 2.$ ∎

Proposition 2.4 :

Si $f_1''(x_0;.)$ et $f_2''(x_0;.)$ sont des fonctions convexes, nous avons

$$\partial^2(f_1+f_2)(x_0) \subseteq \partial^2 f_1(x_0) + \partial^2 f_2(x_0)$$
$$\partial^2(f_1+f_2)(x_0) \subseteq \sqrt{2}\, Co\{\partial^2 f_1(x_0) \cup \partial^2 f_2(x_0)\}$$

Démonstration :

En effet,

$$\begin{aligned}
\partial^2(f_1+f_2)(x_0) &= \partial\sqrt{(f_1+f_2)''(x_0;.)}(0) \\
&= \partial\sqrt{f_1''(x_0;.)+f_2''(x_0;.)}(0) \\
&\subseteq \partial[\sqrt{f_1''(x_0;.)}+\sqrt{f_2''(x_0;.)}](0) \\
&= \partial\sqrt{f_1''(x_0;.)}(0) + \partial\sqrt{f_2''(x_0;.)}(0) \\
&= \partial^2 f_1(x_0) + \partial^2 f_2(x_0)
\end{aligned}$$

Par ailleurs, au moyen de l'inégalité générale,

$$\sqrt{a+b} \leq \sqrt{2}\ \max(\sqrt{a},\sqrt{b}) \quad \forall\ a \geq 0, b \geq 0$$

nous obtenons

$$\begin{aligned}
\partial^2(f_1+f_2)(x_0) &= \partial\sqrt{f_1''(x_0;.)+f_2''(x_0;.)}(0) \\
&\subseteq \sqrt{2}\ \partial\ [\mathrm{Max}\{\sqrt{f_1''(x_0;.)},\sqrt{f_2''(x_0;.)}\}](0) \\
&= \sqrt{2}\ Co\ [\partial\sqrt{f_1''(x_0;.)}(0) \cup \partial\sqrt{f_2''(x_0;.)}(0)]
\end{aligned}$$

en nous référant à la proposition A.IV.6.b.
La thèse s'en suit. ∎

L'exemple que nous considérons maintenant nous montre l'importance de l'hypothèse de convexité des $f_i''(x_0;d) \quad i=1,2$ dans la proposition précédente.

Exemple 5 :

Soient $f_1, f_2 : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ définies par

$$f_1(x) = \mathrm{Max}\{\frac{1}{2}x_1^2 + \frac{1}{2}x_2^2 + x_1, 0\}$$
$$f_2(x) = \mathrm{Max}\{\frac{1}{2}x_1^2 + \frac{1}{2}x_2^2 - x_1, 0\}$$

Pour éviter les calculs inutiles, reprenons les résultats de l'exemple 1 vu précédemment et adaptons les à notre contexte au moyen des règles de calcul étudiées ci-dessus.
Nous avons considéré, dans l'exemple 1, la fonction

$$\begin{array}{rccl} f: & I\!R^2 & \to & R \\ & x=(x_1,x_2) & \rightsquigarrow & f(x)=\max\{0,x_1^2+x_2^2+2x_1\} \end{array}$$

Dès lors, nous obtenons, pour $x_0=(0,0)$,

$$f_1(x)=\frac{1}{2}f(x)=(\frac{1}{2}f)(x)$$

$$\begin{aligned} f_1'(x_0;d) &= (\frac{1}{2}f)'(x_0;d)=\frac{1}{2}f'(x_0;d) \\ &= \frac{1}{2}\begin{cases} 0 & \text{si } d_1\le 0 \\ 2d_1 & \text{si } d_1>0 \end{cases} \\ &= \begin{cases} 0 & \text{si } d_1\le 0 \\ d_1 & \text{si } d_1>0 \end{cases} \\ &= \max(0,d_1) \\ f_1''(x_0;d) &= (\frac{1}{2}f)''(x_0;d)=\frac{1}{2}f''(x_0;d) \\ &= \frac{1}{2}\begin{cases} 2d_1^2+2d_2^2 & \text{si } d_1\ge 0 \\ 0 & \text{si } d_1<0 \end{cases} \\ &= \begin{cases} d_1^2+d_2^2 & \text{si } d_1\ge 0 \\ 0 & \text{si } d_2<0 \end{cases} \\ \partial^2 f_1(x_0) &= \partial^2(\frac{1}{2}f)(x_0)=\frac{1}{\sqrt{2}}\,\partial^2 f(x_0) \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}}\{[0,\sqrt{2}]\times\{0\}\} \\ &= [0,1]\times\{0\} \end{aligned}$$

Calculons à présent le différentiel second de f_2 en x_0.

$$f_2(x)=\frac{1}{2}\max\{x_1^2+x_2^2-2x_1,0\}=\frac{1}{2}F(x)$$

par notation.
Dès lors,

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{sur le disque } (x_1-1)^2 + x_2^2 - 1 \leq 0 \\ x_1^2 + x_2^2 - 2x_1 & \text{ailleurs} \end{cases}$$

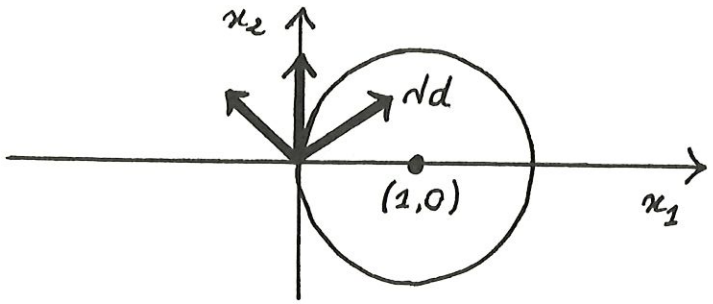


Figure 22

Nous avons

$$\begin{aligned} F'(x_0; d) &= \lim_{\lambda \to 0^+} \frac{F(x_0 + \lambda d) - F(x_0)}{\lambda} \\ &= \lim_{\lambda \to 0^+} \frac{F(\lambda d)}{\lambda} \end{aligned}$$

a) Si $d_1 > 0$:

Pour λ assez petit, nous avons que $(\lambda d_1, \lambda d_2)$ appartient au disque $\mathcal{D}$ dont l'équation est reprise ci-dessus. Ainsi,

$$F(\lambda d) = 0 \text{ et}$$
$$F'(x_0; d) = 0$$

b) Si $d_1 \leq 0$:

Cette fois, $(\lambda d_1, \lambda d_2)$ ne se trouve plus dans le disque $\mathcal{D}$ et nous obtenons

$$\begin{aligned} F'(x_0; d) &= \lim_{\lambda \to 0^+} \frac{\lambda^2 d_1^2 + \lambda^2 d_2^2 - 2\lambda d_1}{\lambda} \\ &= -2d_1 \end{aligned}$$

Dès lors,

$$\begin{aligned} f_2'(x_0; d) &= (\frac{1}{2}F)'(x_0; d) = \frac{1}{2}F'(x_0; d) \\ &= \frac{1}{2}\max(0, -2d_1) \\ &= \max(0, -d_1) \end{aligned}$$

De même,

$$f_2''(x_0;d) = (\frac{1}{2}F)''(x_0;d) = \frac{1}{2}F''(x_0;d)$$

où

$$F''(x_0;d) = \lim_{\lambda \to 0^+} \frac{2}{\lambda}\left[\frac{F(x_0+\lambda d) - F(x_0)}{\lambda} - F'(x_0;d)\right]$$

a) Si $d_1 > 0$:

$$F''(x_0;d) = \lim_{\lambda \to 0^+} \frac{2}{\lambda}[0-0] = 0$$

b) Si $d_1 \leq 0$:

$$\begin{aligned} F''(x_0;d) &= \lim_{\lambda \to 0^+} \frac{2}{\lambda}\left[\frac{\lambda^2 d_1^2 + \lambda^2 d_2^2 - 2\lambda d_1}{\lambda} - (-2d_1)\right] \\ &= \lim_{\lambda \to 0^+} 2[d_1^2 + d_2^2] \\ &= 2d_1^2 + 2d_2^2 \end{aligned}$$

Par conséquent,

$$f_2''(x_0;d) = \begin{cases} d_1^2 + d_2^2 & \text{si } d_1 \leq 0 \\ 0 & \text{si } d_1 > 0 \end{cases}$$

et

$$\begin{aligned} \partial^2 f_2(x_0) &= \{x_0^* | < x_0^*, d > \leq \sqrt{f_2''(x_0;d)} \ \forall\ d\} \\ &= \{x_0^* | < x_0^*, d > \leq \left\{ \begin{array}{ll} \sqrt{d_1^2 + d_2^2} & \text{si } d_1 \leq 0 \\ 0 & \text{si } d_1 > 0 \end{array} \right\} \ \forall\ d_2\} \end{aligned}$$

Réécrivons ces conditions pour $x_0^* = (x_{01}^*, x_{02}^*)$

$$\begin{cases} x_{01}^* d_1 + x_{02}^* d_2 \leq \sqrt{d_1^2 + d_2^2} & \text{si } d_1 \leq 0 \\ x_{01}^* d_1 + x_{02}^* d_2 \leq 0 & \text{si } d_1 > 0 \end{cases}$$

La deuxième contrainte nous donne

$$x_{01}^* \leq 0 \text{ et } x_{02}^* = 0$$

et la première nous permet d'obtenir finalement comme ensemble de solutions

$$\partial^2 f_2(x_0) = [-1, 0] \times \{0\}$$

Il nous reste ainsi à trouver le différentiel du second ordre de $(f_1 + f_2)$ au point x_0. Calculons donc

$$\begin{aligned}
(f_1 + f_2)''(x_0; d) &= f_1''(x_0; d) + f_2''(x_0; d) \\
&= \begin{cases} d_1^2 + d_2^2 \\ 0 \\ d_2^2 \end{cases} + \begin{cases} 0 & \text{si } d_1 > 0 \\ d_1^2 + d_2^2 & \text{si } d_1 < 0 \\ d_2^2 & \text{si } d_1 = 0 \end{cases} \\
&= \begin{cases} 2d_2^2 & \text{si } d_2 = 0 \\ d_1^2 + d_2^2 & \text{sinon} \end{cases}
\end{aligned}$$

de sorte que

$$\partial^2(f_1 + f_2)(x_0) = \{x_0^* | < x_0^*, d > \leq \left\{ \begin{array}{ll} \sqrt{2d_2^2} & \text{si } d_1 = 0 \\ \sqrt{d_1^2 + d_2^2} & \text{si } d_1 \neq 0 \end{array} \right\} \ \forall\ d_2\}$$

Nous réécrivons ces conditions et finalement constatons que

$$\begin{aligned}
&\{x_0^{**} = (x_{01}, x_{02}) \mid \left\{ \begin{array}{ll} x_{02} d_2 \leq \sqrt{2}\,|d_2| & \\ x_{01} d_1 + x_{02} d_2 \leq \sqrt{d_1^2 + d_2^2} & \forall\ d_1 \neq 0 \end{array} \right\} \ \forall\ d_2\} \\
&= \overline{B}
\end{aligned}$$

En effet, considérons un point $x_0^{**} = (x_{01}, x_{02})$ de $\overline{B}$ et montrons la première inégalité

a) Si $d_2 \leq 0$:

Utilisons le fait que

$$x_{02} \geq -1 \geq -\sqrt{2}$$

pour déduire

$$x_{02} d_2 \leq -\sqrt{2}\, d_2 = \sqrt{2}\,|d_2|$$

b) Si $d_2 > 0$:

Le résultat s'obtient tout aussi aisément en constatant que

$$x_{02} \leq 1 \leq \sqrt{2}$$

Concernant la deuxième inégalité, nous avons que

$$\begin{aligned} \forall\, d_1 > 0 \;\; \forall\, d_2 \;\; x_{01}d_1 + x_{02}d_2 &= < x_0^{**}, d > \\ &\leq \; ||x_0^{**}||\, ||d|| \end{aligned}$$

par l'inégalité de Cauchy-Schwarz.
Puisque $x_0^{**} \in \overline{B}$, nous obtenons alors

$$< x_0^{**}, d > \leq \; ||d|| \; = \sqrt{d_1^2 + d_2^2}$$

A présent, établissons la seconde inclusion.
Soit un point x_0^{**} vérifiant les deux inégalités ci-dessus. Envisageons l'alternative suivante :

a) Si $x_{01} \neq 0$:

Choisissons dans ce cas $d_1 = x_{01}$ et $d_2 = x_{02}$.

Nous avons dès lors,

$$x_{01}^2 + x_{02}^2 \leq \sqrt{x_{01}^2 + x_{02}^2}$$

c'est-à-dire

$$0 \leq \sqrt{x_{01}^2 + x_{02}^2} \leq 1$$

ou encore

$$x_{01}^2 + x_{02}^2 - 1 \leq 0$$

Ainsi, $x_0^{**} \in \overline{B}$.

b) Si $x_{01} = 0$:

Prenons cette fois $d_2 = x_{02}$. Par conséquent,

$$x_{02}^2 \leq \sqrt{d_1^2 + d_2^2} \quad \forall\, d_1 \neq 0$$

D'où, par passage à la limite lorsque d_1 tend vers 0,

$$x_{02}^2 \leq |x_{02}|$$

ce qui nous donne

$$|x_{02}| \leq 1$$

et donc, $x_0^{**} \in \overline{B}$. ∎

Nous observons donc bien que

$$\partial^2 f_1(x_0) + \partial^2 f_2(x_0) = [-1, 1] \times \{0\}$$

et

$$\sqrt{2}\, Co\{\partial^2 f_1(x_0) \cup \partial^2 f_2(x_0)\} = [-\sqrt{2}, \sqrt{2}] \times \{0\}$$

ne contiennent pas $\partial^2(f_1 + f_2)(x_0)$. ∎

Remarquons encore que, même dans le cas où f_1 et f_2 sont des fonctions deux fois différentiables, on n'a pas l'égalité

$$\partial^2(f_1 + f_2)(x_0) = \partial^2 f_1(x_0) + \partial^2 f_2(x_0)$$

De fait, le différentiel second $\partial^2(f_1 + f_2)(x_0)$ qui n'est autre que l'ellipsoïde $[\nabla^2(f_1+f_2)(x_0)]^{1/2}(\bar{B})$ associé à la matrice hessienne $\nabla^2(f_1+f_2)(x_0) = \nabla^2 f_1(x_0)+\nabla^2 f_2(x_0)$, est inclus (généralement strictement) dans l'addition

$$\partial^2 f_1(x_0) + \partial^2 f_2(x_0) = [\nabla^2 f_1(x_0)]^{1/2}(\bar{B}) + [\nabla^2 f_2(x_0)]^{1/2}(\bar{B})$$

Le caractère strict de cette inclusion provient du fait qu'en général, on a

$$\sqrt{a+b} < \sqrt{a} + \sqrt{b} \;\; \forall\, a \geq 0, b \geq 0$$

au lieu de l'égalité, celle-ci se produisant dans le cas particulier où $a = 0$ ou $b = 0$.
Ainsi, supposons que l'une des deux fonctions, soit f_2, soit polyédrale.
Nous obtenons dès lors que

$$\begin{aligned} \partial^2(f_1 + f_2)(x_0) &= \partial^2 f_1(x_0) + \partial^2 f_2(x_0) \\ &= \partial^2 f_1(x_0) + \{0\} \\ &= \partial^2 f_1(x_0) \end{aligned}$$

puisque

$$\begin{aligned} \sqrt{(f_1 + f_2)''(x_0, \overline{d})} &= \sqrt{f_1''(x_0; d) + f_2''(x_0; d)} \\ &= \sqrt{f_1''(x_0; d) + 0} \\ &= \sqrt{f_1''(x_0; d)} \\ &= \sqrt{f_1''(x_0; d)} + \sqrt{f_2''(x_0; d)} \end{aligned}$$

∎

3 Le maximum de fonctions

Considérons une famille finie $f_1, \cdots, f_m : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ de fonctions convexes pour lesquelles la dérivée directionnelle du second ordre, en $x_0 \in \mathbb{R}^n$ et dans la direction d, existe et est finie.
Soit alors

$$f(x) = \operatorname*{Max}_{1 \leq i \leq m} f_i(x)$$

Nous savons que

$$f'(x_0; d) = \max_{i \in I(x_0)} f_i'(x_0; d) \text{ et } \partial f(x_0) = Co\{ \bigcup_{i \in I(x_0)} \partial f_i(x_0)\}$$

où $I(x_0) = \{i |\ f_i(x_0) = f(x_0)\}$.
Concernant la dérivée directionnelle du second ordre de f, il est aussi connu que

$$f''(x_0; d) = \max_{i \in I(x_0; d)} f_i''(x_0; d) \tag{24}$$

où $I(x_0; d) = \{i \in I(x_0) |\ f_i'(x_0; d) = f'(x_0; d)\}$.
Dès lors, f devient à son tour une fonction convexe [cfr A.I.10], définie sur $\mathbb{R}^n$ et telle que sa dérivée directionnelle du second ordre $f''(x_0; d)$ existe et est finie.

Nous donnons, à présent, une estimation inférieure et supérieure de l'ensemble $\partial^2 f(x_0)$ en termes des $\partial^2 f_i(x_0)$. Cette dernière estimation nécessite la convexité des fonctions $f_i''(x_0; .)$ lorsque $i \in I(x_0)$.

Proposition 3.1 :

Nous avons que

$$\bigcap_{i \in I(x_0)} \partial^2 f_i(x_0) \subseteq \partial^2 f(x_0)$$

De plus, si tous les $f_i''(x_0; .), i \in I(x_0)$ sont convexes, alors

$$\partial^2 f(x_0) \subseteq Co\{ \bigcup_{i \in I(x_0)} \partial^2 f_i(x_0)\} \tag{25}$$

Démonstration :

Au moyen de (24), nous établissons que

$$\begin{aligned}\sqrt{f''(x_0;d)} &= \sqrt{\max_{i\in I(x_0;d)} f_i''(x_0;d)} = \max_{i\in I(x_0;d)} \sqrt{f_i''(x_0;d)} \\ &\geq \min_{i\in I(x_0;d)} \sqrt{f_i''(x_0;d)}\end{aligned}$$

Comme $I(x_0;d) \subseteq I(x_0)$, nous avons encore

$$\begin{aligned}\sqrt{f''(x_0;d)} &\geq \min_{i\in I(x_0;d)} \sqrt{f_i''(x_0;d)} \\ &\geq \min_{i\in I(x_0)} \sqrt{f_i''(x_0;d)} \ \forall\ d\end{aligned}$$

Soit

$$x_0^{**} \in \bigcap_{i\in I(x_0)} \partial^2 f_i(x_0)$$

Nous obtenons alors

$$< x_0^{**}, d > \leq \sqrt{f_i''(x_0;d)} \ \forall\ d\ \forall\ i \in I(x_0)$$

c'est-à-dire

$$< x_0^{**}, d > \leq \min_{i\in I(x_0)} \sqrt{f_i''(x_0;d)} \ \forall\ d$$

D'où,

$$< x_0^{**}, d > \leq \sqrt{f''(x_0;d)} \ \forall\ d$$

ce qui signifie que $x_0^{**} \in \partial^2 f(x_0)$.

Reprenons à nouveau l'égalité (24) pour déduire que

$$\begin{aligned}\sqrt{f''(x_0;d)} &= \max_{i\in I(x_0;d)} \sqrt{f_i''(x_0;d)} \\ &\leq \max_{i\in I(x_0)} \sqrt{f_i''(x_0;d)} \ \forall\ d\end{aligned}$$

Considérons alors les sous-différentiels au point 0 de chacune des deux fonctions situées de part et d'autre de l'inégalité.

$$\begin{aligned}\partial\sqrt{f''(x;d)}(0) &= \{x^* | \sqrt{f''(x_0;d)} \geq < x^*, d > \ \forall\ d\} \\ &\subseteq \{x^* | < x^*, d > \leq \max_{i\in I(x_0)} \sqrt{f_i''(x_0;d)} \ \forall\ d\} \\ &= \partial\{\max_{i\in I(x_0)} \sqrt{f_i''(x_0;d)}\}(0) \\ &= Co\{\bigcup_{i\in I(x_0)} \partial\sqrt{f_i''(x_0;d)}(0)\} \\ &= Co\{\bigcup_{i\in I(x_0)} \partial^2 f_i(x_0)\}\end{aligned}$$

D'où l'inclusion annoncée. ∎

L'exemple que nous considérons maintenant montre que sans l'hypothèse de convexité des $f_i''(x_0;.)$, l'inclusion (25) peut ne pas se vérifier.

Exemple 6 : Soit la fonction $f = \max\{f_1, f_2\}$ avec

$$\begin{aligned} f_1(x) &= \text{Max}\{\frac{1}{2}x_1^2 + \frac{1}{2}x_2^2 + x_1, 0\} \\ f_2(x) &= \text{Max}\{\frac{1}{2}x_1^2 + \frac{1}{2}x_2^2 + x_2, 0\} \end{aligned}$$

Nous avons déjà calculé, dans l'exemple 5,

$$\partial^2 f_1(x_0) = [0,1] \times \{0\} \quad \text{et} \quad f_1'(x_0;d) = \max(0, d_1)$$

où $x_0 = (0,0)$.
Nous obtenons donc de façon similaire (observer le rôle joué par x_1 et x_2 dans chacune des fonctions $f_i(x)$ $i = 1,2$)

$$\partial^2 f_2(x_0) = \{0\} \times [0,1] \quad \text{et} \quad f_2'(x_0;d) = \max(0, d_2)$$

Dès lors,

$$Co[\partial^2 f_1(x_0) \cup \partial^2 f_2(x_0)] = \{(z_1, z_2) \in I\!R_+^2 \mid z_1 + z_2 \leq 1\}$$

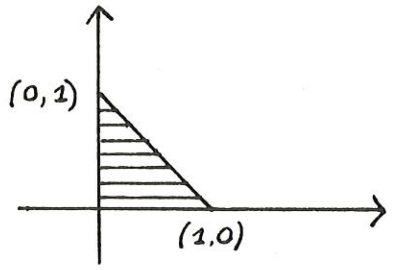


Figure 23

D'autre part, recherchons $\partial^2 f(x_0)$.
Nous constatons que

$$\begin{aligned} I(x_0) &= \{i \mid f_i(x_0) = f(x_0) = 0\} \\ &= \{1,2\} \end{aligned}$$

ce qui nous donne

$$f'(x_0;d) = \max_{i=1,2} f_i'(x_0;d)$$

$$= \begin{cases} 0 & \text{si } d_1 \leq 0 \quad \text{et } d_2 \leq 0 \\ d_2 & \text{si } d_1 \leq 0 \quad \text{et } d_2 > 0 \\ d_1 & \text{si } d_1 > 0 \quad \text{et } d_2 \leq 0 \\ \max(d_1, d_2) & \text{si } d_1 > 0 \quad \text{et } d_2 > 0 \end{cases}$$

Dès lors,

$$f''(x_0;d) = \max_{i \in I(x_0;d)} f_i''(x_0;d)$$

c'est-à-dire,

$$\begin{cases} \text{si } d_1 \leq 0 \text{ et } d_2 \leq 0, f''(x_0;d) \text{ vaut } \max(f_1''(x_0;d), f_2''(x_0;d)) \\ \text{si } d_1 \leq 0 \text{ et } d_2 > 0, f''(x_0;d) \text{ vaut } f_2''(x_0;d) \\ \text{si } d_1 > 0 \text{ et } d_2 \leq 0, f''(x_0;d) \text{ vaut } f_1''(x_0;d) \\ \text{si } d_1 > 0 \text{ et } d_2 > 0, \text{ alors } f''(x_0;d) \text{ vaut} \end{cases}$$

$$\begin{cases} f_1''(x_0;d) & \text{dans le cas où } d_1 > d_2 \\ f_2''(x_0;d) & \text{dans le cas où } d_2 > d_1 \\ \text{Max}(f_1''(x_0;d), f_2''(x_0;d)) & \text{dans le cas où } d_1 = d_2 \end{cases}$$

et, en reprenant les valeurs trouvées dans l'exemple 5 pour $f_1''(x_0;d)$, à savoir :

$$f_1''(x_0;d) = \begin{cases} d_1^2 + d_2^2 & \text{si } d_1 \geq 0 \\ 0 & \text{si } d_1 < 0 \end{cases}$$

nous déduisons

$$f_2''(x_0;d) = \begin{cases} d_1^2 + d_2^2 & \text{si } d_2 \geq 0 \\ 0 & \text{si } d_2 < 0 \end{cases}$$

et

$$f''(x_0;d) = \begin{cases} 0 & \text{si } d_1 < 0 \text{ et } d_2 < 0 \\ d_1^2 & \text{si } d_1 < 0 \text{ et } d_2 = 0 \\ d_2^2 & \text{si } d_1 = 0 \text{ et } d_2 < 0 \\ 0 & \text{si } d_1 = 0 \text{ et } d_2 = 0 \\ d_1^2 + d_2^2 & \text{sinon} \end{cases}$$

Finalement, nous obtenons

$$\partial^2 f(x_0) = \{z | < z, d > \leq \begin{cases} 0 & \text{si } d_1 < 0 \text{ et } d_2 < 0 \text{ ou} \\ & \text{si } d_1 = d_2 = 0 \\ -d_1 & \text{si } d_1 < 0 \text{ et } d_2 = 0 \ \} \\ -d_2 & \text{si } d_2 < 0 \text{ et } d_2 = 0 \\ \sqrt{d_1^2 + d_2^2} & \text{sinon} \end{cases}$$

La condition (26) implique alors $z_1 \geq 0$ et $z_2 \geq 0$ avec $z = (z_1, z_2)$.
Les conditions (27), (28) et (29) sont redondantes.
La condition (30) permet d'établir que $(z_1, z_2) \in \bar{B}$ (preuve tout à fait similaire à celle de l'exemple 5).
Dès lors,

$$\partial^2 f(x_0) = \{(z_1, z_2) \in I\!R^2_+ |\ z_1^2 + z_2^2 \leq 1\}$$

Nous constatons ainsi que

$$Co[\partial^2 f_1(x_0) \cup \partial^2 f_2(x_0)] \subset \partial^2 f(x_0)$$

où l'inclusion est stricte. ∎

De la proposition 3.1, nous déduisons immédiatement la propriété suivante.

Corollaire 3.2 :

Supposons que toutes les fonctions f_i pour $i \in I(x_0)$ soient deux fois différentiables au point x_0 et notons E_i les ellipsoïdes associés aux $\nabla^2 f_i(x_0)$. Alors, nous avons

$$\bigcap_{i \in I(x_0)} E_i \subseteq \partial^2 f(x_0) \subseteq Co\{ \bigcup_{i \in I(x_0)} E_i \}$$

Comme illustration de ce résultat, reprenons l'exemple 3 dans lequel f représente le maximum de deux fonctions quadratiques convexes sur $\mathbb{R}^2$.
Comme de telles fonctions sont deux fois différentiables, nous pouvons identifier

$$\partial^2 f_1(x_0) = [\nabla^2 f_1(x_0)]^{1/2}(\bar{B})$$
$$\text{et} \quad \partial^2 f_2(x_0) = [\nabla^2 f_2(x_0)]^{1/2}(\bar{B})$$

Nous observons ainsi, au moyen de la figure 19, que $\partial^2 f(x_0)$ contient $\partial^2 f_1(x_0) \cap \partial^2 f_2(x_0)$ et est contenu dans l'enveloppe convexe de $\partial^2 f_1(x_0) \cup \partial^2 f_2(x_0)$.

CHAPITRE IV

DERIVEES SECONDES INTERIEURE

ET EXTERIEURE

Commençons par rappeler quelques résultats fondamentaux concernant la géométrie des ellipsoïdes dans $\mathbb{R}^n$.

1 Propriétés des ellipsoïdes

La notion géométrique associée à une matrice M symétrique, semi-définie positive, de dimension $n \times n$, est l'ellipsoïde $E = M^{1/2}(\bar{B})$ où $\bar{B}$ désigne à nouveau la boule unité fermée de $\mathbb{R}^n$. La fonction d'appui de l'ellipsoïde est alors obtenue par

$$\begin{aligned}
\delta^*(E|d) &= \sup_{c \in E} < c, d > \\
&= \sup_{||b|| \leq 1} < M^{1/2}b, d > \\
&= \sup_{||b|| \leq 1} < b, M^{1/2}d > \\
&= \frac{< M^{1/2}d, M^{1/2}d >}{||M^{1/2}d||} \\
&= ||M^{1/2}d|| = \sqrt{< M^{1/2}d, M^{1/2}d >} \\
&= \sqrt{< Md, d >} \quad \forall\, d \in \mathbb{R}^n \qquad (31)
\end{aligned}$$

Réciproquement, un ellipsoïde E de centre $0 \in \mathbb{R}^n$ peut se représenter par $E = N(\bar{B})$ pour une certaine matrice N carrée de dimension n. Si N_1 et N_2 sont deux matrices associées du même ellipsoïde, c'est-à-dire $E = N_1(\bar{B}) = N_2(\bar{B})$, nous obtenons

$$N_1 N_1^T = N_2 N_2^T$$

En effet, commençons par démontrer le résultat préliminaire suivant.

$$\forall\, x \in I\!R^n \quad x^T N_1 N_1^T x = x^T N_2 N_2^T x \qquad (*)$$

Considérons ainsi un point x de $I\!R^n$. Sans perte de généralité, nous pouvons supposer qu'il est non nul. Nous avons

$$\delta^*(N_1(\overline{B})|\, x) = \sup_{b \in \overline{B}} x^T N_1 b = x^T N_1 \frac{N_1^T x}{||N_1^T x||} = ||N_1^T x||$$

et de façon identique

$$\delta^*(N_2(\overline{B})|\, x) = ||N_2^T x||$$

Dès lors, puisque $N_1(\overline{B}) = N_2(\overline{B})$, nous obtenons

$$||N_1^T x|| = ||N_2^T x||$$

et donc

$$||N_1^T x||^2 = ||N_2^T x||^2$$

c'est-à-dire $x^T N_1 N_1^T x = x^T N_2 N_2^T x$.
De plus, notant les matrices symétriques

$$\begin{aligned} N_1 N_1^T &= [a_{ij}]_{i,j} \\ N_2 N_2^T &= [b_{ij}]_{i,j} \end{aligned}$$

nous montrons

a) $a_{ii} = b_{ii} \quad \forall\, i$:

De fait, nous appliquons $(*)$ avec $x = e_i$ où e_i représente le $i^{\text{ème}}$ vecteur de la base canonique de $I\!R^n$, c'est-à-dire

$$e_i = (0, \cdots, 0, 1, 0, \cdots, 0)$$

avec le 1 situé à la i$^{\text{ème}}$ place.
Nous avons ainsi

$$x^T N_1 N_1^T x = (0, \cdots, 1, \cdots, 0)[a_{ij}] \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$= (a_{i1}, \cdots, a_{in}) \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} = a_{ii}$$

et de ma même manière

$$x^T N_2 N_2^T x = b_{ii}$$

Ce résultat est valable pour tout i , $1 \leq i \leq n$.

b) $a_{ij} = b_{ij} \quad \forall\, i \neq j$.

Cette fois, nous appliquons $(*)$ avec

$$x = (0, \cdots, 1, 0, \cdots, 0, 1, 0, \cdots, 0)$$

où les 1 situés à la $i^{\text{ème}}$ et la $j^{\text{ème}}$ place.

Nous obtenons

$$x^T N_1 N_1^T x = (a_{i1} + a_{j1}, \cdots, a_{in} + a_{jn}) \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$= a_{ii} + a_{ji} + a_{ij} + a_{jj}$$

$$= a_{ii} + a_{jj} + 2a_{ij}$$

et $x^T N_1 N_2^T x = b_{ii} + b_{jj} + 2b_{ij}$

en vertu du caractère symétrique de $N_1 N_1^T$ et $N_2 N_2^T$.

Consécutivement,

$$a_{ij} = b_{ij}$$

puisque $a_{ii} = b_{ii}$ et $a_{jj} = b_{jj}$ [voir a)] ∎

Ainsi,

$$E = M^{1/2}(\bar{B}) \text{ où } M = M^{1/2}M^{1/2} = NN^T$$

est déterminée de manière unique.
Dès lors, nous pouvons établir une bijection entre l'ensemble $\mathcal{E}$ des ellipsoïdes de $\mathbb{R}^n$, centrés en l'origine, et l'ensemble $\mathcal{P}_n$ des matrices symétriques, semi-définies positives, de dimension $n \times n$.

$$\begin{array}{rcl} \mathcal{E} & & \mathcal{P}_n \\ E = N(\bar{B}) & \longrightarrow & M = NN^T \\ E = M^{1/2}(\bar{B}) & \longleftarrow & M \end{array}$$

Lorsque M est définie positive, donc régulière, nous avons déjà noté [cfr proposition I.2.4.2.1] que

$$E = \{x \mid < M^{-1}x, x > \leq 1\}$$

Nous citons à présent un résultat établissant la connexion entre les propriétés géométriques de l'ellipsoïde E et les caractéristiques algébriques de la matrice M.

Proposition 1.1 :

Le diamètre de E, c'est-à-dire la longueur du plus grand de ses axes, est égal à $2\sqrt{\Lambda}$ où Λ désigne la plus grande valeur propre de M (positive puisque M est semi-définie positive). La largeur de E, c'est-à-dire la longueur du plus petit axe, vaut $2\sqrt{\lambda}$ où λ est la plus petite valeur propre de M.
De plus, les axes de symétrie de E correspondent aux vecteurs propres de M.

Consécutivement, si M est singulière, E n'est autre que l'illipsoïde "plat".

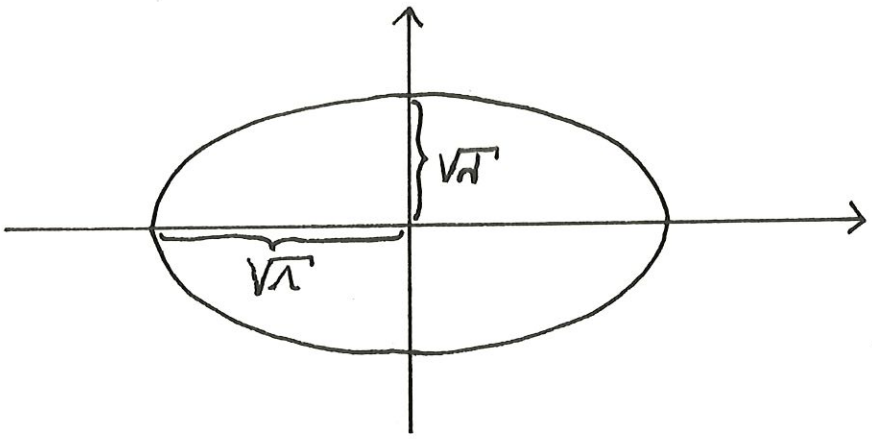


Figure 24

Nous énonçons une dernière propriété concernant le volume de l'ellipsoïde E, noté $vol\,(E)$.

Proposition 1.2 :

$$vol\,(E) = \sqrt{det\ M} \cdot vol\,(\bar{B})$$

2 Dérivées secondes intérieure et extérieure ou comment approcher $\partial^2 f(x_0)$ au moyen d'ellipsoïdes

Un résultat dû à Alexandroff (1939) affirme qu'une fonction f définie sur $\mathbb{R}^n$ est deux fois différentiable presque partout. Ainsi, pour presque tout point x_0 de $\mathbb{R}^n$, f admet un développement de Taylor du second ordre en ce sens qu'il existe une matrice symétrique, semi-définie positive $\nabla^2 f(x_0)$ vérifiant

$$\begin{aligned} f(x) &= f(x_0) + < \nabla f(x_0), x - x_0 > + \frac{1}{2} < \nabla^2 f(x_0)(x - x_0), x - x_0 > \\ &\quad + o(||x - x_0||^2) \end{aligned}$$

Pour un tel point x_0, nous avons $f''(x_0; d) =< \nabla^2 f(x_0)d, d >$ [cfr paragraphe I.2.1] et

$$\partial^2 f(x_0) = E = [\nabla^2 f(x_0)]^{1/2}(\bar{B})$$

comme vu précédemment dans la proposition II.2.5.

Par contre, lorsque l'on considère un point x_0 pour lequel $\partial^2 f(x_0)$ n'est plus un ellipsoïde, il n'y a a priori, aucune raison d'associer à cet ensemble une unique matrice, symétrique et semi-définie positive. Cependant, nous pourrons approcher le différentiel second au moyen de deux éléments choisis respectivement dans l'ensemble $\overline{\mathcal{E}}$ des ellipsoïdes centrés en 0 contenant $\partial^2 f(x_0)$ et l'ensemble $\underline{\mathcal{E}}$ des ellipsoïdes de centre 0 contenu dans $\partial^2 f(x_0)$. Le critère choisi pour prendre l'élément maximal dans $\underline{\mathcal{E}}$ et l'élément minimal dans $\overline{\mathcal{E}}$ est le volume. Nous prouvons à présent l'existence et l'unicité de tels ellipsoïdes.

Proposition 2.1 :

Il existe un et un seul ellipsoïde de volume maximal dans $\underline{\mathcal{E}}$, soit $\underline{E}$ et il existe un et un seul ellipsoïde de volume minimal dans $\overline{\mathcal{E}}$, noté $\overline{E}$.

Démonstration :

Pour simplifier la preuve, nous supposons que $\partial^2 f(x_0)$ est de dimension pleine (Si ce n'est pas le cas, le même raisonnement pourra s'effectuer dans l'enveloppe affine de $\partial^2 f(x_0)$).
Utilisant la proposition 1.2, nous observons que le volume de l'ellipsoïde $E = M^{1/2}(\overline{B})$ est proportionnel à $(det\ M)^{1/2}$. Ainsi, en supposant les matrices associées aux ellipsoïdes $\underline{E}$ et $\overline{E}$ définies positives (cas de dégénérescence écarté), nous sommes mis en présence des deux problèmes d'optimisation suivants :

$$(\underline{P}) \equiv \begin{cases} \text{Maximiser } (det\ M)^{1/2} \\ \text{sous contraintes } M \in \dot{\mathcal{P}}_n \text{ et } \{x \mid < M^{-1}x, x > \leq 1\} \subseteq \partial^2 f(x_0) \end{cases}$$

$$(\overline{P}) \equiv \begin{cases} \text{Minimiser } (det\ M)^{1/2} \\ \text{sous contraintes } M \in \dot{\mathcal{P}}_n \text{ et } \partial^2 f(x_0) \subseteq \{x \mid < M^{-1}x, x > \ |eq1\} \end{cases}$$

où $\dot{\mathcal{P}}_n$ dsigne ici l'ensemble des matrices symétriques, définies positives, de dimension $n \times n$.
Penchons-nous tout d'abord sur le problème $(\underline{P})$ et montrons la convexité de l'ensemble $\dot{\mathcal{P}}_n$.
En effet, considérons $\alpha A + (1-\alpha)B$ où $A, B \in \dot{\mathcal{P}}_n$ et $\alpha \in [0,1]$. Nous obtenons

a) le caractère symétrique de cette expression car

$$(\alpha A)^T = \alpha A^T = \alpha A$$
$$(A+B)^T = A^T + B^T = A + B$$

b) le caractère défini positif puisque

$$\begin{aligned} < [\alpha A + (1-\alpha)B]d, d > &= \alpha < Ad, d > +(1-\alpha) < Bd, d > \\ &> 0 \end{aligned}$$

De plus, si

$$\{x \mid < M^{-1}x, x > \leq 1\} = M^{1/2}(\bar{B}) \subseteq \partial^2 f(x_0)$$

et

$$\{x \mid < N^{-1}x, x > \leq 1\} = N^{1/2}(\bar{B}) \subseteq \partial^2 f(x_0)$$

Alors

$$\begin{aligned} \{x \mid < [\alpha M + (1-\alpha)N]^{-1}x, x > \leq 1\} &= [\alpha M + (1-\alpha)N]^{1/2}(\bar{B}) \\ &\subseteq \partial^2 f(x_0) \end{aligned}$$

pour tout $\alpha \in [0,1]$.
De fait, nous pouvons écrire

$$\begin{aligned} E &= [\alpha M + (1-\alpha)N]^{1/2}(\bar{B}) \\ &= \{x \mid < x, d > \leq \delta^*(E|d) \ \forall\ d\} \end{aligned} \tag{32}$$

Prenons alors un point arbitraire e de E. Nous avons

$$\begin{aligned} < e, d > &\leq \delta^*(E|d) = \sup_{x \in E} < x, d > \\ &= \sqrt{d^T[\alpha M + (1-\alpha)N]d} \qquad \text{[cfr (31)]} \\ &= \sqrt{\alpha d^T M d + (1-\alpha) d^T N d} \end{aligned}$$

Or,

$$\begin{aligned} M^{1/2}(\bar{B}) &= \{x \mid < x, d > \leq \delta^*(M^{1/2}(\bar{B})|d) \ \forall\ d\} \\ &= \{x \mid < x, d > \leq \sqrt{d^T M d} \ \forall\ d\} \qquad \text{[cfr (31)]} \\ &\subseteq \partial^2 f(x_0) = \{x \mid < x, d > \leq \sqrt{f''(x_0; d)} \ \forall\ d\} \end{aligned}$$

en vertu de la proposition II.2.1.
Donc,

$$\sqrt{d^T M d} \leq \sqrt{f''(x_0; d)} \ \ \forall\ d$$

et, de façon identique

$$\sqrt{d^T N d} \leq \sqrt{f''(x_0; d)} \ \ \forall\ d$$

Dès lors,

$$\begin{aligned} < e, d > &= \sqrt{\alpha d^T M d + (1-\alpha) d^T N d} \\ &\leq \sqrt{\alpha f''(x_0; d) + (1-\alpha) f''(x_0; d)} \\ &= \sqrt{f''(x_0; d)} \quad \forall\ d \end{aligned}$$

et ainsi, $e \in \partial^2 f(x_0)$, d'où l'inclusion annoncée.
Il suit que l'ensemble des contraintes (sur M) dans ($\underline{P}$) est convexe.
Par ailleurs, maximiser $(det\ M)^{1/2}$ dans ($\underline{P}$) revient à maximiser $\log(det\ M)$.
Nous montrons la concavité stricte de la fonction $M \rightarrow \log(detM)$ afin d'en déduire l'unicité de $\underline{E}$.
Nous faisons, dans ce but, appel au théorème 6 de [6, p. 63]. Celui-ci nous permet d'obtenir

$$det\ [\lambda A + (1-\lambda)B] \geq (det\ A)\lambda (det\ B)^{1-\lambda} \ \ \forall\ \lambda \in [0,1]$$

puisque A et B constituent des matrices symétriques définies positives.
Ainsi,

$$log\ det\ [\lambda A + (1-\lambda)B] \geq \lambda log\ det\ A + (1-\lambda) log\ det\ A \ \ \forall\ \lambda \in [0,1]$$

c'est-à-dire

$$log\ det\ [\lambda A + (1-\lambda)B] > \lambda log\ det\ (A) + (1-\lambda) log\ det\ (B) \ \ \forall\ \lambda \in]0,1[$$

lorsque A et B sont choisies distinctes.
Pour prouver l'existence de $\underline{E}$, nous considérons une matrice $\overline{M} \in \dot{\mathcal{P}}_n$ telle que

$$\{x|\ < (\overline{M})^{-1} x, x > \leq 1\} \subseteq \partial^2 f(x_0)$$

Une telle matrice existe car, $\partial^2 f(x_0)$ étant de dimension pleine et contenant l'origine [cfr proposition II.2.2],

$$\exists r > 0 \ \ \overline{B}(0,r) \subseteq \partial^2 f(x_0)$$

Or,

$$\overline{B}(0,r) = \{x| \ < (r^2 I)^{-1} x, x > \leq 1\}$$

où I désigne la matrice unité.
Nous pouvons dès lors prendre $\overline{M} = r^2 I$, qui constitue bien une matrice symétrique, définie positive. En conséquence, nous avons

$$\alpha \overset{\text{not}}{=} det\ \overline{M} > 0$$

Ainsi, notre problème $(\underline{P})$ est équivalent à

$$(\underline{P})^* \equiv \begin{cases} \text{Maximiser } (det\ M)^{1/2} & \\ \text{sous contraintes} & M \in \dot{\mathcal{P}}_n \\ & \{x| \ < M^{-1} x, x > \leq 1\} \subseteq \partial^2 f(x_0) \\ & det\ M \geq \alpha \end{cases}$$

Montrons que $(\underline{P})^*$ admet au moins une solution.
Nous savons tout d'abord que

$$M \rightarrow (det\ M)^{1/2}$$

est continue.
D'autre part, nous prouvons que

$$\mathcal{A} = \{M| \ M \text{ admissible pour } (\underline{P})^*\}$$

est compact.

a) $\mathcal{A}$ est fermé :

en effet, considérons la suite de matrices $(M_n) \subseteq \dot{\mathcal{P}}_n$ convergente vers M et telle que

$$[M_n]^{1/2}(\overline{B}) \subseteq \partial^2 f(x_0) \ \ \forall\ n$$

et

$$det\ M^n \geq \alpha$$

Nous désirons montrer que M est admissible pour $(\underline{P})^*$.

(i) M est symétrique car

$$M^T = (\lim_{n\to\infty} M^n)^T = \lim_{n\to\infty} (M)^T = \lim_{n\to\infty} M_n = M$$

(ii) M est semi-définie positive puisque

$$< Md, d >= \lim_{n\to\infty} < M_n d, d > \geq 0$$

par continuité du produit scalaire.

(iii) Nous avons que

$$M^{1/2}(\overline{B}) \subseteq \partial^2 f(x_0)$$

De fait, soit $z \in M^{1/2}(\overline{B})$. Nous pouvons ainsi écrire, pour $b \in \overline{B}$,

$$\begin{aligned} z &= M^{1/2}(b) = (\lim_{n\to\infty} M_n)^{1/2} b \\ &= \lim_{n\to\infty} (M_n)^{1/2} b \end{aligned}$$

Posons $z_n = [M_n]^{1/2} b \in [M_n]^{1/2}(\overline{B})$. Nous obtenons dès lors que

$$\lim_{n\to\infty} z_n = z$$

et puisque $\partial^2 f(x_0)$ est fermé [cfr proposition II.2.2], z constitue bien un de ses éléments.

(iv) Comme $M_n \to det\ M_n$ est continue, nous avons

$$det\ M = \lim_{n\to\infty} det\ M_n \geq \alpha > 0$$

D'où, M est aussi définie positive.

b) $\mathcal{A}$ est borné :

Nous cherchons donc à établir l'existence d'une constante $c > 0$ tel que
$\forall\ M \in \mathcal{A}\ \ ||M|| \leq c.$
Nous savons que

$$\begin{aligned} ||M|| &= \sup_{||x||\leq 1} < Mx, x > \\ &= \sup_{||x||\leq 1} < M^{1/2}x, M^{1/2}x > \\ &= \sup_{||x||\leq 1} ||M^{1/2}x||^2 \\ &\leq k^2 = c \end{aligned}$$

puisque $M^{1/2}(\bar{B}) \leq \partial^2 f(x_0)$ et que ce dernier ensemble est borné.

Considérons à présent le problème $(\overline{P})$ et prouvons l'existence de $\overline{E}$.
Pour ce faire, nous prenons une matrice $\overline{M} \in \dot{\mathcal{P}}_n$ telle que

$$\partial^2 f(x_0) \subseteq \{x| \ < (\overline{M})^{-1}x, x > \leq 1\}$$

Une telle matrice existe car, en vertu du caractère borné de $\partial^2 f(x_0)$,

$$\exists R > 0 \text{ tel que}$$

$$\partial^2 f(x_0) \subseteq \overline{B}(0,R) = \{x| \ < \frac{1}{R^2} Ix, x > \leq 1\} = (R^2 I)^{1/2}(\overline{B})$$

Nous pouvons alors poser $\overline{M} = R^2 I$. Il s'agit bien d'une matrice symétrique, définie positive. Il s'en suit que

$$\alpha \overset{\text{not}}{=} det\ \overline{M} > 0$$

D'autre part, puisque $\partial^2 f(x_0)$ est supposée de dimension pleine,
$\exists r > 0$ tel que

$$\overline{B}(0,r) \subseteq \partial^2 f(x_0)$$

Dès lors, pour toute matrice M admissible pour $(\overline{P})$, nous avons

$$vol\ [\overline{B}(0,r)] \leq vol\ \{x| \ < M^{-1}x, x > \leq 1\}$$

c'est-à-dire, en vertu de la proposition 1.2,

$$det\ r^2 I \leq det\ M$$

où

$$det\ r^2 I = (r^2)^n = \beta > 0$$

Consécutivement, le problème $(\overline{P})$ est équivalent à

$$(\overline{P})^* \equiv \begin{cases} \text{Minimiser } (det\ M)^{1/2} & \\ \text{sous contraintes} & M \in \dot{\mathcal{P}}_n \\ & \partial^2 f(x_0) \subseteq \{x| \ < M^{-1}x, x > \leq 1\} \\ & 0 < \beta \ \leq \ det\ M \leq \alpha \end{cases}$$

Montrons que $(\overline{P})^*$ admet au moins une solution.
Nous savons premièrement que

$$M \to (det\ M)^{1/2}$$

est continue.
Par ailleurs, nous prouvons que

$$\mathcal{B} = \{M |\ M \text{ admissible pour } (\overline{P})^*\}$$

est compact.

a) $\mathcal{B}$ est fermé :

De fait, considérons la suite de matrices $(M_n) \subseteq \dot{\mathcal{P}}_n$, convergente vers M et telle que

$$[M_n]^{1/2}(\overline{B}) \supseteq \partial^2 f(x_0)$$

et

$$det\ M_n \geq \beta$$

Nous souhaitons prouver que M est admissible pour $(\overline{P})^*$.

(i) M est symétrique car

$$M^T = (\lim_{n\to\infty} M_n)^T = \lim_{n\to\infty} (M_n)^T = \lim_{n\to\infty} M_n = M$$

(ii) M est semi-définie positive puisque

$$< Md, d > = \lim_{n\to\infty} < M_n d, d > \geq 0$$

par continuité du produit scalaire.

(iii) Nous avons que

$$\partial^2 f(x_0) \subseteq [M]^{1/2}(\overline{B})$$

En effet, soit $x^{**} \in \partial^2 f(x_0)$. Nous savons que

$$< (M_n)^{-1} x^{**}, x^{**} > \leq 1 \quad \forall\ n$$

et donc

$$< M^{-1} x^{**}, x^{**} > \leq 1$$

(iv) $M_n \to det\ M_n$ étant une fonction continue, nous avons

$$0 < \beta \leq \lim_{n\to\infty} det\ M_n = det\ M \leq \alpha$$

Ainsi, M est aussi définie positive.

b) $\mathcal{B}$ est borné :

Nous avons déjà établi que

$$\overline{B}(0,r) \subseteq \{x| \ < M^{-1}x, x > \leq 1\} \quad \forall\, M \in \mathcal{B}$$

et comme la racine carrée de la plus petite valeur propre de M représente la demi-longueur du plus petit axe de l'ellipsoïde [voir proposition 1.1], nous obtenons
$\forall\, M \in \mathcal{B}$ la plus petite valeur propre de $M \geq r^2 > 0$
Envisageons le raisonnement par l'absurde suivant.
Supposons que $\mathcal{B}$ ne soit pas borné.
Il existe dès lors une suite (M_k) dans $\mathcal{B}$ telle que

$$||M_k||_2 \to \infty$$

c'est-à-dire

$$\text{la plus grande valeur propre } \Lambda_k \text{ de } M_k \to +\infty$$

Par conséquent, puisque

$$\begin{aligned} det\ M_k &= \text{le produit de ses valeurs propres} \\ &\geq (n-1)r^2\Lambda_k \end{aligned}$$

nous obtenons que

$$det\ M_k \to +\infty$$

ce qui n'est pas possible car $det\ M_k \leq \alpha$.

Démontrons maintenant l'unicité de $\overline{E}$ en faisant de nouveau appel à un raisonnement par l'absurde.
Supposons donc que M et N sont deux solutions distinctes de $(\overline{P})$ et formons la combinaison suivante

$$[\alpha M^{-1} + (1-\alpha)N^{-1}]^{-1} \quad \forall\, \alpha \in]0,1[$$

Cette expression satisfait les contraintes imposées aux matrices de $(\overline{P})$. En effet,

(i) cette matrice est symétrique :

$$\begin{aligned} ([\alpha M^{-1} + (1-\alpha)N^{-1}]^{-1})^T &= ([\alpha M^{-1} + (1-\alpha)N^{-1}]^T)^{-1} \\ &= [\alpha (M^T)^{-1} + (1-\alpha)(N^T)^{-1}]^{-1} \\ &= [\alpha M^{-1} + (1-\alpha)N^{-1}]^{-1} \end{aligned}$$

puisque les matrices M et N sont elles-mêmes symétriques.

(ii) cette matrice est définie positive :

car si une matrice est définie positive, son inverse l'est encore et

$$\begin{aligned} < [\alpha M^{-1} + (1-\alpha)N^{-1}]d, d > &= \alpha < M^{-1}d, d > +(1-\alpha) < N^{-1}d, d > \\ &> 0 \end{aligned}$$

(iii) $\{x \mid < [\alpha M^{-1} + (1-\alpha)N^{-1}]x, x > \leq 1\} \supseteq \partial^2 f(x_0)$:

Soit un point x de $\partial^2 f(x_0)$. Comme M et N sont des éléments du domaine de $(\overline{P})$, nous avons

$$\{x \mid < M^{-1}x, x > \leq 1\} \supseteq \partial^2 f(x_0)$$

et

$$\{x \mid < N^{-1}x, x > \leq 1\} \supseteq \partial^2 f(x_0)$$

de sorte que

$$\begin{aligned} < [\alpha M^{-1} &+ (1-\alpha)N^{-1}]x, x > \\ &= \alpha < M^{-1}x, x > +(1-\alpha) < N^{-1}x, x > \\ &\leq \alpha \cdot 1 + (1-\alpha) \cdot 1 \\ &\leq 1 \end{aligned}$$

Par conséquent, l'inclusion est bien satisfaite.

De plus,

$log\ \{det\ [\alpha M^{-1} + (1-\alpha)N^{-1}]^{-1}\}$

$$\begin{aligned} &= log\ \{\frac{1}{det\ [\alpha M^{-1} + (1-\alpha)N^{-1}]}\} \\ &= -log\ det\ [\alpha M^{-1} + (1-\alpha)N^{-1}] \end{aligned}$$

et en utilisant le caractère strictement concave de la fonction $log\ det\ (\cdot)$, nous obtenons $-log\ det[\alpha M^{-1} + (1-\alpha)N^{-1}]$

$$\begin{aligned} &< -\alpha log\ det\ (M^{-1}) - (1-\alpha) log\ det\ (N^{-1}) \\ &= -\alpha log\ \frac{1}{det\ M} - (1-\alpha) log\ \frac{1}{det\ N} \\ &= \alpha log\ (det\ M) + (1-\alpha) log\ (det\ N) \end{aligned}$$

Finalement,

$$\begin{aligned} log\ \{det\ [\alpha M^{-1} + (1-\alpha)N^{-1}]^{-1}\} &< \alpha log\ (det\ M) + (1-\alpha) log\ (det\ N) \\ &= log\ (det\ M) \end{aligned}$$

puisque M et N sont solutions de $(\overline{P})$ et que trouver $\overline{E}$ revient à minimiser la fonction *log* (*det* M). D'où la contradiction attendue. ∎

Les résultats précédents conduisent aux définitions suivantes.

Nous appellerons *dérivée seconde intérieure* (respectivement *dérivée seconde extérieure*) de f au point x_0, l'unique matrice symétrique, semi-définie positive, notée $\underline{\nabla}^2 f(x_0)$ (respectivement $\overline{\nabla}^2 f(x_0)$) associée à l'unique ellipsoïde de volume maximal (minimal), centré en l'origine et contenu dans (contenant) $\partial^2 f(x_0)$.

Ainsi,

$$\underline{E} = [\underline{\nabla}^2 f(x_0)]^{1/2}(\bar{B})$$

et

$$\overline{E} = [\overline{\nabla}^2 f(x_0)]^{1/2}(\bar{B})$$

Aux points où f est deux fois différentiable, nous obtenons évidemment que

$$\overline{\nabla}^2 f(x_0) = \underline{\nabla}^2 f(x_0) = \nabla^2 f(x_0)$$

Illustrons ces notions au moyen de l'exemple 1, étudié précédemment. Nous y prenions en considération la fonction

$$f(x_1, x_2) = \max(0, x_1^2 + x_2^2 + 2x_1)$$

et avions établi que

$$\partial^2 f(x_0) = [0, \sqrt{2}] \times \{0\}$$

pour $x_0 = (0,0)$.

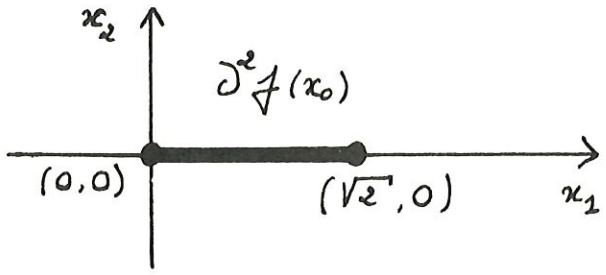


Figure 25

Calculons les matrices associées à $\underline{E}$ et $\overline{E}$.

Nous constatons que l'ellipsoïde de volume maximal, centré en l'origine et inclus dans

$\partial^2 f(x_0)$ n'est autre que l'origine. Dès lors,

$$\underline{\nabla}^2 f(x_0) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

D'autre part, l'ellipsoïde de volume minimal, centré en 0 et contenant $\partial^2 f(x_0)$ est l'ellipsoïde plat dont le diamètre vaut $2\sqrt{2}$. Ainsi, ses axes de symétrie sont les vecteurs

$$\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Comme les longueurs des axes fournissent (au facteur multiplicatif $\frac{1}{2}$ près) les racines carrées des valeurs propres [cfr proposition 1.1 dans le cas particulier où $\mathbb{R}^n = \mathbb{R}^2$], nous obtenons

$$\lambda_1 = \text{la plus petite valeur propre de } \overline{\nabla}^2 f(x_0) = 0$$
$$\lambda_2 = \text{la plus grande valeur propre de } \overline{\nabla}^2 f(x_0) = 2$$

D'où,

$$\overline{\nabla}^2 f(x_0) = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

■

Nous clôturons ce chapitre en donnant une approximation quadratique de $f(x_0 + \lambda d)$ utilisant la dérivée seconde intérieure.

Proposition 2.2 :

Soit donné x_0^* *dans* $\partial f(x_0)$. *Nous avons* $\forall\, d \in \mathbb{R}^n,\ \forall\, \lambda > 0$
$f(x_0 + \lambda d) \geq f(x_0) + \lambda < x_0^*, d > + \frac{\lambda^2}{2} < \underline{\nabla}^2 f(x_0) d, d > + o(\lambda^2)$

Démonstration :

Nous savons, par construction même de la dérivée directionnelle du second ordre de f en x_0 [cfr (1)], que

$$f(x_0 + \lambda d) = f(x_0) + \lambda f'(x_0; d) + \frac{\lambda^2}{2} f''(x_0; d) + o(\lambda^2)$$

En vertu de la proposition A.IV.3, nous déduisons

$$f(x_0 + \lambda d) \geq f(x_0) + \lambda < x_0^*, d > + \frac{\lambda^2}{2} f''(x_0; d) + o(\lambda^2)$$

En outre, par définition,

$$\underline{E} = [\underline{\nabla}^2 f(x_0)]^{1/2}(\bar{B}) \subseteq \partial^2 f(x_0)$$

c'est-à-dire [cfr (31) et (32), ainsi que la proposition II.2.1]

$$\{x \mid < x, d > \leq \sqrt{< \underline{\nabla}^2 f(x_0) d, d >} \ \forall\ d\}$$

$$\subseteq \{x \mid < x, d > \leq \sqrt{f''(x_0; d)} \ \forall\ d\}$$

ce qui implique

$$< \underline{\nabla}^2 f(x_0) d, d > \leq f''(x_0; d) \ \forall\ d$$

La thèse en découle. ∎

CHAPITRE V

RELATION ENTRE LE DIFFERENTIEL SECOND ET LA MATRICE HESSIENNE GENERALISEE D'UNE FONCTION CONVEXE $C^{1,1}$

1 Définitions et résultats préliminaires

Rappelons qu'on désigne par fonction $C^{1,1}$, une fonction différentiable dont l'application gradient, ∇f, est localement lipschitzienne. Considérant une telle fonction, l'on définit, au sens de Clarke, la matrice hessienne de f au point $x_0 \in \mathbb{R}^n$ par
$Co\{M \mid \exists x_i \to x_0$ tel que f est deux fois différentiable en x_i et $\nabla^2 f(x_i) \to M\}$.
Cet ensemble est noté $\partial_c^2 f(x_0)$.

Proposition 1.1 :

$\partial_c^2 f(x_0)$ est un ensemble convexe, compact, non vide, constitué de matrices symétriques. Lorsque f est deux fois continûment différentiable, il se réduit à $\{\nabla^2 f(x_0)\}$.

On peut également concevoir une généralisation de la dérivée directionnelle de f au point x_0, soit $f^{00}(x_0; d)$, définie par

$$f^{oo}(x_0; d) = \lim_{\substack{x \to x_0 \\ \lambda \to 0^+}} \sup \frac{< \nabla f(x + \lambda d), d > \; - \; < \nabla f(x), d >}{\lambda}$$

Celle-ci est liée à la matrice hessienne généralisée au moyen de la propriété suivante.

Proposition 1.2 :

$$\underset{M\in\partial_c^2 f(x_0)}{\text{Max}} < Md, d > = f^{00}(x_0; d) \ \forall\ d$$

(pour la preuve des deux affirmations précédentes nous nous référons à [9]).

Nous supposerons pour la suite que f est $C^{1,1}$ et convexe. Dès lors, les éléments de $\partial_c^2 f(x_0)$ deviennent semi-définis positifs (puisque limites de telles matrices) et nous pouvons associer à chacun d'eux un ellipsoïde $E = M^{1/2}(\bar{B})$ dont la fonction d'appui est $\sqrt{< Md, d >}$ [cfr chapitre 4, paragraphe 1].

2 Comparaison entre $\partial_c^2 f(x_0)$ et $\partial^2 f(x_0)$

Nous établissons tout d'abord deux propriétés desquelles nous pourrons déduire la relation souhaitée. La première compare entre elles les dérivées directionnelles du second ordre $f''(x_0; d)$ et $f^{00}(x_0; d)$. La seconde fait de $\sqrt{f^{00}(x_0; d)}$ une fonction d'appui.

Proposition 2.1 :

$$\sqrt{f^{00}(x_0; d)} \geq \sqrt{f''(x_0; d)} = \delta^*(\partial^2 f(x_0)|d) \ \forall\ d$$

Démonstration :

Nous savons en vertu de (2) que

$$\begin{aligned} f''(x_0; d) &= \lim_{\lambda\to 0^+} \frac{f'(x_0 + \lambda d; d) - f'(x_0; d)}{\lambda} \\ &= \lim_{\lambda\to 0^+} \frac{< \nabla f(x_0 + \lambda d), d > \ - \ < \nabla f(x_0), d >}{\lambda} \end{aligned}$$

lorsque f est différentiable [voir proposition A.IV.4].
Dès lors,

$$\begin{aligned} f''(x_0; d) &\leq \lim_{\substack{x\to x_0 \\ \lambda\to 0^+}} \sup \frac{< \nabla f(x + \lambda d) - \nabla f(x), d >}{\lambda} \\ &= f^{00}(x_0; d) \end{aligned}$$

par définition.
D'autre part, il résulte de la propriété A.III.4 que

$$\sqrt{f''(x_0;d)} = \delta^*(\partial^2 f(x_0) \mid d)$$

puisque $\sqrt{f''(x_0;d)}$ est convexe (f est différentiable), propre et semi-continue inférieurement. ∎

Proposition 2.2 :

$$\sqrt{f^{00}(x_0;d)} = \sup_{z \in Co\left\{ \bigcup_{M \in \partial_c^2 f(x_0)} M^{1/2}(\bar{B}) \right\}} < z, d > \quad \forall\, d$$

Démonstration :

Grâce à la proposition 1.2, il nous suffit de montrer que

$$\sqrt{\max_{M \in \partial_c^2 f(x_0)} < Md, d >} = \sup_{z \in Co(P)} < z, d >$$

où

$$P \overset{\text{not}}{=} \bigcup_{M \in \partial_c^2 f(x_0)} M^{1/2}(\bar{B})$$

a) $\forall\, M \in \partial_c^2 f(x_0)$, nous avons

$$\begin{aligned} \sqrt{< Md, d >} &= \sqrt{< M^{1/2}d, M^{1/2}d >} = ||M^{1/2}d|| \\ &= < M^{1/2} \frac{M^{1/2}d}{||M^{1/2}d||}, d > \end{aligned}$$

avec

$$M^{1/2} \frac{M^{1/2}d}{||M^{1/2}d||} \in M^{1/2}(\bar{B})$$

Ainsi,

$$\operatorname*{Max}_{M \in \partial_c^2 f(x_0)} \sqrt{< Md, d >} \leq \sup_{z \in Co(P)} < z, d >$$

b) Considérons un élément z arbitraire dans $Co(P)$. Il peut donc se représenter comme

$$z = \sum_{i=1}^{p} \lambda_i (M_i^{1/2}) b_i \qquad \lambda_i \geq 0, \sum_{i=1}^{p} \lambda_i = 1$$

où $b_i \in \bar{B}$ et $M_i \in \partial_c^2 f(x_0) \qquad \forall\, i = 1, \cdots, p.$

Dès lors,

$$\begin{aligned} < z, d > &= < \sum_{i=1}^{p} \lambda_i M_i^{1/2} b_i, d > \\ &= \sum_{i=1}^{p} \lambda_i \ < M_i^{1/2} b_i, d > \\ &= \sum_{i=1}^{p} \lambda_i < b_i, M_i^{1/2} d > \\ &\leq \sum_{i=1}^{p} \lambda_i \ ||b_i|| \ \ ||M_i^{1/2} d|| \end{aligned}$$

par l'égalité de Cauchy-Schwarz.

Comme $b_i \in \bar{B}$, nous avons encore

$$\begin{aligned} < z, d > &\leq \sum_{i=1}^{p} \lambda_i \ ||M_i^{1/2} d|| \\ &= \sum_{i=1}^{p} \lambda_i \sqrt{< M_i d, d >} \\ &\leq \max_{M \in \partial_c^2 f(x_0)} \sqrt{< Md, d >} \sum_{i=1}^{p} \lambda_i \\ &= \max_{M \in \partial_c^2 f(x_0)} \sqrt{< Md, d >} \end{aligned}$$

Par conséquent,

$$\sup_{z \in Co(P)} < z, d > \leq \operatorname{Max}_{M \in \partial_c^2 f(x_0)} \sqrt{< Md, d >}$$

■

Rassemblant les résultats des propositions 2.1 et 2.2, nous obtenons que

$$\delta^*(\partial^2 f(x_0) \mid d) \leq \delta^*(Co\{ \bigcup_{M \in \partial_c^2 f(x_0)} M^{1/2}(\bar{B})\} | d) \ \ \forall\ d$$

Nous nous référons alors à la proposition A.VIII.1 pour déduire que $\partial^2 f(x_0)$ est contenu dans l'enveloppe convexe des ellipsoïdes associés aux matrices de $\partial_c^2 f(x_0)$ c'est-à-dire

$$\partial^2 f(x_0) \subseteq Co\{ \bigcup_{M \in \partial_c^2 f(x_0)} M^{1/2}(\bar{B})\}$$

De plus, comme le membre de droite de cette inclusion est symétrique par rapport à l'origine, nous avons en fait que

$$Co\{\partial^2 f(x_0) \cup -\partial^2 f(x_0)\} \subseteq Co\{\bigcup_{M \in \partial_c^2 f(x_0)} M^{1/2}(\bar{B})\} \tag{33}$$

Nous considérons à présent un cas particulier de fonctions convexes $C^{1,1}$ pour lequel l'égalité se produit dans la relation (33).
Il s'agit de la fonction $f : I\!R^n \to I\!R$ définie par

$$f(x) = \frac{1}{2}[g^+(x)]^2$$

où g est une fonction deux fois continûment différentiable et convexe. Par la notation $g^+(x)$, nous entendons $\max(0, g(x))$.
Nous supposons que

$$\exists\ \bar{x} \text{ tel que } g(\bar{x}) < 0$$

sans quoi $f(x) = \frac{1}{2}[g(x)]^2$ constituerait une fonction deux fois continûment différentiable et l'égalité serait trivialement vérifiée [cfr proposition 1.1 et II.2.5].
Prenons un point $x_0 \in I\!R^n$ tel que $g(x_0) = 0$. Nous obtenons alors que le gradient $\nabla g(x_0) \neq 0$ puisque x_0 n'est pas minimum de g.
Nous avons que

$$\nabla f(x) = \nabla g(x)\ g^+(x) \quad \text{et} \quad \nabla f(x_0) = 0 \tag{34}$$

En effet,

a) Si $g(x) > 0$, alors

$$f(x) = \frac{1}{2}[g(x)]^2$$

et

$$\nabla f(x) = g(x)\nabla g(x)$$

b) Si $g(x) < 0$, alors

$$f(x) = 0$$

et

$$\nabla f(x) = 0$$

c) Si $g(x) = 0$, alors nous devons vérifier que pour $\nabla f(x) = \nabla g(x)\ g^+(x)$,

$$< \nabla f(x), d >= \lim_{\lambda \to 0} \frac{f(x + \lambda d) - f(x)}{\lambda}$$

Or,

$$\begin{aligned}\lim_{\lambda\to 0}\frac{f(x+\lambda d)-f(x)}{\lambda} &= \lim_{\lambda\to 0}\frac{\frac{1}{2}([g^+(x+\lambda d)]^2-[g^+(x)]^2)}{\lambda}\\ &= \lim_{\lambda\to 0}\frac{1}{2}\frac{([\max(0,g(x+\lambda d))]^2-0)}{\lambda}\end{aligned}$$

Envisageons donc l'alternative suivante.

(i) Si $g(x+\lambda d)>0$:

$$\begin{aligned}\lim_{\lambda\to 0}\frac{1}{2}\frac{[\max(0,g(x+\lambda d))]^2}{\lambda} &= \lim_{\lambda\to 0}\frac{1}{2}\frac{g^2(x+\lambda d)}{\lambda}\\ &= 0\end{aligned}$$

puisque g est continue.

(ii) Si $g(x+\lambda d)\leq 0$:

$$\lim_{\lambda\to 0}\frac{1}{2}\frac{[\max(0,g(x+\lambda d)]^2}{\lambda}=0$$

Dès lors, nous obtenons

$$\begin{aligned}<\nabla f(x),d> &= g^+(x)\ <\nabla g(x),d>\\ &= 0\\ &= \lim_{\lambda\to 0}\frac{f(x+\lambda d)-f(x)}{\lambda}\end{aligned}$$

et le résultat (34) est démontré. □

Ainsi, pour établir le caractère $C^{1,1}$ de la fonction f, il ne nous reste plus qu'à prouver la propriété locale de Lipschitz pour l'application gradient ∇f. Il nous faut donc montrer que

$$\begin{aligned}&\exists\varepsilon>0,\exists K>0 \text{ tel que } \forall\ x,y\in\bar{B}(x_1,\varepsilon)\\ &\qquad ||\nabla f(y)-\nabla f(x)||\leq K\ ||y-x||\end{aligned}\tag{35}$$

où x_1 est un point arbitraire de $\mathbb{R}^n$.
Pour ce faire, envisageons trois cas.

1. $g(x_1)>0$:

Sous cette hypothèse, nous pouvons affirmer que

$$\exists\varepsilon_1>0 \text{ tel que } \forall\ x'\in\bar{B}(x_1,\varepsilon_1)\quad g(x')>0$$

Dès lors, $g^+(x') = g(x')$ et $\forall\, x, y \in \bar{B}(x_1, \varepsilon)$, nous avons

$$\begin{aligned} ||\nabla f(y) - \nabla f(x)|| &= ||g(y)\nabla g(y) - g(x)\nabla g(x)|| \\ &\leq |g(y)||\nabla g(y) - \nabla g(x)|| + |g(y) - g(x)|\ ||\nabla g(x)|| \\ &\leq M_1 K_2 ||y - x|| + K_3 ||y - x|| M_2 \end{aligned}$$

car g est deux fois continûment différentiable, ce qui implique

(a) ∇g localement lipschitzien en x_1 :
Nous avons ainsi que

$$\begin{aligned} &\exists \varepsilon_2 > 0\ \exists K_2 > 0 \text{ tel que } \forall\, x, y \in \bar{B}(x_1, \varepsilon_2) \\ &||\nabla g(y) - \nabla g(x)|| \leq K_2\ ||y - x|| \end{aligned}$$

(b) g continue sur $\bar{B}(x_1, \varepsilon_1)$:
Donc, g est bornée c'est-à-dire

$$\exists\ M_1 > 0 \text{ tel que } \forall\, y \in \bar{B}(x_1, \varepsilon_1) \quad |g(y)| \leq M_1$$

(c) g localement lipschitzienne en x_1 :
D'où, $\exists \varepsilon_3 > 0\ \exists K_3 > 0$ tel que $\forall\, x, y \in \bar{B}(x_1, \varepsilon_3)$

$$|g(y) - g(x)| \leq K_3\ ||y - x||$$

(d) ∇g continue sur $\bar{B}(x_1, \varepsilon_1)$:
Par conséquent, ∇g est bornée. Donc,

$$\exists M_2 > 0 \text{ tel que } \forall\, x \in \bar{B}(x_1, \varepsilon_1) \quad ||\nabla g(x)|| \leq M_2$$

Finalement, nous obtenons (35) avec

$$\begin{aligned} &K = M_1 K_2 + M_2 K_3 \\ \text{et} \quad &\varepsilon = \min \varepsilon_i \quad i = 1, 2, 3 \end{aligned}$$

2. $g(x_1) < 0$:
Cette fois, $\exists \varepsilon > 0$ tel que $\forall\, x' \in \bar{B}(x_1, \varepsilon)\ \ g(x') < 0$.
Consécutivement, $g^+(x') = 0$ et $\forall\, x, y \in \bar{B}(x_1, \varepsilon)$, nous avons

$$\begin{aligned} ||\nabla f(y) - \nabla f(x)|| &= 0 \\ &\leq K||y - x|| \quad \forall\, K > 0 \end{aligned}$$

3. $g(x_1) = 0$:

Dans ce cas, $\exists \varepsilon > 0$ tel que pour x et y choisis arbitrairement dans $\bar{B}(x_1, \varepsilon)$, nous avons

(a) $g(y) \leq 0$ et $g(x) \leq 0$: cette possibilité a déjà été étudiée en 2.

ou bien

(b) $g(y) > 0$ et $g(x) > 0$: cette possibilité correspond au cas 1.

ou bien encore

(c) $g(y) > 0$ et $g(x) \leq 0$:

(Le cas $g(y) \leq 0$ et $g(x) > 0$ est similaire).

Sous cette hypothèse, nous obtenons, au moyen du théorème de la valeur intermédiaire que

$$\begin{aligned} ||\nabla f(y) - \nabla f(x)|| &= ||\nabla g(y) g(y) - 0|| \\ &= ||\nabla g(y) g(y) - \nabla g(y) g(z)|| \end{aligned}$$

où $z \in [x, y]$ est tel que $g(z) = 0$.

Ainsi,

$$\begin{aligned} ||\nabla f(y) - \nabla f(x)|| &= ||\nabla g(y)||\, |g(y) - g(z)| \\ &\leq M_5 K_5\, ||y - z|| \end{aligned}$$

puisque ∇g est continue sur $\bar{B}(x_1, \varepsilon)$ (donc bornée) et g est localement lipschitzienne en x_1.

Comme $z \in [x, y]$, nous avons encore que

$$||\nabla f(y) - \nabla f(x)|| \leq M_5 K_5\, ||y - x||$$

ce qui nous conduit à (35). □

Montrons maintenant le caractère convexe de la fonction f au moyen des deux étapes ci-dessous.

a) Si g est convexe, alors g^+ l'est également :

En effet, nous désirons établir que $\forall\, \lambda \in [0, 1]$

$$g^+(\lambda x + (1 - \lambda) y) \leq \lambda g^+(x) + (1 - \lambda) g^+(y)$$

Nous considérons dès lors les deux cas suivants.

1^0) Si $\lambda x + (1-\lambda)y \geq 0$:

Sous cette hypothèse, nous avons

$$\begin{aligned} g^+(\lambda x + (1-\lambda)y) &= g(\lambda x + (1-\lambda)y) \\ &\leq \lambda g(x) + (1-\lambda)g(y) \\ &\leq \lambda g^+(x) + (1-\lambda)g^+(y) \end{aligned}$$

car g est convexe et $g \leq g^+$.

2^0) Si $\lambda x + (1-\lambda)y < 0$:

Dans ce cas, nous avons

$$0 \leq \lambda g^+(x) + (1-\lambda)g^+(y)$$

puisque chacun des termes du membre de droite est positif.

b) Si g^+ est convexe, alors $(g^+)^2$ le devient aussi.

De fait, par la convexité de g^+, nous obtenons

$$\begin{aligned} [g^+(\lambda x + (1-\lambda)y)]^2 &\leq [\lambda g^+(x) + (1-\lambda)g^+(y)]^2 \\ &= \lambda^2[g^+(x)]^2 + (1-\lambda)^2[g^+(y)]^2 + 2\lambda(1-\lambda)g^+(x)g^+(y) \end{aligned}$$

Pour obtenir le résultat annoncé, nous devons donc prouver que

$\lambda^2[g^+(x)]^2 + (1-\lambda)^2[g^+(y)]^2 + 2\lambda(1-\lambda)g^+(x)g^+(y)$

$$-\lambda[g^+(x)]^2 - (1-\lambda)[g^+(y)]^2 \leq 0$$

c'est-à-dire

$\lambda(\lambda-1)[g^+(x)]^2 + [1 - 2\lambda + \lambda^2 - 1 + \lambda][g^+(y)]^2$

$$+2\lambda(1-\lambda)g^+(x)g^+(y) \leq 0$$

ou encore

$$\lambda(\lambda-1)([g^+(x)]^2 + [g^+(y)]^2 + 2g^+(x)g^+(y)) \leq 0$$

Comme

$$[g^+(x)]^2 + [g^+(y)]^2 + 2g^+(x)g^+(y) = [g^+(x) + g^+(y)]^2 \geq 0$$

cette inégalité est bien satisfaite. □

Ayant ainsi vérifié les caractères $C^{1,1}$ et convexe de la fonction f, nous sommes en mesure d'en calculer la matrice hesienne généralisée, au sens de Clarke, au point x_0.
Nous savons, par définition, que
$\partial_c^2 f(x_0) = Co\{M \mid \exists x_i \to x_0$ tel que f est deux fois différentiable en x_i et $\nabla^2 f(x_i) \to M\}$
Envisageons les deux possibilités suivantes.

a) Si $g(x_i) > 0$:
Alors $f(x_i) = \frac{1}{2}[g(x_i)]^2$ est deux fois différentiable et comme $\nabla f(x_i) = g(x_i)\nabla g(x_i)$, nous obtenons

$$\nabla^2 f(x_i) = g(x_i)\nabla^2 g(x_i) + \nabla g(x_i)\nabla g(x_i)^T$$

b) Si $g(x_i) < 0$:
Alors $f(x_i) = 0$ et $\nabla^2 f(x_i) = 0$.
Consécutivement, si $x_i \to x_0$, alors, comme g est deux fois continûment différentiable, nous obtenons
$\nabla^2 f(x_i) \to g(x_0)\nabla^2 g(x_0) + \nabla g(x_0)\nabla g(x_0)^T$ cas a)
ou
$\nabla^2 f(x_i) \to 0$ cas b)
Puisque $g(x_\upsilon) = 0$, nous avons finalement que

$$\begin{aligned} \partial_c^2 f(x_0) &= Co\{0, \nabla g(x_0)\nabla g(x_0)^T\} \\ &= \{\alpha \nabla g(x_0)\nabla g(x_0)^T \mid \alpha \in [0,1]\} \end{aligned}$$

□

Il suit de ce résultat que

$$f^{00}(x_0; d) = (< \nabla g(x_0), d >)^2$$

En effet, de la proposition 1.2, nous déduisons

$$\begin{aligned} f^{00}(x_0; d) &= \max_{M \in \{\alpha \nabla g(x_0)\nabla g(x_0)^T \mid \alpha \in [0,1]\}} < Md, d > \\ &= \max_{\alpha \in [0,1]} < \alpha \nabla g(x_0)\nabla g(x_0)^T d, d > \\ &= < \nabla g(x_0)\nabla g(x_0)^T d, d > \max_{\alpha \in [0,1]} \alpha \\ &= < \nabla g(x_0)^T d, \nabla g(x_0)^T d > \\ &= << \nabla g(x_0), d > , < \nabla g(x_0), d >> \\ &= < \nabla g(x_0), d > \ . \ < \nabla g(x_0), d > \\ &= (< \nabla g(x_0), d >)^2 \end{aligned}$$

□

Nous calculons à présent la dérivée directionnelle du second ordre de f en x_0 dans la direction d.
Dans ce but, nous considérons l'alternative suivante.

a) Si $\nabla g(x_0)^T d < 0$:

Alors, comme f est différentiable, nous obtenons

$$\begin{aligned} f''(x_0;d) &= \lim_{\lambda \to 0^+} \frac{\nabla f(x_0+\lambda d)^T d - \nabla f(x_0)^T d}{\lambda} \\ &= \lim_{\lambda \to 0^+} \frac{\nabla f(x_0+\lambda d)^T d}{\lambda} \qquad \text{[cfr (34)]} \\ &= 0 \end{aligned}$$

car

$$\begin{aligned} \nabla f(x_0+\lambda d)^T d &= g^+(x_0+\lambda d)\ \nabla g(x_0+\lambda d)^T d \\ &= 0 \end{aligned}$$

pour λ suffisamment petit.

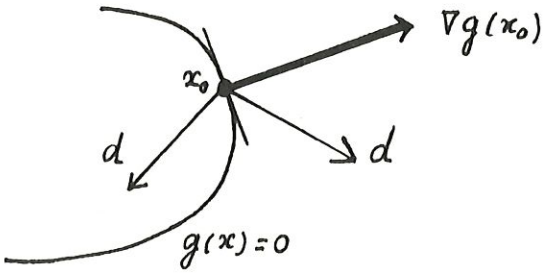


Figure 26

b) Si $\nabla g(x_0)^T d \geq 0$:

Dans ce cas,

$$\begin{aligned} f''(x_0;d) &= \lim_{\lambda \to 0^+} \frac{\nabla f(x_0+\lambda d)^T d - 0}{\lambda} \\ &= \lim_{\lambda \to 0^+} \frac{\nabla g(x_0+\lambda d)^T d\ g(x_0+\lambda d)}{\lambda} \\ &= \lim_{\lambda \to 0^+} \nabla g(x_0+\lambda d)^T d \cdot \lim_{\lambda \to 0^+} \frac{g(x_0+\lambda d) - g(x_0)}{\lambda} \end{aligned}$$

parce que $g(x_0) = 0$.

Dès lors, puisque g est deux fois continûment différentiable, nous avons

$$\begin{aligned} f''(x_0; d) &= [\nabla g(x_0)^T d][\nabla g(x_0)^T d] \\ &= (< \nabla g(x_0), d >)^2 \end{aligned}$$

Rassemblant les résultats obtenus, nous pouvons dire que

$$f''(x_0; d) = [< \nabla g(x_0), d >^+]^2 \tag{36}$$

□

Montrons finalement que

$$\partial^2 f(x_0) = Co\{0, \nabla g(x_0)\}$$

Nous savons, par la propriété A.VIII.1, qu'il nous suffit de prouver l'égalité des fonctions d'appui.

Or,

$$\begin{aligned} \sup_{x^{**} \in Co\{0, \nabla g(x_0)\}} < x^{**}, d > &= \sup_{0 \leq \alpha \leq 1} < \alpha \nabla g(x_0), d > \\ &= [< \nabla g(x_0), d >]^+ \\ &= \sqrt{f''(x_0; d)} \qquad \text{[cfr (36)]} \end{aligned}$$

Dès lors, en faisant appel à la proposition 2.1, nous obtenons l'égalité souhaitée. □

Observons maintenant que l'ellipsoïde E_α associé à $M_\alpha = \alpha^2 \nabla g(x_0) \nabla g(x_0)^T \in \partial_c^2 f(x_0)$ n'est autre que

$$Co\{-\alpha \nabla g(x_0), \alpha \nabla g(x_0)\} \tag{37}$$

En effet, pour simplifier l'écriture nous notons

$$u = \alpha \nabla g(x_0)$$

où, sans perte de généralité, nous pouvons supposer $\alpha \neq 0$.

Nous devons donc démontrer que

$$Co\{-u, u\} = [uu^T]^{1/2}(\bar{B})$$

Pour ce faire, nous considérons la matrice R de similitude (composée d'une rotation de centre 0 et d'une homothétie) telle que

$$Ru = e_1$$

où e_1 désigne le premier vecteur de la base canonique de $\mathbb{R}^n$.

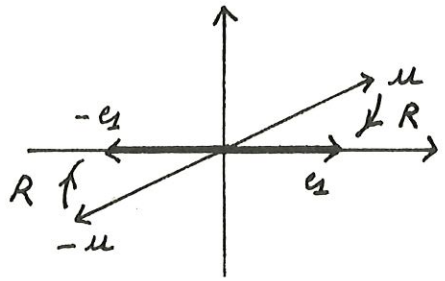


Figure 27

Comme R est inversible, il nous suffit de prouver que

$$R(uu^T)^{1/2}\overline{B} = R(Co\ \{-u, u\})$$

Nous avons, d'une part, que

$$R(Co\ \{-u, u\}) = Co\ \{-e_1, e_1\}$$

et, d'autre part, que

$$R(uu^T)^{1/2} = (Ru(Ru)^T)^{1/2}$$

En effet, par l'unicité de la racine carrée d'une matrice semi-définie positive, il est suffisant de montrer que les carrés coïncident, c'est-à-dire

$$[R(uu^T)^{1/2}]^2 = Ru(Ru)^T$$

ce qui revient à l'égalité triviale suivante :

$$R(uu^T)^{1/2}(uu^T)^{1/2}R^T = Ruu^TR^T$$

Ainsi, il nous reste à avoir que

$$(Ru(Ru)^T)^{1/2}\overline{B} = Co\ \{-e_1, e_1\}$$

Ceci s'obtient facilement en constatant que

$$\begin{aligned}(Ru(Ru)^T)^{1/2}\overline{B} &= (e_1e_1^T)^{1/2}\overline{B} \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}\overline{B}\end{aligned}$$

□

Consécutivement, nous obtenons que

$$Co\{\bigcup_{M\in\partial_c^2 f(x_0)} M^{1/2}(\bar{B}\} = Co(-\nabla g(x_0), \nabla g(x_0))$$

En effet, la première inclusion ($\supseteq$) est immédiate. Nous démontrons la seconde. Considérons tout d'abord un élément de la forme

$$z = M^{1/2}b \text{ avec } \begin{cases} ||b|| \leq 1 \\ M \in \partial_c^2 f(x_0) \end{cases}$$

Nous avons que

$$\begin{aligned} z = M^{1/2}b &= \alpha \nabla g(x_0)\nabla g(x_0)^T b \quad \text{avec } \alpha \in [0,1] \\ &\leq \nabla g(x_0)\nabla g(x_0)^T b \end{aligned}$$

Dès lors,

$$z \in (M_1)^{1/2}(\bar{B}) = Co(-\nabla g(x_0), \nabla g(x_0)) \tag{38}$$

en vertu de l'égalité (37).
Ainsi, pour

$$z \in Co\{\bigcup_{M\in\partial_c^2 f(x_0)} M^{1/2}(\bar{B})\}$$

c'est-à-dire, avec

$$\lambda_i \geq 0 \quad i = 1, \cdots, p \text{ et } \sum_{i=1}^{p} \lambda_i = 1$$

$$z = \sum_{i=1}^{p} \lambda_i (M_i)^{1/2} b_i = \sum_{i=1}^{p} \lambda_i z_i$$

où

$$z_i \in (M_i)^{1/2}(\bar{B}) \subseteq (M_1)^{1/2}(\bar{B}) = Co(-\nabla g(x_0), \nabla g(x_0)) \qquad \text{[cfr (38)]}$$

Finalement, nous obtenons, par définition de l'enveloppe convexe,

$$\sum_{i=1}^{p} \lambda_i z_i \in Co(-\nabla g(x_0), \nabla g(x_0))$$

□

D'autre part, puisque

$$\partial^2 f(x_0) = Co\{0, \nabla g(x_0)\}$$

nous déduisons que

$$Co(\partial^2 f(x_0) \cup -\partial^2 f(x_0)) = Co\{-\nabla g(x_0), \nabla g(x_0)\}$$

Ainsi, nous constatons que nous avons pu établir l'égalité dans (33). □

Nous remarquons, de plus, que les dérivées secondes intérieures et extérieures sont les suivantes

$$\underline{\nabla}^2 f(x_0) = \{0\}$$

et $$\overline{\nabla}^2 f(x_0) = \nabla g(x_0) \nabla g(x_0)^T$$

■

ANNEXE

Nous reprenons ci-dessous quelques définitions et propriétés fondamentales de l'analyse convexe du premier ordre.

I. Ensembles et fonctions convexes

I.1. Un *ensemble* $C \subset \mathbb{R}^n$ est *convexe* si $\forall\, x, y \in C \quad \forall\, \lambda \in [0,1]$, on a

$$\lambda x + (1-\lambda)y \in C$$

I.2. *Proposition* : Si $\mathcal{F}$ est une famille d'ensembles convexes de $\mathbb{R}^n$. Alors $\bigcap_{C \in \mathcal{F}} C$ est un ensemble convexe.

I.3. Soient un ensemble $S \subseteq \mathbb{R}^n$ et $\mathcal{F}$, la famille de toutes les parties convexes dans $\mathbb{R}^n$ contenant S ($\mathcal{F}$ est non vide car $\mathbb{R}^n$ y est inclus). On considère $Co(S) \equiv \bigcap_{C \in \mathcal{F}} C$ qu'on appelle *enveloppe convexe* de S. Il s'agit du plus petit ensemble convexe contenant S.

Proposition : Supposons S non vide. Nous avons que

$$x \in Co(S) \Leftrightarrow \exists x_i \in S, \exists \lambda_i \geq 0 \;\; i = 1, \cdots, k \text{ avec } \sum_{i=1}^{k} \lambda_i = 1$$

$$\text{tels que} \qquad x = \sum_{i=1}^{k} \lambda_i x_i$$

I.4. Soit $C \subset \mathbb{R}^n$, un ensemble convexe non vide dans lequel on considère un point x. Ce point est dit *point extrémal* de C si
$\forall\, y, z \in C \quad \forall\, \lambda \in [0,1]$

$$x = \lambda y + (1-\lambda)z \Rightarrow x = y = z$$

Considérons dorénavant la fonction $f : \mathbb{R}^n \to \overline{\mathbb{R}}$.

I.5. On appelle *épigraphe* de f, noté $epi\,(f)$, l'ensemble

$$\{(x, a) \subseteq \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \mid f(x) \leq a\}$$

I.6. On définit le *domaine* de f par

$$\text{dom } f = \{x \in I\!R^n \mid f(x) < +\infty\}$$

I.7. f est dite *propre* si et seulement si

$$\text{dom } f \neq \emptyset \text{ et } f(x) > -\infty \quad \forall\, x \in I\!R^n$$

I.8. f est une *fonction convexe* si et seulement si *epi* (f) est un ensemble convexe de $I\!R^{n+1}$.

I.9. *Proposition* : Si f est propre, alors

$$f \text{ convexe } \Leftrightarrow \begin{cases} \text{dom } f \text{ est convexe et} \\ \forall\, x, y \in \text{dom } f \quad \forall\, \lambda \in [0,1] \\ f(\lambda x + (1-\lambda)y) \leq \lambda f(x) + (1-\lambda) f(y) \end{cases}$$

I.10. *Proposition* : Soit $\mathcal{F}$ une famille de fonctions convexes sur $I\!R^n$.
Considérons $f(x) \equiv \sup_{g \in \mathcal{F}} g(x) \quad \forall\, x \in I\!R^n$.
Alors f est convexe.

I.11. *L'intérieur relatif* d'un ensemble est l'intérieur de cet ensemble relativement à la variété affine engendrée par cet ensemble.

I.12. *Proposition* : Toute fonction convexe est continue sur l'intérieur relatif de son domaine.

I.13. *Corollaire* : Toute fonction convexe de domaine $I\!R^n$ à valeurs dans $I\!R$ est continue.

II. Semi-continuité inférieure et fermeture

II.1. La fonction $f : I\!R^n \to \overline{I\!R}$ est *semi-continue inférieurement* en $x_0 \in I\!R^n$ si

$$\forall\, \lambda < f(x_0)\ \exists \delta > 0 \text{ tel que } \quad \forall\, x \in I\!R^n$$

$$||x - x_0|| < \delta \Rightarrow \lambda < f(x)$$

II.2. *Proposition* : Soit $\mathcal{F}$ une famille de fonctions semi-continues inférieurement sur $I\!R^n$.
Considérons

$$f(x) = \sup_{g \in \mathcal{F}} g(x) \quad \forall\, x \in I\!R^n$$

Alors f est semi-continue inférieurement.

II.3. On définit *la fermeture* de la fonction convexe propre $f : \mathbb{R}^n \to \overline{\mathbb{R}}$ par $cl : \mathbb{R}^n \to \overline{\mathbb{R}}$ telle que

$$(cl\ f)(x) = \sup_{\substack{F \text{ affine} \\ F \leq f}} F(x)$$

Nous remplacerons dorénavant $(cl\ f)(x)$ par $cl\ f(x)$ (abus de notation).

II.4. *Proposition* : $cl\ f$ est semi-continue inférieurement et

$$epi\ (cl\ f) = \overline{epi\ (f)}$$

II.5. *Proposition* : Soit $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ convexe propre.
Alors on a l'équivalence entre les propriétés suivantes

(i) f est semi-continue inférieurement

(ii) $epi\ f$ est fermé dans $\mathbb{R}^{n+1}$

(iii) $\forall\ a \in \mathbb{R}$, l'ensemble niveau $\{x \mid f(x) \leq a\}$ est fermé dans $\mathbb{R}^n$.

(iv) $cl\ f = f$ c'est-à-dire f est *fermée*

II.6. *Proposition* : $cl\ f$ est convexe et $cl\ f(x) \leq f(x) \quad \forall\ x$

II.7. *Proposition* : Soit à nouveau $f : \mathbb{R}^n \to \overline{\mathbb{R}}$ convexe, propre. Nous avons que

$$(cl\ f)(x) = \lim_{y \to x} \inf f(y)$$

II.8. *Proposition* : La fonction $f : \mathbb{R}^n \to \overline{\mathbb{R}}$ est semi-continue inférieurement si et seulement si

$$f(x) = \lim_{y \to x} \inf f(y)$$

La continuité engendre donc bien la semi-continuité inférieure.

III. Fonctions conjuguées

Soit une fonction $f : \mathbb{R}^n \to \overline{\mathbb{R}}$ propre.

III.1. On appelle *conjuguée de* f, la fonction de $\mathbb{R}^n$ dans $\overline{\mathbb{R}}$, notée f^*, définie par

$$f^*(y) = \sup_{x \in \mathbb{R}^n} \{< y, x > - f(x)\}$$

III.2. *Proposition* : f^* est convexe, propre, semi-continue inférieurement.

III.3. *Proposition* : Si f est convexe, la biconjuguée de f, soit f^{**}, satisfait l'égalité

$$f^{**} = cl\ f$$

III.4. *Proposition* : Si la fonction f est convexe, propre et semi-continue inférieurement, alors $f^{**} = f$.

IV. propriétés de la dérivée directionnelle et du sous-différentiel

Considérons la fonction $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ convexe et un point x_0 de $\mathbb{R}^n$. Les définitions ont été rappelées dans le chapitre I paragraphe 1. Nous citons ici quelques propriétés intéressantes.

IV.1. *Proposition* : $\partial f(x_0)$ est un convexe fermé, borné, non vide.

IV.2. : $d \to f'(x_0; d)$ est convexe et positivement homogène de degré un (ce qui signifie : $\forall\ \alpha \geq 0\ \ f'(x_0; \alpha d) = \alpha f'(x_0; d)$).

IV.3. *Proposition* : x^* est un sous-gradient de f en x_0, c'est-à-dire $x^* \in \partial f(x_0)$ si et seulement si $f'(x_0; d) \geq < x^*, d >\quad \forall\ d \in \mathbb{R}^n$

IV.4. *Proposition* : Si f est différentiable, alors

$$f'(x_0; d) =< \nabla f(x_0), d > \quad \text{et} \quad \partial f(x_0) = \{\nabla f(x_0)\}$$

IV.5. *Proposition* : Nous avons que

$$f'(x_0; d) = \delta^*(\partial f(x_0) \mid d) = \sup_{x^* \in \partial f(x_0)} < x^*, d >$$

Pour la définition détaillée de la fonction d'appui, nous nous référons au chapitre I paragraphe 2.4.1.

IV.6. *Proposition* : [Calculs concernant le sous-différentiel]

a) Soient $f, g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ convexes. Alors

$$\partial(f + g)(x) \supseteq \partial f(x) + \partial g(x) \quad \forall\ x \in \mathbb{R}^n$$

Si, de plus, f est continue en un point, alors nous obtenons l'égalité pour tout x.

b) Soient les fonctions $f_i : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ convexes $i = 1, \cdots, p$ et un point x de $\mathbb{R}^n$. Si f_i est continue en x $i = 1, \cdots, p$ alors

$$\partial(\sup_{1 \leq i \leq p} f_i)(x) = Co \bigcup_{i \in I(x)} \partial f_i(x) \quad \forall\, x \in \mathbb{R}^n$$

où

$$I(x) = \{i = 1, \cdots, n \mid f_i(x) = \sup_{1 \leq j \leq p} f_j(x)\}$$

c) Si $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est continûment différentiable, alors

$$\partial\,(h \circ f)(x) = h'(f(x))\partial f(x)$$

IV.7. *Proposition* : Si $f(x) = \max_{i=1,\cdots,p} f_i(x)$ où les $f_i : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ constituent des fonctions convexes, alors pour $x_0, d \in \mathbb{R}^n$, nous avons

$$f'(x_0; d) = \max_{i \in I_0} f_i'(x_0; d)$$

où

$$I(x_0) = \{i \mid f_i(x_0) = f(x_0)\}$$

IV.8. *Proposition* : Soit $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ une fonction convexe, propre, semi-continue inférieurement. Alors

$$x^* \in \partial f(x) \Leftrightarrow x \in \partial f^*(x^*)$$

V. Cônes normaux et tangents

V.1. Soit un convexe $K \subseteq \mathbb{R}^n$ et un point $x \in K$
Le *cône normal* à K en x, noté $N(K, x)$ est défini par

$$N(K, x) = \partial\delta(K \mid .)(x)$$

où $\delta(K \mid .)$ désigne la fonction indicatrice de K [voir chapitre I paragraphe 2.4.1]. Ainsi,

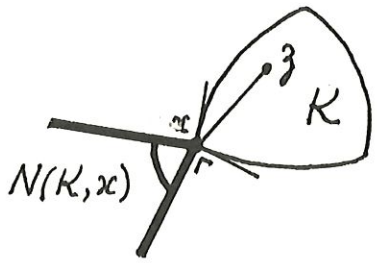
$$x^* \in \partial\delta(K \mid .)(x) \Leftrightarrow \forall\, z \in \mathbb{R}^n\ \delta(K \mid z) \geq \delta(K \mid x) + < x^*, z - x >$$

et, puisque $x \in K$

$$x^* \in \partial\delta(K \mid .)(x) \Leftrightarrow \forall\, z \in \mathbb{R}^n\ \delta(K \mid z) \geq 0 + < x^*, z - x >$$

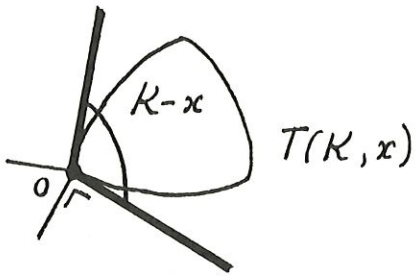
c'est-à-dire

$$x^* \in \partial\delta(K \mid .)(x) \Leftrightarrow \ \forall\, z \in K \ \ 0 \geq < x^*, z - x >$$



I.2. Le *cône tangent* à K en x *est défini par*

$$T(K,x) = \overline{\bigcup_{h>0} \frac{1}{h}(K-x)}$$



Nous avons $T(K,x)^- = N(K,x) \quad \forall\, x \in K$
où $A^- = \{x \in I\!R^n \mid < x, a > \leq 0 \quad \forall\, a \in A\}$.

VI. Propriétés extrémales des fonctions convexes

Considérons le problème suivant

$$\begin{cases} \text{Min} \quad f(x) \\ \text{sous} \quad x \in I\!R^n \end{cases}$$

lorsque $f : I\!R^n \to I\!R \cup \{+\infty\}$ est une fonction convexe.

VI.1. *Proposition* : Si f est propre et si x_0 est un point minimum local de f sur $I\!R^n$, alors x_0 est un point minimum global de f sur $I\!R^n$.

VI.2. *Proposition* : Soit $x_0 \in \mathbb{R}^n$. Nous avons que f atteint son minimem sur $\mathbb{R}^n$ en $x_0 \Leftrightarrow 0 \in \partial f(x_0)$.

VII. Les ellipsoïdes

Les définitions et propriétés fondamentales, liées à la géométrie des ellipsoïdes dans $\mathbb{R}^n$, ont été rappelées dans le chapitre IV paragraphe 1.

VIII. Compléments théoriques

VIII.1. *Proposition* : Soient A, B deux parties convexes fermées de $\mathbb{R}^n$

Si $\forall\, d \in \mathbb{R}^n$

$$\sup_{x^* \in A} < x^*, d > \leq \sup_{x^* \in B} < x^*, d >$$

Alors $A \subseteq B$.

REFERENCES

[1] BECKENBACH and R. BELLMAN, Inequalities, Springer Verlag, Berlin (1965), p. 63, theorem 6.

[2] H. BUSEMANN, Convex surfaces, Interscience Tracts in Pure and Applied Mathematics 6, Interscience Publishers, Inc., New York (1958), chapitre 1, paragraphe 2, (2.10) theorem.

[3] M. GRÖTSCHEL, L. LOVASZ and A. SCHRIJVER, Geometric algorithms and combinatorial optimization, Springer Verlag, Berlin (1988), p. 66.

[4] J.-B. HIRIART-URRUTY, *A new set-valued second order derivative for convex functions*, in J.-B. Hiriart Urruty, ed., Proceedings of the FERMAT days, North Holland (1986), p. 157-182.

[5] J.-B. HIRIAT-URRUTY, and A. SEEGER, *Calculus rules on a new set-valued second order derivative for convex functions*, preprint Laboratoire d'Analyse Numérique, Université Paul Sabatier, Toulouse (1985).

[6] J.-B. HIRIAT-URRUTY, J.-J. STRODIOT and V.H. NGUYEN, *Generalized Hessian matrix and second-order optimality conditions for problems with $C^{1,1}$ data*, Applied Mathematics and Optimization, 11 (1984), p. 43-56.

[7] R.T. ROCKAFELLAR, Convex Analysis, princeton University Press (1970).

[8] A. SEEGER, *Analyse du second ordre de problèmes non-différentiables*, Thèse, Université Paul Sabatier (1986), chapitres B.1 et B.2.

[9] J. VAN TIEL, Convex Analysis : An Introductory Text, Wiley (1984).