

RESEARCH OUTPUTS / RÉSULTATS DE RECHERCHE

Loi de Pouillet généralisée et applications

Manyamwa, Isaac; Mburunge, Bantu; Lukamba, Ameli; Lambin, Philippe

Published in:

Cahiers du Ceruki : nouvelle série

Publication date:

2021

[Link to publication](#)

Citation for pulished version (HARVARD):

Manyamwa, I, Mburunge, B, Lukamba, A & Lambin, P 2021, 'Loi de Pouillet généralisée et applications', *Cahiers du Ceruki : nouvelle série*, vol. 64, pp. 351-364.

General rights

Copyright and moral rights for the publications made accessible in the public portal are retained by the authors and/or other copyright owners and it is a condition of accessing publications that users recognise and abide by the legal requirements associated with these rights.

- Users may download and print one copy of any publication from the public portal for the purpose of private study or research.
- You may not further distribute the material or use it for any profit-making activity or commercial gain
- You may freely distribute the URL identifying the publication in the public portal ?

Take down policy

If you believe that this document breaches copyright please contact us providing details, and we will remove access to the work immediately and investigate your claim.

Loi de Pouillet généralisée et applications

Isaac Manyamwa Bénédicte¹, Bantu Mburunge Frédéric¹, Ameli Lukamba Godefroid¹ et Philippe Lambin^{1,2,*}

1. Département de Physique-Technologie, Institut Supérieur Pédagogique de Bukavu, République Démocratique Du Congo

2. Département de physique, Université de Namur, 5000 Namur, Belgique

* Auteur à qui la correspondance doit être adressée. E-mail : philippe.lambin@unamur.be

Résumé. En électricité, la loi de Pouillet exprime que la résistance d'un conducteur droit de section constante est directement proportionnelle à sa longueur et inversement proportionnelle à l'aire de sa section droite. Cette loi est ici généralisée à n'importe quel système de coordonnées curvilignes orthogonales pour des géométries qui, dans l'espace des trois coordonnées curvilignes, se représentent par un parallélépipède rectangle. Diverses applications de cette nouvelle formulation sont illustrées.

Abstract. Pouillet's law of electricity states that the resistance of a conductor having the shape of a right prism is directly proportional to its length and inversely proportional to the area of its cross section. This law is here generalized in any system of orthogonal curvilinear coordinates to geometrical objects that, in the curvilinear coordinate space, are represented by a right rectangular parallelepiped. A few applications of this new formulation are illustrated.

1. Introduction

La loi de Pouillet est une des plus vieilles lois de l'électricité [1]. Elle exprime la résistance électrique R d'un conducteur prismatique droit en fonction de sa longueur L , de l'aire S de sa section droite et d'une propriété intrinsèque du matériau qu'est sa résistivité ρ_0 : $R = \rho_0 L/S$. L'objet doit être un prisme ou un cylindre droit homogène et isotrope pour que cette formule soit correcte.

A priori, la résistance électrique d'un conducteur homogène ayant une forme plus complexe que celle juste décrite est plus difficile à relier à ses paramètres géométriques. Si le conducteur reste droit, mais présente une section variable sur la longueur, Lévy [2] a proposé au XIX^{ème} siècle de

définir la résistance par $R = \rho_0 \int_{z_1}^{z_2} (1/S) dz$ où z est la coordonnée longitudinale. Dans le cas où

l'aire de la section droite S est le carré d'une fonction linéaire de z , cette formule conduit au résultat simple suivant

$$R = \rho_0 \frac{L}{\sqrt{S_1 S_2}} \quad (1)$$

qui généralise la loi de Pouillet au cas d'une pyramide droite tronquée ou d'un tronc de cône droit [3]. Dans cette expression, S_1 et S_2 désignent l'aire des deux bases terminales. Cette formule n'est cependant qu'approximative, car la définition de Lévy suppose implicitement que la densité de courant dans la direction longitudinale soit uniforme à travers chaque section droite du conducteur. Or, cette hypothèse n'est compatible avec les conditions aux limites sur la surface latérale (le vecteur densité de courant doit y être tangent) que si le conducteur est un prisme ou un cylindre droit.

Comme montré dans cet article, la loi de Pouillet peut être généralisée, tout en conservant sa simplicité intrinsèque, pour certaines formes pourvu que celles-ci puissent être décrites simplement dans un système de coordonnées curvilignes orthogonales. La loi de Pouillet généralisée est l'éq. (5)

dérivée ci-dessous. Quelques exemples sont illustrés et commentés dans les sections suivantes. On s'intéresse avec quelques détails au cas d'un tronç de cône dans la section 6.

2. Généralisation de la loi de Pouillet

L'objectif de cette section est de déterminer la résistance électrique d'un objet dont la forme peut être décrite simplement dans un système de coordonnées curvilignes orthogonales. Ce système est caractérisé par trois paramètres géométriques q_1, q_2, q_3 reliés de manière biunivoque aux coordonnées cartésiennes x, y, z de l'espace R_3 . Ces relations sont telles que les équations $q_i(x,y,z) = q_i$ pour $i = 1, 2, 3$, où le second membre est une constante, représentent trois surfaces dans l'espace R_3 dont l'intersection est un point, dénoté P [4]. Le repère du système de coordonnées curvilignes orthogonales au point P est formé des trois vecteurs unitaires \mathbf{e}_i normaux aux trois surfaces juste évoquées (voir Fig. 1). Si l'on modifie les paramètres q_i d'une quantité infinitésimale dq_i , le point P se déplace de $\mathbf{r} = \sum_{i=1}^3 h_i dq_i \mathbf{e}_i$ dans l'espace, où les $h_i = \left| \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial q_i} \right|$ sont les facteurs d'échelle, encore appelés coefficients de Lamé, du système de coordonnées curvilignes orthogonales. Ils interviennent dans l'expression des opérateurs de dérivation.

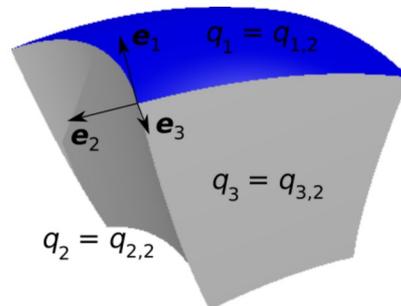


Figure 1. Volume limité par 6 surfaces qui se coupent à angle droit, correspondant à des valeurs constantes des coordonnées curvilignes orthogonales q_1, q_2, q_3 . Dans l'exemple illustré ici, les surfaces $q_1 = Cte$ sont de courbure gaussienne positive (portions d'ellipsoïde), les surfaces $q_2 = Cte$ sont de courbure gaussienne négative (portions d'hyperboloïde) et les surfaces $q_3 = Cte$ sont de courbure nulle (portions de plan). Pour le calcul de la résistance de ce volume conducteur, les faces supérieures et inférieures sont supposées être des équipotentiellles.

L'objet qui nous intéresse, illustré en Fig. 1, est un conducteur de résistivité ρ_0 délimités par les six surfaces, appelées faces,

$$q_i(x,y,z) = q_{i,1} \text{ et } q_i(x,y,z) = q_{i,2} > q_{i,1} \text{ pour } i = 1, 2, 3 .$$

Via des contacts électriques extérieurs, on suppose que la face $q_{\alpha,1}$ est une équipotentielle portée au potentiel V_1 de même que la face "opposée" $q_{\alpha,2}$ est portée au potentiel $V_2 < V_1$. Ici, α désigne un des trois indices 1, 2, ou 3, les deux autres indices étant notés β et γ . Les quatre faces "latérales" $q_{\beta,1}, q_{\beta,2}, q_{\gamma,1}$ et $q_{\gamma,2}$ sont supposées être en contact avec un isolant (l'air).

A l'intérieur du conducteur, la densité de courant \mathbf{j} est un vecteur orthogonal aux faces équipotentiellles et tangent aux faces latérales. Ces conditions aux limites seront automatiquement satisfaites si l'on pose que \mathbf{j} est un vecteur partout aligné avec vecteur de base \mathbf{e}_α , pour autant que cette hypothèse soit compatibles avec les équations de l'électrocinétique.

La première équation exprime la conservation de la charge électrique sous la forme $\nabla \cdot \mathbf{j} = 0$. Sous l'hypothèse $\mathbf{j} = j \mathbf{e}_\alpha$, cette loi de conservation devient $\frac{\partial}{\partial q_\alpha} [h_\beta h_\gamma j] = 0$ qui s'intègre directement sous la forme $j = \frac{1}{h_\beta h_\gamma} c(q_\beta, q_\gamma)$ où c est une fonction arbitraire de q_β et q_γ . Le courant

qui traverse n'importe quelle section du conducteur, d'équation $q_\alpha(x,y,z) = q_\alpha$ avec $q_{\alpha,1} \leq q_\alpha \leq q_{\alpha,2}$, est alors donné par

$$I = \iint_D \mathbf{j} \cdot \mathbf{e}_\alpha h_\beta h_\gamma dq_\beta dq_\gamma = \iint_D c(q_\beta, q_\gamma) dq_\beta dq_\gamma \text{ où } D = [q_{\beta,1}, q_{\beta,2}] \times [q_{\gamma,1}, q_{\gamma,2}]. \quad (2)$$

Comme il se doit, l'expression trouvée ne dépend pas de la section considérée, caractérisée par la valeur particulière de q_α .

La seconde équation est la loi d'Ohm écrite sous la forme $\rho_0 \mathbf{j} = -\nabla V$. Sous l'hypothèse $\mathbf{j} = j \mathbf{e}_\alpha$, cette relation prend la forme

$$\frac{1}{h_\alpha} \frac{\partial V}{\partial q_\alpha} = -\rho_0 j.$$

En multipliant les deux membres par le facteur d'échelle h_α , en remplaçant j par l'expression trouvée plus haut et en intégrant les deux membres par rapport à q_α , on trouve

$$V_1 - V_2 = \rho_0 \int_{q_{\alpha,1}}^{q_{\alpha,2}} \frac{h_\alpha}{h_\beta h_\gamma} c(q_\beta, q_\gamma) dq_\alpha. \quad (3)$$

Cette expression n'est compatible avec les conditions aux limites que si le membre de droite est une constante. Il faut donc que l'intégrand soit indépendant des coordonnées q_β et q_γ . Ceci implique deux choses :

(1) que le facteur impliquant les trois facteurs d'échelle se factorise en

$$\frac{h_\alpha}{h_\beta h_\gamma} = \frac{f(q_\alpha)}{g(q_\beta, q_\gamma)} \quad (4)$$

(2) que l'on choisisse $c(q_\beta, q_\gamma) = g(q_\beta, q_\gamma)$ à un facteur multiplicatif près. Ce facteur peut être déterminé en imposant la valeur de $V_1 - V_2$ par l'éq. (3). L'éq. (4) est une condition nécessaire pour que la variable q_α se sépare des deux autres variables dans l'expression de l'équation de Laplace écrite dans le système de coordonnées curvilignes utilisé. Si ce n'est pas le cas, l'hypothèse $\mathbf{j} = j \mathbf{e}_\alpha$ ne peut pas être posée.

En remplaçant $c(q_\beta, q_\gamma)$ par $g(q_\beta, q_\gamma)$ dans les éqs. (2) et (3), on obtient une expression mathématique pour la résistance électrique $(V_1 - V_2)/I$

$$R_\alpha = \rho_0 \frac{\int_{q_{\alpha,1}}^{q_{\alpha,2}} f(q_\alpha) dq_\alpha}{\int_D g(q_\beta, q_\gamma) dq_\beta dq_\gamma} \quad (5)$$

où l'indice α rappelle que le courant est injecté par la face $q_\alpha = q_{\alpha,1}$.

Cette équation constitue une généralisation de la loi de Pouillet. C'est le résultat central de cet article. En coordonnées cartésiennes, les facteurs d'échelles sont tous égaux à 1. Dans l'éq. (4), on peut alors poser $f = 1$ et $g = 1$ (ou n'importe quelle constante). Le numérateur de l'éq. (5) donne la longueur du conducteur dans la direction du courant et son dénominateur est l'aire de la section droite de ce conducteur.

Intéressons nous un instant à un système de coordonnées curvilignes à deux dimensions dans le plan (x,y) , notées ici u et v , que l'on complétera par la coordonnée cartésienne z perpendiculaire. Pour rendre ces coordonnées orthogonales, on peut prendre $u(x,y) = \text{Re } w(x+iy)$ et $v(x,y) = \text{Im } w(x+iy)$ où $w(\zeta)$ est une fonction analytique de la variable complexe $\zeta = x+iy$ dont la dérivée est supposée ne pas s'annuler. Dans le plan (x,y) , les courbes $u(x,y) = \text{Cte}$ et $v(x,y) = \text{Cte}$ sont

orthogonales à leurs points de croisement [5]. Si la fonction w et son domaine de définition sont choisis de telle sorte que la correspondance $(x,y) \leftrightarrow (u,v)$ soit bi-univoque, alors u , v et z forment un système de coordonnées curvilignes orthogonales à trois dimensions (plus précisément 2+1 dimensions). Les facteurs d'échelle h_u , h_v et h_z sont tels que $h_z = 1$ (trivialement) et $h_u = h_v$ en vertu des conditions de Cauchy-Riemann que vérifie la fonction inverse $w^{-1}(u+iv)$. Dans les notations de ce paragraphe, le conducteur de la Fig. 1 est un prisme droit dont les bases sont situées dans les plans $z = z_1$ et $z = z_2$ et sont délimitées par 4 courbes d'équations $u(x,y) = u_1$, $u(x,y) = u_2$, $v(x,y) = v_1$ et $v(x,y) = v_2$. Si les électrodes sont les deux bases du conducteur, la loi de Pouillet élémentaire s'applique. Si les électrodes alimentent les faces u_1 et u_2 ou les faces v_1 et v_2 , un des facteurs d'échelle h_u ou h_v est au numérateur du membre de gauche de l'éq. (4) alors que l'autre est au dénominateur. Ils se simplifient et l'on peut choisir $f = g = 1$. L'éq. (5) donne alors $R_u = \rho_0(u_2-u_1)/[(v_2-v_1)(z_2-z_1)]$ ou $R_v = \rho_0(v_2-v_1)/[(u_2-u_1)(z_2-z_1)]$. C'est un résultat remarquable, car dans l'espace des trois coordonnées u , v , z , le conducteur est représenté par le parallépipède rectangle $[u_2-u_1] \times [v_2-v_1] \times [z_2-z_1]$ et la résistance trouvée est précisément celle donnée par la loi de Pouillet ordinaire pour ce parallépipède rectangle. Cette sorte d'invariance conforme de la résistance est un peu plus compliquée pour un système de coordonnées curvilignes orthogonales réellement tri-dimensionnelles, à cause des facteurs métriques f et g qui interviennent dans les intégrales au numérateur et au dénominateur de l'éq. (5).

A titre d'illustration non-triviale, considérons le cas des coordonnées de l'ellipsoïde aplati ξ , η , φ . Ici, ξ est une variable sans dimension positive, η est un angle variant entre $-\pi/2$ et $+\pi/2$ et φ est un angle (azimut) variant entre 0 et 2π . Comme en coordonnées cylindriques, la surface $\varphi = \text{Cte}$ est un demi-plan contenant l'axe z et d'angle azimutal φ . Les surfaces définies par $\xi = \text{Cte}$ et $\eta = \text{Cte}$ définissent un demi-ellipsoïde de révolution aplati et la moitié d'une nappe d'hyperboloïde de révolution, d'équations

$$\frac{x^2 + y^2}{(F \cosh \xi)^2} + \frac{z^2}{(F \sinh \xi)^2} = 1 \quad \text{et} \quad \frac{x^2 + y^2}{(F \cos \eta)^2} - \frac{z^2}{(F \sin \eta)^2} = 1 \quad (6)$$

respectivement [6]. F est une constante positive dont le double est la distance entre les foyers de l'ellipse et de l'arc d'hyperbole obtenus en coupant l'ellipsoïde et l'hyperboloïde par le plan (x,z) . Les demi-axes de l'ellipse sont

$$a = F \cosh \xi \quad \text{et} \quad b = F \sinh \xi \quad (7)$$

La demi-branche d'hyperbole à retenir dans le plan (x,z) est celle qui est asymptotique à la demi-droite issue de l'origine et faisant un angle η avec l'axe x positif. Les ellipses et les demi-branches d'hyperbole correspondant à différentes valeurs de ξ et de η sont confocales.

Les facteurs d'échelle de ce système de coordonnées curvilignes orthogonales sont

$$h_\xi = h_\eta = F \sqrt{\sinh^2 \xi + \sin^2 \eta} \quad , \quad h_\varphi = F \cosh \xi \cos \eta \quad .$$

Conformément au cadre général de cette étude, le conducteur est ici un volume possédant deux faces planes verticales correspondant à $\varphi = \varphi_1$ et $\varphi = \varphi_2$, deux portions d'ellipsoïde correspondant à $\xi = \xi_1$ et $\xi = \xi_2$ et deux portions d'hyperboloïde correspondant à $\eta = \eta_1$ et $\eta = \eta_2$. Le volume de la Fig. 1 illustre cette géométrie.

Lorsque les surfaces équipotentielles sont les faces ellipsoïdales, la coordonnée q_α désigne la coordonnée ξ . L'éq. (4) fait alors intervenir la facteur $h_\xi/(h_\eta h_\varphi)$, qui est égal à $1/(F \cosh \xi \cos \eta)$. On peut donc choisir $f = 1/\cosh \xi$ et $g = \cos \eta$ dans l'éq. (5) pour obtenir

$$R_\xi = \rho_0 \frac{\int_{\xi_1}^{\xi_2} (1/\cosh \xi) d\xi}{F \int_{\eta_1}^{\eta_2} \cos \eta d\eta \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} d\varphi} = \rho_0 \frac{2 \left[\arctan(e^{\xi_2}) - \arctan(e^{\xi_1}) \right]}{F (\sin \eta_2 - \sin \eta_1)(\varphi_2 - \varphi_1)} . \quad (8)$$

C'est un résultat remarquablement simple alors que la géométrie ne l'est pas. Un cas limite est celui d'un conducteur creux délimité par les ellipsoïdes complets $\xi = \xi_1$ et $\xi = \xi_2$. Pour cela, il faut fermer le volume de la Fig. 1 en posant $\varphi_1 = 0$, $\varphi_2 \rightarrow 2\pi$, $\eta_1 \rightarrow -\pi/2$ et $\eta_2 \rightarrow \pi/2$. Plus intéressante peut-être que la résistance du conducteur ainsi obtenu, la capacité d'un condensateur délimité par les deux ellipsoïdes confocaux peut être déduite de l'éq. (8). En effet, dans le cas où les électrodes sont des surfaces fermées, l'une étant contenue dans l'autre, la résistance R du conducteur creux et la capacité C du condensateur obtenu en remplaçant le milieu conducteur (résistivité ρ_0) par un milieu diélectrique (permittivité absolue ϵ) vérifient la relation $RC = \rho_0 \epsilon$ [7]. A partir de là, on obtient

$$C = \frac{2\pi\epsilon F}{\arctan[F/(a_1 + b_1)] - \arctan[F/(a_2 + b_2)]}$$

après avoir exprimé ξ_1 et ξ_2 en fonction des demis axes des deux ellipsoïdes par l'éq. (7). Cette formule généralise à la géométrie de l'ellipsoïde de révolution l'étude du condensateur sphérique dont on retrouve la capacité en prenant la limite $F \rightarrow 0$.

3. Coordonnées cylindriques

Cette section est consacrée à quelques applications de la formule générale (éq. 5) en coordonnées cylindriques ρ , φ , z . Les facteurs d'échelle sont $h_\rho = 1$, $h_\varphi = \rho$ et $h_z = 1$. Le conducteur est une portion de secteur cylindrique circulaire définie par $\rho_1 \leq \rho \leq \rho_2$, $\varphi_1 \leq \varphi \leq \varphi_2$ et $z_1 \leq z \leq z_2$ (voir Fig. 2 et Fig. 3).

Courant radial

Les électrodes sont les faces cylindriques de rayon ρ_1 et ρ_2 , voir Fig. 2. La coordonnée de référence étant $q_\alpha = \rho$, on tire facilement de l'éq. (4) que $f(\rho) = 1/\rho$ et $g(\varphi, z) = 1$. L'éq. (5) donne

$$R_\rho = \rho_0 \frac{\ln(\rho_2 / \rho_1)}{L\Phi} \quad (9)$$

où $L = z_2 - z_1$ est la hauteur du conducteur et $\Phi = \varphi_2 - \varphi_1$. A la limite où $\Phi \rightarrow 2\pi$, on obtient la résistance électrique d'un tube cylindrique dans la direction radiale.

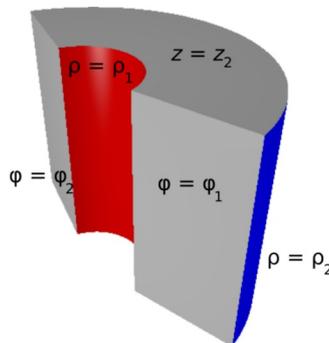


Figure 2. Portion de secteur cylindrique circulaire dont les faces cylindriques intérieure et extérieure sont des équipotentielles. La densité de courant est un champ radial.

Courant azimutal

Ici, $q_\alpha = \varphi$, les électrodes sont les faces rectangulaires d'azimut φ_1 et φ_2 , voir Fig. 3. En suivant le même raisonnement que ci-dessus, on posera $f(\varphi) = 1$, $g(\rho, z) = 1/\rho$, d'où

$$R_\square = \rho_0 \frac{\Phi}{\int_D (\mathbf{j} / \rho) d\rho dz} \quad (10)$$

où $\Phi = \varphi_2 - \varphi_1$ comme ci-dessus. Pour la géométrie considérée ici, D désigne un rectangle de largeur $\rho_2 - \rho_1$ et de hauteur $L = z_2 - z_1$. L'intégrale du dénominateur vaut alors $L \ln(\rho_2/\rho_1)$. La résistance obtenue est celle d'un anneau fendu de section rectangulaire.

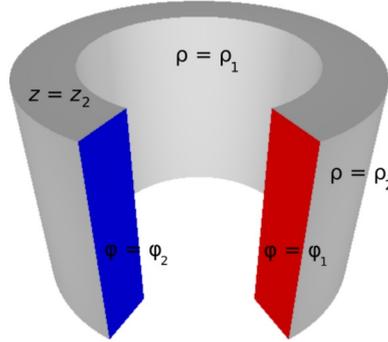


Figure 3. Anneau fendu de section rectangulaire dont les deux faces verticales sont des équipotentielles. La densité de courant est un champ azimutal (circonférentiel).

L'éq. (10) reste valable tant que le courant est azimutal, ce qui est le cas quelle que soit la forme de la section droite de l'anneau. On s'intéressera ici à un tore (anneau fermé, $\Phi \rightarrow 2\pi$) de section circulaire. D désigne alors un disque dans le plan (ρ, z) , de rayon $(\rho_2 - \rho_1)/2$ et dont le centre est situé à une distance $\rho = (\rho_2 + \rho_1)/2$ de l'axe z . L'intégrale du dénominateur de l'éq. (10) peut être calculée analytiquement, conduisant au résultat suivant

$$R_{\text{tore}} = \rho_0 \frac{1}{(\rho_2 + \rho_1)/2 - \sqrt{\rho_1 \rho_2}}.$$

Il n'est pas possible d'injecter le courant par une source de tension extérieure dans un anneau fermé (spire). Cependant, le courant peut être induit par une variation du flux d'induction magnétique embrassé par le tore, lequel présente alors une résistance R_{tore} au courant induit.

Revenons un instant au cas général d'un anneau fendu de section droite quelconque (éq. 10). On appellera ρ_c le rayon courbure de l'anneau, défini comme la distance du centre de gravité géométrique de la section droite à l'axe z . Si ρ_c est nettement plus grand que la largeur radiale de section droite, on développera $1/\rho = 1/[\rho_c + (\rho - \rho_c)]$ en série de puissance de $(\rho - \rho_c)/\rho_c$. En se limitant à l'ordre 3, on obtient

$$R_\square = \rho_0 \frac{\Phi \rho_c}{S + I_z / \rho_c^2} \quad \text{où} \quad I_z = \int_D (\mathbf{j} - \rho_c)^2 d\rho dz$$

où S est l'aire de la section droite. Si on néglige le second terme proportionnel à I_z (le moment d'inertie géométrique de la section droite par rapport à l'axe z), on retrouve la résistance d'un conducteur droit de longueur $\Phi \rho_c$. Le terme proportionnel à I_z est une correction de l'aire de la section droite due à la courbure du conducteur. Ce n'est que le premier terme d'un développement perturbatif.

4. Coordonnées sphériques

En coordonnées sphériques r , θ et φ , les facteurs d'échelle sont $h_r = 1$, $h_\theta = r$ et $h_\varphi = r \sin \theta$. On s'intéresse ici à une portion de couronne sphérique définie par $r_1 \leq r \leq r_2$, $\theta_1 \leq \theta \leq \theta_2$ et $\varphi_1 \leq \varphi \leq \varphi_2$ (voir Fig. 4a).

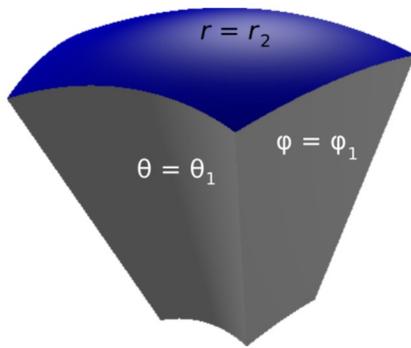
Courant radial

La coordonnée de référence q_α est la coordonnée radiale r , les électrodes sont les calottes sphériques de rayon r_1 et r_2 . Les facteurs d'échelle et l'éq. (4) permettent de définir $f(r) = 1/r^2$ et $g(\theta, \varphi) = \sin \theta$. La résistance de l'objet découle directement de l'éq. (5)

$$R_r = \rho_0 \frac{r_2 - r_1}{\Phi r_1 r_2 (\cos \theta_1 - \cos \theta_2)}$$

où $\Phi = \varphi_2 - \varphi_1$. En prenant les limites $\theta_1 \rightarrow 0$, $\theta_2 \rightarrow \pi$ et $\Phi \rightarrow 2\pi$, on obtient la résistance radiale d'une calotte sphérique de rayons intérieur r_1 et extérieur r_2 .

(a)



(b)

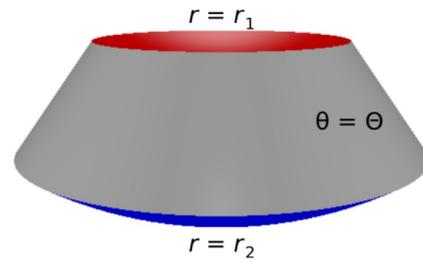


Figure 4. (a) Portion de couronne sphérique limitée par deux cônes coaxiaux d'angle θ_1 et θ_2 et par deux plans verticaux d'angle azimutal φ_1 et φ_2 . Les faces sphériques sont des équipotentielles, la densité de courant est un champ radial. (b) Cas limite d'un tronc de cône limité par deux calottes sphériques concentriques. La face supérieure est concave, la face inférieure est convexe et toutes les deux sont des équipotentielles.

Le cas d'une portion de cône de demi-ouverture angulaire Θ délimitée par les calottes sphériques r_1 et r_2 s'obtient facilement en faisant $\theta_1 \rightarrow 0$, $\theta_2 = \Theta$ et $\Phi \rightarrow 2\pi$:

$$R_{\text{cône}} = \rho_0 \frac{r_2 - r_1}{4\pi r_1 r_2 \sin^2(\Theta/2)} = \rho_0 \frac{r_2 - r_1}{\sqrt{S_1 S_2}} \quad (11)$$

où S_1 et S_2 désignent l'aire des deux calottes sphériques terminales.

6. Résistance d'un tronc conique droit

La résistance d'un tronc conique dont les bases sont planes peut être approximativement calculée par l'éq. (11) pourvu que l'angle Θ soit petit de manière à pouvoir négliger la courbure des calottes sphériques servant d'électrodes. Dans ces conditions, S_1 et S_2 s'identifient à l'aire des deux bases planes et $r_2 - r_1$ correspond à la hauteur L du cône. La formule ainsi obtenue reproduit l'éq. (1).

Nous avons testé la validité de l'éq. (1) par une mesure expérimentale de la résistance d'un conducteur conique. Pour ce faire, nous avons utilisé un entonnoir en plastique. La partie évasée de l'entonnoir a la forme d'un tronc de cône de 28 mm de hauteur et dont les deux bases ont un diamètre de 6 et 35 mm. Ce cône est prolongé par un tube cylindrique, qui a été scié pour ne conserver que la partie conique. Ce volume a été rempli d'eau distillée dans laquelle 10 % en masse

de sel (NaCl) avait été dissout. Du papier aluminium a servi d'électrodes planes aux deux extrémités du tronc conique. Ce papier, tendu, a été fixé sur le bord des ouvertures à l'aide d'un mastic au silicone. La résistance entre les deux électrodes a été mesurée à l'ohmmètre. Sept mesures de la résistance ont été effectuées et moyennées pour éliminer autant que possible les effets du contact des sondes de l'ohmmètre avec le papier aluminium. La valeur moyenne de la résistance mesurée est $R_{\text{cône}} = 13,7 \Omega$.

Pour déterminer la résistivité de l'électrolyte, la même solution d'eau salée a été introduite dans un tube cylindrique en plastique de 45 mm de hauteur et de 12 mm de diamètre intérieur. La résistance de la colonne d'eau salée a été déterminée en suivant la même procédure que ci-dessus, ici par 12 mesures indépendantes. La valeur moyenne obtenue est $R_{\text{cyl}} = 29 \Omega$. Nous en avons déduit $\rho_0 = 0,073 \Omega\text{m}$. Connaissant la hauteur du cône et le diamètre de ses deux bases, l'éq. (1) a été utilisée pour donner $R_{\text{cône}} = 12,5 \Omega$. Cette valeur est de 10 % inférieure à la résistance mesurée expérimentalement. La différence provient de deux sources : (i) l'ensemble des erreurs expérimentales, principalement sur ρ_0 , et (ii) le caractère approximatif de l'éq. (1) pour un cône dont la demi-ouverture angulaire ($\Theta = 27,4^\circ$) n'est pas très petite. En effet, il a été démontré numériquement [8] que l'éq. (1) sous-estime la résistance réelle d'un tronc conique mais, curieusement, l'éq. (11) donne un résultat plus proche de la valeur vraie. Sachant que le rayon de courbure r_i de chaque calotte sphérique ($i = 1,2$ voir Fig. 4(b)) est reliée au rayon ρ_i de la base i du tronc conique par la formule $r_i = \rho_i / \sin \Theta$, l'éq. (11) donne $R_{\text{cône}} = 13,2 \Omega$, qui se rapproche effectivement de la valeur mesurée.

7. Conclusions

Les expressions obtenues dans cette étude sont, pour la plupart, connues depuis longtemps. Cependant, elles ont toutes été dérivées de l'éq. (5), qui est une généralisation de la loi de Pouillet écrite en coordonnées curvilignes orthogonales. Cette équation est valable sous la condition de séparation des variables q_i imposée par l'éq. (4). De nombreuses applications en découlent, lesquelles peuvent intéresser ceux qui enseignent ou étudient l'électrodynamique classique et les mathématiques appliquées. La portée de l'éq. (5) débordé du cadre strict de l'électrocinétique. En électrostatique, la capacité d'un condensateur fermé peut être obtenue en remplaçant le milieu conducteur par un milieu diélectrique (voir section 3). Aussi, l'éq. (5) peut être utilisée pour calculer la résistance thermique d'un objet par conduction de la chaleur. Il suffit de remplacer ρ_0 par l'inverse de la conductivité thermique et de supposer que la conductivité du milieu extérieur (l'air) est beaucoup plus petite que celle du matériau.

Références

1. PALERMO, C. et TORRES, J. "Manuel d'électricité" 2ème édition, (Dunot, Paris, 2020) p. 9.
2. LÉVY, M. "Sur les unités électriques", Annales de Chimie et de Physique, tome XXVI (1882) 95-121.
3. CROVA, A. "Construction d'un étalon de résistance électrique", J. Phys. Théor. Appl. 3 (1874), 54-57.
4. ARFKEN, G.B. and WEBER, H.J. "Mathematical methods for physicists" 6th edition (Elsevier Academic Press, Burlington, 2005) p. 103-145.
5. BROWN, J.W. and CHURCHILL, R.V. "Complex variables and applications" 8th edition (McGraw-Hill, New York, 2009) p. 82.
6. WEISSTEIN, E.W. "Prolate spheroidal coordinates" dans "MathWorld--A Wolfram Web Resource", <https://mathworld.wolfram.com/ProlateSpheroidalCoordinates.html> (consulté le 14/10/2021).
7. BRELOT, A., HULIN-JUNG, H., KLEIN, J. et SALTIEL, E. "Electricité et magnétisme : travaux dirigés" (Hermann, Paris, 1971), p. 72

8. ROMANO, J.D. and PRICE, R.H. "The conical resistor conundrum: A potential solution", *Amer. J. Phys.* 64 (1996) 1150-1153.