



## THESIS / THÈSE

### MASTER EN SCIENCES MATHÉMATIQUES

#### Caractérisation spectrale de l'opérateur de Koopman pour un équilibre non hyperbolique

Rafiki Lulihoshi, Félicien

*Award date:*  
2018

*Awarding institution:*  
Universite de Namur

[Link to publication](#)

#### General rights

Copyright and moral rights for the publications made accessible in the public portal are retained by the authors and/or other copyright owners and it is a condition of accessing publications that users recognise and abide by the legal requirements associated with these rights.

- Users may download and print one copy of any publication from the public portal for the purpose of private study or research.
- You may not further distribute the material or use it for any profit-making activity or commercial gain
- You may freely distribute the URL identifying the publication in the public portal ?

#### Take down policy

If you believe that this document breaches copyright please contact us providing details, and we will remove access to the work immediately and investigate your claim.



Université de Namur  
Faculté des sciences

---

Caractérisation spectrale de  
l'opérateur de Koopman pour un  
équilibre non hyperbolique

Mémoire présenté pour l'obtention du grade académique  
de master 60 en sciences mathématiques

Rafiki Lulihoshi Félicien

Août 2018



# Université de Namur

## Faculté des sciences

---

### Caractérisation spectrale de l'opérateur de Koopman pour un équilibre non hyperbolique

Mémoire présenté pour l'obtention du grade académique  
de master 60 en sciences mathématiques

Rafiki Lulihoshi Félicien

Promoteur : Alexandre Mauroy

Août 2018

---

## Remerciements

Nous tenons à remercier les personnes qui, de loin ou de près, ont contribué à la réalisation de ce travail. Nous pensons premièrement à notre promoteur, le professeur Alexandre Mauroy, dont l'expérience, la disponibilité et les remarques constructives nous ont été de grande valeur.

Nous adressons également notre parfaite gratitude à notre bienfaiteur, à l'Université de Namur et à l'Institut Supérieur Pédagogique de Bukavu (ISP-Bukavu).

Nous restons reconnaissant à nos parents, nos frères et sœurs, à notre chère « dulcinée » Z. Rosine, à nos amis et connaissances plus particulièrement aux familles Mac et Gaston, J. Buhendwa, C. Mugisho Zagabe, G. Hounsou,...

---

## Résumé

De nos jours, la notion de système dynamique s'étend de plus en plus à tous les domaines. Plusieurs problèmes (phénomènes) de la vie courante évoluent au cours du temps et peuvent être modélisés par des équations différentielles. Les scientifiques s'intéressent à l'étude de la stabilité de ces modèles.

Cette question est déjà abordée par des outils classiques (linéarisation autour de l'équilibre, ...) et cela pour des systèmes hyperboliques et des cycles limites. La linéarisation ne peut pas être utilisée pour étudier la stabilité d'un système dynamique non hyperbolique (un système dont au moins une des valeurs propres de la jacobienne est à partie réelle nulle), [1, p.19,135].

On souhaite donc étudier la stabilité des tels systèmes sans les linéariser localement, ce qui peut être réalisé au travers les propriétés spectrales de l'opérateur de Koopman. L'objectif de ce mémoire est ainsi d'étudier le spectre de l'opérateur de Koopman associé à des systèmes non hyperboliques et de calculer numériquement ses fonctions propres.

Nous avons appliqué l'opérateur de Koopman (son générateur infinitésimal) à un système dynamique (non linéaire) non hyperbolique pour étudier son spectre en considérant différents espaces des fonctions observables. Nous avons par la suite développé une méthode numérique pour approximer l'opérateur de Koopman par une matrice de grande taille dans une base finie (base des monômes ou base de Fourier). La matrice obtenue dans la base de Fourier a été utilisée pour calculer numériquement les approximations des fonctions propres généralisées.

## Abstract

Nowadays, the concept of dynamic system extends more and more to all fields. Several problems (phenomena) of everyday life evolve over time and can be modeled by differential equations. Scientists are interested in the study of the stability of these models. This question is already addressed by classical tools (linearization around the equilibrium, ...) in the case of hyperbolic systems and limit cycles. Linearization techniques cannot be used to study the stability of a non-hyperbolic dynamical system (a system for which at least one of the eigenvalues of the Jacobian is a real zero part), [1, p.19,135].

We want to study the stability of such systems without linearizing them locally and this can be done through the spectral properties of the Koopman operator. The purpose of this thesis is to study the spectrum of the Koopman

---

operator associated with non-hyperbolic systems and to numerically compute its eigenfunctions.

We applied the Koopman operator (its infinitesimal generator) to a non-hyperbolic (nonlinear) dynamic system to study its spectrum by considering different spaces of the observable functions. We then developed a numerical method to approximate the Koopman operator by a large matrix in a finite basis (basis of monomials or Fourier basis). The matrix obtained in the Fourier basis was used to numerically compute the approximations of the generalized eigenfunctions.

# Table des matières

<b>1</b>	<b>Introduction</b>	<b>6</b>
<b>2</b>	<b>Généralités sur l'opérateur de Koopman</b>	<b>9</b>
2.1	Opérateur de Koopman . . . . .	9
2.1.1	Cas discret . . . . .	10
2.1.2	Cas continu . . . . .	14
2.2	Valeurs et fonctions propres de l'opérateur de Koopman . . . .	16
<b>3</b>	<b>Caractérisation de l'opérateur de Koopman pour un équilibre non hyperbolique</b>	<b>21</b>
3.1	Système dynamique et point fixe . . . . .	22
3.2	Caractérisation spectrale de l'opérateur de Koopman pour un équilibre non hyperbolique . . . . .	23
3.2.1	Rappels de quelques résultats d'analyse . . . . .	23
3.2.2	Dynamique cubique en dimension 1 . . . . .	24
3.2.3	Généralisation . . . . .	32
<b>4</b>	<b>Calcul numérique des fonctions propres</b>	<b>35</b>
4.1	Représentation matricielle de l'opérateur de Koopman dans la base de monômes . . . . .	35
4.1.1	Cas de dimension 1 . . . . .	36
4.1.2	Cas de dimension 2 . . . . .	37
4.2	Cas d'une autre base : base de Fourier . . . . .	41
4.2.1	Rappels sur le développement en série de Fourier . . . .	41
4.2.2	Application au système en une dimension . . . . .	42
4.2.3	Exemple . . . . .	46
<b>5</b>	<b>Conclusion</b>	<b>49</b>

## TABLE DES MATIÈRES

---

<b>A Code matlab</b>	<b>53</b>
<b>Code matlab</b>	<b>54</b>



# Chapitre 1

## Introduction

La notion de système dynamique est née de la théorie de la mécanique newtonienne. Elle consiste en la définition des règles de l'évolution d'un ensemble de variables basiques connues sous le nom de variables d'état qui sont liées par un certain processus. On peut, selon le besoin, découper l'étude d'un système dynamique en trois parties :

- la modélisation qui consiste à décrire le comportement d'un système ou à le représenter par un modèle mathématique ;
- l'analyse qui permet d'obtenir des informations importantes sur le système comme par exemple des réponses à des questions liées à la stabilité du système.
- la commande qui, quant à elle, correspond à l'action de vouloir inférer sur le système un contrôle pour que certains objectifs soient atteints. On peut par exemple s'intéresser aux questions de stabilisation, de la minimisation de l'énergie du système, etc.

Un système dynamique peut être, de façon simplifiée, représenté par une équation différentielle de la forme

$$\dot{x} = \mathbf{F}(x) \tag{1.1}$$

où  $x \in \mathbb{R}^n$ , appelé variable d'état, représente la position et  $\mathbf{F}(x)$  est le champ de vitesse. Plus rigoureusement, l'équation (1.1) peut s'écrire comme

$$\dot{x}(t) = \mathbf{F}(x(t))$$

pour insister sur le fait que la position et le champ de vitesse sont fonction du temps  $t$ .

Il existe une façon classique d'étudier un système dynamique : elle consiste à résoudre l'équation différentielle (1.1) et d'en étudier les trajectoires (les

---

solutions). Mais dans beaucoup de cas, il n'est possible d'exprimer analytiquement cette solution et surtout dans le cas non linéaire.

Des outils mathématiques ont été développés pour étudier certaines propriétés d'un système dynamique sans devoir résoudre l'équation différentielle qui le représente (modélise). C'est le cas par exemple de la théorie de Lyapunov<sup>1</sup>. Une de ces propriétés qui intéressent les mathématiciens (les scientifiques en général) est par exemple la stabilité d'un système.

Un des outils récents permettant de faire une étude globale (de la stabilité) d'un système dynamique non linéaire, sans devoir le linéariser localement, est la théorie des opérateurs. C'est cette approche qui est abordée dans ce travail. Plus spécifiquement, il s'agit de l'opérateur de Koopman, qui est un opérateur de composition. C'est un opérateur linéaire qui agit sur l'espace des observables. L'espace étant de dimension infinie, on doit arriver à approximer l'opérateur de Koopman par une grande matrice dans une base finie quelconque, passer donc de la dimension infinie en dimension finie.

Des études sur la stabilité d'un système dynamique non linéaire ont été réalisées à partir de propriétés spectrales de l'opérateur de Koopman. On peut citer par exemple [2] et [3]. Dans [2], une attention est portée sur un équilibre hyperbolique et le cycle limite, laissant ainsi une voie ouverte pour le cas de l'équilibre non hyperbolique dont la stabilité n'est pas étudiée. D'après [1, p.19, 135], la stabilité d'un système non hyperbolique ne peut pas être étudiée (déterminée) par linéarisation. D'après [2, p.4], pour un équilibre non hyperbolique, le spectre continu de l'opérateur de Koopman est un ensemble non vide pour certains espaces. Il est alors intéressant de mettre en évidence des fonctions propres "généralisées" pour l'analyse ou l'étude de la stabilité de l'équilibre et/ou du système non hyperbolique.

En nous inscrivant dans la même démarche, nous comptons étudier, dans ce travail, les propriétés spectrales de l'opérateur de Koopman pour un équilibre non hyperbolique. En effet, comme expliquée ci-dessus, la méthode de linéarisation ne permet pas de tirer des conclusions sur la stabilité d'un système dynamique lorsqu'au moins une des valeurs propres de la jacobienne est à partie réelle nulle. Ceci est confirmé dans le théorème suivant, sur la stabilité d'un système non linéaire, tiré de [4, p.90].

**Théorème 1.0.1** *Soit  $\dot{x} = F(x)$  un système dynamique non linéaire. Soit  $A = \frac{\partial F}{\partial x} \big|_{x^* = 0}$  sa jacobienne.*

---

1. Cette théorie intervient dans l'étude de la stabilité d'un système.

- 
- Si  $\forall \lambda \in \sigma(A)$ ,  $\Re\{\lambda\} < 0$ , alors le point d'équilibre est asymptotiquement stable.
  - Si  $\forall \lambda \in \sigma(A)$ ,  $\Re\{\lambda\} > 0$ , alors le point d'équilibre est instable.
  - Si  $\forall \lambda \in \sigma(A)$ ,  $\Re\{\lambda\} \leq 0$  et qu'au moins pour un  $\lambda_i \in \sigma(A)$ ,  $\lambda_i = 0$  ( $\Re\{\lambda_i\} = 0$ ) alors on ne peut rien conclure.

La connaissance du spectre de l'opérateur de Koopman peut aider à étudier la stabilité d'un tel équilibre et/ou du système.

Nous précisons que dans le cadre de ce travail, nous nous sommes limité aux seuls systèmes dynamiques non linéaires non hyperboliques dont les champs de vitesse sont polynomiaux à une ou deux indéterminées et dont l'origine est un point fixe. C'est une simplification relativement légère de la question d'étude. Nous précisons tout de même que les différents systèmes sont à temps continu et ne sont soumis à aucun contrôle (ilsystèmes autonomes).

Ainsi, l'objectif principal de ce mémoire est de proposer un cadre théorique sur la stabilité des systèmes dynamiques à équilibre non hyperbolique en complément de résultats présentés dans [3] et [2], via l'opérateur de Koopman. En plus de fournir une caractérisation du spectre de l'opérateur de Koopman pour des systèmes dynamiques non hyperboliques, nous obtiendrons la matrice représentative de l'opérateur de Koopman dans une base (base de monômes ou base de Fourier) afin de calculer les fonctions propres de l'opérateur.

Ce travail est organisé comme suit :

Le second chapitre porte sur les généralités à propos de l'opérateur de Koopman qui est associé à un système dynamique non linéaire de manière générale. Il présente quelques définitions et résultats de base sur ce dernier, nécessaires pour la suite du travail.

Le troisième chapitre, porte sur la recherche du spectre de l'opérateur Koopman associé au système non hyperbolique. Il est au cœur de notre première contribution dans ce travail. Il prend en compte les éléments présentés dans le deuxième chapitre pour étudier le spectre de l'opérateur de Koopman dans le cas particulier des systèmes non hyperboliques.

Le quatrième chapitre porte sur le développement d'une méthode numérique pour construire la matrice de Koopman dans la base des monômes et dans la base de Fourier. Il présente également une méthode de calcul des fonctions propres de l'opérateur de Koopman dans la base de Fourier. Après cette caractérisation, quelques exemples illustratifs sur le calcul des fonctions propres sont proposés.

# Chapitre 2

## Généralités sur l'opérateur de Koopman

### Sommaire

<b>2.1 Opérateur de Koopman . . . . .</b>	<b>9</b>
2.1.1 Cas discret . . . . .	10
2.1.2 Cas continu . . . . .	14
<b>2.2 Valeurs et fonctions propres de l'opérateur de Koopman . . . . .</b>	<b>16</b>

Dans ce chapitre, nous présentons l'opérateur de Koopman dans sa généralité en insistant sur les différents aspects qui interviendront dans la suite de ce travail. Nous insistons plus principalement sur les fonctions propres de cet opérateur qui seront calculées au chapitre (4), en utilisant la méthode développée.

### 2.1 Opérateur de Koopman

Pour un système dynamique donné, on est souvent amené à chercher ou à décrire son état à un instant  $t$  donné. Désignons par  $\mathcal{F}$  l'espace vectoriel de fonctions et notons par  $f$  ses éléments, qui sont dans ce contexte, appelés des observables  $f : X \rightarrow \mathbb{R}$  où  $X \subset \mathbb{R}^n$  est l'espace d'état. Dans l'étude d'un système dynamique, une attention est portée sur l'espace d'état (trajectoires). L'opérateur de Koopman peut être défini aussi bien pour le paramètre temporel continu que pour celui discret.

### 2.1.1 Cas discret

Pour définir un système dynamique, il suffit de tenir compte du fait que chaque état se déduit du précédent par une relation de la forme

$$x[n] = \mathbf{T}(x[n-1]) \quad (2.1)$$

où  $\mathbf{T}$  est une application de  $X$  dans  $X$ . Autrement dit, l'application  $\mathbf{T}$  décrit le système dynamique. En adoptant les notations de [5], on définit l'opérateur de Koopman comme suit :

$$U_{\mathbf{T}} : \mathcal{F} \longrightarrow \mathcal{F} \quad f \mapsto (U_{\mathbf{T}}f)(x) = f[\mathbf{T}(x)].$$

L'opérateur  $U_{\mathbf{T}}$  ainsi défini est linéaire. En effet, soient  $f$  et  $g$  deux observables de  $\mathcal{F}$  et  $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$ . On a :

$$\begin{aligned} U_{\mathbf{T}}(c_1f(x) + c_2g(x)) &= [c_1f(x) + c_2g(x)] \circ \mathbf{T}(x) \\ &= (c_1f + c_2g)[\mathbf{T}(x)] \\ &= c_1f[\mathbf{T}(x)] + c_2g[\mathbf{T}(x)] \\ &= c_1(f \circ \mathbf{T})(x) + c_2(g \circ \mathbf{T})(x) \\ &= c_1U_{\mathbf{T}}f(x) + c_2U_{\mathbf{T}}g(x) \end{aligned}$$

D'après [5], quelle que soit la dimension de  $X$  (finie ou infinie), l'opérateur de Koopman  $U_{\mathbf{T}}$  est généralement de dimension infinie. Le plus souvent, on peut accéder à une sous-collection d'observables de  $\mathcal{F}$ , base de celui-ci. Soit  $\{f_1, f_2, \dots, f_N\} \subset \mathcal{F}$  cette collection. Posons  $F = (f_1, f_2, \dots, f_N) \in \mathcal{F}^N$ . On peut exprimer l'action de  $U_{\mathbf{T}}$  sur chaque  $f_i$  et on a

$$[U_{\mathbf{T}}F](x) = \begin{bmatrix} [U_{\mathbf{T}}f_1](x) \\ [U_{\mathbf{T}}f_2](x) \\ \vdots \\ [U_{\mathbf{T}}f_N](x) \end{bmatrix} \quad (2.2)$$

Cet opérateur peut être représenté par une application linéaire (une matrice) comme le montrent les exemples qui suivent.

**Exemple 2.1.1 (Groupe cyclique)** [5, p.5] Soit  $X = \{e, a, a^2\}$  avec  $a^3 \equiv e$  un groupe cyclique d'ordre 3.

On définit l'application  $\mathbf{T}$  par  $\mathbf{T} : X \rightarrow X$  tel que  $x \mapsto \mathbf{T}(x) = a.x$ . On note par  $\mathcal{F}$  l'ensemble de fonctions définies sur  $X$  évaluées dans  $\mathbb{C}$ . On pose  $f_1, f_2$  et  $f_3$  les fonctions indicatrices sur  $e, a$  et  $a^2$  dans cet ordre :

$$f_1(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x = e \\ 0 & \text{si } x \neq e \end{cases}, \quad f_2(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x = a \\ 0 & \text{si } x \neq a \end{cases}, \quad f_3(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x = a^2 \\ 0 & \text{si } x \neq a^2 \end{cases} \quad (2.3)$$

La collection  $\{f_1, f_2, f_3\}$  de la relation (2.3) forme une base de  $\mathcal{F}$ . L'action de l'opérateur de Koopman  $U_{\mathbf{T}}$  sur la collection ci-dessus est :

$$\begin{aligned}
 \bullet (U_{\mathbf{T}})f_1(x) &= (f_1 \circ \mathbf{T})(x) \\
 &= f_1(\mathbf{T}(x)) \\
 &= f_1(a.x) \\
 &= f_3(x) \\
 \bullet (U_{\mathbf{T}})f_2(x) &= (f_2 \circ \mathbf{T})(x) \\
 &= f_2(\mathbf{T}(x)) \\
 &= f_2(a.x) \\
 &= f_1(x) \\
 \bullet (U_{\mathbf{T}})f_3(x) &= (f_3 \circ \mathbf{T})(x) \\
 &= f_3(\mathbf{T}(x)) \\
 &= f_3(a.x) \\
 &= f_2(x)
 \end{aligned}$$

Toute observable  $f \in \mathcal{F}$  peut s'écrire, de manière unique, sous la forme  $f = c_1f_1 + c_2f_2 + c_3f_3$  dans la base  $\{f_1, f_2, f_3\}$  et l'action de  $U_{\mathbf{T}}$  sur  $f$  est donnée par

$$\begin{aligned}
 (U_{\mathbf{T}}f)(x) &= U_{\mathbf{T}}(c_1f_1 + c_2f_2 + c_3f_3)(x) \\
 &= c_1U_{\mathbf{T}}f_1(x) + c_2U_{\mathbf{T}}f_2(x) + c_3U_{\mathbf{T}}f_3(x) \\
 &= c_1f_3(x) + c_2f_1(x) + c_3f_2(x).
 \end{aligned}$$

On obtient ainsi la matrice  $A$  de  $U_{\mathbf{T}}$

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

**Exemple 2.1.2** (*Système linéaire diagonalisable*), inspiré de [5].

Soit  $X = \mathbb{R}^d$ . On définit l'application  $\mathbf{T}$  par  $\mathbf{T} : X \rightarrow X$   
 $x \mapsto (\mathbf{T}(x))_i = \mu_i x_i$  avec  $i = 1, \dots, d$ ;  $x = (x_1, \dots, x_d)^T$  et  $\mu_i \in \mathbb{R}$ .  
 Soit  $\mathbf{F}$  l'espace de fonctions définies sur  $X$  à valeurs dans  $\mathbb{C}$ . Posons  $\mathbf{B} = \{b_1, \dots, b_d\}$  une base de  $X$  et définissons l'application  $f_i(x) = \langle b_i, x \rangle$  où

$\langle \cdot, \cdot \rangle$  est le produit scalaire sur  $X$ . On a

$$\begin{aligned}
 f_1(x) &= \langle b_i, [x_1 \ \dots \ x_d]^T \rangle \\
 &= [b_{1,1} \ \dots \ b_{1,d}] \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_d \end{bmatrix} \\
 &\vdots \\
 f_d(x) &= \langle b_i, [b_{d,1} \ \dots \ b_{d,d}]^T \rangle \\
 &= [b_{d,1} \ \dots \ b_{d,d}] \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_d \end{bmatrix}
 \end{aligned}$$

L'action de l'opérateur de Koopman  $U_{\mathbf{T}}$  sur les fonctions  $f_i$  est donnée par

$$\begin{aligned}
 (U_{\mathbf{T}})(x) &= (f_i \circ \mathbf{T})(x) \\
 &= f_i[\mathbf{T}(x)] \\
 &= f_i(\mu_i x_i) \\
 &= \langle b_i, \mu_i x_i \rangle \\
 &= [b_{i,1} \ \dots \ b_{i,d}] \begin{bmatrix} \mu_1 x_1 \\ \vdots \\ \mu_d x_d \end{bmatrix} \\
 &= [b_{i,1} \ \dots \ b_{i,d}] \begin{bmatrix} \mu_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \mu_2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \mu_d \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_d \end{bmatrix}
 \end{aligned}$$

Posons  $F = [ f_1 \ \dots \ f_d ]^T$ . Avec la relation (2.2), on peut écrire :

$$\begin{aligned}
 [U_{\mathbf{T}}F](x) &= \begin{bmatrix} [U_{\mathbf{T}}f_1](x) \\ [U_{\mathbf{T}}f_2](x) \\ \vdots \\ [U_{\mathbf{T}}f_d](x) \end{bmatrix} \\
 &= \begin{bmatrix} f_1(\mathbf{T}(x)) \\ f_2(\mathbf{T}(x)) \\ \vdots \\ f_d(\mathbf{T}(x)) \end{bmatrix} \\
 &= \begin{bmatrix} f_1(\mu_1 x_1) \\ f_2(\mu_2 x_2) \\ \vdots \\ f_d(\mu_d x_d) \end{bmatrix} \\
 &= \begin{bmatrix} b_{1,1}\mu_1 x_1 & \dots & b_{1,d}\mu_1 x_1 \\ b_{2,1}\mu_2 x_2 & \dots & b_{2,d}\mu_2 x_2 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{d,1}\mu_d x_d & \dots & b_{d,d}\mu_d x_d \end{bmatrix}.
 \end{aligned}$$

Ce qui peut se décomposer sous la forme suivante

$$(U_{\mathbf{T}}F)(x) = \begin{bmatrix} b_{1,1} & b_{1,2} & \dots & b_{1,d} \\ b_{d,1} & b_{d,2} & \dots & b_{d,d} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{d,1} & b_{d,2} & \dots & b_{d,d} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mu_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \mu_2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \mu_d \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_d \end{bmatrix} \quad (2.4)$$

L'expression (2.4) représente l'action de l'opérateur de Koopman pour un sous-ensemble d'observables  $F$  de  $\mathcal{F}$ .

**Remarque 2.1.3** Si les coordonnées de la base  $\{b_i\}_{i=1}^d$  sont celles de la base canonique, les fonctions  $f_i$  sont des projections canoniques et on a, dans ce cas, que l'action de l'opérateur de Koopman est donnée par

$$(U_{\mathbf{T}}F)(x) = \begin{bmatrix} \mu_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \mu_2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \mu_d \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_d \end{bmatrix}$$



### 2.1.2 Cas continu

La notion d'opérateur de Koopman ci-dessus présentée pour le système dynamique à temps discret s'étend également au système dynamique à temps continu. Soit l'équation

$$\dot{x} = \mathbf{F}(x) \quad (2.5)$$

qui décrit un système dynamique à temps continu où  $x$  est un état défini sur  $X \subset \mathbb{R}^n$  et  $\mathbf{F} : X \rightarrow X$  le champ de vitesse (non linéaire) est une fonction lisse. Notons la solution de l'équation différentielle (2.5) par  $\varphi^t(x_0) = x(t)$  où  $x_0$  est la condition initiale (au temps  $t = 0$ ). La solution  $\varphi^t$  est une courbe intégrale du champ de vecteurs  $\mathbf{F}$ . On l'appelle **flot**. D'après [6, p.3] et [1, p.7], le flot ainsi défini satisfait les propriétés d'un semi-groupe telles qu'elles seront présentées pour l'opérateur de Koopman.

**Définition 2.1.4** (tirée de [5]).

Étant donné un système dynamique à temps continu  $\dot{x} = \mathbf{F}(x)$  et une observable  $f$ , le semi-groupe d'opérateurs de Koopman  $U^t : \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{F}$  associé à  $\varphi^t$  est donné par l'expression

$$U^t f(x_0) = f \circ \varphi^t(x_0).$$

La famille  $\{U^t\}_{t \geq 0}$  est appelée famille d'opérateurs de Koopman associés à un système dynamique à temps continu. La notion d'opérateurs de Koopman a été définie pour la première fois pour des systèmes hamiltoniens, voir [7] pour des détails. Ces opérateurs sont souvent appelés opérateurs de composition étant donné que  $U^t$  agit sur les observables par composition avec le flot  $\varphi^t$ .

Nous présentons, ici, de petits détails de propriétés énoncées dans [8, p.9].

**Propriétés :** Étant donné un système dynamique à temps continu, on a :

1.  $U^t$  est linéaire.

En effet, soient  $f$  et  $g$  deux observables,  $\alpha$  et  $\beta$  des scalaires réels ou complexes.

$$\begin{aligned} U^t(\alpha f + \beta g)(x_0) &= ((\alpha f + \beta g) \circ \varphi^t)(x_0) \\ &= (\alpha f + \beta g)(\varphi^t(x_0)) \\ &= \alpha f(\varphi^t(x_0)) + \beta g(\varphi^t(x_0)) \\ &= \alpha f \circ \varphi^t(x_0) + \beta g \circ \varphi^t(x_0) \\ &= \alpha U^t f(x_0) + \beta U^t g(x_0). \end{aligned}$$

2.  $U^{t_1+t_2} = U^{t_1}U^{t_2}$ .

En effet, soit  $f \in \mathcal{F}$ .

$$\begin{aligned} U^{t_1+t_2}f(x_0) &= f \circ \varphi^{t_1+t_2}(x_0) \\ &= f(\varphi^{t_1+t_2}(x_0)) \\ &= f(\varphi^{t_1}(\varphi^{t_2}(x_0))) \\ &= U^{t_1}f(\varphi^{t_2}(x_0)) \\ &= U^{t_1}U^{t_2}f. \end{aligned}$$

3.  $U^0 = \mathbf{1}$ ,  $\mathbf{1}$  est l'identité.

$$\begin{aligned} U^0f(x_0) &= (f \circ \varphi^0)(x_0) \\ &= f(\varphi^0(x_0)) \\ &= f(x_0). \end{aligned}$$

4.  $(U^t)^{-1}$  existe si  $\mathbf{F}$  est Lipschitz<sup>1</sup>.

**Remarque 2.1.5** *Si la quatrième propriété est garantie, on a la structure de groupe qui est définie sur la famille  $\{U^t\}_{t \geq 0}$ ,  $t \in \mathbb{R}$  (aussi pour  $t < 0$ ).*

L'exemple suivant, inspiré de [8], montre comment une observable peut évoluer sous l'action de l'opérateur de Koopman.

**Exemple 2.1.6** *Considérons le système dynamique*

$$\dot{\theta} = \omega$$

avec  $\theta$  qui appartient au cercle unité  $\mathbf{S}^1$ ,  $\omega$  une constante.

Posons  $f(\theta) = A \sin \theta$ . On peut vérifier sans peine que le flot est donné par  $\varphi^t(\theta_0) = \omega t + \theta_0$ . L'évolution de  $f(\theta)$  sous l'action de  $U^t$  est

$$\begin{aligned} U^t f(\theta_0) &= f \circ \varphi^t(\theta_0) \\ &= f(\omega t + \theta_0) \\ &= A \sin(\omega t + \theta_0). \end{aligned}$$

Par suite,  $\theta(t) = A \sin(\omega t + \theta_0)$ .

L'évolution de  $f$  est par exemple un pendule d'amplitude  $A$ , de pulsation  $\omega$  et de phase à l'origine  $\theta_0$ .

---

1. Une fonction  $f$  est dite lipschitzienne de rapport  $L < \infty$  si pour tous  $x, y$ , on a  $|f(x) - f(y)| \leq L |x - y|$ , où  $L$  est appelé constante de Lipschitz de  $f$ . Voir [6, p.3].

**Définition 2.1.7 (Générateur infinitésimal)**

Soit  $U^t$  le semi-groupe d'opérateur de Koopman. Le générateur infinitésimal de ce semi-groupe est par définition

$$\mathbf{L}_U f = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{U^t f - f}{t},$$

$f$  étant une observable. D'après [2] et [8, p.16], étant donné le système (2.5) de solution  $\varphi^t(x_0)$  associée à la condition initiale  $x_0$ , si  $f$  et  $\mathbf{F}$  sont continûment différentiables (au moins  $f \in \mathcal{C}^1(X) \supset \mathcal{F}$ ), on peut alors écrire

$$\mathbf{L}_U f = \mathbf{F} \cdot \nabla f; \quad (2.6)$$

où  $\nabla$  est le symbole du gradient et  $\cdot$  le produit scalaire dans  $\mathbb{R}^n$ .  
On vérifie que

$$\begin{aligned} \mathbf{L}_U f(x) &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{U^t f(x) - f(x)}{t} \\ &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f \circ \varphi^t(x) - f \circ \varphi^0(x)}{t} \\ &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(\varphi^t(x)) - f(\varphi^0(x))}{t} \\ &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{d}{dt} f \circ \varphi^t(x) |_{t=0}, \quad \theta \in [0, 1] \\ &= \frac{d}{dt} (f \circ \varphi^t(x)) |_{t=0} \\ &= \frac{df(x)}{dt} \cdot \frac{d\varphi^t(x)}{dt} \\ &= \mathbf{F}(x) \cdot \nabla f(x). \end{aligned}$$

Pour une démonstration plus rigoureuse<sup>2</sup> et pour plus de détails, on peut consulter [9, pp.255-256].

**Remarque 2.1.8** On montre facilement que le générateur infinitésimal  $\mathbf{L}_U$  de  $U^t$  est aussi linéaire.

## 2.2 Valeurs et fonctions propres de l'opérateur de Koopman

Les fonctions propres de l'opérateur de Koopman interviennent dans l'étude de la stabilité d'un système dynamique, comme nous l'avons signalé dans l'introduction. Dans cette section, nous présentons quelques propriétés sur les

2. Convergence forte (limite en norme)

valeurs et fonctions propres de cet opérateur telles qu'elles vont intervenir dans la suite de ce travail.

**Définition 2.2.1 (Fonction propre (temps continu))** *D'après [2], [8] et [10, p.2], une fonction propre de l'opérateur de Koopman  $U^t$  est une observable  $\phi_\lambda$  (de l'espace de fonctions) non nulle qui satisfait*

$$U^t \phi_\lambda = e^{\lambda t} \phi_\lambda, \quad (2.7)$$

pour un scalaire  $\lambda$  donné. Le scalaire  $\lambda$  est la valeur propre associée à la fonction propre  $\phi_\lambda$ .

Pour un système dynamique à temps discret, les fonctions propres vérifient la relation

$$\mathbf{U} \phi_\mu = \mu \phi_\mu,$$

où  $\mu$  et  $\phi_\mu$  sont respectivement appelés valeur et fonction propres.

**Remarque 2.2.2** *Sauf indication contraire, nous ne considérons que les systèmes à temps continu, dans la suite de ce travail.*

Si le champ de vitesse  $\mathbf{F}$  est de classe  $\mathcal{C}^1$  sur  $X$ , la relation (2.6) permet d'obtenir l'égalité

$$\mathbf{L}_U \phi_\lambda = \mathbf{F} \cdot \nabla \phi_\lambda = \lambda \phi_\lambda \quad (2.8)$$

<sup>3</sup> Les exemples suivants, tirés de [8], montrent comment on peut trouver une fonction propre de l'opérateur de Koopman pour un système.

**Exemple 2.2.3**    1. *Système stable en 1D*

*Considérons le système dynamique*

$$\dot{x} = -\lambda x, \quad \lambda > 0.$$

*On peut montrer que les trajectoires sont exponentielles de la forme  $\varphi^t(x_0) = e^{-\lambda t} x_0$  i.e  $\varphi^t(x) = e^{-\lambda t} x$ . Posons  $\phi(x) = x$ , une observable à valeur dans  $\mathbb{R}$ .*

*On a*

$$\begin{aligned} U^t \phi(x) &= \phi \circ \varphi^t(x) \\ &= \phi(\varphi^t(x)) \\ &= \phi(e^{-\lambda t} x) \\ &= e^{-\lambda t} x \\ &= e^{-\lambda t} \cdot \phi(x). \end{aligned}$$

---

3. Voir par exemple [8, p.16]. En plus, un semi-groupe a le même spectre que son générateur infinitésimal (voir [11, p.176] pour des théorèmes qui en parlent).

On remarque donc que  $\phi(x) = x$  est une fonction propre associée à la valeur propre  $-\lambda$ .

## 2. **Système masse-ressort**

Soit  $\dot{x} = Ax$  où

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -k/m & 0 \end{bmatrix}.$$

On peut facilement montrer que les valeurs propres de l'opérateur de Koopman associé à ce système sont de la forme  $\lambda_i = \pm j\omega$ , avec  $j^2 = -1$  et en vertu de la proposition (2.2.4), dans les lignes qui suivent, 0 est aussi valeur propre.

On définit la fonction  $\phi_0(x, y) = my^2 + kx^2$ . En utilisant la relation (2.8) on montre que  $\phi_0(x, y)$  est une fonction propre du système en remarquant simplement qu'elle vérifie l'égalité

$$\frac{\partial \phi_0(x, y)}{\partial x} y = \frac{k}{m} \frac{\partial \phi_0(x, y)}{\partial y} x.$$

La propriété suivante, tirée de [2, p.3] et [8, p.11-], est une caractérisation de fonctions et valeurs propres de l'opérateur de Koopman.

**Proposition 2.2.4** Soient  $\phi_{\lambda_1}$  et  $\phi_{\lambda_2}$  deux fonctions propres de l'opérateur de Koopman de valeurs propres respectives associées  $\lambda_1$  et  $\lambda_2$ .

Si  $\psi = \phi_{\lambda_1} \cdot \phi_{\lambda_2} \in \mathcal{F}$ , alors  $\psi$  est une fonction propre du même opérateur dont la valeur propre associée est  $\lambda_1 + \lambda_2$ .

**Preuve :** En appliquant la définition de l'opérateur de Koopman à l'observable  $\psi$ , on a :

$$\begin{aligned} U^t \psi(x) &= U^t(\phi_{\lambda_1}(x) \cdot \phi_{\lambda_2}(x)) \\ &= (\phi_{\lambda_1} \cdot \phi_{\lambda_2}) \circ \varphi^t(x) \\ &= (\phi_{\lambda_1} \cdot \phi_{\lambda_2})(\varphi^t(x)) \\ &= \phi_{\lambda_1}(\varphi^t(x)) \cdot \phi_{\lambda_2}(\varphi^t(x)) \\ &= e^{\lambda_1 t} \phi_{\lambda_1}(x) \cdot e^{\lambda_2 t} \phi_{\lambda_2}(x) \\ &= e^{(\lambda_1 + \lambda_2)t} \phi_{\lambda_1}(x) \cdot \phi_{\lambda_2}(x) \\ &= e^{\mu t} \psi(x) \text{ avec } \mu = \lambda_1 + \lambda_2. \end{aligned}$$

□

Cette proposition est généralisable en prenant en compte les puissances de fonctions propres (voir par exemple [2, pp3-4]).

Pour le cas de systèmes dynamiques linéaires, on a la remarque suivante, tirée (adaptée) de [2, p.5] et [8, p.37].

**Remarque 2.2.5** Soit un système dynamique linéaire  $\dot{x} = Ax$ ;  $x \in \mathbb{R}^n$ . Les valeurs propres  $\lambda_i$  de  $A$  sont aussi valeurs propres de l'opérateur de Koopman  $U^t$  associé au système et ses fonctions propres sont des fonctions linéaires données par

$$\phi_{\lambda_i}(x) = \langle x, w_i \rangle$$

avec  $w_i$  les vecteurs propres de l'adjointe de  $A$ .

En effet,  $\phi_{\lambda_i}(x) = \langle x, w_i \rangle$   
 $\Rightarrow$

$$\begin{aligned} \dot{\phi}_{\lambda_i}(x) &= \langle \dot{x}, w_i \rangle \\ &= \langle Ax, w_i \rangle \\ &= \langle x, A^* w_i \rangle \\ &= \langle x, \lambda_i w_i \rangle \\ &= \lambda_i \langle x, w_i \rangle \\ &= \lambda_i \phi_{\lambda_i}(x). \end{aligned}$$

Pour un temps  $t$  donné, on a  $\phi_{\lambda_i}(t, x_0) = U^t \phi_{\lambda_i}(x_0) = e^{\lambda_i t} \phi_{\lambda_i}(x_0)$ .

D'après [8, p.38], pour n'importe quel état  $x \in X$  on peut avoir

$$x = \sum_{i=1}^n \langle x, w_i \rangle v_i = \sum_{i=1}^n \phi_{\lambda_i} v_i.$$

L'opérateur  $U^t$  appliqué à cet état, fonction de l'état initial, donne

$$\begin{aligned} U^t x(x_0) &= x(t, x_0) \\ &= e^{At} x_0 \\ &= \sum_{i=1}^n \langle e^{At} x_0, w_i \rangle v_i \\ &= \sum_{i=1}^n \langle x_0, e^{A^* t} w_i \rangle v_i \\ &= \sum_{i=1}^n \langle x_0, e^{\lambda_i t} w_i \rangle v_i \\ &= \sum_{i=1}^n e^{\lambda_i t} \langle x_0, w_i \rangle v_i \\ &= \sum_{i=1}^n e^{\lambda_i t} \phi_{\lambda_i}(x_0) v_i. \end{aligned}$$

avec  $v_i$  les valeurs propres de  $A$  (et  $\langle v_i, w_k \rangle = \delta_{jk}$ <sup>4</sup>). On constate que tout état de  $X$  s'écrit comme combinaison linéaire des éléments propres de l'opérateur de Koopman évalué en l'état initial et dans la base des vecteurs propres de  $A$ . A titre illustratif, pour un système linéaire dans le cas discret, nous renvoyons à [12, p.4].

Pour étudier la stabilité globale d'un système dynamique à l'aide des fonctions propres de l'opérateur de Koopman, on s'intéresse aux valeurs propres de la jacobienne du champ de vitesse évalué au point fixe. En effet, si on peut trouver exactement  $N$  fonctions propres  $\phi_\lambda$  associées aux valeurs propres à partie réelle strictement négative, de la jacobienne du champ de vitesse, telles que ces fonctions soient de classe  $\mathcal{C}^1$  sur l'espace d'état  $X$ , et sans qu'elles ne soient redondantes, alors elles permettent de fixer les conditions pour la stabilité globale du système.

La proposition suivante, tirée de [2, p.5], résume ce qui précède.

**Proposition 2.2.6** *Soit  $X \subset \mathbb{R}^N$  un ensemble compact. Supposons que  $\dot{x} = F(x)$ , avec  $F \in \mathcal{C}^2(X)$  admet  $x^* \in X$  comme point fixe et que la jacobienne  $J$  de  $F$  évaluée en  $x^*$  a exactement  $N$  valeurs propres distinctes à partie réelle strictement négative. Alors  $x^*$  est globalement asymptotiquement stable si et seulement si l'opérateur de Koopman associé au système  $\dot{x} = F(x)$  possède  $N$  fonctions propres  $\phi_{\lambda_i}$ ,  $i = 1, \dots, N$  qui sont dans  $\mathcal{C}^1(X)$  (avec des valeurs propres  $\lambda_i$  différentes) avec  $\Re\{\lambda_i\} < 0$ <sup>5</sup> et  $\nabla\phi_{\lambda_i}(x^*) \neq 0$ . Les valeurs propres  $\lambda_i$  sont aussi valeurs propres de la jacobienne  $J$ .*

Pour la démonstration de cette proposition, voir [2, pp.5-6].

---

4.  $\delta_{jk}$  désigne le symbole de Kronecker.

5.  $\Re\{\lambda_i\}$  désigne la partie réelle de  $\lambda_i$ .

# Chapitre 3

## Caractérisation de l'opérateur de Koopman pour un équilibre non hyperbolique

### Sommaire

---

3.1	Système dynamique et point fixe . . . . .	22
3.2	Caractérisation spectrale de l'opérateur de Koopman pour un équilibre non hyperbolique . . . . .	23
3.2.1	Rappels de quelques résultats d'analyse . . . . .	23
3.2.2	Dynamique cubique en dimension 1 . . . . .	24
	Espace de fonctions continues . . . . .	28
	Espace $\mathbb{L}^1(0, 1)$ . . . . .	29
	Espace $\mathbb{L}^2(0, 1)$ . . . . .	29
	Espace de fonctions analytiques . . . . .	30
3.2.3	Généralisation . . . . .	32
	Cas de fonctions continues sur un compact . . . . .	33
	Cas de fonctions intégrables sur $K = (0, 1)$ . . . . .	34

---

Dans ce chapitre, nous commençons par faire un petit rappel sur la classification de points fixes d'un système dynamique avant de nous positionner par rapport à notre cas de figure, celui de l'équilibre non hyperbolique. En utilisant certains des résultats présentés dans le chapitre précédent, il sera question d'étudier différents spectres de l'opérateur de Koopman.



### 3.1 Système dynamique et point fixe

Nous avons représenté un système dynamique par la forme générale simplifiée

$$\dot{x} = \mathbf{F}(x) \quad (3.1)$$

avec  $x \in X \subset \mathbb{R}^n$  et  $\mathbf{F}(x)$  le champ de vitesse (non linéaire). Notons par  $x^*$  un point de  $X$  tel que  $\mathbf{F}(x^*) = 0$ .

$x^*$  est alors dit un point fixe ou un point d'équilibre du système (3.1). Pour plus de détails, on peut consulter [1, p.11, 178].

Le but de cette section est de présenter, en rappel, les différents types de points d'équilibre d'un système dynamique.

Le système (3.1) étant non linéaire, nous recourons à la jacobienne de  $\mathbf{F}(x)$  évaluée en  $x^*$  pour classifier ses points fixes, comme pour un système linéaire. Cette classification est basée sur les valeurs propres de cette jacobienne [4, p.24].

Si  $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)^T$ ,  $\mathbf{F} = (f_1, f_2, \dots, f_n)^T$ , alors la matrice jacobienne évaluée en  $x^*$  est

$$A = \frac{\partial \mathbf{F}(x^*)}{\partial x} = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1} & \frac{\partial f_2}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial f_2}{\partial x_n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_n}{\partial x_1} & \frac{\partial f_n}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial f_n}{\partial x_n} \end{bmatrix} (x^*). \quad (3.2)$$

On a donc un système linéaire de la forme

$$\dot{x} = Ax \quad (3.3)$$

D'après [13, p.151], l'étude qualitative du système (3.3) est aussi valable que celle du système (3.1) sauf pour les cas limites [13].

Notons par  $\lambda_i = \alpha_i + j\beta_i$ ,  $i \in I = \{1, 2, \dots, n\}$ , ( $j$  le complexe unité), les  $n$  valeurs propres de (3.2). On a les définitions suivantes.

**Définition 3.1.1** 1. Si pour tout  $i \in I$ ,  $\alpha_i \neq 0$ , alors  $x^*$  est dit équilibre hyperbolique.

2. S'il existe  $i \in I$ ,  $\alpha_i = 0$ , alors  $x^*$  est dit équilibre non hyperbolique.

Des définitions similaires, qui n'utilisent pas la matrice jacobienne sont données dans [1, p.19]. Pour plus de détails sur les cas possibles, en dimension 2, nous renvoyons à [13, pp.129-137].

Dans le cadre de ce travail, nous étudierons les points qui sont des équilibres non hyperboliques pour des systèmes en une ou deux dimensions.

## 3.2 Caractérisation spectrale de l'opérateur de Koopman pour un équilibre non hyperbolique

Les propriétés spectrales de l'opérateur de Koopman jouant un rôle dans l'étude de la stabilité d'un système, cette section est totalement centrée sur la détermination du spectre pour notre cas de figure. On envisage d'étudier les différents spectres de l'opérateur en considérant différents espaces des observables. Sans beaucoup de détails, les définitions suivantes s'avèrent importantes dans la suite de cette section.

**Définition 3.2.1** ([14, pp45-47] et [11, pp.157-167])

*Soit  $A$  un opérateur linéaire défini sur un espace  $X$ .*

- On appelle **spectre ponctuel** de  $A$ , on note  $\sigma_p(A)$ , l'ensemble de scalaires  $\lambda$  complexes tels  $A - \lambda\mathbb{I}$  n'est pas injectif. Autrement dit, c'est l'ensemble de valeurs propres de l'opérateur  $A$ .
- On appelle **spectre résiduel** de  $A$ ; on note  $\sigma_r(A)$ , l'ensemble de complexes  $\lambda$  tels que  $A - \lambda\mathbb{I}$  est injectif et que son image n'est pas dense dans  $X$ .
- On appelle **spectre continu** de  $A$ ; on note  $\sigma_c(A)$ , l'ensemble de complexes  $\lambda$  tels que  $A - \lambda\mathbb{I}$  est injectif et non surjectif mais à image dense dans  $X$ .
- Le spectre de  $A$  est la réunion de trois spectres précédents.

Quelques résultats d'Analyse sont nécessaires pour la suite.

### 3.2.1 Rappels de quelques résultats d'analyse

Dans cette sous-section, nous rappelons quelques résultats d'analyse dont nous avons besoin et qui portent sur la continuité et l'intégrabilité d'une fonction réelle à variable réelle.

**Proposition 3.2.2** *Soit  $f$  une fonction continue sur  $]a, b[$ .*

1. *Si  $a \in \mathbb{R}$ , alors  $f$  est intégrable en  $a^+$  s'il existe  $n < 1$  tel que*

$$\lim_{x \rightarrow a^+} (x - a)^n |f(x)| \quad (3.4)$$

*existe et est finie.*

2. *Si  $a = -\infty$ , alors  $f$  est intégrable en  $-\infty$  s'il existe  $n > 1$  tel que*

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} |x|^n |f(x)| \quad (3.5)$$

*existe et est finie.*

3. *Si  $b \in \mathbb{R}$ , alors  $f$  est intégrable en  $b^-$  s'il existe  $n < 1$  tel que*

$$\lim_{x \rightarrow b^-} (b - x)^n |f(x)| \quad (3.6)$$

*existe et est finie.*

4. *Si  $b = +\infty$ , alors  $f$  est intégrable en  $+\infty$  s'il existe  $n > 1$  tel que*

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} |x|^n |f(x)| \quad (3.7)$$

*existe et est finie.*

**Proposition 3.2.3** *Toute fonction continue sur un intervalle fermé borné  $y$  est intégrable.*

Le théorème (3.2.4) est fondamental pour assurer l'existence d'une primitive, pour une fonction continue sur un intervalle.

**Théorème 3.2.4** *Toute fonction  $f$  continue sur un intervalle  $I$  admet des primitives sur  $I$ . Plus précisément, pour tout  $a \in I \subset \mathbb{R}$ , la fonction  $F$  définie sur  $I$  par  $F(x) = \int_a^x f(t)dt$  est l'unique primitive de  $f$  sur  $I$  vérifiant  $F(a) = 0$ .*

### 3.2.2 Dynamique cubique en dimension 1

Nous prenons un cas de figure de système non hyperbolique. Considérons le système dynamique en une dimension<sup>1</sup> suivant

$$\dot{x} = -x^3 \quad (3.8)$$

---

1. Proposé dans [1, p.19] et dans [2]

On peut montrer que son flot est

$$x(t) = \frac{x_0}{\sqrt{1 + 2x_0^2 t}}. \quad (3.9)$$

On peut vérifier sans aucune peine que 0 est un équilibre non hyperbolique du système (3.8). Pour chercher le spectre de l'opérateur de Koopman associé à ce système, nous considérons différents espaces des observables  $\mathcal{F}$ . Notons par  $f \in \mathcal{F}$  une fonction propre associée à la valeur propre  $\lambda$ . D'après les relations (2.6) et (2.8), on a

$$\mathbf{L}_U f(x) = \mathbf{F}(x) \cdot \nabla f(x) = \lambda f(x).$$

Par substitution, nous avons

$$\begin{aligned} \Rightarrow & -x^3 \cdot \nabla f(x) = \lambda f(x) \\ \Leftrightarrow & -x^3 \frac{df(x)}{dx} = \lambda f(x) \\ \Leftrightarrow & \frac{df(x)}{f(x)} = \frac{-\lambda}{x^3} dx \\ \Leftrightarrow & f(x) = k \cdot e^{\frac{\lambda}{2x^2}}. \end{aligned} \quad (3.10)$$

La fonction  $f(x)$  ainsi calculée est une fonction propre généralisée (voir les références [2] et [15]) pour autant qu'elle n'appartienne pas à l'espace  $\mathcal{F}$ . Dans le cas où elle appartient à  $\mathcal{F}$ , elle est simplement une fonction propre. La différence entre les deux concepts, fonction propre généralisée et fonction propre se situe au niveau de la valeur propre  $\lambda$  qui est dans le spectre continu ou dans le spectre ponctuel.

A partir de cette fonction, avec d'autres outils, nous mettrons en évidence les différents spectres de l'opérateur, comme mentionné précédemment.

**Remarque 3.2.5** *Si  $\lambda \leq 0$  (resp.  $\lambda > 0$ ), la fonction  $f$  précédente est (respectivement n'est pas) définie au point d'équilibre.*

A partir de la relation

$$\mathbf{L}_U \cdot f(x) = \lambda f(x),$$

on peut définir l'opérateur

$$\mathbf{L}_U - \lambda \mathbb{I} : \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{F}$$

tel que

$$f \mapsto (\mathbf{L}_U - \lambda \mathbb{I})f.$$

Intéressons-nous à l'opérateur de Koopman dont on a noté le générateur infinitésimal par  $\mathbf{L}_U$ .

Pour se convaincre de la non surjectivité de  $\mathbf{L}_U - \lambda\mathbb{I}$ , on peut montrer qu'il existe une fonction  $f \in \mathcal{F}$  telle que l'équation

$$f = (\mathbf{L}_U - \lambda\mathbb{I})h \tag{3.11}$$

n'ait pas de solution  $h$  ou si elle existe (ce qui peut être possible), elle n'est pas dans l'espace  $\mathcal{F}$ . En utilisant la définition de l'action de  $\mathbf{L}_U$  sur une fonction observable, on a

$$\begin{aligned} \Rightarrow & (\mathbf{L}_U - \lambda\mathbb{I})h(x) = f(x) \\ \Rightarrow & \mathbf{L}_U h(x) - \lambda\mathbb{I}h(x) = f(x) \\ \Rightarrow & F\nabla h(x) - \lambda h(x) = f(x) \\ \Rightarrow & -x^3 \frac{dh(x)}{dx} - \lambda h(x) = f(x). \end{aligned} \tag{3.12}$$

La dernière ligne de (3.12) est une équation différentielle linéaire ordinaire non homogène du premier ordre dont la solution de l'équation homogène correspondante est donnée par

$$h(x) = k(x).e^{\frac{\lambda}{2x^2}}. \tag{3.13}$$

Par la méthode de la variation de la constante, on obtient

$$\frac{dh(x)}{dx} = e^{\frac{\lambda}{2x^2}} \left( \frac{-\lambda}{x^3} k(x) + \frac{dk(x)}{dx} \right). \tag{3.14}$$

En injectant (3.14) dans la dernière égalité de (3.12), on obtient

$$-x^3 \frac{dk(x)}{dx} e^{\frac{\lambda}{2x^2}} = f(x)$$

dont la solution  $k(x)$  est donnée par

$$k(x) = - \int \frac{e^{\frac{-\lambda}{2x'^2}}}{x'^3} f(x') dx' + C. \tag{3.15}$$

Finalement, en injectant (3.15) dans (3.13), la solution générale de l'équation de la dernière égalité de (3.12) est

$$h(x) = -e^{\frac{\lambda}{2x^2}} \int_0^x \frac{e^{\frac{-\lambda}{2x'^2}}}{x'^3} f(x') dx' + C e^{\frac{\lambda}{2x^2}}. \tag{3.16}$$

En particulier, si  $C = 0$ , la fonction  $h$  est donnée par

$$h(x) = -e^{\frac{\lambda}{2x^2}} \int_0^x \frac{e^{-\frac{\lambda}{2x'^2}}}{x'^3} f(x') dx'. \quad (3.17)$$

Pour le cas particulier  $f(x') = 1$ , posons

$$\delta = \int_0^x \frac{e^{-\frac{\lambda}{2x'^2}}}{x'^3} dx' \quad (3.18)$$

On pose  $u = \frac{-1}{2x'^2}$  et  $e^{\frac{-\lambda}{2x'^2}} = e^{\lambda u}$ .

$$\begin{aligned} \Rightarrow du &= \frac{1}{x'^3} dx' \\ \Rightarrow \int \frac{e^{\frac{-\lambda}{2x'^2}}}{x'^3} dx' &= \int e^{\lambda u} du \\ &= \frac{1}{\lambda} e^{\lambda u} + c \\ &= \frac{1}{\lambda} e^{\frac{-\lambda}{2x'^2}} + c \\ \Rightarrow \int_{0^+}^x \frac{e^{\frac{-\lambda}{2x'^2}}}{x'^3} dx' &= \frac{1}{\lambda} \left[ e^{\frac{-\lambda}{2x'^2}} \right]_{0^+}^x \\ &= \frac{1}{\lambda} \left[ e^{\frac{-\lambda}{2x^2}} - \underbrace{\lim_{x \rightarrow 0^+} e^{\frac{-\lambda}{2x^2}}}_{=0} \right] \\ \Rightarrow \delta &= \frac{1}{\lambda} e^{\frac{-\lambda}{2x^2}}, \text{ pour } \Re\{\lambda\} > 0. \end{aligned} \quad (3.19)$$

**Remarque 3.2.6** Nous aurons besoin de l'expression de la fonction  $\delta$  ci-dessus calculée dans la suite.

Toute la discussion au sujet du spectre de l'opérateur de Koopman associé au système (3.8) réside au niveau des expressions (3.13), (3.15) et (3.16).

**Remarque 3.2.7** Le choix des espaces fonctionnels, dans ce qui suit, est celui de ceux bien connus et plus utilisés ; l'idée étant de vérifier si le spectre de l'opérateur de Koopman reste ou pas le même lorsqu'on travaille dans l'un ou l'autre espace fonctionnel pour le système (3.8).

Pour chaque espace qui sera fixé, il s'agira de préciser (caractériser) en premier lieu le spectre ponctuel avant de passer, en second lieu, à la caractérisation de celui du spectre continu pour certains espaces.

Considérons le cas de quelques espaces fonctionnels.

## Espace de fonctions continues

Considérons l'espace fonctionnel  $\mathcal{F} = \mathcal{C}([0, 1])$  des fonctions continues sur  $K = [0, 1]$ .

### 1. Le spectre ponctuel

La fonction  $f$  donnée par (3.10) (voir la dernière égalité) est la même que celle  $h$  donnée par (3.13) (pour  $k = cste$ ) obtenue à partir de (3.12) pour  $f(x) = 0$ . Il s'agit d'une **fonction propre associée à la valeur propre  $\lambda$  dont la partie réelle est négative.**

En effet, la fonction  $f$  est continue sur  $\mathbb{R}$  si  $\Re\{\lambda\} \leq 0$ .

Pour des valeurs  $\lambda$  à partie réelle strictement positive, la fonction (3.10) n'est pas continue sur  $K$ . Dans ce cas, on conclut que les seules valeurs  $\lambda$  à partie réelle négative sont dans le spectre. Par suite, on a un **spectre ponctuel** de l'opérateur  $\mathbf{L}_U$  avec un continuum de valeurs propres.

$$\sigma_p(\mathbf{L}_U) = \mathbb{C}_-, \quad (3.20)$$

avec  $\mathbb{C}_- = \{z \in \mathbb{C} : \Re\{z\} \leq 0\}$ .

### 2. Le spectre continu

Nous avons besoin du résultat suivant.

#### **Théorème 3.2.8 (Théorème de Weierstrass)**

*Soit  $f$  une fonction définie sur un intervalle  $I = [a, b]$  des réels et à valeurs réelles. Si  $f$  est continue, alors  $f$  est bornée et atteint ses bornes. Autrement dit, il existe deux réels  $\alpha_1$  et  $\alpha_2$  de  $I$  tels que pour tout  $x \in I$ , les inégalités suivantes sont vérifiées :*

$$f(\alpha_1) \leq f(x) \leq f(\alpha_2)$$

Ce théorème permet d'affirmer qu'une fonction continue sur un segment (intervalle) possède un minimum et un maximum sur ce segment. Revenons à l'étude du spectre.

Nous considérons à présent les valeurs  $\lambda$  à partie réelle strictement positive. Soit maintenant une fonction  $f$  continue sur le compact  $K = (0, 1)$ . En vertu du théorème précédent, nous pouvons admettre qu'il existe des réels  $\alpha_1$  et  $\alpha_2$  positifs tels que  $\alpha_1 \leq f(x) \leq \alpha_2$  (c-à-d  $f$  est bornée).

Avec ces inégalités, pour  $C = 0$ , le second membre de (3.16) peut se mettre sous la forme

$$-e^{\frac{\lambda}{2x^2}} \left[ \alpha_1 \int_0^x \frac{e^{-\frac{\lambda}{2x'^2}}}{x'^3} dx' \leq \int_0^x \frac{e^{-\frac{\lambda}{2x'^2}}}{x'^3} f(x') dx' \leq \alpha_2 \int_0^x \frac{e^{-\frac{\lambda}{2x'^2}}}{x'^3} dx' \right]$$

c'est-à-dire

$$-\alpha_2 e^{\frac{\lambda}{2x^2}} \int_0^x \frac{e^{\frac{-\lambda}{2x'^2}}}{x'^3} dx' \leq \underbrace{-e^{\frac{\lambda}{2x^2}} \int_0^x \frac{e^{\frac{-\lambda}{2x'^2}}}{x'^3} f(x') dx'}_{=h(x)} \leq -\alpha_1 e^{\frac{\lambda}{2x^2}} \int_0^x \frac{e^{\frac{-\lambda}{2x'^2}}}{x'^3} dx'$$

En tenant compte de (3.18) et après simplification, on obtient (3.21)

$$-\frac{\alpha_2}{\lambda} \leq h(x) \leq -\frac{\alpha_1}{\lambda}, \quad (3.21)$$

qui montre que la fonction  $h(x)$  est bornée et donc continue sur le compact  $K$  quelles que soient la fonction  $f$  continue et les valeurs  $\lambda$  telles que  $\Re\{\lambda\} > 0$ .

L'opérateur  $\mathbf{L}_U - \lambda\mathbb{I}$  est donc surjectif et on conclut que les spectres continu et résiduel sont vides

$$\sigma_c(\mathbf{L}_U) = \emptyset.$$

$$\sigma_r(\mathbf{L}_U) = \emptyset.$$

### Espace $\mathbb{L}^1(0, 1)$

Soit  $\mathcal{F}$  l'espace de fonctions intégrables sur le compact  $K = (0, 1)$ .

**Le spectre ponctuel :** La fonction  $f$  donnée par (3.10) est intégrable sur le compact  $K$  pour des valeurs  $\lambda$  à partie réelle négative. On peut se servir des résultats (3.4) et (3.6) de la proposition (3.2.2) pour le vérifier. Il suffit de voir qu'il existe  $n < 1$  tel que les limites

$$\lim_{x \rightarrow 0} |x|^n \cdot |k \cdot e^{\frac{\lambda}{2x^2}}|$$

est finie.

Par contre, pour des valeurs  $\lambda$  telles que  $\Re\{\lambda\} > 0$ , la fonction (3.10) n'est pas intégrable sur  $K$  (voir (3.4)), car non intégrable en 0.

On peut alors conclure que le spectre ponctuel de l'opérateur  $\mathbf{L}_U$  est formé de seuls scalaires à partie réelle négative.

$$\sigma_p(\mathbf{L}_U) = \mathbb{C}_-$$

### Espace $\mathbb{L}^2(0, 1)$

Soit  $\mathcal{F} = \mathbb{L}^2(0, 1)$  l'espace de fonctions de carré intégrable<sup>2</sup> sur le compact  $K = (0, 1)$ .

---

<sup>2</sup>. Une fonction  $g$  est de carré sommable (intégrable) sur un ensemble  $K$  si l'intégrale  $\int_K |g(x)|^2 dx$  est convergente.



**Le spectre ponctuel :** Soit la fonction  $f$  définie par (3.10). Elle est de carré intégrable sur  $(0, 1)$  pour des scalaires  $\lambda$  à partie réelle négative. On peut le vérifier par les résultats de la proposition (3.2.2).

Par contre, elle ne l'est pas sur tout le compact  $K$  pour des scalaires à partie réelle strictement positive (le critère (3.4) n'est pas satisfait pour  $a = 0$ .) On peut conclure que

$$\forall \lambda : \Re\{\lambda\} \leq 0, \int_0^1 k^2 e^{\frac{\lambda}{x^2}} dx \text{ est convergente.}$$

On peut alors affirmer que

$$\sigma_p(\mathbf{L}_U) = \mathbb{C}_-. \tag{3.22}$$

**Remarque 3.2.9** *Pour les espaces  $\mathbb{L}^1(0, 1)$  et  $\mathbb{L}^2(0, 1)$ , on a les mêmes conclusions sur le spectre ponctuel de l'opérateur de Koopman associé au système (3.8). Pour ces deux espaces, on n'a pas traité le cas du spectre continu.*

### Espace de fonctions analytiques

Soit  $\mathcal{F}$  l'espace de fonctions analytiques. Pour le cas de cet espace, nous voulons identifier des scalaires  $\lambda$  pour lesquels la fonction propre ou la fonction propre "généralisée" peut être approximée par un polynôme dans un voisinage de zéro.

**Le spectre ponctuel :** La fonction (3.10) peut être approximée par un polynôme dans le cas où le scalaire  $\lambda$  est nul. La fonction est donc réduite à une constante  $k$ . Pour des scalaires  $\lambda$  à partie réelle strictement négative, les dérivées de tout ordre  $n$ ,  $n = 1, 2, \dots$  de la fonction  $f(x) = k.e^{\frac{\lambda}{2x^2}}$  s'annulent en zéro. Pour des valeurs propres à partie réelle strictement positive, les dérivées ne s'annulent pas en zéro. Par contre, la fonction n'est pas définie en zéro, et donc elle ne peut pas être analytique. Cela montre qu'on ne peut pas approximer les fonctions propres qui ne sont pas analytiques. Les valeurs  $\lambda$  telles que  $\Re\{\lambda\} < 0$  ou  $\Re\{\lambda\} > 0$  ne sont donc pas dans le spectre ponctuel de l'opérateur.

Le spectre ponctuel est alors réduit au singleton  $\{0\}$ . Par suite, nous pouvons écrire

$$\sigma_p(\mathbf{L}_U) = \{0\}. \tag{3.23}$$

**Le spectre continu :** Dans [2], il est affirmé que le spectre continu de l'opérateur de Koopman pour des systèmes non hyperboliques est différent de l'ensemble vide, pour le cas de l'espace de fonctions analytiques, comme nous l'avons rappelé dans l'introduction. Ceci étant, il est alors possible de prouver que l'opérateur  $\mathbf{L}_U - \lambda \mathbf{Id}$  n'est pas surjectif.

Nous expliquons ci-dessous une des manières dont on pourrait aborder la question.

Dans l'équation (3.16), en supposant que la fonction  $f$  est analytique en zéro, c'est-à-dire qu'elle s'écrit en série de Taylor suivante

$$f(x) = \sum_{i=0}^n \mathbf{f}_i x^i,$$

avec les  $\mathbf{f}_i$  des réels, on devrait arriver à montrer que l'intégrale (3.16) donne une fonction qui n'est pas analytique. Ce calcul est relativement difficile, vu les intégrales qui n'ont pas des expressions analytiques (fonctions d'erreur). Dans le même but, on pourrait aussi poser que

$$h(x) = \sum_{i=0}^n \mathbf{h}_i x^i,$$

où les  $\mathbf{h}_i$  sont des réels à déterminer en fonctions de coefficients  $\mathbf{f}_i$  en résolvant le système d'équations obtenu en identifiant les coefficients de monômes de même degré dans l'expression

$$(\mathbf{L}_U - \lambda \mathbf{I}) \left( \sum_{i=0}^n \mathbf{h}_i x^i \right) = \sum_{i=0}^n \mathbf{f}_i x^i$$

Il faudrait arriver à résoudre le système

$$\left\{ \begin{array}{l} \mathbf{f}_0 = -\lambda \mathbf{h}_0 \\ \mathbf{f}_1 = \lambda \mathbf{h}_1 \\ \mathbf{f}_2 = -\lambda \mathbf{h}_2 \\ \mathbf{f}_3 = -\mathbf{h}_1 - \lambda \mathbf{h}_3 \\ \mathbf{f}_4 = -2\mathbf{h}_2 - \lambda \mathbf{h}_4 \\ \vdots \\ \mathbf{f}_n = -(n-2)\mathbf{h}_{n-2} - \lambda \mathbf{h}_n \end{array} \right. \quad (3.24)$$

et prouver que la série formée par les termes  $\mathbf{h}_i$  n'est pas convergente et que ceux-ci ne sont pas des coefficients d'une fonctions analytique en zéro. La détermination du spectre continu reste donc une question ouverte pour le cas de l'espace des fonctions analytiques (point fixe non hyperbolique).

### 3.2.3 Généralisation

Dans cette sous-section, nous présentons une généralisation des résultats obtenus ci-dessus. Soit un système dynamique à une dimension de la forme

$$\dot{x} = \mathbf{F}(x), \quad x \in \mathbb{R} \quad (3.25)$$

dont le champ de vitesse est supposé s'annuler uniquement en zéro et dont la dérivée première est aussi nulle en zéro<sup>3</sup>.

Si  $f$  est une fonction propre associée à la valeur propre  $\lambda$ , de l'opérateur  $\mathbf{L}_U$  associé à (3.25), elle est de la forme

$$f(x) = ke^{\int_{x_0}^x \frac{\lambda}{\mathbf{F}(x')} dx'}, \quad (3.26)$$

où l'intégrale  $\int_{x_0}^x \frac{\lambda}{\mathbf{F}(x')} dx'$  peut, intuitivement, être perçue comme le temps qu'il faut pour aller de  $x_0$  ( qui est un point assez proche de l'origine) à  $x$ . Soient  $f$  et  $h$  deux observables d'un certain espace fonctionnel  $\mathcal{F}$ . La relation

$$\mathbf{L}_U h - \lambda h = f \quad (3.27)$$

s'écrit par définition comme

$$\mathbf{F}(x) \frac{dh(x)}{dx} - \lambda h(x) = f(x). \quad (3.28)$$

La solution de l'équation homogène correspondant à l'équation différentielle ci-dessus est donnée par

$$h(x) = K(x) e^{\int_{x_0}^x \frac{\lambda}{\mathbf{F}(x')} dx'} \quad (3.29)$$

Par la méthode de la variation de la constante, on obtient

$$\frac{dh(x)}{dx} = e^{\int_{x_0}^x \frac{\lambda}{\mathbf{F}(x')} dx'} \left( \frac{d(K(x))}{dx} + \frac{\lambda}{\mathbf{F}(x)} K(x) \right). \quad (3.30)$$

En injectant l'équation(3.30) dans (3.27), on obtient la valeur de  $K(x)$  qui est donnée par

$$K(x) = \int \frac{e^{-\int_{x_0}^x \frac{\lambda}{\mathbf{F}(x')} dx'}}{\mathbf{F}(x)} f(x) dx + C \quad (3.31)$$

Et la solution générale de (3.28) est alors

$$h(x) = e^{\int_{x_0}^x \frac{\lambda}{\mathbf{F}(x')} dx'} \int \frac{e^{-\int_{x_0}^x \frac{\lambda}{\mathbf{F}(x')} dx'}}{\mathbf{F}(x)} f(x) dx + C e^{\int_{x_0}^x \frac{\lambda}{\mathbf{F}(x')} dx'} \quad (3.32)$$

---

3. Dans ce cas, zéro est un équilibre non hyperbolique.

Cette expression est utilisée dans la suite pour caractériser le spectre continu de l'opérateur pour n'importe quel champ de vitesse  $\mathbf{F}(x)$  tel que décrit précédemment.

En posant  $\delta' = \int \frac{e^{-\int_{x_0}^x \frac{\lambda}{\mathbf{F}(x')} dx'}}{\mathbf{F}(x)} dx$  et en faisant un changement de variables, on peut montrer que

$$\delta' = \frac{-1}{\lambda} e^{-\int_{x_0}^x \frac{\lambda}{\mathbf{F}(x')} dx'}, \text{ avec } \Re\{\lambda\} > 0. \quad (3.33)$$

Plaçons-nous dans un espace fonctionnel bien précis pour déterminer le spectre de l'opérateur.

### Cas de fonctions continues sur un compact

Nous étudions le spectre de l'opérateur de Koopman en considérant l'espace de fonctions continues sur un compact de  $\mathbb{R}$ .

#### 1. Spectre ponctuel

Posons

$$I(x) = \int_{x_0}^x \frac{1}{\mathbf{F}(x')} dx'.$$

Nous partons de la fonction

$$h(x) = K e^{I(x)} \quad (3.34)$$

L'analyse de cette fonction nous amène à des conclusions suivantes :

(a) Si

$$\Re\{\lambda\} \leq 0 \Rightarrow h(x) \begin{cases} \text{est continue si } \forall a \in \mathbb{R} : \lim_{x \rightarrow a} I(x) \in \mathbb{R} \cup \{+\infty\}, \\ \text{est discontinue si } \exists a \in \mathbb{R} : \lim_{x \rightarrow a} I(x) \rightarrow -\infty \end{cases} \quad (3.35)$$

(b) Si

$$\Re\{\lambda\} > 0 \Rightarrow h(x) \begin{cases} \text{est continue si } \forall a \in \mathbb{R} : \lim_{x \rightarrow a} I(x) \in \mathbb{R} \cup \{-\infty\}, \\ \text{est discontinue si } \exists a \in \mathbb{R} : \lim_{x \rightarrow a} I(x) \rightarrow +\infty \end{cases} \quad (3.36)$$

Pour cet espace fixé, nous notons la conclusion suivante sur le spectre. Si  $\Re\{\lambda\} \leq 0$  et  $\forall a \in \mathbb{R}$ ,  $(\lim_{x \rightarrow a} I(x)) \in \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ , la fonction  $h(x)$  (voir (3.34)) est continue.

**Le spectre ponctuel est alors tout le demi-plan négatif.**

## 2. Spectre continu

Dans ce qui suit, nous considérons des scalaires  $\lambda$  qui ne sont pas dans le spectre ponctuel. En utilisant le théorème (3.2.8) précédemment présenté, nous obtenons les inégalités

$$e^{I(x)}\alpha_1\delta' \leq e^{I(x)} \underbrace{\int \frac{e^{-I(x)}}{\mathbf{F}(x)} f(x) dx}_{=h(x)} \leq e^{I(x)}\alpha_2\delta'$$

En remplaçant  $\delta'$  par (3.33), ces inégalités s'écrivent, après simplification

$$-\frac{\alpha_1}{\lambda} \leq h(x) \leq -\frac{\alpha_2}{\lambda}.$$

La fonction  $h$  est donc continue quelle que soit  $f$  continue choisie. Ainsi, les spectres continu et résiduel sont égaux à l'ensemble vide.

$$\sigma_c(\mathbf{L}_U) = \sigma_r(\mathbf{L}_U) = \emptyset$$

### Cas de fonctions intégrables sur $K = (0, 1)$

**Spectre ponctuel :** Sous l'hypothèse que  $I(x)$  et donc  $e^{I(x)}$  est continue<sup>4</sup> sur le compact  $K$ , pour des scalaires  $\lambda$  à partie réelle négative, on conclut que la fonction (3.34) est intégrable sur  $K$ . Par suite

$$\sigma_p(\mathbf{L}_U) = \mathbb{C}_-$$

Pour une approximation des fonctions propres, telles que trouvées précédemment, nous proposons de considérer une autre base : la base de Fourier en l'occurrence. Cependant, dans la mesure où les fonctions propres de l'opérateur de Koopman pourraient être approchées dans la base des monômes, nous développons une méthode pour les calculer dans cette base afin de la mettre en relation avec la base de Fourier. Ceci est l'objet du chapitre suivant.

---

4. Voir les relations (3.35) et (3.36).

# Chapitre 4

## Calcul numérique des fonctions propres

### Sommaire

---

<b>4.1 Représentation matricielle de l'opérateur de Koopman dans la base de monômes . . . . .</b>	<b>35</b>
4.1.1 Cas de dimension 1 . . . . .	36
4.1.2 Cas de dimension 2 . . . . .	37
<b>4.2 Cas d'une autre base : base de Fourier . . . . .</b>	<b>41</b>
4.2.1 Rappels sur le développement en série de Fourier .	41
4.2.2 Application au système en une dimension . . . . .	42
4.2.3 Exemple . . . . .	46

---

Ce chapitre est axé sur le calcul numérique des fonctions propres de l'opérateur de Koopman d'un système non hyperbolique dans une base donnée. Nous y expliquons comment construire la matrice qui approxime l'opérateur de Koopman dans la base de monômes et dans la base de Fourier. Précisons quand même que seule la base de Fourier sera prise en compte pour le calcul des fonctions propres. Ce chapitre sera clôturé par la visualisation de quelques fonctions propres de l'opérateur de Koopman associé à un système non hyperbolique.

### 4.1 Représentation matricielle de l'opérateur de Koopman dans la base de monômes

Comme déjà annoncé à l'introduction, grâce à l'opérateur de Koopman, on arrive à étudier un système non linéaire comme étant un système linéaire. L'opérateur de Koopman est cependant de dimension infinie et il peut être

utile de l'approximer par une matrice de grande taille, dans une base finie. Il s'agit donc d'une linéarisation globale et non locale du système. Pour ce faire, nous commençons par fixer la base de l'espace des fonctions observables. Nous supposons donc que le champ de vitesses  $\mathbf{F}$  est un polynôme. Un exemple illustratif est proposé selon le cas dans ce travail.

### 4.1.1 Cas de dimension 1

Pour notre cas, nous supposons que le champ de vitesse a la forme canonique d'un polynôme à une indéterminée  $x$  et à coefficients dans  $\mathbb{R}$ , c'est-à-dire étant donné le système dynamique  $\dot{x} = \mathbf{F}(x)$ ,

$$\mathbf{F}(x) = \sum_{i=0}^n a_i x^i, \quad a_i \in \mathbb{R}.$$

Le champ de vitesse s'écrit donc comme combinaison linéaire des éléments  $\{1, x, x^2, x^3, x^4, \dots, x^n\}$  qui forment ainsi la base  $\mathcal{B}$  que nous fixons. On peut alors, par la relation (2.6), évaluer l'action du générateur infinitésimal de l'opérateur de Koopman sur chaque élément  $x^j$  de la base  $\mathcal{B}$  ci-dessus. Et on obtient

$$\begin{aligned} \mathbf{L}_U x^j &= \mathbf{F}(x) \nabla x^j \\ &= \mathbf{F}(x) \cdot \frac{dx^j}{dx} \\ &= j \cdot \left( \sum_{i=0}^n a_i x^i \right) x^{j-1} \\ &= j \cdot (a_0 x^{j-1} + a_1 x^j + a_2 x^{j+1} + a_3 x^{j+2} + \dots + a_n x^{j-1+n}) \end{aligned} \tag{4.1}$$

En variant l'indice  $j$  et en notant par  $f_j$ , la partie littérale du monôme de degré  $j$  ( $j \geq 0$ ) dans l'expression (4.1), nous obtenons des coefficients

$$m_{ij} = j * a_{i-j+1} \quad \text{avec } j > i \tag{4.2}$$

de la matrice. Finalement on a une matrice "infinie" qu'on va noter, ici, par  $A$ , qui représente l'opérateur de Koopman.

$$A = \begin{bmatrix} 0 & a_0 & 0 & 0 & \dots \\ 0 & a_1 & 2a_0 & 0 & \dots \\ 0 & a_2 & 2a_1 & 3a_0 & \dots \\ 0 & a_3 & 2a_2 & 3a_1 & \dots \\ 0 & a_4 & 2a_3 & 3a_2 & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \dots \end{bmatrix} \tag{4.3}$$

En voici un exemple.

**Exemple 4.1.1** *Soit le système dynamique non linéaire en dimension 1 ci-dessous.*

$$\dot{x} = -x - x^2.$$

On peut montrer que

$$\mathbf{L}_U f_j(x) = -jx^j - jx^{j+1}.$$

La matrice de l'opérateur de Koopman associé à ce système est donnée par

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & \dots \\ 0 & -1 & 0 & 0 & \dots \\ 0 & -1 & -2 & 0 & \dots \\ 0 & 0 & -2 & -3 & \dots \\ 0 & 0 & 0 & -3 & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \dots \end{bmatrix}$$

## 4.1.2 Cas de dimension 2

En deux dimensions, le système dynamique s'écrit sous la forme

$$\begin{cases} \dot{x} = \mathbf{F}(x, y) \\ \dot{y} = \mathbf{G}(x, y) \end{cases}$$

avec  $\mathbf{F}(x, y)$  et  $\mathbf{G}(x, y)$  des polynômes à deux indéterminées.

Ils s'écrivent ainsi comme  $\mathbf{F}(x, y) = \sum_{j,i=0}^n a_{ij}x^i y^j$  et  $\mathbf{G}(x, y) = \sum_{j,i=0}^n b_{ij}x^i y^j$  dans la base

$$\mathcal{B} = \{1, x, y, x^2, xy, y^2, \dots, x^n, x^{n-1}y, \dots, xy^{n-1}, y^n\}. \quad (4.4)$$

Pour déterminer l'action de l'opérateur de Koopman sur un système en deux dimensions, par la relation (2.6), on procède comme en dimension 1, mais avec deux variables  $x$  et  $y$ . On doit donc tenir compte des dérivées partielles par rapport à l'une et l'autre de ces deux variables. L'action du générateur



infinitésimal sur un élément de la forme  $x^p y^k$ , de la base  $\mathcal{B}$  est donnée par

$$\begin{aligned}
 \mathbf{L}_U(x^p y^k) &= \nabla(x^p y^k) \begin{bmatrix} \mathbf{F}(x, y) \\ \mathbf{G}(x, y) \end{bmatrix} \\
 &= \begin{bmatrix} \frac{\partial(x^p y^k)}{\partial x} & \frac{\partial(x^p y^k)}{\partial y} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{F}(x, y) \\ \mathbf{G}(x, y) \end{bmatrix} \\
 &= \begin{bmatrix} px^{p-1} y^k & kx^p y^{k-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{F}(x, y) \\ \mathbf{G}(x, y) \end{bmatrix} \\
 &= px^{p-1} y^k \mathbf{F}(x, y) + kx^p y^{k-1} \mathbf{G}(x, y) \\
 &= px^{p-1} y^k \sum_{j,i=0}^n a_{ij} x^i y^j + kx^p y^{k-1} \sum_{j,i=0}^n b_{ij} x^i y^j \\
 &= \sum_{j,i=0}^n pa_{ij} x^{i+p-1} y^{j+k} + \sum_{j,i=0}^n kb_{ij} x^{i+p} y^{j+k-1}
 \end{aligned}$$

Comme en dimension 1, en variant les indices et en notant par  $f_{pk}$  la partie littérale du monôme de degré  $p + k$ , on obtient une matrice « infinie » de la forme

$$A = \begin{bmatrix} 0 & a_{00} & b_{00} & 0 & 0 & 0 & \dots \\ 0 & a_{10} & b_{10} & 2a_{00} & b_{00} & 0 & \dots \\ 0 & a_{01} & b_{01} & 0 & a_{00} & 2b_{00} & \dots \\ 0 & a_{20} & b_{20} & 2a_{10} & b_{10} & 0 & \dots \\ 0 & a_{11} & b_{11} & 2a_{01} & a_{10} + b_{01} & 2b_{10} & \dots \\ 0 & a_{02} & b_{02} & 0 & a_{01} & 2b_{01} & \dots \\ 0 & a_{30} & b_{30} & 2a_{20} & b_{20} & 0 & \dots \\ 0 & a_{21} & b_{21} & 2a_{11} & a_{20} + b_{11} & 2b_{20} & \dots \\ 0 & a_{12} & b_{12} & 2a_{02} & a_{11} + b_{02} & 2b_{11} & \dots \\ 0 & a_{03} & b_{03} & 0 & a_{02} & 2b_{02} & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \dots \end{bmatrix} \quad (4.5)$$

qui approxime l'opérateur de Koopman dans cette base et représente donc le système non linéaire.

Étant donné que dans l'un ou l'autre cas, la matrice obtenue est infinie, il est question de fixer le degré qu'on ne désire pas dépasser et ainsi tronquer la matrice à partir d'un certain degré.

**Remarque 4.1.2** *Comme on peut le constater, dans l'un ou l'autre cas, la première colonne est toujours nulle, si on la supprime, on doit aussi supprimer la première ligne ; cela signifie qu'il n'y a pas de terme indépendant*

dans l'expression du champ de vitesse, ce qui sera toujours le cas (en effet, l'origine est toujours un point fixe) pour le(s) système(s) considéré(s) dans ce travail.

**Remarque 4.1.3** *La matrice obtenue étant infinie, pour pouvoir l'utiliser numériquement, on peut la tronquer. Particulièrement pour la matrice (4.5), une fois qu'on a déjà fixé le degré, le tableau (4.1) montre comment la dimension de l'espace varie en fonction (du degré des monômes) de la base fixée.*

Degré (d)	0	1	2	3	4	5	6	7	...
Dimension (N)	1	3	6	10	15	21	28	36	...

TABLE 4.1 – Degré total des monômes de la base et dimension de l'espace

De manière générale, la dimension  $N$  de l'espace  $\mathcal{F}$  est reliée au degré total  $d$  des monômes de la base par la formule

$$N = \frac{(d+1)(d+2)}{2}, \quad (4.6)$$

qui correspond ainsi à la dimension de la matrice de Koopman avant suppression de la première ligne et de la première colonne.

Ci-dessous, voici un exemple pour lequel nous varions le degré total des monômes dans la base et donnons la matrice de Koopman, déjà tronquée, qui le représente.

**Exemple** Soit le système dynamique

$$\begin{cases} \dot{x} = x(1 - \frac{x}{2}) - xy \\ \dot{y} = xy - y \end{cases} \quad (4.7)$$

Le degré total du champ de vitesse est  $d = 2$  et donc  $N = 6$ . Dans la base  $\{1, x, y, x^2, xy, y^2\}$ , l'action du générateur infinitésimal appliqué à ce système est représentée par la matrice de Koopman suivante :

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ -0.5 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -2 \end{bmatrix} \quad (4.8)$$

Si  $d = 3$ ,  $N = 10$ , on a la matrice

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -0.5 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 0.5 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 2 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -3 \end{bmatrix} \quad (4.9)$$

**Remarque 4.1.4** *Après avoir approximé un système dynamique non linéaire par un système linéaire via l'opérateur de Koopman, on peut alors étudier facilement ses propriétés spectrales.*

Nous décrivons brièvement comment calculer analytiquement les approximations des fonctions propres de l'opérateur de Koopman associé à un système. Posons

$$\Phi(x, y) = (1, x, y, x^2, xy, y^2, x^3, x^2y, xy^2, y^3, \dots, x^n, x^{n-1}y, \dots, xy^{n-1}, y^n)^T$$

Soit  $f \in \mathcal{F}$ . La fonction  $f$  s'écrit de manière unique comme combinaison des éléments de la base (4.4), c'est-à-dire

$$f(x, y) = a^T \Phi(x, y). \quad (4.10)$$

L'action de de  $L_U$  sur l'observable définie par (4.10) est

$$\begin{aligned} \mathbf{L}_U f(x, y) &= \mathbf{L}_U (a^T \Phi(x, y)) \\ &= a^T \dot{\Phi}(x, y) \end{aligned} \quad (4.11)$$

Or

$$\mathbf{L}_U f(x, y) = (Aa)^T \Phi(x, y) = a^T A^T \Phi(x, y). \quad (4.12)$$

En combinant (4.11) et (4.12), on obtient le système

$$\dot{\Phi}(x, y) = A^T \Phi(x, y). \quad (4.13)$$

En appliquant le même raisonnement pour une fonction propre  $\phi_\lambda$ , on a

$$\phi_\lambda(x, y) = a^T \Phi(x, y) \quad (4.14)$$

et

$$\mathbf{L}_U \phi_\lambda(x, y) = \lambda \phi_\lambda(x, y). \quad (4.15)$$

Ce qui donne

$$\begin{aligned} (Aa)^T \Phi(x, y) &= \lambda a^T \Phi(x, y) \\ \Rightarrow a^T A^T \Phi(x, y) &= a^T \lambda \Phi(x, y) \\ \Rightarrow Aa &= \lambda a, \end{aligned} \quad (4.16)$$

avec  $A$  la matrice représentative de  $\mathbf{L}_U$ .

La solution,  $\mathbf{a}$ , de la dernière égalité de (4.16) permet de trouver les coefficients de fonctions propres de l'opérateur de Koopman qu'on peut alors exprimer analytiquement par

$$\phi_\lambda(x, y) = \Phi(x, y) a^T, \quad (4.17)$$

comme dans le cas linéaire, mais qui s'écrivent dans la base (4.4). Les vecteurs propres qui interviennent dans le calcul de ces fonctions propres sont donc les vecteurs propres à droite de la matrice de Koopman. Les détails de calcul présentés dans la sous-section (4.1.2) sont aussi valables pour tout point d'équilibre. On peut les utiliser pour déterminer les fonctions propres de l'opérateur de Koopman associé à un système dont l'équilibre est hyperbolique.

## 4.2 Cas d'une autre base : base de Fourier

Dans cette section du travail, nous développons une méthode numérique permettant de trouver une approximation de l'opérateur de Koopman dans la base de Fourier. Nous allons, par la suite, l'appliquer à un système dynamique non linéaire dont l'origine est un équilibre non hyperbolique pour approximer les fonctions propres de cet opérateur. Ces approximations s'écrivent comme combinaison linéaire des vecteurs propres à droite de la matrice de Koopman et des éléments de la base. Cette base a été choisie plutôt que celle monômes pour la raison que les fonctions propres généralisées obtenues ont toutes leurs dérivées nulles, pourtant ne peuvent pas être approximer par un polynôme constant, moins encore par le polynôme nul.

### 4.2.1 Rappels sur le développement en série de Fourier

Ces rappels sont rassemblés à partir de [16, pp.11-17], [17, p.22-23], [18, p.1] et [19].

Soit  $f$  une fonction  $2\pi$ -périodique sur l'intervalle  $[-\pi, \pi]$ . Le développement de  $f$  en série de Fourier donne une fonction de la forme

$$f(x) = \frac{1}{2}a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx)), \quad (4.18)$$

où les coefficients sont donnés par

$$a_0 = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) dx,$$

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos(nx) dx,$$

et

$$b_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin(nx) dx.$$

Sous la forme exponentielle, la série (4.18) s'écrit :

$$f(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{inx}, \quad (4.19)$$

avec

$$c_n = \frac{a_n - ib_n}{2} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) e^{-inx} dx$$

et

$$c_{-n} = \frac{a_{-n} + ib_{-n}}{2} = \bar{c}_n; \quad (n = 0, 1, 2, 3, \dots).$$

Pour plus de détails sur le développement d'une fonction en série de Fourier, nous renvoyons à l'une ou l'autre de références ci-dessus.

Dans la suite, nous considérerons la série de Fourier sous sa forme exponentielle.

### 4.2.2 Application au système en une dimension

Cette sous-section présente une brève description de l'approximation de l'opérateur de Koopman dans la base de Fourier. Soit  $\dot{x} = \mathbf{F}(x)$  un système unidimensionnel. Pour calculer les fonctions propres de l'opérateur de Koopman associé à ce système, on commence par trouver la série de Fourier de son champ de vitesse sous la forme

$$\mathbf{F}(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{inx}$$

et appliquer les résultats présentés sur l'opérateur de Koopman au début de ce travail.

Supposons que  $f(x) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} d_k e^{ikx}$  est une fonction propre de l'opérateur de Koopman dans la base de Fourier. L'action du générateur infinitésimal de l'opérateur de Koopman sur  $f$  donne

$$\begin{aligned}
 \mathbf{L}_U(f(x)) &= \left( \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{inx} \right) \cdot \left( \sum_{k=-\infty}^{\infty} d_k e^{ikx} \right)' \\
 &= \left( \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{inx} \right) \cdot \left( \sum_{k=-\infty}^{\infty} (ik) d_k e^{ikx} \right) \\
 &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_n (ik) d_k e^{i(n+k)x} \\
 &= \lambda \cdot \sum_{k=-\infty}^{\infty} d_k e^{ikx}
 \end{aligned}$$

On a donc l'équation aux valeurs propres

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_n (ik) d_k e^{i(n+k)x} = \lambda \cdot \sum_{k=-\infty}^{\infty} d_k e^{ikx} \quad (4.20)$$

qui permet de trouver les coefficients  $d_k$  de la fonction  $f$ .

De manière équivalente, on peut évaluer l'action de  $\mathbf{L}_U$  sur chaque élément  $e^{imx}$  de la base.

Ce qui donne

$$\begin{aligned}
 \mathbf{L}_U(e^{imx}) &= \mathbf{F}(x) \cdot \frac{d}{dx}(e^{imx}) \\
 &= \mathbf{F}(x) \cdot (im \cdot e^{imx}) \\
 &= \left( \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{inx} \right) \cdot (im \cdot e^{imx}) \\
 &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n (im) e^{i(n+m)x} \\
 &= \sum_{p=-\infty}^{\infty} c_{p-m} (im) e^{ipx}
 \end{aligned}$$

Nous pouvons alors construire la matrice de Koopman, dans cette nouvelle

base. En évaluant l'action de  $\mathbf{L}_U$  sur un élément  $e^{imx}$  de la base, on obtient

$$\begin{aligned}
 \mathbf{L}_U(e^{imx}) &= im \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{i(n+m)x} \\
 &= im(\dots + c_{-6}e^{i(m-6)x} + c_{-5}e^{i(m-5)x} + c_{-4}e^{i(m-4)x} + c_{-3}e^{i(m-3)x} \quad (4.21) \\
 &\quad + c_{-2}e^{i(m-2)x} + c_{-1}e^{i(m-1)x} + c_0e^{imx} + c_1e^{i(m+1)x} \\
 &\quad + c_2e^{i(m+2)x} + c_3e^{i(m+3)x} + c_4e^{i(m+4)x} + c_5e^{i(m+5)x} + c_6e^{i(m+6)x} \dots)
 \end{aligned}$$

Si nous fixons la valeur de  $N$ , nous pouvons alors varier  $m$  (prendre les valeurs négatives et celles positives) dans l'expression (4.21), pour construire la matrice de Koopman, qui est alors de la forme





Dans la matrice (4.22), les colonnes avant la colonne nulle correspondent abusivement aux colonnes de rangées négatives (elles correspondent aux valeurs négatives de  $m$ ).

Le calcul des fonctions propres de l'opérateur de Koopman va alors reposer sur une matrice de la forme (4.22) dont on peut se fixer la dimension en fonction des termes de la série de Fourier qui approxime le champ de vitesse du système. A un facteur près, on peut remarquer une certaine "symétrie" entre les coefficients  $c_n$  et  $c_{-n}$ , à partir de  $c_0$ , qui sont d'ailleurs complexes conjugués l'un de l'autre.

Cette matrice étant de dimension infinie, nous allons la tronquer pour calculer numériquement les fonctions propres. Ayant déjà fixé une valeur de  $N$ , la dimension de la matrice déjà tronquée sera

$$N' = 2N + 1$$

### 4.2.3 Exemple

Voici quelques illustrations sur la matrice de Koopman associée au système dans la base de Fourier. Selon la valeur de  $N$  fixée, la matrice de Koopman obtenue permettra d'obtenir les coefficients  $c_n$  de Fourier des fonctions propres pour  $n \in \{-N, -N + 1, \dots, N - 1, N\}$ . Nous nous limitons à un système à une dimension. Sans perdre de généralité, considérons la dynamique (3.8). La fonction  $f(x) = -x^3$  étant impaire, les coefficients  $a_0$  et  $a_n$  de (4.18) sont nuls, pour tout  $n$ , naturel. Les coefficients  $c_n$  sont donnés par

$$c_n = i(-1)^n \frac{(n^2\pi^2 - 6)}{n^3}, \quad \forall n \neq 0$$

Et le champ de vitesse peut être approximé par la série

$$\mathbf{F}(x) = -x^3 \simeq \sum_{n=-N}^N i(-1)^n \frac{(n^2\pi^2 - 6)}{n^3} e^{inx}, \quad (4.23)$$

pour  $N \rightarrow \infty$ .

- Pour  $N = 2$ , on a

$$A = \begin{bmatrix} 0.00000 & -3.86960 & 0.00000 & 3.06765 & -4.74730 \\ 7.73921 & 0.00000 & 0.00000 & -4.18480 & 6.13529 \\ -8.36960 & 3.86960 & 0.00000 & 3.86960 & -8.36960 \\ 6.13529 & -4.18480 & 0.00000 & 0.00000 & 7.73921 \\ -4.74730 & 3.06765 & 0.00000 & -3.86960 & 0.00000 \end{bmatrix}$$

- Pour  $N = 3$ , la matrice de Koopman correspondant est de dimension  $7 \times 7$ .

$$A = \begin{bmatrix} 0.00000 & -7.73921 & 4.18480 & 0.00000 & -2.37365 & 3.85184 & -4.85147 \\ 11.60881 & 0.00000 & -3.86960 & 0.00000 & 3.06765 & -4.74730 & 5.77776 \\ -12.55441 & 7.73921 & 0.00000 & 0.00000 & -4.18480 & 6.13529 & -7.12095 \\ 9.20294 & -8.36960 & 3.86960 & 0.00000 & 3.86960 & -8.36960 & 9.20294 \\ -7.12095 & 6.13529 & -4.18480 & 0.00000 & 0.00000 & 7.73921 & -12.55441 \\ 5.77776 & -4.74730 & 3.06765 & 0.00000 & -3.86960 & 0.00000 & 11.60881 \\ -4.85147 & 3.85184 & -2.37365 & 0.00000 & 4.18480 & -7.73921 & 0.00000 \end{bmatrix}$$

### Approximation des fonctions propres

On peut alors calculer les approximations de fonctions propres de l'opérateur de Koopman. Pour rappel, les fonctions propres « généralisées » de l'opérateur de Koopman associé au système (3.8) sont de la forme

$$f(x) = ke^{\frac{\lambda}{2x^2}}$$

Ce sont ces fonctions dont nous allons calculer les approximations. Nous considérons différentes valeurs de  $N$ , fixant ainsi la base finie dans laquelle nous voulons approximer l'opérateur. Nous ne reprenons que les fonctions propres associées aux valeurs propres réelles négatives.

Les figures (4.1) et (4.2) suivantes montrent que plus la valeur du nombre de termes de la série de Fourier, mieux sera l'approximation des fonctions propres.

Quand on compare les graphes, la fonction représentée à la figure (4.2) (en bleu à gauche), semble approcher au mieux la fonction généralisée  $f(x)$  en ce sens qu'elle ne s'écarte pas « trop » de valeurs autour de zéro par rapport à  $f$ .

#### 4.2. CAS D'UNE AUTRE BASE : BASE DE FOURIER

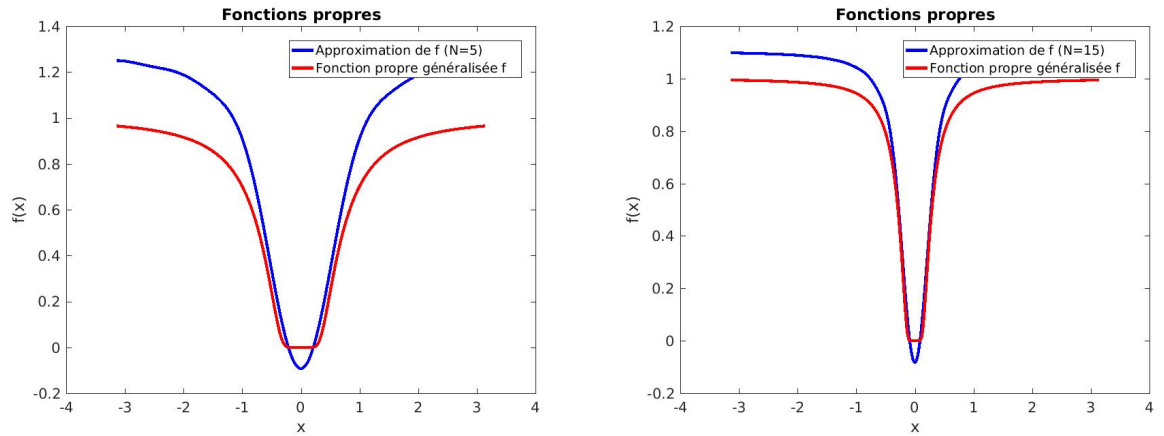


FIGURE 4.1 – Fonction propre "généralisée" et fonction propre approchée pour  $N = 5$ , et associée à la valeur propre  $\lambda = -0.70916$ ;  $N = 15$ , et associée à la valeur propre  $\lambda = 0.1158$

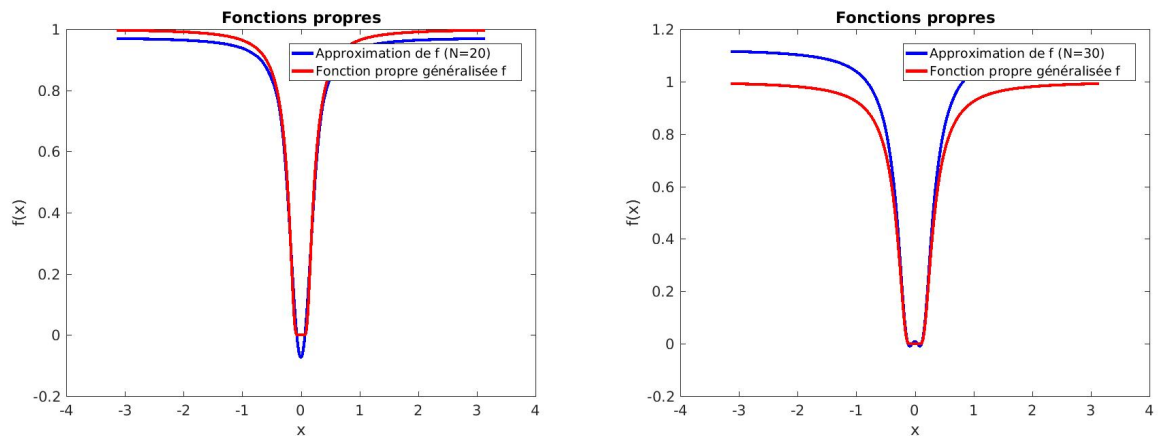


FIGURE 4.2 – Fonction propre "généralisée" et fonction propre approchée pour  $N = 20$  et associée à la valeur propre  $\lambda = -0.0739$ ;  $N = 30$  et associée à la valeur propre  $\lambda = -0.1582$ .

# Chapitre 5

## Conclusion

Nous voici à la fin de ce travail qui a porté sur la caractérisation spectrale de l'opérateur de Koopman pour un équilibre non hyperbolique. L'étude de la stabilité de systèmes dynamiques intéresse plus d'un chercheur. L'opérateur de Koopman est un nouvel outil pour l'étude des systèmes dynamiques non linéaires. Tout au long ce travail, dont l'objectif a été de calculer le spectre de l'opérateur de Koopman pour des systèmes non hyperboliques, nous avons :

- calculé exactement le spectre ponctuel et le spectre continu, en calculant les fonctions propres et les fonctions propres généralisées de l'opérateur de Koopman associé à un système dynamique non hyperbolique, pour certains espaces fonctionnels. Les résultats obtenus ont été généralisés pour tout système non hyperbolique en une dimension ;
- réalisé une approximation de l'opérateur de Koopman sous forme d'une matrice de grande taille ; d'une part, dans la base des monômes et d'autre part, dans la base de Fourier. La matrice étant de dimension infinie, nous l'avons tronquée pour ainsi traiter des systèmes linéaires de dimension finie. La matrice de Koopman permet donc de faire une linéarisation globale du système. Les vecteurs propres à droite de cette matrice ont permis d'approximer numériquement les fonctions propres de l'opérateur ;
- développé une méthode numérique pour calculer les fonctions propres de l'opérateur déjà approximé par une grande matrice dans la base de Fourier. Nous avons appliqué la méthode développée à un système non hyperbolique pour approximer les fonctions propres.

Loin de nous la prétention d'une étude complète sur le thème abordé. Nous

---

pensons avoir ouvert une voie pour l'étude du spectre de l'opérateur de Koopman associé à un système non hyperbolique. Pour un chercheur intéressé au thème, ce travail reste envisageable dans la mesure où on peut :

- considérer des systèmes dynamiques en dimension supérieure à 2 et dont les champs de vitesse ne sont pas forcément polynomiaux ;
- appliquer la méthode développée pour des systèmes non hyperboliques en dimension supérieure.
- travailler avec d'autres bases que celles de monômes et de Fourier et comparer les résultats qu'on obtiendrait numériquement sur l'approximation des fonctions propres à ceux-là que nous avons présentés ;
- considérer d'autres espaces fonctionnels et calculer le spectre continu de l'opérateur, par exemple, comme nous l'avons indiqué pour l'espace des fonctions analytiques.

# Bibliographie

- [1] J. K. Hale and H. Koçak, *Dynamics and bifurcations*, vol. 3. Springer Science & Business Media, 2012.
- [2] A. Mauroy and I. Mezić, “Global stability analysis using the eigenfunctions of the koopman operator,” *IEEE Transactions on Automatic Control*, vol. 61, no. 11, pp. 3356–3369, 2016.
- [3] A. Mauroy and I. Mezić, “A spectral operator-theoretic framework for global stability,” pp. 5234–5239, 2013.
- [4] P. Müllhaupt, *Introduction à l’analyse et à la commande des systèmes non linéaires*. PPUR Presses polytechniques, 2009.
- [5] M. Budišić, R. Mohr, and I. Mezić, “Applied koopmanism,” *Chaos : An Interdisciplinary Journal of Nonlinear Science*, vol. 22, no. 4, p. 047510, 2012.
- [6] J. Guckenheimer and P. Holmes, *Nonlinear oscillations, dynamical systems, and bifurcations of vector fields*, vol. 42. Springer Science & Business Media, 2013.
- [7] B. O. Koopman, “Hamiltonian systems and transformation in hilbert space,” *Proceedings of the National Academy of Sciences*, vol. 17, no. 5, pp. 315–318, 1931.
- [8] I. Mezić, “Spectral koopman operator methods in dynamical systems.” Book, Univesity of california, USA, En préparation.
- [9] A. Bátkai, M. Fijavz, and A. Rhandi, *Positive operator semigroups*. Springer, 2017.
- [10] Y. Lan and I. Mezić, “Linearization in the large of nonlinear systems and koopman operator spectrum,” *Physica D : Nonlinear Phenomena*, vol. 242, no. 1, pp. 42–53, 2013.
- [11] K.-J. Engel and R. Nagel, *A short course on operator semigroups*. Springer Science & Business Media, 2006.

- 
- [12] S. Klus, P. Koltai, and C. Schütte, “On the numerical approximation of the perron-frobenius and koopman operator,” *arXiv preprint arXiv :1512.05997*, 2015.
- [13] S. H. Strogatz, *Nonlinear dynamics and chaos : with applications to physics, biology, chemistry, and engineering*. CRC Press, 2018.
- [14] A. Pazy, *Semigroups of linear operators and applications to partial differential equations*, vol. 44. Springer Science & Business Media, 2012.
- [15] P. Gaspard, G. Nicolis, A. Provata, and S. Tasaki, “Spectral signature of the pitchfork bifurcation : Liouville equation approach,” *Physical Review E*, vol. 51, no. 1, p. 74, 1995.
- [16] R. D. Stuart, “An introduction to fourier analysis,” 1961.
- [17] A. Kufner and J. Kadlec, *Fourier series*. Iliffe, 1971.
- [18] R. Edwards, “Fourier series. a modern introduction. vol. 1, volume 64 of,” *Graduate Texts in Mathematics*.
- [19] R. E. Edwards, *Fourier series : a modern introduction*, vol. 2. Springer Science & Business Media, 2012.
- [20] C. Mugisho, Zagabe, “Etude de la stabilité uniforme des systèmes commutés non linéaires via l’opérateur de koopman.” Mémoire, inédit, 2017.
- [21] A. Surana and A. Banaszuk, “Linear observer synthesis for nonlinear systems using koopman operator framework,” *IFAC-PapersOnLine*, vol. 49, no. 18, pp. 716–723, 2016.
- [22] B. Jacob and H. Zwart, “14th internet seminar : infinite-dimensional linear systems theory,” *Lecture Notes*, 2010.

Annexe **A**



---

# Code matlab

```
1  %ce code calcule les coefficients de la serie de fourier d'un champ de
    vitesse en 1D, %calcule les fonctions propres de l'operateur de
    Koopman dans la base de fourier ainsi %que les approximations des
    fonctions propres.
2  clc
3  clear all
4  k=5; % fixe le nombre de termes de la serie
5  t=-2*k:2*k; %% fixer les coefficients qui interviennet dans la matrice
6  coeff=zeros(numel(t),1);
7  A = zeros(2*k+1); %% matrice de koopman
8  for n=-2*k:2*k
9      coeff(n+2*k+1)=(-1)^n*1i*(-pi^2*n^2+6)/n^3; % coefficients de la serie
10 end
11 %% remplacer l'' infini par zero (si le champ de vitesse est impaire (si
    non, on %commente la ligne)
12 coeff(2*k+1)=0;
13 coeff;
14 for m=1:2*k+1
15     for p=0:2*k
16         A(m,p+1)=(-k+p)*1i*coeff(2*k+m-p);
17     end
18 end
19 A ;[E,V]=eig(A); l=eig(A);
20 x=-pi:0.0001:pi; % discretisation de x
21 for j=0:2*k
22     base(j+1,:)=exp((-k+j)*1i*x);
23 end
24 f=zeros(size(base,1),size(base,2));
25 propre=zeros(size(base,1),size(base,2));
26 for j=1:2*k+1
27     for n=1:2*k+1
28         f(j,:)=f(j,:)+E(n,j)*base(n,:); % mise a jour de f
29         propre(j,:)=exp(l(j)./(2*x.^2));
30     end
31 end
32 f;
33 figure
34 plot(x,real(f(end-1,:)), '-b', 'LineWidth',2);
35 hold on
36 plot(x,1*real(propre(end-1,:)),'-r', 'LineWidth',2);
37 title('Fonctions propres');          54
38 xlabel('x');ylabel('f(x)');
39 legend('Approximation de f (N=5)', 'Fonction propre generalisee f')
```

---