MASTER EN SCIENCES ÉCONOMIQUES ORIENTATION GÉNÉRALE À FINALITÉ SPÉCIALISÉE

Endettement public et bien-être des agents dans le cadre d'un modèle à générations imbriquées étendu aux infrastructures publiques

El Mahi, Gabriel

Award date:
2022

Awarding institution:
Universite de Namur

Endettement public et bien-être des agents dans le cadre d'un modèle à générations imbriquées étendu aux infrastructures publiques

Gabriel EL MAHI

Directeur: C. KIEDAISCH

Mémoire présenté
en vue de l'obtention du titre de
Master 120 en sciences économiques

ANNEE ACADEMIQUE 2021-2022

Université de Namur, ASBL
Faculté des Sciences économiques, sociales et de gestion – Département des études à horaire décalé

Rempart de la Vierge 8, B-5000 Namur, Belgique, Tel. +32 [0]81 72 49 58/48 09

Mémoire du Master 120 en sciences économiques

15 août 2022

Endettement public et bien-être des agents dans le cadre d'un modèle à générations imbriquées étendu aux infrastructures publiques.

EL MAHI Gabriel

1. Introduction

Face à la crise de la Covid-19 qui a été à l'origine de lourdes conséquences sur les plans économique, financier et sanitaire, les pouvoirs publics ont privilégié une réponse budgétaire forte et rapide pour amortir le choc d'une part et contribuer à relancer l'économie d'autre part. Au niveau européen, cela s'est traduit par la décision de la Commission européenne en mars 2020 de suspendre le pacte de stabilité et de croissance, permettant aux gouvernements d'élargir leur espace budgétaire et de l'utiliser comme un levier pour amoindrir les conséquences de la crise. En août 2020, la Commission européenne a mis en place NextGenerationEU, un instrument de relance commun de plus de 800 milliards d'euros en vue d'aider les pays membres à réparer les dommages socio-économiques causés par la crise grâce à des projets qui favorisent les transitions écologique et numérique. Ces mesures se sont accompagnées d'une baisse significative des recettes fiscales due au ralentissement de l'activité économique, ramenant l'endettement public à un niveau record avoisinant les 100% du PIB dans de nombreux pays européens. Si le coût de la dette est actuellement faible compte-tenu des niveaux historiquement bas des taux d'intérêt, il faut rester vigilant quant au risque potentiel de leur augmentation alourdissant ainsi la charge de la dette.

Si cette crise sanitaire a favorisé le recours au levier d'endettement pour financer la relance de l'économie, elle a également été à l'origine d'une augmentation significative de l'épargne des ménages eu égard aux possibilités réduites de consommation. Selon la revue économique de la banque nationale belge en date de décembre 2021, le taux d'épargne des ménages a atteint un niveau record en 2020 et s'est maintenu pendant une longue période à un niveau plus élevé que la normale. Cette situation pourrait engendrer l'apparition structurelle d'une épargne excédentaire. Selon Diamond (1965), cette accumulation du capital privé peut entraîner l'économie vers ne situation d'inefficience dynamique, c'est à dire une situation où les ménages peuvent consommer davantage dans le présent et dans le futur tout en épargnant moins. Pour y parvenir, les pouvoirs publics peuvent recourir à l'endettement pour financer une augmentation de leurs besoins. La situation est donc la suivante, l'émission des titres de dette par les gouvernements sur les marchés obligataires va mécaniquement contribuer à l'augmentation des taux d'intérêt et à l'alourdissement du coût de financement pour les ménages et les entreprises. Par conséquent, le stock de capital privé va baisser, ce qui freinera l'investissement des ménages et des entreprises et amènera ainsi l'économie vers une situation d'efficience dynamique. Dans ce cas de figure précis, où l'on suppose que la dette permet de financer des dépenses publiques productives, ce travail démontre que dans le cadre d'un modèle AK, il est impossible d'être en situation d'inefficience dynamique en la présence de progrès technologique. Aussi, nous montrons qu'un faible niveau d'endettement permet d'augmenter le bien-être d'une génération donnée. Nous nous baserons dans ce papier sur le modèle AK de Darreau que nous modifierons pour tenir compte de l'infrastructure publique.

Nous allons tout d'abord faire un état des lieux de la littérature scientifique en la matière (section 2). Nous introduirons ensuite un modèle théorique inspiré de Darreau (2011) que nous étendrons pour tenir compte de l'infrastructure publique (Section 3). Nous allons tout d'abord examiner la possibilité d'occurence d'une ineffcience dynamique. Nous étudions ensuite l'état régulier de cette économie avec et sans dette, avant de nous intéresser à l'impact de l'endettement sur le bien-être des générations présentes et futures (Section 4). En section 5, nous réalisons une simulation numérique sur la base d'un échantillonage donné. Enfin, nous finissons avec des conclusions mettant en exergue les principaux enseignements, les limites de cette étude ainsi que les pistes d'amélioration.

2. Revue de la littérature

Le modèle à générations imbriquées d'agents égoïstes de Diamond (1965) permet de mettre en évidence la notion de transferts intergénérationnels. L'une de ses caractéristiques propres consiste à supposer que l'agent a une durée de vie finie et que l'épargne qu'il constitue sert uniquement à financer sa retraite. Pour rappel, et comme l'agent est supposé égoïste, il ne se préoccupe aucunement du sort de ses descendants. Ainsi, les décisions qu'il prend peuvent ne pas être favorables à l'ensemble des générations. Diamond (1965) démontre qu'il est possible d'être dans une situation d'inefficience dynamique même dans le cadre des versions les plus simples de ce modèle où le niveau d'épargne est exogène et où il n'existe pas de gouvernement. L'auteur affirme que dans une telle économie, le stock de capital privé existant peut excèder le niveau optimal permettant de maximiser la consommation à l'état stationnaire[1]. L'auteur prouve ensuite que l'introduction de la dette publique peut être bénéfique en ce qu'elle permet de réduire le niveau de capital à l'état régulier. Tirole (1985) abonde dans le même sens et démontre que la dette publique ou les bulles peuvent améliorer l'efficience d'une économie caractérisée par une suraccumulation du capital. Tirole (1985) considère à cet égard que le recours des pouvoirs publics à l'endettement peut constituer une politique économique efficace. Par ailleurs, McCallum (1986) a démontré qu'il est impossible de se trouver dans une situation de suraccumulation du capital si l'économie comprend un actif qui est productif et non reproductible, à savoir les terres. McCallum avance qu'il n'est aucunement possible de se trouver dans une situtation d'inefficience dynamique dans une telle économie, et ce, même en l'absence de dette publique, d'altruisme ntergénérationnel, ou encore d'un système de sécurité sociale.

La littérature scientifique s'est également intéressée à l'impact de la dette publique sur l'environnement macroéconomique. Saint Paul (1992) affirme que l'endettement public a un effet négatif sur la croissance économique en l'absence de dépenses publiques productives. De ce fait, l'endettement doit permettre aux pouvoirs publics de financer des dépenses d'investissement (infrastructures, éducation, etc.) afin d'augmenter le potentiel productif de l'économie. S'endetter pour financer des dépenses de fonctionnement ou encore pour payer sa masse salariale est donc un choix à écarter. Greineer et Semmler (2000) ont intégré le capital public dans leur modèle et ont démontré que l'impact des déficits publics sur la croissance dépend principalement du cadre budgétaire existant. A titre d'exemple, les auteurs démontrent que les déficits publics génèrent des effets négatifs sur la croissance économique à long-terme dans le cadre d'une règle d'or des finances publiques (GRPF)[2]. Ils concluent que des règles plus flexibles autorisant par exemple le financement des charges d'intérêt par le déficit peuvent vraisemblablement avoir des effets positifs sur la croissance économique future. Bien que l'impact d'une règle d'or des finances publiques sur la croissance à long-terme est négatif, il est à souligner que cette dernière peut améliorer davantage le bien-être des générations présentes et futures qu'une règle d'équilibre budgétaire jugée plus contraignante (Minea et Villieu, 2009). D'autres études ont mis en exergue l'effet positif de la règle d'or des finances publiques sur la croissance à long-terme et sur le bien-être si le niveau des dépenses publiques est réduit à long-terme (Groooneck, 2011).

S'agissant des études empiriques, le Fonds monétaire international (2014) a montré que l'investissement public contribue à l'augmentation du potentiel de croissance. Dans la même veine, Blanchard (2019) réfute l'idée selon laquelle l'accroissement de l'endettement public entraîne l'éviction de l'investissement et de la consommation privés. Il considère que dans un contexte marqué par des taux d'intérêts sans risque plus

[1] Pour rappel, l'état stationnaire est un état de l'économie où le capital croît au même rythme que la population.

[2] Une règle d'or consiste à autoriser un déficit public pour des dépenses d'investissement.

faibles que les taux de croissance, la réduction de l'accumulation du capital privé a un faible coût sur le bien-être.

Les différentes études susmentionnées se sont principalement intéressées à l'impact de la dette sur la croissance. A ma connaissance, son impact sur le bien-être inter temporel a été très peu traité. En effet, comme la majorité des études font l'hypothèse que les agents sont représentatifs et ont une durée de vie infinie, la notion de transfert intergénérationnel est peu prise en compte.

Cette hypothèse est très forte puisque l'émission d'une obligation aujourd'hui pour investir dans le capital public est non seulement bénéfique pour les générations actuelles, mais aussi pour les générations futures. Comme indiqué précédemment, c'est pour être en mesure de capturer ces transferts que nous passons par un modèle à générations imbriquées d'agents égoïstes. Ainsi, dans ce mémoire, nous chercherons à démontrer si l'avènement d'une inefficience dynamique est possible ou non dans le cadre d'un modèle de croissance endogène AK. Nous cherchons ensuite le niveau d'endettement permettant de maximiser le bien-être des agents. Pour ce faire, nous allons réaliser une adaptation du modèle de Darreau (2011) pour tenir compte du rôle des infrastructures publiques.

3. Modèle théorique - Extension aux dépenses publiques productives

Économie modélisée

L'économie modélisée dans ce qui suit est supposée fermée et caractérisée par deux types d'individus (jeunes et vieux), dont les décisions prises doivent permettre de maximiser leur utilité intertemporelle. A chaque période t est née une nouvelle cohorte d'individus de taille N_t. Ces jeunes individus travaillent en période t et partent à la retraite en période $t+1$ avant de mourrir en période $t+2$.

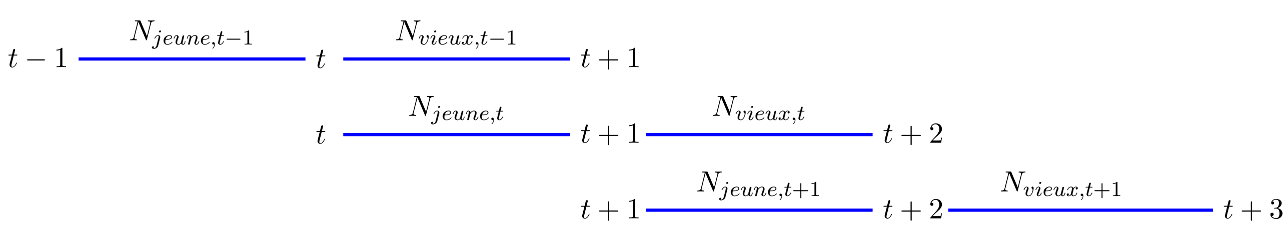

Figure 1: Modélisation de la population dans le cadre d'un modèle à générations imbriquées

En première période, le jeune devra décider du montant à épargner pour assurer sa consommation durant la seconde période. Il est à noter que nous supposons que les agents sont égoïstes. A cet égard, ils ne se préoccupent aucunement du sort de leurs descendants. A cet effet, l'épargne constituée au cours de la première période sera entièrement consommée en seconde période. Pour des raisons de simplification, nous supposerons que le taux de croissance de la population est nul, ce qui signifie que : $(\forall t > 0) N_t = N_{t-1}$.

Nous supposerons que l'ensemble des individus nés en période t dispose de la même fonction d'utilité U_t qui dépend de la consommation en première période $c_{jeune,t}$ et de la consommation en seconde période $c_{vieux,t+1}$.

Nous supposons également l'existence d'une technologie de production néoclassique à rendements d'échelle croissants que les entreprises, supposées en concurrence pure et parfaite, peuvent utiliser. La fonction de production des entreprises peut donc être définie par : $Y = F(K_t, L_t, G_t)$, avec : K_t le capital physique, $L_t = N_t$ le facteur travail et G_t l'infrastructure.

Aussi, nous supposons que dans cette économie, le Gouvernement émet uniquement des titres de dette interne B_t (Absence de dette extérieure) et lève en période t un impôt forfaitaire auprès des entreprises τ_t pour financer les infrastructures publiques. Il est à souligner qu'il existe d'autres extensions qui peuvent changer les résultats de notre étude dans certains cas comme par exemple taxer le travail des jeunes, le capital des vieux ou encore taxer le travail de manière non forfaitaire.

Dans la suite de cette section, nous tâcherons de modéliser plus en détails le comportement des différents acteurs de l'économie, à savoir les ménages, les entreprises ainsi que le gouvernement.

Le Gouvernement

Nous commencerons notre modélisation avec le gouvernement, qui s'endette et taxe le revenu des entreprises pour financer les dépenses publiques courantes ainsi que les charges d'intérêt. L'équation (1) exprime l'identité moyens/besoins du gouvernement.

$$B_{t+1} - B_t + T_t = G_t + r_t B_t \tag{1}$$

Avec :

- B_t le stock de dette publique en t,
- T_t les recettes fiscales levées auprès des entreprises,

- G_t les dépenses publiques primaires (c'est à dire hors charge d'intérêt) que nous supposons productives dans ce papier,
- et r_t le taux d'intérêt implicite.

Nous faisons l'hypothèse que les recettes fiscales, les dépenses primaires ainsi que le stock de dette sont proportionels au revenu total moyennant les taux $\tau_t = \frac{T_t}{Y_t}$, $\phi_t = \frac{G_t}{Y_t}$ et $b_t = \frac{B_t}{Y_t}$ respectivement. A l'état stationnaire, nous supposerons ces taux constants. Nous les noterons : τ, ϕ et b.

En divisant l'équation (5) par $B_t \neq 0$, nous obtenons l'expression du taux d'intérêt r_t :

$$r_t = \gamma_t^B - \frac{1}{b_t}(\phi_t - \tau_t) \qquad (\forall t \quad b_t \neq 0) \tag{2}$$

Avec :

- γ_t^B le taux de croissance du stock de dette entre t et $t+1$,
- τ_t le poids des recettes fiscales dans le revenu global,
- ϕ_t la part des dépenses primaires dans le revenu total,
- et b_t le ratio d'endettement par rapport au PIB.

Les entreprises

Les entreprises représentent le deuxième acteur de cette économie. Il est à souligner qu'en réalité, les entreprises diffèrent même en faisant partie d'un même secteur d'activité. Toutefois, et pour des raisons de simplicité, nous supposons l'existence d'une fonction de production globale qui représentera l'ensemble des entreprises de cette économie. Cette fonction de production s'exprime comme suit :

$$Y_t = A_t K_t^{\beta} L_t^{(1-\beta)} G_t^{\alpha} \tag{3}$$

Avec :

- Y_t le montant total de production des biens et services en t,
- A_t le progrès technique en t, supposé constant et égal à A $(\forall t > 0)$,
- K_t le stock de capital privé en t,
- L_t l'emploi total en t,

- G_t le stock d'infrastructures publiques,

- et $\alpha\beta$, avec $\alpha \in]0;1[$ $\beta \in]0;1[$.

Nous tâcherons maintenant à simplifier l'expression de la fonction de production en divisant (3) par L_t, nous obtenons :

$$y_t = Ak_t^{\beta}G_t^{\alpha} \tag{4}$$

S'agissant du comportement des entreprises, elles emploient les facteurs de production dont elles disposent (travail et capital) et les paient à leur produit marginal. Dans cette économie, nous supposons qu'il existe une externalité positive des infrastructures publiques qui sont gratuites sur la production des entreprises qui verront leur productivité augmenter plus il y a des infrastructures de qualité (autoroutes, administration digitale, éducation, etc.) Nous supposons que les entreprises tâchent de maximiser leur profit net (après imposition), c'est à dire :

$$Max\ z = (1-\tau_t)Y_t - w_tL_t - (r_t+\delta)K_t \tag{5}$$

La maximisation du profit net de l'entreprise conduit à :

$$w_t = (1-\tau_t)(1-\beta)y_t \tag{6}$$

En procédant de la même manière, nous obtenons l'expression du taux d'intérêt :

$$r_t + \delta = (1-\tau_t)\beta\frac{y_t}{k_t} \tag{7}$$

Pour simplifier les calculs qui suivent, nous internaliserons les dépenses publiques productives dans la fonction de production. Nous obtenons :

$$Y_t = X_tK_t^{\frac{\beta}{1-\alpha}}L_t^{\frac{1-\beta}{1-\alpha}} \tag{8}$$

Avec : $X_t = A^{\frac{1}{1-\alpha}}\phi^{\frac{\alpha}{1-\alpha}}$.

L'équation (7) peut donc être réécrite comme suit :

$$r_t = (1-\tau_t)\beta X_tK_t^{\frac{\alpha+\beta-1}{1-\alpha}}L_t^{\frac{1-\beta}{1-\alpha}} - \delta \tag{9}$$

Les consommateurs

Nous caractérisons le comportement des consommateurs au travers d'un modèle à générations imbriquées sans croissance de la population. Chaque consommateur a pour objectif la maximisation de son utilité intertemporelle U_t[3] :

$$U_t = ln(c_t^{jeune}) + \frac{1}{1+\rho} ln(c_{t+1}^{vieux}) \tag{10}$$

Les contraintes budgétaires du consommateur en première et en seconde période s'expriment comme suit :

$$Individu\ jeune\ :\ c_t^{jeune} + s_t = w_t \tag{11}$$

$$Individu\ vieux\ :\ c_{t+1}^{vieux} = (1 + r_{t+1})s_t \tag{12}$$

Les conditions du premier ordre nous permettent d'obtenir :

$$c_t^{jeune} = \frac{1+\rho}{2+\rho} w_t = \frac{1+\rho}{2+\rho}(1-\tau_t)(1-\beta)y_t \tag{13}$$

$$c_{t+1}^{vieux} = \frac{1+r_{t+1}}{2+\rho} w_t = \frac{1+r_{t+1}}{2+\rho}(1-\tau_t)(1-\beta)y_t \tag{14}$$

$$s_t = \frac{1}{2+\rho} w_t = \frac{1}{2+\rho}(1-\tau_t)(1-\beta)y_t \tag{15}$$

Possibilité d'une inefficience dynamique

L'équation (9) nous donne l'expression du taux d'intérêt privé en fonctioin d'autres paramètres connus.

$$r_t = (1-\tau_t)\beta X_t K_t^{\frac{\alpha+\beta-1}{1-\alpha}} L_t^{\frac{1-\beta}{1-\alpha}} - \delta$$

S'agissant du rendement social, ce dernier s'exprime comme suit :

$$r_t^s = \tfrac{(1-\tau_t)\beta X_t}{1-\alpha} K_t^{\frac{\beta-1+\alpha}{1-\alpha}} - \delta$$

Dans le modèle de croissance endogène AK, il existe une inefficience dynamique si et seulement si $r_t^s < r_t$.

$$\begin{aligned} r_t^s < r_t &\Leftrightarrow \frac{(1-\tau_t)\beta X_t}{1-\alpha} K_t^{\frac{\beta-1+\alpha}{1-\alpha}} - \delta < (1-\tau_t)\beta X_t K_t^{\frac{\alpha+\beta-1}{1-\alpha}} L_t^{\frac{1-\beta}{1-\alpha}} - \delta \\ &\Leftrightarrow (1-\tau_t)\beta X_t \frac{\alpha}{1-\alpha} K_t^{\frac{\beta-1+\alpha}{1-\alpha}} < 0 \\ &\Leftrightarrow X_t < 0 \\ &\Leftrightarrow A < 0 \end{aligned}$$

[3] Nous imposerons $\rho > -1$ pour que l'utilité future soit positive

A cet effet, il existe une inefficience dynamique dans ce modèle uniquement si le progrès technologique est négatif, chose que nous ne supposerons pas dans le cadre de ce mémoire.

Conclusion : Dans le cadre d'un modèle AK avec infrastructure publique, il est impossible d'avoir de l'inefficience dynamique si le progrès technique est positif, ce que nous avons supposé dans ce papier.

Dans la section qui suit, nous normaliserons le travail, c'est à dire que nous faisons l'hypothèse que $(\forall t \; L_t = 1)$ et allons supposer que $\alpha + \beta = 1$ avec : $\alpha \in]0,1[$ et $\beta \in]0,1[$. Nous interpréterons ce coefficient comme reflétant le niveau d'infrastructures publiques. Dans l'économie modélisée, ce coefficient aura un impact direct sur la répartition des revenus entre le capital privé et le travail. En effet, plus le Gouvernement construit des infrastructures et forme des travailleurs, plus la part du revenu du capital privé baisse en faveur d'une augmentation des revenus du travail.

Etat régulier sans dette et avec équilibre budgétaire $(\alpha + \beta = 1)$

Supposons tout d'abord qu'il n'existe pas de dette publique et que les pouvoirs publics adoptent de manière stricte une règle d'équilibre budgétaire, c'est à dire que $(\forall t > 0)\; \phi_t = \tau_t$. A l'équilibre concurrentiel, la demande de travail est égale à l'offre de travail. On a : $L_t = N_t = N$. Aussi , le marché de capital est équilibré, avec : $K_{t+1} = S_t = N_t s_t$ comme le stock de capital des vieux en $t+1$ doit être égal à l'épargne des jeunes en t. En divisant l'équation d'accumulation du capital $K_{t+1} - K_t$ par K_t, nous obtenons :

$$\frac{K_{t+1} - K_t}{K_t} = \gamma^K = \frac{(1-\tau)\alpha}{2+\rho} A^{\frac{1}{1-\alpha}} \tau^{\frac{\alpha}{1-\alpha}} - 1 \tag{16}$$

Comme le taux d'imposition est égal à la part des dépenses publiques dans le revenu global à l'état stationnaire, nous pouvons simplement étudier les variations du taux de croissance en fonction du taux d'imposition τ. Le tableau de variations ci-dessous résume le comportement du taux de croissance stationnaire γ^K en fonction du taux d'imposition τ (Tous les calculs intermédiaires sont présentés en annexe) :

τ	0	α	1
$\frac{\partial \gamma^K}{\partial \tau}$	$-$	0	$+$
$\gamma^K(\tau)$	$\nearrow$	$\gamma^K_{max} = \gamma(\alpha)$	$\searrow$

Conclusion : Dans cette section, nous avons démontré qu'en l'absence d'endettement et que si le Gouvernement applique strictement une règle d'équilibre budgétaire, alors la croissance stationnaire du capital est maximale si le tau d'iimposition τ est égal à α (part du capital public dans le capital total).

Etat régulier avec une dette publique positive

Supposons maintenant qu'il existe un stock de dette $B_t > 0$[4]. L'équation d'accumulation du capital devient maintenant :

$$B_{t+1} + K_{t+1} = Ns_t = N\frac{1}{2+\rho}(1-\tau_t)(1-\beta)y_t \tag{17}$$

Après quelques calculs détaillés en annexe, nous obtenons les différentes expressions des facteurs de croissance du capital, du PIB et de la dette publique.

$$1 + \gamma_t^K = \frac{(1-\beta)(1-\tau_t)X_t}{(2+\rho)(1+b_{t+1}X_{t+1})} \tag{18}$$

$$1 + \gamma_t^Y = \frac{\beta(1-\tau_t)X_{t+1}}{(2+\rho)(1+b_{t+1}X_{t+1})} \tag{19}$$

$$1 + \gamma_t^b = \frac{\frac{1}{b_t}(\phi_t - \tau_t) + \beta(1-\tau_t)X_t - \delta + 1}{\frac{(1-\beta)(1-\tau_t)X_{t+1}}{(2+\rho)(1+b_{t+1}X_{t+1})}} \tag{20}$$

A l'état régulier, les taux d'imposition, de dépenses publiques et d'endettement sont constants, c'est à dire que $\tau_t = \tau_{t+1} = \tau$, $\phi_t = \phi_{t+1} = \phi$ et $b_t = b_{t+1} = b$. Les facteurs de croissance deviennent donc :

$$1 + \gamma^Y = 1 + \gamma^K = 1 + \gamma^B = 1 + \gamma = \frac{(1-\beta)(1-\tau)X}{(2+\rho)(1+bX)} \tag{21}$$

Dans le cas où on suppose qu'il n'existe pas de dette, c'est à dire que : $b = 0$, alors nous retombons sur l'équation (16). Aussi, nous constatons que l'accroissement du ratio d'endettement a un impact négatif sur la croissance du capital privé (éviction du capital). A l'état stationnaire, $\gamma^B = \gamma^K = \gamma^Y = \gamma$. Par conséquent, nous obtenons [5]:

$$1 + \gamma = \frac{(1-\beta)(1-\tau)X}{(2+\rho)(1+bX)} = 1 + \frac{1}{b}(\phi - \tau) + \beta(1-\tau)X - \delta = 1 + \frac{1}{b}(\phi - \tau) + r \qquad (b \neq 0) \tag{22}$$

Nous supposerons qu'à long terme, la part des dépenses publiques ϕ dans le revenu global est connue et fixée par les pouvoirs publics (Il s'agira donc d'une donnée exogène). Nous pourrons donc résoudre l'équation (20) et trouver l'expression du taux d'imposition en fonction des autres paramètres, en particulier

[4]Pour rappel, nous avons normalisé le travail L à 1 pour des raisons de simplification.

[5]En utilisant les équations (2) et (19)

du taux d'endettement.

$$\tau = \frac{(2+\rho)(1+bX)(\phi + b(1-\delta+\beta X)) - b(1-\beta)X}{(2+\rho)(1+bX)(1-\beta Xb) - (1-\beta)bX} \tag{23}$$

En substituant l'équation (24) dans (22), nous obtenons l'expression du taux de croissance stationnaire :

$$1+\gamma = \frac{(1-\beta)X(1-\phi-b(1-\delta))}{(2+\rho)(1+bX)(1+\beta bX) - (1-\beta)Xb} \tag{24}$$

4. Endettement public et bien-être

L'équation (22) nous permet de calculer le taux d'endettement qui permet de maximiser la croissance à l'état stationnaire $\widetilde{b}$. Les calculs détaillés en annexes permettent d'obtenir l'expression du niveau d'endettement qui maximise la croissance en fonction de facteurs exogènes.

$$\widetilde{b} = -\frac{2(2+\rho) - (1-\beta)(3+\rho)}{2X\beta(2+\rho)} \tag{25}$$

Comme : $\rho > -1$ et $\beta < 1$, alors $\widetilde{b} < 0$. Par ailleurs, ci-dessous le tableau de variations de la croissance en fonction de l'endettement à l'état stationnaire.

b	$-\infty$	$\widetilde{b} < 0$	$+\infty$
$\frac{\partial \gamma}{\partial b}$	$+$	0	$-$
$\gamma(b)$	$\nearrow$	$\gamma^{max} = \gamma(\widetilde{b})$	$\searrow$

Par conséquent, dans le cas d'une dette positive, c'est à dire lorsqu'il existe un transfert des jeunes vers les vieux, l'endettement réduit la croissance stationnaire au travers de l'éviction du capital privé même dans le cas où ce dernier est utilisé comme un levier de financement de dépenses publiques productives.

Endettement et bien-être de la génération née en t

Dans cette section, nous chercherons le niveau d'endettement qui maximise le bien être d'un agent né en t. Pour ce faire, nous supposons que $k_t = 1$ et rappelons l'expression de l'utilité intertemporelle d'un agent en t.

$$U_t = ln(c_t^{jeune}) + \frac{1}{1+\rho} ln(c_{t+1}^{vieux}) \tag{26}$$

Nous remplaçons tout d'abord le taux d'imposition par son expression à l'état stationnaire (24) dans l'équation (28), nous dérivons ensuite U_t par rapport à b_t pour trouver le niveau d'endettement maximisant l'utilité (Les calculs sont détaillés en annexes). Nous trouvons que :

$$\frac{\partial U_t}{\partial b_t} = 0 \Leftrightarrow \frac{d\tau}{db_t} = 0 \tag{27}$$

A cet effet, le niveau d'endettement maximisant l'utilité est celui qui minimise le taux d'imposition. Il existe une solution positive b^* lorsque $\beta \leq \frac{1}{3+\rho}$ que l'on peut exprimer comme suit :

$$b^* = \frac{1}{X}\left(-1 + \sqrt{\frac{1-\beta}{\beta(2+\rho)}}\right) \tag{28}$$

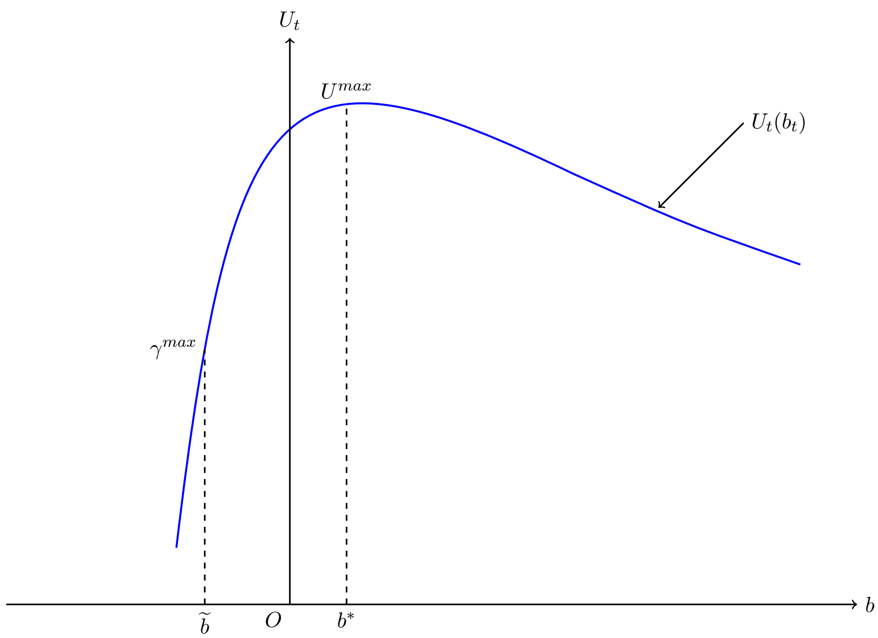

Figure 2: L'évolution de l'utilité individuelle en fonction du niveau d'endettement public

Conclusion : L'endettement public évince le capital et diminue donc la croissance (qui est maximale pour un niveau d'endettement négatif $\widetilde{b}$. Dans le cadre d'un modèle AK prenant en compte l'infrastructure, et bien qu'il soit impossible d'être en inefficience dynamique, un faible niveau d'endettement contribue à augmenter le bien-être d'une génération donnée.

En inefficience dynamique, l'endettement public évince le capital et diminue donc la croissance (qui est maximale pour un niveau d'endettement négatif $\widetilde{b}$). Aussi, comme le niveau d'endettement maximisant l'utilité d'un individu né en t n'évince pas assez de capital privé, il n'est pas possible dans ce cas de figure de sortir l'économie de cette situation de sur accumulation de capital. (On reste alors dans la zone rouge si l'objectif de l'endettement est de maximiser l'endettement des individus).

Endettement et bien-être de toutes les générations

Dans la section précédente, nous avons mis en exergue qu'il est possible de maximiser le bien-être de la génération née en t en s'endettant à un niveau b^*. Nous allons nous intéresser dans cette section à l'impact de cet endettement sur le bien-être de l'ensemble des générations. Nous allons donc étudier l'impact du choix d'un niveau d'endettement b_t par la génération née en t sur l'utilité de la génération née la période qui suit, à savoir en $t+1$.

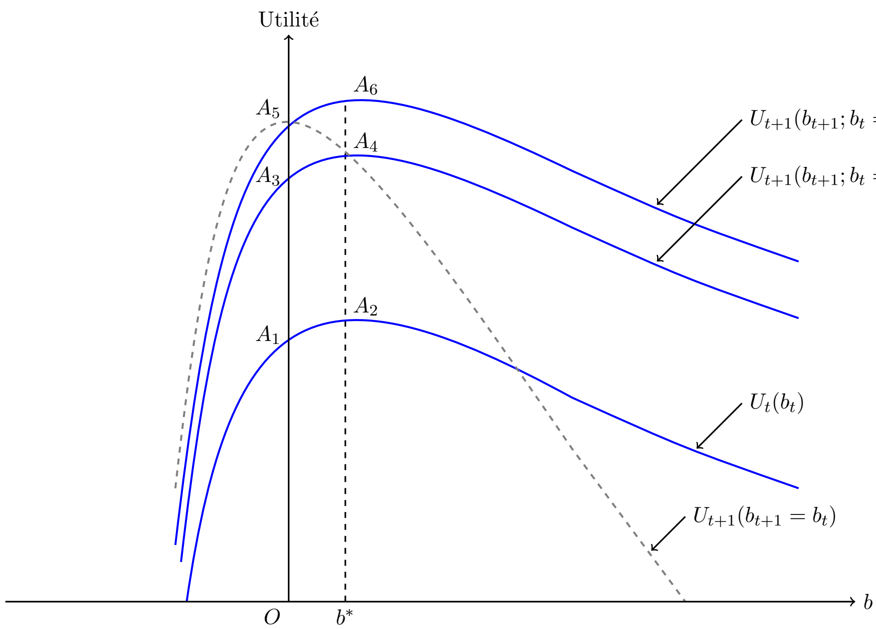

Figure 3: L'évolution de l'utilité des générations nées en t et en $t+1$ en fonction de différents scénarii d'endettement.

Il est à rappeler que notre analyse s'inscrit dans le cadre d'un modèle à générations imbriquées d'agents égoïstes qui ne se préoccupent pas du sort de leur descendance. Nous supposerons tout d'abord le cas d'un endettement nul pour la génération née en t. Dans ce cas de figure, l'utilité de la génération t se trouve au point A_1. Comme le montre le graphique de la figure 3, cette dernière peut augmenter son bien-être grâce à l'endettement tant que son niveau reste en deça de b^*. Son bien-être est par ailleurs maximal pour $b_t = b^*$.

Si l'on s'intéresse à la génération née en $t+1$, son utilité dépend des choix de la génération qui l'a précédée. Si en t, aucune dette n'a été contractée, et que le gouvernement n'émet pas d'obligations non plus en $t+1$, alors l'utilité de la génération $t+1$ se trouve au point A_5. Néanmoins, cette génération (née en $t+1$) a tout intérêt à recourir au levier de la dette à un niveau b^* pour augmenter son bien-être et atteindre le point A_6. Si maintenant on suppose que la génération née en t s'est endettée à hauteur de b^*, alors la génération née en $t+1$ verra son utilité baisser quelque soit son comportement. Toutefois, elle aura tout intérêt à adopter le même comportement que la génération t pour améliorer son bien-être et basculer du point A_3 au point A_4. Si nous adoptons le même raisonnement pour les générations qui suivent, alors nous déduisons qu'il est de l'intérêt de chaque génération de s'endetter à hauteur de b^* pour maximiser son bien-être.

La courbe en traits pointillés $U_{t+1}(b_{t+1} = b_t)$ représente le niveau de bien-être à l'état régulier d'une génération donnée lorsqu'elle adopte le même comportement en termes d'endettement que la génération qui la précède. Nous observons que plus l'endettement augmente, plus le bien-être des générations futures diminue.

Conclusion : Dans cette sous-section, nous avons démontré que chaque génération a intérêt à s'endetter pour augmenter son utilité propre, mais que l'endettement réduit le bien-être de toutes les générations à l'état stationnaire. En effet, comme nous avons supposé que la croissance de la population est nulle, l'offre de travail est donc inélastique. La seule manière d'augmenter le salaire des jeunes revient à baisser les taxes, donc à financer les dépenses publiques par la dette[6]. Comme le montre le graphique de la figure 3, la première génération ayant recours à la dette voit son utilité augmenter. Toutefois, l'éviction du capital entraînée par cet endettement entraînera une baisse du revenu et de la croissance pour les générations futures.

5. Echantillonage et simulation numérique

Les paramètres utilisés pour réaliser cette simulation numérique sont les suivants :

$A = 8$

$\alpha = 0,6$

$\rho = -0,9$

$b = 0,02$

$\phi = 0,1$

$\beta = 0,4$

$\delta = 1.$

[6]En inefficience (efficience) dynamique, la dette publique contribue à faire baisser (augmenter) les impôts.

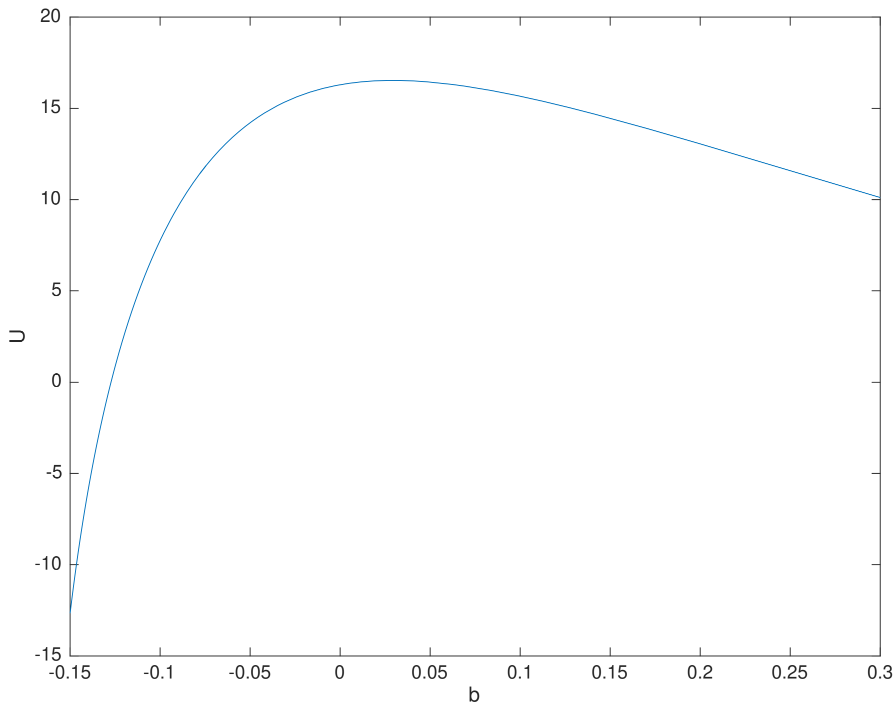

Figure 4: L'évolution de l'utilité de la génération née en t en fonction du niveau d'endettement (État stationnaire).

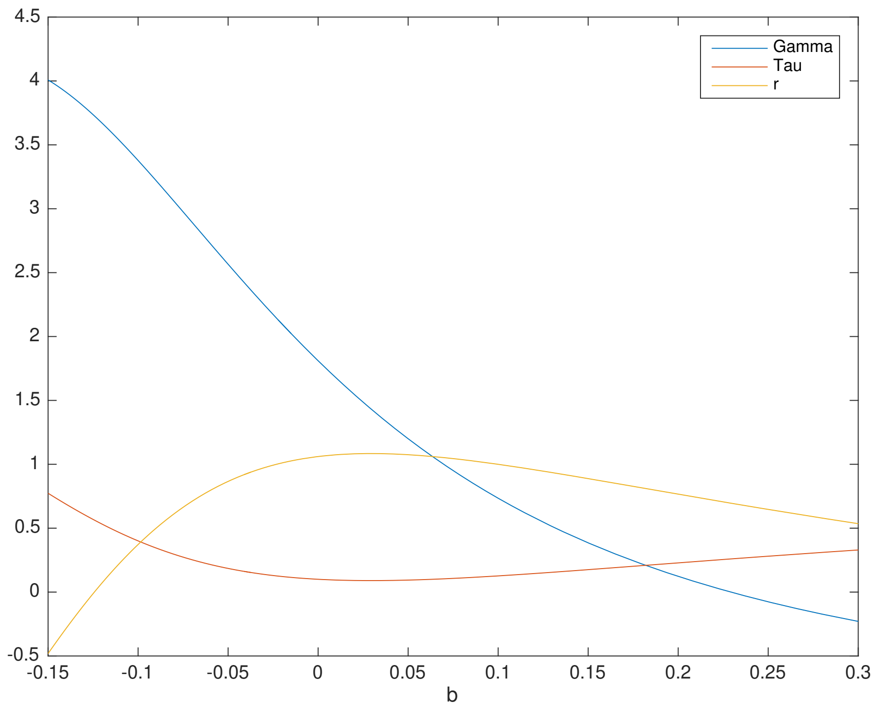

Figure 5: Évolution du taux de croissance γ, du taux d'imposition τ et du taux d'intérêt r en fonction du niveau d'endettement (État stationnaire).

Conclusion

En conclusion, si dans la cadre d'un modèle à générations imbriquées d'agents égoïstes tel que celui de Diamond (1965), l'endettement peut améliorer le bien-être des générations actuelles et futures dans une situation d'inefficience dynamique, au travers de la possibilité que les ménages pussent consommer davantage dans le présent et dans le futur en épargnant moins. Cette possibilité n'existe plus dans le cadre d'un modèle AK puisque nous avons démontré dans ce papier qu'il est impossible de se trouver en inefficience dynamique sauf si le progrès technique est négatif, chose que nous avons écarté dans ce travail. Au delà, nous avons démontré qu'à l'état stationnaire, l'endettement améliore le bien-être d'une génération donnée mais détériore le bien-être de l'ensemble des générations.

Toutefois, le modèle proposé présente certaines limites. En effet, la réduction des agents économiques à une même caractéristique (altruistes, égoistes, etc.) constitue une hypothèse fortement simplificatrice. Elle ne peut aucunement refléter l'état réel de notre écoonomie et des agents qui la composent. A cet égard, les résultats obtenus sont à prendre avec la plus grande précaution comme ils découlent d'un raisonnement purement théorique. Aussi, il est important de rappeler que l'ensemble des résultats énoncés relèvent de l'état stationnaire et qu'il serait très intéressant d'étudier en profondeur l'état transitoire qui pourrait afficher une dynamique d'évolution différente.

Enfin, il est à souligner que ce modèle peut servir de socle pour les débats d'actualté relatifs à la question de l'endettement. Aussi, il peut être enrichi pour répondre à d'autres questions afférentes. A ce titre, l est possble de configurer le modèle pour évaluer la soutenabilité de la dette ou encore pour mesurer l'impact d'un nouveau cadre budgétaire sur le bien-être des générations actuelles et futures. Cela fait sens en ce moment compte-tenu du chanter lancé par la commission européenne visant à réformer les règles de gouvernance budgétaire européenne.

Bibliographie

- Abel, A. B., Mankiw, N. G., Summers, L. H., & Zeckhauser, R. J. (1989). Assessing dynamic efficiency: Theory and evidence. The Review of Economic Studies, 56(1), 1-19.

- Blanchard, O. (2019). Public debt and low interest rates. American Economic Review, 109(4), 1197-1229.

- Darreau, P., & Pigalle, F. (2011). Ponzi game in OLG model with endogenous growth and productive government spending. Economics Bulletin, 31(3), 2509-2520.

- Diamond, P. A. (1965). National debt in a neoclassical growth model. The American Economic Review, 55(5), 1126-1150.

- Geerolf, F. (2013). Reassessing dynamic efficiency. manuscript, Toulouse School of Economics.

- Greiner, A., & Semmler, W. (2000). Endogenous growth, government debt and budgetary regimes. Journal of Macroeconomics, 22(3), 363-384.

- Groneck, M. (2011). The golden rule of public finance and the composition of government expenditures: A growth and welfare analysis. Journal of economic policy reform, 14(4), 273-294.

- IMF. (2014). World economic outlook: Legacies, clouds, uncertainties. Is It Time for an Infrastructure Push? The Macroeconomic Effects of Public Investment".

- McCallum, B. T. (1986). The optimal inflation rate in an overlapping-generations economy with land.

- Minea, A., & Villieu, P. (2009). Borrowing to finance public investment? The 'golden rule of public finance' reconsidered in an endogenous growth setting. Fiscal Studies, 30(1), 103-133.

- Mishkin, F. S. (1984). Are real interest rates equal across countries? An empirical investigation of international parity conditions. The Journal of Finance, 39(5), 1345-1357.

- Nautet, M., & Piton, C. (2021). How does parenthood affect the careers of women and men?. Economic Review, (iii), 1-23.

- Rhee, C. (1991). Dynamic inefficiency in an economy with land. The Review of Economic Studies, 58(4), 791-797.

- Saint-Paul, G. (1992). Fiscal policy in an endogenous growth model. The Quarterly Journal of Economics, 107(4), 1243-1259.

- Tirole, J. (1985). Asset bubbles and overlapping generations. Econometrica: Journal of the Econometric Society, 1499-1528.

Annexe mathématique

Équation 2:

$\frac{B_{t+1}-B_t}{B_t}+\frac{T_t}{B_t}=\frac{G_t}{B_t}+\frac{r_tB_t}{B_t}\Rightarrow \gamma_t^B=\frac{1}{b_t}(\phi_t-\tau_t)+r_t.$

Équation 4:

$\frac{(3)}{L_t}\Leftrightarrow y_t=A\frac{K_t^{\beta}L_t^{1-\beta}G_t^{\alpha}}{L_t^{1-\beta}L_t^{\beta}}=Ak_t^{\beta}G_t^{\alpha}.$

Équation 6:

$w_t=\frac{\partial z}{\partial L_t}=(1-\tau_t)\frac{\partial Y_t}{\partial L_t}=(1-\tau_t)(1-\beta)AK_t^{\beta}L_t^{-\beta}G_t^{\alpha}=(1-\tau_t)(1-\beta)Ak_t^{\beta}G_t^{\alpha}=(1-\tau_t)(1-\beta)y_t.$

Équation 7:

$r_t+\delta=(1-\tau_t)\frac{\partial Y_t}{\partial K_t}=(1-\tau_t)A\beta K_t^{\beta-1}L_t^{1-\beta}G_t^{\alpha}=(1-\tau_t)\beta A\frac{G_t^{\alpha}}{k_t^{1-\beta}}=(1-\tau_t)\beta\frac{Ak_t^{\beta}G_t^{\alpha}}{k_t}=(1-\tau_t)\beta\frac{y_t}{k_t}.$

Équation 8:

$Y_t=AK_t^{\beta}L_t^{1-\beta}G_t^{\alpha}=AK_t^{\beta}L_t^{1-\beta}(\phi_tY_t)^{\alpha}$ Par conséquent : $Y_t^{1-\alpha}=AK_t^{\beta}L_t^{1-\beta}\phi_t^{\alpha}.$
Donc : $Y_t=\left(A^{\frac{1}{1-\alpha}}\phi_t^{\frac{\alpha}{1-\alpha}}\right)K_t^{\frac{\beta}{1-\alpha}}L_t^{\frac{1-\beta}{1-\alpha}}=X_tK_t^{\frac{\beta}{1-\alpha}}L_t^{\frac{1-\beta}{1-\alpha}}.$

Équations 13, 14 et 15:

En substituant (12) en (11), nous obtenons l'équation de la contrainte intertemporelle qui s'écrit comme suit : $c_t^{jeune}+\frac{1}{1+r_{t+1}}c_{t+1}^{vieux}=w_t.$

La consommation optimale peut être calculée en utilisant l'approche de Lagrange.

On a : $\mathcal{L}=ln(c_t^{jeune})+\frac{1}{1+\rho}ln(c_{t+1}^{vieux})-\lambda\left(c_t^{jeune}+\frac{1}{1+r_{t+1}}c_{t+1}^{vieux}-w_t\right).$

Les conditions du premier ordre :

$\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial c_t^{jeune}}=\frac{1}{c_t^{jeune}}-\lambda=0\Leftrightarrow\lambda=\frac{1}{c_t^{jeune}}\ (a).$

$\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial c_{t+1}^{vieux}}=\frac{1}{1+\rho}\frac{1}{c_{t+1}^{vieux}}-\frac{\lambda}{1+r_{t+1}}=0\Leftrightarrow\lambda=\frac{1+r_{t+1}}{1+\rho}\frac{1}{c_{t+1}^{vieux}}\ (b).$

En égalisant (a) et (b), nous obtenons : $\frac{c_t^{jeune}}{c_{t+1}^{vieux}}=\frac{1+\rho}{1+r_{t+1}}\ (c).$

Par conséquent, en combinant (c) avec la contrainte intertemporelle, nous obtenons l'expression des équations (13), (14) et (15), à savoir :

$c_t^{jeune}=\frac{1+\rho}{2+\rho}w_t.$

$c_{t+1}^{vieux}=\frac{1+r_{t+1}}{2+\rho}w_t.$

$s_t=\frac{1}{2+\rho}w_t.$

Équation 16:

A partir d'ici, nous supposons que $L = 1$.

En effet, $\frac{K_{t+1}}{K_t} = N_t \frac{1}{2+\rho}(1-\tau_t)(1-\beta)\frac{y_t}{K_t}$.

A l'état régulier, nous supposons que : $\tau_t = \tau$ et $\phi_t = \phi$.

Par conséquent : $1 + \gamma^K = \frac{(1-\tau)(1-\beta)}{2+\rho} X = \frac{(1-\tau)(1-\beta)}{2+\rho} A^{\frac{1}{1-\alpha}} \phi^{\frac{\alpha}{1-\alpha}} = \frac{(1-\tau)(1-\beta)}{2+\rho} A^{\frac{1}{1-\alpha}} \tau^{\frac{\alpha}{1-\alpha}}$.

Variations de γ^K en fonction de τ:

Nous avons :

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \gamma^K}{\partial \tau} &= \frac{(1-\beta)A^{\frac{1}{1-\alpha}}}{2+\rho} \frac{\partial}{\partial \tau}\left((1-\tau)\tau^{\frac{\alpha}{1-\alpha}}\right) = \frac{(1-\beta)A^{\frac{1}{1-\alpha}}}{2+\rho} \frac{\partial}{\partial \tau}\left(\tau^{\frac{\alpha}{1-\alpha}} - \tau^{\frac{1}{1-\alpha}}\right) \\
&= \frac{(1-\beta)A^{\frac{1}{1-\alpha}}}{2+\rho}\left(\frac{\alpha}{1-\alpha}\tau^{\frac{\alpha}{1-\alpha}-1} - \frac{1}{1-\alpha}\tau^{\frac{1}{1-\alpha}-1}\right)
\end{aligned}$$

Par conséquent :

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \gamma^K}{\partial \tau} = 0 &\Leftrightarrow \frac{\alpha}{1-\alpha}\tau^{\frac{\alpha}{1-\alpha}-1} = \frac{1}{1-\alpha}\tau^{\frac{1}{1-\alpha}-1} \\
&\Leftrightarrow \alpha \tau^{\frac{\alpha-1}{1-\alpha}} = 1 \\
&\Leftrightarrow \tau = \alpha
\end{aligned}$$

Équation 18:

En divisant (17) par K_t, nous obtenons : $\frac{B_{t+1}}{K_t} + \frac{K_{t+1}}{K_t} = \frac{(1-\tau_t)(1-\beta)}{2+\rho}\frac{Ny_t}{K_t} \Rightarrow 1 + \gamma^K = \frac{(1-\tau_t)(1-\beta)}{2+\rho} X_t - \frac{B_{t+1}}{K_t}$.

On a : $\frac{B_{t+1}}{K_t} = \frac{B_{t+1}}{Y_{t+1}}\frac{Y_{t+1}}{Y_t}\frac{Y_t}{K_t} = b_{t+1}(1+\gamma^Y)\frac{Y_t}{K_t} = b_{t+1}(1+\gamma^Y)X_t$.

Et on a : $\frac{X_{t+1}}{X_t} = \frac{Y_{t+1}}{K_{t+1}}\frac{K_t}{Y_t} = \frac{1+\gamma^Y}{1+\gamma^K}$.

Donc : $X_t = \frac{1+\gamma^K}{1+\gamma^Y} X_{t+1}$. Et: $\frac{B_{t+1}}{K_t} = b_{t+1}(1+\gamma^Y)\frac{1+\gamma^K}{1+\gamma^Y}X_{t+1} = b_{t+1}(1+\gamma^K)X_{t+1}$.

Par conséquent : $1 + \gamma^K = \frac{(1-\tau_t)(1-\beta)}{2+\rho} X_t - b_{t+1}(1+\gamma^K)X_{t+1}$.

Donc : $(1+\gamma^K)(1 + b_{t+1}X_{t+1}) = \frac{(1-\tau_t)(1-\beta)}{2+\rho} X_t$.

C'est à dire : $1 + \gamma^K = \frac{(1-\tau_t)(1-\beta)X_t}{(2+\rho)(1+b_{t+1}X_{t+1})}$.

Équation 19:

On a : $X_t = \frac{Y_t}{K_t} \Rightarrow (1+\gamma_t^X)\frac{1+\gamma_t^Y}{1+\gamma_t^K} = \frac{X_{t+1}}{X_t}$.

Donc : $(1+\gamma_t^Y)\frac{X_t}{X_{t+1}} = 1 + \gamma_t^K = \frac{(1-\tau_t)(1-\beta)X_t}{(2+\rho)(1+b_{t+1}X_{t+1})}$.

Donc : $(1+\gamma_t^Y) = \frac{(1-\tau_t)(1-\beta)X_{t+1}}{(2+\rho)(1+b_{t+1}X_{t+1})}$.

Équation 20:

On a : $b_t = \frac{B_t}{Y_t}$, donc : $1+\gamma_t^b = \frac{1+\gamma_t^B}{1+\gamma_t^Y}$.

Selon l'équation (2) : $1+\gamma_t^B = \frac{1}{b_t}(\phi_t - \tau_t) + r_t + 1$.

En remplaçant le taux d'intérêt r_t par son expression (7) dans l'équation qui précède, nous obtenons :

$1+\gamma_t^B = \frac{1}{b_t}(\phi_t - \tau_t) + (1-\tau_t)(1-\beta)\frac{y_t}{k_t} - \delta + 1$.

Par conséquent : $1+\gamma_t^b = \frac{\frac{1}{b_t}(\phi_t-\tau_t)+(1-\tau_t)(1-\beta)\frac{y_t}{k_t}-\delta+1}{\frac{(1-\tau_t)(1-\beta)X_{t+1}}{(2+\rho)(1+b_{t+1}X_{t+1})}}$.

Équation 23:

D'après l'équation (22), on a : $\frac{(1-\beta)(1-\tau)X}{(2+\rho)(1+bX)} = 1 + \frac{1}{b}(\phi-\tau) + \beta(1-\tau)X - \delta$.

Donc : $\frac{(1-\beta)X}{(2+\rho)(1+bX)} - \tau\frac{(1-\beta)X}{(2+\rho)(1+bX)} = 1 + \frac{\phi}{b} + \beta X - \delta - \frac{\tau}{b} - \beta X\tau$.

Donc : $\frac{(1-\beta)X}{(2+\rho)(1+bX)} - 1 - \frac{\phi}{b} - \beta X + \delta = \tau\left(\frac{(1-\beta)X}{(2+\rho)(1+bX)} - \frac{1}{b} - \beta X\right)$.

Donc : $\frac{(1-\beta)bX-(2+\rho)(1+bX)(b+\phi+\beta bX-\delta b)}{b(2+\rho)(1+bX)} = \tau\left(\frac{bX(1-\beta)-(2+\rho)(1+bX)(1+b\beta X)}{b(2+\rho)(1+bX)}\right)$.

Donc : $\tau = \frac{(1-\beta)bX-(2+\rho)(1+bX)(b+\phi+\beta bX-\delta b)}{bX(1-\beta)-(2+\rho)(1+bX)(1+b\beta X)}$.

Donc : $\tau = \frac{(2+\rho)(1+bX)(\phi+b(\beta X+1-\delta))-(1-\beta)bX}{(2+\rho)(1+bX)(1+b\beta X)-b(1-\beta)X}$.

Équation 24:

Selon l'équation (21), on a : $1+\gamma = \frac{(1-\beta)(1-\tau)X}{(2+\rho)(1+bX)}$.

En remplaçant τ par son expression (Équation 24) dans l'équation précédente, nous obtenons :

$1+\gamma = \frac{(1-\beta)X}{(2+\rho)(1+bX)}\left(1 - \frac{(2+\rho)(1+bX)(\phi+b(1-\delta+\beta X))-b(1-\beta)X}{(2+\rho)(1+bX)(1+\beta bX)-(1-\beta)bX}\right)$.

Donc : $1+\gamma = \frac{(1-\beta)X}{(2+\rho)(1+bX)}\frac{(2+\rho)(1+bX)(1+\beta Xb)-(1-\beta)bX-(2+\rho)(1+bX)(\phi+b(1-\delta+\beta X))+b(1-\beta)X}{(2+\rho)(1+bX)(1+\beta Xb)-(1-\beta)bX}$.

Donc : $1+\gamma = \frac{(1-\beta)X}{(2+\rho)(1+bX)}\frac{(2+\rho)(1+bX)(1+\beta Xb)-(2+\rho)(1+bX)(\phi+b(1-\delta+\beta X))}{(2+\rho)(1+bX)(1+\beta Xb)-(1-\beta)bX}$.

Donc : $1+\gamma = \frac{(1-\beta)X(1+\beta Xb-\phi-b(1-\delta+\beta X))}{(2+\rho)(1+bX)(1+\beta Xb)-(1-\beta)bX}$.

Donc : $1+\gamma = \frac{(1-\beta)X(1+\beta Xb-\phi-b+b\delta-\beta bX)}{(2+\rho)(1+bX)(1+\beta Xb)-(1-\beta)bX}$.

Donc : $1+\gamma = \frac{(1-\beta)X(1-\phi-b(1-\delta))}{(2+\rho)(1+bX)(1+\beta Xb)-(1-\beta)bX}$.

Équation 25:

Nous avons fait l'hypothèse que $\delta = 1$.

Par conséquent : $1+\gamma = \frac{(1-\beta)X(1-\phi)}{(2+\rho)(1+\beta bX+bX+\beta b^2X^2)-(1-\beta)Xb}$.

Donc : $\frac{\partial\gamma}{\partial b} = \frac{-(1-\beta)X(1-\phi)\left((2+\rho)(\beta X+X+2\beta X^2\widetilde{b})-(1-\beta)X\right)}{\left((2+\rho)(1+\beta\widetilde{b}X+\widetilde{b}X+\beta\widetilde{b}^2X^2)-(1-\beta)X\widetilde{b}\right)^2}$.

Donc :

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial\gamma}{\partial b} = 0 &\Leftrightarrow (2+\rho)(\beta X + X + 2\beta X^2\widetilde{b}) - (1-\beta)X = 0 \\
&\Leftrightarrow (2+\rho)(\beta X + X + 2\beta X^2\widetilde{b}) = (1-\beta)X \\
&\Leftrightarrow (2+\rho)X(\beta + 1 + 2\beta X\widetilde{b}) = (1-\beta)X \\
&\Leftrightarrow \beta + 1 + 2\beta X\widetilde{b} = \frac{1-\beta}{2+\rho} \\
&\Leftrightarrow 2\beta X\widetilde{b} = \frac{1-\beta}{2+\rho} - 1 - \beta \\
&\Leftrightarrow 2\beta X\widetilde{b} = \frac{1-\beta-2-\rho-2\beta-\beta\rho}{2+\rho} \\
&\Leftrightarrow \widetilde{b} = \frac{-1-3\beta-\rho-\beta\rho}{2\beta X(2+\rho)} \\
&\Leftrightarrow \widetilde{b} = -\frac{1+3\beta+\rho+\beta\rho}{2\beta X(2+\rho)} \\
&\Leftrightarrow \widetilde{b} = -\frac{4+2\rho-3-\rho+3\beta+\beta\rho}{2\beta X(2+\rho)} \\
&\Leftrightarrow \widetilde{b} = -\frac{4+2\rho-(3+\rho)+\beta(3+\rho)}{2\beta X(2+\rho)} \\
&\Leftrightarrow \widetilde{b} = -\frac{2(2+\rho)+(3+\rho)(1-\beta)}{2\beta X(2+\rho)}
\end{aligned}
$$

Équation 27:

$$
\begin{aligned}
U_t &= ln(c_t^{jeune}) + \frac{1}{1+\rho} ln(c_{t+1}^{vieux}) \\
&= ln\left(\frac{1+\rho}{2+\rho} w_t(b_t)\right) + \frac{1}{1+\rho} ln\left(\frac{1+r_{t+1}}{2+\rho} w_t(b_t)\right) \\
&= ln\left(\frac{1+\rho}{2+\rho}\right) + ln(w_t(b_t)) + \frac{1}{1+\rho} ln\left(\frac{1}{2+\rho}\right) + \frac{1}{1+\rho} ln(1+r_{t+1}(b_t)) + \frac{1}{1+\rho} ln(w_t(b_t)) \\
&= ln\left(\frac{1+\rho}{2+\rho}\right) - \frac{1}{1+\rho} ln(2+\rho) + ln(w_t(b_t))\left(1+\frac{1}{1+\rho}\right) + \frac{1}{1+\rho} ln(1+r_{t+1}(b_t)) \\
&= ln\left(\frac{1+\rho}{2+\rho}\right) - \frac{1}{1+\rho} ln(2+\rho) + \frac{2+\rho}{1+\rho} ln(w_t(b_t)) + \frac{1}{1+\rho} ln(1+r_{t+1}(b_t))
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial U_t}{\partial b_t} = 0 &\Leftrightarrow \frac{2+\rho}{1+\rho}\frac{w'(b_t)}{w_t(b_t)} + \frac{1}{1+\rho}\frac{r_t'(b_t)}{1+r_t(b_t)} = 0 \\
&\Leftrightarrow \frac{2+\rho}{1+\rho}\frac{-\tau'(b)(1-\beta)y_t}{(1-\tau(b)(1-\beta)y_t)} + \frac{1}{1+\rho}\frac{-\tau'(b)\beta y_t}{(1-\tau(b))\beta y_t} = 0 \\
&\Leftrightarrow \frac{-\tau'(b)}{1-\tau(b)}\left(\frac{2+\rho}{1+\rho} + \frac{1}{1+\rho}\right) = 0 \\
&\Leftrightarrow \frac{3+\rho}{1+\rho}\frac{-\tau'(b)}{1-\tau(b)} = 0 \\
&\Leftrightarrow \tau'(b) = 0
\end{aligned}
$$

Équation 28:

Grâce au logiciel Matlab, nous obtenons les deux solutions de l'équation (27):
$b_1^* = \frac{1}{X}\left(-1 + \sqrt{\frac{1-\beta}{\beta(2+\rho)}}\right)$ et : $b_2^* = \frac{-1}{X}\left(1 + \sqrt{\frac{1-\beta}{\beta(2+\rho)}}\right)$.
La solution b_2^* n'est pas réalisable car toujours négative.

Quant à la solution b_1^*, elle existe si et seulement si elle est positive.

$$
\begin{aligned}
b_1^* \geq 0 &\Leftrightarrow -1 + \sqrt{\frac{1-\beta}{\beta(2+\rho)}} \geq 0 \\
&\Leftrightarrow \sqrt{\frac{1-\beta}{\beta(2+\rho)}} \geq 1 \\
&\Leftrightarrow \frac{1-\beta}{\beta(2+\rho)} \geq 1 \\
&\Leftrightarrow 1-\beta \geq \beta(2+\rho) \\
&\Leftrightarrow \beta(3+\rho) \leq 1 \\
&\Leftrightarrow \beta \leq \frac{1}{3+\rho} = \widetilde{\beta}
\end{aligned}
$$