

# Les difficultés de l'apprentissage de la trigonométrie



Marie PIERARD et Valérie HENRY

DIDACTIfen

7 et 8 juillet 2020



Institut de Recherches en Didactiques et Education de l'Université de Namur



UNIVERSITÉ  
DE NAMUR



UNIVERSITÉ  
DE NAMUR

## Introduction : explication du titre

### **Introduction**

Obstacles

Réflexions

Proposition

Travail  
accompli et  
perspectives

Références

## Introduction : explication du titre

« Les difficultés de l'apprentissage de la trigonométrie »

ou

« Identifier et surmonter les obstacles provenant d'un enseignement compartimenté de la trigonométrie »

**Introduction**

Obstacles

Réflexions

Proposition

Travail  
accompli et  
perspectives

Références

« Les difficultés de l'apprentissage de la trigonométrie »

ou

« Identifier et surmonter les obstacles provenant d'un enseignement compartimenté de la trigonométrie »

**Introduction**

Obstacles

Réflexions

Proposition

Travail  
accompli et  
perspectives

Références

- « enseignement compartimenté »
  - ▶ Facette géométrique de la trigonométrie (angles mesurés en degrés et liés à des figures géométriques)
  - ▶ Facette analytique de la trigonométrie (angles supérieurs à l'angle plein ou de mesure négative, cercle trigonométrique, fonctions)
  
- « obstacles » à la connexion des deux facettes de la trigonométrie dans le curriculum belge (réparti sur 3 années).



UNIVERSITÉ  
DE NAMUR

## Introduction : comment en sommes-nous arrivées là ?

### **Introduction**

Obstacles

Réflexions

Proposition

Travail  
accompli et  
perspectives

Références



UNIVERSITÉ  
DE NAMUR

## Introduction : comment en sommes-nous arrivées là ?

- Début de la thèse en 2015  
Objectif : concevoir une ingénierie didactique sur l'introduction de la facette analytique de la trigonométrie

### **Introduction**

Obstacles

Réflexions

Proposition

Travail  
accompli et  
perspectives

Références



## Introduction : comment en sommes-nous arrivées là ?

- Début de la thèse en 2015  
Objectif : concevoir une ingénierie didactique sur l'introduction de la facette analytique de la trigonométrie
- Présentation des analyses préalables lors du DIDACTIfen 2018
  - ▶ Histoire et savoir savant
  - ▶ Littérature
  - ▶ Programmes et de manuels scolaires
  - ▶ Questionnement d'enseignants

### Introduction

Obstacles

Réflexions

Proposition

Travail  
accompli et  
perspectives

Références



## Introduction : comment en sommes-nous arrivées là ?

### Introduction

Obstacles

Réflexions

Proposition

Travail  
accompli et  
perspectives

Références

- Début de la thèse en 2015  
Objectif : concevoir une ingénierie didactique sur l'introduction de la facette analytique de la trigonométrie
- Présentation des analyses préalables lors du DIDACTIfen 2018
  - ▶ Histoire et savoir savant
  - ▶ Littérature
  - ▶ Programmes et de manuels scolaires
  - ▶ Questionnement d'enseignants
- Nouvel objectif suite aux analyses préalables : réflexion sur le savoir à enseigner
  - ▶ Curriculum construit à l'inverse à l'histoire.





## Introduction : comment en sommes-nous arrivées là ?

### Introduction

Obstacles

Réflexions

Proposition

Travail  
accompli et  
perspectives

Références

- Début de la thèse en 2015  
Objectif : concevoir une ingénierie didactique sur l'introduction de la facette analytique de la trigonométrie
- Présentation des analyses préalables lors du DIDACTIfen 2018
  - ▶ Histoire et savoir savant
  - ▶ Littérature
  - ▶ Programmes et de manuels scolaires
  - ▶ Questionnement d'enseignants
- Nouvel objectif suite aux analyses préalables : réflexion sur le savoir à enseigner
  - ▶ Curriculum construit à l'inverse à l'histoire.
  - ▶ Savoir savant dont la structure dépend du manuel.



## Introduction : comment en sommes-nous arrivées là ?

### Introduction

Obstacles

Réflexions

Proposition

Travail  
accompli et  
perspectives

Références

- Début de la thèse en 2015  
Objectif : concevoir une ingénierie didactique sur l'introduction de la facette analytique de la trigonométrie
- Présentation des analyses préalables lors du DIDACTIfen 2018
  - ▶ Histoire et savoir savant
  - ▶ Littérature
  - ▶ Programmes et de manuels scolaires
  - ▶ Questionnement d'enseignants
- Nouvel objectif suite aux analyses préalables : réflexion sur le savoir à enseigner
  - ▶ Curriculum construit à l'inverse à l'histoire.
  - ▶ Savoir savant dont la structure dépend du manuel.
  - ▶ Programmes scolaires qui évoluent sans cesse.



UNIVERSITÉ  
DE NAMUR

## Obstacles : le parcours du cosinus

Introduction

**Obstacles**

Réflexions

Proposition

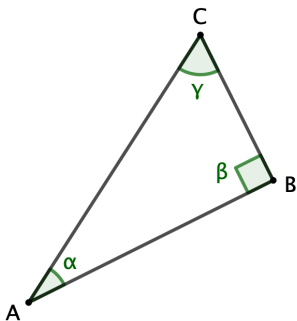
Travail  
accompli et  
perspectives

Références



## Obstacles : le parcours du cosinus

- Grade 9 :  $\cos(\alpha) = \frac{|AB|}{|AC|} = \frac{\text{longueur du côté opposé}}{\text{longueur de l'hypoténuse}}$



Introduction

**Obstacles**

Réflexions

Proposition

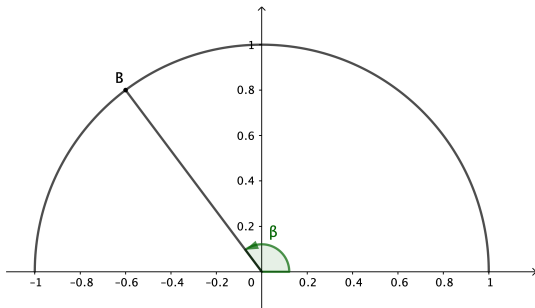
Travail  
accompli et  
perspectives

Références



## Obstacles : le parcours du cosinus

- Grade 9 :  $\cos(\alpha) = \frac{|AB|}{|AC|} = \frac{\text{longueur du côté opposé}}{\text{longueur de l'hypoténuse}}$
- Grade 10 :  $\cos(\beta)$  est l'abscisse du point  $B$



Introduction

**Obstacles**

Réflexions

Proposition

Travail  
accompli et  
perspectives

Références



Introduction

**Obstacles**

Réflexions

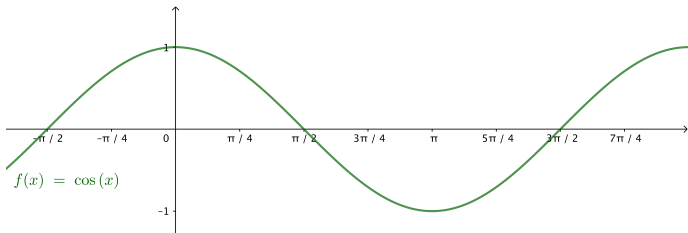
Proposition

Travail  
accompli et  
perspectives

Références

## Obstacles : le parcours du cosinus

- Grade 9 :  $\cos(\alpha) = \frac{|AB|}{|AC|} = \frac{\text{longueur du côté opposé}}{\text{longueur de l'hypoténuse}}$
- Grade 10 :  $\cos(\beta)$  est l'abscisse du point  $B$
- Grade 11 :  $\cos(x)$  est une fonction, les cosinus sont les ordonnées des points du graphe





UNIVERSITÉ  
DE NAMUR

## Obstacles : le parcours du cosinus

Introduction

**Obstacles**

Réflexions

Proposition

Travail  
accompli et  
perspectives

Références



UNIVERSITÉ  
DE NAMUR

## Obstacles : le parcours du cosinus

- Grade 9 : triangles rectangles
  - ▶ Le cosinus est un rapport de longueurs, positif, sans unité et indépendant du triangle choisi.
  - ▶ Il y a une bijection entre les angles et les cosinus.

Introduction

**Obstacles**

Réflexions

Proposition

Travail  
accompli et  
perspectives

Références





## Obstacles : le parcours du cosinus

- Grade 9 : triangles rectangles
  - ▶ Le cosinus est un rapport de longueurs, positif, sans unité et indépendant du triangle choisi.
  - ▶ Il y a une bijection entre les angles et les cosinus.
- Grade 10 : triangles quelconques - cercle trigonométrique
  - ▶ Les formules et propriétés soulignées plus tôt ne sont plus valables dans tous les cas.
  - ▶ À un cosinus peuvent correspondre deux angles différents.
  - ▶ Les élèves peuvent penser que le cosinus est une longueur et plus un rapport, ou encore qu'il dépend d'un point et plus d'un angle.



## Obstacles : le parcours du cosinus

- Grade 9 : triangles rectangles
  - ▶ Le cosinus est un rapport de longueurs, positif, sans unité et indépendant du triangle choisi.
  - ▶ Il y a une bijection entre les angles et les cosinus.
- Grade 10 : triangles quelconques - cercle trigonométrique
  - ▶ Les formules et propriétés soulignées plus tôt ne sont plus valables dans tous les cas.
  - ▶ À un cosinus peuvent correspondre deux angles différents.
  - ▶ Les élèves peuvent penser que le cosinus est une longueur et plus un rapport, ou encore qu'il dépend d'un point et plus d'un angle.
- Grade 11 : fonctions trigonométriques
  - ▶ L'argument du cosinus n'est plus forcément un angle.
  - ▶ Par la périodicité de la fonction, on peut associer un cosinus à une infinité d'angles.



UNIVERSITÉ  
DE NAMUR

## Obstacles : le parcours du cosinus

Introduction

**Obstacles**

Réflexions

Proposition

Travail  
accompli et  
perspectives

Références

## Obstacles : le parcours du cosinus

On parle toujours du même objet : le cosinus. Mais...

Introduction

**Obstacles**

Réflexions

Proposition

Travail  
accompli et  
perspectives

Références



UNIVERSITÉ  
DE NAMUR

## Obstacles : le parcours du cosinus

On parle toujours du même objet : le cosinus. Mais...

Introduction

**Obstacles**

Réflexions

Proposition

Travail  
accompli et  
perspectives

Références

- Changement de nature
  - ▶ rapport de longueurs
  - ▶ abscisse
  - ▶ ordonnée



## Obstacles : le parcours du cosinus

On parle toujours du même objet : le cosinus. Mais...

Introduction

**Obstacles**

Réflexions

Proposition

Travail  
accompli et  
perspectives

Références

- Changement de nature
  - ▶ rapport de longueurs
  - ▶ abscisse
  - ▶ ordonnée
  
- Changement de contexte
  - ▶ triangles rectangles
  - ▶ triangles quelconques / cercle trigonométrique
  - ▶ fonctions

## Obstacles : le parcours du cosinus

On parle toujours du même objet : le cosinus. Mais...

- Changement de nature
  - ▶ rapport de longueurs
  - ▶ abscisse
  - ▶ ordonnée
  
- Changement de contexte
  - ▶ triangles rectangles
  - ▶ triangles quelconques / cercle trigonométrique
  - ▶ fonctions

⇒ Comment réunifier tout ça ?

Introduction

**Obstacles**

Réflexions

Proposition

Travail  
accompli et  
perspectives

Références



UNIVERSITÉ  
DE NAMUR

## Réflexions : le cercle trigonométrique

Introduction

Obstacles

**Réflexions**

Proposition

Travail  
accompli et  
perspectives

Références





UNIVERSITÉ  
DE NAMUR

## Réflexions : le cercle trigonométrique

Le cercle trigonométrique est un outil pratique...

- visualisation des signes des rapports trigonométriques
- résolution d'équations trigonométriques
- visualisation des arcs (pour les radians)

Introduction

Obstacles

**Réflexions**

Proposition

Travail  
accompli et  
perspectives

Références



Introduction

Obstacles

**Réflexions**

Proposition

Travail  
accompli et  
perspectives

Références

## Réflexions : le cercle trigonométrique

Le cercle trigonométrique est un outil pratique...

- visualisation des signes des rapports trigonométriques
- résolution d'équations trigonométriques
- visualisation des arcs (pour les radians)

... mais c'est un artefact (Rabardel)

- intermédiaire entre les triangles et les fonctions
- étape d'un processus de généralisation
- non indispensable



Introduction

Obstacles

**Réflexions**

Proposition

Travail  
accompli et  
perspectives

Références

## Réflexions : le cercle trigonométrique

Le cercle trigonométrique est un outil pratique...

- visualisation des signes des rapports trigonométriques
- résolution d'équations trigonométriques
- visualisation des arcs (pour les radians)

... mais c'est un artefact (Rabardel)

- intermédiaire entre les triangles et les fonctions
- étape d'un processus de généralisation
- non indispensable

... et une source potentielle de difficultés pour les élèves.



Introduction

Obstacles

**Réflexions**

Proposition

Travail  
accompli et  
perspectives

Références

## Réflexions : le cercle trigonométrique

Le cercle trigonométrique est un outil pratique...

- visualisation des signes des rapports trigonométriques
- résolution d'équations trigonométriques
- visualisation des arcs (pour les radians)

... mais c'est un artefact (Rabardel)

- intermédiaire entre les triangles et les fonctions
- étape d'un processus de généralisation
- non indispensable

... et une source potentielle de difficultés pour les élèves.

⇒ Peut-on restructurer le savoir en modifiant le rôle du cercle trigonométrique ?



UNIVERSITÉ  
DE NAMUR

## Proposition : partir des projections orthogonales

Introduction

Obstacles

Réflexions

**Proposition**

Travail  
accompli et  
perspectives

Références



UNIVERSITÉ  
DE NAMUR

Introduction

Obstacles

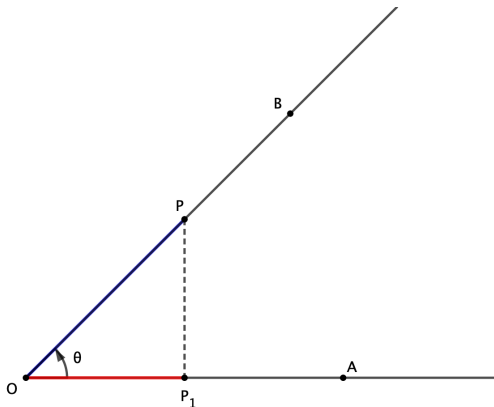
Réflexions

**Proposition**

Travail  
accompli et  
perspectives

Références

## Proposition : partir des projections orthogonales





UNIVERSITÉ  
DE NAMUR

Introduction

Obstacles

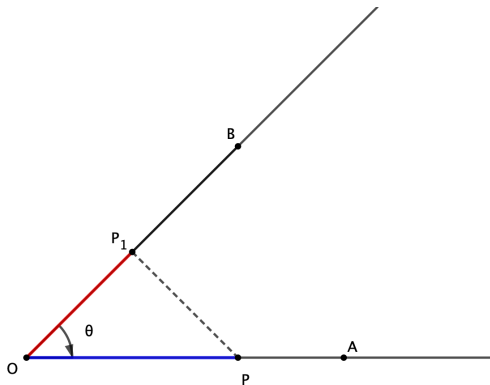
Réflexions

**Proposition**

Travail  
accompli et  
perspectives

Références

## Proposition : partir des projections orthogonales





UNIVERSITÉ  
DE NAMUR

Introduction

Obstacles

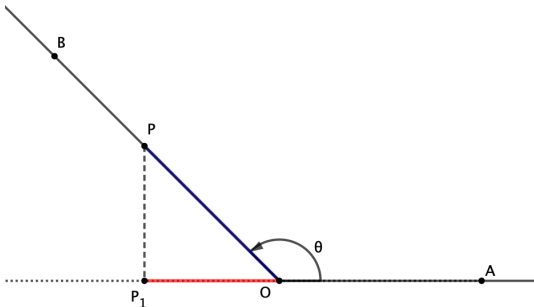
Réflexions

**Proposition**

Travail  
accompli et  
perspectives

Références

## Proposition : partir des projections orthogonales







UNIVERSITÉ  
DE NAMUR

Introduction

Obstacles

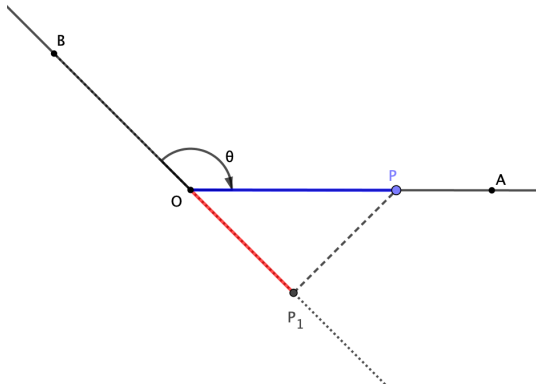
Réflexions

**Proposition**

Travail  
accompli et  
perspectives

Références

## Proposition : partir des projections orthogonales





UNIVERSITÉ  
DE NAMUR

## Proposition : partir des projections orthogonales

Avantages :

Introduction

Obstacles

Réflexions

**Proposition**

Travail  
accompli et  
perspectives

Références



UNIVERSITÉ  
DE NAMUR

## Proposition : partir des projections orthogonales

Avantages :

- On part d'une définition générale, qui réunit les grades 9 et 10 dès le départ.

Introduction

Obstacles

Réflexions

**Proposition**

Travail  
accompli et  
perspectives

Références



## Proposition : partir des projections orthogonales

Avantages :

- On part d'une définition générale, qui réunit les grades 9 et 10 dès le départ.
- Les triangles rectangles constituent des applications particulières de la définition, pour lesquelles les projections orthogonales sont déjà construites.

Introduction

Obstacles

Réflexions

**Proposition**

Travail  
accompli et  
perspectives

Références

## Proposition : partir des projections orthogonales

Avantages :

- On part d'une définition générale, qui réunit les grades 9 et 10 dès le départ.
- Les triangles rectangles constituent des applications particulières de la définition, pour lesquelles les projections orthogonales sont déjà construites.
- Le cercle, trigonométrique ou non, constitue une application particulière de la définition, pour laquelle la longueur du segment projeté est fixée.

Introduction

Obstacles

Réflexions

**Proposition**

Travail  
accompli et  
perspectives

Références



## Proposition : partir des projections orthogonales

Avantages :

- On part d'une définition générale, qui réunit les grades 9 et 10 dès le départ.
- Les triangles rectangles constituent des applications particulières de la définition, pour lesquelles les projections orthogonales sont déjà construites.
- Le cercle, trigonométrique ou non, constitue une application particulière de la définition, pour laquelle la longueur du segment projeté est fixée.
- Tous les angles sont traités de la même manière.

Introduction

Obstacles

Réflexions

**Proposition**

Travail  
accompli et  
perspectives

Références

## Proposition : partir des projections orthogonales

Avantages :

- On part d'une définition générale, qui réunit les grades 9 et 10 dès le départ.
- Les triangles rectangles constituent des applications particulières de la définition, pour lesquelles les projections orthogonales sont déjà construites.
- Le cercle, trigonométrique ou non, constitue une application particulière de la définition, pour laquelle la longueur du segment projeté est fixée.
- Tous les angles sont traités de la même manière.
- Le savoir savant reste cohérent s'il est structuré à partir des projections orthogonales. On peut travailler sans cercle trigonométrique et construire ce dernier en fin de travail, pour automatiser les procédures.

Introduction

Obstacles

Réflexions

**Proposition**

Travail  
accompli et  
perspectives

Références



## Travail accompli

UNIVERSITÉ  
DE NAMUR

Introduction

Obstacles

Réflexions

Proposition

**Travail  
accompli et  
perspectives**

Références





UNIVERSITÉ  
DE NAMUR

Introduction

Obstacles

Réflexions

Proposition

**Travail  
accompli et  
perspectives**

Références

## Travail accompli

- Réorganisation du savoir savant
  - ▶ à partir des projections orthogonales,
  - ▶ en repoussant l'apparition du cercle trigonométrique.
- Écriture d'un savoir à enseigner cohérent
  - ▶ avec notre structure du savoir savant,
  - ▶ avec les objectifs actuels des programmes.



## Travail accompli

- Réorganisation du savoir savant
  - ▶ à partir des projections orthogonales,
  - ▶ en repoussant l'apparition du cercle trigonométrique.
- Écriture d'un savoir à enseigner cohérent
  - ▶ avec notre structure du savoir savant,
  - ▶ avec les objectifs actuels des programmes.

## Perspectives

- Analyser ce savoir à enseigner
  - ▶ à l'aide d'un modèle praxéologique de référence, structuré par des organisations mathématiques (TAD de Chevallard),
  - ▶ en se questionnant sur les obstacles que les projections orthogonales peuvent générer.
- Concevoir et expérimenter de courtes activités didactiques.



UNIVERSITÉ  
DE NAMUR

Introduction

Obstacles

Réflexions

Proposition

**Travail  
accompli et  
perspectives**

Références

Merci pour votre attention !



UNIVERSITÉ  
DE NAMUR

Introduction

Obstacles

Réflexions

Proposition

Travail  
accompli et  
perspectives

Références

- ▶ Artigue, M. (1998).  
**Ingénierie didactique.**  
Recherches en didactique des mathématiques, 9(3) :281–308.
- ▶ Biot, C. and Bouquet, C. (1850).  
**Leçons nouvelles de trigonométrie.**  
Dezobry et E. Magdeleine, Libraires-Éditeurs.
- ▶ Bloch, I. (2009).  
**Activité... la mesure des angles en radians au lycée.**  
Petit x, 80 :47–53.
- ▶ Bosch, M. and Gascon, J. (2006).  
**Twenty-five years of the didactic transposition.**  
ICMI Bulletin, 58 :51–65.
- ▶ Bressoud, D. (2010).  
**Historical reflections on teaching trigonometry.**  
The Mathematics Teacher, 104 (2) :106–112.
- ▶ Chevallard, Y. (1991).  
**La transposition didactique.**  
La Pensée Sauvage.
- ▶ Cohen, G. (2015).  
**Les angles sous tous les angles**, volume Tangente HS-53.  
Editions POLE.
- ▶ Colesse, S. and Vassard, C. (2006).  
**Les tables trigonométriques.**  
Compte-rendu du colloque inter-IREM de Nantes.



UNIVERSITÉ  
DE NAMUR

Introduction

Obstacles

Réflexions

Proposition

Travail  
accompli et  
perspectives

Références

- ▶ **CREM (2004).**  
Pour une culture mathématique accessible ? tous, Élaboration d'outils pédagogiques pour développer des compétences citoyennes.  
M. Ballieu et M.-F. Guissard coordinateurs.
- ▶ **De Kee, S., Mura, R., and Dionne, J. (1996).**  
La compréhension des notions de sinus et de cosinus chez les élèves du secondaire.  
For the Learning of Mathematics, 16 (2) :19–27.
- ▶ **Garnir, H. (1963).**  
**Fonctions de variables réelles I.**  
Librairie Universitaire de Louvain - Gauthier Villars Paris.
- ▶ **Gelin, E. (1902).**  
**Précis de trigonométrie rectiligne - A l'usage des élèves des classe d'Humanités et des candidats**  

---

  
Wesmael-Charlier.
- ▶ **Gür, H. (2009).**  
Trigonometry learning.  
New Horizons in Education, 57 (1) :67–80.
- ▶ **IREM de Poitiers (2014).**  
Enseigner les mathématiques en 5<sup>e</sup> à partir des grandeurs : les angles.  
T. Chevalarias *et al.*
- ▶ **Kendal, M. and Stacey, K. (1996).**  
Trigonometry : Comparing ratio and unit circle methods.  
Technology in mathematics education : proceedings of the 19th annual conference of the Mathematics Education Research Group of Australasia (MERGA).
- ▶ **Khalloufi, F. and Smida, H. (2012).**  
Constructing mathematical meaning of a trigonometric function through the use of an artefact.  
African Journal of Research in MST Education, A6 (2) :207–224.



UNIVERSITÉ  
DE NAMUR

Introduction

Obstacles

Réflexions

Proposition

Travail  
accompli et  
perspectives

Références

- ▶ **Lang, S. and Murrow, G. (1988).**  
Geometry, a High School Course, volume Second Edition.  
Springer-Verlag.
- ▶ **Lefort, J. (1998).**  
Petite histoire de la trigonométrie.  
L'Ouvert, (91) :10–16.
- ▶ **Looze, A. (2014).**  
La trigonométrie : une histoire à l'envers tournée vers le ciel.  
Diapositives pour une formation CECAFOC.
- ▶ **Moore, K., LaForest, K., and Hee Jung, K. (2012).**  
The unit circle and unit conversions.  
Proceedings of the Fifteenth Annual Conference on Research in Undergraduate Mathematics Education, pages 1–16–1–31.
- ▶ **Nijmber, C.**  
Approche instrumentale et didactique : apports de Pierre Rabardel.  
<http://www.adjectif.net/spip/spip.php?article202>.  
consulté le 5 septembre 2014.
- ▶ **Pierard, M. and Henry, V. (2014).**  
La tablette tactile dans l'enseignement secondaire, un outil utile pour le cours de mathématiques ?  
Mémoire réalisé ? l'Université de Namur.
- ▶ **Plane, H. (2019).**  
Vers la trigonométrie.  
Au fil des maths, de la maternelle ? l'université - Bulletin de l'APMEP, 532 :86–89.
- ▶ **Proulx, J. (2003).**  
L'histoire de la trigonométrie comme outil de réflexion didactique.  
Bulletin de l'Association Mathématique du Québec, XLIII(3) :13–27.



UNIVERSITÉ  
DE NAMUR

Introduction

Obstacles

Réflexions

Proposition

Travail  
accompli et  
perspectives

Références

- ▶ Rabardel, P. (1995a).  
Les hommes et les technologies - Une approche cognitive des instruments contemporains.  
Armand Colin.
- ▶ Rabardel, P. (1995b).  
Qu'est-ce qu'un instrument ? Appropriation, conceptualisation, mises en situation.  
Le mathématicien, le physicien et le psychologue - Outils pour le calcul et le traçage de courbes,  
CNDP :61-65.
- ▶ Rabardel, P. (1999).  
Éléments pour une approche instrumentale en didactique des mathématiques.  
Association pour la recherche en didactique des mathématiques - Actes de la dixième université d'été de didactique des mathématiques, pages 203-213.
- ▶ Schons, N.-J. (1968).  
Traité de trigonométrie rectiligne - 5<sup>ème</sup> édition.  
La Procure.
- ▶ Swokowski and Cole (1998).  
Algèbre et trigonométrie, avec géométrie analytique.  
DeBoeck Université.
- ▶ Tanguay, D. (2010).  
Degrés, radians, arcs et sinusoides.  
Petit x, 82 :59-71.
- ▶ Thompson, P. W. (2008).  
Conceptual analysis of mathematical ideas : some spadework at the foundation of mathematics education.  
Plenary paper presented at the Annual Meeting of the International Group for the Psychology of Mathematics Education, 1 :31-49.
- ▶ Travaux et thèses de didactique (1994).  
La transposition didactique à l'épreuve.  
La Pensée Sauvage.  
coordinateurs : Arsac, G et al.



UNIVERSITÉ  
DE NAMUR

Introduction

Obstacles

Réflexions

Proposition

Travail  
accompli et  
perspectives

Références

- ▶ Vadcard, L. (2002).  
Conception de l'angle chez les élèves de seconde.  
Recherches en didactique des mathématiques, 22(1) :77–117.
- ▶ Van Binst, R. (1951).  
Notes de trigonométrie rectiligne.  
Université du travail Paul Pastur - Charleroi.
- ▶ Van Sickle, J. (2011).  
A History of Trigonometry Education in the United States : 1776-1900.  
<https://doi.org/10.7916/D8G166T7>.
- ▶ Warin, S. and Henry, V. (2017).  
Étude du savoir à enseigner dans le domaine de la trigonométrie.  
Mémoire réalisé à l'Université de Namur.
- ▶ XVème école d'été de didactique des mathématiques (2011).  
En amont et en aval des ingénieries didactiques.  
La Pensée Sauvage.  
coordinateurs : C. Margolinas *et al.*
- ▶ Youschkevitch, A. (1976).  
Les mathématiques arabes (VIII<sup>e</sup>-XV<sup>e</sup> siècles).  
Librairies philosophiques J. VRIN.