MASTER EN SCIENCES MATHÉMATIQUES

Un regard didactique sur la démonstration par récurrence

POULIN, Marie-Alice

Award date:
2013

MASTER EN MATHÉMATIQUES

Un regard didactique sur la démonstration par récurrence

Marie-Alice Poulin

2013

UNIVERSITÉ DE NAMUR

FACULTÉ DES SCIENCES

UNIVERSITE DE NAMUR

Faculté des Sciences

UN REGARD DIDACTIQUE SUR LA DEMONSTRATION PAR RECURRENCE

Mémoire présenté pour l'obtention

du grade académique de master en « Sciences mathématiques à finalité didactique »

Marie-Alice Poulin

Juin 2013

Remerciements

Ce mémoire représente pour moi non seulement le fruit d'un travail soutenu mais également la concrétisation de cinq années universitaires inoubliables, riches en découvertes et en expériences. Je tiens à remercier ici toutes les personnes qui m'ont accompagnée, soutenue et aidée au cours de son élaboration.

Mes remerciements vont d'abord à ma promotrice, Madame De Vleeschouwer. Sans elle, sans ses conseils judicieux et ses encouragements permanents, sans sa disponibilité et sa confiance, je n'aurais pu mener à bien ce travail. Quelle chance pour moi d'avoir pu vous rencontrer il y a cinq ans, Madame, sans vous je n'y serais jamais arrivée.

Un tout grand merci également à l'ensemble de mes professeurs pour la richesse de leur enseignement et les conseils précieux qu'ils m'ont toujours prodigués. Merci tout particulièrement pour leur patience.

Mes remerciements s'adressent aussi à Madame Grenier qui a accepté de me rencontrer. Son article qui a été le point de départ de ce mémoire, m'a apporté des bases solides pour sa réalisation.

Je ne peux oublier de remercier tous les enseignants et les étudiants qui ont accepté de répondre à mon questionnaire. Sans leur participation, je n'aurais pu mener à bien mon analyse.

Merci enfin à tous mes amis de promotion et à mes proches, de m'avoir sans cesse soutenue moralement. Je pense tout particulièrement à ma maman, Jo et mes grands-parents. Je ne peux oublier mon papa qui aurait été tellement heureux et fier de pouvoir partager tous ces moments avec moi.

Table des matières

Introduction

Etablir des conjectures et tenter de les démontrer est une activité courante du mathématicien. Mais apprendre à démontrer est une tâche bien différente, qui ne s'avère pas forcément évidente. Celle-ci est confiée aux enseignants qui se doivent de mettre tout en place afin d'y parvenir. Si certaines façons de raisonner pour démontrer sont facilement maitrisées par les élèves, d'autres nécessitent un enseignement explicite et particulièrement approfondi. Dans ce mémoire, nous porterons un regard didactique sur la démonstration par récurrence.

Bien que reconnue comme intuitive, celle-ci n'est pas forcément facile à comprendre. Une étude menée en France par Grenier, didactitienne des mathématiques, en témoigne. Afin de bien maitriser cet outil, constate-t-elle, des connaissances en logique mathématique s'imposent. Celles-ci ne sont pas toujours acquises et cela engendre des confusions et des erreurs à propos de la démonstration par récurrence. Parfois même, sa légitimité en tant que moyen de démonstration valide est remise en question. Tous ces constats, Grenier a pu les établir grâce à une enquête menée auprès d'étudiants universitaires de sections scientifiques et d'enseignants de mathématiques.

Le but de ce mémoire consistera à réaliser une étude didactique sur ce même sujet, en Belgique. Nous tenterons ainsi de voir si la démonstration par récurrence est maitrisée par les étudiants, les professeurs et de savoir la place qui lui est accordée dans l'enseignement. Nous en tirerons les constats qui s'imposent et proposerons divers exercices en regard de ceux-ci.

Dans un premier temps, un chapitre théorique précisera ce que nous entendons par récurrence et définira le sens des termes qui lui sont généralement associés. Il y sera question également de la démonstration par récurrence, sujet de ce mémoire, qui sera développé dans le détail. Le vocabulaire utilisé tout au long de notre étude y sera explicité.

La deuxième partie consistera à présenter les différents articles que nous avons consultés afin de mener à bien notre travail. Nous insisterons tout particulièrement sur les constats effectués par Grenier lors de son enquête. Ceux-ci constitueront une base solide pour notre propre analyse. Des autres articles lus, nous retiendrons certains points liés à l'implication, objet mathématique difficilement compris par les étudiants.

La troisième phase de ce travail sera consacrée à la description de notre problématique de recherche ainsi qu'à la présentation de la méthodologie adoptée. Celle-ci est inspirée de la théorie de la transposition didactique de Chevallard dont nous parlerons également.

Ensuite, dans un quatrième chapitre, nous réaliserons une étude à caractère épistémologique à propos de la démonstration par récurrence. Cela nous permettra de comprendre globalement comment elle a évolué et de mettre en évidence les obstacles auxquels elle a été confrontée au fil du temps.

Dans les trois chapitres suivants, il s'agira de faire un état des lieux à propos de la démonstration par récurrence telle qu'elle est considérée dans l'enseignement francophone belge. Nous commencerons pas effectuer une analyse des programmes et du référentiel des compétences terminales. Nous ferons également la critique de divers extraits de manuels de niveaux secondaire et supérieur. Ensuite, nous présenterons les résultats de notre analyse issus de réponses à des questionnaires. Ceux-ci ont été distibués, d'une part, à des enseignants de mathématiques et, d'autre part, à des étudiants universitaires des sections physique et mathématique.

Des constats tirés, nous clôturerons notre analyse en proposant quelques exercices destinés aux enseignants afin qu'ils puissent intégrer au mieux la démonstration par récurrence dans leurs cours. Nous espérons ainsi que notre recherche permettra de donner de nouvelles pistes pour l'enseignement de cet outil de démonstration mathématique.

Chapitre 1

Récurrence, raisonnement par récurrence et preuve par récurrence

Il nous semble important de commencer ce travail par expliciter la notion de récurrence ainsi que par préciser le sens des termes qui lui sont couramment associés tels que raisonnement, induction, preuve, démonstration, etc. En effet, ils seront régulièrement employés dans les différents chapitres. Ensuite, nous développerons deux concepts mathématiques où est utilisée la récurrence. Cela fait, nous présenterons de manière détaillée le deuxième concept concernant la démonstration par récurrence. Comme il s'agit du sujet principal de ce travail, nous souhaitons, au cours de ce chapitre introductif, rappeler les notions mathématiques qui entrent en jeu et préciser le vocabulaire que nous utiliserons par la suite.

1.1 Notions de base

Bien que ce travail concerne la *démonstration par récurrence*, nous pensons indispensable de définir la notion de *récurrence* en elle-même qui y est, bien évidemment, intimement liée. Ce terme étant utilisé dans le langage naturel, nous pouvons déjà avoir une idée intuitive de son sens mathématique en consultant un dictionnaire de la langue française (Le Robert, 1996) ainsi qu'un dictionnaire historique et étymologique du vocabulaire mathématique (Hauchecorne, 2003). Nous n'y avons retenu que les significations qui intéressent notre cas d'étude et que nous reproduisons ci-dessous :

- **Récurrence (Le Robert, 1996, p. 1611) :**
  n. f. - XIX^{e}
  1. littér. Retour, répétition. "*la récurrence des deux thèmes principaux* [dans Tannhäuser]" (Baudelaire). Phénomène répétitif.
- **Récurrent, ente (Le Robert, 1996, p. 1611) :**
  adj. - XVI^{e} ; lat. *recurrens* "qui revient en arrière"
  4. Qui revient, qui se répète (en parlant d'un état, d'une situation).
- **Récurrence (Hauchecorne, 2003, p. 174) :**
  Le verbe latin *recurrere*, *courir en arrière* a pour participe présent *recurrens*. C'est lui qui nomme notre raisonnement par récurrence apparu au XIX^{e} siècle $[\cdots]$.

FIGURE 1.1 – Notion de récurrence

De par ces définitions et l'étymologie du mot, nous pouvons affirmer que lorsqu'il s'agit de *récurrence*, on a affaire à un retour en arrière, une certaine forme de répétition.

Le mot *récurrence* est souvent associé aux termes *preuve*, *démonstration* et *raisonnement*. Nous explicitons maintenant ces termes. En ce qui concerne les deux premiers, nous reprendrons le même schéma que pour le mot récurrence à savoir un extrait d'un dictionnaire de la langue française (Le Robert, 1996) ainsi qu'un extrait du dictionnaire historique et étymologique du vocabulaire mathématique (Hauchecorne, 2003). En ce qui concerne le terme *raisonnement*, remarquons qu'Hauchecorne ne le reprend pas dans son dictionnaire, nous ne pourrons donc pas le citer sur ce terme.

- **Preuve (Le Robert, 1996, p. 1510) :**
  n. f. - XII^{e} ; de *prouver*
  1. Ce qui sert à établir qu'une chose est vraie. *Donner quelque chose comme preuve* (⇒ **alléguer, attester**). *Avoir, apporter des preuves. Fournir des preuves* ⇒ **prouver**. *Faire la preuve de quelque chose. Accuser, juger sans preuve. Je n'en veux pour preuve que... Croire qqch. Jusqu'à preuve du contraire* [· · ·] - Acte, chose, réalité qui atteste un sentiment, une intention ⇒ **marque, signe** [· · ·].

- **Preuve (Hauchecorne, 2003, p. 158) :**
  Le verbe latin *probare* signifie *trouver bon, approuver* (⇒ Probabilité). *Prouver* signifie d'abord mettre *à l'épreuve* et par extension *essayer* ou *vérifier*. En italien, on utilise le verbe *provare* pour demander à essayer un vêtement dans un magasin. Devenu *prover* puis *prouver*, il se spécialise vers 1400 dans le sens de *justifier*. Le mot *preuve* est utilisé en mathématiques à partir de la Renaissance. C'est l'époque où revient le souci de justifier ce que l'on affirme. Bientôt le sérieux du mot semble galvaudé par son utilisation dans le langage courant. On préfère souvent le remplacer par *démonstration* qui paraît donner de nos jours un plus grand sérieux scientifique.

FIGURE 1.2 – Notion de preuve

- **Démonstration (Le Robert, 1996, p. 512)**
  n. f. - XII^{e}
  1. Opération mentale qui établit une vérité (peuve, induction). - (Opposé à *preuve*) Raisonnement déductif destiné à établir la vérité d'une proposition à partir de prémisses considérées comme vraies. ⇒ **déduction**. - Ce qui sert à démontrer. ⇒ **preuve ; argument ; justification**. *Les faits sont la meilleure démonstration de ce que j'avance.*
  2. Action d'expliquer par des expériences les données d'une science, le fonctionnement d'un appareil. Il "*fait des figures avec de la craie, entame une démonstration*" (Stand). - *Modèle de démonstration.*

- **Démonstration (Hauchecorne, 2003, p. 51) :**
  Ce mot est emprunté dans le courant du XII^{e} siècle au latin et désigne l'action de montrer. Il s'utilise d'abord en rhétorique, discipline très prisée des scolastiques puis en droit. En mathématiques le mot prend une définition plus précise puisqu'il désigne le raisonnement qui mène de prémisses à une conclusion à l'aide de schémas logiques précis. La logique mathématique formalise cette notion dans la théorie de la démonstration.

FIGURE 1.3 – Notion de démonstration

- **Raisonnement (Le Robert, 1996, p. 1579) :**
  n. m. - XIVe
  1. L'activité de la raison, la manière dont elle s'exerce. ⇒ **logique, réflexion**. *Convaincre par le raisonnement ou persuader par le sentiment.*
  2. Suite de propositions liées les unes aux autres selon des principes déterminés, et aboutissant à une conclusion. *Raisonnement déductif des mathématiques* (⇒ **déduction, syllogisme**) ; *raisonnement inductif des sciences d'observation* (⇒ **induction**) ; *raisonnement par analogie* (⇒ aussi **démonstration**). *Raisonnement a priori*, fondé sur la raison ; *raisonnement a posteriori*, fondé sur l'expérience. - *Raisonnement qui part d'un axiome, d'une hypothèse. Prémisses, termes, conséquences, conclusion d'un raisonnement.* - Raisonnement juste, faux, bancal, illogique, vicieux...(⇒ **illogisme, paralogisme, sophisme ; paradoxe**)."*c'est précisément ce raisonnement boiteux qui l'amène à cette conclusion*" (Gide) [···].

FIGURE 1.4 – Notion de raisonnement

Ces définitions et explications nous laissent penser que les trois termes *preuve*, *démonstration* et *raisonnement* sont mêlés les uns aux autres et, parfois, de manière assez complexe. Nous allons donc éclaircir, sur base de ces extraits de dictionnaires, ce que nous entendons par ces différents termes. Nous mettrons aussi l'accent sur certaines distinctions auxquelles il convient de prêter attention. Cette démarche a une importance considérable pour la compréhension de la suite de ce travail car ces différents termes seront couramment utilisés.

Nous considérerons qu'un *raisonnement* est une structuration logique de la pensée qui peut, ou pas, être liée à un processus de *preuve*. Nous pouvons par exemple raisonner par récurrence pour définir les termes d'une suite. Il n'y a aucune *preuve* ou *démonstration* dans cette démarche de *raisonnement* puisqu'elle vise uniquement la construction d'un objet.

Nous pourrions distinguer les termes *preuve* et *démonstration*. Pour illustrer cela, considérons les exemples suivants :

- ***Un exemple concret (Forum sciences, 2008) :***
  Imaginons la situation où notre vitesse sur l'autoroute dépasse celle autorisée.
  - La photo prise par le radar en est une **preuve**.
  - Le calcul de notre vitesse moyenne obtenue en divisant la distance parcourue entre les péages par le temps en est une **démonstration**.
- ***Un exemple mathématique* :**
  Considérons la proposition suivante : *Toute fonction continue n'est pas dérivable.*
  - Une **preuve** de celle-ci pourrait être une *monstration* c'est-à-dire une exhibition d'une fonction particulière qui est continue et non-dérivable. Nous pensons notamment au cas de la fonction valeur absolue pour lequel il est aisé d'illustrer ce fait visuellement, à partir du graphe.
  - Une **démonstration** [1] de cette proposition pourrait être établie de manière rigoureuse par des raisonnements déductifs logiques, partant bien entendu des définitions formelles de continuité et de dérivabilité.

1. Nous ne démontrerons pas la proposition en question puisque c'est l'idée même de la notion de démonstration qui nous intéresse plus particulièrement.

Dès lors, nous comprenons bien que le terme *preuve* est à distinguer de celui de *démonstration*. Il s'agit, dans une démonstration, de prouver un résultat grâce à un *raisonnement* valide constitué par un ensemble de déductions logiques d'un point de vue mathématique. Dans le cas de la preuve, il ne s'agit pas forcément de fournir un tel *raisonnement*. En effet, comme nous l'avons illustré à deux reprises, on peut tout à fait établir une *preuve* sur base d'une *monstration*, tout comme c'était le cas de la photo dans le premier exemple ou le cas de la fonction valeur absolule dans le deuxième. Ainsi, il est aisé de comprendre qu'une *démonstration* est une *preuve* mais que la réciproque n'est pas forcément vraie.
Hauchecorne nous fait remarquer (voir figure **??**) que le terme *preuve* est couramment remplacé par celui de *démonstration*. Dans la suite de ce travail, nous considérerons également ces deux termes comme étant synonymes et cela non pas pour une question de "*sérieux mathématique*" comme nous l'indique Hauchecorne, mais bien pour une raison de simplicité.

Revenons à présent au terme *récurrence* que nous avons explicité à la figure **??**.
A la place du terme *récurrence* s'utilise régulièrement le mot *induction*. Voici ce qu'un dictionnaire de la langue française (Le Robert, 1996) ainsi qu'un dictionnaire historique et étymologique du vocabulaire mathématique (Hauchecorne, 2003) mentionnent à ce propos :

- **Induction (Le Robert, 1996, p. 988) :**
  n. f. - XIII[e] ; lat.
  1. Opération mentale qui consiste à remonter des faits à la loi, de cas singuliers à une proposition plus générale. ⇒ **généralisation**. *Induction mathématique.* - *Raisonnement par induction* ⇒ **inférence**.

- **Induction (Hauchecorne, 2003, p. 102) :**
  En latin *indictio* désigne l'action d'introduire. Oresme l'utilise pour exprimer le fait de remonter de la conséquence à la cause. C'est dans ce sens qu'il faut comprendre induction comme synonyme de *raisonnement par récurrence*. De manière générale l'induction, parfois qualifiée de totalisante, est le raisonnement qui permet d'aller de l'expérience à la cause ou à la loi générale.
  Le mot a aussi, surtout en anglais, le sens de *déclenchement, mise en route*. Ceci inspire le sens d'induction en physique apparu au début du XIX[e] siècle.
  Le verbe *induire* est une réfection d'enduire sur le latin *inducere, conduire dans*. Il exprime la conséquence. La *structure induite* et *loi induite* sur un sous-ensemble découlent de celles définies sur l'ensemble initial.

FIGURE 1.5 – Notion d'induction

L'*induction* telle que présentée dans le dictionnaire français est considérée comme étant une généralisation établie sur base de plusieurs cas particuliers. C'est ce que nous appellerons *induction incomplète*[2].

2. Par opposition à l'induction complète (voir sous-section **??**).

Pour illustrer ce raisonnement, considérons l'exemple suivant qui est inspiré de Karl Popper (1902-1994) :

Imaginons que nous sommes dans une prairie. Nous observons que :

– le premier mouton est blanc,
– le deuxième mouton est blanc,
– ...
– le centième mouton est blanc.

On en conclut que tous les moutons sont blancs.

FIGURE 1.6 – Exemple d'induction incomplète, inspiré de (Popper, 1935, p. 23)

Nous comprenons bien qu'il s'agit, dans cet exemple, d'un raisonnement utilisant l'induction incomplète puisque la conclusion est établie uniquement sur base de plusieurs cas particuliers. Néanmoins, nous savons aujourd'hui que, en mathématiques, un tel *raisonnement* ne peut constituer une *preuve* ou une *démonstration* valide pour établir une généralisation. Le qualificatif *incomplet* accentue ce fait. Néanmoins, remarquons que, en mathématiques, il est logique de passer par une induction incomplète avant de démontrer un résultat non encore établi. En effet, on peut très bien sentir, avoir le sentiment qu'une généralité puisse s'établir (on obtient alors une conjecture) et décider de voir, grâce à une démonstration cette fois, s'il s'agit d'une vérité ou non. Nous reviendrons par la suite sur la notion d'*induction incomplète* et ce, principalement, dans la sous-section **??**.

Notons également qu'Hauchecorne nous signale, dans l'extrait de la figure **??**, que l'*induction* est à considérer comme synonyme de *raisonnement par récurrence*. Nous choisissons quant à nous d'utiliser non pas le terme *raisonnement par récurrence* pour synonyme d'*induction* mais bien celui de *récurrence*. Ainsi, *raisonnement par récurrence* et *raisonnement par induction* seront utilisés l'un pour l'autre dans la suite de ce travail.

1.2 Utilisation de la récurrence en mathématiques

L'utilisation de la récurrence en mathématiques s'applique à des cas bien *particuliers* c'est-à-dire des situations faisant intervenir l'ensemble des naturels, $\mathbb{N}$, ou un sous-ensemble de celui-ci. Nous y consacrerons une première sous-section. La récurrence est utilisée en mathématiques à deux fins différentes à savoir la définition (ou construction) d'éléments ou comme outil de démonstration. Nous réserverons une sous-section pour expliquer plus en détail ce propos. Enfin, nous ne pouvons pas parler de récurrence sans aborder la notion d'infini, ce qui sera évoqué dans la dernière partie de cette section.

1.2.1 L'ensemble $\mathbb{N}$

Le concept de récurrence ne peut s'appliquer que lorsque l'on considère des ensembles ordonnés [3]. L'ensemble le plus souvent utilisé est l'ensemble des naturels, noté $\mathbb{N}$. Rappelons que celui-ci peut se construire à partir d'un ensemble d'axiomes nommés *les axiomes de Peano* que nous reprenons ci-dessous.

3. *"Par ensemble ordonné, nous entendons un ensemble muni d'un ordre tel que toute partie non vide admet un plus petit élément."* (Grenier, 2011, p. 27)

Les cinq axiomes de Peano :

1. *L'élément appelé zéro et noté 0, est un entier naturel.*
2. *Tout entier naturel a un unique successeur, noté $S(n)$ ou SN.*
3. *Il n'existe pas d'entier naturel dont le successeur est 0.*
4. *Deux entiers naturels ayant même successeur sont égaux.*
5. *Si un ensemble d'entiers naturels contient 0 et contient le successeur de chacun de ses éléments, alors cet ensemble est égal à $\mathbb{N}$.*

FIGURE 1.7 – Axiomes de Peano, extrait de (Peano, 1889, cité par Grenier, 2011, p. 28)

Concentrons-nous plus particulièrement sur le 5ème axiome dénommé *axiome de récurrence* ou encore *principe de récurrence.* Cette dernière dénomination est couramment utilisée bien qu'il faille garder à l'esprit qu'une théorie mathématique n'est normalement constituée que de théorèmes, de définitions, d'axiomes et non pas de principes (contrairement à une théorie physique). Néanmoins, cette appellation est souvent utilisée et ce, même par de grands auteurs tel que Bourbaki (Perrin, vers 2006, p. 1). Il convient donc de garder à l'esprit qu'il s'agit bel et bien d'un axiome et ce, malgré cette dénomination courante.
Dans la suite de ce travail, nous nous référerons au 5ème axiome de Peano sous les termes d'*axiome de récurrence* et nous réserverons le terme de principe pour parler du *principe de démonstration par récurrence* qui désigne pour nous le fonctionnement général de la démonstration par récurrence.

1.2.2 Deux orientations d'utilisation

En mathématiques, la notion de récurrence est utilisée principalement dans deux directions : la définition (ou construction) d'éléments particuliers et la preuve de propriétés particulières [4]. Remarquons qu'il s'agit, dans les deux cas, d'un *raisonnement par récurrence.*

1. **La récurrence peut être utilisée pour définir les termes d'une suite.**
   Nous illustrerons ce propos en particularisant à des suites réelles, pour des raisons de clarté. Rappelons qu'une suite réelle peut être considérée comme une fonction de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{R}$ et se note généralement $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Les termes de la suite peuvent être définis soit explicitement par la valeur de la fonction en un entier naturel soit par récurrence. Nous illustrons ces deux possibilités à l'aide des exemples ci-dessous :
   – Suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie explicitement :
   $$\begin{array}{rccl} f & : & \mathbb{N} & \to & \mathbb{R} \\ & & n & \mapsto & f(n) \overset{Not.}{=} u_n = 5n+2 \end{array}$$
   – Suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par récurrence :
   $$\begin{cases} v_0 = 2 \\ v_1 = 4 \\ v_n = v_{n-1} + v_{n-2} + 3 \end{cases}$$

4. Nous avons explicité ce que nous entendons par *particulier* dans la sous-section précédente.

Remarquons que la valeur de n'importe quel terme de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$, définie explicitement, peut facilement être obtenue pour n'importe quelle valeur de n : par exemple, la valeur du 14$^{\text{ème}}$ terme sera $(5 \cdot 14 + 2) = 72$. Par contre, cela s'avèrera moins aisé dans le cas de la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$, définie par récurrence, puisque, pour calculer la valeur du 14$^{\text{ème}}$ terme, cela nécessitera de connaitre les treize termes précédents. En effet, dans notre exemple, la détermination de la valeur du $n^{\text{ème}}$ terme $(n > 1)$ nécessite l'utilisation des termes précédents. On retrouve ici l'idée présente dans l'étymologie du mot récurrence.

2. **La récurrence peut être utilisée pour démontrer des propositions.**
   Lorsque la récurrence est utilisée pour démontrer des propositions, on parle alors de *démonstration par récurrence* ou encore de *démonstration utilisant un raisonnement par récurrence*. Rappelons que les propositions à démontrer par récurrence doivent faire référence à l'ensemble $\mathbb{N}$.
   Nous consacrerons la section suivante à la démonstration par récurrence et à sa légitimité. Nous nous contentons ici d'en évoquer le principe [5] en l'illustrant par un exemple repris à la figure **??**.

Démontrer la proposition $\boxed{\forall n \in \mathbb{N} : \sum_{i=0}^{n} i = \frac{n\cdot(n+1)}{2}}$ revient à démontrer une infinité de propositions :

$$\sum_{i=0}^{0} i = 0,\ \sum_{i=0}^{1} i = 1,\ \sum_{i=0}^{2} i = 3,\ ...$$

Il est bien évidemment impossible de les démontrer toutes une à une, puisqu'il y en a une infinité. C'est pourquoi on utilise le *principe de démonstration par récurrence* qui peut s'énoncer comme suit (Grenier, 2011, p. 28) :

> S'il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que $P(n_0)$ ET si
> pour tout $n \geqslant n_0$ (où $n \in \mathbb{N}$), $[P(n) \Rightarrow P(n+1)]$, alors pour tout $n \geqslant n_0$, $P(n)$.

Par conséquent, pour prouver que $\forall n \in \mathbb{N} : \sum_{i=0}^{n} i = \frac{n\cdot(n+1)}{2}$, démontrons donc :

- Il existe $n_0 \in \mathbb{N} : \sum_{i=0}^{n_0} i = \frac{n_0\cdot(n_0+1)}{2}$
- $\forall n \geqslant n_0$ et $n \in \mathbb{N}$: $\left[\sum_{i=0}^{n} i = \frac{n\cdot(n+1)}{2}\right] \Rightarrow \left[\sum_{i=0}^{n+1} i = \frac{(n+1)\cdot(n+2)}{2}\right]$

où $n_0 = 0$, celui-ci nous étant donné dans la proposition à démontrer.

▷ Avons-nous que $\sum_{i=0}^{0} i = \frac{0\cdot(0+1)}{2}$?

Nous savons que $\sum_{i=0}^{0} i = 0$. De plus, $\frac{0\cdot(0+1)}{2} = 0$.

Ainsi, $\sum_{i=0}^{0} i = \frac{0\cdot(0+1)}{2} = 0$.

5. Notons que, dans ce principe, nous utiliserons la notation $P(n)$ pour désigner un prédicat. Ajoutons également que par $P(n)$ est sous-entendu "$P(n)$ est vrai".

$\triangleright$ Démontrons que $\forall n \in \mathbb{N} : \left[\sum_{i=0}^{n} i = \frac{n\cdot(n+1)}{2} \right] \Rightarrow \left[\sum_{i=0}^{n+1} i = \frac{(n+1)\cdot(n+2)}{2} \right]$

Soit $n \in \mathbb{N}$.

Pour démontrer cette implication, supposons que $\sum_{i=0}^{n} i = \frac{n\cdot(n+1)}{2}$ $\quad (*)$

et démontrons que $\sum_{i=0}^{n+1} i = \frac{(n+1)\cdot(n+2)}{2}$.

$$\begin{array}{rcll}
\sum_{i=0}^{n+1} i & = & \sum_{i=0}^{n} i + (n+1) & \\
& = & \frac{n \cdot (n+1)}{2} + (n+1) & \text{par hypothèse } (*) \\
& = & (n+1) \cdot \left(\frac{n}{2} + 1\right) & \text{par mise en évidence} \\
& = & \frac{(n+1) \cdot (n+2)}{2} &
\end{array}$$

Par le principe de récurrence, on conclut que $\boxed{\forall n \in \mathbb{N} : \sum_{i=0}^{n} i = \frac{n\cdot(n+1)}{2}}$

FIGURE 1.8 – Première illustration d'une démonstration par récurrence

1.2.3 Le passage à l'infini

Nous venons de le mentionner dans la sous-section précédente, le principe de démonstration par récurrence fait référence à la notion d'infini puisqu'il permet de démontrer une infinité de propositions en en démontrant seulement deux. Reprenons un extrait de *La science et l'Hypothèse*, ouvrage scientifique de Poincaré (1854-1912), afin d'illustrer cela :

"*Le caractère essentiel du raisonnement par récurrence, c'est qu'il contient, condensés pour ainsi dire en une formule unique, une infinité de syllogismes.*"

FIGURE 1.9 – Extrait de (Poincaré, 1902, cité par Vidal, 2005, p. 290)

Ce passage du "*fini à l'infini*" (Dhombres *et al.*, 1987, p. 77) que permet le principe de démonstration par récurrence représente toute la puissance de celui-ci. Néanmoins, il est important de faire remarquer qu'il a fallu énormément de temps à la communauté mathématique pour que ce principe soit accepté en tant qu'outil de démonstration valide[6]. Cela ne semble pas étonnant lorsqu'on sait que la notion d'infini elle-même a mis énormément de temps à être acceptée également et qu'elle est au coeur même du principe en question.

Comme nous venons de le dire, la notion d'infini a été un concept très difficile à accepter au cours du temps (Gingras, 2013, p. 1). Les mathématiciens ont d'ailleurs longtemps espéré pouvoir s'en passer notamment parce qu'elle amenait à de nombreux paradoxes. Citons celui connu sous le nom du *paradoxe de la réflexivité* : il est tout à fait possible d'établir une bijection entre un ensemble infini et une de ses parties. Par exemple, on peut définir une bijection entre l'ensemble des nombres entiers, noté $\mathbb{Z}$ et celui des nombres pairs, noté

6. Voir chapitre **??**.

$2\mathbb{Z}$. Il s'agit bel et bien là d'un paradoxe puisque cela est en contradiction avec une des *notions communes* du livre *Eléments* d'Euclide :

"*Le tout est plus grand que la partie.*"

FIGURE 1.10 – Extrait de (Euclide I, vers 300 ACN, cité par Gingras, 2013, p. 1)

Ce paradoxe expliquera sans doute le fait qu'Euclide ne dit pas, en ce qui concerne les nombres premiers cette fois, qu'il en existe une *infinité* mais plutôt que :

"*Les nombres premiers sont en plus grande quantité que toute quantité de nombres premiers proposée.*"

FIGURE 1.11 – Extrait de (Euclide IX, vers 300 ACN, cité par Gingras, 2013, p. 1)

Cette remarque sur l'infini nous semblait très importante à développer puisque nous pensons qu'elle pourrait nous amener à comprendre certaines difficultés auxquelles les étudiants risquent d'être confrontés aujourd'hui. Cela pourrait donc constituer un obstacle épistémologique.

1.3 La démonstration par récurrence

Dans cette section, nous commençons par distinguer cinq types d'énoncés qui peuvent être démontrés par récurrence. Nous explicitons ensuite le principe sur lequel se base une démonstration par récurrence et nous le reformulons en fonction des types d'énoncés auxquels il pourrait s'appliquer. Nous insistons aussi sur la distinction entre induction incomplète et induction complète. Nous explicitons par après la légitimité du principe de démonstration par récurrence, permettant de l'établir comme un moyen de démonstration valide. Ensuite, nous discutons de l'ordre dans lequel sont présentées les composantes du principe de démonstration par récurrence. Enfin, nous terminons cette section en présentant quelques variantes du principe de démonstration par récurrence.

1.3.1 Le principe de démonstration par récurrence

Le principe de démonstration par récurrence a déjà été évoqué dans la section précédente et illustré sur un exemple (voir figure **??**). L'énoncé présenté dans cet exemple correspond en fait à une *situation*[7] particulière, que nous nommerons "de type 1". En effet, nous trouvons nécessaire de distinguer cinq types de *situations* différents lorsqu'il s'agit d'établir une démonstration par récurrence. Ces situations se distinguent les unes des autres par la proposition donnée, qui est à démontrer. Nous explicitons ces cinq types de situations à la figure **??**.

7. Par "situation", nous entendons un énoncé auquel nous pourrions être confrontée lorsqu'il s'agit d'utiliser une démonstration par récurrence.

Typologie des *situations* auxquelles peut être appliquée une démonstration par récurrence :

Type 1 : une proposition de la forme "$\forall n \in \mathbb{N} : P(n)$", où $P(n)$ est un prédicat, est donnée. Dans cette situation, le prédicat est connu ainsi que l'ensemble sur lequel il est vrai, $\mathbb{N}$. Il convient donc de démontrer la proposition donnée à partir de ces deux informations.

Type 2 : une proposition de la forme "$\forall n \geqslant n_0 : P(n)$", où n, $n_0 \in \mathbb{N}$ et où $P(n)$ est un prédicat, est donnée. Il s'agit d'une situation proche de celle du type 1 puisque le prédicat et l'ensemble sur lequel il est vrai sont donnés. Notons que si $n_0 = 0$, nous nous retrouvons dans le cas du type 1.

Type 3 : une proposition de la forme "$\forall n : P(n)$", où $P(n)$ est un prédicat, est donnée. Ce type de proposition peut être considéré de deux manières différentes :

- soit on sous-entend que le "pour tout n" est à compléter par "pour tout n dans $\mathbb{N}$". La proposition donnée sous-entend donc "$\forall n \in \mathbb{N} : P(n)$", ce qui nous ramène à une situation de type 1 . Nous ne considèrerons donc pas ce genre d'interprétation pour le type 3 ;
- soit l'ensemble ou le sous-ensemble de $\mathbb{N}$ pour lequel l'énoncé est vrai est à déterminer. L'énoncé peut donc être traduit par : "Quels sont les naturels n pour lesquels le prédicat $P(n)$ est vrai ?"

Type 4 : une proposition n'est pas donnée. Dans ce cas, une conjecture doit être établie sur base de cas particuliers afin de déterminer le candidat prédicat $P(n)$ ainsi que l'ensemble potentiel sur lequel il pourrait être vrai. On passe, dans ce type de situation, par une phase d'induction incomplète [a]. Il convient donc de prouver par le biais d'une démonstation par récurrence que la conjecture obtenue par induction incomplète est vraie ou ne l'est pas.

Type 5 : une proposition à démontrer ne fait pas intervenir de prédicat dépendant d'un naturel n de manière explicite, contrairement aux propositions des quatre premiers types. Il s'agit d'une situation faisant appel au principe de Fermat (voir figure **??**) et sur laquelle nous nous attarderons moins que sur les quatre premiers types.

a. Voir illustration figure **??**.

FIGURE 1.12 – Types de "situations" pour les démonstrations par récurrence

Par abus de langage, nous utiliserons les termes *proposition de type n* pour désigner la proposition donnée dans une situation de type n ($1 \leq n \leq 5$).
Dans la suite de ce travail, nous utiliserons les dénominations suivantes (pour les propositions des quatre premiers types) :

- *ensemble initial* pour désigner l'ensemble ou sous-ensemble des naturels sur lequel la proposition est vraie.
- *pas initial* pour désigner le plus petit élément de l'ensemble initial.
- *proposition initiale* pour désigner la proposition à démontrer par récurrence, qui reprend l'ensemble initial et le prédicat. [8]

8. Il s'agit donc, pour les deux premiers types de situations, des propositions données et, pour les deux suivants, des propositions finalement démontrées, si la conjecture établie est vraie.

Remarquons qu'une proposition telle que $\boxed{\forall n \in \mathbb{N} : P(n)}$ ou telle que $\boxed{\forall n \geqslant n_0 : P(n) \text{ où } n, n_0 \in \mathbb{N}}$ contient en fait une infinité de propositions, que l'on peut détailler dans le deuxième cas présenté, par :

$$P(n_0),\ P(n_0+1),\ P(n_0+2),\ \ldots$$

Afin de démontrer la véracité de cette infinité de propositions, le *principe de démonstration par récurrence*, que nous nous permettons également d'appeler *principe de récurrence* ou, tout simplement, *principe* est utilisé. Nous l'avons déjà évoqué à la figure **??** ; nous le reprenons maintenant dans la figure **??**.

> Le *principe de démonstration par récurrence* est la proposition :
>
> S'il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que $P(n_0)$ ET si pour tout $n \geqslant n_0$ (où $n \in \mathbb{N}$), $[P(n) \Rightarrow P(n+1)]$, alors pour tout $n \geqslant n_0$, $P(n)$.

FIGURE 1.13 – Principe de démonstration par récurrence, extrait de (Grenier, 2011, p. 28)

Comme nous le découvrirons lors de l'analyse de manuels scolaires (section **??**), il arrive très souvent que ce principe soit scindé en deux parties. C'est ce que nous présentons à la figure **??**.

> Le *principe de démonstration par récurrence* s'écrit aussi de la manière suivante :
>
> Si on démontre que :
> - il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que $P(n_0)$
>
> et
> - $\forall k \geqslant n_0$ et $k \in \mathbb{N} : [P(k) \Rightarrow P(k+1)]$
>
> Alors, on peut conclure que $\forall n \geq n_0 : P(n)$.

FIGURE 1.14 – Autre formulation du principe de récurrence

En ce qui concerne cette façon d'écrire le principe de démonstration par récurrence, nous utiliserons les dénominations suivantes :

– *L'amorce* désigne la proposition "il existe n_0 tel que $P(n_0)$".
– *L'hérédité* désigne la proposition "$\forall k \geqslant n_0$ et $k \in \mathbb{N} : [P(k) \Rightarrow P(k+1)]$"

  Ces dénominations nous semblent adéquates car le terme *amorce* met l'accent sur le fait qu'il s'agit de l'élément déclencheur et le terme *hérédité* rend bien compte du passage d'un entier naturel au suivant. Notons que ce dernier terme est tiré de (Grenier, 2011).

– Lorsqu'il s'agira de démontrer l'implication présente dans l'hérédité, nous devrons supposer $P(k)$ pour un $k \in \mathbb{N}$ quelconque tel que $k \geq n_0$. Nous dénommerons cette hypothèse, *hypothèse de récurrence*. Nous restons prudente face à cette dénomination car l'utiliser pourrait amener à certaines confusions. Premièrement, l'hypothèse de récurrence consiste à supposer $P(k)$ où $k \in \mathbb{N}$ est quelconque et tel que $k \geq n_0$.

> Il ne faut donc pas confondre cette hypothèse avec la proposition initiale qui est à démontrer c'est-à-dire "$\forall n \geqslant n_0 : P(n)$". Ensuite, il est important de toujours garder à l'esprit que l'hypothèse de récurrence est posée pour démontrer une implication. Cela ne doit pas être oublié et ce, même si seule l'hypothèse de récurrence est mentionnée.

La figure **??** illustre le principe de démonstration par récurrence au moyen d'une image analogique. Cette dernière permet, selon nous, de bien visualiser le rôle de l'amorce (appelée initialisation dans l'illustration) et de l'hérédité telles que nous les avons définies précédemment. De plus, cette illustration permet de prendre conscience de la puissance du principe de récurrence : il offre la possibilité de démontrer une infinité de propositions en un temps fini.

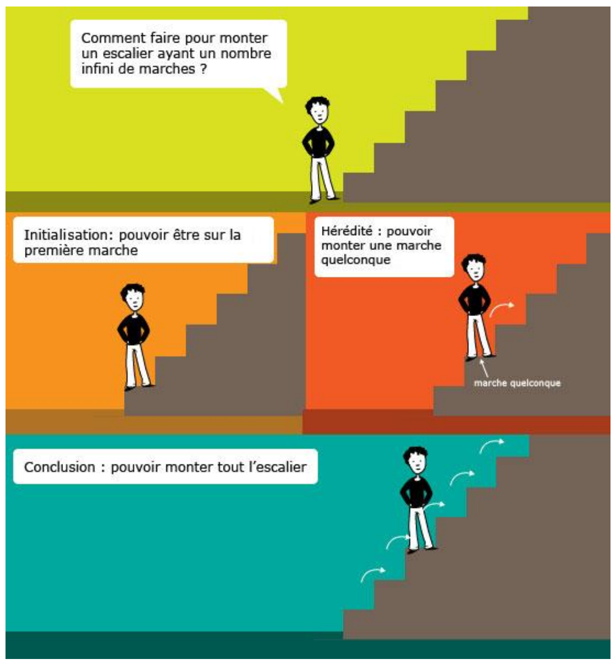


FIGURE 1.15 – Une montée infinie, image tirée de (Magnard, 2013).

Revenons à présent à la formulation du principe repris à la figure **??**. Remarquons deux faits en ce qui concerne les termes "*il existe* n_0" de l'amorce. Nous avons veillé à utiliser le langage naturel et non les symboles " $\exists\ n_0$" pour une raison très simple : utiliser le quantificateur existentiel amènerait à ce que n_0 lui soit lié. Or, nous tenons à le réutiliser dans l'hérédité et/ou dans la proposition initiale. L'utilisation de la langue naturelle (le français en l'occurrence) nous permet d'en tenir compte.
Remarquons également que dans le cas des propositions de type 1 ou de type 2 (cas les plus courants dans l'enseignement secondaire), les termes "*il existe* n_0" de l'amorce peuvent être omis puisque n_0 est donné. Ainsi, *lorsque la proposition initiale est donnée*, on peut écrire le principe de récurrence de la manière présentée à la figure **??**.

Démontrer que [$\forall n \geqslant n_0 : P(n)$] où n, $n_0 \in \mathbb{N}$ revient à démontrer que :

- $P(n_0)$

et

- $\forall k \geqslant n_0$ et $k \in \mathbb{N} : [P(k) \Rightarrow P(k+1)]$

FIGURE 1.16 – Principe de récurrence dans le cas où la proposition initiale est donnée (sous forme d'un prédicat dépendant d'un entier) - situations de types 1 et 2

Il nous semble à présent intéressant de considérer un exemple de démonstration par récurrence moins trivial que celui présenté initialement (figure **??**) car nous nous réfèrerons à cet exemple dans la suite de ce mémoire. Il s'agit de la proposition connue sous le nom de *binôme de Newton*. Ce choix n'est pas anodin car nous reparlerons régulièrement de cette proposition dans l'analyse des programmes scolaires (section **??**). Remarquons qu'à ce stade, nous ne présentons pas encore tous les enjeux didactiques liés à cette notion. Puisqu'il s'agira d'une démonstration dont la proposition initiale est donnée (type 2), nous pourrons utiliser la formalisation du principe de récurrence présentée à la figure **??** ci-dessus.
La formule du *binôme de Newton*, ainsi que la démonstration par récurrence [9] commentée qui lui est associée [10] sont présentées à la figure **??** ci-après.

Proposition à démontrer : $\boxed{\forall n \in \mathbb{N}, \forall x,\, y \in \mathbb{R} : (x+y)^n = \sum\limits_{j=0}^{n} C_n^j x^{n-j} y^j}$.

<u>Démonstration :</u>
Soient x, $y \in \mathbb{R}$.
Nous savons (voir figure **??**) que démontrer la proposition
$\forall n \in \mathbb{N} : (x+y)^n = \sum\limits_{j=0}^{n} C_n^j x^{n-j} y^j$
revient à démontrer les deux suivantes :

- $(x+y)^{n_0} = \sum\limits_{j=0}^{n_0} C_{n_0}^j x^{n_0-j} y^j$ (*)
- $\forall k \geqslant n_0$ et $k \in \mathbb{N}$:

$$\left[(x+y)^k = \sum_{j=0}^{k} C_k^j x^{k-j} y^j\right] \Rightarrow \left[(x+y)^{k+1} = \sum_{j=0}^{k+1} C_{k+1}^j x^{(k+1)-j} y^j\right] \quad (**)$$

$\otimes$ Démontrons la proposition (*) à savoir :

$$(x+y)^{n_0} = \sum_{j=0}^{n_0} C_{n_0}^j x^{n_0-j} y^j$$

9. Nous nous sommes principalement inspirée de la démonstration d'un manuel scolaire (Defeld *et al.*, 2009, pp. 146, 147) que nous avons bien entendu modifiée pour des raisons de clarté et de rigueur.
10. Nous considérons que le lecteur a les connaissances requises en analyse combinatoire pour comprendre cette illustration. Rappelons tout de même la définition mathématique de la combinaison $C_n^j = \frac{n!}{j!(n-j)!}$ ainsi que la formule de Pascal $C_n^{j-1} + C_n^j = C_{n+1}^j$ (où n, $j \in \mathbb{N}$).

Preuve de (*) :
L'ensemble initial nous est donné, il s'agit de $\mathbb{N}$. Néanmoins, $(x+y)^0 = 1$ étant une convention, considérons $n_0 = 1$.

$$\text{Avons-nous que} \quad (x+y)^1 = \sum_{j=0}^{1} C_1^j x^{1-j} y^j \ ?$$

D'une part, nous savons que $(x+y)^1 = x+y$ et, d'autre part, nous savons que

$$\begin{aligned} \sum_{j=0}^{1} C_1^j x^{1-j} y^j &= C_1^0 x^1 y^0 + C_1^1 x^0 y^1 \\ &= x+y & \text{par définition de } C_n^j \end{aligned}$$

Nous avons donc bien démontré l'amorce pour $n_0 = 1$.

$\otimes$ Démontrons à présent la proposition (**) avec $n_0 = 1$ à savoir :

$$\forall k \geqslant 1 \text{ et } k \in \mathbb{N} : \left[(x+y)^k = \sum_{j=0}^{k} C_k^j x^{k-j} y^j\right] \Rightarrow \left[(x+y)^{k+1} = \sum_{j=0}^{k+1} C_{k+1}^j x^{(k+1)-j} y^j\right]$$

Preuve de (**) :

Soit $k \geqslant 1$. Nous supposons que

$$(x+y)^k = \sum_{j=0}^{k} C_k^j x^{k-j} y^j \qquad \text{hypothèse de récurrence}$$

et nous démontrons que

$$(x+y)^{k+1} = \sum_{j=0}^{k+1} C_{k+1}^j x^{(k+1)-j} y^j$$

$$\begin{aligned} (x+y)^{k+1} &= (x+y)^k \cdot (x+y) \\ &= \sum_{j=0}^{k} C_k^j x^{k-j} y^j \cdot (x+y) & \text{par hypothèse de récurrence} \\ &= \sum_{j=0}^{k} C_k^j x^{k-j+1} y^j + \sum_{j=0}^{k} C_k^j x^{k-j} y^{j+1} & \text{par distributivité} \\ &= C_k^0 x^{k+1} y^0 + \sum_{j=1}^{k} C_k^j x^{k-j+1} y^j + \sum_{j=0}^{k-1} C_k^j x^{k-j} y^{j+1} + C_k^k x^0 y^{k+1} \end{aligned}$$

Le passage à la dernière ligne ci-dessus s'explique par l'isolement du terme $j = 0$ de la première somme et $j = k$ de la seconde.
Considérons à présent A et B tels que :

$$A = \sum_{j=1}^{k} C_k^j x^{k-j+1} y^j$$
$$B = \sum_{j=0}^{k-1} C_k^j x^{k-j} y^{j+1}$$

Posons maintenant $u = j + 1$ ($\Leftrightarrow j = u - 1$).

Ainsi, $B = \sum_{j=0}^{k-1} C_k^j x^{k-j} y^{j+1} = \sum_{u=1}^{k} C_k^{u-1} x^{k-u+1} y^u$

L'indice de sommation j étant muet, il peut très bien être rebaptisé d'une autre façon. Changeons dans A la lettre j et remplaçons-la par la lettre u :

$$A = \sum_{u=1}^{k} C_k^u x^{k-u+1} y^u$$

Calculons $A + B$:

$$\begin{aligned} A + B &= \sum_{u=1}^{k} C_k^u x^{k-u+1} y^u + \sum_{u=1}^{k} C_k^{u-1} x^{k-u+1} y^u \\ &= \sum_{u=1}^{k} (C_k^u + C_k^{u-1}) \cdot x^{k+1-u} \cdot y^u && \text{par mise en évidence} \\ &= \sum_{u=1}^{k} C_{k+1}^u \cdot x^{k+1-u} \cdot y^u && \text{par la formule de Pascal} \end{aligned}$$

Revenons à présent où nous en étions restée précédemment et utilisons ce que nous venons d'expliciter :

$$\begin{aligned} (x+y)^{k+1} &= C_k^0 x^{k+1} y^0 + \sum_{j=1}^{k} C_k^j x^{k-j+1} y^j + \sum_{j=0}^{k-1} C_k^j x^{k-j} y^{j+1} + C_k^k x^0 y^{k+1} \\ &= C_k^0 x^{k+1} y^0 + A + B + C_k^k x^0 y^{k+1} \\ &= \boldsymbol{x^{k+1}} + \sum_{u=1}^{k} C_{k+1}^u \cdot x^{k+1-u} \cdot y^u + \boldsymbol{y^{k+1}} \quad \text{car } \forall b \in \mathbb{N} : C_b^0 = 1 \text{ et } C_b^b = 1 \end{aligned}$$

Utilisons à présent des artifices sur les termes en caractères gras : multiplions le premier par $C_{k+1}^0 y^0$ et le second par $C_{k+1}^{k+1} x^0$. Ces deux termes étant égaux tous deux à 1, cela ne changera rien en soi mais nous permettra d'aboutir au résultat.

Ainsi,

$$\begin{aligned}(x+y)^{k+1} &= \underbrace{C^0_{k+1}\boldsymbol{x^{k+1}}\cdot y^0}_{\text{terme } u=0} + \sum_{u=1}^{k} C^u_{k+1}\cdot x^{k+1-u}\cdot y^u + \underbrace{C^{k+1}_{k+1}x^0\cdot \boldsymbol{y^{k+1}}}_{\text{terme } u=k+1} \\ &= \sum_{u=0}^{k+1} C^u_{k+1}\cdot x^{k+1-u}\cdot y^u\end{aligned}$$

Rien ne nous empêche une nouvelle fois de baptiser autrement une variable muette. Nous changeons donc u en j et nous obtenons :

$$(x+y)^{k+1} = \sum_{j=0}^{k+1} C^j_{k+1}x^{k+1-j}y^j$$

Nous avons donc bien démontré la proposition (**).

Grâce à ces deux propositions que sont (*) et (**), nous pouvons donc conclure que

$$\forall n \geqslant 1 \text{ et } n \in \mathbb{N},\ \forall x,\ y \in \mathbb{R},\ :\ (x+y)^n = \sum_{j=0}^{n} C^j_n x^{n-j}y^j$$

$\otimes$ Reste à montrer que la proposition est vraie pour $n=0$.

Avons-nous que $(x+y)^0 = \sum_{j=0}^{0} C^j_0 x^{0-j}y^j$?

D'une part, $(x+y)^0 = 1$ par convention. D'autre part,

$$\begin{aligned}\sum_{j=0}^{0} C^j_0 x^{0-j}y^j &= C^0_0x^0y^0 \\ &= 1\cdot 1\cdot 1 \\ &= 1\end{aligned}$$

Ainsi, puisque la proposition est vraie $\forall n \geqslant 1$ et pour $n=0$, nous pouvons conclure que

$$\forall n \in \mathbb{N},\ \forall x,\ y \in \mathbb{R},\ :\ (x+y)^n = \sum_{j=0}^{n} C^j_n x^{n-j}y^j$$

FIGURE 1.17 – Démonstration par récurrence du binôme de Newton, inspirée de (Defeld *et al.*, 2009, pp. 146, 147)

Ce qui vient d'être fait nous a permis d'illustrer une démonstration par récurrence dont la proposition initiale nous était donnée. Nous verrons dans la sous-section **??** que certaines démonstrations seront moins aisées à établir et nécessiteront l'usage d'une formalisation plus détaillée que celle présentée à la figure **??**. Il s'agit des situations de types 3 et 4 (définies à la figure **??**) dans lesquelles le pas initial n'est pas donné.

Terminons cette sous-section en insistant sur le fait que nous n'avons fait ici que définir et illustrer le principe de démonstration par récurrence. Nous développerons un regard didactique sur celui-ci tout au long de ce travail.

1.3.2 Induction complète et induction incomplète

Le principe de démonstration par récurrence a mis longtemps avant d'être accepté en tant qu'outil de démonstration valide. Nous nous attarderons davantage sur ce fait dans le chapitre **??**. Comme nous l'avons déjà mentionné, cette difficulté d'acceptation peut être en partie liée à la notion de l'infini. Néanmoins, il convient d'ajouter que ce long cheminement peut s'expliquer également par le fait que l'induction incomplète [11] était utilisée jadis par les mathématiciens, bien avant l'acceptation et la formalisation du principe de récurrence, en tant qu'outil de démonstration valide. Bien entendu, cela fut très critiqué par la suite et engendra des incompréhensions, voire même des doutes en ce qui concerne la validité même du principe de démonstration par récurrence. Nous savons bien évidemment aujourd'hui qu'en mathématiques, l'induction incomplète ne permet pas de démontrer un résultat.

Néanmoins, de nos jours encore, l'induction incomplète est couramment utilisée dans des domaines scientifiques autres que celui des mathématiques pour établir des résultats. Ainsi, dans ces domaines, des généralisations y sont établies sur base d'expériences qui semblent adopter un même comportement. Il convient donc, comme le signale également Grenier (2011, p. 27), de distinguer l'induction selon les domaines dans lesquels elle est utilisée :

- **dans le domaine mathématique**, l'induction utilisée dans le principe de démonstration par induction (ou par récurrence) permet de démontrer véritablement un "*résultat généralisateur*".
- **dans les autres branches scientifiques**, l'induction utilisée correspond à l'induction incomplète, c'est-à-dire à une généralisation établie sur base de cas particuliers.

Nous pouvons à nouveau utiliser un extrait de *La science et l'hypothèse* de Poincaré pour illustrer ces propos :

"*L'induction, appliquée aux sciences physiques, est toujours incertaine, parce qu'elle repose sur la croyance à un ordre général de l'Univers, ordre qui est toujours en dehors de nous. L'induction mathématique, c'est-à-dire la démonstration par récurrence, s'impose au contraire nécessairement, parce qu'elle n'est que l'affirmation d'une propriété de l'esprit lui-même.*"

FIGURE 1.18 – Extrait de (Poincaré, 1902, cité par Grenier, 2011, p. 27)

L'absence de cette distinction dans les conceptions peut engendrer un doute en ce qui concerne la validité du principe de démonstration par récurrence utilisé en mathématiques. Pour accentuer cette différence dont nous devons tenir compte, nous utiliserons, a contrario de l'induction incomplète, le qualificatif *complet* pour parler du principe de démonstration par récurrence. Le terme *complet* nous semble adéquat car l'induction complète contient tout pour pouvoir démontrer un résultat contrairement au cas de l'induction incomplète. Ainsi, l'*induction complète* et le *principe de démonstration par récurrence* seront pour nous synonymes tout au long de ce travail.

11. voir illustration à la figure **??**.

Terminons par une remarque, déjà formulée à la fin de la section ??. En mathématiques, il nous semble logique de passer parfois par des phases d'induction incomplète. En effet, on peut très bien avoir l'intuition d'un certain résultat, sentir qu'il est possible qu'une généralité puisse s'établir. On énonce alors une conjecture et on décide de voir s'il s'agit bel et bien d'une vérité par le biais d'une démonstration. Ainsi, avant de passer par l'induction complète, il nous semble tout à fait normal d'être d'abord confrontée à une induction incomplète. Bien entendu, reste à ne pas confondre ces deux démarches qui sont tout à fait différentes, l'une s'établissant sur base de l'intuition, en tant que généralisation de cas particuliers, l'autre s'appuyant sur des raisonnements logiques valides et établissant une vérité. Afin d'illustrer ce fait, reprenons à a figure ?? les termes d'Aristote (384 ACN-322 ACN) qui en avait déjà conscience.

"*L'induction n'est pas* [...] *une démonstration, et cependant, elle montre quelque chose.*"

"*Nous n'apprenons, en effet, que par induction ou par démonstration. Or la démonstration se fait à partir de principes universels, et l'induction, de cas particuliers. Mais il est impossible d'acquérir la connaissance des universels autrement que par induction* [...]."

FIGURE 1.19 – Extrait de (Aristote, vers 350 ACN, cité par Vidal, 2005, p. 192)

Ainsi, l'induction incomplète amène à considérer des propositions pour lesquelles on ne peut affirmer la véracité que par démonstration.

1.3.3 Légitimité du principe

Nous avons vu, lors de la sous-section précédente, que l'induction incomplète avait déjà été utilisée, dans le passé, par les mathématiciens en guise de moyen pour montrer des résultats. Nous savons aujourd'hui que ce processus de raisonnement ne peut rien démontrer contrairement au principe de démonstration par récurrence. Nous allons voir ici ce sur quoi ce principe s'appuie pour pouvoir être considéré comme moyen de démonstration admissible. Commençons par rappeler le principe (figure ??) :

S'il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que $P(n_0)$ et pour tout $n \geqslant n_0$, $[P(n) \Rightarrow P(n+1)]$, alors pour tout $n \geqslant n_0$, $P(n)$.

Nous avons déjà exprimé, dans la sous-section ??, le fait que le principe de démonstration par récurrence s'applique uniquement à l'ensemble des naturels ou, du moins, à un sous-ensemble de celui-ci. Nous avons aussi ajouté que l'ensemble $\mathbb{N}$ peut se construire à partir des axiomes de Peano que nous avons cités. Reprenons ici uniquement le 5$^{\text{ème}}$ d'entre eux, *l'axiome de récurrence* :

Si un ensemble d'entiers naturels contient 0 et contient le successeur de chacun de ses éléments, alors cet ensemble est égal à $\mathbb{N}$.

FIGURE 1.20 – Axiome de récurrence, extrait de (Peano, 1889, cité par Grenier, 2011, p. 28)

Le fait de mettre en parallèle ces deux encadrés nous permet facilement de voir que le principe de démonstration par récurrence s'appuie sur l'axiome de récurrence. En effet, considérons dans un premier temps le principe de récurrence. Notons l'ensemble initial, c'est-à-dire l'ensemble sur lequel le prédicat $P(n)$ est vrai, de la manière suivante :

$$I = \{n \in \mathbb{N} : P(n)\}$$

Considérons à présent l'axiome de récurrence et appliquons-le au cas de l'ensemble I.
Si l'ensemble I contient 0, cela signifie que $P(0)$.
Si I contient le successeur de 0, cela signifie que $P(1)$.
Si I contient le successeur de 1, cela signifie que $P(2)$ et ainsi de suite.
Ainsi, $I = \mathbb{N}$ (si l'ensemble I contient 0).

Dès lors, nous comprenons que c'est l'axiome de récurrence qui légitime le principe de récurrence. Bien entendu, c'est également le cas lorsque le pas initial n_0 est supérieur à 0.

1.3.4 Relative "indépendance" des deux propositions constituant le principe de démonstration par récurrence

Nous avons vu, aux figures **??** et **??**, deux illustrations du principe de démonstration par récurrence. Il s'agissait, tout comme c'est régulièrement le cas dans l'enseignement, de démonstrations à établir à partir d'une proposition donnée dont on connait déjà le pas initial, n_0. Dans ce cas, il est aisé d'appliquer le principe de démonstration par récurrence tel que nous l'avons présenté à la figure **??**. Néanmoins, les énoncés dont la démonstration peut faire appel au principe de récurrence ne se présentent pas toujours de cette manière. En effet, dans la pratique, on soupçonne généralement qu'une propriété, dépendant d'un naturel, pourrait être démontrée. Reste à savoir sur quel domaine de validité de l'ensemble $\mathbb{N}$ cette conjecture est vraie. On passe donc par une phase d'induction incomplète avant une induction complète (voir sous-section **??**).

Considérons l'illustration suivante traitant une situation de type 3, c'est-à-dire une proposition à démontrer dont on ne connait pas, a priori, l'ensemble initial. Cette illustration est inspirée de l'article de Grenier (2011, p. 40). Nous la présentons de manière à pouvoir en tirer quelques enseignements.

Déterminons le sous-ensemble de naturels pour lequel la proposition $Q(n)$ définie par $[2^n \geqslant n^2]$ est vraie. Pour ce faire, nous allons bien entendu utiliser le principe de récurrence.

• Déterminons la plus petite valeur $n_h \in \mathbb{N}$ à partir de laquelle l'hérédité est vraie, c'est-à-dire : trouvons la plus petite valeur $n_h \in \mathbb{N}$ telle que la proposition suivante soit vraie :

$$\forall k \geqslant n_h \text{ et } k \in \mathbb{N} : \left[2^k \geqslant k^2\right] \Rightarrow \left[2^{k+1} \geqslant (k+1)^2\right] \qquad (*)$$

Soit $k \in \mathbb{N}$.
Supposons que $2^k \geqslant k^2$ et trouvons pour quelles valeurs de k nous avons que $2^{k+1} \geqslant (k+1)^2$.

$$\begin{array}{rcll} 2^{k+1} & = & 2^k \cdot 2 & \\ & \geqslant & k^2 \cdot 2 & \quad \text{car, par hypothèse, } 2^k \geqslant k^2 \end{array}$$

Voyons donc pour quelles valeurs de k l'inégalite $\left[2k^2 \geqslant (k+1)^2\right]$ est vraie.

$$\begin{array}{rrcll} & 2k^2 & \geqslant & k^2+1+2k & \\ \Leftrightarrow & k^2-2k-1 & \geqslant & 0 & \\ \Leftrightarrow & k & \geqslant & 3 & \quad \text{puisque } k \in \mathbb{N} \end{array}$$

Ainsi, le n_h est fixé à la valeur 3.
Nous pouvons donc en conclure que la proposition (*) est vraie pour des valeurs de k plus grandes ou égales à 3.
• Considérons à présent $Q(3)$ et voyons ce que nous pouvons en dire.
Par définition, $Q(3)$ est la proposition $[2^3 \geqslant 3^2]$ ou encore $[8 \geqslant 9]$. Cette proposition est fausse.
• Considérons maintenant $Q(4)$. Par définition, il s'agit de la proposition $[16 \geqslant 16]$ qui, quant à elle, est vraie.
• Nous nous posons alors la question suivante : quel est le pas initial pour lequel la proposition $Q(n)$ est vraie ?

Nous avons démontré que $\forall k \geqslant 3$ et $k \in \mathbb{N}$: $[2^k \geqslant k^2] \Rightarrow [2^{k+1} \geqslant (k+1)^2]$.
De plus, nous avons montré que la proposition $Q(n)$ est vraie pour $n = 4$ (et fausse pour $n = 3$).

Nous pouvons donc en conclure que $\forall n \geqslant 4$: $\left[2^n \geqslant n^2\right]$.

FIGURE 1.21 – Illustration d'une démonstration par récurrence dans le cas où le pas initial est à déterminer, inspirée de (Grenier, 2011, p. 40)

Comparons à présent cette illustration avec la démonstration du binôme de Newton (voir figure **??**) :

- Contrairement à la démonstration du binôme de Newton, nous avons commencé ici par traiter l'hérédité (nous en expliquerons la raison par la suite).
- L'ensemble initial est ici un sous-ensemble de $\mathbb{N}$ et non l'ensemble $\mathbb{N}$ tout entier, comme c'était le cas du binôme de Newton [12].
- Dans cette illustration-ci, le pas initial n'était pas donné, nous avons dû le déterminer. Par contre, celui du binôme de Newton était connu.
- Dans le cas du binôme de Newton, les nombres naturels pour lesquels l'amorce et l'hérédité étaient vraies étaient identiques. Dans l'illustration que nous venons de traiter, ce n'était pas le cas. En effet, il a d'ailleurs fallu établir une "synthèse" de ceux-ci pour pouvoir déterminer le pas initial.

De toutes ces observations, nous pouvons conclure que l'ordre dans lequel l'amorce et l'hérédité sont démontrées peut varier. En fait, la démonstration de l'hérédité peut très bien être réalisée avant la démonstration de l'amorce. Dans les situations de types 1 et 2, où le pas initial est donné, l'ordre dans lequel sont réalisées ces démonstrations n'a d'ailleurs aucune importance. Pour ce qui est des situations de types 3 et 4, il en va de même théoriquement,

12. Précisons qu'en ce qui concerne le binôme de Newton, la proposition à été démontrée par récurrence pour $n \geqslant 1$ et que le cas de $n = 0$ a été considéré à part, celui-ci étant une convention.

mais l'illustration présentée à la figure **??** nous suggère cependant de commencer par la démonstration de l'hérédité. Nous expliquerons cela à la fin de cette sous-section **??** car les paragraphes qui suivent nous seront nécessaires afin de justifier nos propos.

Nous avons constaté à quel point l'amorce et l'hérédité sont complémentaires pour pouvoir établir une proposition initiale. Nous avons aussi remarqué que l'hérédité peut être vraie à partir d'un certain rang pour lequel la proposition initiale est fausse, comme c'était le cas pour le nombre 3 dans l'illustration présentée à la figure **??**. C'est d'ailleurs la raison pour laquelle nous avons employé les termes ***relative*** *"indépendance"* dans le titre de cette sous-section.

Posons à présent le vocabulaire suivant :

– Nous appellerons <u>*pas d'hérédité*</u> le premier entier naturel pour lequel l'hérédité est vraie (il est noté n_h dans l'illustration de la figure **??**).
– Lorsqu'il s'agira de déterminer un naturel pour lequel l'amorce est vraie, nous emploierons les termes <u>*pas d'amorce*</u>. Bien entendu, la proposition peut être vraie pour plusieurs naturels. Le pas d'amorce est donc, dans le cas où la proposition est vérifiée pour des naturels supérieurs ou égaux au pas d'hérédité, le plus petit de ces naturels. Dans le cas contraire, il s'agit du plus grand naturel pour lequel la proposition est vérifiée.

Différents cas de figure sont possibles en ce qui concerne les pas d'amorce et d'hérédité : ils peuvent être égaux, l'un peut être strictement supérieur à l'autre, ou encore strictement inférieur. Considérons à présent ces différents cas de figure :

– Dans le cas où **les pas d'amorce et d'hérédité sont égaux**, il n'est pas difficile d'effectuer la synthèse de ceux-ci pour déterminer le pas initial. En effet, il est égal, dans ce cas, au pas d'amorce et au pas d'hérédité. C'était notamment le cas de la démonstration du binôme de Newton présentée à la figure **??**. Le schéma de la figure **??** ci-dessous représente ce cas de figure. Le pas d'amorce y est représenté par une étoile et le pas d'hérédité est représenté par un disque. Nous représentons également l'hérédité au moyen d'une succession de ponts d'un entier naturel à son successeur. Nous utiliserons ce même type de schéma pour les trois cas de figure possibles.

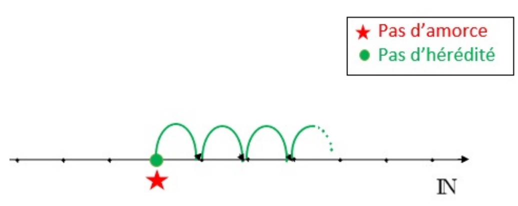


FIGURE 1.22 – Schématisation : pas d'amorce et d'hérédité égaux

– Dans le cas où **le pas de l'amorce est strictement supérieur au pas de l'hérédité**, la synthèse de ceux-ci amène à ce que le pas initial soit égal à celui de l'amorce. Cette situation est schématisée à la figure **??** ci-dessous et une illustration en a été donnée à la figure **??**.

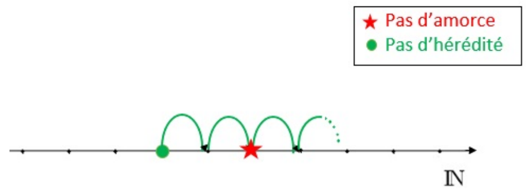


Figure 1.23 – Schématisation : pas d'amorce supérieur au pas d'hérédité

– Dans le cas où **le pas de l'amorce est strictement inférieur à celui de l'hérédité**, il est impossible de conclure quoi que ce soit. La figure **??** schématise ce cas de figure. Dans cette situation, une solution envisageable est de considérer une démonstration autre que celle utilisant le principe de démonstration par récurrence et ce, bien entendu, si on soupçonne la véracité de la conjecture exposée. Une illustration de ce cas sera reprise plus tard dans ce travail, à la figure **??**.

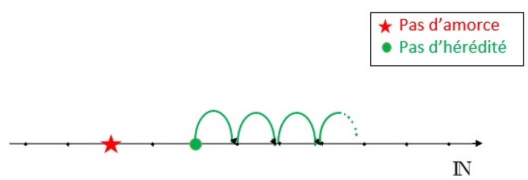


Figure 1.24 – Schématisation : pas d'amorce inférieur au pas d'hérédité

Dès lors, nous comprenons la raison pour laquelle nous avions dit précédemment que le principe de récurrence tel que présenté à la figure **??** nécessitait d'être détaillé. En effet, l'entier naturel n_0 de cette présentation du principe est le pas initial directement établi sur base de la synthèse des pas d'hérédité et d'amorce. Cette façon de formuler le principe ne convient pas à tous les types de situations que nous avons définis (figure **??**). C'est pourtant cette version du principe qui est la plus fréquente dans l'enseignement. Remarquons également que les termes "*il existe* n_0" placés avant l'amorce laissent, selon nous, sous-entendre que la démonstration de l'amorce est à réaliser avant celle de l'hérédité, celle-ci dépendant également de n_0. Or, nous avons vu que l'ordre dans lequel ces deux démonstrations sont réalisées n'a théoriquement pas d'importance.

Nous proposons donc, à la figure **??**, une formalisation détaillée du principe de récurrence, qui tient compte des différents cas de figure établis selon les positions relatives des pas d'amorce et d'hérédité. Nous recommandons cette formulation dans les situations de types 3 et 4 (définies à la figure **??**).

Formalisation détaillée du principe de récurrence, tenant compte des différentes positions relatives du pas d'amorce et du pas d'hérédité :

Si on démontre que :
- Il existe $n_h \in \mathbb{N}$ tel que : $\forall k \geqslant n_h$ et $k \in \mathbb{N}$: $[P(k) \Rightarrow P(k+1)]$

et
- Il existe $n_a \in \mathbb{N}$: $P(n_a)$

Alors,
◦ Si $n_a \geqslant n_h$, on peut conclure que $\forall n \geqslant n_a$: $P(n)$.
◦ Sinon, on ne peut rien conclure.

FIGURE 1.25 – Formulation détaillée du principe de récurrence

Nous sommes maintenant en mesure d'expliciter le fait que, dans des situations de types 3 et 4, même si, théoriquement, il est tout à fait possible de démontrer l'amorce avant l'hérédité, il est préférable de faire en pratique l'inverse (comme suggéré lors de l'illustration présentée à la figure **??**). En effet, dans des situations de types 3 ou 4, le pas initial est à déterminer sur base des positions relatives des pas d'amorce et d'hérédité. Or, rien ne sert de vouloir trouver le pas d'amorce si pour ce pas, l'hérédité n'est pas vraie. Ainsi, il est préférable de commencer par déterminer le pas d'hérédité et de voir si un pas d'amorce peut être déterminé à partir de ce pas d'hérédité.

1.3.5 Autres formes équivalentes du principe de récurrence

Différentes variantes du principe de démonstration par récurrence peuvent être trouvées dans la littérature mathématique (Bourdier, 2009, pp. 9-11). Remarquons premièrement que celles-ci sont toutes équivalentes et peuvent donc être réécrites sous la forme "simple" que nous avons présentée jusqu'à présent [13]. Notons que cette formulation "simple" du principe est encore appelée *principe de démonstration par récurrence simple* par opposition à ses variantes. De plus, nous verrons dans l'analyse des programmes scolaires (section **??**) que les démonstrations par récurrence abordées à l'école secondaire ne concernent uniquement que cette formulation simple. Pour ces deux raisons, nous ne ferons que présenter brièvement les différentes variantes du principe.

Le principe de récurrence d'ordre 2

Le principe de récurrence d'ordre deux est une des variantes du principe de récurrence simple. La différence principale réside principalement dans l'implication de l'hérédité. En effet, celle-ci ne s'écrit plus de la forme $[P(k) \Rightarrow P(k+1)]$ mais bien de la manière suivante $[P(k-1) \wedge P(k) \Rightarrow P(k+1)]$. Ainsi, quand il s'agira de démontrer cette dernière implication, il ne suffira plus seulement de supposer $P(k)$ mais bien de supposer également $P(k-1)$. Cela signifie qu'établir la vérité de $P(k)$ nécessite celle des propositions des deux rangs précédents et ce quel que soit le k plus grand ou égal au pas d'hérédité.

13. Voir figure **??** ou figure **??** pour une formulation plus détaillée.

Nous pouvons formaliser le principe de récurrence d'ordre deux de la manière suivante :

Si on démontre que :

- il existe $n_a \in \mathbb{N}$ tel que $P(n_a) \wedge P(n_a+1)$

et

- il existe $n_h \in \mathbb{N}$: $\forall k \geqslant n_h$ et $k \in \mathbb{N}$ $(P(k) \wedge P(k+1) \Rightarrow P(k+2))$

Alors,
∘ Si $n_a \geqslant n_h$, on peut conclure que $\forall n \geqslant n_a : P(n)$.
∘ Sinon, on ne peut rien conclure.

FIGURE 1.26 – Principe de récurrence d'ordre 2

En guise d'illustration du principe de récurrence d'ordre deux, nous considérerons l'exemple suivant inspiré de (Roussot, 2013, p. 2). Notons que cet exemple fait intervenir une suite construite par récurrence d'ordre deux (puisque chacun de ses termes ne peut être déterminé que si on connait la valeur des deux précédents). Néanmoins, ce qui nous intéresse ici est le principe de démonstration par récurrence d'ordre deux, pas la suite intervenant dans la proposition initiale à démontrer.

Considérons la suite de Fibonacci $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$, celle-ci étant définie de la manière suivante :

$$\begin{cases} f_0 = 0 \\ f_1 = 1 \\ \forall n \in \mathbb{N} : f_{n+2} = f_{n+1} + f_n \end{cases}$$

Démontrons, au moyen d'une démonstration par récurrence d'ordre 2 la proposition suivante :

$$\forall n \geqslant 5 \text{ et } n \in \mathbb{N} : f_n \geqslant n$$

Le domaine de validité de cette proposition initiale étant donné, nous savons que le pas initial est 5. Bien entendu, nous utiliserons cette information lors des démonstrations de l'amorce et de l'hérédité.

- Commençons par l'amorce. Montrons que

$$f_{n_a} \geqslant n_a \textbf{ et } f_{n_a+1} \geqslant (n_a+1)$$

où $n_a = 5$.
Considérons le tableau suivant reprenant la valeur des sept premiers termes de la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ selon n :

n	0	1	2	3	4	5	6	7
f_n	0	1	1	2	3	5	8	13

– la proposition $f_5 \geqslant 5$ est vraie puisque $f_5 = 5$ par définition.
– la proposition $f_6 \geqslant 6$ est vraie puisque $f_6 = 8$ par définition.

- Démontrons que

$$\forall k \geqslant 5 \text{ et } k \in \mathbb{N} : [(f_k \geqslant k) \wedge (f_{k+1} \geqslant k+1)] \Rightarrow f_{k+2} \geqslant (k+2)$$

Soit $k \geqslant 5$ et $k \in \mathbb{N}$.
Supposons que $(f_k \geqslant k) \wedge (f_{k+1} \geqslant k+1)$ et montrons que $f_{k+2} \geqslant (k+2)$.

$$\begin{array}{rcll} f_{k+2} & = & f_{k+1} + f_k & \text{par définition} \\ & \geqslant & (k+1) + k & \text{par hypothèse} \\ & \geqslant & 2k+1 & \end{array}$$

Or

$$\begin{array}{rcl} 2k+1 & \geqslant & k+2 \\ & \Leftrightarrow & \\ k & \geqslant & 1 \end{array}$$

Nous voyons donc que l'hérédité est même vraie avant 5 puisqu'elle est vraie pour $k \geqslant 1$.

L'amorce et l'hérédité ayant été démontrées, il convient donc d'établir une synthèse de leur pas. Cette synthèse nous amène à conclure que la proposition initiale est démontrée à savoir

$$\forall n \geqslant 5 \text{ et } n \in \mathbb{N} : f_n \geqslant n$$

FIGURE 1.27 – Exemple de démonstration par récurrence d'ordre deux, inspiré de (Roussot, 2013, p. 2)

Notons que nous pouvons également trouver, dans la littérature mathématique, d'autres variantes d'ordre supérieur à 2. Nous les dénommons, de manière générale, *principe de démonstration par récurrence d'ordre* k où le cas de $k = 1$ correspond au principe de récurrence simple et celui de $k = 2$ à l'illustration de la figure **??**.

Le principe de récurrence forte

Pour réaliser cette sous-section, nous nous inspirerons d'un manuel destiné aux étudiants de première année en sciences mathématiques de l'Université de Namur (Thiry, 2007, pp. 109-113). La variante dont nous parlons ici peut être, en quelque sorte, considérée comme une généralisation "forte" du principe de démonstration par récurrence d'ordre k. En effet, il s'agit, pour démontrer la vérité de l'implication constituant l'hérédité, de prouver la vérité de $P(k+1)$ en supposant celle de **toutes** les propositions de rang inférieur (quel que soit le k plus grand ou égal au pas d'hérédité).

Pour présenter ce point sur le principe de récurrence forte, nous suivrons la structure du manuel (Thiry, 2007) :

- explication du principe de récurrence forte pour des conclusions à démontrer de la forme "$\forall n \in \mathbb{N} : P(n)$".
- illustration pour une conclusion de la forme "$\forall n \geqslant n_0$ où $n, n_0 \in \mathbb{N} : P(n)$".

Commençons donc par formuler, à la figure **??**, le principe de récurrence forte pour des propositions à démontrer de la forme $\boxed{\forall n \in \mathbb{N} : P(n)}$.

> Dans le cas où la conclusion à démontrer est de la forme $\forall n \in \mathbb{N} : P(n)$, nous pouvons utiliser le principe de récurrence forte formulé de la manière suivante :
>
> $$\forall n \in \mathbb{N} : \ [(\forall k < n \text{ et } k \in \mathbb{N} : P(k)) \Rightarrow P(n)]$$

FIGURE 1.28 – Principe de récurrence forte pour des conclusions à démontrer de la forme "$\forall n \in \mathbb{N} : P(n)$", extrait de (Thiry, 2007, pp. 109)

Contrairement à ce que nous avons vu pour le principe de récurrence simple et pour les variantes précédentes, il n'y pas d'amorce à démontrer dans le cas du principe de récurrence forte. Seule l'hérédité, telle qu'écrite ci-dessus, suffit. Afin de bien comprendre ce propos, détaillons-la pour plusieurs valeurs particulières. Cela nous permettra de comprendre pourquoi le principe de récurrence forte formulé comme tel permet de démontrer des conclusions de la forme $\forall n \in \mathbb{N} : P(n)$. Pour ce faire, supposons que l'hérédité est prouvée, c'est-à-dire que la proposition suivante est vraie :

$$\forall n \in \mathbb{N} : \ [(\forall k < n \text{ et } k \in \mathbb{N} : P(k)) \Rightarrow P(n)]$$

Cela a pour conséquence, par le principe de récurrence forte, que $\forall n \in \mathbb{N} : P(n)$.

• Remplaçons n par 0 dans l'hérédité :

$$(\forall k < 0 \text{ et } k \in \mathbb{N} : P(k)) \Rightarrow P(0)$$

Puisque tous les éléments de $\mathbb{N}$ sont positifs, il est évident que $[\forall k < 0 \text{ et } k \in \mathbb{N} : P(k)]$ est vraie. Comme nous avons supposé que l'hérédité est vraie, nous pouvons en conclure, selon la table de vérité de l'implication [14] que $P(0)$ est vraie également.

• Remplaçons cette fois n par 1 dans l'hérédité :

$$(\forall k < 1 \text{ et } k \in \mathbb{N} : P(k)) \Rightarrow P(1)$$

Le naturel 0 étant le seul à être inférieur à 1, $[\forall k < 1 \text{ et } k \in \mathbb{N} : P(k)]$ correspond à $P(0)$. Celle-ci étant vraie par le point précédent, nous pouvons en conclure que $P(1)$ est vraie également.

• Remplaçons n par 2 dans l'hérédité :

$$(\forall k < 2 \text{ et } k \in \mathbb{N} : P(k)) \Rightarrow P(2)$$

Cette fois, $[\forall k < 1 \text{ et } k \in \mathbb{N} : P(k)]$ correspond à $P(0)$ et $P(1)$. Or, ces deux dernières sont vraies par les deux points précédents. Donc, $P(0) \wedge P(1)$ l'est aussi. Nous pouvons donc en conclure que $P(2)$ est vraie.

• Si on continue de la même manière, il est aisé de voir qu'on peut démontrer la proposition $\forall n \in \mathbb{N} : P(n)$

14. Voir figure **??**.

Considérons à présent, en guise d'illustration, la démonstration d'une proposition de la forme $\boxed{\forall n \geqslant n_0 : P(n)}$. Nous verrons que cette dernière peut se démontrer par le principe de récurrence forte décrit à la figure **??**, moyennant une légère transformation. Elle nous a été inspirée de (Parmentier, 2009, p. 1) et nous l'avons adaptée en suivant la même structure que le manuel (Thiry, 2007) :

Démontrons que

"*Tout nombre naturel strictement supérieur à 1 possède un diviseur premier.*"

Cette proposition initiale est de la forme $\boxed{\forall n \in \mathbb{N} : P(n)}$ où :

$$P(n) \overset{\text{Déf.}}{\iff} [(n > 1) \Rightarrow \text{le nombre naturel } n \text{ possède un diviseur premier}]$$

Pour démontrer cette proposition, utilisons le principe de récurrence forte c'est-à-dire démontrons que

$$\forall n \in \mathbb{N} : \ [(\forall k < n \text{ et } k \in \mathbb{N} : P(k)) \Rightarrow P(n)]$$

- Soit $n \in \mathbb{N}$.
  Supposons que $[\forall k < n$ et $k \in \mathbb{N} : P(k)]$ c'est-à-dire :

$$\forall k \in \mathbb{N} \text{ tel que } 1 < k < n : \text{le nombre naturel } k \text{ possède un diviseur premier.}$$

- Démontrons que $P(n)$ c'est-à-dire :

$$[n > 1 \Rightarrow \ \text{le nombre naturel } n \text{ possède un diviseur premier}]$$

Pour plus de clarté, considérons le tableau récapitulatif suivant :

Hypothèses	Thèse
$n > 1$ et $n \in \mathbb{N}$ $\forall k \in \mathbb{N}$ tel que $1 < k < n$: k possède un div. premier	n possède un div. premier

Deux cas possibles se présentent :

– Soit n est un nombre premier.
  Dans ce cas, il est diviseur premier de lui-même.

– Soit n n'est pas un nombre premier. Dans ce cas, on peut affirmer qu'il existe un naturel strictement compris entre 1 et n qui est diviseur de n. Notons v ce naturel. Nous avons supposé que tous les nombres naturels strictement compris entre 1 et n possèdent un diviseur premier. Ainsi, v possède lui aussi un diviseur premier que nous noterons u. Nous pouvons donc conclure que n possède u pour diviseur premier.

• L'hérédité étant prouvée, nous pouvons conclure que

$$\forall n \in \mathbb{N} : [(n > 1) \Rightarrow \text{le nombre naturel } n \text{ possède un diviseur premier}]$$

Autrement dit, nous avons démontré que :
"*Tout nombre naturel strictement supérieur à 1 possède un diviseur premier.*"

FIGURE 1.29 – Exemple de démonstration par récurrence forte, inspiré de (Parmentier, 2009, p. 1) et de (Thiry, 2007, pp. 111-113)

Le principe de Fermat et la descente infinie

Qu'il s'agisse du principe de récurrence simple, forte ou d'ordre k, nous n'avons traité jusqu'à présent que des principes de "montée infinie". En effet, il s'agissait de démontrer une proposition initiale "vraie à l'infini" à partir d'un certain rang (Grenier, 2011, p. 29). Nous avons illustré cette "montée infinie" à la figure **??**.

Néanmoins, il convient de remarquer, tout comme le fait Grenier dans son article, qu'une autre formulation équivalente au principe de démonstration par récurrence utilise un raisonnement de "descente infinie". Nous la dénommerons *principe de descente infinie* ou encore *principe de Fermat*. Celui-ci nous semble très important à connaitre puisque certaines propositions ne pourront être démontrées par récurrence qu'au moyen de celui-ci. Remarquons qu'il n'est, en général, pas enseigné au niveau secondaire (voir section **??**).

On retrouve généralement le principe de Fermat sous l'une des formes suivantes (celles-ci étant bien évidemment équivalentes) :

- *Tout ensemble non vide de $\mathbb{N}$ admet un plus petit élément.*
- *Il n'existe pas de suite infinie strictement décroissante dans $\mathbb{N}$.*

FIGURE 1.30 – Deux formes équivalentes du principe de Fermat (ou principe de descente infinie), extrait de (Grenier, 2011, p. 29)

Les problèmes concernés par la descente infinie toucheront plutôt à des propositions dont on veut prouver la fausseté telles que "*Démontrons que pour tout n, $P(n)$ est fausse.*" ou, dit autrement, "*Démontrons que non $P(n)$ est vraie pour tout n.*"

Pour pouvoir démontrer cela par descente infinie, on utilisera la formalisation suivante :
Si pour tout $n \in \mathbb{N}$ tel que $P(n)$ est vraie, il existe $m \in \mathbb{N}$ tel que $m < n$ et $P(m)$ est vraie, alors, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $P(n)$ est fausse.

FIGURE 1.31 – Formalisation du principe de Fermat, extrait de (Grenier, 2011, p. 29)

Afin de bien comprendre le principe de Fermat, reprenons l'image analogique proposée par Grenier : imaginons que nous descendons un à un les échelons d'une échelle. Il arrivera bien à un moment donné que le sol soit atteint et qu'il n'y ait donc plus rien à descendre. C'est exactement la même idée dans le principe de Fermat.

Nous allons à présent, pour illustrer ce principe, considérer la proposition suivante :

"$\sqrt{3}$ *est irrationnel*"

Cette illustration est tirée, une fois de plus, de l'article de Grenier. Notons premièrement qu'il s'agit d'une proposition ne pouvant pas être démontrée par récurrence simple. Deuxièmement, remarquons qu'il s'agit d'une proposition correspondant à une situation de "type 5" (voir figure **??**). En effet, nous voyons bien que la proposition considérée ici ne s'écrit pas de manière explicite sous la forme d'un prédicat dépendant d'une variable naturelle. Enfin, remarquons que sera utilisé ici un raisonnement par l'absurde puisque, comme nous l'avons précisé ci-dessus, le principe de Fermat est souvent employé pour démontrer la fausseté des propositions. Ainsi, il convient d'ores et déjà de pointer le fait qu'une démonstration par l'absurde peut tout à fait utiliser le principe de récurrence et vice-versa.

Grenier nous propose deux démonstrations de la proposition "$\sqrt{3}$ *est irrationnel*". La première cache un peu le fait que le principe de Fermat est utilisé dans la preuve alors que la deuxième le met bien en évidence.

Démontrons que $\sqrt{3}$ est irrationnel.
Supposons que $\sqrt{3}$ soit rationnel. Soit a le plus petit entier positif tel qu'il existe b entier positif vérifiant $\frac{a}{b} = \sqrt{3}$. On a donc : $3b^2 = a^2$. Ceci implique que 3 divise a^2 ; a et b étant des entiers et 3 un nombre qui n'est pas un carré d'entiers, 3 divise a et donc, 3^2 divise $a^2 = 3b^2$. Il s'ensuit que 3 divise $3b^2$, donc 3 divise b. Ainsi, 3 divise à la fois a et b et a n'est pas le plus petit entier vérifiant $\frac{a}{b}$: $\sqrt{3}$. On a donc une contradiction. Donc, $\sqrt{3}$ est irrationnel.

FIGURE 1.32 – Première démonstration de "$\sqrt{3}$ est irrationnel" faisant appel au principe de Fermat, extrait de (Grenier, 2011, p. 36)

Bien que cela ne se voie pas directement, cette démonstration s'appuie bel et bien sur le principe de Fermat. En effet, poser que a est "**le plus petit entier** tel que..." sous-entend que $\frac{a}{b}$ est irréductible. Cette dernière hypothèse cache entièrement la base de la preuve : "*Il n'existe pas de suite de nombres strictement décroissante dans $I\!N$.*" Le fait que tout nombre irrationnel peut s'écrire sous la forme d'une fraction irréductible se démontre en utilisant ce principe de descente infinie.

Afin de mieux visualiser que le fondement de cette preuve est le principe de Fermat, considérons la démonstration suivante.

Démontrons que $\sqrt{3}$ est irrationnel.
Supposons que $\sqrt{3}$ soit rationnel. Soit a et b entiers strictement positifs vérifiant $\frac{a}{b} = \sqrt{3}$. On a donc : $3b^2 = a^2$. Ceci implique que 3 divise a^2 ; a et b étant des entiers et 3 un nombre qui n'est pas un carré d'entiers, 3 divise a et donc, 3^2 divise $a^2 = 3b^2$. Il s'ensuit que 3 divise b. Ainsi, 3 divise à la fois a et b. Il existe donc a' et b' entiers positifs tels que $a' < a$ et $b' < b$ vérifiant $\frac{a'}{b'} = \sqrt{3}$. On peut reproduire ce raisonnement et trouver des entiers positifs a'' et b'' tels que $0 < a'' < a' < a$ et $0 < b'' < b' < b$ vérifiant $\frac{a''}{b''} = \sqrt{3}$.

FIGURE 1.33 – Deuxième démonstration de "$\sqrt{3}$ est irrationnel" faisant appel au principe de Fermat, extrait de (Grenier, 2011, p. 38)

On pourrait croire, à première vue, que la démonstration par récurrence ci-dessus n'est pas terminée. Pourtant, on arrive bel et bien à une absurdité. En effet, deux suites strictement décroissantes d'entiers positifs sont construites dans cette preuve. Or, comme nous l'affirme le principe de Fermat, il est impossible d'en construire. Ainsi, la proposition "$\sqrt{3}$ est irrationnel" est effectivement démontrée.

1.4 Conclusion

Dans ce premier chapitre, nous avons défini le vocabulaire employé tout au long de ce mémoire. La démonstration par récurrence, qui en est l'objet, a été détaillée de manière approfondie. Ainsi, tous les éléments sont mis en place pour pouvoir aborder la suite de ce travail. Pour mener à bien celui-ci, nous avons consulté différents articles. Nous les présenterons dans le chapitre suivant.

Chapitre 2

Travaux antérieurs

Afin de mener à bien ce travail, nous avons consulté différents articles. Il s'agit majoritairement de celui de Grenier intitulé *Une étude didactique du concept de récurrence* (Grenier, 2011). Nous nous en sommes inspirée tout au long de ce mémoire et c'est d'ailleurs la raison pour laquelle nous le développerons dans le détail. Nous avons lu également deux autres articles intitulés *Une étude didactique de quelques éléments de raisonnement mathématique et de logique* de Fabert et Grenier (2011) et *L'implication mathématique* de Deloustal-Jorrand (2004). En ce qui concerne le premier, il nous a intéréssé car il présente certains obstacles notamment dans l'apprentissage des quantificateurs et de l'implication. Quant au deuxième, il s'agit d'une thèse en didactique des mathématiques.

Ces trois premiers articles nous ont permis de dégager des informations importantes en ce qui concerne l'implication et la compréhension que les étudiants en ont. Nous en reprendrons certaines idées que nous estimons utiles à rappeler.

Nous avons encore consulté l'article de Vidal, *Etude historique et critique de méthodes de démonstration en arithmétique* (2005). Nous nous sommes inspirée de cette thèse en philosophie afin d'établir notre étude à caractère épistémologique de la démonstration par récurrence (voir chapitre **??**). Comme son nom l'indique, cette thèse étudie notamment l'histoire des différentes méthodes de démonstration. Une partie y est entièrement consacrée à la démonstration par récurrence.

2.1 Présentation de l'article de Grenier

L'élément déclencheur de ce travail a été la lecture de l'article de Grenier, intitulé *Une étude didactique du concept de récurrence*. Nous y avons déjà fait référence dans le chapitre précédent et cela arrivera encore régulièrement dans la suite de ce travail. L'analyse réalisée par Grenier a pour but de décrire les résultats d'une enquête didactique à propos de la démonstration par récurrence. Plus précisément, il s'agit d'une investigation menée en France durant plusieurs années auprès d'étudiants scientifiques universitaires et de professeurs de mathématiques. Son article est très riche. Il est le fruit d'un travail rigoureux et approfondi. Nous avons donc décidé de nous en inspirer afin de mener notre propre enquête en Belgique.

Nous tenions à présenter dans les détails cet article car il nous semble important de pouvoir distinguer, au sein de ce mémoire, toutes les idées qui proviennent de Grenier de celles qui nous sont propres. Pour ce faire, nous allons commencer par reprendre la structure de son travail. Cela permettra d'avoir une première idée sur la façon dont elle a procédé pour établir et partager ses observations. Ensuite, nous développerons en détail certaines parties en insistant tout particulièrement sur les différents constats qu'elle a pu tirer de ses recherches. Notons que ne sera pas approfondie ici la dernière partie du travail de Grenier qui propose des exercices sur la démonstration par récurrence. Enfin, remarquons que certains sujets présentés lors du chapitre précédent étaient inspirés de l'article de Grenier. Le redondance sera donc parfois inévitable.

Commençons par reprendre la structure de l'article :

1. Introduction
2. L'induction en mathématiques
   (a) Axiome de récurrence et principe de récurrence dans $\mathbb{N}$
   (b) L'infini dans le principe de récurrence
   (c) Le principe de Fermat et la "descente infinie"
3. La récurrence dans l'enseignement
   (a) Différents types de raisonnements dans les manuels et l'enseignement
   (b) Absurde, contre-exemple et récurrence
   (c) Le principe de récurrence dans des manuels de fin de lycée
   (d) La récurrence dans deux manuels récents d'université
4. Conceptions d'étudiants et d'enseignants français
5. Problèmes susceptibles d'améliorer les conceptions sur la récurrence
   (a) Axiome de récurrence
   (b) Des problèmes "classiques" un peu modifiés
   (c) La récurrence comme technique ou comme *fondement épistémologique* ?
   (d) Des problèmes où P est une propriété d'un ensemble d'objets de taille n
6. Conclusion

FIGURE 2.1 – Structure de l'article *Une étude didactique du concept de récurrence* de Grenier

Grenier, dans son introduction, nous fait part du fait que la double spécificité du raisonnement par récurrence est difficilement comprise et nécessite d'avoir des connaissances en logique mathématique. Par double spécificité, l'auteur entend la construction d'objets (par exemple, les suites récurrentes) et la démonstration de propositions. Ainsi, il arrive que cette dernière soit sujette à des malentendus et soit même parfois remise en question en tant qu'outil de preuve. Grenier s'est intéressée à ce sujet et a réalisé une étude didactique à son propos en France. Pour ce faire, elle a décidé, comme nous l'avons déjà précisé, d'enquêter auprès d'étudiants scientifiques universitaires et d'enseignants de mathématiques.

Le premier point de son article est intitulé ***L'induction en mathématiques*** et est assez théorique. Grenier nous y fait part du fait que l'induction en mathématiques est à distinguer de celle des autres sciences. En effet, dans ces dernières, le raisonnement inductif a pour but la généralisation de cas particuliers. Nous savons qu'un tel raisonnement ne démontre rien. En mathématiques, le raisonnement inductif est différent de celui utilisé dans les autres sciences car il permet d'établir des démonstrations par récurrence qui, elles, sont valides pour démontrer des résultats. Par la suite, Grenier insiste sur le fait que l'induction mathématique ne peut s'appliquer que sur des ensembles ordonnés, $\mathbb{N}$ étant le plus courant. L'auteur enchaine en rappelant les axiomes de Peano qui permettent de définir cet ensemble $\mathbb{N}$. Elle en profitera, dans le sous-point ***Axiome de récurrence et principe de récurrence dans*** $\mathbb{N}$ pour définir le principe de récurrence qui s'appuie sur le cinquième axiome de Peano. Grenier nous fait déjà part à ce moment de quelques observations :

- bien que $\mathbb{N}$ soit l'ensemble le plus utilisé par les étudiants, les axiomes de Peano qui permettent de le définir leur sont rarement présentés.
- les quantificateurs "Il existe" et "Pour tout" ne peuvent être omis dans le principe de récurrence. Ils sont indispensables à sa compréhension. Pourtant, dans les présentations du principe vues dans l'enseignement, ils sont souvent oubliés, confondus ou même tout à fait erronés.
- le principe de récurrence nécessite, comme dit précédemment, des connaissances en logique mathématique. Plus particulièrement, il s'agit de comprendre l'implication et de pouvoir distinguer "$P(n) \Rightarrow P(n+1)$" de "$P(n)$ est vraie $\Rightarrow P(n+1)$ est vraie". En effet, rien ne nous empêche de prouver la vérité de la première implication pour des valeurs de n pour lesquelles la proposition P n'est jamais vraie. Dès lors, nous comprenons que pour pouvoir établir une proposition initiale, l'amorce et l'hérédité sont complémentaires.

Dans le sous-point suivant, ***L'infini dans le principe de récurrence***, Grenier nous fait remarquer que le principe de récurrence permet de "*démontrer une propriété relative à un nombre infini d'éléments, en l'étudiant seulement pour une valeur générique n.*" Ce fait n'est pas évident à première vue et amène d'ailleurs les mathématiciens "intuitionnistes" à rejeter les démonstrations par récurrence. Grenier nous affirme que le rapport qu'entretient le principe de récurrence avec la notion d'infini peut déjà amener des difficultés de compréhension. Elle profite de ce rapport difficile pour entamer le sous-point ***Le principe de Fermat et la "descente infinie"***. Dans celui-ci, l'auteur nous mentionne les deux formulations du principe de Fermat, encore appelé principe de descente infinie (voir figure **??**). Après avoir précisé que celui-ci est utilisé généralement pour démontrer la fausseté de propositions, Grenier nous explicite la formalisation qu'il induit. Elle nomme celle-ci "*formalisation de la récurrence par descente infinie*" (voir figure **??**). L'auteur précise encore que dans cette formalisation, la notion d'infini n'est pas mise en question contrairement au principe "classique". Pour illustrer ses propos, elle fait allusion aux images analogiques suivantes : la montée de l'escalier pour le principe "classique" et la descente d'une échelle pour le principe de Fermat. Enfin, Grenier termine en nous disant que certaines propositions ne peuvent être démontrées que par ce principe. Or, il est très rarement vu dans l'enseignement. Dans un dernier sous-point intitulé ***Instanciation de l'implication et "hypothèse de récurrence"***, Grenier nous signale que l'utilisation de l'hypothèse de récurrence dans la présentation du principe peut amener des difficultés. En effet, utiliser une telle hypothèse peut cacher l'implication qui est à démontrer au sein de l'hérédite du principe. Ainsi, utiliser l'hypothèse de récurrence nécessite d'en comprendre "l'origine", ce qui ne peut se faire que si l'implication est une notion maitrisée. Or, ce n'est généralement pas le cas et ce même dans le chef des étudiants universitaires français de branches scientifiques.

Dans un deuxième point intitulé ***La récurrence dans l'enseignement***, Grenier développe certaines observations qu'elle a pu tirer de son analyse sur la transposition [1] de la démonstration par récurrence dans l'enseignement. Dans le premier sous-point ***Différents types de raisonnements dans les manuels et l'enseignement***, l'auteur nous fait part des constats suivants :

– la récurrence est souvent enseignée comme un "type de preuve" ou encore comme un "principe de raisonnement" mais jamais comme un concept. Dans beaucoup de manuels, il est courant d'employer les termes *raisonnement* et *preuve* l'un pour l'autre. Or, nous savons, comme nous l'avons expliqué dans le chapitre **??** qu'ils ne sont pas du tout synonymes.

– la récurrence est souvent classée dans les manuels de niveaux universitaire ou secondaire selon une typologie de preuves ou de raisonnements. Grenier relève d'ailleurs l'une d'entre elles, tirée d'un manuel d'université :
  - Raisonnement par implications (aussi appelé parfois raisonnement direct)
  - Raisonnement par équivalences
  - Raisonnement par l'absurde
  - Raisonnement par disjonction de cas
  - Raisonnement par contraposition
  - Le contre-exemple
  - Raisonnement par récurrence

  Cette présentation est "dangereuse" car elle peut amener à tirer des conclusions erronées. Premièrement, on pourrait penser que chaque type de raisonnement est, pour reprendre les termes de Grenier, "*exclusif des autres*". Or, ce n'est pas du tout le cas. Par exemple, le raisonnement par récurrence utilise souvent un raisonnement par implication directe. De la même manière, un raisonnement par l'absurde peut employer des raisonnements directs, des raisonnements par contraposition, ou encore un contre-exemple. Deuxièmement, cette typologie ne permet pas du tout de voir que le raisonnement par récurrence ne s'applique qu'à des ensembles ordonnés et, le plus souvent, à $\mathbb{N}$. A propos de celle-ci, Grenier émet l'hypothèse selon laquelle si elle est couramment employée, c'est sans doute parce qu'elle est "*un outil didactique efficace*". L'auteur entend par là qu'elle permet d'apprendre et de faire pratiquer la démonstration par récurrence de manière automatique, selon une démarche à suivre établie à l'avance.

Dans le sous-point suivant, intitulé ***Absurde, contre-exemple et récurrence***, Grenier explique que les preuves par l'absurde, par contre-exemple et par récurrence nécessitent une vigilance permanente. En effet, nous dit-elle, "*la question du vrai et du faux et l'enjeu de vérité y sont nécessairement présents à chaque étape.*"
L'auteur nous explique alors que les preuves par l'absurde sont souvent considérées par les étudiants et les enseignants comme compliquées et à éviter dans la mesure du possible. Elle émet à ce propos deux hypothèses : premièrement, les démonstrations "directes" sont plus faciles à schématiser. Deuxièmement, l'enseignement de ce "type de preuve" est souvent lié à des chapitres de géométrie ou d'algèbre où les équivalences sont courantes. Ceux-ci ne sont donc pas les plus adéquats pour apprendre aux élèves la distinction entre l'implication et sa réciproque. Après avoir explicité le cas de l'absurde, Grenier en revient à la démonstration

1. La transposition didactique est une notion sur laquelle nous nous sommes basée afin d'établir la méthodologie de ce travail. Nous avons expliqué en détail cette notion à la sous-section **??**.

par récurrence et met en évidence une de ses particularités : "*En fait, la récurrence met en jeu de manière imbriquée les points de vue déductif et inductif.*" En général, lorsqu'on doit prouver un résultat par une autre méthode de démonstration, les points de vue déductif et inductif sont tout à fait disjoints l'un de l'autre. En effet, on commence par établir une conjecture si la proposition à démontrer n'est pas donnée. Ensuite, on prouve généralement celle-ci via des déductions. Dans le cas de la démonstration par récurrence, la déduction et l'induction sont imbriquées. On peut le comprendre rien qu'en considérant l'hérédité du principe de récurrence : il s'agit d'une implication à démontrer (déduction) dont l'hypothèse de récurrence peut être établie par conjecture (sur base de cas particuliers).
Les deux sous-points suivants consisteront à analyser des manuels scolaires. Nous ne développerons pas ici l'intégralité de ces analyses. Nous nous bornerons à en dégager les constats. Dans le sous-point ***Le principe de récurrence dans des manuels de fin de lycée***, Grenier nous indique les observations suivantes :

- le principe de récurrence est très souvent formulé de manière schématique, en plusieurs étapes. Le nombre de celles-ci diffère et varie de 2 à 4 (le principe même est parfois divisé en deux ou trois et la conclusion est souvent ajoutée en tant que dernière étape). Les deux étapes qui se retrouvent systématiquement dans toutes les présentations sont l'amorce, que Grenier appelle *l'initialisation*, et l'hérédité. Elles sont d'ailleurs toujours mentionnées dans cet ordre alors qu'en réalité, cela n'a pas d'importance. Notons encore que certaines schématisations du principe de récurrence n'ont pas de sens. Par exemple, mentionner la conclusion en tant que dernière étape n'est pas logique puisque celle-ci est une conséquence des démonstrations de l'amorce et de l'hérédité.
- il arrive que l'hérédité soit scindée en deux étapes (utilisation de l'hypothèse de récurrence). Cette façon de procéder est dangereuse car elle cache non seulement l'implication qui est à démontrer mais également le quantificateur "pour tout" portant sur l'ensemble de celle-ci. En effet, l'hypothèse de récurrence est supposée pour un "k quelconque".
- il arrive, dans la présentation du principe de récurrence, que la propriété à démontrer soit écrite sous la forme d'une suite : "*Démontrer que P_n est vraie pour tout n de $\mathbb{N}$*".
- certains manuels mentionnent le pas d'amorce comme étant toujours égal à 0 ou à 1. Or, nous savons que ce n'est pas forcément le cas.
- parfois, les quantificateurs sont erronés. Par exemple, l'hérédité est formulée, dans un manuel qu'elle a analysé, de la façon suivante : "*s'il existe un nombre entier n pour lequel la propriété P_n est vraie, alors la propriété P_{n+1} est aussi vraie*". Il est bien évident que le quantificateur "il existe" n'a pas du tout sa place dans cette formulation.
- la démonstration par récurrence est parfois explicitement qualifiée de "particulière", non pas parce qu'elle s'applique uniquement à des ensembles ordonnés mais plutôt parce qu'elle peut paraitre "étrange", différente des autres moyens de démonstration. Grenier nous affirme que sa légitimité est parfois remise en question et il n'est pas rare de la trouver, au sein des manuels, accompagnée d'avertissements.

Dans le sous-point ***La récurrence dans deux manuels récents d'université***, Grenier présente les résultats de l'analyse de deux manuels :

- dans ces deux ouvrages, la démonstration par récurrence y est vue sous forme de rappels. Grenier nous précise que ceux-ci occupent très peu de place par rapport à l'ensemble de l'ouvrage.

– il arrive d'observer, tout comme dans le cas des manuels du secondaire, une omission des quantificateurs, une absence d'implication, un pas d'amorce fixé obligatoirement à 0 ou 1. Parfois, la définition du principe est même donnée sur base d'un exemple.
– dans certaines présentations du principe de récurrence, il n'est pas rare que le pas d'hérédité ne soit même pas mentionné. Par exemple "*On suppose qu'elle est vraie au rang p. On la démontre au rang* $p+1$." Quel est ce p ? Est-il plus grand ou égal au pas d'amorce ? Nous ne pouvons rien affirmer à ce sujet.
– dans certains manuels, le principe de récurrence est écrit sous forme de théorème qui découle des axiomes de caractérisation de $\mathbb{N}$.

Pour terminer cette analyse, Grenier nous dit qu'elle n'a jamais vu, quel que soit le niveau du manuel, l'hérédité écrite correctement c'est-à-dire sous la forme "Quel que soit n, $n \geqslant n_0$, $P(n) \Rightarrow P(n+1)$."

Les résultats didactiques que Grenier développe dans le point ***Conceptions d'étudiants et d'enseignants français*** ont été obtenus par le biais de questionnaires et de résolutions de problèmes proposés à des étudiants universitaires et à des enseignants. Bien entendu, ces différents constats sont liés à la manière dont est présentée la démonstration par récurrence au sein des manuels. Il est donc normal de trouver des similitudes entre les conceptions des étudiants et les constats établis dans le point précédent. Nous développerons cette partie de l'article en conservant la structure de Grenier c'est-à-dire par "théorèmes-en-actes".

TA1. ***La récurrence est un principe, pas un concept !***
Le concept de récurrence tel quel ne semble pas faire partie des conceptions des étudiants. Ils l'associent systématiquement aux termes *principe*, *technique* ou *raisonnement*.

TA2. ***La récurrence ne construit pas d'objet mathématique !***
Dans des preuves déductives de la forme $A \Rightarrow B$, on part de A et, grâce à l'introduction d'autres théorèmes ou propositions, on aboutit à B. Ainsi, ce genre de preuve donne l'impression d'avoir construit quelque chose contrairement aux démonstrations par récurrence. En effet, les étudiants ont le sentiment que dans cette dernière, il suffit de partir de l'hypothèse de récurrence et de passer de $P(n)$ à $P(n+1)$ à l'aide de simples calculs. Grenier fait remarquer qu'il n'est pas étonnant que les étudiants aient ce genre de conception puisque, dans l'enseignement, les problèmes faisant intervenir la démonstration par récurrence mentionnent très souvent la proposition qui est à démontrer. De plus, cette dernière est toujours de la forme $P(n)$, ce qui ne nécessite pas l'intervention du principe de descente infinie.

TA3. ***La récurrence comme une tautologie !***
Il est courant de trouver des formulations du principe de récurrence qui amènent à croire que l'énoncé est une tautologie.

Afin d'illustrer ces propos, reprenons les termes exacts d'un des étudiants interrogés :

1. On montre tout d'abord que P_0 est vraie.
2. On suppose ensuite que P_{n-1} est vraie pour un n quelconque.
3. On montre grâce à cette supposition que P_n est vraie [...].

   Puisque à l'étape 2, on suppose que P_{n-1} est vraie pour un n quelconque, alors c'est "normal" de trouver que P_n est vraie pour tout n ; on n'a donc rien démontré.

FIGURE 2.2 – Propos d'un étudiant repris par (Grenier, 2011, p. 35)

TA4. ***L'amorce comme étape première obligatoire !***
Très souvent, comme c'est le cas dans les manuels, les étudiants mentionnent qu'il est nécessaire de commencer par la démonstration de l'amorce avant de passer à celle de l'hérédité. De plus, beaucoup d'étudiants affirment que le pas d'amorce doit être égal à 0 ou 1 ou qu'il est tout simplement donné dans l'énoncé. Ainsi, Grenier en déduit que le pas d'amorce est fréquemment choisi au hasard (0, 1 ou 2) par les étudiants sauf, bien évidemment, quand il est présent dans la proposition à démontrer.

TA5. ***Le pas d'amorce est la valeur de n à partir de laquelle l'hérédité est vraie !***
Comme nous l'avons expliqué dans la sous-section **??** et mis en évidence dans la formulation du principe de la figure **??**, les pas d'amorce et d'hérédité ne sont pas toujours égaux. Cette réalité est souvent absente des conceptions des étudiants et des enseignants. Grenier émet l'hypothèse selon laquelle cela serait dû au fait que les problèmes présentés dans l'enseignement sont souvent de la forme "Démontrer par récurrence que, pour tout $n \geqslant n_0$ (donné), $P(n)$ est vraie." Cela entraine, pour reprendre les termes de l'auteur, la "règle-en-acte" fausse suivante :" Si P est héréditaire à partir d'un n_0 et que $P(n_0)$ est fausse, alors P est fausse à partir de n_0."

TA6. ***Comment reconnaît-on une preuve par récurrence ?***
Dans cette partie de l'article, Grenier propose la démonstration de la proposition "$\sqrt{3}$ est irrationnel" mêlant raisonnement par l'absurde et par récurrence (voir figures **??** et **??**). En fait, celle-ci fait intervenir le principe de Fermat "*Il n'existe pas de suite de nombres strictement décroissante dans $I\!N$*" et est, de ce fait, bien liée à une preuve par récurrence. Mais, à la question "*Cette démonstration a-t-elle un lien avec une preuve par récurrence ?*", la majorité des étudiants répondent par la négative et mentionnent les raisons suivantes :

- la proposition à démontrer n'est pas dépendante d'une variable naturelle n.
- il n'y a pas de démonstration de la forme $P(n) \Rightarrow P(n+1)$.
- il n'y pas de rang à partir duquel la proposition doit être vraie.
- il n'y a pas d'amorce à démontrer.
- il n'y a pas d'hypothèse de récurrence.
- il s'agit ici d'une démonstration par l'absurde.

Mais alors, qu'est-ce qu'une preuve par récurrence ?
Dans cette partie de l'article, Grenier résume l'ensemble des conceptions des étudiants et formule le principe de récurrence tel qu'ils le perçoivent. Reprenons-en ici les termes exacts :

"*C'est une démonstration d'une propriété bien définie, dépendant d'un entier n et pour l'utiliser, on doit avoir une manière de passer de $P(n)$ à $P(n+1)$, essentiellement des suites numériques ou des formules algébriques ou de dénombrement. On doit procéder par étapes : 2, 3 ou 4 étapes, selon les réponses. Mais quel que soit le nombre d'étapes, l'initialisation est toujours située avant l'hérédité. Une étape "zéro" est parfois donnée : écriture de l'hypothèse de récurrence. La conclusion est aussi parfois rajoutée comme étape finale.*"

FIGURE 2.3 – Propos d'étudiants repris par (Grenier, 2011, p. 37)

Des erreurs d'écriture de l'hérédité
Grenier rappelle ici une des problématiques qu'elle a déjà relevée dans son article, sans doute parce que celle-ci engendre de nombreux problèmes de compréhension chez les étudiants. Il s'agit de l'écriture de l'hérédité en deux étapes qui ne sont, parfois, pas toujours bien reliées entre elles. Pour appuyer ses dires, Grenier reprend la réponse d'une personne interrogée :

C'est une preuve où l'on procède par 3 étapes :

1. *On montre tout d'abord que $P(0)$ est vraie.*
2. *On suppose ensuite que $P(n-1)$ est vraie pour un n quelconque.*
3. *On montre alors que $P(n)$ est vraie.*

Rmq : ce raisonnement nécessite que $P(n-1)$ et $P(n)$ soient liées.

FIGURE 2.4 – Propos d'un étudiant repris par (Grenier, 2011, p. 37)

Cette formulation soulève différentes questions que Grenier pose aux étudiants : "*Quel est ce n quelconque pour lequel on suppose que $P(n-1)$ est vraie ? Quelle différence y-a-t-il entre "pour un n quelconque" et "quel que soit n" ? Que se passe-t-il si on démontre que $[P(n-1)$ vraie $\Rightarrow P(n)$ vraie $]$ pour des n pour lesquels $P(n)$ est fausse ?*" Grenier nous dit que lorsque les étudiants sont confrontés à ces questions, ils ne trouvent pas de réponse ou répondent erronément. Ils en viennent même à douter de la validité de la démonstration par récurrence. L'auteur ajoute que ce doute provient essentiellement de la confusion entre "P est héréditaire" et "P est vraie". L'écriture de l'hérédité en deux étapes entretient davantage ce doute dans l'esprit des étudiants.

Dans le point ***Problèmes susceptibles d'améliorer les conceptions sur la récurrence***, Grenier présente divers exercices très différents de ceux proposés généralement dans l'enseignement. Ceux-ci sont construits sur base des conceptions erronées qu'elle a décrites dans le point précédent et amènent donc une véritable remise en question de celles-ci. Nous ne développerons pas dans ce chapitre tous les exercices proposés mais nous tenons à mentionner que certains ont été pour nous source d'inspiration.

Nous conseillons à toute personne intéressée par ce sujet de les consulter car ils sont, à nos yeux, d'un grand intérêt.

2.2 Présentation d'articles traitant de l'implication

L'implication mathématique fait, comme nous le savons, partie intégrante de l'hérédité du principe de récurrence. C'est la raison pour laquelle nous avons consulté des articles [2] à son sujet. D'après ceux-ci, l'implication présente énormément de difficultés pour les étudiants et cela pas seulement dans le cadre de la démonstration par récurrence. Nous avons donc voulu insister sur certains points qui nous ont plus particulièrement marquée dans ces lectures. Nous en avons également profité pour ajouter, en fin de section, une remarque qui nous est propre.

• Le premier point dont nous parlons ici a déjà été mentionné dans la présentation de l'article de Grenier. Puisqu'il concerne l'implication, nous trouvons bon de le rappeler. Pour reprendre les termes de Grenier :

"*Il est nécessaire de savoir ce qu'est l'implication pour comprendre l'hérédité du principe de récurrence, en particulier de savoir distinguer* $[P(n) \Rightarrow P(n+1)]$ *est vraie de* $P(n)$ *vraie* $\Rightarrow P(n+1)$ *est vraie, cette phrase étant une des instanciations de la première.*"

FIGURE 2.5 – Extrait de (Grenier, 2011, p. 30)

Ces propos illustrent deux choses importantes. Premièrement, il s'agit de considérer l'implication "*au sens de la logique mathématique*" (Grenier, 2011, p. 28). Ainsi, une proposition peut par exemple être toujours héréditaire mais ne jamais être vraie. Il s'agirait, si nous reconsidérons une schématisation semblable à celle de la figure **??**, d'une droite graduée ne comportant pas d'étoile et commençant à 0, point duquel partent les ponts verts.
Deuxièmement, remarquons que pour démontrer une implication de la forme $P \Rightarrow Q$, nous procédons de la manière suivante : on suppose P et on montre que Q. Il convient donc de garder à l'esprit que cela est totalement dû à la table de vérité de l'implication. Pour nous en persuader, rappelons-la ici :

P	Q	$P \Rightarrow Q$
0	1	1
0	0	1
1	1	1
1	0	0

FIGURE 2.6 – Table de vérité de l'implication

Ainsi, il ne faut pas confondre, au sein d'une démonstration par récurrence, d'une part l'hypothèse de récurrence et, d'autre part, la proposition initiale qu'on cherche à prouver par le principe.

2. Il s'agit de (Grenier, 2011), (Grenier et Fabert, 2011) et de (Deloustal-Jorrand, 2004).

• Il n'est parfois pas facile de passer du langage naturel au langage mathématique. En effet, le langage naturel a tendance à sous-entendre bien des choses alors que les mathématiques sont, elles, très rigoureuses. Il convient donc de ne pas confondre ces deux domaines. Nous pensons notamment à l'exercice ci-dessous :

Qui, parmi ces trois personnes, n'ira pas travailler ?

1. Aurélien : "Je ne vais pas travailler si j'ai de la fièvre."
2. Stéphane : "J'ai de la fièvre donc je ne vais pas travailler."
3. Laurence : "Si j'ai de la fièvre, alors je ne vais pas travailler."

FIGURE 2.7 – Exercice sur l'implication du langage naturel

Parmi ces phrases, la première et la troisième sont équivalentes d'un point de vue mathématique. En effet, nous pourrions les réécrire toutes deux à l'aide du symbole de l'implication :

$$[\text{J'ai de la fièvre}] \Rightarrow [\text{je ne vais pas travailler}]$$

Ainsi, nous ne pouvons pas affirmer dans les cas des première et troisième phrases si oui ou non la personne ira travailler. En effet, nous ne connaissons que la véracité de l'implication mais nous ne savons pas dire si la personne a ou n'a pas de fièvre. En ce qui concerne la deuxième phrase, elle n'est pas équivalente aux deux autres d'un point de vue mathématique. En effet, elle nous indique que non seulement, la personne a de la fièvre et, de plus que, si elle a de la fièvre, alors elle n'ira pas travailler. Nous pouvons donc conclure que Stéphane ne sera pas présent sur son lieu de travail. Nous pouvons maintenant répondre à la question posée : seul Stéphane n'ira pas travailler. Dans le cas des deux autres personnes, nous ne pouvons pas nous avancer.
Ainsi, il est très important de pouvoir reconnaitre la distinction entre "$[P \Rightarrow Q]$ *est vraie*" et la règle du modus ponens que nous rappelons dans la figure suivante :

$$\frac{\begin{array}{l} P \Rightarrow Q \\ P \end{array}}{Q}$$

FIGURE 2.8 – Règle du modus ponens

La règle du modus ponens signifie donc que "*si P est vraie et $[P \Rightarrow Q]$ est vraie alors Q est vraie*".

• Considérons l'implication $P \Rightarrow Q$ pour illustrer ici les propos suivants. Nous tenons à insister sur le fait que, en ce qui concerne l'hérédité du principe, le quantificateur universel porte sur l'ensemble de l'implication c'est-à-dire pas sur la proposition P qui la constitue mais bien sur toute l'implication $P \Rightarrow Q$.

Nous sommes consciente du fait que nous avions déjà, dans les sections précédentes, insisté sur certains de ces points. Néanmoins, il nous a semblé bon de leur consacrer une sous-section à part entière afin de bien cerner toutes les finesses de l'implication qui joue un rôle important dans l'hérédité de la démonstration par récurrence.

2.3 Conclusion

Nous avons, au cours de ce chapitre, présenté les principaux articles qui nous ont inspirée pour réaliser ce mémoire. Nous en avons développé certains points auxquels il nous semble important de prêter attention. Dans le chapitre suivant, nous expliciterons la méthologie appliquée à notre étude et indiquerons le fil rouge suivi tout au long de notre analyse.

Chapitre 3

Questions de recherche et méthodologie appliquée

Au cours de ce chapitre, nous développerons d'abord notre problématique de recherche en explicitant nos questionnements didactiques liés à la démonstration par récurrence.
Puis, nous présenterons la théorie de *la transposition didactique* de Chevallard que nous utiliserons ensuite pour définir notre méthodologie de travail. Ainsi, une sous-section sera consacrée à l'application de cette théorie à notre cas d'étude, la démonstration par récurrence. Enfin, nous conclurons ce chapitre en établissant un schéma récapitulatif de la méthodologie employée.

3.1 Questions de recherche

Avant même de développer les différentes questions que nous nous sommes posées pour mener à bien ce travail, il nous semble indispensable de commencer par expliquer brièvement ce qui nous a amenée à choisir ce sujet particulier qu'est la démonstration par récurrence. En effet, cette décision n'est pas anodine puisque l'objet mathématique en question nous confrontait déjà à de nombreuses interrogations durant notre parcours scolaire.

En humanités générales, les mathématiques sont enseignées par des professeurs qui visent des compétences, des savoirs et des savoir-faire imposés par le programme. Durant notre parcours scolaire, nous avons remarqué que certains enseignants approfondissaient davantage le côté pratique, la résolution d'exercices alors que d'autres privilégiaient la compréhension des notions théoriques. Toutefois, quelle que soit la façon de procéder des enseignants, il faut bien avouer qu'à la fin du cursus secondaire, beaucoup d'étudiants sont bardés d'automatismes. Cela leur permet de résoudre un grand nombre d'exercices et de problèmes mais ce n'est pas pour autant qu'ils comprennent vraiment le sens de la démarche qu'ils effectuent. Il en est allé ainsi pour nous à propos de la démonstration par récurrence. Ainsi, nous étions capable de prouver des résultats par le biais de ce principe que nous considérions comme une sorte de "tour de passe-passe" automatique dont nous ne comprenions pas le fondement. De plus, il faut bien avouer que, durant nos premières années d'université, où nous avons utilisé beaucoup plus fréquemment les démonstrations par récurrence qu'en secondaire, celles-ci sont restées assez floues et automatiques pour nous. Pourtant, nous en avons reparlé à l'occasion de certains cours en tant qu'objet mathématique . En réalité, nous n'en avons saisi toutes les finesses que lorsque nous avons décidé de nous y intéresser plus profondémment en fin de cursus universitaire, à l'occasion de la réalisation de ce travail. De par notre expérience, beaucoup de questions nous sont donc venues à l'esprit et se sont multipliées ensuite par les différentes lectures d'articles et d'études sur le sujet. Nous présenterons plus en détail toutes ces questions dans la sous-section **??**. Nous les avons regroupées ici en deux questions globales constituant notre problématique de recherche.

> Nous avons vu, grâce à l'enquête réalisée par Grenier en France (Grenier, 2011), que le principe de démonstration par récurrence n'était pas toujours totalement compris, que ce soit dans le chef de certains étudiants scientifiques universitaires ou dans celui des enseignants de mathématiques, cela ayant un impact considérable sur la compréhension des élèves des lycées. Grenier révèle également dans son article que certains manuels scolaires des niveaux secondaire et universitaire présentent de manière erronée le principe de démonstration par récurrence. Nous nous poserons donc une première question : ***qu'en est-il de la situation en Belgique ?***
>
> En réponse à cela, nous nous poserons une deuxième question : ***que pourrions-nous mettre en place afin d'aider les enseignants à transmettre à leurs élèves, de la manière la plus claire et parlante possible, le principe de démonstration par récurrence ?***

FIGURE 3.1 – Description de la problématique de recherche

Ces deux questions constitueront notre problématique de recherche. Nous nous engageons à y répondre de manière fondée et précise. Nous tenons à insister sur le fait que la première question de notre problématique "Qu'en est-t-il du cas belge ?" nous permettra d'analyser la situation sur le terrain, comme l'a fait Grenier en France. Il ne s'agira cependant pas d'une étude comparative, nous tenons à insister sur ce point (même si nous sommes tentée parfois de relever des différences ou des analogies entre les situations).
Pour poursuivre notre étude, nous suivrons une méthodologie inspirée de la théorie de *la transposition didactique* de Chevallard.

3.2 Présentation de la méthodologie adoptée

Nous avons décidé, afin de répondre à nos différents questionnements, de nous baser sur la récente théorie de *la transposition didactique* présentée par le Français Yves Chevallard, expert en didactique des mathématiques (Chevallard, 1985) [1]. Nous commencerons par expliquer clairement de quoi il s'agit et nous présenterons ensuite la méthodologie associée à notre problématique et s'inspirant de cette théorie de la transposition didactique.

1. N'ayant accès qu'à des extraits du texte de Chevallard, nous nous sommes inspirée de différents outils y faisant référence. Plus précisément, il s'agit d'un article intitulé *Les concepts didactiques* (Aloui, 2005), d'une note critique sur la théorie de Chevallard (Colomb, 1986, pp. 89-91) et d'un extrait du livre *Psychologie de l'éducation* (Merri et Pichat, 2007, pp. 138-140).

3.2.1 Théorie de la transposition didactique

Selon Chevallard, la didactique des mathématiques est à considérer comme une science, "*La science d'un objet connaissable construit sur le triplet enseignant, élèves et savoirs mathématiques*". Ce trio constitue ce qu'il appelle *le système didactique* et la relation établie entre ces trois acteurs est nommée *la relation didactique*. Ce système est très bien représenté sur l'image suivante qu'on appelle généralement *le triangle didactique*.

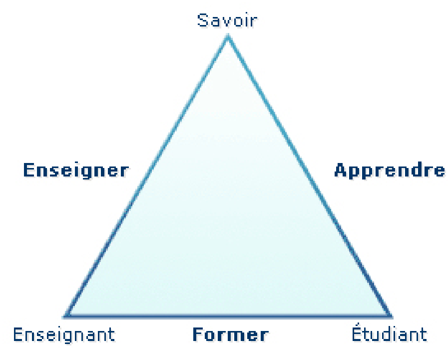


FIGURE 3.2 – Le triangle didactique, image tirée de (Maillard, 2011)

Dans sa théorie de la transposition didactique, Chevallard s'intéressera plus particulièrement à la troisième composante du système, le *savoir*, qu'il qualifie de "*si curieusement oublié*". Notons au passage que c'est au sociologue Verret que l'on doit la création même de la transposition didactique (1975). Celui-ci considère que :

"*Toute pratique d'enseignement d'un objet présuppose une transformation préalable de cet objet en objet d'enseignement.*"

FIGURE 3.3 – Extrait de (Verret, 1975, cité par Aloui, 2005, p. 1)

Ainsi, Chevallard reprendra en 1985 l'idée de Verret afin de l'introduire dans un domaine qui lui est propre, la didactique des mathématiques.

"*Un contenu de savoir ayant été désigné comme savoir à enseigner, dès lors un ensemble de transformations adaptives qui vont le rendre apte à prendre place parmi les objets d'enseignement. Le travail qui, d'un objet de savoir à enseigner, fait un objet d'enseignement est appelé la transposition didactique.*"

FIGURE 3.4 – Extrait de (Chevallard, 1985, cité par Aloui, 2005, p. 1)

Ainsi, la transposition didactique décrit l'ensemble des modifications subies par le savoir de référence (c'est-à-dire tel qu'il existe dans le monde savant), lorsqu'il est enseigné.

La transposition didactique comprend trois étapes que nous allons approfondir : d'une part, la transformation du *savoir savant* en *savoir à enseigner*, d'autre part, celle du *savoir à enseigner* en *savoir enseigné* et, enfin, celle du *savoir enseigné* en *savoir appris*.

Savoir savant $\longrightarrow$ **Savoir à enseigner** $\longrightarrow$ **Savoir enseigné** $\longrightarrow$ **Savoir appris**

FIGURE 3.5 – Schéma de la transposition didactique

Avant de considérer ces trois étapes, voyons brièvement ce que l'on entend par les différents types de savoirs cités :

– Le *savoir savant* correspond au savoir développé au fil du temps par les chercheurs, les scientifiques et, dans le cas qui nous occupe, les mathématiciens. Il s'agit donc du savoir de référence, celui abordé par la communauté des "savants".
– *Le savoir à enseigner* est celui traité dans les programmes d'enseignement ou dans les manuels scolaires. Il diffère donc, tout comme les programmes, selon le niveau d'études.
– *Le savoir enseigné* correspond au savoir présenté et enseigné par le professeur à ses élèves.
– *Le savoir appris* est le savoir effectivement appris par les élèves.

Décrivons à présent les trois étapes constituées par ces différents savoirs. Pour ce faire, nous nous sommes inspirée de (Merri et Pichat, 2007, p. 138) :

- ***Du savoir savant au savoir à enseigner : la transposition externe***
  Cette première étape concerne ce que Chevallard appelle *la noosphère* (*noos* signifie esprit et donc, *noosphère*, la sphère de l'esprit), c'est-à-dire l'ensemble des personnes qui décident des contenus qui devront être enseignés (toutes les composantes d'un savoir savant ne sont pas vues à l'école, il faut poser des choix). Il s'agit donc de didacticiens, d'inspecteurs, de représentants des enseignants, etc.
  Cette première étape aboutit à la construction du savoir à enseigner et donc des programmes et des manuels scolaires.
  Cette transposition est qualifiée d'externe car, comme vous l'aurez compris, elle se fait en dehors du système didactique.
  Pour terminer sur ce point, insistons sur le fait que le savoir à enseigner, de par les choix effectués par la noosphère, est une construction spécifique pour l'école.

- ***Du savoir à enseigner au savoir enseigné : la transposition interne***
  Cette deuxième étape est assurée cette fois par l'enseignant et est donc interne au système didactique. Elle analyse la manière dont les programmes et par conséquent, les objets à enseigner, sont transposés en objets d'enseignement. Notons que cette étape diffère véritablement selon le professeur. En effet, bien que le savoir à enseigner soit défini et identique pour tous, le savoir enseigné diffère selon les professeurs de par leur histoire, leur façon d'aborder les choses, leurs préférences, leur vécu.

- ***Du savoir enseigné au savoir appris***
  Cette dernière étape concerne plutôt l'élève lui-même. Tout comme pour le cas précédent, même si le savoir enseigné est identique au sein d'une même classe, le savoir appris diffère selon les élèves de par leur façon d'être, leur goût d'apprendre, de considérer les choses, etc.

Notons qu'initialement, Chevallard a présenté son modèle de transposition didactique en s'arrêtant au savoir enseigné. Depuis, le modèle a été complété en ajoutant la dernière étape que nous venons d'expliciter.

3.2.2 Application de la méthodologie à notre cas d'étude

Afin d'analyser la problématique posée, nous allons utiliser une méthodologie construite à partir de la théorie de la transposition didactique de Chevallard. Bien entendu, il s'agira de l'adapter pour qu'elle corresponde au mieux à notre cas d'étude. Voici donc l'explication de notre méthodologie. Nous reprendrons dans la conclusion un schéma récapitulatif de celle-ci.

Nous commencerons notre analyse par une *étude à caractère épistémologique* afin d'aborder le *savoir savant* lié à la démonstration par récurrence (chapitre **??**). Cette approche nous permettra non seulement de comprendre si, oui ou non, elle a été facilement acceptée par la communauté des mathématiciens. Cette démarche nous semble tout à fait indispensable car nous soupçonnons fortement le fait que sa construction, au fil du temps, puisse avoir un réel impact sur la compréhension qu'ont les étudiants aujourd'hui de la démonstration par récurrence.

Nous étudierons ensuite le *savoir à enseigner* (chapitre **??**). Pour ce faire, nous commencerons par réaliser une *analyse détaillée des programmes de l'enseignement.* Cela nous permettra de nous rendre compte de la place [2] attribuée à la démonstration par récurrence par les experts de la noosphère dans le cursus secondaire. Ensuite, nous nous concentrerons sur l'*étude de quelques manuels belges du niveau secondaire et du cycle supérieur.* Nous pourrons ainsi évaluer la pertinence de la façon dont le concept y est présenté ainsi que la place qu'il occupe dans l'ensemble des chapitres.

Après avoir étudié le savoir à enseigner, nous aborderons le *savoir enseigné* (chapitre **??**). Pour cela, nous avons *enquêté auprès de nombreux professeurs* issus d'une multitude de régions de la Communauté française. Nous nous sommes concentrée sur les enseignants du troisième degré (réseau officiel et réseau libre), ceux-ci étant davantage concernés au niveau du secondaire. Cela nous permettra non seulement de connaitre la manière dont ils perçoivent et enseignent le principe de démonstration par récurrence mais aussi de savoir s'ils en comprennent toutes les subtilités.

Pour terminer, nous nous concentrerons sur le *savoir appris* (chapitre **??**). Pour réaliser cela, nous avons *enquêté auprès d'étudiants universitaires* inscrits dans des sections scientifiques. Il s'agit des $1^{\text{ère}}$ bac en sciences physiques et en sciences mathématiques, des étudiants de $2^{\text{ème}}$ master en sciences mathématiques et, enfin, de ceux passant l'agrégation mathématique. Cela nous a permis d'aborder différentes questions : les étudiants qui "viennent" de quitter le secondaire et qui n'ont connu qu'une seule année à l'université ont-ils acquis la notion du principe de récurrence ? Se sentent-ils à l'aise avec celle-ci ? Observe-t-on une évolution de la première à la dernière année au niveau de la perception et de la compréhension du sujet ? Quelles sont les principales lacunes observées ?
Remarquons, en ce qui concerne encore le savoir appris, qu'un questionnaire avait également été distribué à des classes d'humanités ($5^{\text{ème}}$ et $6^{\text{ème}}$ années du général) mais, celui-ci ne

2. Par "place", nous entendons non seulement l'importance qu'on lui attribue parmi l'ensemble des savoirs mais également les différents points de chapitres dans lesquels elle intervient.

donnant pas de résultat, nous avons préféré nous concentrer plutôt sur les étudiants ayant une année d'expérience dans un domaine scientifique à l'université.

3.3 Conclusion

La méthodologie présentée nous aidera à répondre aux deux questions de notre problématique de recherche reprises à la figure **??**. Elle nous permettra effectivement de suivre un cheminement nous amenant à établir des réponses claires et fondées issues de nos différentes analyses. Pour ce qui est de la première question de notre problématique (voir figure **??**), nous ne pourrons y répondre de manière complète qu'après avoir analysé l'entièreté de ce que nous avons présenté à la sous-section précédente. En ce qui concerne la deuxième question de notre problématique, il s'agira de créer quelques exercices susceptibles d'être intégrés dans une éventuelle formation que nous pourrions appeler "Pour mieux aborder la démonstration par récurrence dans les classes". Celle-ci serait destinée aux professeurs de mathématiques de 4$^{\text{ème}}$, 5$^{\text{ème}}$ et 6$^{\text{ème}}$ années [3]. Tout comme pour la première question de notre problématique, nous ne pourrons proposer ces exercices qu'après avoir tiré des constats sur l'analyse des manuels, des questionnaires distribués aux enseignants et aux étudiants.

En guise de conclusion, considérons le schéma suivant, récapitulant l'ensemble de notre méthodolodie :

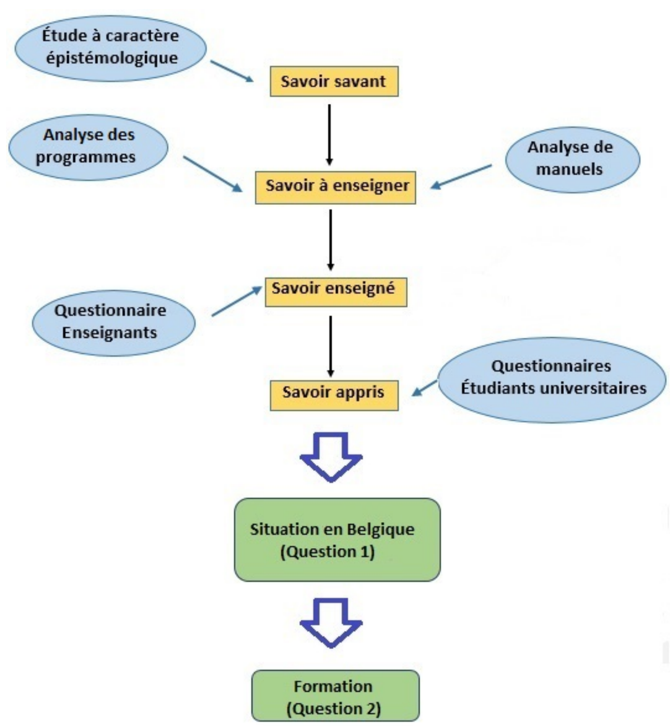


FIGURE 3.6 – Méthodologie associée à notre problématique de recherche

3. Seuls ces professeurs sont susceptibles d'aborder la démonstration par récurrence en classe (voir figure **??**).

Chapitre 4

Etude à caractère épistémologique de la démonstration par récurrence

Comme nous l'avons mentionné dans la présentation de notre méthodologie de travail, nous allons commencer par étudier globalement la manière dont a évolué la démonstration par récurrence au fil du temps. Il s'agit donc, dans ce chapitre, de traiter le savoir savant. Nous insistons sur le fait que l'étude à caractère épistémologique réalisée lors de ce chapitre ne fera que reprendre dans les grandes lignes l'évolution de la démonstration par récurrence, ce mémoire ayant une visée didactique et non historique. A cette fin, nous nous inspirerons principalement de la deuxième partie de la thèse de Vidal intitulée *Etude historique et critique de méthodes de démonstration en arithmétique* (Vidal, 2005, pp. 192-305).

Cette étude se déroulera en deux temps. Premièrement, nous dégagerons deux obstacles principaux susceptibles d'expliquer la raison pour laquelle le principe de récurrence a mis autant de temps à être accepté par la communauté mathématique. Cette démarche nous semble tout à fait indispensable. En effet, nous soupçonnons fortement le fait que les difficultés d'acceptation qu'a connues le principe de récurrence peuvent avoir un réel impact aujourd'hui sur la compréhension des étudiants. Pour terminer ce chapitre, nous expliquerons,dans une moindre mesure, le contexte dans lequel s'est formalisé le principe de récurrence.

4.1 Obstacles à l'acceptation de la démonstration par récurrence

La démonstration par récurrence a mis énormément de temps à être acceptée par la communauté mathématique contrairement au raisonnement *purement* déductif utilisé pour démontrer des propositions [1]. Néanmoins, comme nous le savons aujourd'hui, les raisonnements *purement* déductifs ne sont pas suffisants pour démontrer l'ensemble d'une théorie axiomatique. En effet, ne disposer que de ce type de raisonnement nous amènerait à réduire les mathématiques à une "*régression à l'infini*" (Vidal, 2005, p. 192), ce qui est véritablement impossible.

1. Nous savons qu'une démonstration par récurrence utilise un raisonnement déductif. Le terme *purement* signifie, selon nous, qu'il s'agit d'un raisonnement déductif non-imbriqué dans une démonstration par récurrence.

Nous allons ici découvrir les raisons pour lesquelles la démonstration par récurrence, bien que nécessaire aux théories mathématiques, a mis tellement de temps à être acceptée.

4.1.1 Utilisation de l'induction incomplète comme moyen de démonstration par les premiers mathématiciens

Beaucoup d'historiens attribuent l'origine du principe de démonstration par induction (ou par récurrence) à Pascal (1623-1662). Néanmoins, il est important de remarquer que l'induction en elle-même était déjà utilisée bien avant Pascal dans les démonstrations de propositions. En effet, les mathématiciens d'autrefois considéraient l'induction incomplète [2] comme véritable méthode pour démontrer des résultats. Nous savons aujourd'hui qu'un tel raisonnement ne démontre rien mais peut amener intuitivement à considérer des propositions dont la véracité doit être vérifiée par démonstration. Ainsi, nous pensons que l'induction incomplète constitue un premier pas dans l'histoire vers le principe de récurrence.
Bien entendu, l'utilisation de l'induction incomplète comme moyen de démonstration a amené certains mathématiciens à émettre des conclusions erronées. Ce fut notamment le cas de Nicomaque dont nous allons parler ci-dessous.
Ces différentes erreurs ont amené des réflexions et de nombreux débats en ce qui concerne l'induction incomplète comme moyen de démonstration. Il en existe d'ailleurs encore de très récents sur le sujet.

Les premières traces d'induction incomplète comme moyen de démonstration mathématique

Comme nous l'avons déjà mentionné plus haut, l'induction incomplète était considérée comme une véritable méthode de démonstration par certains mathématiciens de l'Antiquité. On en retrouve d'ailleurs déjà quelques traces dans *Les livres arithmétiques* d'Euclide. A ce propos, Vidal nous dit que :

"*Une méthode fréquente* [*utilisée par Euclide*] *pour prouver qu'une propriété est vraie pour tout entier naturel n est la suivante : on prouve la propriété pour 1, pour 2, pour 3, pour 4 et on essaye de la prouver pour des entiers plus grands tels que 7 ou 11.*"

"*Euclide effectue de nombreuses démonstrations , par exemple pour $n = 3$ et nous laisse le soin de vérifier que la démonstration est encore valable pour 4, pour 5, pour un nombre quelconque.*"

FIGURE 4.1 – Extraits de (Vidal, 2005, p. 218)

Ainsi, nous comprenons qu'Euclide, en nous laissant "*le soin de vérifier*" le résultat pour un nombre naturel quelconque, considère que la généralisation des cas particuliers qu'il a vérifiés lui-même est tout à fait valable. Cela sous-entend que l'induction incomplète était pour lui un moyen de démonstration valide. Certains mathématiciens postérieurs à Euclide ont utilisé un raisonnement identique. Voyons, dans le point suivant, ce qu'il en est notamment pour Nicomaque (vers 180 PCN).

2. Voir sous section ??.

Un exemple d'induction incomplète menant à une généralisation erronée

Nicomaque propose de démontrer des propriétés sur *les nombres parfaits* par induction incomplète. Son raisonnement aboutit, comme nous le verrons, à des généralisations erronées (Vidal, 2005, pp. 208-210).

Nicomaque utilise la définition du *nombre parfait* proposée par Euclide pour pouvoir définir ce qu'il appelle *les nombres pairs* :

> "*Un nombre parfait est celui qui est égal à la somme de ses parties.*"

FIGURE 4.2 – Extrait de (Euclide VII, vers 300 ACN, cité par Vidal, 2005, p. 208)

Notons que par "parties d'un nombre", Euclide sous-entend les diviseurs naturels de ce nombre à l'exception de lui-même. Par exemple, les parties de 6 sont 1, 2 et 3.

> "*Les nombres pairs sont les uns redondants, les autres déficients,* [...], *les autres sont au milieu des deux, et ils sont appelés parfaits.*"

FIGURE 4.3 – Extrait de (Nicomaque, vers 180 PCN, cité par Vidal, p. 208)

Par nombre "*redondant*" et "*déficient*", Nicomaque considère les nombres dont la somme des parties est respectivement supérieure et inférieure au nombre lui-même.

A travers ces qualifications de nombres, Nicomaque établit une classification "qualitative" :

> "*Les nombres redondants sont associés aux excès, aux ambitions, aux exagérations et aux superfluités.*"
>
> "*Les nombres déficients correspondent à des manques, des défauts, des privations et pauvretés.*"
>
> "*Les nombres parfaits représentent la juste mesure, entre l'excessif et le déficient et comme l'unisson entre le plus aigu et le plus grave. Ils sont encore associés aux vertus, à la santé et à la beauté.*"

FIGURE 4.4 – Classification "qualitative" des nombres selon Nicomaque, extrait de (Nicomaque, vers 180 PCN, cité par Vidal, p. 208)

Nicomaque, dans son ouvrage, donne seulement les quatre premiers nombres parfaits. Il s'agit de : 6, 28, 496 et 8128. Puis, il énonce des propriétés sur l'ensemble des nombres parfaits sans pour autant les justifier. Il s'agit notamment des deux propositions suivantes, écrites avec des notations actuelles :

1. *Il y a un et un seul nombre parfait dans chaque intervalle* $[10^n, 10^{n+1}]$.
2. *Tous les nombres parfaits se terminent alternativement par 6 ou 8.*

Figure 4.5 – Généralisations erronées par induction incomplète, extrait de (Nicomaque, vers 180 PCN, cité par Vidal, p. 209)

Comme nous l'indique Vidal, la première propriété se base non seulement sur la généralisation de cas particuliers mais également sur une part d'esthétique. En effet, la régularité des nombres est un facteur appréciable. D'ailleurs, Nicomaque nous dit à ce sujet :

"*Les choses belles et conformes à la vertu sont rares et faciles à nombrer.* [...] *les nombres parfaits sont faciles à nombrer et agencés selon un ordre convenable.*"

Figure 4.6 – Extrait de (Nicomaque, vers 180 PCN, cité par Vidal, p. 209)

Malheureusement pour Nicomaque, ses deux affirmations, reprises à la figure **??**, sont erronées. Dans son exemple, il ne considère que les quatre premiers nombres parfaits, ceux-ci satisfaisant les deux propriétés. Néanmoins, cela ne semble pas être le cas pour les nombres parfaits suivants. En effet, le cinquième est 33550336 et le sixième est 8589869056 (ces deux chiffres nous sont donnés par Vidal). On peut ainsi constater qu'il n'y a pas de nombre parfait dans l'intervalle $[10^4, 10^5]$ et que les derniers chiffres ne sont pas toujours alternés (6-6 dans ce cas et pas 6-8 comme l'aurait souhaité Nicomaque).

Nicomaque a donc utilisé l'induction incomplète pour établir ces deux propriétés qui s'avèrent en fait erronées. D'autres mathématiciens tel que Fermat (début $17^{\text{ème}}$ siècle - 1665) ont encore utilisé ce raisonnement bien des années plus tard. En effet, bien que conscient du danger de l'induction incomplète, il se laissa tenter en l'utilisant pour établir une certaine généralisation. [3]

L'induction incomplète encore utilisée aujourd'hui dans les domaines scientifiques autres que celui des mathématiques

L'induction incomplète est, comme nous l'avons déjà mentionné à la sous-section **??**, encore utilisée aujourd'hui pour établir des résultats dans certains domaines scientifiques autres que celui des mathématiques.

Il n'est donc pas étonnant de trouver des écrits récents sur le sujet tels que ceux des philosophes David Hume (1711-1776) et Karl Popper (1902-1994). Nous nous sommes d'ailleurs inspirée des propos de ce dernier (à la figure **??**) afin d'illustrer l'induction incomplète.

3. Nous ne développerons pas le sujet pour Fermat mais des explications sont disponibles dans la thèse de Vidal (2005, pp. 214-219).

Plus précisément, il s'agissait de l'extrait suivant :

"*Il est loin d'être évident,d'un point de vue logique, que nous soyons justifiés d'inférer des énoncés universels à partir d'énoncés singuliers aussi nombreux soient-ils ; toute conclusion tirée de cette manière peut toujours, en effet, se trouver fausse : peu importe le grand nombre de cygnes blancs que nous puissions avoir observés, il ne justifie pas la conclusion que tous les cygnes sont blancs.*"

FIGURE 4.7 – Extrait de (Popper, 1935, cité par Vidal, 2005, p. 202)

Ce sujet ayant déjà été traité précédemment, nous ne nous y attardons pas davantage dans cette sous-section.

4.1.2 Acceptation difficicile de la notion d'infini

La notion de l'infini a été difficilement acceptée au fil du temps. C'est un critère dont il faut tenir compte en ce qui concerne l'acceptation de la démonstration par récurrence puisque la notion d'infini fait partie intégrante du principe qui la compose. En effet, celui-ci permet de démontrer une infinité de propositions en en démontrant seulement deux c'est-à-dire l'amorce et l'hérédité. Ayant déjà consacré la sous-section **??** sur ce sujet, nous ne nous attarderons pas ici de manière approfondie. Néanmoins, nous tenons tout de même à ajouter quelques remarques que nous avons tirées de l'article intitulé *L'infini, c'est long, surtout vers la fin...* (Gingras, 2013).

Comme nous l'avons expliqué dans la sous-section **??**, la notion de l'infini a conduit à certains paradoxes tel que celui dénommé *le paradoxe de réflexivité*. Certains d'entre eux ont engendré des questionnements, des remises en question et s'en est suivie la conclusion ci-après : "*seul un être infini lui-même, Dieu par exemple, peut penser l'infini*". L'Eglise s'est donc opposée à quiconque s'essayerait de penser l'infini. Saint Thomas D'Aquin (1224-1274) considérait même que toute personne qui pensait concevoir l'infini entrait "*en concurrence directe avec la nature unique et infinie de Dieu*".

Il a fallu énormément de temps pour que la notion d'infini telle que nous la connaissons aujourd'hui soit finalement acceptée et traitée par les mathématiciens. Gauss (1777-1855) disait encore à la fin du 18$^{\text{ème}}$ siècle qu'il ne considérait pas qu'on puisse utiliser l'objet infini comme un tout mais bien comme une façon de parler. Sa conception représentait celle de l'ensemble de la communauté mathématique de son époque.

4.2 Formalisation du principe de démonstration par récurrence

L'origine du principe de récurrence est très controversée. Certains historiens diront que c'est Euclide qui en est à la source alors que d'autres diront qu'il s'agit de Maurolico (1494-1575) ou de Pascal (1623-1662). En fait, cela dépend de ce que l'on entend par "origine du principe de récurrence" : soit l'utilisation de l'induction incomplète qui en a été l'élément déclencheur (nous avons vu qu'il en existe des traces chez Euclide), soit sa formalisation qui en fait une démarche rigoureuse et fiable.

En ce qui concerne le rôle de Maurolico, les avis sont partagés. D'une part, nous avons lu un article (Vacca, 1911, pp. 30-33) le considérant comme l'unique inventeur du principe de récurrence, Vacca argumentant notamment cela par le fait que Pascal l'avait lu avant d'établir sa propre théorie. Cependant, selon Vidal (2005, p. 250), Maurolico n'avait pas encore pris conscience du fait que l'on peut démontrer une infinité de propositions en en considérant un nombre fini. C'est donc Pascal, selon Vidal, qui a véritablement formalisé le principe. Pour cette raison, nous avons décidé de structurer la suite de cette étude à caractère épistémologique en fonction du rôle de Pascal bien que nous ne dénigrions en rien celui qu'ait pu jouer Maurolico.

Recherches antérieures à Pascal

Bien qu'on dise souvent que Pascal est le premier à avoir formalisé le principe de récurrence, on doit tenir compte de l'apport de nombreux mathématiciens antérieurs. Citons notamment Al-Karaji (953-1029) et As-Samaw'al (1130-1180) dont traite l'extrait suivant :

"*Les méthodes de démonstration d'Al-Karaji et d'As-Samaw'al sont un commencement de l'induction mathématique, si l'on prend pour point de départ Pascal.*"

FIGURE 4.8 – Extrait de (Rashed, 1984, cité par Vidal, 2005, p. 243)

Pour illustrer ces propos, reprenons une des propositions traitées par As-Samaw'al dans l'un de ses ouvrages :

"*Le produit de deux nombres cubiques est égal au cube du produit de leurs côtés.*"

FIGURE 4.9 – Extrait de (As-Samaw'al, vers 1150, cité par Vidal, 2005, p. 242)

A la fin de la démonstration qu'il propose (que nous ne développerons pas ici), As-Samaw'al ajoute :

"*De la même manière on peut démontrer que le quadrato-cube du produit de deux nombres est égal au produit du quadrato-cube de l'un par le quadrato-cube de l'autre et ainsi de suite dans un ordre croissant.*"

FIGURE 4.10 – Extrait de (As-Samaw'al, vers 1150, cité par Vidal, 2005, p. 242)

Vidal (2005, p. 243) nous fait part du fait que, au sein de la démonstration proposée par As-Samaw'al, apparait un procédé semblable pour passer du rang 2 à 3 ou du rang 3 à 4. Les termes "*ainsi de suite dans un ordre croissant*" de cet extrait laissent sous-entendre que ce procédé est identique quel que soit le nombre naturel considéré. Bien que le raisonnement adopté par As-Samaw'al ne soit pas formalisé, nous ne pouvons remettre en question le fait qu'il reconnait le passage de l'entier au suivant et est très proche du principe de récurrence que nous connaissons aujourd'hui.

Ainsi, il semblerait que des mathématiciens antérieurs à Pascal aient bel et bien utilisé le principe de récurrence mais sur des entiers naturels particuliers, en l'absence de notations permettant la généralisation.

Formalisation du raisonnement

Selon Vidal (2005, p. 253), *Le traité du triangle arithmétique* de Pascal est un texte concernant 19 propositions sur les coefficients binomiaux, établies sur base du triangle arithmétique. L'originalité de Pascal ne réside pas dans la découverte de ce triangle (puisqu'il était déjà connu depuis un siècle) mais plutôt dans sa formalisation explicite du principe de démonstration par récurrence. C'est pour démontrer la douzième proposition de son livre que Pascal utilise ce principe. Nous ne nous intéresserons pas à cette proposition en tant que telle mais plutôt à sa démonstration que Pascal formule de la manière suivante :

> "*Quoique cette proposition ait une infinité de cas, j'en donnerai une démonstration bien courte, en supposant deux lemmes.*
> *Le premier, qui est évident de soi-même, que cette proportion se rencontre dans la seconde base.*[...]
> *Le second, qui si cette proportion se trouve dans une base quelconque, elle se trouvera nécessairement dans la base suivante.*
> *D'où il se voit nécessairement dans toutes les bases : car elle est dans la seconde base par le premier lemme ; donc par le second elle est dans la troisième base, donc dans la quatrième et à l'infini.*
> *Il faut donc seulement démontrer le second lemme, en cette sorte.*"

FIGURE 4.11 – Formalisation du principe de récurrence par Pascal, extrait de (Pascal, 1654, cité par Vidal, 2005, p. 254)

Ainsi, il semblerait que Pascal soit le premier à avoir rédigé de manière formelle le principe de démonstration par récurrence.

Recherches postérieures à Pascal

Au cours du XIX$^{\text{ème}}$ siècle, la théorie des nombres se développe et devient beaucoup plus abstraite (Dhombres *et al.*, 1987, pp. 76-77). On observe alors une réelle volonté d'axiomatisatier l'arithmétique. Cela engendrera notamment la formulation des cinq axiomes de Peano[4] (1858-1932) qui permettent de construire l'ensemble $\mathbb{N}$.

4.3 Conclusion

Peu importe la paternité du principe de récurrence, il semblerait qu'il lui ait fallu énormément de temps pour être accepté par la communauté mathématique en tant que moyen de démonstration valide. Nous avons explicité ici deux obstacles qui pourraient amener à comprendre cette difficile acceptation. D'une part, l'utilisation de l'induction incomplète pour démontrer des résultats a mené à des généralisations erronées. Cela a engendré de nombreux débats et peut expliquer sans doute les difficultés d'acceptation du principe de récurrence. D'autre part, la notion de l'infini qui intervient dans le principe de récurrence a mis elle aussi énormément de temps à être acceptée par la communauté mathématique.

Pour terminer ce chapitre, pointons le fait qu'il est possible de retrouver aujourd'hui des "traces" sur les étudiants de cette difficulté historique d'acceptation du principe. En effet,

4. Voir figure ??.

les obstacles qu'a traversés le principe de récurrence peuvent se répercuter sur la compréhension des étudiants, constituant ainsi des obstacles épistémologiques.

Chapitre 5

Etude du savoir à enseigner

Comme nous l'avons explicité dans notre méthodologie, ce chapitre sera consacré à l'analyse du *savoir à enseigner*. Celui-ci est repris dans les programmes et les manuels scolaires, raison pour laquelle nous diviserons ce chapitre en deux parties distinctes.

5.1 Analyse des programmes et du référentiel des compétences terminales

Nons avons décidé, afin d'avoir une idée sur l'ensemble de l'enseignement francophone belge, d'analyser non seulement les programmes de l'*enseignement catholique* mais également ceux de l'*enseignement officiel de la Communauté française* pour la $4^{\text{ème}}$ *secondaire* ainsi que le *troisième degré*[1] c'est-à-dire la $5^{\text{ème}}$ et la $6^{\text{ème}}$ (ces trois années étant les seules concernées par l'approche de la démonstration par récurrence). Nous pourrons ainsi évaluer la place qui est réservée à l'enseignement de la démonstration par récurrence parmi l'ensemble des chapitres de mathématiques et, de plus, voir dans quel contexte elle doit être abordée. Nous consulterons également *les référentiels des compétences terminales de l'enseignement général et technique* afin d'observer si les programmes sont en concordance avec ceux-ci.
Nous verrons aussi brièvement ce qu'il en est dans les *programmes français*. Cela nous permettra d'établir non seulement une comparaison avec la situation belge mais également de faire le lien avec l'analyse de Grenier menée en France.
Précisons que, en ce qui concerne le cas belge, nous n'analyserons que les programmes de l'*enseignement général, technique de transition* (ces deux premiers ne faisant l'objet que d'un seul programme en mathématiques) et *technique de qualification*. Cela est dicté principalement par le fait que l'enseignement de la démonstration par récurrence n'intervient pas du tout dans les sections professionnelles.

1. Il existe un programme par degré et par type d'enseignement (général et technologique-technique de qualification-professionnel). Le premier degré correspond aux $1^{\text{ère}}$ et $2^{\text{ème}}$ années secondaire, le deuxième degré aux $3^{\text{ème}}$ et $4^{\text{ème}}$ années et le troisième degré aux $5^{\text{ème}}$ et $6^{\text{ème}}$ années.

Cela nous a été confirmé par un professeur y donnant cours :

"*Enseignant dans le professionnel, on n'a pas la possibilité, point de vue intelligence abstraite (capacité de manipuler des notions abstraites avec nos élèves), de faire faire des exercices ou des démonstrations par récurrence. Nos maths sont basiquement pratiques et en rapport avec l'apprentissage d'un métier.*"

FIGURE 5.1 – Propos d'un professeur de l'enseignement professionnel

5.1.1 Analyse des programmes belges

Afin de mener à bien notre analyse, nous nous sommes concentrée sur l'enseignement de la démonstration par récurrence. Nous avons donc réalisé une recherche sur base des mots-clés suivants : récurrence, raisonnement, induction, inductif, binôme [2].

Programmes du Segec

En ce qui concerne l'enseignement libre, nous avons choisi de nous intéresser seulement au cas du programme du réseau catholique, le Segec [3], celui-ci représentant à peu près 95% de l'enseignement subventionné confessionnel (Romainville, 2013, p. 34) et accueillant 60% des élèves du secondaire en Communauté française (Site Segec, 2013).

• Analyse de (Prog. Segec 1, 2008) :

Commençons par insister une nouvelle fois sur le fait que le programme de mathématiques de l'enseignement *général* est identique à celui de *technique de transition*. A propos de ce programme, pour le troisième degré, quel que soit le nombre d'heures de mathématiques par semaine (2, 4 ou 6 heures), il ne mentionne à aucun moment, de manière explicite, l'étude de la démonstration par récurrence. Remarquons qu'en ce qui concerne ce dernier terme *récurrence*, on le retrouve régulièrement associé à la construction de suites, ce qui n'est pas l'orientation d'utilisation du raisonnement par récurrence sur laquelle nous avons voulu nous concentrer dans ce travail. Notons néanmoins que pour la 6ème année (4h./sem. de mathématiques), le programme préconise, dans le cadre du chapitre de cours *Traitement des données - Régression, combinatoire et probabilités*, de démontrer le binôme de Newton :

Formule de symétrie : $C_n^p = C_n^{n-p}$. Formule de Pascal : $C_n^p = C_{n-1}^p + C_{n-1}^{p-1}$. Binôme de Newton : $(a+b)^n$.	Ces formules seront découvertes dans le cadre du triangle de Pascal : on écrira les premières lignes du triangle, on mettra en évidence et on démontrera les formules de combinaisons qui y figurent ainsi que la formule du binôme de Newton.

FIGURE 5.2 – Extrait de (Prog. Segec 1, 2008, pp. 54, 89)

2. Nous avons ajouté ce dernier terme car nous savions, de par l'enquête menée auprès des professeurs, que le binôme de Newton est couramment démontré par récurrence dans l'enseignement secondaire. Nous avions donc un a priori sur la recherche au sein des programmes.

3. Segec : Secrétariat général de l'enseignement catholique en communautés française et germanophone de Belgique.

Ainsi, le programme ne stipule pas le raisonnement à utiliser pour démontrer le binôme. Il pourrait s'agir soit de la preuve généralement appelée *la démonstration directe du binôme de Newton*[4] ou de *la démonstration par récurrence du binôme de Newton* que nous avons développée à la figure **??**. Nous nous posons donc les questions suivantes : comment des professeurs pourraient-ils savoir la manière d'opérer pour démontrer le binôme de Newton ? Doivent-ils pratiquer la démonstration directe, la démonstration par récurrence ou bien les deux ?

Notons également le fait suivant : il apparait que les élèves de 6ème (6h./sem. de mathématiques) ne doivent pas, selon ce même programme, être capables de démontrer le binôme de Newton. Nous trouvons cela un peu étrange et nous émettons l'hypothèse selon laquelle il s'agirait peut-être d'un oubli. Nous tenons à insister sur le fait qu'il ne s'agit là que d'une hypothèse et non d'une affirmation.

Au préalable, une recherche portant sur la place de la démonstration par récurrence avait été menée dans le programme de 4ème année (Prog. Segec 2, 2008). Celle-ci n'avait donné aucun résultat.

• Analyse de (Prog. Segec 3, 2004), (Prog. Segec 4, 2004), (Prog. Segec 5, 2002) :

Dans le cas des programmes de 2 heures et de 4 heures de mathématiques par semaine de *l'enseignement technique de qualification*, que ce soit pour la 4ème année ou le 3ème degré, il n'y a aucune occurrence des termes recherchés si ce n'est, encore une fois, à propos des définitions de suite.

Programmes de l'enseignement officiel de la Communauté française

• Analyse de (Prog. Officiel 1, 2000) :

Nous avons commencé par analyser la situation de *l'enseignement général et technique de transition*. Au niveau de la 4ème année, il ne mentionne à aucun endroit la démonstration par récurrence. Il fait néanmoins référence une seule fois à l'induction :

"*Observer, comparer, formuler une hypothèse par induction.*"

FIGURE 5.3 – Extrait de (Prog. Officiel 1, 2000, p. 8)

Nous entendons par la phrase "*formuler une hypothèse par induction*" le fait de pratiquer l'induction incomplète, celle-ci pouvant constituer une première étape vers la démonstration par récurrence, comme nous l'avons expliqué à la fin de la sous-section **??**. Néanmoins, nous n'observons rien en ce qui concerne l'induction complète dans la suite du programme des élèves de 4ème année.

4. Par démonstration *directe*, on veut parler d'une démonstration qui s'établit de manière directe à partir de la proposition à démontrer, ne nécessitant donc pas d'étapes intermédiaires telle que l'utilisation d'un autre théorème, etc. Ainsi, la démonstration par récurrence est considérée comme *indirecte* dans le sens où elle fait intervenir le principe de démonstration par récurrence qui, lui, nécessite l'amorce et l'hérédité (Bouffard, 2013, pp. 3, 8). Nous avions connaissance du fait que la démonstration directe du binôme de Newton est parfois enseignée car elle est mentionnée dans le programme de l'enseignement officiel.

Passons à présent à l'analyse de (Prog. Officiel 2, 2000) :

Au niveau du troisième degré, le terme récurrence apparait, dans le cas qui nous occupe, à plusieurs reprises :

– Dans un chapitre introductif au programme explicitant les objectifs généraux (toutes années du 3$^{\text{ème}}$ degré et tous nombres d'heures de mathématiques par semaine confondus), on peut lire :

"*Etudier quelques notions et règles de logique : contraposition d'implications ou d'équivalences, démonstrations par l'absurde, critères faisant intervenir des conditions nécessaires et suffisantes, récurrence, négation,...*"

FIGURE 5.4 – Extrait de (Prog. Officiel 2, 2000, p. 7)

Nous restons un peu perplexe quant à cette phrase et ce pour des raisons de syntaxe. En effet, nous ne savons pas très bien dire si le mot *démonstrations* porte également sur le mot *récurrence* ou bien s'il ne porte que sur *l'absurde*. Dans le premier cas, nous sommes heureuse de constater que la démonstration par récurrence est au programme et, cet extrait faisant partie du chapitre introductif aux objectifs généraux pour les élèves de 5$^{\text{ème}}$ et 6$^{\text{ème}}$ années, nous nous attendons à la retrouver lors du développement plus détaillé des matières. Dans le second cas, nous ne savons pas très bien ce qu'il faut entendre par *récurrence*. S'agit-il du raisonnement par récurrence, de la démonstration par récurrence ou bien des deux ? Nous ne trouvons pas cela très clair pour les enseignants.

– En guise d'introduction à l'ensemble des chapitres du 3$^{\text{ème}}$ degré (6h./sem. de mathématiques), on stipule notamment :

"*Au travers de différents points de matières vues, et à titre de synthèse, on dégagera certaines structures communes, par exemple la notion de groupe, d'espace vectoriel, etc. et certains modes de raisonnement : démonstrations par l'absurde et par récurrence, utilisation de la linéarité, etc.*"

FIGURE 5.5 – Extrait de (Prog. Officiel 2, 2000, p. 10)

Nous sommes cette fois heureuse de constater que la démonstration par récurrence est mentionnée ici de façon claire. Cet extrait étant issu de l'introduction de l'ensemble des chapitres pour les élèves de 5$^{\text{ème}}$ et 6$^{\text{ème}}$ années en mathématiques fortes, nous pouvons nous attendre à ce que la démonstration par récurrence se retrouve de manière explicite dans le détail des programmes. Nous verrons ce qu'il en est dans la suite de l'analyse. Notons également le fait suivant : dans l'extrait ci-dessus, on retrouve les termes *démonstrations par l'absurde et par récurrence*. Cela sous-entend que ces démonstrations sont exclusives les unes par rapport aux autres. Or, nous avons vu un exemple à la figure **??** qui nous prouvait le contraire.

– Dans le cadre du chapitre d'analyse combinatoire, il est demandé aux élèves de 6$^{\text{ème}}$ année (4h. et 6h./sem. de mathématiques) de pouvoir "*Démontrer et utiliser la formule du binôme de Newton.*" et, il est ajouté uniquement dans le cas des élèves qui

ont 6h./sem. de mathématiques, "*La formule de Newton sera démontrée de manière directe et par récurrence.*"
Nous avons ici deux faits à remarquer :

- ◦ Puisqu'il n'est pas spécifié, dans le cas des élèves à 4h./sem. de mathématiques, la manière dont le binôme doit être démontré (Prog. Officiel 2, 2000, pp. 23, 34), nous nous posons une nouvelle fois la question suivante : s'agit-il de la démonstration directe du binôme de Newton ou s'agit-il de la démonstration par récurrence ?
- ◦ Nous ne pouvons assurer que pour le cas des élèves de 6$^{\text{ème}}$ à 6 heures de mathématiques par semaine la conformité des propos repris à la figure **??** avec le détail des matières en ce qui concerne la démonstration par récurrence.

• Pour ce qui est de *l'enseignement technique de qualification*, le programme tient les mêmes propos, pour la 4$^{\text{ème}}$ année, que celui de l'enseignement général :

"*Observer, comparer, formuler une hypothèse par induction.*"

FIGURE 5.6 – Extrait de (Prog. Officiel 3, 2004, p. 5)

Rien n'apparait à propos de la démonstration par récurrence pour le 3$^{\text{ème}}$ degré (Prog. Officiel 4, 2004).

Conclusion

En guise de conclusion sur les recherches menées au sein des programmes belges, considérons tout d'abord le tableau récapitulatif suivant [5] :

	4ème		5ème		6ème		
	Général	Technique	Général	Technique	Général		Technique
					4h./sem.	6h./sem.	
SEGEC	X	X	X	X	Dém. Bin. (comment?)	X	X
Officiel com. fr.	hyp. par ind.	hyp. par ind.	règles de log. : réc., etc.	X	règles de log. : réc., etc. Dém. Bin. (comment?)	règles de log. : réc., etc. Modes de rais. : dem. Récur. Dém. Bin. (dir.+ récur.)	X

FIGURE 5.7 – Tableau récapitulatif : la démonstration par récurrence dans les programmes belges

Suite aux recherches menées dans les programmes belges, nous pouvons conclure les faits suivants :

- Le programme de l'enseignement catholique ne mentionne à aucun moment la démonstration par récurrence. Nous avons supposé qu'il y faisait sans doute allusion lorsqu'il requiert de savoir démontrer le binôme de Newton (6$^{\text{ème}}$ année à 4h./sem. de mathématiques) mais cela reste une hypothèse étant donné qu'il pourrait également s'agir d'une démonstration directe.
- Le programme de l'enseignement officiel fait, quant à lui, référence à la démonstration par récurrence. Néanmoins, il n'y a pas de chapitre lui consacrant une étude explicite, en tant qu'objet mathématique. Elle semble plutôt vue au cours des chapitres

5. Nous avons dû utiliser, pour réaliser ce tableau, des abréviations. Il convient de le mettre en parallèle avec les observations de l'analyse explicitées précédemment.

puisqu'on la mentionne notamment dans l'introduction et dans la partie concernant les objectifs généraux. Lorsqu'on entre au coeur de chaque chapitre, la démonstration par récurrence n'est pas mentionnée si ce n'est à l'occasion de la démonstration du binôme de Newton dans le cas des 6$^{\text{ème}}$ à 6h./sem. de mathématiques. Elle semble ainsi étudiée "sur le tas", à l'occasion de la présentation d'un nouveau concept.
- Nous ne trouvons pas très clair, pour les professeurs, le cas des élèves de la 6$^{\text{ème}}$ générale à 4h./sem. de mathématiques. En effet, il leur est demandé de considérer la démonstration du binôme de Newton mais le raisonnement à employer n'est pas mentionné. Nous ne savons donc pas s'il s'agit là d'une démonstration par récurrence ou d'une preuve directe.

Nous pouvons donc affirmer les propos suivants. Premièrement, la démonstration par récurrence apparait peu dans les programmes (encore moins dans le cas de l'enseignement libre) et ne constitue jamais un point de matière particulier au sein d'un chapitre. Lorsque elle est mentionnée, elle semble vue soit de manière transversale (mais nous ne savons pas très bien à quel endroit au niveau des chapitres) soit à l'occasion de la démonstration du binôme de Newton. Dans ce dernier cas, elle est donc vue "sur le tas", directement appliquée à une nouvelle notion. Terminons donc pas dire que les programmes ne sont pas toujours très clairs en ce qui concerne la démonstration par récurrence.
Lors de la sous-section suivante, nous verrons si ces propos sont en conformité avec le référentiel des compétences terminales.

5.1.2 Analyse du référentiel des compétences terminales

Selon le décret *Missions*[6], le socle de compétences terminales se définit de la manière suivante :

"*Référentiel présentant de manière structurée les compétences dont la maîtrise à un niveau déterminé est attendue à la fin de l'enseignement secondaire.*"

FIGURE 5.8 – Le socle de compétences terminales, extrait de (Décret Missions, 1997, p. 3)

Ainsi, les compétences des programmes du deuxième et du troisième degrés ont été établies sur base de ce référentiel des compétences terminales. Nous nous attendons donc à ce qu'il y ait concordance avec les programmes analysés antérieurement. Notons enfin que le référentiel des compétences terminales est commun à tous les réseaux, contrairement aux programmes.

Etant donné que la démonstration par récurrence ne semblait pas vraiment figurer dans le programme de l'enseignement technique, nous nous concentrerons uniquement sur les compétences terminales de l'enseignement général et technologique[7] (Compétences terminales gén., 1999).

6. "*Le décret Mission (24 juillet 1997) établit les missions prioritaires qui doivent être réalisées dans l'Enseignement Fondamental et dans l'Enseignement Secondaire. Il organise également les structures propres à les atteindre.*" (Décret Missions, 1997, p. 1).

7. Nous avons tout de même consulté le référentiel des compétences terminales de l'enseignement technique mais celui-ci ne fait aucune allusion à la démonstration par récurrence. Il ne mentionne l'induction que dans l'introduction (Compétences terminales tech., 2000, p. 8) du référentiel ("*Recourir à différents types de raisonnement ou de démarche : analogique, inductif, déductif, etc.*"). Il y a donc concordance avec les programmes de l'enseignement technique.

Afin de mener à bien notre objectif, nous commencerons par présenter brièvement la structure particulière du référentiel. Ensuite, nous effectuerons une recherche semblable à celle effectuée pour les programmes. Cela nous permettra non seulement de voir la position qu'occupe la démonstration par récurrence au sein du référentiel mais aussi de confirmer ou non la concordance entre les propos du celui-ci et ceux des programmes.

Organisation du référentiel

Avant d'aborder notre recherche dans le référentiel des compétences terminales, il nous semblait important de préciser quelques informations en ce qui concerne sa structure.

Le référentiel décrit deux types de compétences : d'une part les compétences transversales et, d'autre part, les compétences terminales. Le décret *Missions* définit très clairement ce qu'il entend par *compétences transversales* :

> "*Attitudes, démarches mentales et démarches méthodologiques communes aux différentes disciplines à acquérir et à mettre en oeuvre au cours de l'élaboration des différents savoirs et savoir-faire ; leur maîtrise vise à une autonomie croissante d'apprentissage des élèves.*"

FIGURE 5.9 – Les compétences transversales, extrait de (Décret Missions, 1997, p. 4)

Les compétences transversales sont donc celles à faire acquérir aux élèves durant tout le cursus scolaire, à travers les différents cours et les différents chapitres.
En ce qui concerne les compétences terminales, le référentiel les distingue en fonction du nombre d'heures de mathématiques par semaine choisi par les élèves :

> – ***Les mathématiques de base*** *: pour l'élève qui, outre le bénéfice apporté par cette forme de pensée, utilisera des mathématiques dans sa vie "de citoyen".*
> Il s'agit donc des élèves ayant deux heures de mathématiques par semaine.
>
> – ***Les mathématiques générales*** *: pour l'élève qui, de plus, utilisera des mathématiques actives dans l'un ou l'autre domaine.*
> Il s'agit donc des élèves ayant quatre heures de mathématiques par semaine.
>
> – ***Les mathématiques pour scientifiques*** *: pour l'élève qui oriente sa formation vers les sciences, la technologie, la recherche, domaines dans lesquels les mathématiques jouent un rôle essentiel.*
> Il s'agit donc des élèves ayant six heures de mathématiques par semaine.

FIGURE 5.10 – Présentation des trois profils d'élèves selon le nombre d'heures de mathématiques par semaine, extrait de (Compétences terminales gén., 1999, p. 3)

Le référentiel répartit les compétences en trois colonnes distinctes selon les profils des élèves que nous venons d'expliciter : de gauche à droite, il s'agit des mathématiques de base, des mathématiques générales et, enfin, des mathématiques pour scientifiques. Le référentiel indique également que les compétences d'une colonne incluent celle(s) de la (des) colonne(s) de gauche.

Analyse du référentiel et comparaison avec celle effectuée dans les programmes

Analysons à présent ce qu'il en est de la démonstration par récurrence au sein du référentiel des compétences terminales et voyons s'il y a concordance avec les programmes. Nous effectuerons cette analyse exactement de la même manière que précédemment c'est-à-dire en recherchant les mots-clés suivants : récurrence, raisonnement, induction, inductif, binôme. Voici nos différentes observations :

- L'extrait suivant est issu de la compétence *Savoir, connaitre, définir* du premier chapitre du référentiel intitulé *Etude des fonctions.* [8]

1.Savoir, connaitre, définir :			
	Mathématiques de base	**Mathématiques générales**	**Mathématiques pour scientifiques**
Les expressions relatives aux suites de nombres, aux limites d'une suite,...	C signification au travers de tableaux de nombres et de graphiques	C + définitions et notion de récurrence	C + le principe de la démonstration par récurrence

FIGURE 5.11 – Extrait de (Compétences terminales gén., 1999, p. 6)

Premièrement, il convient de remarquer que cet extrait traite du *principe de la démonstration par récurrence* c'est-à-dire, de la manière dont nous l'entendons, du fonctionnement de la démonstration par récurrence. Ainsi, nous sommes bel et bien dans un cas où la *démonstration par récurrence* est prise en compte (celle-ci étant bien évidemment indissociable de son principe même). Ensuite, nous observons dans cet extrait que la démonstration par récurrence doit être enseignée uniquement dans le cas des élèves en option mathématiques fortes (6h./sem. de mathématiques). Enfin, nous pouvons constater que le principe de démonstration par récurrence doit être appris dans le cadre de l'enseignement des "*expressions relatives aux suites de nombres, aux limites d'une suite,...*", ce qui ne concorde pas avec les programmes puisque ceux-ci ne le font intervenir que lors de la démonstration du binôme de Newton.

- L'extrait suivant est issu de la compétence *démontrer* du troisième chapitre du référentiel intitulé *Géométrie et trigonométrie.*

Maitriser quelques démarches logiques qui régissent les démonstrations : - donner la négation, une réciproque d'un énoncé,		C pour des propositions formulées au cours	C
- établir un raisonnement par l'absurde (contraposition), par disjonction des cas,			C
- distinguer méthodes inductives et raisonnement déductif.			C

FIGURE 5.12 – Extrait de (Compétences terminales gén., 1999, p. 14)

8. Remarquons que le C qui se trouve à plusieurs reprises dans les différentes colonnes signifie *à certifier*.

Puisque cet extrait nous met dans le cadre de la maitrise en **mathématiques** de "*quelques démarches logiques qui régissent les* ***démonstrations***", nous entendons par les termes "*distinguer méthodes inductives et raisonnement déductif*", le fait de distinguer *le principe de démonstration par récurrence* et les *raisonnements déductifs logiques.* Premièrement, remarquons qu'il n'est question de cela que pour les élèves qui suivent 6h./sem. de mathématiques (ou du moins, cela ne doit être certifiée que dans ce cas). Notons également qu'il s'agit ici d'un extrait issu du chapitre de *Géométrie et trigonométrie.* Il n'était pas du tout question de ce contexte pour mentionner la démonstration par récurrence dans les programmes. Enfin, il nous semble que distinguer *raisonnement déductif* et *principe de démonstration par récurrence* n'est pas cohérent puisque nous savons que ce dernier est constitué de déductions logiques.
Il est possible également que le programme entende par *méthodes inductives* le fait d'établir une généralité sur base de cas particuliers c'est-à-dire d'inductions incomplètes. Dans ce cas, nous ne trouvons pas adéquat de citer ces termes dans un contexte de *démarches qui régissent les démonstrations* puisque nous savons bien qu'en mathématiques, l'induction incomplète n'est pas considérée comme un raisonnement valide pour démontrer des propositions.
Enfin, il est possible que par *méthodes inductives*, le programme entende non seulement *induction incomplète* mais aussi *principe de démonstration par récurrence* ou, autrement dit, les deux situations que nous avons citées précédemment. Si c'est le cas, l'ensemble des propos que nous avons tenus peuvent être regroupés.

Pour conclure cette comparaison à propos de l'analyse des programmes, nous dirons que, contrairement à toute attente, les programmes ne semblent pas à cent pour cent en concordance avec le référentiel des compétences terminales. En effet, bien qu'ils semblent tous deux citer de manière explicite la démonstration par récurrence uniquement dans le cas des élèves des $6^{\text{ème}}$ à 6h./sem. de mathématiques, la matière dans laquelle elle doit être vue ne semble pas coïncider. Le référentiel préconise de voir la démonstration par récurrence dans le contexte des suites, de la géométrie et de la trigonométrie alors que les programmes préconisent plutôt de la considérer transversalement ou à l'occasion du chapitre d'analyse combinatoire.

5.1.3 Analyse du programme français

Nous avons voulu, au cours de cette sous-section, analyser les programmes français et cela pour deux raisons. Premièrement, nous désirons établir une brève comparaison avec l'analyse des programmes belges effectuée ci-dessus. Deuxièmement, nous souhaitons approfondir notre vision du cas français pour comprendre davantage les raisons qui ont incité Grenier à mener une enquête didactique à ce sujet. Pour ce faire, nous établirons en premier lieu une rapide comparaison entre les systèmes éducatifs belge et français à propos du niveau d'enseignement concerné. Cela nous aidera à comprendre les années d'études ciblées plus particulièrement pour réaliser cette analyse. En effet, les dénominations de celles-ci en France ne sont pas identiques aux nôtres. Dans un deuxième temps, nous effectuerons une recherche sur base de mots-clés ainsi que nous l'avons fait précédemment. Enfin, nous établirons une comparaison avec les programmes belges.

Comparaison des systèmes éducatifs belge et français

Afin d'illustrer nos propos, considérons le tableau comparatif suivant :

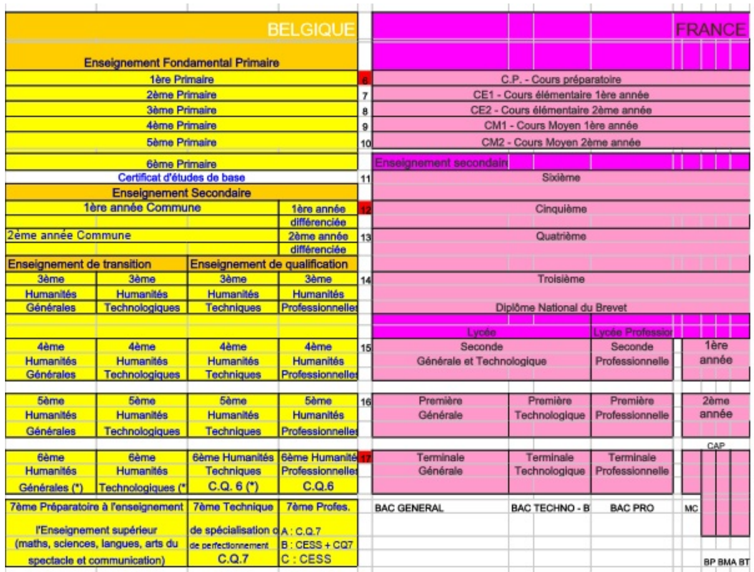


FIGURE 5.13 – Comparaison des systèmes éducatifs belge et français, image tirée de (Site du Cefa, 2010)

En France, l'enseignement primaire comprend cinq années alors que chez nous, il s'étend sur six ans. Ainsi, l'enseignement secondaire commence un an plus tôt qu'en Belgique et comporte sept années réparties de la manière suivante : quatre années de collège pour commencer, suivies de trois années de lycée. Ces dernières se répartissent comme suit : la seconde correspond à notre quatrième année secondaire, la première à notre cinquième et la terminale à notre rhétorique. Ces deux dernières années constituent le cycle terminal au cours duquel les élèves doivent choisir leur option principale. Celles-ci sont suivies d'une épreuve appelée le baccalauréat.
Nous avons décidé d'analyser certains programmes de l'enseignement général au niveau du lycée. Il s'agit plus précisément des programmes de seconde (Prog. Seconde, 2009) ainsi que des programmes du cycle terminal à orientation scientifique (Prog. Première S, 2012) et (Prog. Terminale S, 2011).

Recherche au sein des programmes français

- Dans le programme de seconde, nous n'avons rien trouvé en ce qui concerne la démonstration par récurrence.
- A propos du programme de première, la récurrence n'est citée que dans le cas des suites.
- Par contre, nous trouvons quelques extraits liés à la démonstration par récurrence dans le programme de terminale scientifique (ce qui, nous le rappelons, correspond à nos élèves de 6$^{\text{ème}}$ qui ont 6h./sem. de mathématiques).

Pour commencer, considérons l'extrait suivant touchant au chapitre *Analyse*.

Contenus	Capacités attendues	Commentaires
Suites		
Raisonnement par récurrence.	• Savoir mener un raisonnement par récurrence.	Ce type de raisonnement intervient tout au long de l'année et pas seulement dans le cadre de l'étude des suites.

FIGURE 5.14 – Extrait de (Prog. Terminale S, 2011, p. 3)

Par raisonnement par récurrence, nous entendons non seulement la construction d'objets (tels que la construction de suites) mais également le principe de démonstration par récurrence. Le programme indique qu'il s'agit de le traiter durant toute l'année et ce aussi pour d'autres sujets que les suites. S'agit-il alors plutôt d'une compétence que nous appelons chez nous transversale ? Allons-nous retrouver le raisonnement par récurrence dans d'autres matières ?

Toujours dans le chapitre *Analyse*, nous trouvons l'extrait suivant :

Contenus	Capacités attendues	Commentaires
Opérations sur les limites.	• Étudier la limite d'une somme, d'un produit ou d'un quotient de deux suites.	
Comportement à l'infini de la suite (q^n), q étant un nombre réel.	■ Démontrer que la suite (q^n), avec $q > 1$, a pour limite $+\infty$.	On démontre par récurrence que pour a réel strictement positif et tout entier naturel n : $(1+a)^n \geq 1+na$.

FIGURE 5.15 – Extrait de (Prog. Terminale S, 2011, p. 4)

Nous voyons donc que la démonstration par récurrence est bel et bien citée au sein des matières à voir avec les élèves. Plus précisément, il s'agit ici de démontrer, via l'inégalité de Bernouilli, la convergence des suites géométriques lorsque la raison est supérieure à 1. Insistons cette fois sur la présence du petit carré noir (dans la deuxième colonne) symbolisant le fait qu'il s'agit "*d'une démonstration ayant valeur de modèle*" (Prog. Terminale S, 2011, p. 2). Cela attire tout particulièrement notre attention puisque nous comprenons ainsi que la démonstration par récurrence est abordée en quelque sorte "sur le tas", c'est-à-dire directement appliquée à un nouveau théorème à démontrer. Ainsi, elle ne constitue pas un objet mathématique à part entière à étudier en tant que tel. Cela se confirmera davantage dans les propos tenus ci-dessous.

Concentrons-nous à présent sur le point *Notation et raisonnement mathématiques*, celui-ci étant tout à fait extérieur aux différents chapitres descriptifs de matière (Prog. Terminale S, 2011, p. 17). Il s'agit d'une "*rubrique, consacrée à l'apprentissage des notations mathématiques et à la logique,* [qui] *ne doit pas faire l'objet de séances de cours spécifiques, mais doit être répartie sur toute l'année scolaire.*" Suite à la description de cette rubrique, nous pouvons directement lire :

"*En complément des objectifs rappelés ci-dessous, le travail sur la notion d'équivalence doit naturellement être poursuivi (propriété caractéristique, raisonnement par équivalence) et l'on introduit le raisonnement par récurrence.*"

FIGURE 5.16 – Extrait de (Prog. Terminale S, 2011, p. 17)

Vient ensuite ce à quoi les élèves doivent être entrainés, notamment la reconnaissance et l'utilisation de "*types de raisonnements spécifiques*", ceux-ci étant le raisonnement par disjonction des cas, le recours à la contraposée et le raisonnement par l'absurde. Nous pourrions donc nous demander la raison pour laquelle le raisonnement par récurrence est totalement séparé de ces derniers. De plus, pourquoi utiliser le verbe *introduire* en ce qui concerne le cas du raisonnement par récurrence et *reconnaitre, utiliser*, pour les autres ? Serait-il considéré à part, plus complexe ?

Comparaison des programmes belges et français

Afin d'établir une comparaison entre les programmes belges et les programmes français, considérons le tableau récapitulatif suivant et mettons le en parallèle avec celui concernant le cas belge (figure **??**). Bien entendu, il convient de reprendre également les commentaires associés aux deux tableaux afin de comprendre le sens de leur contenu.

Seconde	Première S	Terminale S
X	X	Mener un raisonnement par réc. Démontrer suite géométrique Introduction raisonnement

FIGURE 5.17 – Tableau récapitulatif : la démonstration par récurrence dans les programmes français

On peut émettre les constats suivants :

- Tout comme en Belgique, la démonstration par récurrence n'apparait de manière explicite dans le programme que pour les élèves de terminale scientifique (6$^{\text{ème}}$ secondaire à 6h./sem. de mathématiques chez nous).
- Il semblerait que le binôme de Newton ne soit pas au programme en France et que la démonstration par récurrence soit plutôt vue dans le cadre des suites géométriques.
- Tout comme en Belgique, aucun chapitre n'accorde un point de théorie explicite à la démonstration par récurrence. Elle semble directement appliquée à un nouveau théorème.
- Comme nous l'avons remarqué également en Belgique, on oberve une certaine transversalité de la démonstration par récurrence à travers les cours. D'ailleurs, c'est explicité clairement dans le point intitulé *Notation et raisonnement mathématiques* où il est indiqué qu'il s'agit d'un des sujets que l'on doit traiter tout au long de l'année, ne constituant pas un objet spécifique de cours.

Ainsi, il nous semble que la situation en France est plus ou moins semblable à celle de la Belgique et ce bien que la démonstration par récurrence ne soit pas abordée au travers du même sujet (les suites géométriques pour la France et le binôme de Newton pour la Belgique). Quoi qu'il en soit, le raisonnement par récurrence et, plus particulièrement, la démonstration par récurrence, semblent être vus, en France, de manière transversale, à travers d'autres outils mathématiques. Dès lors, nous comprenons davantage que ce fait ait influencé Grenier à investiguer auprès d'étudiants et d'enseignants sur le sujet.

5.1.4 Conclusion

Lors de cette première section, nous avons analysé les programmes belges et français afin de nous rendre compte de la place accordée à la démonstration par récurrence dans l'enseignement. Nous avons vu, qu'il s'agisse de la France ou de la Belgique, qu'elle semble être enseignée soit de manière transversale, soit directement appliquée à un nouveau sujet. La place réservée à la démonstration par récurrence est donc très mince par rapport à l'ensemble des matières abordées dans l'enseignement.
Ces recherches effectuées au sein des programmes constituent une première étape dans l'analyse du savoir à enseigner. La prochaine section consistera à commenter de manière critique quelques extraits de manuels.

5.2 Analyse de manuels belges

L'analyse des manuels que nous avons sélectionnés aura toujours la même structure. Premièrement, il s'agira de décrire le manuel ainsi que le cadre du cours auquel il est associé (lorsque nous le connaissons, bien entendu). Ensuite, nous expliquerons dans quel contexte est enseignée la démonstration par récurrence au sein du manuel. Par contexte, nous entendons la place qu'elle occupe parmi les différents chapitres et points de théorie. Enfin, nous commenterons de manière critique la manière dont elle est présentée et nous récapitulerons cela sous forme d'un tableau.

Pour réaliser cette analyse, nous considérerons non seulement des manuels destinés à des élèves du secondaire mais aussi des manuels consacrés à des étudiants universitaires ou des hautes écoles de branches scientifiques. Notons que, en ce qui concerne le secondaire, nous avons choisi d'analyser uniquement des manuels du 3$^{\text{ème}}$ degré de l'enseignement général. Ce choix s'explique par les constats tirés de l'analyse des programmes scolaires effectuée dans la section précédente.

Nous commencerons par analyser deux manuels du secondaire. Ceux-ci sont couramment utilisés par les enseignants. Il s'agit de l'*Actimath 6* (Defeld *et al.*, 2009), destiné aux élèves de 6$^{\text{ème}}$ (4h./sem. de mathématiques) et de l'*Espace math 6* (Adam et Lousberg, 2004), réalisé pour les élèves de 6$^{\text{ème}}$ (6h./sem. de mathématiques). Ensuite, nous analyserons trois manuels de l'enseignement supérieur. Les deux premiers manuels *Initiation à la démarche mathématique* (Thiry, 2007) et *Algèbre (1$^{\text{ère}}$ partie)* (Sartenaer, 2013) sont des polycopiés de cours donnés à l'Université de Namur (en 1$^{\text{ère}}$ bac mathématiques pour le premier et en 1$^{\text{ère}}$ bac informatique pour le deuxième). En ce qui concerne le troisième manuel *Exercices de mathématiques pour le premier cycle* (Dupont, 2003), il s'agit d'un livre d'exercices belge proposé pour accompagner les étudiants universitaires ou non pour qui les mathématiques interviennent assez bien dans le cursus. Le troisième manuel est donc en vente libre, contrairement aux deux premiers.

5.2.1 Manuel *Actimath 6*

L'Actimath 6 (Defeld *et al.*, 2009) que nous avons analysé ici est un manuel destiné aux élèves de 6$^{\text{ème}}$ suivant des cours de mathématiques de la section générale à raison de 4 heures par semaine. Le manuel est scindé en deux volumes et c'est sur le premier que nous nous concentrerons, celui-ci comprenant les chapitres suivants : *Géométrie analytique*, *Analyse combinatoire*, *Probabilités* et *Statistiques*.

Organisation de la matière relative à la démonstration par récurrence

Le chapitre qui nous intéresse plus particulièrement est celui intitulé *Analyse combinatoire* et, plus précisément, le 8$^{\text{ème}}$ point de celui-ci *Le binôme de Newton*. Un quart de page est consacré au principe de démonstration par récurrence alors que l'ouvrage (uniquement le premier volume) fait 257 pages. Ainsi, le principe de récurrence occupe très peu de place au sein de ce manuel. Le point *Le binôme de Newton* s'articule de la manière suivante :

1. la première partie amène, de manière intuitive, vers la formule du binôme de Newton. Cette partie met en fait en parallèle la décomposition de $(a+b)^n$ avec le triangle de Pascal. Cela permet de repérer directement que les coefficients des termes du développement de $(a+b)^n$ sont ceux de la $n^{\text{ème}}$ ligne du triangle de Pascal. Ainsi, la formule à démontrer est donnée et a été obtenue de manière intuitive, sur base d'observations de cas particuliers (n=0, 1, 2, 3, 4, 5). Cette partie consiste donc à pratiquer une induction incomplète.

2. la deuxième partie est consacrée à la présentation du principe de démonstration par récurrence. Nous étudierons plus en détail cette présentation dans notre analyse critique.

3. la troisième partie consiste à démontrer le binôme de Newton. Bien entendu, cette démonstration est conforme au principe de récurrence tel qu'il est présenté dans le manuel. C'est la raison pour laquelle nous ne commenterons pas cette démonstration dans notre analyse critique.

4. la dernière partie du point *Le binôme de Newton* est consacrée à une série d'exemples (binôme de Newton où l'exposant est 6, etc.). De plus, quelques remarques sont établies, toujours concernant le binôme de Newton.

Analyse critique de la présentation de la démonstration par récurrence dans *Actimath 6*

La deuxième partie du point *Le binôme de Newton* consiste à présenter le principe de récurrence de manière formalisée. Reprenons cet extrait à la figure **??**.

> **Pour prouver cette formule, nous pouvons utiliser le raisonnement par récurrence**.
> Voici comment il fonctionne :
> Soit une formule P_n qui dépend du nombre entier n.
> Pour démontrer par ***récurrence*** que P_n est vraie pour tout entier $n \geqslant a$ (a est un entier naturel),
>
> 1. on vérifie que P est vraie pour $n = a$,
> 2. on admet que P est vraie au rang $n = p$ (hypothèse de récurrence), on démontre que P reste vraie pour $n = p + 1$;
> 3. on conclut car, si P est vraie pour $n = a$,
>   elle l'est aussi pour $n = a + 1$,
>   donc aussi pour $n = (a + 1) + 1$, c'est à dire pour $n = a + 2$, ...
>   Elle est donc vraie pour tout $n \geqslant a$.

FIGURE 5.18 – Présentation du principe de récurrence, extrait de (Defeld *et al.*, 2009, p. 146)

En ce qui concerne cet extrait, nous avons quelques remarques à formuler :

- il est bien spécifié que le principe de récurrence ne s'applique que sur des entiers naturels.
- le cas où le pas initial est supérieur à 0 est pris en compte.
- les propositions à démontrer sont écrites sous forme de suites.
- le principe n'est présenté que pour des propositions de types 1 ou 2 (voir figure **??**).
- le fait d'utiliser la variable n pour l'amorce, l'hérédité et la proposition initiale n'a pas vraiment d'utilité et pourrait même amener à confondre les différents pas.
- la variable p utilisée sort un peu de nulle part. Or, nous savons qu'il s'agit d'un p quelconque supérieur ou égal au pas d'hérédité.
- l'implication n'est pas du tout mentionnée. En effet, on travaille ici directement avec l'hypothèse de récurrence (division de l'hérédité en deux).
- la numérotation sous-entend que la démonstration de l'amorce est à réaliser avant celle de l'hérédité.
- le principe est écrit sous forme de 3 étapes. La conclusion en fait partie. Or, nous savons que c'est à partir de la combinaison des deux premières que l'on peut déduire la proposition initiale. Il nous semble ainsi peu approprié de mettre la conclusion en troisième étape.

S'ensuit la démonstration du binôme de Newton. Celle-ci étant conforme à la formalisation du principe ci-dessus, nous ne nous y attarderons pas. Néanmoins, remarquons tout de même pour cette démonstration le fait suivant : le pas d'amorce et d'hérédité est pris comme étant égal à 0. Ainsi, l'amorce consiste à vérifier l'égalité suivante $(a + b)^0 = 1$. Le fait d'égaler à

1 un nombre exposé à 0 est une convention. Il n'est donc pas correct de prendre 0 pour pas d'amorce et pour pas d'hérédité. Nous avons illustré cela dans la démonstration du binôme de Newton effectuée à la figure **??**.

Conclusion

En guise de conclusion, considérons le tableau récapitulatif suivant reprenant les points principaux sur lesquels nous avons insisté dans les premiers chapitres. Une croix est indiquée lorsque le critère repris dans le titre de la colonne est atteint par le manuel analysé.

Point théorique	Ensemble $\mathbb{N}$	Type	Ordre	$n_a \neq n_h$	$\forall$	$\Rightarrow$	$\forall(\Rightarrow)$	variables distinctes
X	X	1,2	**X**					

FIGURE 5.19 – Tableau récapitulatif de l'analyse du manuel *Actimath 6*

Les titres des colonnes n'étant pas des plus explicites, voici quelques explications :

- ▷ <u>*Point théorique*</u> : le manuel consacre un point de théorie au principe de démonstration par récurrence. Cela signifie que le principe n'est pas directement appliqué à une proposition à démontrer. La croix sera en caractère gras lorsqu'il s'agira d'un rappel.
- ▷ <u>*Ensemble $\mathbb{N}$*</u> : le manuel précise le fait que le principe de démonstration par récurrence ne s'applique qu'à $\mathbb{N}$ ou un sous-ensemble de celui-ci.
- ▷ <u>*Type*</u> : cette colonne concerne le(s) type(s) de *situation(s)* que le manuel propose. Nous avons défini ces *types de situations* à la figure **??**. Les informations de cette colonne sont très riches car elles nous permettent de savoir si le manuel traite le cas où :
  - la proposition initiale est donnée (types 1 et 2).
  - la proposition initiale est donnée et le pas initial est supérieur à 0 (type 2)
  - le pas initial est à déterminer (type 3)
  - le pas initial et le prédicat sont à déterminer (type 4)
  - la proposition doit être démontrée par le principe de Fermat (type 5)
- ▷ <u>*Ordre*</u> : le manuel présente l'amorce avant l'hérédité. La croix est en caractère gras lorsque le manuel impose cet ordre. Insistons sur le fait que cette colonne est à considérer différemment des autres puisqu'il s'agit ici de reconnaitre un "défaut" et non pas une "qualité", contrairement aux critères des autres colonnes.
- ▷ $\underline{n_a \neq n_h}$: le manuel explicite le fait que les pas d'amorce et d'hérédité peuvent être différents. Ce critère est bien entendu lié à celui intitulé "Type".
- ▷ $\underline{\forall}$: le symbole universel apparait dans l'hérédité de la présentation du principe.

▷ $\underline{\Rightarrow}$: le manuel explicite le fait qu'il s'agit bien d'une implication à démontrer en ce qui concerne l'hérédité. Notons que pour ce critère, nous serons assez tolérante. En effet, nous accepterons les écritures de l'implication suivantes :

– $[P \Rightarrow Q]$ est vraie,
– [Si P alors Q] est vraie,
– Si P est vraie alors Q est vraie.

Notons qu'en ce qui concerne la dernière formulation, il est important de garder à l'esprit qu'elle est distincte des deux premières (voir section **??**).

▷ $\underline{\forall(\Rightarrow)}$: le symbole universel porte bien sur l'ensemble de l'implication, c'est-à-dire pas seulement sur la première partie la constituant.

▷ *Variables distinctes* : le manuel utilise des variables distinctes pour la proposition initiale, l'amorce et l'hérédité.

FIGURE 5.20 – Explication des titres des colonnes du tableau récapitulatif de l'analyse des manuels

5.2.2 Manuel *Espace Math 6*

Le manuel *Espace Math 6* (Adam et Lousberg, 2004) est destiné aux élèves de 6$^{\text{ème}}$ année de l'enseignement général qui ont 6 heures de mathématiques par semaine. Cet ouvrage est divisé en deux tomes et c'est sur le deuxième que nous porterons notre attention. Plus précisément, nous nous concentrerons sur le point *Binôme de Newton* du chapitre intitulé *Combinatoire.*

Organisation de la matière relative à la démonstration par récurrence

Le point *Binôme de Newton* qui nous intéresse plus particulièrement s'organise de la manière suivante :

1. une première partie est consacrée à établir la formule du *binôme de Newton* sur base d'observations de cas particuliers (induction incomplète). Nous développerons cette première partie dans notre analyse critique.

2. une deuxième partie est consacrée à la démonstration du binôme de Newton. Ainsi, le principe de démonstration par récurrence est directement appliqué pour prouver un nouveau théorème. Notons qu'aucun point de théorie n'a été consacré dans le manuel à l'explication du principe de récurrence. Il est donc vu "sur le tas".

3. la dernière partie propose deux exemples de binôme à exposant fixé.

Nous allons, dans l'analyse critique, considérer les deux premières parties du point *Binôme de Newton.*

Analyse critique de la présentation de la démonstration par récurrence dans *Espace Math 6*

Comme nous l'avons dit précédemment, la première partie du point *Binôme de Newton* permet, sur base de l'observation de cas particuliers, de déterminer la formule du binôme. Reprenons telle quelle cette première partie (Adam et Lousberg, 2004, p. 228) :

On peut observer qu'en développant $(x+y)^2$, $(x+y)^3$, $(x+y)^4$, on obtient un **polynôme** dont
– tous les termes sont (respectivement) de degré 2, 3 ou 4 par rapport à x ou y ;
– les puissances de x sont données de manière décroissante ;
– les puissances de y sont ordonnées de manière croissante.
En généralisant, on obtient la **formule de Newton** dont le terme général est $C_n^k x^{n-k} y^k$.

FIGURE 5.21 – Généralisation de cas particuliers (binôme de Newton), extrait de (Adam et Lousberg, 2004)

Suite à cet extrait, nous nous posons la question suivante : pourquoi ne pas considérer également le cas particulier $(x+y)^1$?

La deuxième partie de ce point consiste à démontrer le binôme de Newton. Remarquons que, en ce qui concerne la démonstration de l'hérédité, nous ne reprendrons pas ici l'ensemble du développement mathématique. En effet, celui-ci a déjà été effectué à la figure **??**. Ce qui nous intéresse ici est le corps de la démonstration, la manière dont elle est présentée. Nous la reprenons dans la figure **??** ci-dessous :

$$\begin{aligned}(x+y)^n &= C_n^0 x^n + C_n^1 x^{n-1} y + C_n^2 x^{n-2} y^2 + ... + C_n^k x^{n-k} y^k + ... + C_n^{n-1} x y^{n-1} + C_n^n y^n \\ &= \sum_{k=0}^{n} C_n^k x^{n-k} y^k\end{aligned}$$

On peut la démontrer par récurrence sur l'entier n

Démonstration :
• Si $n = 1$, la proposition est vraie.
En effet, $(x+y)^1 = x + y = C_1^0 x + C_1^1 y$.

• Si la proposition est vraie pour $n = k$,
alors elle est vraie pour $n = k + 1$.
En effet [...].
La proposition est donc vraie pour $n = k + 1$.

FIGURE 5.22 – Démonstration du binôme de Newton, extrait de (Adam et Lousberg, 2004)

Voici à présent les observations tirées de cet extrait :

- le principe de récurrence étant appliqué directement à la démonstration du binôme de Newton, seule la situation de type 2 est abordée dans ce manuel.
- le corps du principe de récurrence est divisé en deux étapes distinctes.
- il y a une absence totale du quantificateur universel dans la proposition initiale. Il conviendrait, en réalité, d'ajouter "$\forall n \in \mathbb{N}$".
- la première partie du point *Binôme de Newton* ne considérait pas le cas particulier de $(x+y)^1$, comme nous l'avons mentionné ci-dessus. Pourtant, le pas d'amorce est bien fixé à 1 dans la démonstration.
- la variable k utilisée dans l'hérédité semble sortir de nulle part. De plus, aucun pas d'hérédité n'est mentionné.
- l'implication de l'hérédité est tout à fait visible ("*Si... alors...*").
- la variable n est utilisée non seulement pour la proposition initiale mais aussi pour l'hérédité. Cela peut prêter à confusion.
- la variable k est utilisée dans la proposition initiale et dans l'hérédité. Bien entendu, le k de la proposition initiale est lié au symbole somme et est donc tout à fait différent de celui utilisé dans l'hérédité. Nous pensons que cette façon de procéder est, d'un point de vue didactique, peu efficace et pourrait même mener à une confusion.
- aucune conclusion n'est établie. Nous pensons pourtant qu'elle est indispensable pour pouvoir rendre compte du fait que c'est grâce à l'amorce et à l'hérédité qu'il est possible d'établir la proposition initiale.
- la proposition initiale, bien que cela ne soit pas mentionné de façon explicite, porte sur l'ensemble des naturels. Pourtant, le cas où $n = 0$ (c'est-à-dire celui où la convention $(x+y)^0 = 1$ est utilisée) n'est pas vérifié dans la démonstration.

Conclusion

En guise de conclusion pour l'analyse de ce manuel, considérons le tableau récapitulatif suivant [9] :

Point théorique	Ensemble $\mathbb{N}$	Type	Ordre	$n_a \neq n_h$	$\forall$	$\Rightarrow$	$\forall(\Rightarrow)$	variables distinctes
		2	X			X		

FIGURE 5.23 – Tableau récapitulatif de l'analyse du manuel *Espace math 6*

Nous voyons que la présentation du principe de récurrence proposée dans ce manuel comporte beaucoup de lacunes. Cela nous désole un peu, d'autant plus que le principe de récurrence est directement appliqué sur un nouveau théorème à démontrer. En effet, nous avons vu qu'il n'existait aucun point théorique explicite du principe de récurrence dans ce manuel.

9. Pour des explications concernant les titres des colonnes de ce tableau, voir figure **??**.

5.2.3 Conclusion de l'analyse des manuels de l'enseignement secondaire

Afin d'éclairer nos propos, reprenons les deux tableaux récapitulatifs des manuels *Actimath 6* et *Espace math 6* :

Manuel	Point théorique	Ensemble $\mathbb{N}$	Type	Ordre	$n_a \neq n_h$	$\forall$	$\Rightarrow$	$\forall(\Rightarrow)$	variables distinctes
Actimath 6	X	X	1,2	**X**					
Espace math 6			2	X			X		

FIGURE 5.24 – Tableau récapitulatif de l'analyse des manuels du niveau secondaire

Précisons, avant de présenter nos différents constats, que nous sommes consciente du fait que nous n'avons analysé ici que deux ouvrages. Ainsi, nous ne pouvons généraliser nos observations à l'ensemble des manuels belges de niveau secondaire. Néanmoins, cela nous permet d'avoir une première idée sur le sujet. Voyons à présent les conclusions que nous pouvons tirer de cette analyse :

- ces deux manuels mentionnent le principe de récurrence à l'occasion de la démonstration du binôme de Newton (cela concorde avec l'analyse des programmes). Notons que dans les pages précédentes, le principe n'avait pas encore été mentionné une seule fois.
- un des deux manuels analysés a appliqué directement le principe de récurrence à la démonstration d'un nouveau théorème, sans accorder un point de théorie à son sujet.
- les propositions initiales sont données à démontrer.
- les démonstrations de l'amorce et de l'hérédité sont toujours mentionnées dans cet ordre. Un des deux manuels nous impose d'ailleurs celui-ci par le biais d'une numérotation.
- il y a une omission totale du quantificateur universel de l'hérédité en ce qui concerne les deux manuels.
- l'implication de l'hérédité n'est mentionnée que dans le deuxième manuel analysé.
- pour les deux manuels, une même variable est utilisée dans la proposition initiale, l'hérédité et l'amorce.

Nous pouvons donc conclure, d'après l'analyse de ces deux manuels, que très peu de place y est accordée à la démonstration par récurrence. En effet, nous avons vu pour le premier manuel que la présentation du principe ne prend qu'une demi-page. En ce qui concerne le deuxième manuel, aucune explication n'est donnée à son sujet. Le principe est appliqué directement à la démonstration du binôme de Newton.
De plus, la façon dont elle est abordée ne nous semble pas assez claire pour en comprendre le fonctionnement. En effet, l'utilité des démonstrations de l'amorce et de l'hérédité ne nous parait pas du tout visible à travers ces extraits.
Ainsi, nous trouvons qu'un manque de rigueur est assez flagrant et que cette manière de présenter les choses ne peut qu'engendrer des automatismes non compris chez les élèves. Notons également que ce manque de rigueur peut amener ces derniers à construire leur propre conception de la preuve par récurrence, basée sur ce qu'ils pensent être correct mais qui ne l'est finalement pas forcément.
Voyons à présent ce qu'il en est dans trois manuels destinés à des étudiants de l'enseignement supérieur.

5.2.4 Manuel *Initiation à la démarche mathématique*

Le manuel *Initiation à la démarche mathématique* (Thiry, 2007) est destiné aux étudiants de 1ère bac en sciences mathématiques de l'Université de Namur et est associé au cours oral portant le même nom. Voici les objectifs de ce dernier en termes de compétences :

> *"L'objectif de ce cours est de familiariser l'étudiant entrant en premier baccalauréat avec des aspects de la démarche mathématique comme - la mise en place d'un cadre logique de référence - l'utilisation d'un langage et de formalismes spécifiques - l'élaboration de raisonnements dans un cadre abstrait. Le but est d'aider l'étudiant à entrer rapidement avec fruit dans "l'esprit" des cours d'analyse et d'algèbre."*

FIGURE 5.25 – Objectif du cours d'initiation à la démarche mathématique (Site UNamur (IDM), 2012)

D'après la description du cours ci-dessus, nous nous attendons à ce que la démonstration par récurrence fasse l'objet d'un point spécifique de théorie au sein du syllabus qui lui est associé. Nous verrons par la suite ce qu'il en est.

Organisation de la matière relative à la démonstration par récurrence

Afin de bien visualiser l'organisation de la matière au sein de ce manuel, reprenons les titres de tous les chapitres ainsi que les sous-titres de ceux qui nous intéressent plus particulièrement :

1. Quelques éléments du "langage mathématique"
2. Logique et raisonnement
   (a) Logique des propositions
   (b) Logique des prédicats
3. Les ensembles : notions de base
4. Quelques stratégies de démonstration
   (a) Stratégies générales de démonstration
   (b) Enoncés utilisant la forme $\neg P$
   (c) Démonstration par l'absurde : généralités
   (d) Hypothèse de la forme $P \Rightarrow Q$: règles du "modus ponens" et du "modus tollens"
   (e) Enoncés utilisant des quantificateurs
   (f) Enoncés utilisant des conjonctions ou des équivalences
   (g) Enoncés utilisant des disjonctions
   (h) Démonstration du type "existence et unicité"
5. Démonstrations par récurrence
   (a) Démonstration par récurrence
   (b) Démonstration par récurrence : légère variante
   (c) Récurrence forte
6. La notion de correspondance
7. Quelques éléments de calculus
8. La cardinalité des ensembles

FIGURE 5.26 – Table des matières du manuel *Initiation à la démarche mathématique*

Nous avons repris ici la table des matières car celle-ci mérite que nous nous y attardions. En effet, nous voyons premièrement que le chapitre *Démonstrations par récurrence* se trouve tout à fait en dehors de celui intitulé *Quelques stratégies de démonstration*. Cela attire tout particulièrement notre attention puisque le principe de démonstration par récurrence pourrait être qualifié, lui aussi, de stratégie de démonstration. En fait, le manuel distingue la démonstration par récurrence du chapitre 4 car elle s'applique au cas *particulier* des propositions relatives aux nombres entiers naturels. Cela est bien expliqué dans l'introduction du chapitre *Démonstrations par récurrence* (Thiry, 2007, p. 104).
Deuxièmement, remarquons que les chapitres 2 et 4 respectivement intitulés *Logique et raisonnement* et *Quelques stratégies de démonstrations* mettent tout en place pour aborder le chapitre *Démonstrations par récurrence*. En effet, ceux-ci nous semblent développer tous les outils nécessaires qui interviennent au sein d'une démonstration par récurrence. Afin de bien rendre compte de ce fait, nous allons reprendre ici le contenu de certains sous-points des chapitres 2 et 4.

▷ ***Chapitre 2 : Logique et raisonnement***

a) *La logique des propositions* : on y voit ce qu'est une proposition, la manière dont se construit une table de vérité, les différents connecteurs logiques, en insistant tout particulièrement sur le cas de l'implication (on explicite les différences entre le langage naturel et mathématique), les propriétés des opérateurs logiques, etc.

b) *La logique des prédicats* : on y voit les quantificateurs existentiel et universel, la négation de ceux-ci, les notions de variables libres et liées, différentes propriétés liant les quantificateurs et les connecteurs logiques, etc.

▷ ***Chapitre 4 : Quelques stratégies de démonstration*** :

Remarquons que ce chapitre commence par une introduction illustrant le fait que l'induction incomplète ne peut pas suffire pour établir une démonstration valide d'un résultat. Cela présente en quelque sorte l'objectif du chapitre :

"[...] *aider les étudiants à construire eux-mêmes leurs premières démonstrations.*"

"*Il est nécessaire de recourir à des démonstrations formelles et rigoureuses.*"

FIGURE 5.27 – Extrait de (Thiry, 2007, p. 74)

Le chapitre 4 est constitué des points suivants (nous ne développerons ici ceux qui nous semblent directement liés à la démonstration par récurrence) :

a) *Stratégies générales de démonstration* : on y voit, sous forme de transformation en schéma de démonstration, la manière dont doit être démontrée une proposition dont la conclusion est de la forme $P \Rightarrow Q$. Par *transformation en schéma de démonstration*, nous entendons, dans ce dernier cas, la représentation suivante, reprise à la figure **??**.

Hyptohèse	thèse
H	$P \Rightarrow Q$

$\longrightarrow$

Hyptohèse	thèse
H, P	Q

FIGURE 5.28 – Illustration d'un schéma de démonstration, extrait de (Thiry, 2007, p. 75)

Cette présentation nous permet d'abord de visualiser le schéma général d'une démonstration dont la conclusion est de la forme $P \Rightarrow Q$. Elle nous permet également de prendre conscience, de manière visuelle, du fait que démontrer une implication de la forme $P \Rightarrow Q$ revient à supposer P et à montrer Q. Cela peut s'expliquer par les tables de vérité.

b) *Enoncés utilisant la forme* $\neg P$: on y traite les conclusions écrites sous la forme négative qu'on préconise soit de remettre à l'affirmative, soit de traiter par un raisonnement par l'absurde. Plus tard, on reprendra également le raisonnement par l'absurde mais cette fois dans un cas plus général, c'est-à-dire pas seulement dans celui où l'énoncé est de la forme $\neg P$.

c) *Démonstration par l'aburde : généralités*

d) *Hypothèse de la forme* $P \Rightarrow Q$ *: règle du "modus ponens" et du "modus tollens"* : on y traite, sous forme de transformation en schéma de démonstration les règles d'inférence du *modus ponens* et du *modus tollens*.

e) *Enoncés utilisant des quantificateurs :* On y traite des hypothèses et des conclusions à démontrer sous la forme "$\forall x : P(x)$" ou "$\exists x : P(x)$". On parle également des connecteurs cachés c'est-à-dire des quantificateurs non-explicités dans des propositions mais qui sont bel et bien présents.

f) *Enoncés utilisant des conjonctions ou des équivalences*

g) *Enoncés utilisant des disjonctions*

h) *Démonstration du type "existence et unicité"*

Notons encore que chaque point de théorie est accompagné d'illustrations, ce qui clarifie les concepts étudiés.

Bien que le développement des points de théorie éffectué ci-dessus est assez long, nous pensons qu'il est indispensable à relever. En effet, il nous permet de nous rendre compte que tous les points importants dont il faut tenir compte pour comprendre les finesses du principe de démonstration par récurrence sont repris. Ainsi, les étudiants ont, selon nous, tout à leur disposition avant d'aborder le chapitre *Démonstrations par récurrence*.

Considérons à présent la structure du chapitre qui nous intéresse plus particulièrement.

▷ ***Chapitre 5 : Démonstrations par récurrence*** :

Introduction : en guise d'introduction, on explique la raison pour laquelle ce chapitre est à distinguer des précédents de par l'ensemble *particulier* auquel il s'applique, c'est-à-dire $\mathbb{N}$.

a) *Démonstration par récurrence* : le principe de démonstration par récurrence est expliqué, formalisé et illustré dans le cas où l'ensemble initial est $\mathbb{N}$ tout entier. Nous expliciterons plus en détail ce point de théorie dans l'analyse critique ci-dessous.

b) *Démonstration par récurrence : légère variante* : le principe de récurrence est cette fois expliqué, formalisé et illustré pour le cas général où le pas initial n'est pas forcément égal à 0. Nous présenterons également ce point plus en détail dans notre analyse critique.

c) *Récurrence forte* : ce point concerne le principe de démonstration par récurrence forte que nous avons formalisé à la figure **??**. Nous n'en reparlerons pas davantage ici puisque nous nous concentrons uniquement, dans cette analyse de manuels, sur la démonstration par récurrence simple.

Analyse critique de la présentation de la démonstration par récurrence dans *Initiation à la démarche mathématique*

Nous allons à présent commenter et reprendre en détail la présentation de la démonstration par récurrence proposée dans les points *Démonstration par récurrence* et *Démonstration par récurrence : légère variante* du chapitre.

a) Démonstration par récurrence :

Dans un premier temps, sont expliqués très clairement, au moyen du langage naturel, l'utilité et le fonctionnement du principe de la démonstration par récurrence. Cela permet de bien comprendre qu'il s'agit de démontrer deux propositions qui sont l'amorce et l'hérédité pour en démontrer en fait une infinité (voir sous-section **??**). Ensuite, vient la formalisation du principe que nous reprenons à la figure **??** ci-dessous :

Pour démontrer une conclusion de la forme $\forall n \in \mathbb{N} : P(n)$

On démontre tout d'abord $P(0)$, appelé *pas initial*, et ensuite, on démontre

$$\forall n \in \mathbb{N} : P(n) \Rightarrow P(n+1)\,;$$

appelé *pas de récurrence.*

La forme de la démonstration sera donc la suivante :

- *Pas initial* : démonstration de $P(0)$;
- *Pas de récurrence* : démonstration de : $\forall n \in \mathbb{N} : P(n) \Rightarrow P(n+1)$.

Le schéma de démonstration du pas de récurrence est donc de la forme :

Hyptohèses	Conclusion
/	$\forall n \in \mathbb{N} : P(n) \Rightarrow P(n+1)$

$\longrightarrow$

Hyptohèses	Conclusion
$n \in \mathbb{N}$ $P(n)$ **(1)**	$P(n+1)$

L'hypothèse **(1)** est appelée ***hypothèse de récurrence***.

FIGURE 5.29 – Démonstration d'une proposition de la forme "$\forall n \in \mathbb{N} : P(n)$", extrait de (Thiry, 2007, p. 105)

Cet extrait nous semble une bonne présentation du principe de démonstration par récurrence. En effet, en ce qui concerne l'implication à démontrer dans l'hérédité (qui est appelée ici *pas de récurrence*), elle est exprimée de manière explicite. De plus, le schéma proposé nous permet de bien visualiser que le fait de supposer $P(n)$ est dû à l'implication à démontrer. Le quantificateur porte bien sur l'ensemble de l'implication et cela est accentué également grâce au schéma.

Néanmoins, nous avons deux remarques à formuler :

- Premièrement, le principe est divisé en deux étapes : l'amorce et l'hérédité. Il est indiqué que la démonstration de l'amorce est à réaliser avant celle de l'hérédité. Cela est exprimé par le "*tout **d'abord** $P(0)$, appelé pas initial, et **ensuite*** [...]". Or, nous savons bien qu l'ordre dans lequel ces démonstrations sont réalisées n'a pas d'importance.
- Ensuite, nous trouvons dommage d'utiliser la même variable n pour l'hérédité et la proposition initiale. Cela est correct en soi mais il nous semble qu'employer une autre variable permettrait peut-être d'éviter une confusion éventuelle entre l'hypothèse de récurrence et la proposition initiale. De plus, utiliser des variables différentes mettrait davantage l'accent sur le fait suivant. L'amorce et l'hérédité doivent être régroupées, celles-ci étant relativement "indépendantes", pour pouvoir établir la véracité de la proposition initiale.

S'ensuit une illustration claire, rigoureuse et tout à fait conforme à la formalisation présentée ci-dessus, raison pour laquelle nous ne la reprendrons pas ici.

b) Démonstration par récurrence : une légère variante

Considérons à présent le deuxième extrait traitant cette fois des propositions à démontrer dont le pas initial n'est pas forcément 0. La figure **??** reprend l'extrait du syllabus.

> **Pour démontrer une conclusion de la forme $\forall n \geq n_0$: $P(n)$**
>
> *Dans la stratégie de démonstration par récurrence décrite au paragraphe 5.1.* [il s'agit de l'extrait présenté à la figure **??**], *le pas initial correspond au cas $n = 0$. Il arrive qu'une propriété P ne soit pas vérifiée pour $n = 0$, ni pour les premières valeurs de n, mais le soit pour toutes les valeurs de n à partir d'une certaine valeur n_0. Pour démontrer une telle propriété, on adapte la stratégie en remplaçant le pas initial "démonstration de $P(0)$" par "démonstration de $P(n_0)$" et le pas de récurrence par "démonstration de : $\forall n \geq n_0 : P(n) \Rightarrow P(n+1)$".*

FIGURE 5.30 – Démonstration d'une proposition de la forme "$\forall n \geqslant n_0 : P(n)$", extrait de (Thiry, 2007, pp. 107, 108)

Bien que cette formulation du principe de démonstration par récurrence soit correcte, nous avons tout de même une remarque à formuler. Le fait de mentionner qu'il suffit de remplacer 0 par n_0 pour le pas d'amorce et d'hérédité laisse sous-entendre que la synthèse des pas de celles-ci a déja été effectuée. Cela correspond donc à la formalisation que nous avons présentée à la figure **??**. Utiliser cette formulation ne permet pas de bien voir que les pas d'amorce et d'hérédité peuvent être différents.

Il s'ensuit, une nouvelle fois, un exercice tout à fait conforme à la formalisation reprise dans ce dernier extrait.

Terminons l'analyse de ce manuel en remarquant un dernier fait. Les extraits des figures **??** et **??** ne concernent que des *situations* de types 1 et 2 (voir figure **??**). En effet, la proposition initiale est toujours donnée et le pas initial n'est donc jamais à déterminer.

Conclusion

En guise de conclusion pour ce manuel, considérons le tableau récapitulatif suivant [10] :

Point théorique	Ensemble $\mathbb{N}$	Type	Ordre	$n_a \neq n_h$	$\forall$	$\Rightarrow$	$\forall(\Rightarrow)$	variables distinctes
X	X	1,2	**X**		X	X	X	

FIGURE 5.31 – Tableau récapitulatif de l'analyse du manuel *Initiation à la démarche mathématique*

5.2.5 Manuel *Algèbre (1ère partie)*

Le manuel *Algèbre (1ère partie)* est destiné aux étudiants de 1ère bac en informatique et est associé au cours portant le même nom. L'objectif du cours nous est décrit de la manière suivante :

> "*Au delà des outils mathématiques qu'il présente, ce cours a pour objectifs de former les étudiants à la manipulation abstraite, à la précision et au raisonnement rigoureux qu'exige l'Informatique. L'accent est donc mis en particulier sur les principes et les mécanismes de démonstration de résultats (théorèmes) déductibles à partir des outils mis en place.*"

FIGURE 5.32 – Objectif du cours d'algèbre, extrait de (Site UNamur (Algèbre), 2012)

Voyons à présent ce qu'il en est de la place accordée à la démonstration par récurrence au sein de ce manuel (Sartenaer, 2013, pp. 17-20).

Organisation de la matière relative à la démonstration par récurrence

Le manuel *Algèbre (1ère partie)* comporte quatre chapitres dont le premier est celui qui nous intéresse. Celui-ci est intitulé : "*Les structures algébriques*". La démonstration par récurrence y est abordée lorsqu'il s'agit de démontrer la règle de distributivité généralisée au sein d'un anneau.

10. Pour des explications concernant les titres des colonnes de ce tableau, voir figure **??**.

Il convient de remarquer que des explications sur le principe de récurrence sont données entre l'énoncé de cette règle et la démonstration de celle-ci :

"*La règle 1.1* [de distributivité généralisée] *se démontre par récurrence. Avant d'entamer sa preuve, rappelons le principe de démonstration par récurrence (ou par induction).*"

FIGURE 5.33 – Extrait de (Sartenaer, 2013, p. 18)

Analyse critique de la présentation de la démonstration par récurrence dans *Algèbre (1ère partie)*

Comme nous venons de le préciser, le principe de démonstration par récurrence est présenté sous forme de rappel avant d'être appliqué à la démonstration de la règle de distributivité généralisée. La manière dont s'articule ce rappel est présentée et commentée dans les pages qui suivent.

• Pour commencer, un exemple illustratif est proposé. Reprenons l'extrait tel qu'il apparait dans le manuel à la figure **??** :

Supposons que cent individus soient alignés en file indienne et que chaque individu chuchote son prénom à l'oreille de celui qui est derrière lui. Supposons que nous sachions seulement deux choses à propos de cette file indienne :

- **Hypothèse 1** Le prénom du premier individu est David.
- **Hypothèse 2** Si un individu se prénomme David, celui qui le suit se prénomme également David.

De ces deux hypothèses, nous pouvons conclure que les cent individus se prénomment tous David. En effet, par l'Hypothèse 1, on sait que le premier individu se prénomme David. De l'Hypothèse 2, nous pouvons alors déduire que le prénom du deuxième individu est aussi David, et donc que celui du troisième individu est également David, de même pour le quatrième individu, etc. En appliquant à chaque individu l'Hypothèse 2, nous pouvons conclure que chaque individu dans cette file se prénomme David.

FIGURE 5.34 – Exemple illustratif du principe de récurrence, extrait de (Sartenaer, 2013, p. 18)

En ce qui concerne cet extrait, nous pensons qu'il s'agit là d'une première illustration très parlante et très représentative du principe de démonstration par récurrence. En effet, il nous permet :

- de bien visualiser l'implication constituant l'hérédité,
- de ressentir la nécessité d'un élément "déclencheur" que constitue l'amorce,
- de percevoir l'idée du principe de récurrence qui consiste à prouver une infinité de propositions sur base de deux seulement.

Cette illustration est donc pour nous une très bonne image analogique du principe. Néanmoins, nous regrettons les faits suivants :

- le pas de l'amorce est égal à 1. Nous trouvons cela dommage car la manière dont sont écrites l'amorce et l'hérédité rend vraiment compte de "l'indépendance" relative entre celles-ci. Ce fait aurait pu être accentué davantage par des pas d'amorce et d'hérédité différents.
- la numérotation de l'amorce et de l'hérédité laisse supposer un ordre à suivre pour leur démonstration, ce qui, comme nous le savons, n'a pas lieu d'être.
- la dénomination "hypothèse" utilisée à la figure **??** ne nous semble pas adéquate. En effet, les hypothèses dont il est question ici font référence au principe de récurrence. L'hypothèse 1 correspond à l'amorce et l'hypothèse 2 à l'hérédité. Nous n'apprécions pas cette façon de les nommer car dans le cas de démonstrations mathématiques, il s'agit de les démontrer. Néanmoins, il faut bien avouer que cela permet de mettre en évidence le fait que **si** on a démontré l'amorce **et** l'hérédité **alors**, on peut conclure.

• Suite à cette illustration, vient la formalisation du principe, reprise à la figure **??** :

Le principe de récurrence s'applique de la même façon [illustration ci-dessus]. En effet, soit une suite de propriétés à vérifier, indexées par des entiers naturels. Supposons que nous puissions démontrer deux choses à propos de cette suite de propriétés :

1. La propriété est vraie pour le premier indice (disons 1).
2. Si la propriété est vraie pour l'indice k, alors et quel que soit $k \geq 1$, elle l'est aussi pour l'indice $k + 1$.

   Dans ce cas, en utilisant la même logique que celle de la file indienne des individus prénommés David, nous pouvons conclure que toutes les propriétés de la suite sont vraies. La supposition selon laquelle "la propriété est vraie pour l'indice k" s'appelle *hypothèse de récurrence.*

FIGURE 5.35 – Formalisation du principe de récurrence, extrait de (Sartenaer, 2013, p. 18)

Concentrons-nous d'abord sur les trois premières lignes de cet extrait. Nous pouvons émettre quelques remarques à leur sujet :

- mentionner les termes *"suite de propriétés* [...] *indexées par des entiers naturels"* nous semble accentuer le fait qu'il s'agit bel et bien de considérer des propositions dont le domaine de validité est défini sur $\mathbb{N}$.
- les termes *"supposons que nous puissions démontrer deux choses"* éclaircissent la dénomination "*hypothèse*" précédemment utilisée pour parler de l'amorce et de l'hérédité. En effet, ces termes nous laissent sous-entendre qu'il s'agit de deux propositions à démontrer qui constituent des hypothèses pour établir la proposition initiale.

En ce qui concerne la suite de cet extrait, nous avons constaté les faits suivants :

- le pas d'amorce est le premier indice de la suite de propositions ("*disons 1*").
- les pas d'amorce et d'hérédité sont identiques.
- le principe est présenté en deux étapes distinctes : l'amorce et l'hérédité. Une numérotation indique un ordre à suivre quant à leur démonstration.
- la proposition initiale n'est pas écrite de manière explicite.
- dans l'hérédité, le "quel que soit" est positionné de manière confuse. Cela laisse sous-entendre qu'il y a une confusion entre "$[P \Rightarrow Q]$ est vraie" et "P est vraie $\Rightarrow Q$ est vraie".

• A la suite de la formalisation du principe vient une nouvelle illustration, plus mathématique cette fois, reprise à la figure **??**. Remarquons qu'il s'agit de la même proposition à démontrer que celle présentée à la figure **??**.

A titre d'illustration, démontrons par récurrence que :

$$1+2+3+\cdots+n=\tfrac{n(n+1)}{2} \qquad \text{(équation 1.19)}$$

D'une part, la propriété est vraie pour $n=1$. En effet, on a bien que :

$$1=\frac{1(1+1)}{2}$$

D'autre part, introduisons l'hypothèse de récurrence (propriété vraie pour k) :

$$1+2+3+\cdots+k=\tfrac{k(k+1)}{2} \qquad \text{(équation 1.20)}$$

où $k \geq 1$ est un entier naturel quelconque, et démontrons l'égalité (1.19) pour $n=k+1$. Pour ce faire, ajoutons $(k+1)$ dans les deux membres de (1.20), ce qui donne

$$\begin{aligned} 1+2+3+\cdots+k+(k+1) &= \frac{k(k+1)}{2}+(k+1) \\ &= (\frac{k}{2}+1)(k+1) \\ &= \frac{(k+1)(k+2)}{2} \end{aligned}$$

qui correspond bien à (1.19) pour $n=k+1$. Nous avons donc montré que (1.19) est vrai pour $n=1$, et que si c'est vrai pour $n=k$, alors c'est vrai pour $n=k+1$, et ce pour tout $k \geq 1$. En utilisant le principe de récurrence, on en conclut que (1.19) est vrai quel que soit n.

FIGURE 5.36 – Illustration d'une démonstration par récurrence, extrait de (Sartenaer, 2013, pp. 18-19)

Nous pouvons donc émettre, en ce qui concerne ce dernier extrait, les constats suivants :

- l'ensemble initial sur lequel l'équation 1.19 doit être démontrée n'est pas mentionné. Or, c'est indispensable. Le principe présenté précédemment ne considérant que des propositions initiales dont le domaine de validité est $\mathbb{N}$, nous supposons qu'il en est de même pour cette illustration. Ainsi, est sous-entendu "$\forall n \in \mathbb{N}$".

- le pas d'amorce et le pas d'hérédité sont tous deux égaux à 1. Or, la conclusion est établie sur tout l'ensemble $\mathbb{N}$: [...] "*on en conclut que (1.19) est vrai quel que soit* n".
- la variable n est utilisée pour l'amorce, l'hérédité et la proposition initiale. Bien que cela soit correct, nous trouvons dommage de formuler le principe de cette manière. En effet, cela cache un peu le fait que les pas d'amorce et d'hérédité peuvent être parfois différents. Bien entendu, ce n'est pas le cas de la démonstration de la figure **??** puisqu'il s'agit d'une situation de type 1 (voir figure **??**). Néanmoins, nous pensons qu'utiliser des variables différentes permettrait de prendre conscience que, dans d'autres exercices, des pas distincts pourraient être envisageables.
- même si cela est sous-entendu, on ne voit plus du tout ici qu'il s'agit d'une implication à démontrer pour l'hérédité. En effet, on parle tout de suite d'hypothèse de récurrence. Néanmoins, remarquons que, contrairement à ce qui était indiqué dans la figure **??**, il est bien ici mentionné que k est un naturel quelconque plus grand ou égal au pas d'hérédité.
- en ce qui concerne la conclusion établie à la fin de l'extrait, elle nous semble, contrairement au début de celui-ci, exprimer de manière claire l'implication ainsi que le quantificateur universel qui porte sur l'entièreté de celle-ci. Néanmoins, remarquons une nouvelle fois, une confusion entre "$[P \Rightarrow Q]$ est vraie" et "P est vraie $\Rightarrow Q$ est vraie". Notons également que, dans la conclusion, est utilisée la variable n pour désigner le pas d'amorce, d'hérédité et la proposition initiale. Des variables distinctes permettraient peut-être de mettre en évidence "l'indépendance" relative entre l'amorce et l'hérédité. Insistons sur le fait que ce dernier propos n'est pas grave en soi puisqu'il s'agit ici d'une situation de type 1, où les pas sont forcément égaux.

Nous pensons donc que beaucoup d'éléments, même s'ils sont exprimés de manière claire dans la formalisation (figure **??**) ou dans le premier exemple illustratif (figure **??**), sont sous-entendus dans la démonstration de la figure **??**. Utiliser beaucoup de sous-entendus peut mener à des incompréhensions, des confusions et il faut donc, même s'il s'agit d'un rappel, toujours essayer d'expliciter au maximum les choses. Bien entendu, nous sommes consciente qu'il s'agit ici d'un manuel d'algèbre et pas d'un manuel traitant de logique mathématique dans lequel la rigueur se doit d'être présente à tout moment.

• Suite à ce rappel, la démonstration de la distributivé généralisée est établie. Il s'agit plus précisément de l'énoncé suivant :

Soit $(A, +, \times)$, un anneau et soient a_1, a_2,$\cdots$, a_m et b_1, b_2,$\cdots$, b_m, des éléments de A. On a :

$$(a_1 + a_2 + \cdots + a_m)(b_1 + b_2 + \cdots + b_n) = \left(\sum_{i=1}^{m} a_i\right)\left(\sum_{j=1}^{n} b_j\right) = \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} a_i b_j$$

FIGURE 5.37 – Règle de distributivité générale à démontrer par récurrence, extrait de (Sartenaer, 2013, p. 17)

En ce qui concerne la démonstration de cet énoncé, on peut dégager les mêmes constats que pour la preuve précédente. C'est la raison pour laquelle nous ne la commenterons pas dans les détails.

Néanmoins, nous tenons à remarquer deux faits la concernant :

- la démonstration de cette proposition utilise une "double récurrence", une sur l'indice n et l'autre sur l'indice m.
- contrairement à ce qui a été vu précédemment dans ce manuel, les trois pas (initial, amorce et hérédité) sont ici fixés à 2. Nous supposons que cela est dû au fait que :
  - ▷ lorsque $n = 1$ et $m = 2$, la propriété considérée est celle de la distributivité simple à droite.
  - ▷ lorsque $m = 1$ et $n = 2$, la propriété considérée est celle de la distributivité simple à gauche.

  Cela constitue en quelque sorte les cas "triviaux". Néanmoins, nous pensons qu'il est indispensable de les spécifier car la proposition initiale est définie sur l'ensemble des naturels.

Conclusion

En guise de conclusion, considérons le tableau récapitulatif[11] présenté à la figure **??**. Avant cela, remarquons que nous avons relevé quelques sous-entendus lors de l'analyse du manuel *Algèbre (1ère partie)*. Il est donc parfois difficile de savoir si un critère est effectivement rempli ou non. C'est la raison pour laquelle nous expliciterons nos choix pour les critères qui semblent moins évidents à repérer.

Point théorique	Ensemble $\mathbb{N}$	Type	Ordre	$n_a \neq n_h$	$\forall$	$\Rightarrow$	$\forall(\Rightarrow)$	variables distinctes
X	X	1	**X**		X	X	X	

FIGURE 5.38 – Tableau récapitulatif de l'analyse du manuel *Algèbre (1ère partie)*

Justifions nos choix pour certains critères :

- *Ensemble $\mathbb{N}$* : nous avons coché ce critère car le fait d'indiquer qu'il s'agit d'une "*suite de propriétés indexées par des entiers naturels*" suggère que le principe de récurrence ne s'applique qu'à des nombres naturels.
- $\forall$: le quantificateur universel se retrouve dans les termes "*quel que soit* $k \geqslant 1$" de la formalisation du principe, même si ces termes sont positionnés après le "alors" décrivant l'implication de l'hérédité.
- $\Rightarrow$: bien que l'implication soit tout à fait cachée dans l'illustration de la figure **??**, elle est exprimée dans la formalisation du principe par les termes "**Si** la proposition est vraie pour k [...] **alors** elle l'est aussi pour l'indice $k + 1$."

11. Pour des explications concernant les titres des colonnes de ce tableau, voir figure **??**.

5.2.6 Manuel *Exercices de mathématiques pour le premier cycle*

Contrairement aux manuels universitaires précédents, ce livre d'exercices (Dupont, 2003) est en vente libre. Il a été créé afin d'aider les étudiants du premier cycle des hautes écoles ou des universités à acquérir la maitrise des mathématiques qui leur sont enseignées. L'auteur nous indique qu'il s'agit là d'un ouvrage plutôt destiné à des jeunes qui abordent des études scientifiques mais "*pour qui les mathématiques ne sont pas l'objet d'étude en soi*" (Dupont, 2003, p. 7). Néanmoins, il peut tout de même être utile pour les étudiants en sciences mathématiques et physiques car "*pour acquérir une maitrise technique de base* [...]*, il importe de faire ses gammes sur de nombreux exercices tels que ceux qui sont proposés.*" L'auteur nous dit aussi que cet ouvrage peut servir aux professeurs du secondaire et aux élèves qui se préparent à un examen d'admission en faculté de sciences appliquées.

Organisation de la matière relative à la démonstration par récurrence

C'est au sein du premier chapitre, intitulé *Rappels*, que nous avons trouvé un point théorique sur la démonstration par récurrence. Plus précisément, ce que nous avons trouvé sur le sujet fait partie du premier sous-point *Raisonnement et symbolisme mathématiques* du chapitre. Ainsi, la démonstration par récurrence est une des premières notions abordées au sein de cet ouvrage. En ce qui concerne les différents rappels théoriques qui concernent ce chapitre, l'auteur nous apporte des précisions :

"*Les rappels* [...] *ne se substituent pas à un exposé de la théorie tel que le lecteur en trouvera dans l'un ou l'autre des ouvrages que nous recommandons en bibliographie. Nous les avons conçus, en principe, comme un exposé assez bref de ce qui est nécessaire et suffisant pour résoudre les exercices qui suivent* [...]."

Figure 5.39 – Extrait de (Dupont, 2003, p. 13)

Ainsi, nous ne nous attendons pas à avoir un exposé complet sur la démonstration par récurrence comprenant ses différentes variantes, etc. (voir sous-section **??**), mais nous nous attendons tout de même à une certaine rigueur, cet ouvrage étant destiné au public décrit précédemment.

Analyse critique de la présentation de la démonstration par récurrence dans *Exercices de mathématiques pour le premier cycle*

Le sous-titre intitulé *Démonstations par récurrence* commence directement par l'explication du principe de démonstration par récurrence et s'ensuit une multitude d'exercices.

Reprenons, pour commencer, l'extrait présentant le principe :

> Lorsqu'une propriété $P(n)$ doit être prouvée pour toutes les valeurs d'un paramètre naturel n, il est parfois commode d'utiliser une *démonstration par récurrence*. Celle-ci consiste en deux étapes :
>
> a) Le *pas initital* [à ne pas confondre avec le pas inital tel que nous l'avons défini] consiste à prouver la propriété pour la plus petite valeur du paramètre ; on prouve donc
>
> $$P(0)$$
>
> b) Le *pas récurrent* consiste à prouver que si la propriété est vraie pour une valeur du paramètre, alors elle l'est aussi pour la valeur suivante ; on prouve donc
>
> $$P(n) \Rightarrow P(n+1)$$
>
> autrement dit, on prouve $P(n+1)$ en utilisant comme hypothèse $P(n)$ qu'on appelle alors *hypothèse de récurrence*.
>
> De nombreuses variantes de ce schéma sont possibles.

FIGURE 5.40 – Formalisation du principe de récurrence, extrait (Dupont, 2003, p. 28)

La partie théorique consacrée à la démonstration par récurrence étant terminée, nous pouvons formuler nos différents constats :
- le principe n'est vu que pour des propositions initiales dont le domaine de validité est $\mathbb{N}$ tout entier.
- en ce qui concerne l'hérédité, l'implication est mentionnée. Néanmoins, il y a une omission du quantificateur universel. De plus, la variable utilisée est identique à celle de la proposition initiale.
- les lettres a et b sous-entendent un ordre à suivre pour les démonstrations de l'amorce et de l'hérédité.

S'ensuit un exemple dont l'énoncé est repris à la figure **??** :

> Démontrer que, pour tout naturel n, l'entier $E(n) = 3^{n+2}2^{2n+1} + 5^{2n+1}2^{n+2}$ est divisible par 19.

FIGURE 5.41 – Exemple de proposition à démontrer par récurrence, extrait de (Dupont, 2003, p. 28)

Nous ne développerons pas ici la démonstration qui est présentée puisqu'elle est conforme à la description du principe ci-dessus et donc, présente les mêmes constats. Néanmoins, remarquons que l'énoncé à démontrer nous semble convenir pour une première illustration. En effet, il est assez intuitif, donne l'envie de le tester pour quelques valeurs particulières.

Ensuite, vient une série d'exercices de "drill" :

- tout d'abord, il s'agit d'exercices de la forme "Démontrer que $\forall n \in \mathbb{N}$: tel nombre est divisible par tel autre.",
- ensuite, il s'agit de formules à démontrer comprenant le symbole sommatoire. Par exemple, "Démontrer par récurrence que $\forall n \in \mathbb{N} : \sum_{k=1}^{n}(2k-1) = n^2$.",
- puis, il s'agit d'inégalités à démontrer,
- enfin, le dernier exercice consiste à prouver que le déterminant d'une matrice triangulaire supérieure est égal au produit de ses éléments diagonaux. Il s'agit donc de traiter, une nouvelle fois, des symboles sommatoires.

Conclusion

Pour conclure, nous pensons que ce rappel repris à la figure **??** nous semble peu précis. En effet, bien que destiné majoritairement à des étudiants du cycle supérieur, ce manuel ne présente pas le principe de récurrence de manière rigoureuse. Nous avions été prévenue par l'auteur quant au fait que les rappels ne faisaient que reprendre globalement les notions. Néanmoins, nous pensons que ce n'est pas une raison pour ne pas indiquer des éléments importants du principe de récurrence tel que le quantificateur universel présent dans l'hérédité. La figure **??** récapitule nos constats [12].

Point théorique	Ensemble $\mathbb{N}$	Type	Ordre	$n_a \neq n_h$	$\forall$	$\Rightarrow$	$\forall(\Rightarrow)$	variables distinctes
X	X	1	**X**			X		

FIGURE 5.42 – Tableau récapitulatif de l'analyse du manuel *Exercices de mathématiques du cycle supérieur*

5.2.7 Conclusion de l'analyse des manuels de l'enseignement supérieur

Pour conclure l'analyse de ces trois manuels, considérons l'ensemble des tableaux récapitulatifs que nous avons déjà présentés, indépendamment les uns des autres, et établissons quelques constats :

Manuel analysé	Point théorique	Ensemble $\mathbb{N}$	Type	Ordre	$n_a \neq n_h$	$\forall$	$\Rightarrow$	$\forall(\Rightarrow)$	variables distinctes
IDM	X	X	1,2	**X**		X	X	X	
Algèbre	**X**	X	1	**X**		X	X	X	
Exercices cycle sup.	**X**	X	1	**X**			X		

FIGURE 5.43 – Tableau récapitulatif de l'analyse des manuels de l'enseignement supérieur

Avant de commencer par expliciter nos différentes conclusions, insistons sur le fait que nous sommes consciente que nous n'avons analysé ici que trois ouvrages, raison pour laquelle nous ne pouvons pas généraliser nos remarques à l'ensemble des manuels belges du cycle supérieur. Néanmoins, cette analyse nous a permis d'avoir une bonne idée sur le sujet.

12. Pour des explications concernant les titres des colonnes de ce tableau, voir figure **??**.

Voici donc ce que nous en retirons principalement :

– dans deux des trois manuels analysés, la démonstration par récurrence est considérée comme connue. En effet, elle est présentée sous forme d'un rappel théorique. Notons également que pour les trois manuels, nous avons observé un point de théorie explicite consacré au principe de récurrence.
– les trois manuels ont précisé que le principe de récurrence ne s'applique que sur des entiers naturels.
– bien qu'il s'agisse ici de manuels du cycle supérieur, il semblerait que soit abordé, dans seulement un des trois ouvrages, le cas où le pas initial est différent de 0 ou de 1. De plus, remarquons que pour les trois manuels, les propositions initiales sont à chaque fois données. Les exercices de démonstration proposés ne nécessitent donc pas ni de déterminer le pas initial, ni d'établir des conjectures afin de trouver "$P(n)$" (types 3 et 4) [13]. Notons également que ce genre d'exercices ne nécessite pas non plus l'utilisation du principe de Fermat (type 5). Nous trouvons cela un peu décevant puisque ces manuels sont destinés à des étudiants qui devront sans doute utiliser la démonstration par récurrence dans d'autres situations que celles de type 1 ou de type 2.
– aucun manuel n'a considéré le fait que le pas de l'amorce et celui de l'hérédité peuvent être différents. Ce propos est bien évidemment lié au précédent puisque seuls les types 1 et 2 sont considérés dans ces manuels.
– les trois manuels nous ont présenté le principe en imposant un ordre entre la démonstration de l'amorce et celle de l'hérédité.
– il n'y que le manuel *Initiation à la démarche mathématique* qui a présenté de manière claire et rigoureuse l'hérédité en utilisant le symbole universel et l'implication de manière explicite. Le manuel *Algèbre (1ère partie)* les a mentionnés également mais pas à l'aide de symboles mathématiques et en positionnant le symbole universel à un endroit non-conventionnel.
– Aucun des manuels n'a utilisé des variables différentes pour l'hérédité et la proposition initiale. Ces variables étant liées, ce fait ne change rien en soi si les quantificateurs sont indiqués ou suggérés. Néanmoins, cela peut amener le lecteur à confondre l'hypothèse de récurrence et la proposition initiale à démontrer.

Pour conclure, il semblerait que certains manuels du cycle supérieur considèrent que le principe de récurrence est une notion vue puisqu'il y est mentionné sous forme de rappels. Néanmoins, ceux-ci consacrent un point théorique explicite au principe de récurrence, c'est-à-dire qu'il n'est pas appliqué directement à une nouvelle proposition à démontrer. Il semblerait également que les démonstrations abordées ne concernent que le cas où les propositions initiales sont données. Enfin, insistons sur le fait que seul un manuel sur les trois a formulé de manière mathématique et rigoureuse le principe de récurrence en mentionnant notamment l'implication de l'hérédité, le quantificateur universel, etc. Cela peut sans doute s'expliquer par la raison suivante : ce manuel concerne la logique mathématique contrairement aux deux autres qui n'ont pas du tout la même visée. Néanmoins, nous pensons que cela n'est pas une raison pour ne pas mentionner les éléments indispensables du principe de récurrence tels que les quantificateurs, l'implication, etc.

13. Voir figure **??**.

Terminons cette conclusion en nous posant une question sur les manuels du cycle supérieur mentionnant le principe de récurrence sous forme d'un rappel : peut-on vraiment se permettre de passer rapidement sur cette notion ou, en tous cas, de la voir de façon peu rigoureuse ?

5.3 Conclusion

Nous avons vu, dans la première section, que la démonstration par récurrence semble prendre très peu de place parmi l'ensemble des chapitres abordés durant les trois dernières années du secondaire. Elle est généralement soit vue transversalement, à travers l'ensemble des cours de mathématiques, soit appliquée directement à une nouvelle proposition à démontrer. Nous pouvons faire le lien entre ces observations et celles établies lors de la section consacrée à l'étude des manuels. Bien entendu, seuls ceux du niveau secondaire peuvent être considérés pour établir ce lien. En effet, les cours donnés à l'université ne suivent pas de programme. Nous avons analysé deux manuels du secondaire. Dans le premier, un quart de page était consacré à l'explication du principe de récurrence. Dans le second, le principe était directement appliqué à la démonstration du binôme de Newton. Ainsi, nous pouvons affirmer que le peu de place attribuée à la démonstration par récurrence dans les manuels est en phase avec le peu de place qu'elle occupe dans les programmes d'enseignement belges.

En ce qui concerne l'analyse des trois manuels de l'enseignement supérieur, nous avons vu qu'ils ne considéraient que des problèmes dans lesquels les propositions initiales à démontrer par récurrence étaient données. Ainsi, le sujet ne semble pas "creusé" ou, du moins, l'est aussi peu que dans les manuels du niveau secondaire. Nous avons vu également que certains d'entre eux considèrent que la démonstration par récurrence est une notion déjà connue puisqu'ils la mentionnent sous forme de rappels.

Mentionnons encore le fait que nous avons observé un manque de rigueur assez flagrant pour l'ensemble des manuels analysés, à l'exception de celui consacrant un chapitre spécifique à la démonstration par récurrence.

Enfin, remarquons, pour terminer cette analyse, que beaucoup de constats établis ici sont semblables à ceux émis par Grenier.

Chapitre 6

Analyse du savoir enseigné

Comme nous l'avons précisé dans notre méthodologie, nous allons à présent étudier le savoir enseigné. Pour ce faire, nous allons être amenée à analyser des questionnaires que nous avons distribués à 69 enseignants de mathématiques issus de l'enseignement général et technologique. Il s'agit, plus précisément d'une majorité de professeurs du secondaire supérieur ($4^{\text{ème}}$, $5^{\text{ème}}$ et $6^{\text{ème}}$ années). Nous avons fait le choix de ne pas interroger ni les enseignants de l'inférieur, ni ceux du professionnel puisqu'ils ne sont pas concernés par l'enseignement de la démonstration par récurrence. Quelques enseignants du supérieur ont également accepté de répondre à notre enquête. Précisons que tous les professeurs ont pu répondre à ce questionnaire chez eux et qu'ils avaient donc une multitude d'outils à leur disposition (internet, manuels, etc.).

Ce chapitre nous permettra d'apporter des éléments de réponse à notre problématique de recherche, developpée à la figure **??**. Pour y parvenir, nous tenterons de voir comment les enseignants perçoivent globalement la démonstration par récurrence, s'ils en comprennent toutes les subtilités et s'ils la maitrisent avec rigueur. Nous nous intéresserons aussi à la manière dont cet outil mathématique est abordé en classe.

Pour répondre à ces diverses interrogations, nous commencerons par présenter les questions que nous avons posées aux enseignants. Celles-ci s'inspirent fortement du questionnaire conçu par Grenier pour mener son enquête en France. Ensuite, nous analyserons nos résultats. Pour ce faire, nous procéderons en deux temps : premièrement, nous présenterons les réponses à chaque question. Il s'agira d'une analyse descriptive. Ensuite, grâce à une analyse de type transversal, nous dégagerons divers constats. Nous avons décidé d'opérer ainsi afin de tirer un maximum d'informations susceptibles d'apporter des réponses aux questions que pose ce chapitre.

Avant d'entamer notre analyse, nous tenons à remarquer que le fait d'interroger les enseignants sur base de questionnaires et d'analyser ainsi leurs réponses se trouve à la limite entre le savoir à enseigner et le savoir enseigné. En effet, le savoir à enseigner est normalement connu par les professeurs. Quant à leur manière de l'enseigner effectivement en classe, nous n'avons pas pu nous en rendre compte de visu pour des raisons d'organisation. Nous avons décidé de nous en tenir à nos questionnaires.

6.1 Présentation du questionnaire à destination des professeurs

Question P1 : En quelle(s) année(s) enseignez-vous les mathématiques (nombre d'heures par classe et type d'enseignement) ?

Question P2 : Quel est le(s) master(s)/bac(s) dont vous êtes diplômé ?

Questions P1 et P2 : Ces deux premières questions nous permettent d'en savoir un peu plus sur l'enseignant interrogé.

Question P3 : En mathématiques, qu'évoque pour vous la notion de "récurrence" ?

Question P3 : cette question nous permet de savoir ce à quoi pensent les enseignants lorsqu'est évoquée la notion de récurrence en mathématiques. Nous nous attendons aux réponses suivantes :

- définition/construction d'objets,
- démonstration de propositions particulières (dépendantes d'une ou de plusieurs variables de $\mathbb{N}$).

Question P4 : Avez-vous déjà parlé de récurrence dans vos cours ? Si oui, à l'occasion de quelle(s) matière(s) et à quels élèves (nombre d'heures par semaine, type d'enseignement) ?

En particulier, avez-vous parlé de démonstration par récurrence ? Si oui, à propos de quel(s) sujet(s) et à quels élèves ?

Question P4 : cette question nous permet de savoir si la récurrence intervient encore effectivement dans l'enseignement secondaire et de connaitre les matières exactes dans lesquelles la démonstration par récurrence est utilisée en classe. Grâce à cette question, nous saurons également si elle est étudiée en tant qu'objet mathématique ou bien si elle est vue à l'occasion d'un théorème qu'elle permet de démontrer.

Question P5 : Sur quel(s) axiome et/ou principe et/ou propriété s'appuie la récurrence ?

Question P5 : le but de cette question est de savoir si les enseignants connaissent le fondement du principe de démonstration par récurrence (l'axiome de récurrence) ou, tout au moins, le principe de récurrence.
Après coup, nous pensons que cette question aurait dû être formulée de la manière suivante : "Sur quel axiome (ou principe) s'appuie la démonstration par récurrence pour être considérée comme moyen de démonstration valide ?". En effet, nous savons que c'est l'axiome de récurrence qui légitime le fonctionnement d'une démonstration par récurrence (voir sous-section **??**).

Question P6 : Est-ce qu'une démonstration par récurrence est pour vous une preuve irréfutable de la proposition qui est à démontrer ?

Question P6 : cette question nous permet de savoir si les enseignants ont des doutes à propos de la validité de la démonstration par récurrence. Nous nous attendons à ce qu'ils répondent qu'elle est irréfutable et qu'ils fassent le lien avec la question précédente.

Question P7 : Qu'est-ce qui justifie le principe de récurrence comme "méthode de démonstration" ?

Question P7 : cette question était posée à la base pour que les enseignants nous expliquent les rôles joués par l'amorce et l'hérédité qui constituent le principe.
Après coup, nous reconnaissons que cette question est mal posée. Nous aurions dû la formuler de la manière suivante : "Le principe de récurrence est constitué de deux "étapes" principales. Pourriez-vous donner les rôles de chacune d'entre elles ?"

Question P8 : Comment reconnaissez-vous dans un problème que vous pouvez utiliser la récurrence ? Donnez trois exemples assez différents.

Question P8 : cette question nous permet de savoir si les enseignants sont conscients qu'il existe plusieurs types de problèmes faisant intervenir le principe de récurrence (voir figure **??**). Nous saurons ainsi notamment s'ils associent le principe de Fermat au concept de récurrence. De plus, les réponses à cette question vont nous fournir des exemples de problèmes.
Encore une fois, avec le recul, nous aurions dû employer dans cette question les termes "démonstration par récurrence" plutôt que "récurrence".

Question P9 : Commentez les deux extraits de manuels suivants.

a) "Si une propriété est vraie pour l'entier naturel n_0 et s'il est prouvé que lorsqu'elle est vraie pour l'entier p supérieur ou égal à n_0 elle est vraie aussi pour l'entier $p+1$, alors elle est vraie pour tous les entiers supérieurs ou égaux à n_0." (Indice x, TS, 2002)

b) "Mise en garde. Lors de la formulation de l'hypothèse de récurrence, il est essentiel de supposer la propriété vraie pour un entier $n \geqslant 1$, et surtout pas pour tout entier $n \geqslant 1$, puisque cette dernière formulation conduit à admettre purement et simplement le résultat cherché." (Declic, TS, 2002)

Question P9 : la première phrase à commenter ressemble à la formulation classique du principe de démonstration par récurrence que nous avons présentée à la figure **??**. Néanmoins, il convient de remarquer une différence : il y a ici un problème au niveau de l'hérédité. En effet, utiliser l'article "**l'**" dans les termes "**l**'entier p" n'est pas adéquat. On peut en fait répondre à la question P9a de deux façons :

- il n'y a pas de quantificateur sur la variable p et donc, ce n'est pas correct.
- il y a un quantificateur existentiel sur la variable p dû à l'article défini "**l'**" (celui-ci se traduit par "il existe") et donc, ce n'est pas correct.

Ainsi, utiliser l'article "**l'**" revient en quelque sorte à nier la nécessité du "pour tout" de l'hérédité. Les termes "**un** p **quelconque** supérieur ou égal à n_0" auraient été, selon nous, plus appropriés.

En ce qui concerne la deuxième phrase tirée du manuel *Declic*, celle-ci nous semble n'avoir aucun sens et comporter plusieurs maladresses que voici :

- premièrement, il est question ici d'une mise en garde sur l'hypothèse de récurrence. Lorsqu'il s'agit de démontrer l'hérédité "$\forall n \geqslant n_0 : [P(n) \Rightarrow P(n+1)]$", l'hypothèse de récurrence, "$P(n)$", est supposée vraie et aucun quantificateur n'intervient dans celle-ci. En effet, le "$\forall n \geqslant n_0$" porte sur l'ensemble de l'implication. C'est donc la raison pour laquelle nous trouvons cette mise en garde vide de sens. Ajoutons également qu'il est "dangereux" d'employer les termes "**un** entier" puisque cela sous-entend la présence du quantificateur "il existe". Or, nous savons qu'il n'en est rien.
- ensuite, contrairement à ce qui est affirmé ici, le pas d'hérédité n'est pas forcément égal à 1.

Ces deux phrases nous semblent donc erronées et inappropriées. Nous verrons si les enseignants sont du même avis.

Question P10 :
Si vous avez déjà enseigné les preuves par récurrence à vos élèves, comment l'introduisez-vous globalement ?

Question P10 : cette question nous permet de savoir comment les enseignants abordent la démonstration par récurrence. Utilisent-ils des images analogiques ? Mettent-ils les élèves en situation ? Commencent-ils par une présentation théorique du principe de récurrence ?

6.2 Analyse des réponses des enseignants

6.2.1 Analyse descriptive

Nous avons, dans notre **première question**, demandé aux professeurs dans quelle(s) classe(s) ils enseignaient. Rappelons que nous n'avons considéré ici que les professeurs de l'enseignement général et de technique de transition. Ils travaillent souvent dans plusieurs classes, comme nous pouvons l'observer dans l'histogramme de la figure **??**.

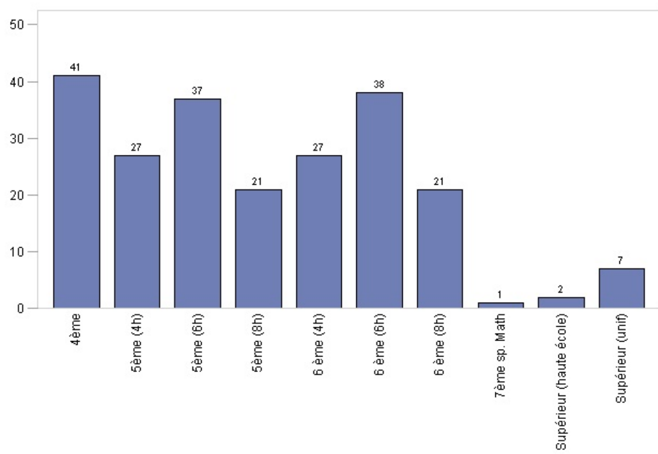


FIGURE 6.1 – Ensemble des réponses à la question P1 : histogramme des classes concernées par notre échantillon

Cet échantillon est particulièrement bien ciblé puisque nous avons vu que l'enseignement de la preuve par récurrence ne concernait que les enseignants du troisième cycle du secondaire.

En **deuxième** lieu, nous avons voulu savoir quel diplôme possédaient ces enseignants. Tous sont bien évidemment détenteurs d'un master (autrefois licence), la plupart en mathématiques. Deux d'entre eux sont docteurs en mathématiques et enseignent dans le supérieur. Un ingénieur civil, un ingénieur de gestion et deux physiciens nous ont également répondu. Quant à l'agrégation, elle concerne seulement 39 professeurs. Notons que nous y avons inclu les enseignants passant cette année leur agrégation et ayant déjà de l'expérience dans l'enseignement. Cela concerne trois personnes.

Notre échantillon décrit, voyons à présent ce qui vient à l'esprit des enseignants lorsqu'est évoquée la notion de récurrence en mathématiques (**question P3**).

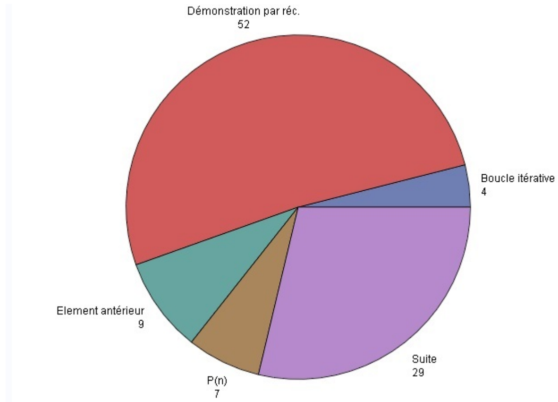


FIGURE 6.2 – Ensemble des réponses à la question P3 : sujets évoqués en lien avec la récurrence

Comme nous pouvons le constater, cinq types de réponses nous ont été fournies. Une majorité pense directement à la notion de démonstration par récurrence. Cela nous prouve bien que cette notion est ancrée dans leur esprit. Il est probable aussi que la suite des questions portant sur la démonstration par récurrence ait pu influencer leur réponse.
En deuxième position, viennent les suites. Cela n'est pas étonnant puisque celles-ci et la démonstration par récurrence constituent les deux directions principales, en mathématiques, qui utilisent un raisonnement par récurrence. D'autres encore font allusion aux notions de dépendance par rapport à un ou plusieurs éléments antérieurs, de propositions dépendantes d'un naturel et, enfin, de boucles itératives comme on peut en trouver dans des algorithmes.

Nous avons ensuite voulu savoir dans quelle matière précisément intervenaient les démonstrations par récurrence (**question P4**). Voici l'ensemble des réponses à cette question.

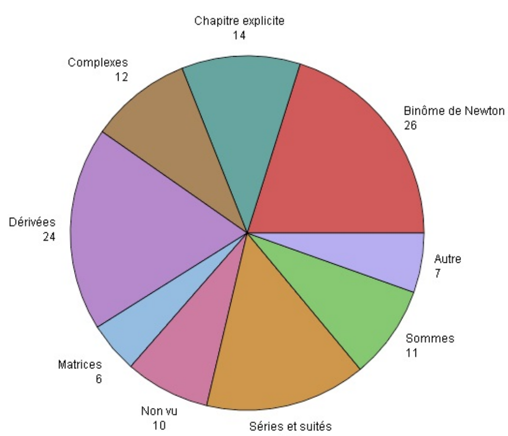


FIGURE 6.3 – Ensemble des réponses à la question P4 : sujets liés à la démonstration par récurrence dans les cours

Une majorité des professeurs nous renseignent le binôme de Newton. Cela coïncide avec ce qui a été observé dans l'analyse des programmes scolaires (voir section **??**).
En ce qui concerne la "catégorie" des séries et des suites, nous pouvons la regrouper avec celle des sommes. Nous supposons que les enseignants entendent par "sommes" l'étude des séries. Ainsi, ces deux catégories regroupées en une occupent la deuxième place.
Un exemple qui revient souvent également, mais dans un autre cadre, est celui de la dérivée de f^n où f est une fonction. Il nous est donné sous la forme $\boxed{(f^n)' = n \cdot f^{n-1} \cdot f'}$.
Quatorze enseignants (20 %) font allusion à un chapitre de logique qui étudie la démonstration par récurrence en tant qu'objet mathématique. Il s'agit principalement d'un cours donné en complément mathématique (8h./sem. de mathématiques).
D'autres nous mentionnent encore les nombres complexes et, plus particulièrement la formule de Moivre donnée sous la forme $\boxed{(\cos\theta + i\sin\theta)^n = \cos(n\theta) + i\sin(n\theta)}$.
Nous avons également constaté que dix enseignants (14%) ne voyaient pas la démonstration par récurrence avec leurs élèves. Notons que parmi eux, on trouve des enseignants qui donnent cours en 4$^{\text{ème}}$, en 5$^{\text{ème}}$ et 6 $^{\text{ème}}$ à 4h./sem. de mathématiques mais aussi en 5$^{\text{ème}}$ et 6$^{\text{ème}}$ à 6 heures par semaine.
Les matrices sont mentionnées aussi et plus précisément les exercices où elles sont élevées à la puissance n.
Les intégrales sont également citées mais cela concerne surtout les élèves qui fréquentent le cours de mathématiques à 8h./sem. Il s'agit du calcul de certaines primitives du type $\boxed{I_n = \int_0^{\frac{\pi}{4}} (\tan x)^n dx}$.

A la **question P5** où nous demandions sur quel axiome et/ou principe et/ou propriété s'appuyait la récurrence, les réponses ont été variées.

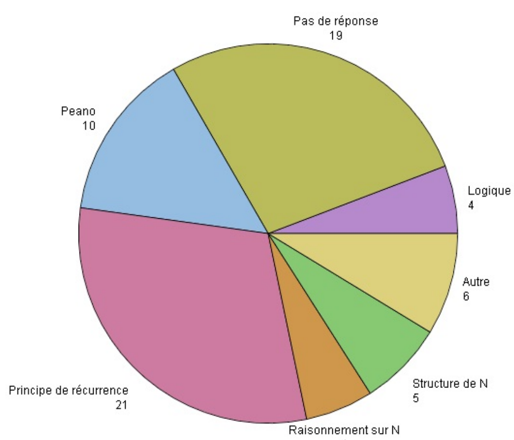


FIGURE 6.4 – Ensemble des réponses à la question P5 : *Sur quel(s) axiome et/ou principe et/ou propriété s'appuie la récurrence ?*

Dix personnes (14%) mentionnent explicitement les axiomes de Peano et, parfois, certaines pointent le cinquième d'entre eux. Cinq font référence à la structure de $\mathbb{N}$, ce que nous pouvons accepter. Plusieurs professeurs (21 personnes, c'est-à-dire 30%) expliquent le fonctionnement d'une démonstration par récurrence ou, autrement dit, le principe de récurrence et 19 (27 %) s'abstiennent de répondre précisant en général qu'elles savent appliquer le principe mais sont incapables de dire sur quoi il se fonde. Nous tenons à préciser encore que dans la catégorie "Autres", 3 mentionnent le principe de Fermat. Cette réponse est tout à fait valide puisque celui-ci est équivalent au principe de récurrence.

Lorsque nous avons demandé aux enseignants s'ils considéraient la démonstration par récurrence comme irréfutable (**question P6**), tous ont répondu par l'affirmative à l'exception d'un seul. Souvent, les personnes ayant mentionné l'axiome de Peano à la question précédente ont répondu ici qu'il était normal qu'elle le soit puisqu'elle se basait sur un axiome. Cependant, notons la réponse d'un des deux physiciens qui semble assez sceptique sur la question (il enseigne en 4$^{\text{ème}}$ technique de transition) :

"*Elle est probablement irréfutable... Dans mes cours de secondaire, les preuves par récurrence ne m'ont jamais paru fausses ou incomplètes. Par contre, le processus est malgré tout étonnant.*"

FIGURE 6.5 – Réponse d'un professeur à la question P6

Nous ne présenterons pas ici les réponses à la **question P7**. En effet, celle-ci étant mal posée, nous n'avons pas pu en tirer des réponses claires. Nous en avons tout de même retenu certaines informations que nous développerons dans l'analyse transversale. Remarquons néanmoins qu'à cette question, beaucoup ont répondu que la démonstration par récurrence permettait de démontrer une infinité de propositions en un temps fini.

A la **question P8**, nous avons demandé aux professeurs comment ils reconnaissaient qu'un problème était à traiter par le biais d'une démonstration par récurrence. Nous souhaitions également qu'ils mentionnent trois exemples de problèmes à traiter. Voici, repris dans le diagramme circulaire ci-dessous, le panel des réponses que nous avons reçues à la première partie de la question.

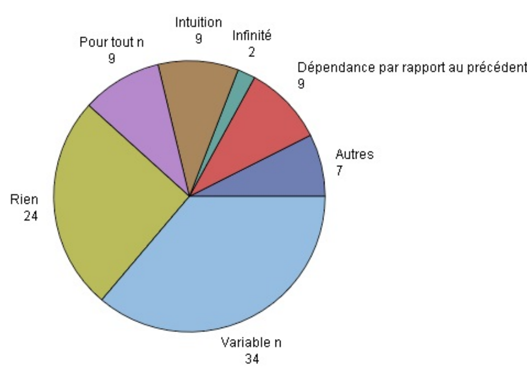


FIGURE 6.6 – Ensemble des réponses à la question P8 : *Comment reconnaissez-vous dans un problème que vous pouvez utiliser la récurrence ?*

Avant de commenter le diagramme de la figure **??**, explicitons les titres repris dans ce graphique :

- *Variable n* : une variable naturelle intervient dans le problème considéré.
- *Rien* : l'enseignant n'a pas répondu à la question.
- *Intuition* : les propositions considérées dans ce type de problème peuvent être facilement déterminées par intuition, sur base de quelques valeurs particulières pour lesquelles on "sent" qu'une généralisation est possible.
- *Dépendance par rapport au précédent* : afin d'expliquer l'idée que renferme cette variable, reprenons les termes exacts d'un des professeurs.

  > "*Le passage de n à $n+1$ doit garder une formule de même type et le passage de l'une à l'autre doit se faire sans difficulté.*"

  FIGURE 6.7 – Réponse d'un professeur à la question P8

  Sont donc sous-entendues ici des propositions dont l'hérédité est facile à démontrer.
- *Pour tout n* : les propositions à démontrer par récurrence contiennent un "$\forall n$" où $n \in \mathbb{N}$.
- *Infinité* : il s'agit de propositions qui en renferment une infinité à démontrer. Pour reprendre les termes d'un des enseignants :

  > "*Il s'agit de propositions pour lesquelles on a envie de dire : et ainsi de suite.*"

  FIGURE 6.8 – Réponse d'un professeur à la question P8
- *Autres* : dans cette catégorie, on retrouve différentes réponses. Nous ne les développerons pas toutes. Néanmoins citons les suivantes :

  - certains nous disent que les propositions à traiter via une démonstration par récurrence sont simples.

  - d'autres nous disent encore qu'il s'agit de propositions qu'il est impossible de démontrer autrement que par récurrence.

  - etc.

Comme nous pouvons le voir, la majorité des enseignants nous affirment que les propositions à démontrer par récurrence détiennent toujours une variable naturelle. Notons également un nombre étonnant d'enseignants qui se sont abstenus de répondre à la question, n'ayant sans doute pas eu l'envie ni le temps de mentionner les trois exemples différents demandés. Remarquons enfin que, à la lecture des questionnaires, nous avons pu constater que la majorité des enseignants considèrent que les problèmes devant être résolus via le principe de récurrence sont des propositions données à démontrer.

Illustrons cela par les propos d'un des enseignants :

"*Un problème qui peut utiliser la récurrence est celui dont le résultat à démontrer est clairement mentionné (on ne doit pas le découvrir).*"

Figure 6.9 – Réponse d'un professeur à la question P8

En ce qui concerne les exercices demandés, ils sont souvent du même type. Ainsi,

- le binôme de Newton est régulièrement cité ainsi que les formules de Moivre et de la dérivée d'une fonction dont l'exposant est n, nombre naturel.
- des formules sommatoires sont mentionnées.
- des propositions de la forme "démontrer que $\forall n \in \mathbb{N} : (3^{2n+1} + 2^{n+2})$ est divisible par 7" sont données.
- des propositions dans lesquelles des exposants naturels interviennent sont proposées.

D'autres enseignants font preuve de plus d'imagination et d'originalité et nous proposent les exemples suivants.

•Démontrer que n droites du plan partagent le plan en au plus $1 + \frac{n(n+1)}{2}$ régions.

•Trouver le nombre maximal de régions du plan déterminées dans un cercle par toutes les cordes passant par n point de ce cercle.

•La formule de Leibniz : $(f \cdot g)^n = \sum\limits_{k=0}^{n} C_n^k f^{(k)} \cdot g^{(n-k)}$

Figure 6.10 – Réponses de professeurs à la question P8 : propositions "originales" à démontrer par récurrence

Ces exemples nous montrent qu'il est possible de trouver une multitude de problèmes à traiter via une démonstration par récurrence et ce, dans des domaines multiples : géométie, algèbre, analyse, etc.

La **neuvième question** consistait à commenter deux phrases tirées de manuels. Pour la première, il s'agissait de remarquer que l'article **l'** des termes "***l'****entier p supérieur ou égal* [...]." n'était pas adéquat. En ce qui concerne la deuxième phrase, il fallait trouver que le pas d'hérédité n'était pas forcément égal à 1 et que l'article "un" des termes "**un** entier $n \geqslant 1$" n'était pas approprié. Nous nous attendions également à ce que certains professeurs nous disent que cette deuxième phrase n'avait pas vraiment d'utilité ni de sens.

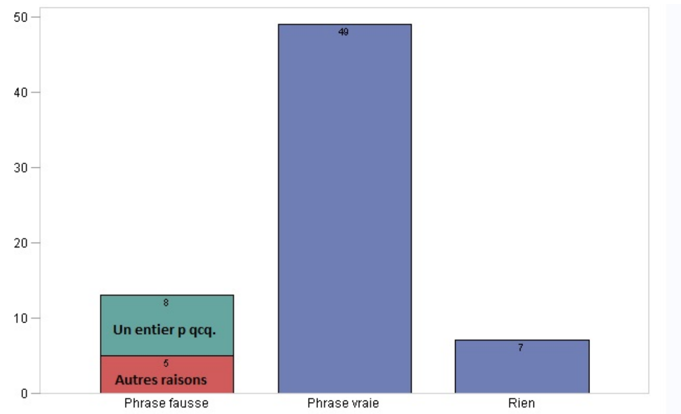


FIGURE 6.11 – Ensemble des réponses à la question P9a : commentaires par rapport à l'extrait de *Indice x*

Nous voyons qu'une majorité des professeurs considèrent que la première phrase est totalement vraie. Certains nous affirment :

"*Oui, elle est tout à fait correcte. C'est d'ailleurs le principe même de récurrence*".

FIGURE 6.12 – Réponse d'un professeur à la question P9a

Soit les professeurs ont lu trop vite cette phrase, soit ils ne perçoivent pas que c'est un quantificateur universel qui porte sur l'ensemble de l'implication de l'hérédité. Seules 8 personnes sur 69 (12%) nous mentionnent qu'il conviendrait mieux d'utiliser les termes "un p quelconque". Cinq autres nous affirment que la phrase est fausse mais cette fois pour de mauvaises raisons. Parmi celles-ci, citons en quelques unes :

"*Il faut démontrer également qu'elle est vraie pour* $n_0 + 1$."

"*Il faut au moins que l'amorce de la récurrence comporte 2 à 3 exemples. Vrai au moins pour* $n = 1$, $n = 2$ *et* $n = 3$."

FIGURE 6.13 – Réponses de deux professeurs à la question P9a

La première réponse de la figure **??** nous laisse sous-entendre que soit le professeur ne comprend pas le rôle de l'amorce, soit il fait ici allusion au principe de récurrence d'ordre 2. La deuxième réponse de la même figure met en évidence, une nouvelle fois, un problème au niveau du pas d'amorce.

Concentrons nous à présent sur les réponses à la question P9b et voyons ce que nous pouvons en tirer.

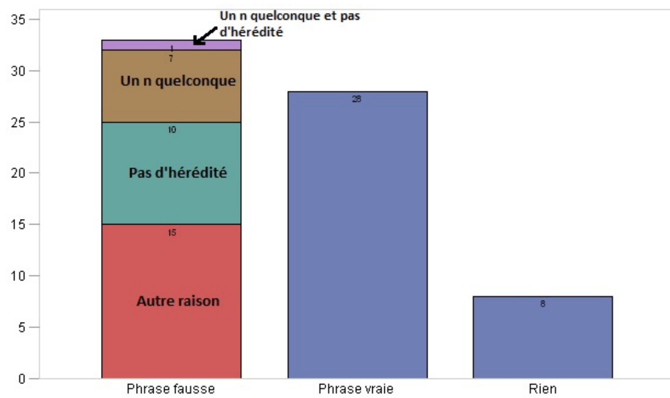


FIGURE 6.14 – Ensemble des réponses à la question P9b : commentaires par rapport à l'extrait de *Declic*

En ce qui concerne cette phrase, 28 personnes (c'est-à-dire 40% de notre échantillon) nous affirment qu'elle est tout à fait correcte. Pourtant, nous estimons qu'elle n'a pas sa place dans un manuel scolaire puisqu'elle est, à nos yeux, vide de sens. Seulement un enseignant sur les 69 a trouvé que la phrase était incorrecte pour les deux raisons que nous avons déjà citées : il s'agit d'un entier quelconque et, de plus, le pas d'hérédité n'est pas forcément le nombre 1. D'autres enseignants avaient trouvé une raison sur les deux : 7 (10 %) pour le "n quelconque" et 10 (14%) pour le pas d'hérédité. Quinze personnes (22%) nous ont donné d'autres raisons pour justifier la fausseté de la phrase. Citons-en quelques-unes parmi celles-ci.

- Certains enseignants établissent un ordre entre la démonstration de l'amorce et celle de l'hérédité. Les propos suivants en témoignent :

"*Il faut d'abord démontrer le pas initial et ensuite le pas récurrent sinon on ne sait pas appliquer l'algorithme car il faut initialiser le compteur.*"

FIGURE 6.15 – Réponse d'un professeur à la question P9b

  Cette réponse nous fait comprendre deux choses. Premièrement, un ordre est fixé. Deuxièmement, l'enseignant a sans doute pensé que la phrase concernait le pas d'amorce. Or il s'agissait bien de l'hypothèse de récurrence.

- Six professeurs (9%) nous ont dit que le terme "supposer" les dérangeait fortement, qu'il conviendrait d'employer plutôt "démontrer".

- Un professeur nous a également fait remarquer qu'il n'emploierait pas du tout cette mise en garde :

> "*Je ne dirais pas cela : l'étape centrale est une implication qui doit être vraie pour tout n c'est-à-dire chaque fois que $P(n)$ est vraie alors $P(n+1)$ l'est aussi.*"

FIGURE 6.16 – Réponse d'un professeur à la question P9b

Nous sommes tout à fait d'accord avec cet enseignant. Il conviendrait d'insister sur l'implication plutôt que sur l'hypothèse de récurrence. Celle-ci nous semble mener régulièrement à des confusions.

La dixième et dernière **question** consistait à savoir la façon dont les enseignants abordaient la démonstration par récurrence dans leurs cours. Voici les différentes réponses qu'ils nous ont fournies.

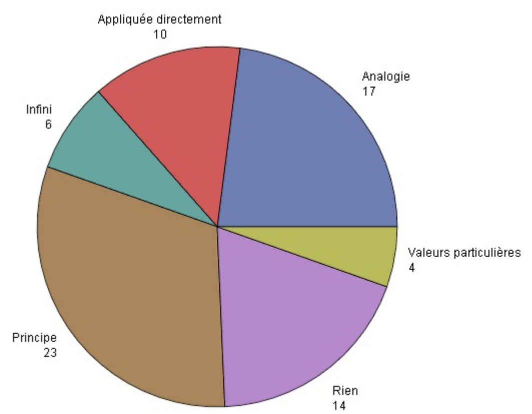


FIGURE 6.17 – Ensemble des réponses à la question P10 : différentes façons d'aborder la démonstration par récurrence en classe

Comme nous le voyons, un tiers des enseignants nous affirme aborder la démonstration par récurrence en présentant le principe de manière théorique. Dix-sept autres (25%) disent l'introduire à l'aide d'images analogiques. Plusieurs exemples ont été cités : chute de dominos, effet boule de neige, montée d'escaliers, fermeture d'une tirette, maladie qui se transmet dans une file de personnes, feu qui se propage d'étage en étage, planche de bande dessinée. En ce qui concerne cette dernière, elle est tirée de l'album *Idées Noires* (Franquin, 2001). Nous la reproduirons en annexe car elle nous semble être un moyen amusant pour introduire le principe de récurrence. Dix personnes (14%) nous disent appliquer directement la démonstration par récurrence sur de nouvelles notions. Pour le reste, certaines expliquent aux élèves qu'il est impossible de démontrer une infinité de propositions une à une et que le principe de récurrence est adéquat pour cette situation. D'autres encore commencent par faire établir des conjectures aux élèves avant de présenter le principe de récurrence qui aidera à démontrer celles-ci.

6.2.2 Analyse transversale

Nous avons, dans la sous-section précédente, réalisé une analyse descriptive, question après question. Nous allons à présent faire une lecture transversale des questionnaires reçus. Celle-ci nous permettra de mettre en évidence quelques réponses qui ont particulièrement attiré notre attention. Afin de clarifier nos propos, nous allons regrouper ces réponses et les classer en différents sujets liés à la pratique de la démonstration par récurrence par les enseignants.

Remarques d'ordre didactique

Au terme de nos études, nous n'avons encore, hormis nos stages et quelques cours particuliers, aucune pratique de l'enseignement. Nous n'avons jamais expérimenté la démonstration par récurrence avec une classe. Les témoignages de professeurs qui en ont eu l'occasion nous ont donc été très précieux. Leurs points de vue sont intéressants et d'ordre divers. Nous ne pouvons reprendre ici tous leurs avis. Nous choisirons ceux qui nous ont semblé les plus marquants et nous en ferons la critique. Ainsi, certains enseignants nous conseillent de :

- illustrer, via des images concrètes, le principe de récurrence avant de le transmettre de façon théorique. Ce conseil nous semble très sensé et, comme nous avons pu le constater précédemment, est parfois appliqué par les enseignants. Nous rejoignons totalement cet avis puisque les élèves d'aujourd'hui sont en quête de sens. Utiliser ce qu'ils connaissent pour apprendre de nouveaux concepts ne peut que les motiver à s'intéresser au sujet et à le comprendre.
- présenter les suites avant d'aborder la démonstration par induction. De cette manière, les élèves ont déjà eu un premier contact avec le raisonnement par récurrence. Nous n'avions pas pensé à cela auparavant mais nous trouvons cela judicieux et susceptible d'améliorer leur compréhension.
- ne pas aborder directement la preuve par récurrence par le biais de la démonstration du binôme de Newton. En effet, celle-ci nécessite de manipuler beaucoup d'indices ainsi que le symbole sommatoire. Nous rejoignons tout à fait cet avis puisque nous pensons qu'étudier deux nouveaux objets mathématiques en même temps risque de semer la confusion dans l'esprit des élèves. La démonstration par récurrence, pour être bien comprise et manipulée mérite, selon nous, un point d'étude spécifique.
- considérer avec les élèves des propositions à démontrer où le pas initial est 0 avant d'envisager la cas général. Nous ne rejoignons pas vraiment cet avis car commencer par des exemples où l'ensemble initial est $\mathbb{N}$ peut engendrer des conceptions erronées : pas d'amorce fixé à 0, pas d'hérédité égal au pas d'amorce, etc. Ainsi, il nous semble plus judicieux de commencer par le cas général et puis de l'appliquer à ce cas particulier.
- ne pas utiliser, dans la présentation du principe de récurrence, la variable n_0 pour le pas initial. Certains élèves pourraient en conclure que le pas initial est 0. Nous n'avions pas pensé à cette éventuelle confusion auparavant. Pour l'éviter, nous pourrions, en classe, envisager une autre variable (par exemple, n_i pour faire référence à "initial").
- ne pas employer des variables distinctes pour la proposition initiale, l'amorce et l'hérédité. Bien qu'utiliser des variables identiques soit tout à fait correct, nous ne rejoignons pas ce point de vue. En effet, nous pensons que procéder ainsi n'accentue pas ni "l'indépendance" relative entre l'amorce et l'hérédité, ni le fait que celles-ci sont

complémentaires pour établir la proposition initiale.

– ne pas utiliser, lors de la présentation du principe, l'hypothèse de récurrence mais plutôt l'implication qui est à démontrer. Nous sommes tout à fait d'accord car, comme nous l'avons déjà mentionné, l'utilisation de l'hypothèse de récurrence peut conduire à de nombreuses confusions. Pour illustrer ce propos, reprenons les termes d'un des enseignants :

"*Beaucoup d'élèves doutent avoir effectivement démontré quoi que ce soit à cause de l'hypothèse de récurrence au sein de la démonstration.*"

FIGURE 6.18 – Propos d'un professeur au sujet de l'hypothèse de récurrence

Certains de ces conseils nous semblent très précieux. C'est la raison pour laquelle nous en tiendrons compte lors du chapitre **??**. Celui-ci consistera à proposer des exercices destinés aux enseignants et visant à ce qu'ils intègrent la démonstration par récurrence dans leurs cours de manière la plus compréhensible possible.

Pour terminer cette sous-section, considérons à présent non plus des conseils didactiques mais certaines affirmations touchant également à l'enseignement de la démonstration par récurrence. Il s'agit ici uniquement de propos auxquels nous n'adhérons pas.

– un enseignant nous dit qu'il démontre au tableau une proposition classique sur $\mathbb{N}$ que les élèves gardent comme modèle. Ils travaillent ensuite par imitation pour l'appliquer à d'autres contextes. Cette façon de travailler sous-entend que le même type d'exercice sera toujours donné : une proposition initiale donnée à démontrer où l'ensemble de validité est $\mathbb{N}$. Or, nous savons qu'il existe d'autres exercices faisant intervenir la démonstration par récurrence (voir figure **??**), ne fût-ce que pour le cas où l'ensemble initial est un sous-ensemble de $\mathbb{N}$.

– plusieurs professeurs nous disent que l'enseignement de la démonstration par récurrence se fait intuitivement, que celle-ci ne nécessite pas de théorie puisqu'elle paraît naturelle aux élèves. Elle est même vue, pour reprendre les termes exacts d'un enseignant "*de manière anecdotique*" ou encore, "*à l'occasion*". L'un d'eux nous dit aussi qu'au moment où il voit la formule de dérivation des fonctions puissance, il "*glisse un mot*" sur cette technique, qu'il en parle "*brièvement*". Nous pensons que, bien que les propositions à démontrer puissent être intuitivement déterminées, le principe en lui-même mérite qu'on s'y attarde. Même si un enseignant nous dit encore que "*vu nos conditions de travail et le manque de temps général, je n'ai pas l'occasion de m'étendre sur le sujet*", nous trouvons que consacrer un peu de temps sérieusement à cette matière permettrait d'en gagner beaucoup par la suite. Les éventuelles erreurs qui résultent de son incompréhension seraient ainsi directement évitées.

Notons, pour terminer ce point d'ordre didactique, qu'un professeur d'études supérieures a dit qu'il voyait la démonstration par récurrence sous forme de rappels. Remarquons que c'est ce qui avait été également observé dans l'analyse de deux des trois manuels de l'enseignement supérieur (voir section **??**).

La démonstration par récurrence, un outil mathématique difficile pour les élèves ?

Certains enseignants considèrent que la preuve par récurrence est difficile pour beaucoup d'élèves et est même à utiliser en dernier recours. Ils préféreront, lorsque c'est possible, employer des preuves directes qui paraissent "plus naturelles". Pour reprendre les termes exacts de l'un d'eux :

> "*La démonstration par récurrence, c'est déjà un peu de l'artillerie lourde.*"

FIGURE 6.19 – Propos d'un professeur au sujet de la difficulté des démonstrations par récurrence

Certains enseignants nous livrent les raisons de cette difficulté et pointent plus particulièrement la notion de l'infini :

> "*Oui, elle est tout à fait irréfutable mais la question est de savoir si on a indûment franchi une infinité d'étapes en une seule opération. C'est une question angoissante pour les élèves.*"

FIGURE 6.20 – Propos d'un professeur au sujet de la notion d'infini présente dans la démonstration par récurrence (question P6)

Heureusement, tous ne sont pas de cet avis et nous disent même qu'il est parfois préférable de l'utiliser car elle est beaucoup moins compliquée que les autres outils de démonstration. L'un d'eux nous dit même que c'est la méthode la plus simple à présenter aux élèves.

Pour terminer sur ce point, notons que quel que soit le degré de difficulté que les enseignants lui attribuent, elle est souvent reconnue comme efficace et même, pour l'un d'eux, "*admirable d'efficacité*". Un autre encore la reconnait comme indispensable :

> "*Plusieurs propriétés mathématiques, démontrées par récurrence, ne peuvent tout simplement pas être démontrées autrement et demeureraient dès lors inaccessibles.*"

FIGURE 6.21 – Propos d'un professeur au sujet de la nécessité de la démonstration par récurrence

Manque de rigueur

Pour illustrer ce point, reprenons quelques formulations du principe de récurrence proposées par des enseignants qui nous ont semblé tout à fait floues.

"*Si une propriété est vraie pour* n, $n+1\cdots$, *elle le sera pour tout* $p >= n+1$."

"*Une démonstration du style vrai pour* n, *vrai pour* $n+1$."

"*Vrai pour 1 et vrai pour* n *entrainent vrai pour* $n+1$."

"*Effectuer la proposition pour 1, 2,* $\cdots$, n *avec un certain lien entre les étapes.*"

FIGURE 6.22 – Formulations "floues" du principe proposées par quelques enseignants

En ce qui concerne la deuxième et la troisième présentations du principe reprises à la figure **??**, il s'agit de professeurs abordant la démonstration par récurrence dans leur classe. Nous espérons qu'ils ne la présentent pas de cette manière à leurs élèves.

A présent, illustrons encore ce manque de rigueur de certains enseignants à propos de la présentation de la démonstration de récurrence. Mais, cette fois, ciblons quelques points particuliers du principe :

- Certains considèrent que la démonstration par récurrence ne concerne que des propositions à démontrer sur l'ensemble $\mathbb{N}$ tout entier ou, parfois même uniquement pour $\mathbb{N}_0$.
- En ce qui concerne le pas d'amorce, celui-ci semble parfois choisi un peu par hasard. Plutôt que de le voir comme un élément "déclencheur", certains semblent l'utiliser en tant que valeur particulière permettant de montrer que la proposition est déjà vraie pour une premières valeur de n. Souvent, les enseignants la mentionnent comme égal à 0, 1 ou 2. Or, nous savons que ce n'est pas forcément le cas. Afin d'illustrer nos propos, considérons les extraits suivants :

"*Il faut au moins que l'amorce de la récurrence comporte 2 à 3 exemples (vrai au moins pour* $n = 1$, $n = 2$*).*"

"*La formule à démontrer doit être facilement vérifiable pour* $n = 1$ *(ou 2 ou* $\cdots$*).*"

"*Une première démonstration est faite pour valider* $P(0)$ *si la proposition a du sens dans ce cas. Sinon, pour* $P(1)$*.*"

FIGURE 6.23 – Propos de professeurs au sujet du pas d'amorce

Un autre enseignant encore nous propose une partie de son cours concernant la démonstration du binôme de Newton. Dans celle-ci, il nous indique que la proposition à démontrer est vraie sur "$\forall n \in \mathbb{N}_0$". Or, il commence sa démonstration par montrer que le binôme est vraie pour $n = 1$ et pour $n = 2$.

- Un ordre est parfois imposé entre la démonstration de l'amorce et de l'hérédité. De plus, le principe est schématisé sous forme d'étapes dont le nombre diffère de deux à trois, la dernière étant la conclusion.
- A propos de l'hérédité, peu d'enseignants ont mentionné l'implication [1] qui la constitue (18 sur 69, c'est-à-dire 26%). Or, elle nous semble être un élément important du principe. En général elle est présentée en deux étapes (formulation où l'hypothèse de récurrence est supposée).

Ajoutons que l'implication est un objet mathématique à la réputation difficile pour les élèves, plusieurs thèses l'affirment [2]. Nous avons donc voulu savoir si les enseignants agrégés étaient davantage conscients de la nécessité de la mentionner. Pour ce faire, nous avons réalisé un test d'indépendance (d'intervalle de confiance fixé à 95 %) entre la variable "agrégé ou non" et "implication mentionnée ou non". Reprenons-en ci-dessous les résultats ainsi que la tableau de contingence associé à ces variables.

Table de F2 par F1

		F1 agrégé	F1 non agrégé	Total
F2				
Implication	Fréquence	10	8	18
Pas d'implication	Fréquence	29	22	51
Total	Fréquence	39	30	69

Statistiques pour la table de F2 par F1

Statistique	DDL	Valeur	Prob
Khi-2	1	0.0093	0.9234
Test du rapport de vraisemblance	1	0.0092	0.9234
Khi-2 continuité ajustée	1	0.0000	1.0000
Khi-2 de Mantel-Haenszel	1	0.0091	0.9239
Coefficient Phi		-0.0116	
Coefficient de contingence		0.0116	
V de Cramer		-0.0116	

FIGURE 6.24 – Test d'indépendance : *y-a-t-il une dépendance entre le fait de mentionner l'implication de l'hérédité et celui d'être agrégé en mathématiques ?*

Le test nous révélant une p-valeur supérieure à 0.05, nous pouvons en conclure l'indépendance entre les deux facteurs. Cet échantillon d'enseignants étant assez faible, il convient de rester prudente.

1. Précisons que nous avons été tolérante en ce qui concerne l'implication, tout comme cela avait déjà été le cas au cours de l'analyse des manuels scolaires (voir figure ??).
2. Voir (Deloustal-Jorrand, 2004) et (Grenier et Fabert, 2011).

Toujours en ce qui concerne l'hérédité, certains enseignants oublient également de mentionner le quantificateur "Pour tout", comme l'illustrent les propos suivants :

"*Si une propriété est vraie pour $n = n_1$ et qu'on démontre que si elle est vraie pour $n = p \geqslant n_1$ alors elle l'est pour $n = p + 1$, on peut conclure que la propriété est vérifiée $\forall n \geqslant n_1$.*"

FIGURE 6.25 – Propos d'un professeur illustrant l'oubli du quantificateur universel de l'hérédité

Remarquons au passage la "gymnastique" concernant les variables employées.
Signalons également que certains enseignants considèrent le pas d'hérédité comme étant toujours égal à 0 ou 1.

D'autres enseignants n'établissent aucun lien entre les pas d'amorce et d'hérédité dans leur présentation du principe. Nous pouvons le constater dans l'extrait suivant :

"*On doit démontrer que si une formule est vraie pour un entier p alors elle est aussi vraie pour l'entier qui suit $p+1$. Ceci étant prouvé, si notre formule est vérifiée pour un entier n, alors elle sera vraie pour tous les entiers qui suivent n.*"

FIGURE 6.26 – Propos d'un professeur témoignant d'une absence de complémentarité entre l'amorce et l'hérédité

Par cette phrase, nous pouvons constater qu'aucun lien n'est établi entre p et n. D'ailleurs, si le n en question est inférieur au rang à partir duquel l'hérédité est vraie, la conclusion ne peut être établie.

Pour terminer cette analyse transversale, nous constatons que certains (5 professeurs sur 69 c'est-à-dire 7%) écrivent l'hérédité correctement c'est-à-dire sous la forme $\boxed{\forall n \geqslant n_0 : P(n) \Rightarrow P(n+1)}$.

6.3 Conclusion

Reprenons, en guise de conclusion et de manière succincte, les observations tirées de ces analyses descriptive et transversale et qui nous semblent les plus intéressantes. Précisons que nous nous gardons ici d'une généralisation abusive. Pour plus de clarté et pour pouvoir nous y référer facilement plus tard dans ce travail, nous mentionnerons en caractères gras les termes "clés" de ces constats.

Commençons par tirer différentes conclusions d'ordre général :

- nous avons remarqué que beaucoup de professeurs interrogés sont **conscients** de la **double orientation** d'utilisation du raisonnement par récurrence en mathématiques (démonstration et construction d'objets).
- les enseignants interrogés **abordent majoritairement** la démonstration par récurrence **dans leurs classes** (59 personnes sur 69 c'est-à-dire 85%) et ce non **pas seulement** au sujet du **binôme de Newton**, comme cela semble préconisé dans les programmes. Notons que plus ou moins **un cinquième** des professeurs interrogés nous

disent voir la démonstration par récurrence dans un **chapitre spécifique** de logique. Remarquons néanmoins qu'il s'agit, dans de nombreux cas, de classes de 8h./sem. de mathématiques.

- parmi l'ensemble des enseignants traitant la démonstration par récurrence au sein de leurs classes, **peu** nous disent l'aborder en l'**appliquant directement** à de nouvelles notions. En général, une **présentation du principe** est effectuée ou des **images analogiques** sont données.
- à propos du niveau de **difficulté** de la démonstration par récurrence, les avis sont **controversés** et, voire même, divergents. La **notion de l'infini** est à plusieurs reprises mentionnée comme étant un **obstacle** à la compréhension des élèves. Cela rejoint non seulement les propos tenus dans notre étude épistémologique du chapitre **??**, mais aussi les propos tenus par Grenier dans son analyse.
- une forte majorité d'enseignants la considèrent **irréfutable** et certains la qualifient même d'**indispensable**.
- concernant la légitimé du principe, **peu** d'enseignants mentionnent explicitement l'**axiome de récurrence**. Presque **un tiers** des enseignants ne donnent **aucune réponse** à ce sujet et une majorité explique le fonctionnement de la démonstration. Seuls **trois** professeurs ont formulé le **principe de Fermat**. Notons que ce faible effectif avait déjà été observé par Grenier dans son analyse.

Voici à présent quelques constats plus centrés cette fois sur le principe de récurrence et ses finesses :

- nous avons observé des **confusions** en ce qui concerne le **quantificateur universel** de l'**hérédité**.
- l'**amorce** est parfois considérée comme **une étape de vérification** et non pas comme une étape de "déclenchement", ce qu'elle est réellement.
- nous n'avons jamais observé une écriture du principe suivant l'ordre du type : démonstration de l'hérédité et puis, de l'amorce. Ainsi, tout comme nous l'avons observé dans les manuels scolaires, le **principe** s'écrit généralement sous une forme **schématique** pour laquelle un **ordre est établi** et voire même, **dans certains cas, imposé**.
- certaines formulations du principe n'établissent **pas de lien entre l'amorce et l'hérédité**. Pourtant celles-ci sont tout à fait complémentaires afin de tirer une conclusion.
- certains professeurs nous affirment que l'utilisation de l'**hypothèse de récurrence** à la place de l'implication est susceptible d'engendrer des **confusions**. Cela ne semble pas toucher que les élèves puisque quelques professeurs sont également concernés.
- nous n'avons observé que des exercices ou des formulations du principe de type 1 ou de type 2, c'est-à -dire où **la proposition initiale est donnée**.
- seul **un quart** des enseignants ont mentionné l'**implication**. Elle est régulièrement présentée en deux étapes où l'hypothèse de récurrence est supposée.
- très **peu** d'enseignants ont écrit **correctement l'hérédité** c'est-à-dire sous la forme $\forall n \geqslant n_0 : P(n) \Rightarrow P(n+1)$

Notons qu'en ce qui concerne l'ensemble des constats plus centrés sur le principe-même, beaucoup sont analogues à ceux émis par Grenier dans son analyse. Néanmoins, notons une différence : certains de nos enseignants formulent correctement l'hérédité alors que ce n'était pas le cas dans l'étude menée en France.

De tous ces constats, nous pouvons tirer les conclusions suivantes. S'il est clair que la démonstration par récurrence semble irréfutable pour les enseignants, soit une notion bien présente dans leur esprit, ils la disent parfois difficilement compréhensible par leurs élèves. Certains d'ailleurs ne l'abordent en tant qu'objet mathématique que dans les cours de préparation aux études supérieures. Pourtant, elle est couramment évoquée dans les cours à 4 ou 6 heures de mathématiques par semaine lors de la démonstration du binôme de Newton, du chapitre des suites, des complexes, etc. En ce qui concerne la maitrise du principe de récurrence, nous pensons qu'elle est globalement acquise par les enseignants. Néanmoins, un manque de rigueur flagrant est observé chez quelques-uns d'entre eux. Pour l'aborder en classe, certains utilisent des images analogiques, d'autres l'appliquent directement à une nouvelle proposition. Mais la plupart présentent le principe tel quel. De ce que nous avons pu observer, seuls des exercices dans lesquels les propositions à démontrer sont données sont abordés en classe.

Chapitre 7

Analyse du savoir appris

L'analyse du savoir appris se fera, conformément à notre méthodologie, sur base de l'enquête menée auprès d'étudiants inscrits dans des branches scientifiques à l'Université de Namur. Il s'agit, plus précisément, de 21 étudiants de 1$^{\text{ère}}$ bac en sciences physiques, de 6 étudiants de 1$^{\text{ère}}$ bac en sciences mathématiques, de 5 étudiants de 2$^{\text{ème}}$ master en sciences mathématiques et, enfin, de 5 étudiants de l'agrégation en mathématiques n'ayant encore (hormis leur stage) aucune pratique d'enseignement [1]. Il est important de mentionner le contexte dans lequel les étudiants ont participé à cette enquête : ils y ont répondu à la fin de l'année scolaire, de manière individuelle, dans un auditoire sans note à leur disposition. Deux questionnaires différents ont été distribués selon leur niveau. Les étudiants de 2$^{\text{ème}}$ master et de l'agrégation en sciences mathématiques n'ayant pas encore enseigné ont reçu un questionnaire identique à celui proposé aux enseignants. Celui-ci a déjà été décrit au chapitre précédent. En ce qui concerne les étudiants de 1$^{\text{ère}}$ bac en sciences mathématiques et en sciences physiques, ils ont dû répondre à un autre questionnaire. En effet, nous en avons créé un plus adapté à leur année d'études, construit sur base des observations relevées dans les manuels, les programmes et sur les constats effectués par Grenier dans son enquête. Nous diviserons donc ce chapitre en deux parties : la première sera consacrée à l'analyse des réponses des étudiants de 1$^{\text{ère}}$ bac et, la deuxième, à celles des étudiants de 2$^{\text{ème}}$ master et d'agrégation.

L'analyse de tous ces questionnaires nous apportera énormément d'informations en ce qui concerne le savoir appris. Ainsi, nous tenterons de répondre, sur base de ces données, aux sous-questions suivantes concernant bien évidemment notre problématique de recherche :

- Les étudiants, toutes années confondues, comprennent-ils le principe de démonstration par récurrence ?
- Quelles sont les principales lacunes ou incompréhensions éprouvées face au principe de récurrence ?
- Observe-t-on une évolution de la première à la dernière année ?

FIGURE 7.1 – Analyse du savoir appris : questions posées

1. Les personnes passant l'agrégation et ayant déjà une pratique de l'enseignement des mathématiques ont été regroupées avec les enseignants. Nous en avons donc déjà tenu compte dans le chapitre précédent.

Avant d'entamer notre analyse, nous tenons à préciser que nous sommes consciente du fait que nos effectifs sont très faibles et que, par conséquent, nos échantillons ne sont pas vraiment révélateurs de la réalité. Les étudiants de 2ème master ainsi que ceux de l'agrégation en mathématiques sont peu nombreux à l'Université de Namur en cette année 2013 et, de plus, ils n'ont pas tous répondu à notre questionnaire. En ce qui concerne les étudiants de 1ère année en sciences mathématiques, ils ont également été peu nombreux à répondre à notre demande, bien que nous les ayons sollicités à plusieurs reprises. Six étudiants seulement ont accepté de cooépérer alors que ving-et-un l'ont fait pour la section physique.

Notons encore qu'une question supplémentaire avait été envisagée au cours de cette analyse. Il s'agissait de savoir si une différence était observée entre les étudiants de 1ère bac en sciences mathématiques et ceux de la section physique en ce qui concerne la compréhension du principe de récurrence. Ainsi, nous aurions pu voir si le cours d'initiation à la démarche mathématique [2] suivi par les étudiants de mathématiques et non par ceux de sciences physiques engendrait une différence de compréhension du sujet. Maheureusement, nous ne pouvons pas nous prononcer étant donné le peu de réponses reçues dans le chef des étudiants en mathématiques. Nous en glisserons tout de même un mot dans la conclusion de l'analyse des résultats des étudiants de 1ère bac interrogés.

7.1 Enquête menée auprès des étudiants de 1ère bac en sciences mathématiques et en sciences physiques

Le questionnaire distribué aux étudiants de première année en sciences mathématiques et en sciences physiques est, comme nous l'avons déjà précisé, adapté au niveau des étudiants. Un questionnaire identique à celui destiné aux enseignants leur avait été dans un premier temps distribué. Comme il n'avait donné que très peu de résultats, nous avons décidé de leur en présenter un autre, plus approprié. Notons que, pour une question de manque de temps, nous avons dû raccourcir le questionnaire pour les étudiants de sciences physiques (les questions E9 et E10 ont été supprimées dans leur cas). En effet, nous n'avons pu les interroger que pendant trois quarts d'heure car ils avaient cours immédiatement après. Remarquons qu'il s'agit d'un questionnaire "progressif" au cours duquel les questions sont de plus en plus précises. Nous avons donc demandé aux étudiants de ne jamais revenir en arrière.
Dans cette sous-section, nous commencerons par présenter les différentes questions posées aux étudiants ainsi que les raisons qui nous ont motivée à les leur soumettre. Dans un deuxième temps, nous analyserons les résultats obtenus en veillant à distinguer, lorsque c'est nécessaire, la situation des étudiants mathématiciens et celle des physiciens. Enfin, nous conclurons cette sous-section en apportant des premières réponses aux questions que pose ce chapitre (voir figure **??**).

2. Les objectifs de ce cours sont décrits à la sous-section **??**.

7.1.1 Présentation du questionnaire à destination des étudiants de $1^{\text{ère}}$ bac en sciences mathématiques et en sciences physiques

Question E1 :

a) Connais-tu différentes "techniques" de démonstration ? Si oui, cite-les.

b) Peut-on, selon toi, utiliser une combinaison de certaines de ces "techniques" dans une seule preuve ? Si oui, laquelle ou lesquelles ?

Question E1 : la première question est assez large. Elle nous permet de comprendre où les étudiants situent la démonstration par récurrence par rapport à l'ensemble des outils conçus pour prouver des résultats. Nous voyons de cette manière si, comme l'a constaté Grenier en France, les étudiants belges classent la démonstration par récurrence selon une "*typologie de preuves exclusives les unes des autres*". Nous verrons particulièrement s'ils distinguent les démonstrations par récurrence et par l'absurde ou s'ils admettent leur combinaison comme dans l'exemple présenté à la figure **??**.

Question E2 : Tu es rédacteur d'un manuel scolaire de $6^{\text{ème}}$ secondaire et tu dois rédiger le plus clairement possible le principe d'une démonstration par récurrence. Rédige ton petit article...

Question E2 : les étudiants sont ici mis en situation. Nous cherchons à comprendre, de manière générale, comment ils perçoivent le principe de démonstration par récurrence. Cette question nous permettra notamment de savoir s'ils l'écrivent sous forme d'étapes et, dans ce cas, d'en préciser le nombre. Nous en profiterons également pour voir si l'implication de l'hérédité est mentionnée explicitement.

Question E3 : Selon toi, le raisonnement par récurrence est-il fiable à 100% pour démontrer une proposition ? Si oui, pourquoi ? Si non, pourquoi ?

Question E3 : cette question nous permet de savoir si les étudiants ont un doute quant à la validité du principe comme moyen de démonstration.

Question E4 : Que penses-tu de la phrase suivante :
"Puisque on suppose que $P(n)$ est vraie pour un n quelconque, c'est normal de trouver que $P(n+1)$ est vraie pour tout n. On n'a donc rien démontré."

Question E4 : la phrase reprise dans cette question est tirée d'une affirmation d'un des étudiants interrogés par Grenier. Nous nous en sommes servie pour connaitre l'avis des étudiants belges à son propos. Plus précisément, nous cherchons à savoir ici si les étudiants perçoivent l'implication qui est à démontrer dans l'hérédité et, surtout, s'ils en comprennent le rôle et l'utilité au sein du principe.

Question E5 :

Voici comment un étudiant aurait pu expliquer le principe général de démonstration par récurrence :

On veut démontrer la proposition $P(n)$ est vraie $\forall n$.

1. On suppose que $P(n)$ est vraie pour un $n \in \mathbb{N}$ quelconque.
2. On montre alors que $P(n+1)$ est vraie.
3. On montre que P(0) est vraie.
4. On en conclut que P(n) est vraie $\forall n$.

a) La marche à suivre présentée ci-dessus est-elle correcte ? Si pas, indique ce qui est incorrect et justifie tes choix (tu peux barrer et/ou ajouter des commentaires).

b) Ce raisonnement est-il assez rigoureux ? Si pas, indique ce que tu ajouterais et/ou enlèverais pour qu'il le devienne et justifie tes choix (utilise une autre couleur que pour la question a).

c) Pourquoi, selon toi, suppose-t-on que $P(n)$ est vraie ?

d) Quel est ce n quelconque dans l'étape 1 ("On suppose que $P(n)$ est vraie pour un n quelconque") ?

e) Le n de l'étape 4 ("On en conclut que $P(n)$ est vraie $\forall n$") est-il le même n qu'à l'étape 1 ("On suppose que $P(n)$ est vraie pour un n quelconque") ?

Question E5 : dans cette question, nous avons utilisé expressément la même variable dans la proposition initiale et l'hérédité. De plus, nous n'avons pas écrit de façon explicite l'implication constituant l'hérédité. Et, enfin, nous avons rédigé la conclusion sous forme d'étape supplémentaire. Ainsi, les questions E5a et E5b permettent de voir si les étudiants :

- accordent de l'importance à l'ordre dans lequel l'amorce et l'hérédité sont démontrées.
- considèrent que le pas d'amorce est toujours égal à 0.
- confondent l'hypothèse de récurrence avec la proposition initiale.
- précisent l'ensemble initial.
- remarquent l'absence des quantificateurs.

La question E5c pointe plus particulièrement l'implication de l'hérédité. Elle permet de savoir si les étudiants perçoivent l'implication à démontrer et, dans l'affirmative, s'ils comprennent la raison pour laquelle supposer $P(n)$ (voir la table de vérité de l'implication, figure **??**). En ce qui concerne la question E5d, elle nous permet de voir si les étudiants savent que c'est un quantificateur universel qui porte sur l'implication. Quant à la question E5e, elle nous permettra de savoir si les étudiants font la distinction entre la proposition initiale et l'hypothèse de récurrence.

Comme nous le découvrirons dans la suite de l'analyse, les réponses données par les étudiants aux questions E5d et E5e sont difficilement exploitables. Il aurait peut-être été plus judicieux d'employer des variables distinctes pour la proposition initiale et l'hérédité dans la présentation du principe de récurrence.

Nous aurions alors posé les questions suivantes : pourquoi selon toi avons-nous utilisé des variables différentes pour la proposition initiale et l'amorce ? L'entier quelconque pour lequel on suppose la proposition vraie a, en fait, un lien avec un quantificateur. Pour toi, quel est-t-il ? Porte-t-il sur le même ensemble de naturels que celui considéré dans la proposition initiale ?
Bien que ces nouvelles questions nous semblent plus directives, nous ne pouvons affirmer avec certitude qu'elles auraient amené les résultats attendus.

Question E6 : Observe le raisonnement suivant et aide l'élève à conclure :

Démontrons par récurrence que pour tout entier naturel,

$$2^n \geqslant (n+1)^2$$

- $n = 0 : 2^0 = 1 \geqslant 1$ OK
- Supposons que $2^n \geqslant (n+1)^2$ et montrons que $2^{n+1} \geqslant (n+2)^2$

  $2^{n+1} = 2^n \cdot 2 \geqslant 2 \cdot (n+1)^2$ par hypothèse de récurrence

$$\begin{aligned} 2 \cdot (n+1)^2 \geqslant (n+2)^2 \quad & \mathit{Ssi} \quad 2(n^2+1+2n) \geqslant n^2+4+4n \\ & \mathit{Ssi} \quad 2n^2+2+4n \geqslant n^2+4+4n \\ & \mathit{Ssi} \quad n^2-2 \geqslant 0 \\ & \mathit{Ssi} \quad n \geqslant 2 \text{ (car } n \in \mathbb{N} \text{ et } \sqrt{2} \simeq 1,4\text{...)} \end{aligned}$$

Question E6 : cette question nous permet de savoir si les étudiants ont le réflexe d'établir une "synthèse" des pas d'amorce et d'hérédité. La proposition considérée ici est tirée de l'article de Grenier et nous semble tout à fait appropriée à l'attente que nous avons de cette question. En effet, le pas d'amorce est ici égal à 6 alors que celui d'hérédité est égal à 2. Il s'agit donc, dans cet exercice, de tester la proposition pour différentes valeurs et, une fois le pas d'amorce déterminé, d'établir une synthèse des différents pas. La question E6 nous permettra également de savoir si les étudiants ont conscience du fait que le pas d'amorce est en fait égal à 1, pas à 0. En effet, $2^0 = 1$ est une convention et est donc un cas "à part", à vérifier en dehors du principe de récurrence. Nous avions par exemple tenu compte de cela lors de la démonstration du binôme de Newton (voir figure **??**).

Question E7 : Observe le raisonnement ci-dessous et réponds aux questions suivantes :

> Supposons que $(10^n + 1)$ est divisible par 9.
> Montrons que $(10^{n+1} + 1)$ est divisible par 9.
>
> $$(10^{n+1} + 1) = (10^n \cdot 10 + 10 - 9) = (10^n + 1) \cdot 10 - 9$$
>
> Or nous savons, par hypothèse de récurrence, que $(10^n + 1)$ est divisible par 9.
> Donc $(10^n + 1) \cdot 10$ sera également divisible par 9.
>
> Nous pouvons donc affirmer que $(10^n + 1) \cdot 10 - 9$ est divisible par 9 car c'est une différence de deux termes divisibles par 9.
>
> Donc $(10^{n+1} + 1)$ est bien divisible par 9.

a) Quel est l'énoncé démontré par cette preuve ?

b) Cette preuve est-elle correcte ? Si pas, justifie pourquoi elle ne l'est pas.

c) Penses-tu que la proposition suivante est vraie ou fausse (justifie) :

$$\forall n \in \mathbb{N} : (10^n + 1) \text{ est divisible par } 9$$

Question E7 : la proposition considérée dans cet exemple a été reprise de l'article de Grenier. Nous l'avons utilisée pour poser les questions E7a, E7b et E7c qui nous permettent de savoir si :

- les étudiants arrivent à distinguer le fait de démontrer l'implication constituant l'hérédité du fait de démontrer la proposition initiale.
- les étudiants comprennent que l'hérédité et l'amorce sont complémentaires pour pouvoir démontrer la proposition initiale.

Question E8 :

a) Penses-tu être à l'aise avec la preuve par récurrence ?

b) Serais-tu intéressé par un tremplin [a] sur la preuve par récurrence ?

c) Avais-tu déjà vu la preuve par récurrence en secondaire ? Si oui, précise dans quelle(s) matière(s) et à propos de quel(s) sujet(s) précisément (si tu t'en souviens).

a. Un tremplin est une séance de remédiation donnée à la demande des étudiants de 1ère année à l'Université de Namur.

Question E8 : cette question nous permet de savoir si les étudiants se sentent à l'aise avec la démonstration par récurrence. Cela est bien entendu à mettre en lien avec la compréhension qu'ils en ont réellement.

Les deux prochaines questions toucheront plus particulièrement à l'implication et ne seront posées qu'aux étudiants en sciences mathématiques. Nous avons décidé de les inclure dans le questionnaire car nous savons, d'après les études que nous avons consultées (voir section **??**), que cet objet mathématique pose énormément de problèmes aux étudiants.

Question E9 : Voici trois propositions :

1. J'ai du temps libre donc je vais monter à cheval.
2. Je vais monter à cheval si j'ai du temps libre.
3. Si j'ai du temps libre alors je vais monter à cheval.

a) Codifie chacune des propositions en utilisant les notations suivantes :

C : "Je vais monter à cheval"
L : "J'ai du temps libre" .

b) Réponds et justifie dans le cas où ce n'est pas équivalent :
- La proposition 1 est-elle équivalente à la 3 ?
- La proposition 1 est-elle équivalente à la 2 ?
- La proposition 2 est-elle équivalente à la 3 ?

Question E9 : les questions E9a et E9b nous permettent de savoir si les étudiants arrivent facilement à transformer le langage naturel en langage mathématique et, plus précisément, s'ils arrivent à distinguer l'implication $P \Rightarrow Q$ de la règle du modus ponens (voir figure **??**).

Question E10 : Complète.

Dans $P \Rightarrow Q$, nous avons que :

$\cdots$ est une condition nécessaire pour $\cdots$
$\cdots$ est vraie si $\cdots$ est vraie

Question E10 : cette question nous permet tout simplement de voir si les étudiants savent distinguer les notions *conditions nécessaires* et *conditions suffisantes* qu'induit l'implication.

Question E11 :
a) Comment, selon toi, reconnait-on une proposition à démontrer par récurrence ?
b) L'exemple de démonstration suivant a-t-il un rapport avec la démonstration par récurrence ? Explique.

> Montrons que $\sqrt{3}$ est irrationnel.
> Supposons que $\sqrt{3}$ soit rationnel. Soit a le plus petit entier positif tel que il existe b entier positif vérifiant $\frac{a}{b} = \sqrt{3}$. On a donc : $3b^2 = a^2$. Ceci implique que 3 divise a^2 ; a et b étant des entiers et 3 un nombre qui n'est pas un carré d'entiers, 3 divise a, et donc 3^2 divise $a^2 = 3b^2$. Il s'ensuit que 3 divise b^2, donc 3 divise b. Ainsi 3 divise à la fois a et b et a n'est pas le plus petit entier vérifiant $\frac{a}{b} = \sqrt{3}$. On a donc une contradiction. Donc, $\sqrt{3}$ est irrationnel.

Question E11 : la question E11a nous permet de savoir si les étudiants pensent qu'une proposition à démontrer par récurrence est toujours de la forme "Démontrons que $\forall n : P(n)$" ou bien s'ils savent que ce n'est pas toujours le cas (voir figure **??**).
La question E11b nous donne deux informations : premièrement, elle nous montre si les étudiants perçoivent le principe de récurrence "caché" dans les termes "*le plus petit entier*" de l'énoncé. Deuxièmement, elle nous permet de comprendre s'ils considèrent que le raisonnement par l'absurde et par récurrence sont ou non impossibles à concilier.

Nous tenons à indiquer que cette question nous parait, avec le recul, mal posée. En effet, nous pensons qu'il aurait été plus judicieux de proposer dans ce questionnaire la démonstration de "$\sqrt{3}$ est irrationnel" reprise à la figure **??**. En effet, cette dernière met beaucoup plus en évidence que le principe de Fermat est utilisé dans la démonstration. Reconnaitre que le principe se cache dans les termes "*le plus petit entier*" n'est vraiment pas aisé.

7.1.2 Analyse des réponses des étudiants de 1$^{\text{ère}}$ bac

Nous allons à présent analyser les résultats obtenus au terme de cette enquête menée auprès des étudiants de 1$^{\text{ère}}$ bac en sciences physiques et en mathématiques. Au cours de cette analyse, nous distinguerons régulièrement le cas des étudiants des deux disciplines. Cela nous permettra de voir s'il existe des différences significatives entre ces deux groupes. Bien entendu, rappelons que notre échantillon d'étudiants est faible (et encore plus dans le cas des étudiants en mathématiques). Il convient donc de rester prudente et consciente du fait que les résultats obtenus ne sont pas vraiment représentatifs de la situation des étudiants de 1$^{\text{ère}}$ bac.
Dans la sous-section précédente, nous avons explicité pourquoi nous avons choisi de poser les questions de notre enquête. Afin de réaliser au mieux cette analyse, nous avons décidé de regouper nos différentes observations selon les raisons invoquées.

- **La démonstration par récurrence a-t-elle été vue pendant le secondaire ?**

  Oui, c'est incontestable, la moitié des étudiants de 1$^{\text{ère}}$ bac interrogés en ont entendu parler. Les domaines cités sont ceux des suites, des nombres complexes et du binôme de Newton. De plus, certains étudiants nous affirment avoir abordé la démonstration par récurrence durant les deux heures supplémentaires du cours de préparation aux études supérieures. Mais comment cette matière a-t-elle été enseignée ? C'est la question que nous nous posons lorsque nous lisons notamment les commentaires ci-dessous.

"*Le prof nous avait expliqué la récurrence car on en avait besoin pour la preuve.*" (étudiant mathématicien)

"*En fait, le prof faisait comme si on l'avait déjà vue mais on n'avait jamais clairement eu de cours sur ça.*" (étudiant physicien)

FIGURE 7.2 – Réponses d'étudiants à la question E8c

  Ces deux propos sont en conformité avec n'analyse des programmes d'enseignement effectuée à la section **??**. En effet, il semble qu'effectivement, la démonstration par récurrence ne fasse, en général, pas l'objet d'un enseignement explicite.

- **La démonstration par récurrence semble-t-elle fiable aux étudiants pour démontrer des résultats ?**

"*Je ne saurais pas l'expliquer, j'ai trop l'impression qu'on arrange le truc de manière à ce que ça fonctionne et ce n'est pas clair pour moi.*" (étudiant physicien)

FIGURE 7.3 – Réponse d'un étudiant à la question E2

  Comme en témoigne cette affirmation, la démonstration par récurrence ne semble pas fiable pour tous. En effet, alors que tous les étudiants de 1$^{\text{ère}}$ bac en sciences mathématiques lui accordent leur confiance, seulement une moitié des étudiants en sciences physiques sont de cet avis. Certains ne la trouvent pas du tout fiable (4 étudiants sur 21) ou fiable seulement à 80% (1 étudiant sur 21). Les derniers s'abstiennent de répondre.

- **Les étudiants classent-ils la démonstration par récurrence selon une typologie de preuves ?**

  Lorsque nous demandons aux étudiants de citer différentes "techniques" de preuves, tous mentionnent la démonstration par récurrence, au même titre que celle par l'absurde ou que les preuves déductives. Notons également que deux élèves mathématiciens parlent même de preuve par récurrence forte [3]. Ainsi, tous les étudiants interrogés ont entendu parler de démonstration par récurrence durant leur première année universitaire. Ils la classent selon une typologie de preuves que nous pourrions penser exclusives les unes des autres. Néanmoins, lorsqu'on leur demande si on peut combiner certains types de démonstrations, 5 étudiants mathématiciens sur 6

3. Cela est sans doute dû au fait que les étudiants de la section de mathématiques ont suivi le cours d'initiation à la démarche mathématique contrairement à ceux de la section physique. Nous avons effectivement vu que ce cours développe le principe de récurrence forte (voir figure **??**).

et 12 physiciens sur 21 (c'est-à-dire 63 % de l'ensemble des étudiants interrogés) répondent par l'affirmative. Nombreux sont ceux qui citent notamment la combinaison récurrence-aburde. Nous pourrions donc penser que les étudiants sont conscients que différents raisonnements peuvent être utilisés, combinés ou non, pour démontrer des résultats.

- **Comment les étudiants conçoivent-ils la forme des propositions à démontrer par récurrence ?**

A cette question, tous les étudiants de la section mathématique nous répondent qu'il s'agit de propositions de la forme "$\forall n : P(n)$" où n est un naturel. En ce qui concerne les étudiants physiciens, 11 sur 21 (52%) sont de cet avis. D'autres (2 sur 21) nous mentionnent qu'il s'agit en général de propositions de la forme $P(n)$ pour lesquelles un lien est facile à établir avec $P(n+1)$. Enfin, l'un deux nous dit encore que ce sont des propositions dont on a l'intuition (ce que nous pouvons mettre en relation avec l'induction incomplète).

Ainsi, lorsque nous demandons aux étudiants si la preuve de la proposition
"$\sqrt{3}$ est irrationnel" a un quelconque rapport avec une démonstration par récurrence, il n'est pas étonnant d'observer des réponses de la forme :

"*Non parce qu'il n'y a pas du tout de n ou d'indice du genre.*" (étudiant physicien)

"*Non, la démonstration par récurrence ne s'utilise pas pour démontrer des cas particuliers comme* $\sqrt{3}$." (étudiant physicien)

FIGURE 7.4 – Réponses d'étudiants à la question E11b

A propos de cet énoncé, notons encore qu'aucun étudiant n'a repéré qu'il s'agissait d'une démonstration mêlant absurde et récurrence. Mais, comme nous l'avons déjà mentionné, nous pensons après coup que cette question était mal posée. En effet, la démonstration proposée ici ne met pas en évidence l'utilisation du principe de Fermat contrairement à celle le figure **??** que nous aurions dû plutôt employer.

Notons enfin qu'aucun des étudiants n'a mentionné une situation autre que celle où la proposition initiale est donnée (à l'exception d'un seul qui nous a dit que les propositions à démontrer par récurrence sont celles dont on a l'intuition). Ainsi, ils ne semblent pas avoir été confrontés à une recherche des pas d'amorce et d'hérédité puisqu'ils leur étaient toujours fournis dans l'énoncé.

- **Les étudiants ont-ils conscience que le principe de récurrence s'applique uniquement aux entiers naturels ?**

Nous observons ici une différence significative entre les étudiants de 1$^{\text{ère}}$ bac en sciences mathématiques et ceux de sciences physiques. En effet, lorsqu'il est demandé d'expliquer le principe de récurrence, 4 étudiants mathématiciens sur 6 trouvent bon de spécifier que celui-ci s'applique à des éléments de $\mathbb{N}$. Par contre, seulement 4 étudiants physiciens sur 21 (19%) mentionnent ce fait.

Une "similitude" est par contre observée entre les deux groupes puisque 1 étudiant mathématicien sur 6 et 2 étudiants physiciens sur 21 seulement affirment que le pas initial peut être supérieur à 0 ou 1. Les autres mentionnent $\mathbb{N}$ comme ensemble initial ou ne précisent pas l'ensemble considéré. Ces derniers écrivent donc la proposition initiale de la forme "$\forall n : P(n)$".

- **Les étudiants considèrent-ils le principe de récurrence de manière schématique ?**

  Le plus souvent, les étudiants écrivent le principe de récurrence en deux étapes distinctes : l'amorce et l'hérédité. Cela concerne, dans notre échantillon, 4 étudiants mathématiciens et 11 étudiants physiciens. Nous trouvons également des schémas en trois étapes, la troisième étant la conclusion tirée de l'amorce et de l'hérédité. La conclusion s'établit grâce à la complémentarité de celles-ci et ne constitue pas une étape supplémentaire. Enfin, il faut encore signaler que deux étudiants physiciens ne parlent que d'une étape, l'amorce ayant été dans ce cas omise.

- **Les étudiants respectent-ils un ordre entre les démonstrations de l'amorce et de l'hérédité ?**

  Oui, assurément. Lorsque nous avons demandé aux étudiants de rédiger le principe de récurrence (question E2), tous ont respecté l'ordre suivant : démonstration de l'amorce puis, de l'hérédité. De plus, lorsqu'ils ont été confrontés à un ordre contraire à celui-là, 4 étudiants mathématiciens sur 6 et 14 physiciens sur 21 (66%) ont mentionné qu'il s'agissait d'une erreur (question E5).

- **Les étudiants considèrent-ils que le pas d'amorce est toujours égal à 0 ou à 1 ?**
  Pour les étudiants mathématiciens, il semblerait que ce soit effectivement le cas. Seul un étudiant sur les six affirme le contraire. En ce qui concerne les étudiants physiciens, cinq seulement pensent que le pas d'amorce est toujours égal à 0 ou à 1. Beaucoup d'entre eux nous parlent de "premier élément". Un autre nous dit même qu'il convient de tester la propriété pour plusieurs valeurs particulières.

"*Il faut pouvoir démontrer la propriété pour plusieurs n et réutiliser le fait que l'on considère $P(n)$ comme vrai.*" (étudiant physicien)

FIGURE 7.5 – Réponse d'un étudiant à la quesiton E11a

- **Les étudiants ont-ils conscience du quantificateur existentiel présent dans l'amorce ?**
  Comme nous l'avons vu, les étudiants ne considèrent que des démonstrations par récurrence dont les propositions initiales sont données. Le pas initial est donc fourni lui aussi et le symbole d'existence n'a donc plus lieu d'être. Ainsi, les étudiants n'ont pas conscience de la présence de ce quantificateur au sein du principe de récurrence.

- **Les étudiants mentionnent-ils et comprennent-ils l'implication de l'hérédité ?**

  Avant d'analyser les réponses à cette question, précisons que nous avons été, tout comme dans les cas de l'analyse des manuels scolaires et des questionnaires des enseignants, assez tolérante en ce qui concerne l'implication (voir figure **??**).

  Lorsque nous avons demandé aux étudiants d'expliquer le principe de récurrence, 3 mathématiciens sur 6 et 8 physiciens sur 21 (38%) ont mentionné l'implication. Ces chiffres nous semblent faibles et, il faut bien l'avouer, nous nous y attendions. En effet, nous savons, d'après nos lectures, que l'implication pose généralement problème aux étudiants (voir section **??**). Il faudrait donc, selon nous, rendre les enseignants attentifs à cet objet mathématique lorsqu'ils abordent la démonstration par récurrence dans leur classe. Nous en tiendrons compte dans le dernier chapitre de ce mémoire qui visera à proposer aux enseignants quelques exercices afin d'aborder au mieux la démonstration par récurrence dans les classes.

  En ce qui concerne la question E4, elle nous permet de savoir si les étudiants comprennent qu'il y a une implication à démontrer au sein de l'hérédité. Les résultats sont peu probants puisque seuls 3 étudiants mathématiciens et 8 étudiants physiciens nous ont affirmé qu'une proposition vraie pour un naturel ne l'est pas forcément pour celle dépendant du naturel suivant. De plus, 1 étudiant mathématicien et 4 physiciens ont un avis semblable à celui d'un de leurs condisciples qui nous dit :

"*En gros, j'ai envie d'être d'accord même si je me trompe sûrement parce* $n+1$ *appartient à pour tout* n *si* n *appartient à* $\mathbb{N}$*. En bref,* $n+1$ *c'est juste un autre* n *quelconque.*" (étudiant physicien)

FIGURE 7.6 – Réponse d'un étudiant à la question E4

A propos de la question E7, nous l'avons posée pour savoir si les étudiants parviennent à discerner la démonstration de la propositon initiale de celle de l'hérédité. Ainsi, il s'agit ici d'un cas où l'hérédité est vraie pour tous les naturels mais pour lequel la proposition n'est jamais vraie. A cette question, tous les étudiants mathématiciens se trompent puisqu'ils prétendent que la démonstration qui leur est présentée est celle de la proposition $\boxed{\forall n \in \mathbb{N} : (10^n + 1) \text{ est divisible par } 9}$. Par contre, trois étudiants physiciens remarquent qu'il s'agit bien de la démonstration de l'hérédité et répondent donc correctement. Voici les propos de l'un d'eux :

Soit $n \in \mathbb{N}$*, arbitraire.*
Si $(10^n + 1)$ *est divisible par 9 alors* $(10^{(n+1)} + 1)$ *est divisible par 9.* (étudiant physicien)

FIGURE 7.7 – Réponse d'un étudiant à la question E7a

Toujours en ce qui concerne l'implication, seulement 2 étudiants en mathématiques sur les 6 et 2 étudiants en sciences physiques sur les 21 comprennent que l'hypothèse de récurrence est posée pour démontrer une implication (question E5). Les propos suivant illustrent bien l'incompréhension de certains étudiants.

"*C'est pour comparer avec $P(n+1)$.*" (étudiant mathématicien)

"*Il n'y a pas de raison de supposer $P(n)$. C'est ce qu'on cherche à démontrer, pas une hypothèse.*" (étudiant physicien)

"*Pour moi il faudrait un moyen de prouver que $P(n)$ est vraie pour un n quelconque et non le supposer.*" (étudiant physicien)

FIGURE 7.8 – Réponses d'étudiants à la question E4

En ce qui concerne uniquement les étudiants mathématiciens cette fois, seuls 2 sur les 6 sont capables de distinguer les phrases "si j'ai du temps libre alors je monte à cheval" et "j'ai du temps libre donc je monte à cheval" (question E9). Il y a donc une difficulté significative à propos du passage du langage naturel au langage mathématique liée à l'implication. Pour la question E10, remarquons que 5 étudiants sur 6 confondent la notion de condition nécessaire avec celle de la condition suffisante.

- **Les étudiants sont-ils conscients qu'une synthèse des pas d'amorce et d'hérédité est indispensable pour déterminer le pas initial lorsqu'il n'est pas donné ?**
Comme nous l'avons déjà expliqué, tous les étudiants nous ont présenté le principe de récurrence pour des propositions initiales données. Ainsi, nous pouvons déjà avoir un a priori sur le fait qu'ils n'ont jamais été confrontés à des situations où ils doivent déterminer les pas d'amorce et d'hérédité et établir une synthèse des pas.

Notre a priori se confirme à la lecture des réponses à la question E6 où il était demandé d'établir une conclusion d'après la démonstration présentée. Il s'agissait plus précisément d'établir une synthèse des pas, celui de l'amorce étant égal à 6 (les étudiants auraient pu croire, d'après la démonstration proposée, que le pas d'amorce était 0) et celui de l'hérédité à 2. Bien entendu, les pas d'amorce et d'hérédité n'étaient pas donnés explicitement et c'était aux étudiants de les déterminer. Aucun d'eux n'a répondu correctement à la question. De plus, deux constats apparaissent clairement. Suite au fait que le pas d'hérédité est différent du premier entier naturel pour lequel la proposition est vraie, certains étudiants déduisent que la proposition initiale est fausse (3 mathématiciens et 1 physicien). D'autres déduisent de ce même fait que la proposition initiale est vraie à partir du pas d'hérédité (5 étudiants physiciens). Ces deux observations témoignent bien de l'incompréhension du principe et donc, de la nécéssité d'établir une synthèse des pas.

On remarque encore de l'incompréhension au niveau des pas d'amorce et d'hérédité à la lecture des affirmations suivantes :

"*Si ça ne fonctionne pas pour ce cas là (la première place), ce ne sera pas vrai pour tout n.*" (étudiant mathématicien)

"*La proposition est fausse, on a ici 4 contre-exemples pour* $n = 1, 2, 3, 4$."(étudiant mathématicien)

FIGURE 7.9 – Réponses d'élèves à la question E6

Ces deux phrases nous permettent de comprendre que certains étudiants pensent que parce que la proposition est fausse pour les premiers entiers naturels, elle le sera pour tous les suivants.

- **Les étudiants ont-ils conscience du quantificateur universel présent dans l'hérédité ?**
  Lorsque nous leur avons demandé de rédiger le principe de récurrence (question E2), seul 1 étudiant mathématicien et 3 étudiants physiciens ont mentionné le quantificateur universel "$\forall$" ou l'ont écrit en français. Nous pouvons expliquer cela par le fait qu'il est courant de retrouver l'hérédité écrite en deux étapes. Ainsi, on retrouvera souvent les termes suivants "Supposons $P(n)$ vraie pour un n quelconque".

  Remarquons que les questions E5d et E5e avaient été posées également pour savoir si les étudiants avaient conscience que le quantificateur universel est utilisé à deux reprises dans le principe : dans la proposition initiale et dans l'hérédité. Ces deux questions n'ont donné que très peu de résultats intéressants à l'exception de l'affirmation reprise à la figure **??**. Celle-ci témoigne du fait que l'étudiant en question n'est pas conscient ni de la présence du quantificateur, ni de son utilité.

"*Le n quelconque de l'étape 1* [On suppose que $P(n)$ est vraie pour un n quelconque] *est un nombre entier très grand par rapport au plus petit entier possible.*"

FIGURE 7.10 – Réponse d'un étudiant à la question E5d

- **Le fait d'utiliser une même variable pour la proposition initiale et l'hérédité amène-t-il les étudiants à les confondre ?**

  Pour pouvoir répondre à cette question, nous avons demandé aux étudiants si le n quelconque utilisé dans l'hérédité était identique à celui de la proposition initiale (question E5e). Malheureusement, comme nous l'avons déjà fait remarquer précédemment, les réponses fournies par les étudiants sont difficilement exploitables. En effet, presque la totalité des étudiants nous dit que le n de l'hérédité était un entier naturel quelconque et que le n de la proposition initiale regroupait un ensemble de n.

  Néanmoins, à la lecture des réponses de tous les étudiants (mathématiciens et physiciens réunis), nous nous sommes rendu compte que cette confusion était courante à travers l'ensemble des questions. Voici d'ailleurs quelques affirmations d'étudiants qui en témoignent.

"*Je me suis toujours demandé pourquoi on pouvait se permettre de dire que la propriété est vraie pour n* [hypothèse de récurrence] *sans rien demontrer. Il existerait peut-être un n où cela ne marche pas.*" (étudiant physicien)

"*Si $P(n+1)$ est vrai, il y a de forte chance que la propriété puisse être étendue aux autres nombres.*" (étudiant physicien)

FIGURE 7.11 – Réponses d'étudiants à la question E4

- **Les étudiants se sentent-ils à l'aise avec la démonstration par récurrence ?**

  A cette question, les étudiants mathématiciens de notre échantillon nous répondent qu'ils sont totalement à l'aise lorsqu'ils doivent utiliser la démonstration par récurrence. En ce qui concerne les physiciens, ce n'est pas totalement le cas puisque seuls 12 étudiants sur 21 (57%) l'affirment. Certains ne se sentent pas à l'aise du tout avec la démonstration par récurrence comme l'illustre l'affirmation suivante.

"*Je ne veux pas de tremplin sur la preuve par récurrence. Il y a déjà eu pas mal de profs qui ont tenté de me l'expliquer mais en vain...*" (étudiant physicien)

FIGURE 7.12 – Réponse d'un étudiant à la question E8b

- **Combien d'étudiants écrivent correctement l'hérédité du principe de récurrence ?**
  Nous nous sommes posé cette question car dans l'enquête menée par Grenier, aucun étudiant n'a mentionné correctement l'hérédité sous la forme $[\forall n \geqslant n_0 : P(n) \Rightarrow P(n+1)]$ (où n_0 est le pas d'hérédité). En ce qui nous concerne, nous devons malheureusement en dire autant que ce soit pour les étudiants interrogés de la section mathématique et ceux de la section physique.

- **Est-ce que le principe de récurrence est compris par les étudiants ?**
  Pour répondre à cette interrogation, nous considérons l'ensemble des questions proposées aux étudiants. D'après toutes les réponses que nous avons lues, il semblerait qu'il y ait énormément de difficultés éprouvées en ce qui concerne le principe-même de récurrence. Bien que nous ayons déjà présenté quelques affirmations d'étudiants qui en témoignent, en voici d'autres illustrant bien l'incompréhension du principe.

"*On suppose $P(n)$* [hypothèse de récurrence] *vu qu'on a vérifié au préalable que P est vraie pour quelques valeurs.*" (étudiant physicien)

"*Si $P(0)$ n'est pas verifié, $P(n+1)$ ne le sera pas non plus. Donc autant commencer par vérifier $P(0)$.*" (étudiant physicien)

FIGURE 7.13 – Réponses d'étudiants aux questions E5c et E5a

7.1.3 Comparaison entre les constats émis par Grenier et ceux émanant de notre analyse

Il faut bien le remarquer, les similitudes sont nombreuses entre les constats effectués par Grenier et ceux tirés de notre analyse même s'ils doivent souvent être nuancés. C'est la raison pour laquelle nous avons trouvé bon d'accorder une sous-section à la comparaison de notre étude avec celle menée en France. Nous allons reprendre ici point par point les observations de l'enquête française et nous les comparerons avec celles de l'enquête menée auprès des étudiants belges.

Qu'il s'agisse du cas français ou du cas belge, la démonstration par récurrence semble mal comprise. Pourtant, les étudiants de $1^{\text{ère}}$ bac en sciences mathématiques disent qu'ils se sentent totalement à l'aise lorsqu'ils doivent l'utiliser. Notons que ce n'est pas le cas des étudiants physiciens.

La légitimité de la démonstration par récurrence est questionnée dans le cas français. Elle l'est aussi par nos étudiants physiciens mais pas par les mathématiciens qui la jugent tout à fait fiable.

Tout comme les étudiants français, les étudiants belges semblent toujours confrontés à des démonstrations à établir sur base de propositions initiales données. Ainsi, le quantificateur existentiel de l'amorce n'est jamais mentionné. Toutefois, nous observons une différence par rapport au cas français puisque le quantificateur universel est davantage cité dans les réponses des étudiants que nous avons obtenues.

Une différence significative à mentionner par rapport à l'enquête de Grenier est que, chez nous, presque tous les étudiants (tous à l'exception d'un seul) considèrent que démonstration par l'absurde et démonstration par récurrence peuvent être combinées. Néanmoins, remarquons que, tout comme dans le cas français, le principe de Fermat ne semble pas du tout connu par les étudiants, ce qui coïncide avec ce que nous avons analysé dans les programmes. Tout comme en France, l'implication de l'hérédité est souvent écrite en deux parties par les étudiants. Il s'agit, plus précisément, de la formulation dans laquelle l'hypothèse de récurrence est supposée. Cela mène, tant en France qu'en Belgique, à des confusions chez les étudiants, voire même à considérer le principe de récurrence comme une tautologie. En effet, nous avons vu que bon nombre d'étudiants prétendent qu'il est normal que $P(n+1)$ soit vrai s'il est supposé que $P(n)$ l'est aussi. Nous n'apprécions donc pas la scission de l'hérédité en 2 étapes. Il conviendrait plutôt, selon nous, de mentionner de manière explicite l'implication qui est à démontrer dans l'hérédité. Cela mettrait de plus en évidence le quantificateur universel portant sur l'implication. Notons également que d'après nos observations, utiliser une même variable pour l'hérédité et pour la proposition initiale peut amener aussi à des confusions (voir analyse de la question E5). Ainsi, il conviendrait non seulement de formuler l'implication mais aussi d'utiliser une autre variable que celle de la proposition initiale. Présenter le principe de cette manière pourrait peut-être aider à éviter certaines confusions mais cela reste une hypothèse.

Tout comme dans le cas français, nos étudiants écrivent le principe de récurrence de manière schématique et, de plus, attribuent un ordre entre la démonstration de l'amorce et celle de l'hérédité. Remarquons également que nous avons lu différentes formulations du principe dans les réponses des étudiants. Souvent, il était constitué de deux étapes (amorce-hérédité) et parfois même, de trois étapes, la conclusion étant la dernière ou l'hérédité étant divisée en deux parties. Contrairement aux observations de Grenier, nous n'avons pas observé de présentation en quatre étapes.

Les autres constats de notre analyse sont semblables à ceux de Grenier : nos étudiants considèrent généralement le pas d'amorce égal à 0, à 1 ou à des premières valeurs particulières. La plupart pensent également que le pas initial et le pas d'amorce sont toujours égaux. De plus, certaines règles sont construites par les étudiants mais ne sont pourtant pas correctes. Par exemple, certains pensent que parce que la proposition est fausse pour 0 alors, elle le sera toujours. D'autres croient également que si l'hérédité est vraie à partir d'un certain rang pour lequel la proposition est fausse alors, la proposition est fausse sur tout son ensemble initial. Enfin, nous avons remarqué qu'aucun étudiant n'a écrit correctement l'hérédité composée du quantificateur universel et de l'implication. Pour illustrer ces derniers propos, considérons deux exemples de formulations du principe issues des réponses à la question E2.

- Réponse d'un étudiant en mathématiques :

  Une démonstration par récurrence se fait en trois parties : le pas 1, le pas 2 et le pas 3.
  Pas 1 : on vérifie que la thèse est vraie pour le premier élément.
  Pas 2 : on admet que c'est vrai pour le $n^{ème}$ terme.
  Pas 3 : on tente de prouver que la thèse est vérifiée pour le $n+1^{ème}$ terme en se ramenant au $n^{ème}$.

- Réponse d'un étudiant en physiques :

  On prouve pour un n ($n = 0$) puis on regarde pour $n+1$ et comme $n+1$ sera toujours vrai, nous pourrons donc en déduire que ce sera vrai $\forall n$.

FIGURE 7.14 – Réponses d'étudiants à la question E2

Pour terminer, indiquons que, tout comme dans des travaux d'études déjà réalisées par des chercheurs sur l'implication [4], l'ensemble des étudiants interrogés éprouvent énormément de difficultés par rapport à celle-ci. Nous l'avons davantage remarqué chez les étudiants mathématiciens en lisant les résultats des questions E9 et E10 qui portaient sur ce sujet.

7.1.4 Conclusion

Cette conclusion permettra de répondre, pour les étudiants de 1ère bac, aux deux premières questions que pose ce chapitre. Nous y mettrons en caractères gras les termes importants et qui retiennent plus particulèrement notre attention.

Comme nous venons de le constater, les étudiants de première année universitaire interrogés semblent ne **comprendre** que **partiellement et imparfaitement** le **principe** de démonstration par récurrence. Leurs **lacunes** sont **nombreuses**, elles portent globalement sur le principe de récurrence même, l'utilisation des **quantificateurs** et, de manière fort prononcée, sur la notion d'**implication**. De plus, il semblerait que les étudiants ne connaissent

4. Il s'agit notamment de (Deloustal-Jorrand, 2004) et de (Grenier et Fabert, 2011)

l'utilisation de la démonstration par récurrence que dans des situations où la **proposition initiale** est **donnée**. Cela coïncide avec ce qui a été observé dans les programmes d'enseignement.

En ce qui concerne la distinction entre les étudiants mathématiciens et physiciens, elle ne semble pas vraiment prononcée. Remarquons cependant que les étudiants mathématiciens interrogés :

- semblent plus informés sur le sujet (deux étudiants mentionnent le principe de récurrence forte).
- sont davantage conscients que le principe de récurrence s'applique à des entiers naturels.
- considèrent la démonstration par récurrence tout à fait fiable pour prouver des résultats.
- se disent tout à fait à l'aise lors de l'utilisation d'une telle démonstration.
- apparaissent davantage conscients qu'on peut combiner des raisonnements au sein d'une même démonstration.

Nous pourrions expliquer les trois premières distinctions par l'**apport du cours d'*Initiation à la démarche mathématique*** suivi uniquement par les étudiants en sciences mathématiques. En effet, nous avons vu lors de l'analyse du manuel qui lui est associé (voir sous-section **??**) que le principe de récurrence forte y est expliqué. De plus, nous avons remarqué la structure particulière que présentent les chapitres de ce manuel : il attribue un chapitre entier à la démonstration par récurrence. Ce chapitre se distingue de celui intitulé *Quelques stratégies de démonstration* car il s'applique au cas particulier de l'ensemble des naturels. La structure de ce manuel ne peut donc qu'accentuer ce fait dans l'esprit des étudiants. De plus, ce manuel étant rigoureux et réservant une place de choix à la démonstration par récurrence, il n'est pas étonnant que les étudiants la considèrent comme tout à fait fiable. Ainsi, nous pouvons affirmer que le cours d'initiation à la démarche mathématique semble avoir **un léger impact sur le *sentiment* de compréhension** de la démonstration par récurrence.

Néanmoins, il est important de remarquer que, quand on "creuse" un peu, les $1^{\text{ère}}$ bac en **sciences mathématiques** ne semblent **pas** savoir **mieux** expliquer le principe de récurrence **que les physiciens**.

7.2 Enquête menée auprès des étudiants de $2^{\text{ème}}$ master et de l'agrégation en mathématiques (sans pratique d'enseignement)

Comme nous l'avons déjà précisé, le questionnaire distribué à ces étudiants est très semblable à celui auquel les enseignants ont été invités à répondre (questions P1-P10). Cependant, quelques changements ont été opérés :

- nous avons supprimé les questions P1 et P4, celles-ci étant hors de propos pour le groupe considéré ici.
- la question P10 a été modifiée et se présente sous la forme suivante : "Si vous deviez enseigner la preuve par récurrence, comment l'introduiriez-vous ?".

Malgré nos demandes répétées, seulement dix personnes concernées ont accepté de répondre à notre questionnaire (cinq étudiants en agrégation mathématique [5] et cinq autres en $2^{\text{ème}}$ master mathématique d'autres finalités que celle de didactique). Ils constituent l'échantillon dont découlera notre analyse. Remarquons que celui-ci étant assez faible, nous nous limitons à une étude descriptive.

7.2.1 Analyse des réponses des étudiants de $2^{\text{ème}}$ master et de l'agrégation en mathématiques (sans pratique d'enseignement)

Lorsqu'on interroge les étudiants sur ce qu'évoque pour eux la notion de récurrence en mathématiques, presque tous mentionnent la démonstration par récurrence. Certains nous parlent également de raisonnement, de répétitions ou de suites mais, dans une moindre mesure. Ainsi, la démonstration par récurrence semble être pour eux un sujet familier.

Cependant, sur les dix étudiants, aucun n'a pensé à mentionner l'axiome de récurrence de Peano. Remarquons que l'un d'eux a fait allusion à la discrétisation de $\mathbb{N}$. La validité du principe de récurrence comme moyen de démonstration n'est remise en question par aucun des étudiants. En effet, ils la considèrent tous comme irréfutable.

Lorsqu'on demande aux étudiants comment ils reconnaissent les problèmes pour lesquels peut être utilisé le principe de récurrence, deux réponses sont principalement fournies. Il s'agit pour eux soit de problèmes dont les propositions sont à démontrer "$\forall n$" ou plus simplement de propositions faisant intervenir des entiers naturels. L'un nous dit même simplement qu'un problème qui est concerné par le principe de récurrence, "*Ca se voit !*". Ainsi, les étudiants ne mentionnent jamais de problèmes où la proposition initiale n'est pas ou est partiellement donnée. Ils n'écrivent donc jamais explicitement le quantificateur existentiel de l'amorce. Ils ne font pas allusion non plus au principe de Fermat qui permet, quant à lui, de démontrer des propositions qui ne se présentent pas forcément sous la forme "$\forall n : P(n)$".

En ce qui concerne la phrase à commenter de la question P9a, la majorité des étudiants sont en accord avec celle-ci. Citons tout de même le cas de trois étudiants sur 10 qui ne sont pas de cet avis. Parmi ceux-ci, deux nous font remarquer que "*p doit être strictement supérieur à* n_0". Nous ne comprenons pas la raison de cette remarque. En ce qui concerne le troisième étudiant, il nous présente le raisonnement suivant.

Cette phrase est fausse.
Par exemple, considérons la proposition $(x+y)^n = nx^n + y^n$.
Pour $n = 0$ *:* $1 =$ *1 OK*
On le suppose pour l'entier supérieur ou égal à $n = 0$ *donc en particulier* $n = 0$
Pour $n = p = 0$ *OK*
Pour $n = p + 1 = 1$ *:* $x + y = x + y$ *OK*
Or pour $n = 2$ *:* $(x + y)^2$ *n'est pas égal à* $2x^2 + y^2$

FIGURE 7.15 – Réponse d'un étudiant à la question P9a

5. Précisons que parmi eux, quatre ont été récemment diplômés.

Cette remarque illustre bien ce à quoi nous voulions faire réfléchir les étudiants en leur proposant cette phrase . En effet, le principe de récurrence "authentique" nous dit de prouver que la propriété est vraie pour n_0 et que si elle est vraie pour **un** entier p **quelconque** supérieur ou égal à n_0, elle est vraie aussi pour $p+1$. Ainsi, les termes "l'entier p" de la phrase de la question P9a sont à modifier car utiliser l'article "**l'**" sous-entend que ce p est connu, est particulier. Or, il s'agit d'un p quelconque. L'étudiant a pris, pour montrer que l'utilisation de l'article "**l'**" n'est pas adéquat, un p particulier. En effet, il nous a montré que la proposition est vraie pour $n = 0$, $n = 1$ mais pas pour $n = 2$. Bien que la formulation reprise à la figure **??** aurait pu être plus rigoureuse, elle nous semble illustrer la nécessité du quantificateur universel de l'hérédité du principe. Notons, au passage, que l'étudiant a pris pour pas d'amorce 0. Or, $(x+y)^0 = 1$ est une convention.

Pour ce qui est de la phrase présentée à la question P9b, celle-ci, bien qu'erronée, est considérée comme tout à fait correcte par cinq étudiants sur dix. Cela nous semble désolant puisqu'elle nous parait inadmissible au sein d'un manuel scolaire. De plus, parmi ceux qui la considèrent fausse, personne n'a mentionné les bonnes raisons, comme en témoignent les affirmations ci-dessous :

"*Pour moi, on suppose que la propriété est vraie pour tout* $n \geqslant 1$ *et on prouve qu'elle est encore vraie pour* $p = n+1$."

"*Cette phrase est fausse. Il faut supposer vraie la propriété* $\forall m \leqslant n$ *et démontrer que c'est vrai pour* $n+1$."

FIGURE 7.16 – Réponses d'étudiants à la question P9b

La première phrase de la figure **??** rapporte les propos de deux étudiants. Ceux-ci ne semblent pas comprendre que le quantificateur universel porte sur l'ensemble de l'implication et que l'hypothèse de récurrence est établie sur un entier naturel quelconque.
La deuxième phrase de cette même figure correspond aux réponses de deux étudiants. Ce à quoi font allusion ceux-ci est pour nous la récurrence forte, variante que nous avons développée à la sous-section **??**.

Nous avons également demandé aux étudiants comment ils aborderaient le principe de démonstration par récurrence avec des élèves (question P10). Les réponses sont de deux types : utilisation d'images analogiques (domino, fermeture éclair), explicitation du principe de manière intuitive ("*Si on peut passer de* n *à* $n+1$*, on peut passer de* $n+1$ *à* $n+2$*, etc.*"). D'autres nous disent encore qu'ils l'introduiraient de manière purement théorique (mais ne nous en disent pas plus). Personne ne préconise de le voir directement appliqué à un nouveau théorème, ce que nous estimons heureux.

Terminons cette analyse en insistant sur le fait que nous n'avons pas, lors de ce questionnaire, demandé d'écrire de manière explicite le principe de récurrence tel que les étudiants le conçoivent. Néanmoins, certains d'entre eux nous ont fourni spontanément des explications qui nous amènent à faire les constats suivants :

- trois étudiants pensent que le principe de récurrence ne s'applique qu'à des propositions dont l'ensemble initial est $\mathbb{N}$ tout entier.

– quatre étudiants nous disent que le pas initial est soit 0, soit 1. L'un nous dit même :

> "*On démontre pour $n = 0$ et, à titre d'exemple, je montrerais aussi la proposition pour $n = 1$, $n = 2$.*"

FIGURE 7.17 – Extrait de réponse d'un étudiant à la question P10

– deux personnes écrivent explicitement l'implication de l'hérédité. Trois autres la mentionnent en deux étapes, faisant intervenir l'hypothèse de récurrence. Deux autres encore font référence à un passage. Ajoutons que personne n'a mentionné le quantificateur universel de l'hérédité et que nous n'avons donc trouvé aucune formulation de celle-ci sous la forme "$\forall n \geqslant n_0 : [P(n) \Rightarrow P(n+1)]$".

– lorsque les étudiants ont écrit le principe de récurrence, ils l'ont toujours mentionné dans l'ordre amorce-hérédité. De plus, remarquons qu'ils n'ont jamais considéré qu'il pouvait y avoir des pas d'amorce et d'hérédité différents. Notons encore que des variables identiques sont souvent utilisées pour l'amorce, l'hérédité et la proposition initiale.

Afin d'illustrer ce dernier paragraphe, considérons trois formulations du principe de récurrence que nous ont fournies les étudiants :

- *Preuve pour $n = 1$.*
  Supposition de n.
  Preuve pour $n + 1$.
- *On démontre pour $n = 0$ (à titre d'exemple je montrerais aussi $n = 1$, $n = 2$).*
  Puis je suppose pour un n quelconque.
  Et je demontre pour $n + 1$.
  Ils comprendront ainsi que c'est vrai pout tout n.
- *Preuve $n = 1$.*
  Création de l'hypothèse de récurrence.
  Vérification pour $n = n + 1$ en utilisant HR.

FIGURE 7.18 – Formulations du principe de récurrence par quelques étudiants

7.3 Conclusion

En guise de conclusion nous allons tenter de répondre aux différentes questions posées au début de ce chapitre (voir figure **??**). Notons qu'une réponse partielle a déjà été apportée lors de la conclusion de l'analyse des réponses des étudiants de 1$^{\text{ère}}$ bac. Néanmoins, dans un souci de clarté, nous les reprendrons globalement ici.

Nous nous demandions si les étudiants, toutes années confondues, comprenaient le principe de démonstration par récurrence et sinon, quelles étaient leurs principales lacunes.
En ce qui concerne la compréhension du principe, il semblerait que ce soit partiellement et imparfaitement le cas pour les étudiants de première année. Nous avons mentionné en détail leurs lacunes lors de l'analyse des résultats. En deuxième master, le principe semble acquis

par la plupart mais sa formulation manque encore énormément de rigueur comme nous venons de le constater. En effet, les quantificateurs sont omis ou erronés, l'implication n'est pas forcément formulée, on trouve des expressions de la forme "*vérification pour* $n = n+1$", etc.

Ainsi, on peut bel et bien observer une évolution de la première à la dernière année en ce qui concerne la compréhension du principe. Néanmoins, la démonstration par récurrence, en tant qu'objet mathématique, semble étudiée uniquement en première année. Dans la suite du cursus, elle est, à notre avis, couramment utilisée mais pas approfondie. Cette hypothèse pourrait nous expliquer pourquoi les étudiants de fin d'études ne parlent pas du principe de Fermat ni de démonstrations à établir pour des propositions dont le pas initial n'est pas connu. En bref, si le principe de récurrence a incontestablement mûri au cours des cinq années d'études dans l'esprit des étudiants, cette notion doit être encore approfondie pour être enseignée par ceux qui se destinent à cette profession.

Chapitre 8

Exercices proposés afin d'aborder au mieux la démonstration par récurrence dans les classes

Au cours de nos différentes analyses, nous avons établi de nombreux constats liés à l'enseignement de la démonstration par récurrence. Nous avons vu que peu de place lui était réservée dans les programmes et les manuels et qu'elle n'était pas toujours claire dans l'esprit des étudiants. De plus, nous avons constaté un manque de rigueur de la part des enseignants quant à la formulation du principe. Tous ces constats ont apporté des réponses à notre première question de recherche à savoir : "*Qu'en est-il de la situation en Belgique ?*" (voir figure **??**). Nous répondrons de manière synthétique à cette première question dans la conclusion de ce mémoire.

Maintenant que toutes ces informations sont récoltées, nous pouvons pointer les difficultés liées à la compréhension et à l'enseignement de la démonstration par récurrence. Nous allons à présent répondre à notre deuxième question de recherche à savoir :

"*Que pourrions-nous mettre en place afin d'aider les enseignants à transmettre à leurs élèves, de la manière la plus claire et parlante possible, le principe de démonstration par récurrence ?*"

Pour y répondre, nous avons conçu une série d'exercices destinés aux professeurs des 4$^{\text{ème}}$, 5$^{\text{ème}}$ et 6$^{\text{ème}}$ années de l'enseignement secondaire et, pour leur donner un cadre, nous pourrions envisager de les intégrer dans une formation. Nous insistons ici sur le fait que la démarche que nous proposons dans ce chapitre ne constitue qu'une **ébauche de formation** qui devrait sans doute être testée puis repensée afin d'être améliorée.

La structure de ce chapitre se présentera de la manière suivante. Il débutera en définissant le contexte et les objectifs principaux visés par la formation qui pourrait être envisagée. Ensuite, nous développerons le déroulement de celle-ci en précisant, pour chaque activité proposée, les raisons pour lesquelles nous avons choisi de l'y insérer.

Celles-ci sont bien évidemment liées à l'ensemble des constats que nous avons effectués lors de nos différentes analyses :

- à caractère épistémologique,
- des programmes de l'enseignement,
- des manuels de niveaux secondaire et universitaire,
- des questionnaires distribués à des enseignants et des étudiants universitaires (les principaux constats de ces deux analyses ont été mis en évidence en caractères gras).

Nous tenons à préciser que nous n'apporterons ici que des explications permettant de résoudre les exercices proposés (les corrections complètes s'effectueraient au tableau avec les enseignants, de manière rigoureuse, si la formation avait réellement lieu).

8.1 Contexte et objectif principal de la formation

Le **contexte** de cette formation serait le suivant :

- *Intitulé de la formation* :

  "Pour mieux aborder la démonstration par récurrence dans les classes"

- *Public concerné* : professeurs de mathématiques des $4^{\text{ème}}$, $5^{\text{ème}}$ et $6^{\text{ème}}$ années.
- *Matériel utilisé* :
  - une planche de bande dessinée, reprise en annexe **??**, nous permettrait d'introduire la séance.
  - des feuilles d'exercices seraient distribuées au fur et à mesure de la formation.
  - un questionnaire pourrait être donné à la fin de la séance. Il nous permettrait d'avoir un "feedback" des avis sur la formation.
  - un diaporama pourrait être envisagé. Il reprendrait les objectifs principaux de la formation ainsi que la présentation de chaque activité envisagée. Nous pensons aussi qu'il serait intéressant de mentionner, après chaque activité, les objectifs précis visés par celles-ci.
  - un tableau serait nécessaire dans le local afin de pouvoir corriger les exercices au fur et à mesure de la séance (remarquons que les corrections se réaliseraient de manière collective, sur base des réponses des enseignants).
- *Durée* : il nous semble qu'une après-midi serait suffisante. Néanmoins, ces exercices n'ayant pas été testés véritablement, il nous est très difficile d'estimer une durée exacte. Qui plus est, des améliorations seraient très certainement à envisager.

Les **objectifs** principaux de cette formation seraient les suivants :

•faire prendre conscience aux enseignants des éléments constitutifs d'une démonstration par récurrence.
•mettre en évidence les problèmes qui touchent à sa compréhension lorsqu'elle est enseignée.

FIGURE 8.1 – Objectifs principaux visés par la formation

8.2 Déroulement de la formation

Avant que ne débute la première activité, chaque professeur se présente et énonce ses attentes. Cela nous permettra de savoir qui a déjà abordé la démonstration par récurrence en classe et si celle-ci est facilement comprise par les élèves. Nous nous attendons à des avis controversés, comme ce fut le cas lors de l'analyse des questionnaires.

Première activité

Les professeurs sont invités individuellement à écrire comment ils présenteraient la démonstration par récurrence en classe. Dans le cas où ils ne l'introduisent pas habituellement de manière théorique, nous leur demandons d'ajouter la formulation mathématique du principe de récurrence.

Objectifs poursuivis : cette activité poursuit deux objectifs. Premièrement, elle va nous permettre de savoir comment les enseignants abordent la démonstration par récurrence en classe (image analogique, principe théorique, application directe à la démonstration d'une proposition, etc.). Deuxièmement, lors de la cinquième activité, nous leur demanderons de porter un regard réflexif sur la formulation du principe tel qu'ils l'avaient rédigé au début de la séance, en fonction de toutes les informations qui leur auront été fournies.

Deuxième activité

A) La deuxième activité consiste à faire réfléchir les enseignants sur un problème concret. Celle-ci peut être également envisagée en classe, avec les élèves.

Soit l'assertion :

"Dans toute boite contenant n crayons de couleur, ceux-ci sont tous de la même couleur."

a) A votre avis, quelle est la valeur de vérité de cette proposition ?

b) Que pensez-vous de la démonstration ci-dessous ?

- l'assertion est manifestement vraie lorsqu'il n'y a qu'un seul crayon dans la boite.
- supposons l'assertion vraie pour un k quelconque et prouvons qu'elle le reste pour $k+1$.
  Dans une boite contenant $(k+1)$ crayons de couleur, retirons un crayon C. Il en reste alors k, tous de la même couleur en vertu de l'hypothèse de récurrence. Mais le crayon C et $(k-1)$ autres crayons sont aussi de la même couleur en vertu de cette même hypothèse de récurrence. Par conséquent, le crayon C et tous les autres crayons de la boite sont de la même couleur.

c) Où est la faille dans cette démonstration ?

FIGURE 8.2 – Deuxième activité : "Les crayons de couleur", inspirée de (Defeld *et al.*, 2009)

Cette proposition est bien évidemment erronée. En effet, nous disposons tous de plumiers contenant des crayons de couleurs différentes ! En fait, la démonstration de l'hérédité reprise ci-dessus est tout à fait correcte. Néanmoins, la conclusion ne peut pas être tirée car le pas d'hérédité est égal à 2 alors que le pas d'amorce est égal à 1. Pour nous en convaincre, considérons le raisonnement employé ci-dessus pour $k = 2$. Imaginons que nous ayons deux crayons de couleur dans une même boite auxquels nous attribuons un ordre. Si nous retirons le deuxième crayon de la boite, nous savons que le premier crayon est trivialement de la même couleur que lui-même. Après avoir remis le deuxième crayon dans la boite, nous retirons cette fois le premier crayon de celle-ci. Nous savons alors que le deuxième crayon resté dans la boite est trivialement de la même couleur que lui-même. Mais rien ne nous dit alors que le premier et le deuxième crayon sont de la même couleur.

Objectifs poursuivis : avant de développer les différents objectifs visés, nous tenons à faire remarquer qu'il s'agit d'un problème concret sur lequel on peut avoir prise. Les objectifs visés par cette activité sont de mettre en évidence :

- la distinction entre l'hérédité et la proposition initiale,
- le fait que les pas d'amorce et d'hérédité peuvent être différents,
- la complémentarité de l'amorce et de l'hérédité pour établir des conclusions,
- le quantificateur universel et l'implication présents dans l'hérédité.

B) Une activité semblable pourrait être également proposée mais, cette fois, sans prise sur la réalité. En effet, les crayons, éléments concrets, seraient remplacés par des fantômes. Il n'est donc pas possible ici d'affirmer que la proposition est vraie ou fausse avant même d'aborder sa démonstration. Cet exercice peut être également envisagé en classe, avec les élèves.

Nous ne ferons que reprendre ici l'énoncé de la proposition, la démonstration de l'hérédité pour le cas des fantômes étant semblable à celle des crayons de couleur.

"Un groupe de n fantômes qui contient un fantôme écossais ne contient que des fantômes écossais."

FIGURE 8.3 – Deuxième activité : "Les fantômes écossais", inspirée de (Gasquet, 1991, p. 179)

Troisième activité

A) L'activité proposée se base sur un extrait de manuel dont nous avons fait la critique à la sous-section **??**. Nous joignons cet extrait en annexe **??**. Celui-ci concerne une application directe du principe de récurrence à la démonstration du binôme de Newton. Nous tenons à préciser qu'aucun point théorique n'a été présenté à propos du principe dans le manuel auparavant. Au cours de cette activité, nous demanderons dans un premier temps aux enseignants de mentionner ce qui leur semble peu rigoureux (ou peu judicieux) dans cet extrait. Nous leur demanderons ensuite de se mettre dans la peau d'un élève qui n'a jamais eu affaire à la démonstration par récurrence et de donner les conceptions qu'il en tirerait à la lecture de ce passage.

En ce qui concerne le manque de rigueur (ou ce qui semble peu judicieux), nous mettrions en évidence, lors de la correction, les éléments suivants :

– une conjecture est établie sur base de $n = 2$, 3 et 4. Or, elle est déjà à établir à partir de 1.
– l'ensemble initial n'est pas mentionné.
– le cas de $n = 0$ (convention) n'est pas pris en compte.
– le quantificateur universel de l'hérédité n'est pas écrit (le pas d'hérédité n'est donc pas mentionné).
– une même variable k est utilisée à deux reprises : dans le symbole sommatoire de la proposition initiale et dans l'hérédité.
– l'hérédité n'est pas clairement mentionnée sous la forme $\boxed{\forall n \geqslant n_0 : P(n) \Rightarrow P(n+1)}$.
– aucune conclusion n'est tirée.

En ce qui concerne les conceptions erronées que pourraient avoir les élèves en abordant la démonstration par récurrence avec cet extrait, nous mentionnerions les éléments suivants :

- l'ensemble initial est toujours $\mathbb{N}$ dans son entièreté.
- le pas d'amorce est toujours égal à 1.
- il n'y a aucun lien entre l'amorce et l'hérédité.
- l'hérédité doit être vraie pour n'importe quel k.

Objectifs poursuivis : cette activité vise à mettre en évidence la rigueur dont il faut faire preuve afin d'assurer la compréhension du principe de récurrence. Elle vise également à rendre compte du fait qu'appliquer directement le principe à un nouveau théorème n'est pas approprié et cela d'autant plus pour le cas du binôme de Newton (manipulation d'indices).

B) La deuxième partie de cette activité consiste à mettre les enseignants face à des conceptions erronées formulées par certains étudiants et relevées dans nos questionnaires. Il s'agirait plus précisément des propositions suivantes :

1. "*Je ne saurais pas l'expliquer, j'ai trop l'impression qu'on arrange le truc de manière à ce que ça fonctionne et ce n'est pas clair pour moi.*" (voir figure **??**)
2. "*Il faut pouvoir démontrer la propriété pour plusieurs n et réutiliser le fait que l'on considère $P(n)$ comme vrai.*" (voir figure **??**)
3. "*En gros, j'ai envie d'être d'accord même si je me trompe sûrement parce $n + 1$ appartient à pour tout n si n appartient à $I\!N$. En bref, $n + 1$ c'est juste un autre n quelconque.*" (voir figure **??**)
4. "*Il n'y a pas de raison de supposer $P(n)$. C'est ce qu'on cherche à démontrer, pas une hypothèse.*" (voir figure **??**)
5. "*La proposition est fausse, on a ici 4 contre-exemples pour $n = 1, 2, 3, 4$.*" (voir figure **??**)

Objectifs poursuivis : cette deuxième partie de la troisième activité permet également de rendre compte de certaines conceptions erronées que peuvent avoir les élèves. Elles touchent plus particulièrement aux sujets suivants :

- la légitimité du principe. Celle-ci est parfois questionnée.
- les rôles joués par l'amorce et l'hérédité. Il arrive que ceux-ci ne soient pas compris et cela peut amener les élèves à concevoir de fausses règles (par exemple : si $P(1)$ est faux, rien ne sert de démontrer l'hérédité).
- l'utilisation de l'hypothèse de récurrence. Le fait d'utiliser uniquement celle-ci ne met pas en évidence l'implication à démontrer. De plus, cela peut amener à confondre l'hypothèse de récurrence avec la proposition initiale.

Quatrième activité

La quatrième activité consiste à déterminer l'ensemble initial sur lequel la proposition $\boxed{f_n \geqslant n}$ où f_n est la suite de Fibonacci est vraie. Cet exercice est très proche de l'illustration de la figure **??**. Encore une fois, il s'agit d'un exercice qui peut être travaillé avec des élèves. L'énoncé serait :

> La suite de Fibonacci se définit de la manière suivante :
>
> $$\boxed{\begin{cases} f_0 = 1 \\ f_1 = 1 \\ f_{n+1} = f_n + f_{n-1} \end{cases}}$$
>
> a) Déterminez, grâce à une démonstration par récurrence d'ordre 2, l'ensemble initial sur lequel la proposition $\boxed{f_n \geqslant n}$ est vraie.
>
> b) Une variante de la suite de Fibonacci est courante dans la littérature mathématique. Il s'agit de la même définition que reprise ci-dessus à l'exception près que $f_0 = 0$. Répondez une nouvelle fois à la question a) mais, cette fois, avec la variante de la suite de Fibonacci. Cela change-t-il quelque chose ?

La réponse à la question a) est facile à déterminer puisque les pas d'amorce et d'hérédité sont tous deux égaux à 1. Cela n'est pas le cas pour la variante de la suite de Fibonacci où le pas d'amorce est cette fois égal à 5.

Objectifs poursuivis : cet exercice, beaucoup moins concret que l'exercice des crayons de couleur, vise principalement à mettre en évidence les faits suivants :

- il existe des variantes du principe de récurrence simple.
- l'ordre dans lequel l'amorce et l'hérédité sont démontrées n'a pas d'importance.
- les pas d'amorce et d'hérédité ne sont pas forcément égaux et il est nécessaire d'en établir une synthèse pour déterminer l'ensemble initial.
- les exercices faisant intervenir une démonstration par récurrence ne sont pas toujours des propositions données (où le pas initial est donné) à démontrer.
- il est primordial de spécifier l'ensemble initial d'une proposition à démontrer.

Cinquième activité

A ce stade de la formation, nous pensons qu'il serait bon de formuler, avec les enseignants, le principe de récurrence de manière détaillée (voir figure **??**). Nous pourrions aborder cette activité sous forme d'un "brainstorming". Ainsi, les éléments essentiels du principe seraient écrits au tableau et une synthèse pourrait être effectuée sur base de ce qui a été dit.

Objectifs poursuivis : cette activité vise à ce que les enseignants réfléchissent à tous les constituants du principe de récurrence et portent un regard réflexif sur la formulation du principe tel qu'ils l'avaient formulé lors de la première activité. Nous insisterons à nouveau plus particulièrement sur les éléments suivants :

- distinction des pas d'amorce et d'hérédité,
- présence d'une implication à démontrer,
- présence des quantificateurs universel et existentiel.

Nous en profiterions également pour rappeler ce sur quoi le principe de récurrence s'appuie, l'axiome de récurrence (5$^{\text{ème}}$ axiome de Peano).

Nous tenons à signaler que les deux activités suivantes sont présentées aux enseignants dans le cas où il reste assez de temps pour les aborder. Nous sommes consciente qu'elles visent plus à les faire réfléchir sur certains problèmes mathématiques particuliers que sur la pratique qu'ils pourraient en avoir en classe.

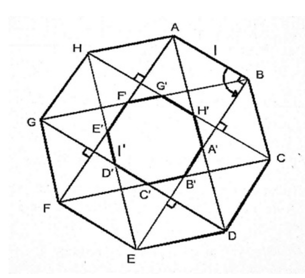
Sixième activité

Cette activité consiste à démontrer une proposition par le principe de Fermat (ou, dit autrement, le principe de descente infinie). Avant d'entamer l'exercice en question, nous reprendrions avec les enseignants sa formulation (voir figure **??**) et nous insisterions sur le fait qu'il est équivalent au principe de récurrence. Remarquons que la démonstration considérée ici est tirée de (Grenier, 2011).

Démontrez, au moyen du principe de Fermat, la proposition suivante :

"Il n'existe pas d'octogone régulier dont tous les sommets sont à coordonnées entières [a]."

•Pour démontrer cette proposition, nous vous conseillons de vous aider du dessin ci-dessous :



[a]. Par "octogone dont tous les sommets sont à coordonnées entières", nous entendons un octogone dont tous les sommets pourraient être sur une grille carrée régulière.

FIGURE 8.4 – Septième activité : démonstration utilisant le principe de Fermat, extrait de (Grenier, 2011)

Nous allons, pour démontrer cette proposition, utiliser un raisonnement par l'absurde : on suppose qu'il existe un octogone régulier d'aire n dont tous les sommets sont à coordonnées entières. Nommons le O. On pourrait très bien construire un octogone régulier à sommets à coordonnées entières et d'aire m telle que $m < n$. Nommons ce nouvel octogone O'. Cela reviendrait donc à construire une suite strictement décroissante d'entiers naturels. Or, cela est tout à fait impossible par le principe de Fermat.

Gernier nous propose une manière de construire O' sur base de la figure reprise ci-dessus. Voici donc comment elle procède : considérons une rotation du point A de centre B et d'angle $\frac{\pi}{2}$. Notons ce nouveau point A'. De même, effectuons une rotation du point B de centre C et d'angle $\frac{\pi}{2}$. Notons ce nouveau point B'. Nous pourrions continuer de la même façon avec tous les sommets de l'octogone. Ainsi, il est aisé de démontrer que si l'octogone de départ est régulier, le nouvel octogone d'aire inférieure l'est également. De plus, si O a des sommets à coordonnées entières, alors, par construction, c'est le cas également pour O'.

Objectifs poursuivis : cette activité vise à pointer les faits suivants :

- un raisonnement par récurrence et par l'absurde peuvent être combinés au sein d'une même démonstration.
- les propositions à démontrer ne sont pas toujours de la forme "$\forall n \geqslant n_0 : P(n)$.
- certaines propositions ne peuvent pas être démontrées par récurrence simple (montée infinie) mais par descente infinie.

Septième activité

Dans cette activité, nous proposons un exercice "casse-tête" lié, bien évidemment, à la démonstration par récurrence. Nous pensons qu'il est possible de l'aborder en classe, dans le cas où le principe de récurrence est totalement maitrisé par les élèves.

> L'histoire se passe dans une lamaserie. Les lamas sont isolés toute la journée, sauf pour le repas de midi, pris en commun, pendant lequel tous se voient, mais pendant lequel il est interdit de communiquer. Seul le Grand Lama peut adresser la parole à ses ouailles.
>
> Un jour, il leur dit : "un ou plusieurs d'entre vous sont atteints d'une grave maladie, dont le symptôme est une marque rouge sur le front. Ceux qui, un jour, apprennent qu'ils en sont atteints doivent, après le repas, remonter dans leur cellule et ne plus jamais en sortir."
>
> Il est bien connu que les lamas sont parfaitement obéissants, que leur sens de la logique est sans faille, qu'ils ne mettent jamais en doute les affirmations du Grand Lama et qu'ils ne disposent pas de miroir.
>
> Rien ne se passe, jusqu'au repas du $10^{\text{ème}}$ jour après l'annonce, où quelques lamas manquent à l'appel. Ils ont évidemment appris leur maladie et ne reviendront plus dans la salle commune.
> Combien de lamas manquent à l'appel ?

FIGURE 8.5 – Sixième activité : exercice "casse-tête", inspiré de (Romain, 2010)

Il nous semble qu'une explication détaillée s'impose : imaginons qu'il n'y ait qu'un seul lama malade. Celui-ci, pendant l'annonce du Grand Lama constate ainsi qu'aucun de ses condisciples n'a de tache rouge sur le front. Il comprend donc, puisque le Grand lama a affirmé qu'il y avait au moins un malade, qu'il est lui-même atteint. On comprend alors que dans le cas où il y a un seul lama malade, celui-ci remonte dans sa cellule, le premier jour, et ne revient jamais.

Imaginons cette fois qu'il y ait deux lamas malades. Appelons-les lama1 et lama2. Lors de l'annonce du Grand Lama, chacun des deux malades voit qu'un de ses condisciples est atteint mais ne peut pas affirmer s'il est lui-même malade. Les deux lamas en question reviennent donc le lendemain au repas de midi. A la fin de celui-ci, ils comprennent qu'ils sont tous deux malades. En effet, prenons le cas de lama1. Celui-ci avait remarqué la veille que lama2 était malade. Si lama2 avait été le seul atteint par la maladie, il ne serait pas venu prendre aujourd'hui son repas de midi (voir raisonnement précédent). On comprend alors que dans le cas où il y a deux lamas malades, ils remontent chacun dans leur cellule, le deuxième jour, et ne reviennent jamais.

Par induction incomplète, nous tirons la proposition suivante :

"Dans le cas où il y a n malade(s), il(s) remonte(nt) chacun dans sa (leur) cellule, le $n^{\text{ème}}$ jour, et ne revient (reviennent) jamais."

Il nous reste à démontrer que cette proposition est vraie pour tout n plus grand ou égal à un.

Commençons par démontrer l'hérédité c'est-à-dire que, pour tout k plus grand ou égal à un :

Dans le cas où il y a k malade(s), il(s) remonte(nt) chacun dans sa (leur) cellule le $k^{\text{ème}}$ jour et ne revient (reviennent) jamais.	$\Rightarrow$	Dans le cas où il y a $(k+1)$ malade(s), il(s) remonte(nt) chacun dans sa (leur) cellule le $(k+1)^{\text{ème}}$ jour et ne revient (reviennent) jamais.

Considérons un k quelconque plus grand ou égal à un. Supposons, pour ce k quelconque, la vérité de la proposition de l'encadré de gauche et démontrons celle de l'encadré de droite. Le $(k+1)^{\text{ème}}$ jour, chacun des $(k+1)$ lamas malades verra qu'il y a k malades autour de lui. Chacun de ces $(k+1)$ lamas pourrait tenir le raisonnement suivant : "s'il n'y avait eu que k lamas malades, ils seraient tous partis hier ($k^{\text{ème}}$ jour) et ne seraient donc pas présents au repas d'aujourd'hui ($(k+1)^{\text{ème}}$ jour). Cela signifie donc que je suis moi-même atteint par la maladie." Chacun de ces $(k+1)$ lamas partira donc le $(k+1)^{\text{ème}}$ jour.

Nous avons démontré deux choses :

- premièrement, que dans le cas où il y a un seul malade, celui-ci remonte dans sa cellule le premier jour.
- deuxièmement, nous avons démontré l'implication reprise ci-dessus pour tout $k \geqslant 1$.

Nous pouvons donc en conclure que la proposition "Dans le cas où il y a n malade(s), il(s) remonte(nt) chacun dans sa (leur) cellule le $n^{\text{ème}}$ jour et ne revient (reviennent) jamais." est vraie.
La réponse de cet exercice est la suivante : dix lamas manquent à l'appel au repas du $10^{\text{ème}}$ jour après l'annonce.

Objectif poursuivi : cet exercice vise à faire réfléchir sur un problème amusant qui sort un peu de l'ordinaire et qui utilise le principe de récurrence.

8.3 Conclusion

Dans ce chapitre, nous avons proposé différents exercices susceptibles d'être intégrés dans une formation. Ceux-ci visaient à mettre en évidence les éléments constitutifs d'une démonstration par récurrence de façon à aborder celle-ci au mieux dans les classes. Ces activités font écho à l'ensemble des constats établis suite à nos analyses.

Nous espérons que les enseignants pourront tirer un certain profit de ces exercices, bien que nous soyons consciente que ceux-ci devront sans doute être testés et améliorés avant de trouver place dans une formation. Nous avons ainsi répondu à la deuxième question de notre problématique de recherche.

Conclusion et perspectives

Nous avons, dans ce mémoire, brossé le panorama de la situation de l'enseignement de la démonstration par récurrence en Belgique. Une étude à caractère épistémologique, diverses investigations réalisées dans les programmes et les manuels scolaires et une enquête menée auprès d'étudiants universitaires et d'enseignants ont constitué les éléments de ce vaste tour d'horizon. Il en résulte divers constats dont nous avons émaillé ce travail et que nous reprenons en synthèse.

La compréhension de la démonstration par récurrence est souvent très partielle et imparfaite. De sa formalisation en tant qu'objet mathématique à la conception qu'en ont les étudiants aujourd'hui, les différences sont nombreuses. Quel écart entre le savoir savant et le savoir appris !

La démonstration par récurrence a mis longtemps à être reconnue par la communauté scientifique en raison de son rapport avec l'infini, notion difficilement acceptée et de sa relation avec l'induction incomplète, qui en est à l'origine. Ces difficultés d'acceptation constituent des obstacles encore perceptibles aujourd'hui en classe.
Lorsque nous consultons les programmes d'enseignement à son sujet, un constat s'impose. La démonstration par récurrence y occupe très peu de place, tantôt vue transversalement ou tout en abordant d'autres nouvelles notions. Cette situation se répercute de façon flagrante dans les manuels scolaires de niveau secondaire où elle est, de plus, présentée de manière peu rigoureuse et peu approfondie. Par une relation de cause à effet, son enseignement dans les classes s'en trouve affecté, ce qui a des répercussions sur la compréhension des élèves. A l'issue de la première année universitaire dans les sections scientifiques (mathématique et physique), la situation ne semble pas vraiment s'améliorer. Des lacunes, des erreurs de compréhension et des automatismes malheureux sont encore observés chez les étudiants et ce même si la démonstration par récurrence leur devient plus familière. En effet, nous avons pu observer dans les manuels du niveau supérieur qu'elle était souvent rappelée mais de façon peu rigoureuse, exception faite des cours spécifiques qui lui consacrent un point théorique. Nous avons ainsi répondu à la première question de notre problématique de recherche, porté un regard didactique sur la démonstration par récurrence et abouti à des constats proches de ceux tirés par Grenier suite à son analyse en France.

Dans la deuxième partie de notre travail, nous avons, très modestement, proposé des exercices destinés aux enseignants du secondaire. Ceux-ci ont été élaborés afin qu'ils puissent aborder au mieux la démonstration par récurrence en classe et ainsi en assurer une meilleure compréhension chez les élèves.

Bien que nous ayons mené une étude détaillée, nous devons, avant de mettre un point final à ce travail, envisager quelques améliorations que nous lui apporterions si nous devions le réaliser à nouveau. Un effectif plus élevé de personnes interrogées au niveau universitaire lui aurait donné plus de consistance. A ce sujet, nous nous sommes toujours gardée d'une généralisation excessive. De plus, l'élaboration d'un questionnaire adapté à des élèves de l'enseignement secondaire aurait permis de détailler davantage leur situation. La formulation maladroite de certaines questions, lors des enquêtes, ne nous a pas permis d'exploiter les informations obtenues. Certaines de nos attentes n'ont donc pas été remplies. Nous regrettons enfin de ne pas encore avoir eu l'opportunité de tester les exercices proposés dans la deuxième partie de ce travail. Cela nous aurait permis d'avoir un retour des enseignants et ainsi, de pouvoir améliorer les différentes activités.

Nous espérons que ce regard didactique porté sur la démonstration par récurrence permettra de rendre compte du fait qu'il s'agit d'un outil mathématique intéressant et indispensable sur lequel il faudrait s'arrêter davantage et ce, dès l'enseignement secondaire. Y consacrer trop peu de temps ne peut qu'engendrer des conceptions erronées difficiles à modifier.

Bibliographie

[Aristote] ARISTOTE (vers 350 ACN), *Seconds analytiques*, traduction de Tricot J., Paris, Vrin, 1966 , p. 96.

[As-Samaw'al] AS-SAMAW'AL (vers 1150), *Al-Bahir (Le livre flamboyant en Algèbre)*, traduction de S.Ahmad et R. Rashed, Damas, Imprimerie de l'Université de Damas, 1972, pp. 44, 45.

[Chevallard] CHEVALLARD Y. (1985), *La transposition didactique : du savoir savant au savoir enseigné*, Grenoble, La pensée sauvage, p. 39.

[Colomb] COLOMB J. (1986), *Notes critiques sur la transposition didactique de Chevallard*, in *Revue française de pédagogie*, numéro 76, Lyon, INPR, pp. 89-91.

[Deloustal-Jorrand] DELOUSTAL-JORRAND V. (2004), *L'implication mathématique*, Thèse de didactique des mathématiques, Université de Grenoble, 312 pages.

[Dhombres *et al.*] DHOMBRES J., DAHAN-DALMEDICO A., BKOUCHE R., HOUEL C., GUILLEMOT M. (1987), *Mathématiques au fil des âges*, Paris, Gauthier-Villars, pp. 76-77.

[Euclide I] EUCLIDE (vers 300 ACN), *Les Éléments*, neuvième notion commune, Livre I.

[Euclide VII] EUCLIDE (vers 300 ACN), *Les Éléments*, proposition 23, Livre VII.

[Euclide IX] EUCLIDE (vers 300 ACN), *Les Éléments*, proposition 20, Livre IX.

[Gasquet] GASQUET S. (1991), *Les mathématiques au lycée*, Paris, Editions ESF, p. 179.

[Grenier] GRENIER D. (2011), *Une étude didactique du concept de récurrence* in *Petit x*, numéro 88, Irem de Grenoble, pp. 27-47.

[Grenier et Fabert] GRENIER D. et FABERT C. (2011), *Une étude didactique de quelques éléments de raisonnement mathématique et de logique*, in *Petit x*, numéro 87, Irem de Grenoble, pp. 31-52.

[Hauchecorne] HAUCHECORNE B. (2003), *Les mots et les maths. Dictionnaire historique et étymologique du vocabulaire mathématique*, Paris, Ellipses, pp. 51, 102, 158, 174.

[Le Robert] LEGRAIN M. (dir. éd.) (1996), *Le Robert quotidien. Dictionnaire pratique de la langue française*, Paris, Editions Robert, pp. 512, 988, 1510, 1579, 1611.

[Merri et Pichat] MERRI M. et PICHAT M. (2007), *Psychologie de l'éducation*, Volume 1, Paris, Editions Bréal, pp. 138-140.

[Nicomaque] NICOMAQUE (vers 180 PCN), *Introduction arithmétique*, Livre I, pp. 74-76.

[Pascal] PASCAL B. (1954), *Traité du triangle arithmétique*, in *Oeuvres complètes*, Paris, Lafuma, 1963, p. 53.

[Peano] PEANO G. (1889), *Arithmetices principia, nova methodo exposita (Les principes de l'arithmétique, nouvelle méthode d'exposition)*, Turin, Bocca.

[Poincaré] POINCARE H. (1902), *La science et l'hypothèse*, Paris, Flammarion, 1968, pp. 38, 39, 42.

[Popper] POPPER K. (1935), *La logique de la découverte scientifique*, Paris, Editions Payot, 2007, p. 23.

[Rashed] RASHED R. (1984), *Entre Arithmétique et Algèbre*, Paris, Les Belles Lettres, p. 91.

[Romainville] ROMAINVILLE M. (2013), *Education scolaire et société*, Cours donné à l'Université de Namur, p. 34.

[Verret] VERRET M. (1975), *Le temps des études*, Paris, Librairie Honoré Champion, p. 140.

[Vidal] VIDAL R. (2005), *Etude historique et critique de méthodes de démonstration en arithmétique*, Thèse de doctorat en philosophie, Université de Lyon, 332 pages.

• **Sites internet consultés**

[Aloui] ALOUI M. (2005), *Les concepts didactiques*, extrait du master soutenu à l'ISEFC en cocutelle avec l'Université de Lyon, [en ligne], <`www.svt.edunet.tn/nabeul/svtna05/telechargement/les_concepts_dd.pdf`>, p. 1, le 3 juillet 2013.

[Bouffard] BOUFFARD N. (2013), *Chapitre 1 : Méthode de preuve*, notes de cours de l'Université de Boniface, [en ligne], <`http://www.nicolasbouffard.ca/Year-2012-2013/MATH-1191/chap1-PPT.pdf`>, pp. 3, 8, le 10 juillet 2013.

[Bourdier] BOURDIER T. (2009), *Mathématiques discrètes 1 et informatique théorique*, notes de cours de l'Ecole supérieure de Lorraine, [en ligne], <`www.tony-bourdier.fr/docs.php?id=MathsDiscretes1.pdf`>, pp. 9-11, le 1er Juillet 2013.

[Forum sciences] ANONYME (2008), *Preuve et démonstration, y-a-t-il une différence ?*, [en ligne], <`http://forums.futura-sciences.com/mathematiques-college-lycee/244277-preuve-demonstration-y-a-til-une-difference.html`>, le 10 juillet 2013.

[Franquin] FRANQUIN A. (2001), *Idées noires - Il ne faut pas confondre pâle capitaine et peine capitale*, Paris, Audie, planche 13, [en ligne], <`http://www.philo5.com/Rire/Franquin_PeineDeMort.htm`>, le 10 août 2013.

[Gingras] GINGRAS L. (2013), *L'infini, c'est long surtout vers la fin...*, notes de cours du Collège Cegep de Saite-Foy, [en ligne], <www.cegep-ste-foy.qc.ca/profs/lgingras/documents/infini.pdf>, p. 1, le 10 juillet 2013.

[Magnard] MAGNARD P. (dir.) (2013) , Image tirée de : *Cours de mathématiques terminales S. Le raisonnement par récurrence*, [en ligne], <http://www.maxicours.com/se/fiche/1/7/418771.html/ts>, le 27 juin 2013.

[Maillard] MAILLARD C. (2011), Image tirée de : *La gestion mentale*, [en ligne], <www.catherine-maillard.com>, le 7 juillet 2013.

[Parmentier] PARMENTIER S. (2009), *Leçon 2 : Euclide, Bézout et Gauss*, notes de cours de l'Université de Lyon, [en ligne], <http://licence-math.univ-lyon1.fr/lib/exe/fetch.php?media=a10:algebrei:math1l2.pdf>, p. 1, le 5 juin 2013.

[Perrin] PERRIN D. (vers 2006), *Entiers naturels et relatifs*, [en ligne], <www.math.u-psud.fr/~perrin/CAPES/arithmetique/EntiersCAPES.pdf>, p. 1, le 26 juin 2013.

[Romain] ROMAIN P. (2010), *Quelques démonstrations par induction (ou récurrence)*, notes de cours de l'Université Libre de Bruxelles, [en ligne], <www.ulb.ac.be/soco/matsch/math/download/gui_induction.doc>, le 11 août 2013.

[Roussot] ROUSSOT (2013), *Devoir maison 1 : suites et probabilités*, notes de cours de l'Ecole René Cassin de Versailles, [en ligne], <www.lyc-cassin-gonesse.ac-versailles.fr/IMG/DM1_suites.pdf?>, p. 2, le 21 juillet 2013.

[Site du Cefa] (2010), ANONYME, Image tirée de : *Tableau comparatif des systèmes d'éducation de l'enseignement primaire et secondaire*, [en ligne], <www.cefaitela.be/IMG/pdf/tabelau_bel-lux-_france_2010_vers4.pdf?>, le 23 juillet 2013.

[Site Segec], ANONYME (2013), *En Communauté française*, [en ligne], <http://enseignement.catholique.be/segec/index.php?id=39>, le 7 juillet 2013.

[Site UNamur (Algèbre)] ANONYME (2012), *Annuaire des études de l'UNamur - Algèbre*, [en ligne], <http://directory.unamur.be/teaching/courses/INFOB123/2013>, le 23 juillet 2013.

[Site UNamur (IDM)] ANONYME (2012), *Annuaire des études de l'UNamur - Initiation à la démarche mathématique*, [en ligne], <http://directory.unamur.be/teaching/courses/SMATB112>, le 23 Juillet 2013.

[Vacca] VACCA G. (1911), *Sur le principe d'induction mathématique*, in *Revue de métaphysique et de morale*, numéro 19, Paris, [en ligne], <http://gallica.bnf.fr/ark:/12148/bpt6k111193>, pp. 30-33, le 10 août 2013.

• **Manuels d'enseignement, décret et programmes consultés**

[Adam et Lousberg] ADAM A. et LOUSBERG F. (2004), *Espace math 6*, Tome 2, Bruxelles, De Boeck, pp. 228-230.

[Defeld *et al.*] DEFELD H., T'KINDT-DEMULDER I., SEVRIN N., TIMMERMANS M. (2009), *Actimath 6. Mathématiques générales (Géométrie analytique-Analyse combinatoire-Probabilités-Statistique)*, Wavre, Van In, pp. 146, 147.

[Dupont] DUPONT P. (2003), *Exercices de mathématiques pour le premier cycle. Algèbre et géométrie*, Volume 1, Bruxelles, De Boeck, pp. 7, 13, 28, 29, 30.

[Thiry] THIRY S. (2007), *Initiation à la démarche mathématique*, notes de cours de l'Université de Namur (étudiants de $1^{\text{ère}}$ bac en sciences mathématiques), Namur, Librairie des sciences, pp. 104-113 et pp. 74, 75.

[Sartenaer] SARTENAER A. (2013), *Algèbre ($1^{\text{ère}}$ partie)*, notes de cours de l'Université de Namur (étudiants de $1^{\text{ère}}$ bac en informatique), Namur, Librairie des sciences, [en ligne], <`http://webcampus.fundp.ac.be/claroline/course/index.php?cid=INFOB123`>, pp. 18, 19, le 23 juillet 2013.

[Décret Missions] Communauté française de Belgique (1997), *Décret définissant les missions prioritaires de l'enseignement fondamental et de l'enseignement secondaire et organisant les structures propres à les atteindre*, dernièrement modifié le 30 août 2012, [en ligne], <`http://www.gallilex.cfwb.be/fr/leg_res_01.php?ncda=21557&referant=l01`>, le 7 juillet 2013.

[Compétences terminales gén.] Ministère de la Communauté française (1999), *Compétences terminales et savoirs requis en mathématiques-Humanités générales et technologiques*, [en ligne], <`http://www.enseignement.be/index.php?page=25189&navi=296`>, le 7 juillet 2013.

[Compétences terminales tech.] Ministère de la Communauté française (2000), Compétences terminales et savoirs communs en mathématiques-Humanités professionnelles et techniques, [en ligne], <`http://www.enseignement.be/index.php?page=25189&navi=296`>, le 7 juillet 2013.

[Prog. Officiel 1] Programme de l'enseignement officiel organisé par la Communauté française (2000), *Mathématiques du $2^{\text{ème degré}}$-Humanités générales et technologiques*, Ref. 39/2000/240, [en ligne], <`http://www.restode.cfwb.be/pgres/programmes/secd2_TT1.htm`>, le 7 juillet 2013.

[Prog. Officiel 2] Programme de l'enseignement officiel organisé par la Communauté française (2000), *Mathématiques du $3^{\text{ème degré}}$-Humanités générales et technologiques*, Ref. 40/2000/240, [en ligne], <`http://www.restode.cfwb.be/pgres/programmes/2d3trans1.htm`>, le 7 juillet 2013.

[Prog. Officiel 3] Programme de l'enseignement officiel organisé par la Communauté française (2004), *Mathématiques du $2^{\text{ème degré}}$-Technique de qualification*, Ref. 226/2004/248B , [en ligne], <`http://www.restode.cfwb.be/pgres/programmes/secd2_TQ1.htm`>, le 7 juillet 2013.

[Prog. Officiel 4] Programme de l'enseignement officiel organisé par la Communauté française (2004), *Mathématiques du 3$^{\text{ème degré}}$-Technique de qualification*, Ref. 114/2004/248B , [en ligne], <http://www.restode.cfwb.be/pgres/programmes/2d3qual.htm>, le 7 juillet 2013.

[Prog. Segec 1] Programme de l'enseignement catholique (Segec) (2008), *Mathématiques du 3$^{\text{ème}}$ degré-Humanités générales et technologiques*, Ref. D/2008/7362/3/39, [en ligne], <admin.segec.be/documents/4473.pdf?>, le 7 juillet 2013.

[Prog. Segec 2] Programme de l'enseignement catholique (Segec) (2008), *Mathématiques du 2$^{\text{ème degré}}$-Humanités générales et technologiques*, Ref. D/2008/7362/3/38, [en ligne], <admin.segec.be/documents/4472.pdf>, le 7 juillet 2013.

[Prog. Segec 3] Programme de l'enseignement catholique (Segec) (2004), *Mathématiques du 3$^{\text{ème degré}}$-Technique de qualification-Cours à 2 périodes par semaine*, Ref. D/2004/7362/3/16b, [en ligne], <admin.segec.be/documents/4286.pdf>, le 7 juillet 2013.

[Prog. Segec 4] Programme de l'enseignement catholique (Segec) (2004), *Mathématiques du 3$^{\text{ème degré}}$Technique de qualification-Cours à 4 périodes par semaine*, Ref. D/2004/7362/3/16a , [en ligne], <admin.segec.be/documents/4285.pdf?>, le 7 juillet 2013.

[Prog. Segec 5] Programme de l'enseignement catholique (Segec) (2002), *Mathématiques du 2$^{\text{ème degré}}$-Technique de qualification*, Ref. D/2002/7362/3117 , [en ligne], <admin.segec.be/documents/4156.pdf>, le 7 juillet 2013.

[Prog. Première S] Programme du Ministère de l'éducation nationale (2010), *Enseignement spécifique de mathématiques en classe de première de la série scientifique*, [en ligne], <http://www.education.gouv.fr/cid53326/mene1019634a.html>, le 23 juillet 2013.

[Prog. Seconde] Programme du Ministère de l'éducation nationale (2009), *Enseignement de mathématiques de la classe de seconde générale et technologique*, [en ligne], <http://www.education.gouv.fr/cid28928/mene0913405a.html>, le 23 juillet 2013.

[Prog. Terminale S] Programme du Ministère de l'éducation nationale (2011), *Enseignement spécifique et de spécialité de mathématiques de la série scientifique - classe terminale*, [en ligne], <http://www.education.gouv.fr/pid25535/bulletin_officiel.html?cid_bo=57529>, le 23 juillet 2013.

Annexe A

Le principe de récurrence en bande dessinée

Figure A.1 – Principe de récurrence en bande dessinée, extrait de (Franquin, 2001)

Annexe B

Extraits du manuel Espace Math 6

Les propriétés suivantes permettront de construire le triangle de Pascal de manière indépendante du développement de $(x+y)^n$.

PROPRIÉTÉS

$\boxed{1}$ $\forall n \in \mathbb{N}: \quad C_n^0 = 1\,,\ C_n^1 = n.$

En effet, $C_n^0 = \dfrac{n!}{0!\,n!} = 1$ et $C_n^1 = \dfrac{n!}{1!\,(n-1)!} = n.$

$\boxed{2}$ $\forall n, p \in \mathbb{N}, \quad$ si $p \leqslant n, \quad$ alors $C_n^p = C_n^{n-p}.$

En effet, $C_n^{n-p} = \dfrac{n!}{(n-p)!\,[n-(n-p)]!} = \dfrac{n!}{(n-p)!\,p!} = C_n^p.$

$\boxed{3}$ $\forall n, p \in \mathbb{N}, \quad$ si $p \leqslant n, \quad$ alors $C_{n+1}^{p+1} = C_n^p + C_n^{p+1}.$

En effet,
$$
\begin{aligned}
C_n^p + C_n^{p+1} &= \frac{n!}{p!\,(n-p)!} + \frac{n!}{(p+1)!\,(n-p-1)!} && \text{(mise au même dénominateur)}\\
&= \frac{n!\,(p+1) + n!\,(n-p)}{(p+1)!\,(n-p)!} && \text{(mise en évidence de n !)}\\
&= \frac{n!\,(p+1+n-p)}{(p+1)!\,(n-p)!}\\
&= \frac{n!\,(n+1)}{(p+1)!\,(n-p)!} && \big(n-p=(n+1)-(p+1)\big)\\
&= \frac{(n+1)!}{(p+1)!\,[(n-1)-(p+1)]!} = C_{n+1}^{p+1}.
\end{aligned}
$$

EXEMPLE

Grâce aux propriétés précédentes, on peut construire une ligne du triangle de Pascal au départ de la précédente :

propriété $\boxed{3}$

$n=4$	$\boxed{1}$ + $\boxed{4}$	6	4	1			
$n=5$	1	$\boxed{5}$	$\boxed{10}$ + $\boxed{10}$	5	1		
$n=6$	1	6	15	$\boxed{20}$	15	6	1

etc …

propriété $\boxed{1}$ propriété $\boxed{2}$ propriété $\boxed{1}$

2. BINÔME DE NEWTON

PROPRIÉTÉ

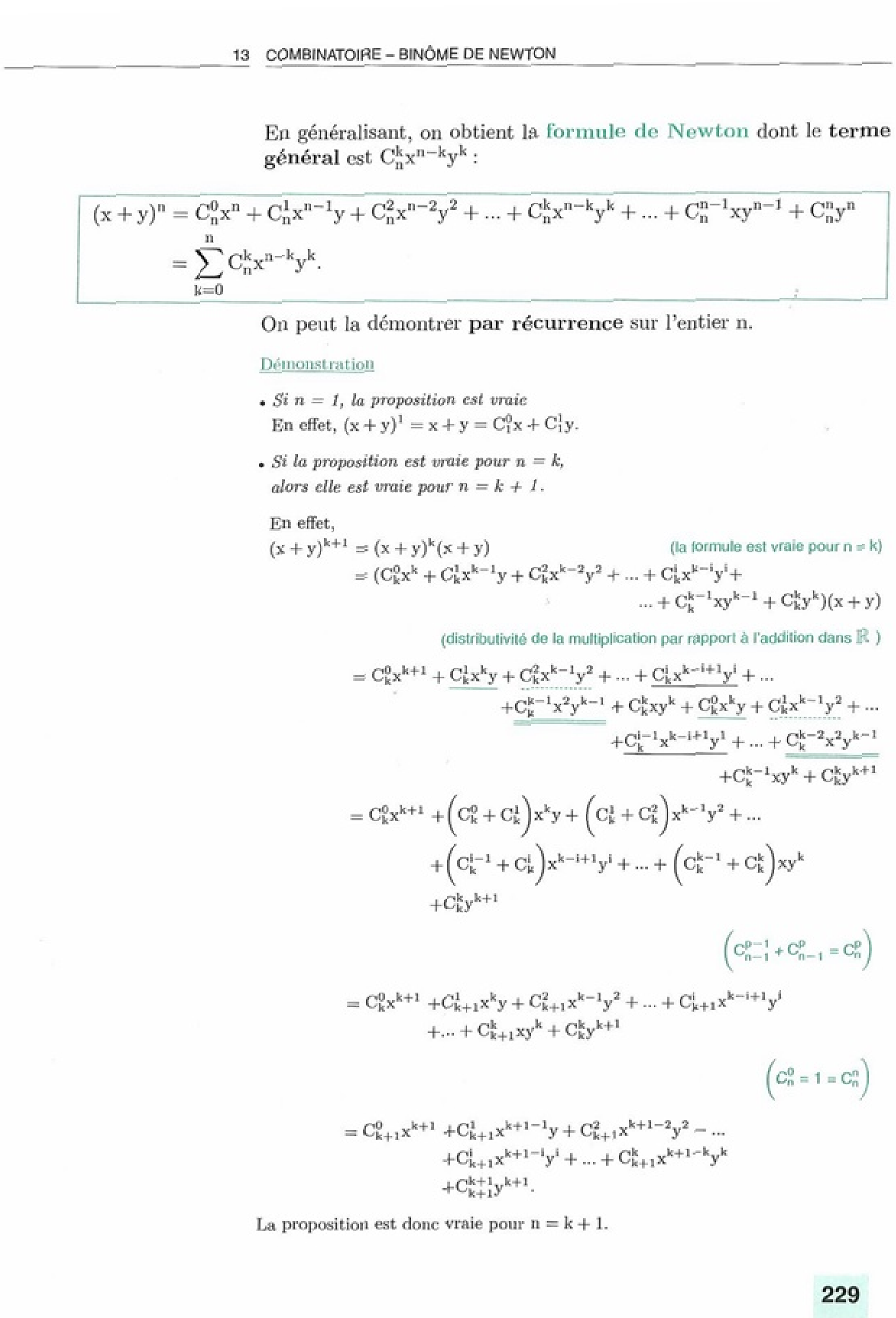
On peut observer (en **1.**) qu'en développant $(x+y)^2, (x+y)^3, (x+y)^4$, on obtient un **polynôme** dont

– tous les termes sont (respectivement) de degré 2, 3 ou 4 par rapport à x ou y;

– les puissances de x sont ordonnées de manière décroissante,

– les puissances de y sont ordonnées de manière croissante.

FIGURE B.1 – Extrait (1) du manuel Espace Math 6 (Adam et Lousberg, 2004, p. 228)



13 COMBINATOIRE – BINÔME DE NEWTON

En généralisant, on obtient la formule de Newton dont le **terme général** est $C_n^k x^{n-k} y^k$:

$$\begin{aligned}(x+y)^n &= C_n^0 x^n + C_n^1 x^{n-1} y + C_n^2 x^{n-2} y^2 + \dots + C_n^k x^{n-k} y^k + \dots + C_n^{n-1} x y^{n-1} + C_n^n y^n \\ &= \sum_{k=0}^{n} C_n^k x^{n-k} y^k.\end{aligned}$$

On peut la démontrer **par récurrence** sur l'entier n.

Démonstration

- *Si n = 1, la proposition est vraie*
  En effet, $(x+y)^1 = x + y = C_1^0 x + C_1^1 y$.
- *Si la proposition est vraie pour n = k, alors elle est vraie pour n = k + 1.*

En effet,

$$\begin{aligned}(x+y)^{k+1} &= (x+y)^k (x+y) \qquad \text{(la formule est vraie pour } n = k\text{)} \\ &= (C_k^0 x^k + C_k^1 x^{k-1} y + C_k^2 x^{k-2} y^2 + \dots + C_k^i x^{k-i} y^i + \\ &\qquad \dots + C_k^{k-1} x y^{k-1} + C_k^k y^k)(x+y)\end{aligned}$$

(distributivité de la multiplication par rapport à l'addition dans $\mathbb{R}$)

$$\begin{aligned}&= C_k^0 x^{k+1} + C_k^1 x^k y + C_k^2 x^{k-1} y^2 + \dots + C_k^i x^{k-i+1} y^i + \dots \\ &\qquad + C_k^{k-1} x^2 y^{k-1} + C_k^k x y^k + C_k^0 x^k y + C_k^1 x^{k-1} y^2 + \dots \\ &\qquad + C_k^{i-1} x^{k-i+1} y^i + \dots + C_k^{k-2} x^2 y^{k-1} \\ &\qquad + C_k^{k-1} x y^k + C_k^k y^{k+1} \\ &= C_k^0 x^{k+1} + \left(C_k^0 + C_k^1\right) x^k y + \left(C_k^1 + C_k^2\right) x^{k-1} y^2 + \dots \\ &\qquad + \left(C_k^{i-1} + C_k^i\right) x^{k-i+1} y^i + \dots + \left(C_k^{k-1} + C_k^k\right) x y^k \\ &\qquad + C_k^k y^{k+1}\end{aligned}$$

$\left(C_{n-1}^{p-1} + C_{n-1}^p = C_n^p\right)$

$$\begin{aligned}&= C_k^0 x^{k+1} + C_{k+1}^1 x^k y + C_{k+1}^2 x^{k-1} y^2 + \dots + C_{k+1}^i x^{k-i+1} y^i \\ &\qquad + \dots + C_{k+1}^k x y^k + C_k^k y^{k+1}\end{aligned}$$

$\left(C_n^0 = 1 = C_n^n\right)$

$$\begin{aligned}&= C_{k+1}^0 x^{k+1} + C_{k+1}^1 x^{k+1-1} y + C_{k+1}^2 x^{k+1-2} y^2 + \dots \\ &\qquad + C_{k+1}^i x^{k+1-i} y^i + \dots + C_{k+1}^k x^{k+1-k} y^k \\ &\qquad + C_{k+1}^{k+1} y^{k+1}.\end{aligned}$$

La proposition est donc vraie pour $n = k + 1$.

229

FIGURE B.2 – Extrait (2) du manuel Espace Math 6 (Adam et Lousberg, 2004, p. 229)